

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación



Aprendizaje de área y perímetro de la circunferencia por medio de actividades de estudio y de investigación en estudiantes de séptimo básico de la Región Metropolitana

Carolina Denisse Espinoza Martínez

Profesor(a) Guía:

Lorena Espinoza Salfate

**Proyecto de Título para optar al Magíster en Educación
Matemática**

Santiago-Chile

2025

RESUMEN

Este trabajo de investigación se fundamenta en la búsqueda de aminorar las dificultades en el aprendizaje de los elementos que componen y caracterizan a la circunferencia. Para poder contribuir a la solución de esta problemática se ha diseñado, aplicado y analizado los resultados de una secuencia de aprendizaje que se apoya en actividades de estudio y de investigación, de modo que las y los estudiantes construyan su conocimiento a partir de la búsqueda de respuestas a cuestionamientos referentes al objeto matemático.

La secuencia de aprendizaje mencionada, consta de cuatro etapas que fueron aplicadas a un grupo de estudiantes de séptimo básico de un establecimiento educacional de la Región Metropolitana, los resultados permitieron constatar un avance en la construcción del sentido y significado del área y el perímetro de la circunferencia, destacando la construcción de los elementos de la circunferencia, un avance en el desarrollo de resolución de ecuaciones para establecer las fórmulas del perímetro y el área, evidenciando un aumento en el uso del lenguaje matemático. El tránsito por la secuencia permitió observar un cambio en el rol de las y los estudiantes dejando de ser replicadores de los contenidos expuestos por el docente para convertirse en constructores de su conocimiento, lo que permite establecer que el tránsito de lo lineal a lo curvo genera obstáculos al momento de adquirir el conocimiento geométrico relacionado con la circunferencia.

Palabras claves: Aprendizaje, secuencia didáctica, actividades de estudio y de investigación, circunferencia.

ABSTRACT

This research project is based on the quest to reduce the difficulties in learning the elements that comprise and characterize the circumference. To solve this problem, a teaching sequence was constructed, implemented, and analyzed based on study and research activities. This approach allows students to construct knowledge by searching for answers to questions related to build mathematical knowledge.

The teaching sequence consists of four stages that were applied to a group of seventh grade students from an educational establishment in the Metropolitan Region. The results allowed us to verify a progress in the construction of the sense and meaning of the area and perimeter of the circumference, highlighting the construction of the elements of the circumference, an advance in the development of solving equations to establish the formulas for the perimeter and the area, evidencing an increase in the use of mathematical language. The transition through the sequence allowed us to observe a change in the role of the students, ceasing to be replicators of the contents presented by the teacher to become builders of their own knowledge, and showed that the transition from linear to curved generates obstacles when acquiring geometric knowledge.

Keywords: Learning, teaching sequence, study and research activities, circumference.

Agradecimientos

Agradezco a los profesores del magíster que me apoyaron en este proceso compartiendo sus conocimientos y motivándome a seguir cuando todo se volvió cuesta arriba; la profesora Lorena Espinoza, a la profesora Rosa Montaña y al profesor Carlos Vanegas.

A las mujeres que permitieron que esta investigación fuera posible: Lorena Jiménez, Leticia Arellano y Eugenia Campos, quienes nunca pusieron en duda mis capacidades para finalizar esta etapa.

A mis queridas compañeras que acompañaron el proceso con las mejores conversaciones; Camila Molina, Katherine Escalona, Pamela Valenzuela, Massiel Castillo y Lorena Riveros.

A los estudiantes que participaron en este proyecto, demostrando su apoyo en cada una de mis clases, pero también su profundo interés por aprender a través de experiencias en donde sus ideas fueron relevantes y creadoras de conocimiento.

A quienes han sido mi pilar y la motivación para realizar este postgrado; Eliseo Barahona, y a quien endulza nuestras vidas Begoña Barahona.

Tabla de Contenidos

RESUMEN.....	1
ABSTRACT	2
INTRODUCCIÓN	7
1 CAPÍTULO: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	13
1.1 Enseñanza y aprendizaje de la Circunferencia	13
1.2 Pregunta de investigación.....	19
1.3 Objetivos	24
2 CAPÍTULO: MARCO TEÓRICO	25
2.1 Actividades de Estudio y de Investigación	26
2.2 Circunferencia	32
3 CAPÍTULO: MARCO METODOLÓGICO	47
3.1 Tipo de Investigación	47
3.2 Diseño de la investigación.....	47
3.3 Fases de la investigación	49
3.4 Muestra.....	50
3.5 Instrumento.....	53
4 CAPÍTULO: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	82
4.1 Actividad Diagnóstica	83
4.2 Etapa 1: Elementos de la circunferencia	99
4.3 Etapa 2: Perímetro de la circunferencia	117
4.4 Etapa 3: Área de la circunferencia	130
4.5 Etapa 4: Relación entre área y perímetro de la circunferencia.....	144
4.6 Actividad Diagnóstica segunda aplicación	159
5 CAPÍTULO: CONCLUSIONES Y DISCUSIONES.....	166
REFERENCIAS	175
ANEXOS.....	180

Índice de Ilustraciones

Imagen 1.2: Ejercicio que involucra la circunferencia.....	15
Imagen 1.3: Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica	18
Imagen 2.1: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro y radio	33
Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio	33
Imagen 2.3: definición de circunferencia y el centro	34
Imagen 2.4: definición de circunferencia y círculo	34
Imagen 2.5 : definición de elementos de la circunferencia	35
Imagen 2.1: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro y radio	36
Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio	36
Imagen 2.5: definición de elementos de la circunferencia	38
Imagen 2.6: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro	39
Imagen 2.7: definición número PI.....	41
Imagen 2.8: definición del área de la circunferencia	42
Imagen 2.9: definición área de un círculo	43
Imagen 2.10: fórmula perímetro de la circunferencia	43
Imagen 2.11: aplicación fórmula perímetro de la circunferencia.....	44
Imagen 2.12: Teorema y demostración del área de la circunferencia	45
Imagen 3.1: Diseño de tareas basado en la TAD	48
Imagen 3.2: Etapas de la secuencia de aprendizaje.....	54
Imagen 3.3: Secuencia de aprendizaje de la circunferencia.....	57
Imagen 4.2: Respuesta actividad 1, estudiante 1.....	83
Imagen 4.3: Respuesta actividad 1, estudiante número 2	84
Imagen 4.4: respuesta de la actividad 2 de estudiante n°24	87
Imagen 4.5: Respuesta a la actividad de 3 del estudiante n°18.....	90
Imagen 4.6: Respuesta a la actividad de 4 del estudiante n°23.....	93
Imagen 4.7: Respuestas de un estudiante para la actividad 5.....	96
Figura 4.1: Respuesta grupo 7 a la definición de diámetro.....	113
Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio	115
Imagen 4.8: Imágenes de la actividad realizada por diferentes estudiantes.....	120
Imagen 4.9: Respuesta corregida del grupo 1	122

Imagen 4.10: Respuestas grupo 2.....	123
Imagen 4.11: Resultados de la actividad realizada por 2 grupos.	133
Imagen 4.12: construcciones de algunos grupos.	135
Imagen 4.13: dibujo del triángulo con su base y altura, representando el triángulo de lana	138
Imagen 4.14: reproducción de lo escrito en la pizarra por uno de los grupos.....	140
Imagen 4.16 Material concreto utilizado en la cuarta parte de la secuencia.	147
Imagen 4.15: gallinero circular representado por un estudiante del curso.	153

Índice de Tablas

Tabla 1.1: Objetivos de aprendizaje que involucran círculo previo a 7° básico	14
Tabla 1.2: Objetivo de aprendizaje que involucran círculo posterior a 7° básico.	16
Tabla 2.1: Definición de diámetro de Baldor et al. (2004) y Carreño y Cruz (2007)	37
Tabla 2.2: Definición de π de Baldor et al. (2004) e Iturra et al. (2024).....	40
Tabla 3.1: Fases de la investigación:	49
Tabla 3.2: Indicadores para la actividad diagnóstica	58
Tabla 3.3: Indicadores para etapa 1.....	62
Tabla 3.4: Indicadores para etapa 2.....	67
Tabla 3.5: Indicadores para etapa 3.....	69
Tabla 3.6: Indicadores para etapa 4.....	74
Tabla 4.1: Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 1	85
Tabla 4.2: Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 2	87
Tabla 4.3: Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 3.....	90
Tabla 4.4 Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 4	94
Tabla 4.5: Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 5.....	97
Tabla 4.6: Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 1 de la secuencia	101
Tabla 4.7: Respuestas de los estudiantes para la sección 2, etapa 1 de la secuencia	104
Tabla 4.8: Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 1 de la secuencia	108
Tabla 4.9: Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 1 de la secuencia	111
Tabla 4.10: Respuestas de los estudiantes para la sección 5, etapa 1 de la secuencia	114
Tabla 4.11: Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 2 de la secuencia	119
Tabla 4.12: Respuestas de los estudiantes para la sección 2, etapa 2 de la secuencia	121
Tabla 4.13: Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 2 de la secuencia	124
Tabla 4.14: Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 2 de la secuencia	128
Tabla 4.15: Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 3 de la secuencia	131
Tabla 4.16: Respuestas para la pregunta 1 de la sección 2, etapa 3 de la secuencia.....	134
Tabla 4.17: Respuestas para la pregunta 2 y 3 de la sección 2, etapa 3 de la secuencia	136
Tabla 4.18: Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 3 de la secuencia	139
Tabla 4.19: Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 3 de la secuencia	142
Tabla 4.20: Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 4 de la secuencia	145

Tabla 4.21 Respuestas la pregunta 1 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia:	148
Tabla 4.22: Respuestas para las preguntas 2 y 3 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia.....	150
Tabla 4.23: Respuestas para las preguntas 4 y 5 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia.....	152
Tabla 4.24: Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 4 de la secuencia	154
Tabla 4.25: Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 4 de la secuencia	157
Tabla 4.26 Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 3, segunda aplicación.....	161
Tabla 4.27 Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 5, segunda aplicación.....	164

INTRODUCCIÓN

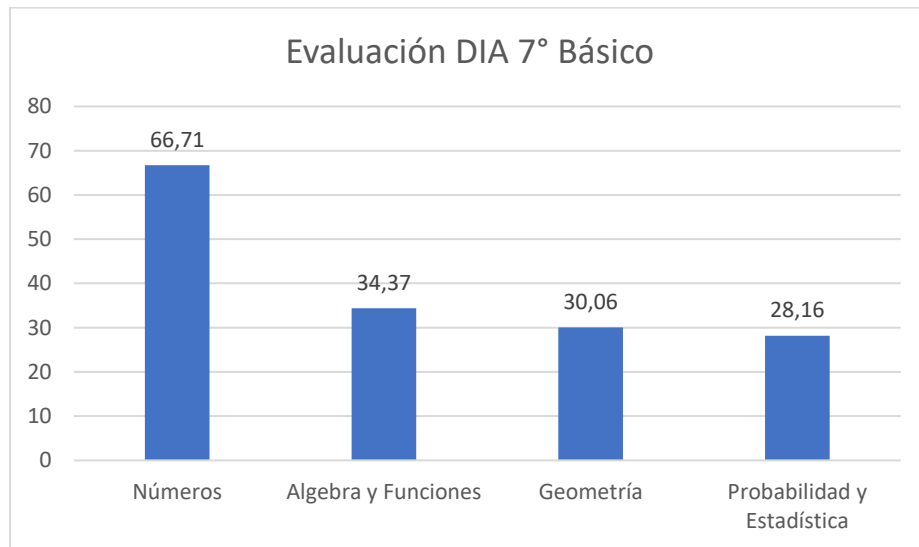
En Chile, durante años se ha aplicado la evaluación SIMCE, que corresponde a la abreviatura para Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, esta corresponde a una evaluación escrita individual, estandarizada y aplicada anualmente a todos los colegios del país con el objetivo de conocer los logros de aprendizaje de las y los estudiantes, en diversos niveles y en algunas asignaturas, entre ellas, matemática (Agencia de la calidad de la educación, 2024a). La aplicación de estas pruebas ha llevado a los establecimientos educacionales a modificar sus métodos de enseñanza en torno a la mejora de estas evaluaciones, afectando la labor de los docentes y en consecuencia al aprendizaje de las y los alumnos (Ruminot, 2017).

Ruminot (2017) indica que se presenta una dificultad en el aprendizaje de la geometría debido a lo problemático que resulta para los profesores chilenos enseñarla, enmarcados principalmente en obtener mejores resultados en SIMCE, esto lleva a que sus prácticas pedagógicas carezcan de exploración e interés por parte de las y los estudiantes y se limiten a ser, en su mayoría, expositivas sin considerar el entorno ni la diversidad del grupo curso.

Por otro lado, Vargas y Gamboa (2012) destacan que la importancia de aprender geometría radica en que es un lenguaje que modela nuestra realidad y que ha acompañado a lo largo de la historia al desarrollo del ser humano. Sin embargo, aún con la importancia otorgada se presentan resultados insuficientes en evaluaciones estandarizadas nacionales e internacionales, relacionadas con procesos geométricos que involucran resolución de problemas, argumentación y deducción (Aravena y Caamaño, 2013).

Durante la pandemia del año 2020 se cerraron las escuelas con el objetivo de mitigar la propagación del virus Covid-19 lo que evidenció las brechas tecnológicas de los distintos hogares

y, con ello, un bajo nivel de aprendizaje y desarrollo de las habilidades escolares (Ministerio de Educación, 2020). Con la reapertura de los establecimientos educativos, se estableció la evaluación DIA, evaluación diagnóstica de aprendizajes, con el objetivo de entregar información respecto a los aprendizajes de las y los estudiantes para que los docentes y directivos puedan planificar el año escolar (Agencia de la calidad de la educación, 2024b). El gráfico siguiente, muestra los porcentajes de logro obtenidos el año 2022 por estudiantes de séptimo básico provenientes seis colegios de la Región metropolitana, con administración municipal y con subvención estatal.



Porcentaje promedio de respuestas correctas de 234 estudiantes de séptimo año básico según eje temático. Fuente: Resultados Evaluación DIA final Matemática, 2022.

El gráfico presenta el porcentaje promedio de respuestas correctas en cada eje temático de 234 estudiantes. En particular, el eje de geometría para séptimo año básico cuenta con un 80% de preguntas que hacen referencia a los conocimientos y habilidades relacionados con el círculo y la circunferencia. Por lo tanto, se puede establecer que las y los estudiantes no han logrado adquirir los conocimientos y habilidades que corresponden al objeto geométrico.

Es importante que las y los estudiantes adquieran conocimientos y habilidades que competen al área de la geometría por su uso en la vida diaria y su extensión a otras áreas del

conocimiento, por ello este trabajo de investigación se centrará en el aprendizaje de la circunferencia y el círculo; en particular en área y perímetro, puesto que como indican Aravena y Caamaño (2013), este tópico presenta situaciones en las cuales las y los estudiantes deben resolver problemas y argumentar sus respuestas, pero no se han obtenido resultados satisfactorios en ello.

Esta investigación consta de cinco capítulos en los cuales se desarrollan aspectos teóricos y metodológicos, así como también, el proceso de construcción de la secuencia de aprendizaje, su aplicación y posterior análisis de los resultados de su implementación en el aula. Ello nos permite obtener las conclusiones del estudio, determinar sus contribuciones y alcances, así como también posibles proyecciones.

En el capítulo 1, se presenta la problemática que incentivó la investigación, específicamente relacionado con el proceso de aprendizaje de la circunferencia y sus características esenciales. En él se describe el proceso realizado para lograr identificar y formular la pregunta de investigación del estudio, así como los objetivos propuestos para responder a la pregunta, y, en consecuencia, la necesidad de construir una secuencia de aprendizaje que pretende otorgar una solución a la problemática.

El capítulo 2 corresponde al marco teórico de la investigación; en donde se desarrollan los aspectos teóricos de la investigación que servirán como base conceptual e instrumental para la creación y experimentación de la secuencia de aprendizaje. En este capítulo también se contemplan los recursos literarios consultados para la creación de la secuencia didáctica.

En el capítulo 3 se presenta el marco metodológico propuesto para realizar la investigación, estableciendo que este estudio corresponde a una investigación cualitativa con alcance descriptivo, ya que busca caracterizar el proceso de aprendizaje de las y los estudiantes. El capítulo está

constituido por el diseño de investigación, definición de la muestra y metodología para la construcción de los instrumentos.

Los resultados de la investigación, que corresponden al análisis de la implementación de la secuencia de aprendizaje se presentan en el cuarto capítulo. En él se exponen las preguntas, respuestas y observaciones que se realizaron durante la implementación de la actividad diagnóstica y los instrumentos de la secuencia de aprendizaje.

En el último capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, estableciendo los aportes, dificultades y sugerencias para ajustar el diseño de la secuencia de aprendizaje para una nueva aplicación.

1 CAPÍTULO: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se enfoca en la geometría debido a que “la geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad.” (Vargas y Gamboa, 2012, p.75). Además, Vargas y Gamboa (2012) indican que la geometría permite a las y los estudiantes desarrollar habilidades necesarias para otras áreas de la matemática, por ello se vuelve imprescindible que comprendan los diversos conceptos geométricos que se presentan en cada nivel de enseñanza escolar. Coinciden en que la enseñanza de la geometría debe realizarse a través de actividades prácticas, al igual que Fabres (2016) quien expresa que la geometría se asocia a diversas ciencias y para que las y los estudiantes se interesen en ella es necesario que puedan experimentar con materiales concretos de manera que se estructure una secuencia “de acuerdo con el desarrollo intelectual de los alumnos” (p. 88).

1.1 Enseñanza y aprendizaje de la Circunferencia

Durante los primeros años de la enseñanza escolar, las y los estudiantes se relacionan con el círculo, utilizándolo como figura geométrica plana y la manipulan según el objetivo de aprendizaje establecido en los planes y programas propuestos por el ministerio de educación chileno (2016). La tabla que se presenta a continuación (tabla 1.1), presenta los objetivos de aprendizaje en los que los alumnos manipulan círculos durante la enseñanza básica entre primer año básico y sexto año básico.

Es importante mencionar que los objetivos de aprendizaje que se presentan corresponden a los Aprendizaje Basales de la priorización curricular propuesta por el Ministerio de Educación el

año 2023 posterior a la pandemia por Covid-19 con el fin de nivelar los aprendizajes de los estudiantes (Ministerio de Educación, 2023).

Tabla 1.1

Objetivos de aprendizaje que involucran círculo previo a 7° básico.

Nivel	Objetivos de Aprendizaje relacionado con el círculo
1° Básico	OA 14: Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto.
2° Básico	OA15: Describir, comparar y construir figuras 2D (triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto.
3° Básico	No presenta objetivos de aprendizaje relacionados
4° Básico	OA 17: Demostrar que comprenden una línea de simetría: identificando figuras simétricas 2D creando figuras simétricas 2D dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2D usando software geométrico
5° Básico	No presenta objetivos de aprendizaje, pero utiliza el círculo para realizar patrones.
6° Básico	No presenta objetivos de aprendizaje relacionados

Fuente: Ministerio de Educación, 2023. Elaboración propia.

En la tabla anterior, se puede suponer que las y los estudiantes utilizan el círculo en diversos niveles, pero no se profundiza en su construcción geométrica ni en los elementos que lo componen. Durante el tránsito por sus primeros años escolares se establece, según el currículum, que en primero básico reconocen el círculo en objetos de su entorno y de su vida cotidiana y lo construyen con material concreto, en segundo básico se comparan medidas de segmentos rectos y miden usando regla por lo que solo se define el círculo como una figura que no posee segmentos rectos, como lo muestra la imagen 1.1.

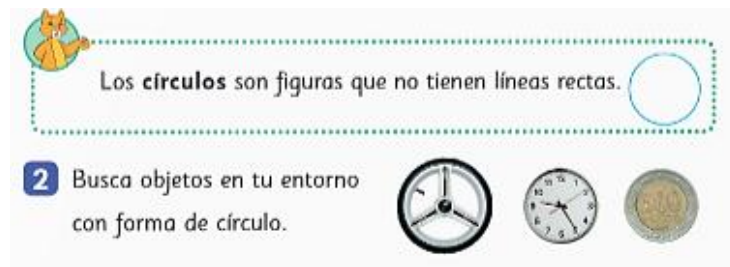


Imagen 1.1: Definición del círculo. Fuente: Texto del Estudiante Matemática 2° Básico.

En tercero básico estudian redes de cuerpos geométricos, incluyendo al cono y al cilindro mencionando que se componen por círculos y superficies curvas, pero no se presenta un estudio mayor sobre las figuras. En cuarto básico estudian la simetría, pero no hay una profundización en que el círculo presenta infinitos ejes de simetría, sino que solo se presenta uno, en quinto básico se estudian paralelas y perpendiculares y en sexto básico ángulos y triángulos, por lo que en los ejes de geometría de niveles anteriores a séptimo básico no se presenta un estudio del círculo, su construcción o de sus elementos en profundidad.

2. Observe la secuencia y encuentre la figura que falta en el lugar dado (1 pto-2 total)



La figura en el lugar 22 será: _____

Imagen 1.2: Ejercicio que involucra la circunferencia. Fuente: Texto del Estudiante, Matemática 5° Básico.

La imagen anterior muestra que el círculo solo es utilizado como figura plana pero no se realiza ningún estudio sobre las características y propiedades del objeto matemático en quinto básico. Se establece entonces, que el estudio del círculo y la circunferencia se transforma en un mundo nuevo para los estudiantes, ya que en los polígonos solo se estudian sus lados y no requieren de mayores elementos para su construcción o para el cálculo de su perímetro o área, a diferencia de la circunferencia que se construye y define a partir de su centro, su radio o su diámetro.

A continuación, se presentan los objetivos de aprendizaje en los que se utilizan el círculo y/o la circunferencia en los niveles posteriores a sexto básico (tabla 1.2). Para los niveles de III° año medio y IV° año medio, se utilizaron las priorizaciones curriculares correspondientes al plan común de formación general, de la formación diferenciada humanista científica propuestas por el Ministerio de Educación (2023).

Tabla 1.2

Objetivo de aprendizaje que involucran círculo posterior a 7° básico.

Nivel	Objetivos de Aprendizaje relacionado con el círculo
7° Básico	OA 11: Mostrar que comprenden el círculo: • Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo. • Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo. • Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria. • Identificándolo como lugar geométrico
8° Básico	OA 13: escribir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: • Los vectores para la traslación. • Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. • Los puntos del plano para las rotaciones.
I° Medio	No presenta objetivos de aprendizaje relacionados
II° Medio	No presenta objetivos de aprendizaje relacionados
III° Medio	OA4: Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.
IV° Medio	No presenta objetivos de aprendizaje relacionados

Fuente: Ministerio de Educación, 2023. Elaboración propia

En la tabla 1.2, se presenta que en III° Medio se retoma el estudio del círculo y la circunferencia en cuanto a elementos secundarios que corresponden a ángulos, arcos, cuerdas y secantes. Sin embargo, en los años posteriores a 7° básico a pesar de que no existe un objetivo de

aprendizaje específico, si se utilizan los conocimientos de área y perímetro de la circunferencia relacionándolos con otros contenidos, tal como se muestra en la siguiente imagen (imagen 1.2).

10. Josefina dice que en la siguiente red geométrica la medida del largo del rectángulo es 24 cm. ¿Es correcto lo que afirma? ¿Por qué? Si se duplica la altura del cilindro correspondiente a la red geométrica y se mantiene el diámetro de la base, ¿se duplica el área lateral? ¿Ocurre lo mismo si se duplica el diámetro y se mantiene la altura? Considera $\pi \approx 3,14$.

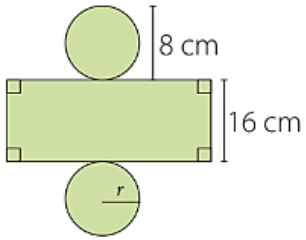


Imagen 1.3: Ejercicio que involucra la circunferencia. Fuente: Texto del Estudiante, Matemática 8° Básico.

Esta actividad permite la exploración por parte de las y los estudiantes, pero apunta a que los alumnos utilicen los conocimientos que tienen sobre área y el perímetro de la circunferencia, por lo tanto, se puede establecer que corresponde a un conocimiento previo.

En las tablas 1.1 y 1.2, se logra reflejar que la enseñanza de la circunferencia corresponde a séptimo año básico y no a otros niveles de la enseñanza, por lo que importante generar en las y los estudiantes una apropiación significativa del objeto matemático, en ese nivel escolar.

Arana et al. (2017) desarrollaron una investigación con una propuesta didáctica relacionada con la circunferencia para contrarrestar la mecanización en la solución de ejercicios, para ello se basaron en el estudio de Godino et al. (2004) respecto a la relación de los objetos primarios (situaciones, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus relaciones (imagen 1.3).

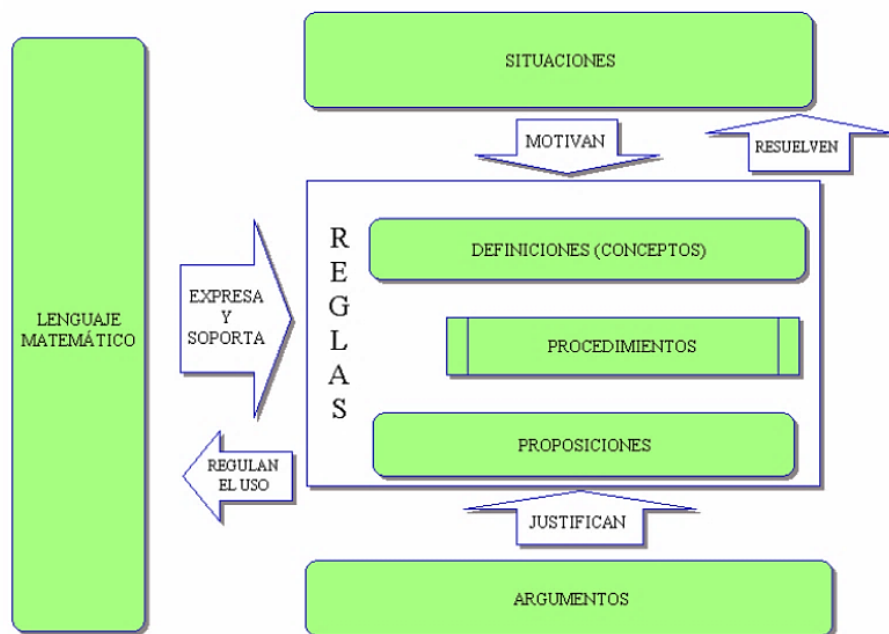


Imagen 1.3: Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Fuente: Arana, Peralta, et al., 2007.

La imagen 1.3, establece la importancia de presentar a las y los estudiantes instrumentos que los motiven a generar su propio conocimiento, orientando y justificando sus acciones, así como también sus resultados por medio del lenguaje matemático. Tal como lo indica Ferreira (2018), para enseñar geometría es importante que los estudiantes sean partícipes de la construcción de diversos objetos geométricos, es decir, que se les entreguen a los estudiantes las condiciones y los instrumentos necesarios para gestar el conocimiento.

En relación con el estudio de áreas y perímetros, D'ámore y Fandiño (2007) indican que las dificultades para que el estudiante logre construir un conocimiento, no se relacionan solo con la naturaleza epistemológica del concepto si no también con las elecciones didácticas, es decir, los instrumentos de aprendizaje que escogen las y los docentes para que los estudiantes construyan su conocimiento.

Por otro lado, la investigación de Mántica et al. (2002) indica que los estudiantes cometen errores en el cálculo del área y perímetro de la circunferencia puesto que existe una confusión entre

los conceptos, de modo que no comprenden a cabalidad a qué concepto corresponde cada objeto matemático, por ello los autores destacan la importancia de la construcción del conocimiento como posible solución. En el estudio mencionado, a partir de diversas investigaciones se establece que para clarificar el concepto del área se puede utilizar el embaldosado de superficies. También proponen la resolución de problemas basados en la vida cotidiana para que los estudiantes puedan modelar los conceptos relacionados con la circunferencia con mayor facilidad.

Tanto D'amore y Fandiño (2007) como Mántica et al. (2002) aseguran que se presenta una dificultad en la comprensión de la unidad de medida del área y el perímetro, de modo que los estudiantes solo identifican que el área se corresponde con unidades cuadradas o dos dimensiones (ancho y alto) y, por lo tanto, es mayor al perímetro que solo se mide en unidades de una dimensión. En consecuencia, las y los estudiantes se enfocan principalmente en las diferencias entre el área y el perímetro y no en la relación que se puede establecer entre ellos, por ejemplo, las consecuencias que se presentan en el valor del perímetro al modificar el área de una figura o viceversa.

Es necesario destacar que las situaciones que se presenten a las y los estudiantes con el objetivo de llegar a la construcción y apropiación del conocimiento matemático deben ser estructuradas y adecuadas a sus intereses y contexto escolar, de modo que la propuesta de aprendizaje permita construir el conocimiento relacionado con la circunferencia.

1.2 Pregunta de investigación

Para ahondar en la problemática de esta investigación, por medio de un focus group se analizaron las experiencias de cuatro profesores de educación media entorno a la enseñanza de la circunferencia y sus principales características, (anexo 1) puesto que, como lo indica Marino

(2022), esta técnica permite obtener información respecto a los conocimientos y experiencias de los participantes en su totalidad y no sobre las opiniones o vivencias individuales. Se consideró fundamental que los docentes hayan realizado clases para enseñar los elementos de la circunferencia, su área y su perímetro en séptimo año básico y por lo menos durante dos años, para garantizar que dichas experiencias les permitieran identificar obstáculos y dificultades reiteradas en el proceso de aprendizaje. El enfoque de la conversación fue identificar las dificultades que las y los docentes experimentaron durante la enseñanza de los objetos geométricos mencionados, así como también las problemáticas que observaron en el aprendizaje de sus estudiantes. Tal como lo indica (Espinoza et al, 2009) la conversación con las y los docentes y un posterior análisis de sus respuestas permitió identificar las siguientes problemáticas o fenómenos didácticos en términos de disfunciones generalizadas en el marco de la actividad matemática que desarrollan docentes con sus estudiantes:

- Los estudiantes confunden las definiciones y/o fórmulas de área y perímetro.
- Frente a un enunciado que representa un problema, los estudiantes no reconocen cuándo deben utilizar el perímetro o cuándo aplicar el área.
- No logran representar pictóricamente un enunciado vinculado a una situación problemática en la que deben aplicar sus conocimientos de área o perímetro de la circunferencia.
- Una pregunta resuelta en clases, incluso con los mismos datos, no logra ser resuelta por las y los estudiantes en una evaluación.
- Los estudiantes no logran establecer que, al variar la medida de uno de los elementos de la circunferencia, ya sea radio o diámetro, cambia la medida de los que se relacionan o que se pueden obtener a partir de él, por ejemplo, al variar el radio cambia el valor del diámetro, el perímetro y el área de la circunferencia.

- Si se cambia la manera de preguntar que se ha utilizado en clases, las y los estudiantes no saben qué responder.

Las afirmaciones y comentarios de las y los profesores participantes permiten suponer que las dificultades en el aprendizaje de las y los estudiantes relacionados con la noción de circunferencia, sus elementos esenciales, el concepto y cálculo de su área y perímetro, así como de la relación entre ambos, radican esencialmente en que los conciben como elementos separados de modo que el cambio en uno no afecta a otro, no logran atribuir sentido ni significado al conocimiento obtenido, por lo que no logran reconocer cuándo utilizar la noción de perímetro o cuándo aplicar el concepto de área en la resolución de problemas. Por otra parte, las y los alumnos no logran representar de manera pictórica los datos que aparecen en el enunciado de problemas en los que intervienen conceptos de la circunferencia. Frente a esto, los docentes no pueden reconocer si estas dificultades se deben a la comprensión lectora, o bien, a la falta de conocimiento, pero también admiten no haber realizado ninguna actividad que les permita a las y los estudiantes identificar cómo o de qué forma pueden representar los datos provenientes de una situación problemática, sino que, frente a la ausencia de respuesta, las y los docentes realizan el dibujo en la pizarra, resolviendo ellos mismos el problema. Ello también dificulta que las y los estudiantes resuelvan una pregunta por sus propios medios en una evaluación, incluso si ésta ya ha sido estudiada en clases, puesto que la construcción de la solución siempre es realizada por la o el profesor y ellos se limitan a reproducir esas respuestas, lo que lamentablemente promueve un aprendizaje memorístico. Además, los docentes admiten cambiar la forma de plantear las preguntas en las evaluaciones sin darlo a conocer previamente a las y los estudiantes, lo que, por lo general, los lleva a no obtener las respuestas esperadas. Esto sería lo que en didáctica de las matemáticas se conoce como ruptura del contrato didáctico (Brousseau, 2007).

Con la información obtenida de las y los docentes en el focus group y cruzándola con los resultados del análisis de los objetivos de aprendizaje del currículo de matemática expuestos anteriormente, se puede establecer que existe una problemática a nivel del currículum; al no presentar una progresión en el aprendizaje de figuras curvas armónico con el aprendizaje de figuras rectas, ya que predomina la enseñanza de polígonos y segmentos rectos hasta 7mo año escolar. Y, considerando lo relatado por las y los docentes, se puede identificar dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que, al iniciar el estudio de figuras curvas en séptimo básico se manifiesta un problema epistemológico que los docentes no saben cómo abordar.

Para el desarrollo de esta investigación, nos situamos en un paradigma socio constructivista del aprendizaje matemático que considera imprescindible que a las y los estudiantes se les presenten las condiciones necesarias para que puedan construir su propio conocimiento. Con este objetivo, se ha diseñado una secuencia didáctica para el aprendizaje basada en actividades de estudio y de investigación, que es un modelo construido en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). El estudio busca responder a las siguientes preguntas:

¿Es posible construir una secuencia de aprendizaje que permita a los estudiantes construir el concepto de circunferencia otorgándole sentido y significado a sus elementos esenciales, así como también a la noción y cálculo tanto de su área como de su perímetro?

¿El diseño de esta secuencia permitirá resolver los problemas de la enseñanza de estos conocimientos que, de manera general, no logra superar el predominio de una comprensión atomizada del perímetro y el área de la circunferencia que dificulta que los estudiantes los manejen con flexibilidad y pertinencia frente al estudio y resolución de problemas?

¿La estructura y características de esta secuencia permitirá que los estudiantes construyan el conocimiento en estudio sin la intervención directa del docente?

Estas preguntas permiten dar origen a la pregunta de investigación:

¿Cómo aporta la secuencia de aprendizaje basada en actividades de estudio y de investigación a que las y los estudiantes de séptimo básico construyan el sentido y el significado de los conceptos de perímetro y área de la circunferencia y establezcan relaciones entre ellos?

1.3 Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos generales y específicos de la investigación:

Objetivo General:

Caracterizar el proceso de aprendizaje de la noción de circunferencia, los conceptos de área y perímetro de esta y la relación entre ambos, utilizando una secuencia de aprendizaje construida basándose en las actividades de estudio e investigación, con un grupo de estudiantes de séptimo básico de la Región Metropolitana, determinando el aporte que dicha secuencia realiza a su aprendizaje.

Objetivos Específicos:

- Identificar y comprender los conocimientos previos que tiene un grupo de estudiantes de séptimo básico y que son necesarios para el desarrollo de la secuencia didáctica.
- Construir una secuencia didáctica que permita a las y los estudiantes darles sentido y significado a los conocimientos relacionados con perímetro y área de la circunferencia.
- Describir y documentar el proceso de implementación de la secuencia didáctica.
- Describir el avance de los estudiantes posterior a la aplicación de la secuencia didáctica en comparación con el estado de aprendizaje inicial, valorando el aporte de la secuencia en el logro de los objetivos planteados.

2 CAPÍTULO: MARCO TEÓRICO

Si bien la matemática es una ciencia que acompaña a cada persona a lo largo de su vida, ya sea durante la etapa escolar o bien en la vida diaria, se presentan diversos factores que dificultan su aprendizaje al momento de ser traspasada desde el docente al estudiante. Lárez (2018) indica que las dificultades u obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje están relacionadas con el conocimiento que ha adquirido el estudiante y no producto de la ausencia de este. Por lo tanto, se vuelve relevante considerar que en una sala de clases el docente también debe tener en cuenta los aspectos que dificultan el aprendizaje y que son propios del estudiante, como, por ejemplo, su edad, nivel de razonamiento matemático producto de los conocimientos y habilidades adquiridas previamente.

Como menciona Fernández (2018) el estudio de la geometría puede ser muy complejo debido a la necesidad de desarrollar el pensamiento geométrico a través del estudio de formas y estructuras geométricas, razonamiento espacial y aplicaciones a la resolución de problemas;

“Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría se debe enfrentar a las y los estudiantes a tareas que le den la oportunidad de “construir conceptos, investigar relaciones y explicarlas, probarlas y, de ser posible, demostrarlas, es decir, que el aprendiz sea el protagonista en su propio proceso de aprendizaje y lleve a cabo diferentes tareas que tendrán como fin último una correcta demostración” (p. 53).

Tal es la importancia de la enseñanza de la geometría que se han presentado modelos de enseñanza como por ejemplo Duval y Van Hiele entre otros, que buscan orientar la práctica del docente con el objetivo de que el aprendizaje de los estudiantes sea significativo (Fernández, 2018).

Considerando lo anterior esta investigación busca que las y los estudiantes puedan construir su propio conocimiento matemático, para ello debe cambiar el rol del docente quien debe dejar de ser un expositor de contenidos y proporcionar a los estudiantes condiciones para que puedan gestar su propio conocimiento, cambiando su rol pasivo y poco reflexivo por una participación activa, por medio de la exploración y la comunicación con sus pares. Para ello se ha construido una secuencia de aprendizaje con actividades de estudio y de investigación propuestos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

2.1 Actividades de Estudio y de Investigación

A fines de los años 60 en Francia, se buscó complementar la formación matemática de las y los profesores por medio de la creación de textos matemáticos, fichas de trabajo para alumnos y diversas actividades y materiales didácticos, considerados como una pauta para reproducir la enseñanza sin lograr validez entre los investigadores de la época. La reflexión sobre ello plantea la necesidad de actuar sobre la enseñanza, estableciendo que es necesario determinar las condiciones en las que se produzca el conocimiento (Rey, 1997).

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) estudia no sólo a las actividades de enseñanza y aprendizaje, sino que todo el proceso por el que pasa un estudiante para aprender y un docente para enseñar inicia con la creación del saber matemático hasta su incorporación en el aula como un conocimiento acabado (Bosch y Gascon, 2009). Esta teoría reconoce a las personas como seres complejos ya que emergen de diversas instituciones; familia, escuela, curso, amigos, etc., de modo que, conociendo a las instituciones a las que pertenece se puede comprender el funcionamiento de los procesos didácticos que vive, en particular, a aquellas condiciones que

permiten o restringen el aprendizaje. La TAD busca describir y analizar el saber de un alumno; para que un estudiante sepa o no algo, lo aprenda o no, es necesario establecer la relación que tiene con instituciones que permiten hacer matemática (Bosch, 2020).

Actualmente, aprender se considera aprender los contenidos concretos establecidos en el currículum como temas, listas o conjuntos de contenidos en un determinado nivel, en los que las y los estudiantes reproducen lo que los docentes les presentan, a esto se le denomina monumentalización del saber, caracterizado por presentar las organizaciones matemáticas (OM) como obras finalizadas. Con la TAD, Chevallard propone un cambio de paradigma; del paradigma de la visita de las obras al paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2004). De tal manera que el currículum se rediseñe y se presente como un conjunto de preguntas o cuestionamientos que tanto los alumnos como los profesores se plantean, y que juntos, investigan para elaborar y aportar respuestas transformando su relación con el saber, buscando que el docente deje de ser un expositor y pase a ser un guía para que las y los estudiantes construyan su propio conocimiento, generando un cambio en la relación del docente con sus alumnos (Calandra y Costa, 2017).

La interacción entre el docente y los estudiantes se explica a través del contrato didáctico, este se puede definir como la negociación entre los participantes respecto a las normas y responsabilidades que tendrá cada uno, de modo que se establezcan actividades que se pueden o no realizar durante el proceso de aprendizaje, estas normas son implícitas y no pueden estar por sobre las reglas de la institución educativa. Es fundamental señalar que el contrato didáctico exige al docente a enseñar y al alumno a aprender, por ello, las rupturas al contrato didáctico pueden limitar o impedir el nuevo conocimiento (Chevallard et al., 1997).

La praxeología es un modelo único para describir las diversas actividades humanas, en la TAD la praxeología matemática se define como un método que estudia las acciones que realizan las personas para hacer matemática. Esta se basa en tareas (acciones), y tipos de tareas, ambas son construidas por las instituciones. La manera en qué se realiza una tarea se denomina técnica que puede no ser algorítmica y tener éxito en solo una parte de las tareas del tipo al que pertenece, y lo que justifica una técnica se denomina tecnología. La tecnología es un discurso racional cuyo primer objetivo es asegurarse que una técnica permita realizar una tarea determinada, su segundo objetivo es explicar la técnica, es decir, indicar por qué es correcta, por último, una tecnología tiene la función de producir otras técnicas. Con esta trilogía se pueden estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de distintos contenidos matemáticos (Chevallard, 1999). Por ejemplo, una tarea es sustraer y un tipo de tarea es la sustracción de dos números enteros, las técnicas pueden ser restar con un algoritmo, restar por medio de la recta numérica o restar usando los dedos, cada técnica es justificada y explicada por medio de una tecnología.

Chevallard (1999) indica que el proceso de enseñanza y aprendizaje pasa por seis momentos didácticos: el primero es el encuentro con tareas determinadas escogidas o diseñadas para el estudio de un saber determinado, el segundo momento es la exploración de dichas tareas, el tercero es la construcción de un entorno tecnológico-teórico, es decir, que explique y justifique las técnicas utilizadas y como estas permiten la creación de nuevas técnicas, el cuarto momento de trabajo con la técnica, la institucionalización que consiste en formalizar el saber matemático construido y, finalmente, la evaluación de los resultados de la construcción de los saberes matemáticos denominado praxeología (Bosch, et al. 2006). Para combatir el monumentalismo de los saberes, la TAD propone una herramienta para que las y los estudiantes adquieran conocimiento por medio de

procesos de estudio funcionales; denominada actividad de estudio y de investigación (Corica y Marín, 2014).

Las actividades de estudio y de investigación (AEI) son modelos didácticos que buscan enfrentar el monumentalismo del saber, se generan a partir del estudio de respuestas a preguntas o cuestionamientos sobre objetos matemáticos, y, se apoyan de la construcción de una secuencia de tareas diseñadas para generar el aprendizaje. Las AEI emergen de una pregunta principal Q seleccionada por el profesor y que permita generar el estudio por parte de las y los estudiantes, y puede hacer surgir otros cuestionamientos Q_i que deben tener una respuesta R_i por medio de una técnica de resolución, con esto emerge una tecnología adecuada para comprender la actividad matemática desarrollada (Chevallard, 2004). Calandra y Costa (2017) indican que para cada saber matemático se deben diseñar una o más actividades de estudio y de investigación que permitan adquirir el conocimiento, causando interés en las y los estudiantes y que sean lo bastante abiertas para que permita articular el proceso de estudio.

Las AEI no resuelven el problema de la monumentalización del saber, ya que es el docente quien diseña y presenta los cuestionamientos a las y los estudiantes y no son ellos quienes destacan en la propuesta de las cuestiones, respondiendo a la estructura y a las condiciones establecidas por el profesor, pero son una opción viable para introducir el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo (Bilbao, Llanos y Otero, 2011).

Además del análisis a priori, el profesor debe diseñar las situaciones o tareas contemplando las dificultades conceptuales a las que se enfrentarán los estudiantes, que en muchos casos tienen relación con lo que el estudiante ya conoce y no producto del conocimiento que carece, es decir, se enfrenta a un obstáculo (Godino, et al 2004). Brousseau indica que un obstáculo en la didáctica de la matemática se define como “un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que

fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades” (Chevallard, 1997, p. 224). Un obstáculo que proviene del saber matemático y no de los que participan en él, es decir, del desarrollo dinámico del conocimiento matemático, se denomina obstáculo epistemológico, como, por ejemplo, la concepción del número π .

Centeno (1997) menciona diversas dificultades relacionadas con la comprensión de los números racionales desde el inicio de la enseñanza de estos; en cuanto a la lectura y escritura del valor posicional las y los estudiantes observan a los decimales como dos números enteros separados por una coma y no a un tipo de número diferente, debido a su densidad se presenta una dificultad con el orden de los decimales y con la integración del cero, por ejemplo, consideran al número 0,35 como un número entero, ignorado el cero, y, también consideran que 1,270 es diferente a 1,27, incluso mayor porque tiene más dígitos. Otra dificultad que vivencian los estudiantes y que se presenta en la actividad diagnóstica, corresponde a la dificultad de operar números decimales, ya que la concepción de que al sumar y multiplicar se obtienen un resultado mayor a los factores que se operan, sin embargo, en la multiplicación no siempre ocurre este suceso.

En cuanto al número π , Centeno (1997) indica que “hablamos de un número cuando nos ocupamos de su función, de los problemas que permite resolver o de las propiedades que le distinguen de otras clases de números” (p. 22). Es decir, el número π se define como el cociente entre el perímetro y el diámetro de cualquier circunferencia, de modo que la longitud de una circunferencia no puede medirse a partir del diámetro como unidad, por ello, no existe ningún número entero ni fraccionario que sea una medida exacta del perímetro de la circunferencia, sino que la forma de calcular usando el número π es por medio de la aproximación al valor 3,14. Esta concepción del número π es un obstáculo epistemológico desde la época de los griegos y se

transforma una dificultad para las y los estudiantes debido al poco tiempo para estudiarlo considerando los requerimientos del curriculum ministerial.

Otro tipo de obstáculo se genera con el proceso de aprendizaje; cuando el estudiante está en la tarea de aprender y se ve en la necesidad de cambiar bruscamente de estrategia para encontrar una solución, pero aparecen limitaciones para introducir esta nueva estrategia. Por ejemplo, cuando la situación requiere de un conocimiento previo o de un vocabulario matemático que el docente no ha enseñado.

En la investigación de Calandra y Costa (2017) se diseñó una actividad para la enseñanza de la distribución normal en carreras de ingeniería, de modo que el estudiante tome un rol activo por medio de una AEI como una propuesta diferente de la enseñanza tradicional. Bilbao, Llanos y Otero (2011) diseñaron y aplicaron una AEI para estudiar funciones polinómicas en secundaria con el fin de enfrentar la monumentalización del saber y aportar al problema que se plantea el profesor sobre cómo enseñar. Destacan que las AEI implementadas permitió a las y los estudiantes obtener la gráfica, analizar la paridad de los ceros y las funciones polinómicas de grado tres con éxito, pero al ser una primera aplicación requiere de ajustes.

Gazzola, Llanos y Otero (2011) implementaron una AEI para analizar cómo funciona en el aula en la búsqueda de contrarrestar la enseñanza tradicional, identificando si permite construir las propiedades fundamentales de las funciones racionales. Sus resultados establecen que los estudiantes logran construir y explicar técnicas para multiplicar y dividir funciones racionales y propone técnicas para la suma y la resta, analizar asíntotas, ceros y puntos de discontinuidad entre otros, destacando que la AEI les permitió generar organizaciones matemáticas locales, lo que es un avance en la recuperación del sentido y que cuestiona el contrato didáctico escolar tradicional.

Por otro lado, Corica y Marín (2014) implementaron una AEI en tercer año de secundaria para el estudio de ángulos inscritos en una circunferencia, logrando que los estudiantes realizaron deducciones a partir de datos, utilizaron propiedades y relaciones que no eran explícitas, lo que les permitió poner en práctica razonamientos propios del trabajo geométrico e institucionalizar el teorema de ángulos inscritos en una circunferencia. Sin embargo, reconocen que los estudiantes se resistieron a responsabilizarse por las técnicas propuestas, ya que en sus vivencias escolares se han limitado a responder a lo que les pide el profesor, lo que provocó que la secuencia tomara más tiempo del estipulado. Destacan que, si bien la AEI es una opción incompleta y limitada para enfrentar al monumentalismo del saber, es viable de utilizar en la escuela secundaria y le permitió a las y los estudiantes explorar, conjeturar y validar sus ideas.

Con las investigaciones mencionadas, se presenta una evolución en el comportamiento de las y los estudiantes y un avance en sus conocimientos matemáticos. Por ello, se espera que el uso de AEI en esta investigación les permita a los alumnos explorar junto a sus pares y generar nuevos saberes matemáticos.

2.2 Circunferencia

Para esta investigación se utilizaron algunos textos de estudio para formalizar y definir la circunferencia, sus elementos, su área y su perímetro. Uno de ellos corresponde a “Geometría plana y del espacio” de J. Baldor et al. (2004) ya que las obras del autor son conocidas y utilizadas mundialmente, también se hizo revisión del libro llamado “Geometría” de Carreño y Cruz (2007) que define elementos geométricos y es utilizado en diversos establecimientos del país, y se consideró el texto de estudio de matemática otorgado por el Ministerio de educación chileno del año en curso, cuyos autores son Iturra, Cabrera y Mansalva (2024).

2.3.1 Definición de circunferencia

A continuación, se presenta un extracto de cada texto de estudio con la definición de circunferencia.

Las imágenes siguientes (imagen 2.1 y 2.2), presentan la definición de circunferencia establecida en Baldor et al. (2004).

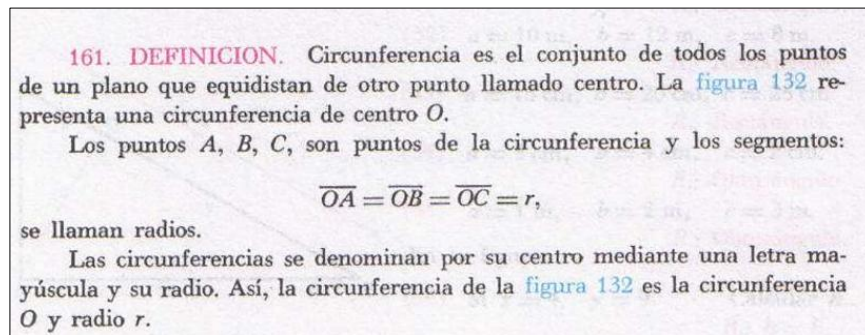


Imagen 2.1: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro y radio. Obtenido de Baldor et al. (2004), p. 128.

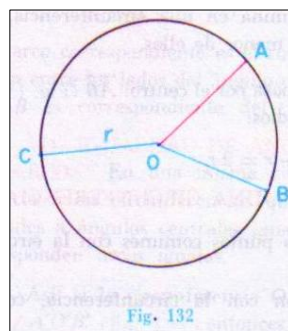


Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio. Obtenido de Baldor et al. (2004), p. 128.

Las imágenes anteriores presentan la definición de circunferencia como el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan del centro con su correspondiente imagen, estableciendo el centro y los radios de la circunferencia. De igual manera Carreño y Cruz (2007) presentan la definición de circunferencia como se puede observar en la imagen siguiente (imagen 2.3).

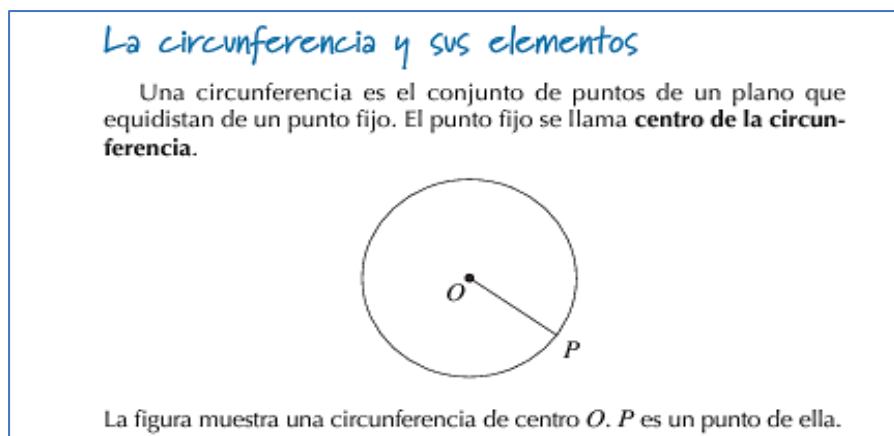


Imagen 2.3: definición de circunferencia y el centro. Obtenido de Carreño y Cruz (2007), p. 239.

Carreño y Cruz (2007) definen a la circunferencia de manera similar a Baldor et al. (2004) pero sin hacer referencia al radio de la circunferencia.

Por otro lado, Iturra et al. (2024) definen el círculo y la circunferencia haciendo referencia al centro, pero sin establecer sus características, como se observa en la imagen (imagen 2.4).

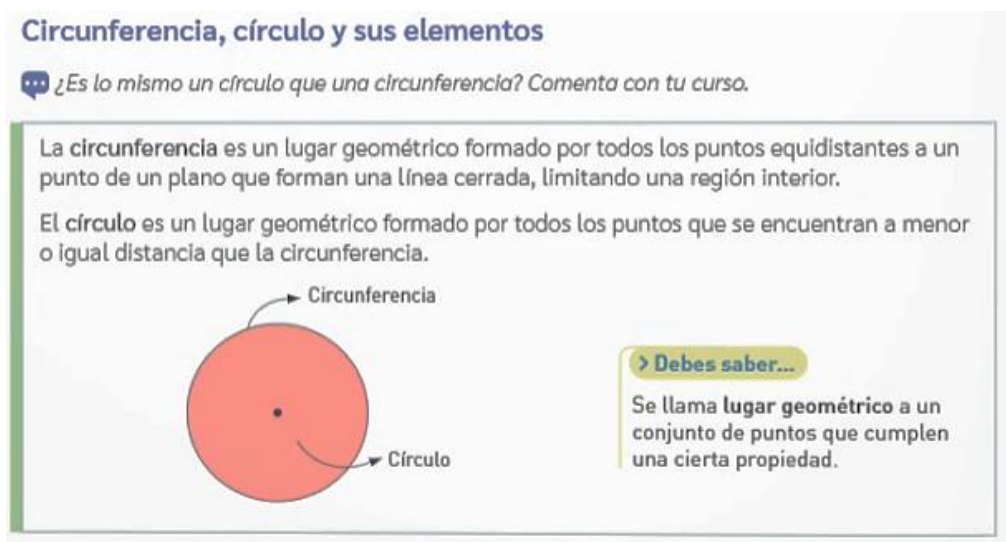


Imagen 2.4: definición de circunferencia y círculo. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 84.

A diferencia de los textos anteriores, la imagen muestra que se incluye la definición de círculo y se especifica que es un lugar geométrico.

Para formalizar el concepto de circunferencia, en la secuencia didáctica se utilizará la siguiente definición: una circunferencia corresponde a la línea curva que delimita una región circular y que contiene al círculo.

2.3.2 Definición de elementos de la circunferencia

A continuación, se presentan las definiciones de centro, radio, diámetro, área y perímetro de la circunferencia establecidas en las obras revisadas.

Centro

Tanto Baldor et al. (2004) como Carreño y Cruz (2007) definen el centro de la circunferencia como un punto fijo desde el que equidistan un conjunto de puntos que definen la circunferencia (imágenes 2.1 y 2.2). Por otro lado, Iturra et al. (2024) no define el centro de la circunferencia, sino que solo muestra el punto en una imagen (imagen 2.5).

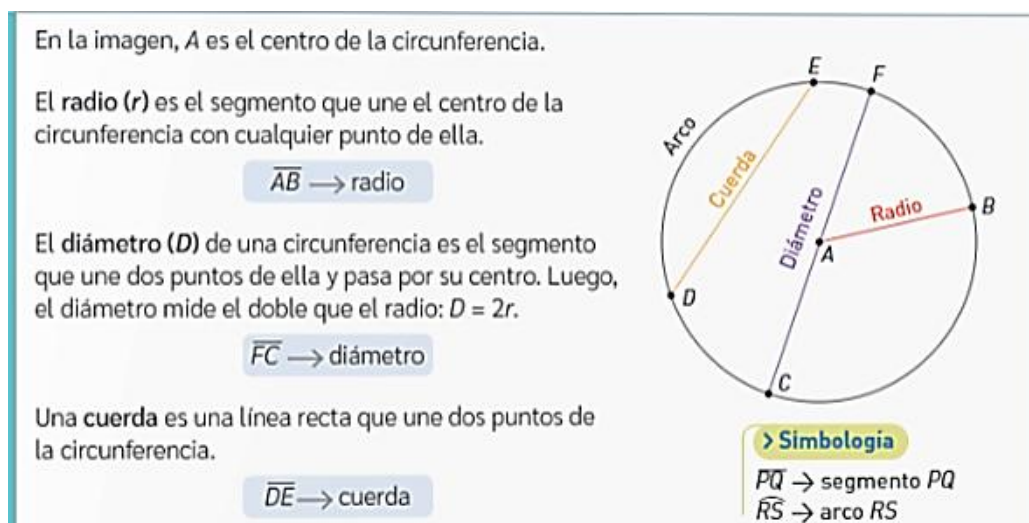


Imagen 2.5: definición de elementos de la circunferencia. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 85.

Para la secuencia se utiliza la definición de centro como el punto del cual equidistan un conjunto de puntos que conforman la circunferencia.

Radio

En la imagen anterior (imagen 2.5) se puede observar la definición de radio establecida por Iturra et al. (2024) indicando que “es el segmento que une el centro con cualquier punto de ella” (Iturra et al., 2024, p. 85), definición que también es utilizada por Baldor et al. (2004) y Carreño y Cruz (2007) como lo muestran las imágenes anteriores (imagen 2.1 y 2.2).

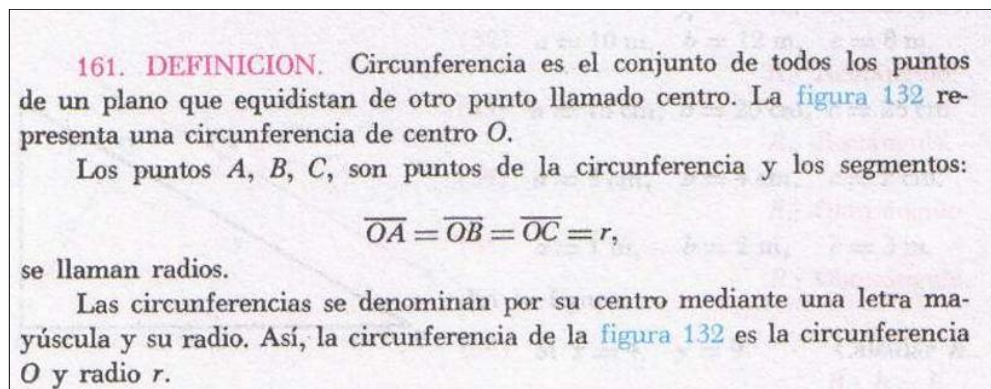


Imagen 2.1: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro y radio. Obtenido de Baldor et al. (2004), p. 128.

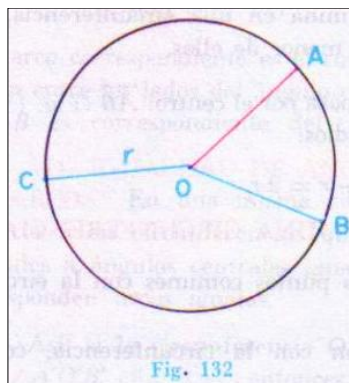


Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio. Obtenido de Baldor et al. (2004), p. 128.

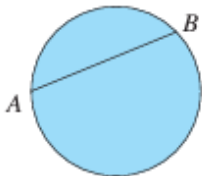
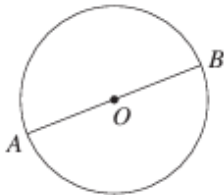
Para la secuencia la definición de radio que se utilizará corresponde a un segmento que va desde el centro a un punto de la circunferencia, este permite determinar el tamaño de la circunferencia o su longitud y se denomina con la letra r . En una circunferencia todos los radios tienen la misma medida.

Diámetro

En cuanto a la definición de diámetro, tanto Baldor et al. (2004) como Carreño y Cruz (2007) definen la circunferencia como una cuerda que pasa por el centro, porque en primera instancia definen cuerda como un segmento determinado por dos puntos cualesquiera en la circunferencia (tabla 2.1).

Tabla 2.1

Definición de diámetro de Baldor et al. (2004) y Carreño y Cruz (2007)

Definición Baldor et al. (2004)	166. CUERDA. Es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia: $\overline{CD}$ (Fig. 135). De los dos arcos que una cuerda determina en una circunferencia, se llama arco correspondiente a la cuerda N, al menor de ellos. 167. DIAMETRO. Es toda cuerda que pasa por el centro: $\overline{AB}$ (Fig. 135). El diámetro es igual a la suma de dos radios: $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = r + r = 2r.$
Definición Carreño y Cruz (2007)	Una cuerda es un segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El segmento $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia.  Un diámetro es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. El segmento $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia. 

Fuente: Baldor et al. (2004) y Carreño y Cruz (2007). Elaboración propia.

En la tabla, se muestra que Baldor et al. (2004) define el diámetro como la suma de dos radios y mientras que Carreño y Cruz (2007) no definen ni relacionan el diámetro con el radio.

Iturra et al. (2024) también define cuerda, pero en primera instancia define el diámetro y luego la cuerda estableciendo que el diámetro mide el doble de un radio (imagen 2.5).

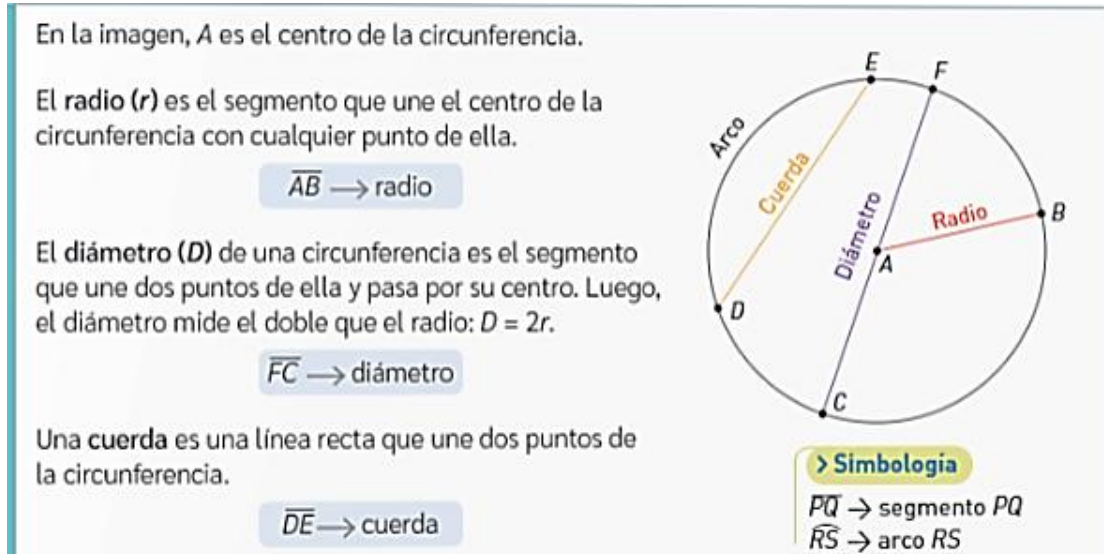


Imagen 2.5: definición de elementos de la circunferencia. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 85.

Para la secuencia, se define el diámetro como un segmento que va de un punto a otro de la circunferencia y que pasa por el centro y se denomina con la letra d.

Perímetro y Área

En el libro de Carreño y Cruz (2007) se presentan, de forma expositiva y directa, las fórmulas para el área y el perímetro de la circunferencia como lo presenta la imagen (imagen 2.6).

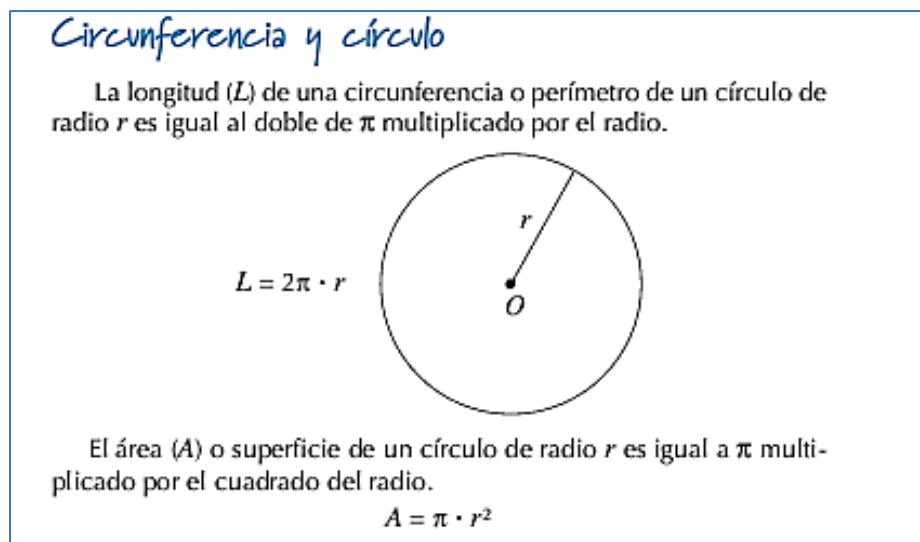


Imagen 2.6: definición de circunferencia, incluyendo definición de centro Obtenido de Carreño y Cruz (2007), p. 286.

En la imagen se presentan las fórmulas del área y del perímetro de forma directa, pero previamente no se define el valor de π , el texto de estudio presenta diversas definiciones de los elementos secundarios de la circunferencia como arco, ángulos, sectores circulares, entre otros, pero no se presenta definición numérica ni conceptual de π .

En cambio, tanto Baldor et al. (2004) como Iturra et al. (2024) presentan una definición de π previo al cálculo del área y perímetro de la circunferencia, como lo muestra la tabla 2.2. En el texto de estudio de Iturra et al. (2024) se presenta una actividad usando software gráfico para medir el perímetro y el radio de diversas circunferencias y establecer la relación entre los elementos para establecer el valor de π .

Definición de π de Baldor et al. (2004) e Iturra et al. (2024)

Fuente: *Baldor et al. (2004), Iturra et al. (2024)*. Elaboración propia.

40

En la secuencia didáctica también se realiza una actividad para comprender el valor de π , definiéndolo como la razón entre el valor del perímetro y el diámetro de una circunferencia que corresponde a 3,14 y se conoce matemáticamente como Pi y se denomina con el símbolo π .

Para formalizar el cálculo del área y el perímetro de la circunferencia Iturra et al. (2024) presenta las fórmulas de la siguiente manera:

Para el perímetro de la circunferencia se establece la fórmula a partir de la actividad realizada para encontrar el valor de PI, como se observa en la imagen (imagen 2.7).

Como aprendiste en la lección anterior, el número PI (π) permite modelar una expresión para calcular el perímetro (P) de un círculo.

Si se conoce el diámetro	Si se conoce el radio
$P = d \cdot \pi$	$P = 2r \cdot \pi$

Normalmente se consideran para π los siguientes valores:

Aproximado a la unidad: $\pi \approx 3$
Aproximado a la centésima: $\pi \approx 3,14$

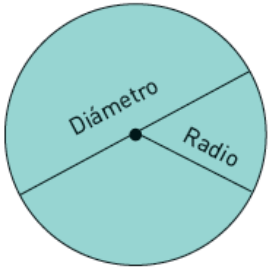


Imagen 2.7: definición número PI. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 88.

En la imagen se observan dos fórmulas para calcular el perímetro; en la primera por medio del diámetro y la segunda por reemplazando el valor del diámetro por 2 veces el radio.

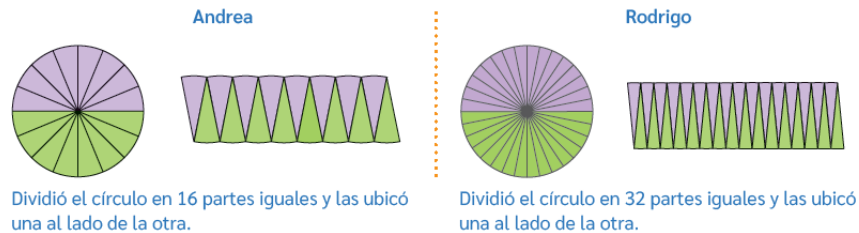
Para el cálculo del área de la circunferencia Iturra et al. (2024) presentan una actividad previa dividiendo un círculo en 16 triángulos isósceles con el centro de la circunferencia como vértice común (imagen 2.8).

Descubriendo el área del círculo

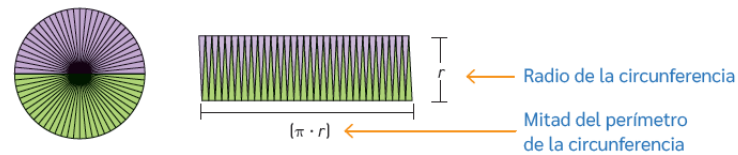
Anteriormente calculaste el perímetro de una circunferencia, ¿verdad? Como con toda forma geométrica, también podemos calcular su área. En este tema, descubrirás cómo hacerlo en distintos contextos.

¿En qué contextos es necesario calcular el área de un círculo?
Comenta con tu curso.

Para estimar el área de un círculo, Andrea y Rodrigo realizaron el siguiente procedimiento con un círculo de las mismas dimensiones.



Luego de analizar sus procesos, reconocen que al aumentar la cantidad de partes en que se divide el círculo, la nueva figura va tomando la forma de un rectángulo cuyas medidas se relacionan de la siguiente forma:



Por lo tanto, el área de un círculo se puede expresar como la mitad del perímetro de la circunferencia por el radio de la misma, es decir: $\pi \cdot r \cdot r$.

Imagen 2.8: definición del área de la circunferencia. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 90.

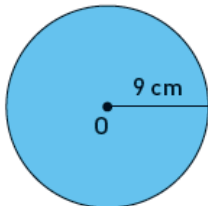
Como se muestra en la imagen (imagen 2.8), por medio de una actividad ya resuelta se formaliza la fórmula para establecer el valor del área de la circunferencia utilizando el valor de la mitad del perímetro.

Posteriormente se formaliza la fórmula del área en una definición con un ejemplo que contiene el valor del radio y un segundo ejemplo con el valor del diámetro (imagen 2.9).

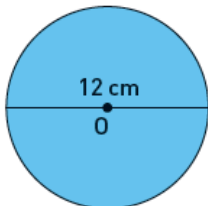
El área de un círculo (A) de radio r corresponde a la medida de la superficie del círculo y se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$A = \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2$$

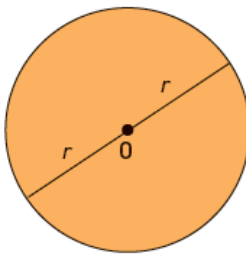
Por ejemplo:



$A = \pi r^2$
 $A \approx 3,14 \cdot 9^2$
 $A \approx 254,34 \Rightarrow A \approx 254,34 \text{ cm}^2$



$A = \pi r^2$
 $A = 3,14 \cdot (12 : 2)^2 = 3,14 \cdot 6^2 = 3,14 \cdot 36 = 113,04$
 $A \approx 113,04 \Rightarrow A \approx 113,04 \text{ cm}^2$



> Simbología

$\approx \rightarrow$ aproximadamente

Imagen 2.9: definición área de un círculo. Obtenido de Iturra et al. (2024), p. 91.

En cuanto a Baldor et al. (2004), su obra presenta el área y el perímetro de la circunferencia por medio de demostraciones matemáticas. En primera instancia, se presenta el corolario en la que se presenta el cálculo del perímetro o longitud de la circunferencia (imagen 2.10).

259. COROLARIO. “La longitud de una circunferencia es igual al duplo de π , multiplicado por el radio”.

DEMOSTRACIÓN:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$\therefore C = \pi d \quad (1)$$

y como: $d = 2r \quad (2)$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$C = \pi(2r) \quad \therefore C = 2\pi r.$$

Por definición;

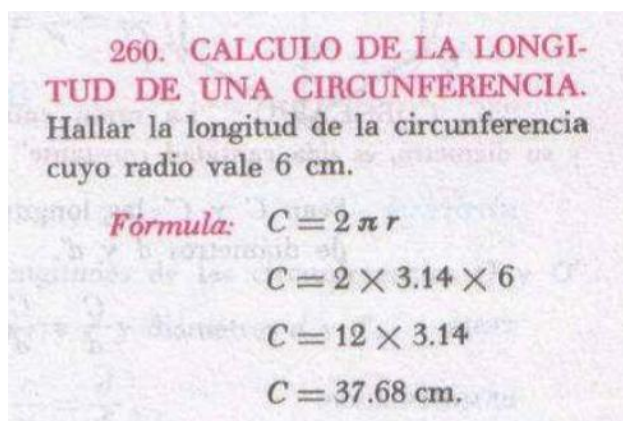
Despejando C ;

Definición;

Imagen 2.10: fórmula perímetro de la circunferencia. Obtenido de Baldor et al. (2004) p. 196.

En la imagen (imagen 2.10) se muestra la manera en que se construye la fórmula del perímetro de la circunferencia a partir de la razón entre el perímetro y el diámetro, y el diámetro como dos veces el valor del radio.

Posteriormente, presenta un ejemplo de aplicación (imagen 2.11), en la que se entrega el valor del radio de forma directa.



260. CALCULO DE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA.
Hallar la longitud de la circunferencia cuyo radio vale 6 cm.

Fórmula: $C = 2 \pi r$

$$C = 2 \times 3.14 \times 6$$
$$C = 12 \times 3.14$$
$$C = 37.68 \text{ cm.}$$

Imagen 2.11: aplicación fórmula perímetro de la circunferencia. Obtenido de Baldor et al. (2004) p. 196.

Para formalizar el cálculo del área, Baldor et al. (2004) presenta una demostración del teorema (imagen 2.12) inscribiendo una circunferencia en un polígono regular de los lados.

292. TEOREMA 85. "El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio".

HIPÓTESIS: Sea (Fig. 241) la circunferencia de centro O y radio r .

TESIS: $A = \pi r^2$.

Construcción auxiliar. Inscribamos en la circunferencia O , de longitud C , un polígono regular $ABC \dots$. Sea $P = 2p$ su perímetro y a su apotema.

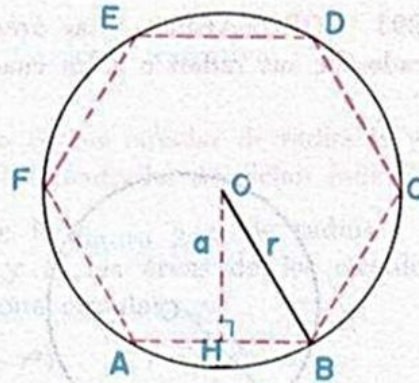


Fig. 241

DEMOSTRACIÓN:

$$A_{ABC \dots} = p a = \frac{P a}{2} \quad (1) \quad \text{Área del polígono regular.}$$

Si duplicamos indefinidamente el número de lados del polígono, resulta:

$$\lim A_{ABC \dots} = \frac{\lim P \times \lim a}{2} \quad (2) \quad \text{Porque la relación (1) es cierta para cualquier número de lados del polígono.}$$

$$\text{Pero: } \lim A_{ABC \dots} = A \quad (3) \quad \text{El límite de la sucesión de áreas de los polígonos es el área del círculo;}$$

$$\lim P = C \quad (4) \quad \text{Porque el límite de la sucesión de perímetros de los polígonos inscritos es la longitud de la circunferencia.}$$

$$\lim a = r \quad (5) \quad \text{El límite de la sucesión de apotemas de los polígonos es el radio.}$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2):

$$A = \frac{C \cdot r}{2} \quad (6)$$

$$\text{Pero: } C = 2 \pi r \quad (7) \quad \text{Longitud de la circunferencia.}$$

Sustituyendo (7) en (6):

$$A = \frac{(2 \pi r) r}{2}$$

$$\therefore A = \frac{2 \pi r^2}{2}$$

$$\therefore A = \pi r^2$$

Efectuando operaciones y simplificando

Si bien la demostración está explicada y favorece la formalidad matemática, es una explicación expositiva que deja de lado la participación de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático.

La propuesta didáctica que se presenta en este proyecto presenta actividades para que los estudiantes comprendan el concepto de perímetro y área de la circunferencia, en la que se define el perímetro como la longitud o contorno de un objeto circular, o bien, de una circunferencia y se puede calcular utilizando lo siguiente: $P_c = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$.

Por otro lado, se define el área de la circunferencia corresponde a la superficie de esta y se puede calcular utilizando la fórmula $A_c = \pi \cdot r^2$.

La secuencia didáctica aplicada a los estudiantes de séptimo básico corresponde a cuatro etapas de trabajo en las que se esperaba que comprendieran la circunferencia y sus elementos: centro, radio, diámetro, perímetro y área, pero también se buscó que logaran comprender la relación entre el perímetro y el área de la circunferencia estableciendo que, si el radio cambia su valor, tanto el valor del perímetro como el valor del área varían, pero en distinta proporción.

Para que los contenidos obtenidos por los estudiantes a través de dicha secuencia didáctica generen un impacto en su aprendizaje, era necesario que fueran diseñados como actividades de estudio y de investigación ya que les permitió trabajar de forma autónoma, con la validación de sus pares y con la formalización del docente, sin mayores intervenciones de este durante las actividades.

3 CAPÍTULO: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para llevar a cabo este escrito, incluye una descripción de la secuencia, características de los participantes y del instrumento utilizado.

3.1 Tipo de Investigación

Este estudio se centra en caracterizar el proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes considerando su experiencia dentro del aula, por lo tanto, la metodología utilizada es cualitativa ya que como lo indica Martínez (2011) “la mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el contexto de los acontecimientos, y centran su indagación en aquellos espacios en que los seres humanos se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente”. (p. 11)

Se tiene como objetivo específico de la presente investigación describir el proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes de séptimo año básico, por lo tanto, se puede establecer que el estudio es descriptivo, tal como Baptista et al. (2014) nos indican “con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (p. 92). Por lo tanto, este estudio corresponde a una investigación cualitativa de alcance descriptivo.

3.2 Diseño de la investigación

Para el diseño de esta investigación se utilizó el diseño de tareas de la TAD, de modo que en primer lugar se realizó un análisis preliminar del contenido que incluyó un análisis de los programas de estudio de los niveles educativos, un estudio de curriculum escolar y de diversos

textos de estudio en donde se presentan el círculo y la circunferencia, además se realizó un focus group para poder determinar cuáles son los fenómenos didácticos que se presentan en la enseñanza del objeto matemático, contemplando obstáculos didácticos y epistemológicos. Considerando lo anterior, se procede a crear una actividad diagnóstica para poder identificar los conocimientos previos de los estudiantes y a diseñar una secuencia de aprendizaje que contemplan los elementos de la circunferencia y su área y su perímetro, elaborando un análisis a priori de las posibles respuestas de los estudiantes. Posteriormente es experimentada por las y los estudiantes y el docente en el aula, y, por medio de la y registro de actividades vivenciadas en aula y el análisis de las respuestas escritas por las y los alumnos se pueden identificar los fenómenos didácticos, contrarrestar hipótesis, dar respuesta a la pregunta de investigación y sugerir modificaciones a la secuencia de aprendizaje diseñada. La imagen 3.1 permite visualizar las tareas indicadas.

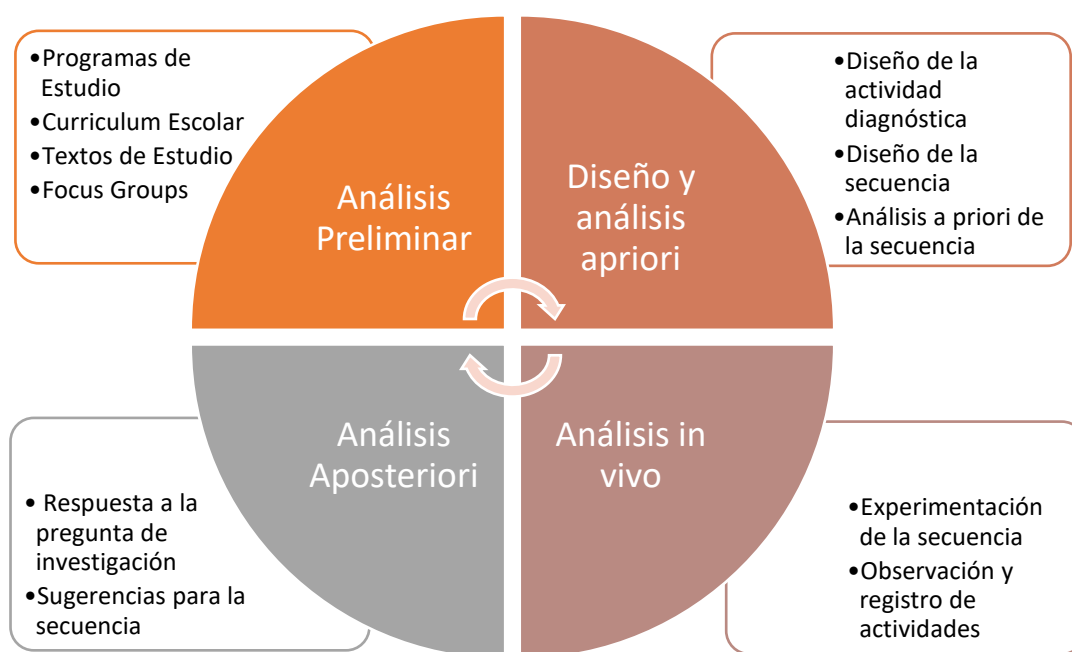


Imagen 3.1: Diseño de tareas basado en la TAD. Elaboración propia (adaptado de García, Barquero, Florensa y Bosch, 2019, p. 82)

Para esta investigación se realizó una secuencia didáctica de aprendizaje compuesta por cuatro etapas de trabajo a desarrollar por las y los estudiantes, ya que como lo indica Moreira (2012) se necesitan secuencias de enseñanza facilitadoras para generar aprendizaje significativo, ya sea de conocimiento conceptual o procedimental.

Previo a la aplicación de la secuencia didáctica, los estudiantes realizaron una actividad diagnóstica que permitió identificar sus conocimientos previos, las cuatro etapas siguientes corresponden a actividades de aprendizaje relacionada con la circunferencia.

La unidad de análisis para este estudio corresponde a las respuestas otorgadas por las y los estudiantes de séptimo básico de la Región Metropolitana analizadas por medio de una matriz de análisis de respuestas.

3.3 Fases de la investigación

Las fases para llevar a cabo esta investigación se presentan en la tabla (3.1) con el objetivo de caracterizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Tabla 3.1

Fases de la investigación

Fase	Instrumento	Tipo de análisis
Identificar los conocimientos previos de las y los estudiantes, para determinar los saberes matemáticos que pueden afectar la implementación de la secuencia didáctica.	Actividad diagnóstica escrita en su primera aplicación, de forma individual previo a la creación de la secuencia didáctica.	Análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes, identificando respuestas correctas y estableciendo el tipo de error en las respuestas incorrectas.
Construcción de la propuesta didáctica que permita a los estudiantes apropiarse de los contenidos	Secuencia didáctica dividida en cuatro etapas.	Análisis a priori de las actividades y revisión de la secuencia didáctica por medio del juicio de expertos.

relacionados con él perímetro y el área de la circunferencia.		
Aplicación de la propuesta didáctica a aproximadamente 30 estudiantes de séptimo básico.	Secuencia didáctica impresa para el registro de respuestas escritas, incluyendo los materiales para realizar la actividad.	Observación de las acciones de los estudiantes frente a los materiales, las actividades de la secuencia y trabajo con sus pares
Descripción del proceso de aprendizaje de los estudiantes.	Bitácora de trabajo de campo.	Observación y registro del comportamiento y acciones de los estudiantes al desarrollar las actividades de la secuencia didáctica.
Análisis de los resultados obtenidos.	Tabla de matriz de respuestas para la análisis y comparación de las respuestas escritas de los estudiantes, consultas a la bitácora de trabajo de campo.	Comparación de las respuestas de los estudiantes con el análisis a priori, y entre los grupos.
Determinar el avance de los estudiantes respecto de su estado inicial.	Actividad diagnóstica aplicada de forma individual, posterior a la secuencia didáctica.	Comparación entre las respuestas de la primera aplicación y las respuestas de la segunda aplicación posterior a la secuencia didáctica.

Elaboración propia

3.4 Muestra

En esta investigación se utilizó un muestreo no probabilístico ya que fue dirigida a una población específica y que cumplen características determinadas (Scharager y Armijo, 2001). Los participantes corresponden a un grupo de 30 estudiantes de séptimo año básico de un establecimiento educacional de la región Metropolitana, que participaron voluntariamente firmando un asentimiento (Anexo 2) y con el consentimiento de sus apoderados o tutores (Anexo 3).

El establecimiento en el que se aplicó la secuencia didáctica propone diversas actividades para que los estudiantes desarrollen habilidades sociales y de comunicación relacionadas con temas de contingencia basados en la agenda 2030. Para cumplir con este objetivo las y los estudiantes realizan semestralmente un trabajo con la metodología aprendizaje basado en proyectos (ABP) durante un mínimo de dos semanas sustituyendo las clases de matemáticas para realizar la actividad y luego presentarla al resto de la comunidad escolar. Además, el establecimiento tiene un proyecto en el que los estudiantes realizan actividades culturales fuera del establecimiento, con un enfoque en la enseñanza de la cultura y el cuidado de la naturaleza. A pesar de que estas actividades son provechosas para las y los alumnos, también les generan rezagos importantes en los contenidos matemáticos que deben aprender en los diversos niveles de la enseñanza escolar.

Las y los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica tienen entre 12 y 13 años, se caracterizan en general por ser atentos, participativos y por tener buena recepción con los docentes, hay nueve estudiantes pertenecientes al programa de integración escolar (PIE) a los que se les dificulta el aprendizaje de las matemáticas pero que se esfuerzan por lograrlo. En cuanto al eje de álgebra y funciones, solo han resuelto ecuaciones de primer grado del tipo: $x + a = b$, por lo tanto, es importante acompañar los procedimientos algebraicos que se necesitan en la secuencia.

Para lograr que los estudiantes transiten por la secuencia interactuando y validando sus respuestas con sus pares, se realizaron cada una de las actividades en grupos de tres a cuatro personas escogidas por ellos según su afinidad, generando ocho grupos de trabajo que lograron mantenerse unidos durante toda la secuencia didáctica.

continuación, se definen de forma simple los grupos de trabajo que se formaron para realizar las actividades de la secuencia:

Grupo 1: corresponde a un grupo mixto de tres estudiantes que se caracterizan por ser responsables y participativos en las clases de matemáticas.

Grupo 2: Son cuatro estudiantes, todas mujeres, que han tenido buenas calificaciones durante el año en curso en la asignatura de matemática, pero con poca participación en clases.

Grupo 3: Corresponde a un grupo mixto de cuatro estudiantes en donde dos de ellos se destacan por su esfuerzo e interés por aprender matemática, uno de ellos tiene problemas con la asistencia a clases.

Grupo 4: Son un grupo mixto de cuatro estudiantes con buen desempeño académico en general y que dejan entrever facilidad al aprender matemática.

Grupo 5: Es un grupo de cuatro estudiantes, todos varones; dos de ellos tienen buenas calificaciones en matemática y los otros dos se esfuerzan por aprender, uno de ellos pertenece al programa PIE.

Grupo 6: Corresponde a tres estudiantes mujeres con buenas calificaciones en matemáticas y que se esfuerzan constantemente por mejorar sus aprendizajes.

Grupo 7: Son un grupo de tres varones, dos de ellos pertenecientes al programa PIE, uno de los estudiantes es participativo a pesar de que comete errores constantemente, se esfuerzan por mejorar sus calificaciones.

Grupo 8: es un grupo conformado por cuatro estudiantes, de origen mixto, que presentan poca participación en clases pero que responden con esfuerzo cuando se les realiza alguna interrogante, dos de los estudiantes ingresaron al establecimiento este año.

3.5 Instrumento

El instrumento consiste en una propuesta de aprendizaje que contempla una actividad diagnóstica y cuatro etapas de trabajo diseñadas como actividades de estudio y de investigación, cada una de ellas contiene preguntas de introducción a la actividad, desarrollo y cierre de la actividad por medio de la formalización del concepto matemático, de modo que se les presentan situaciones e institucionalización en los que los estudiantes exploran los materiales, utilizan objetos del cotidiano como por ejemplo botellas, vasos, regla, lana, entre otros, y discuten con sus compañeros de grupo sus ideas.

Dicho instrumento fue corregido y validado por el juicio de dos expertos que aceptaron participar voluntariamente de la validación y que realizaron recomendaciones en conjunto para mejorar la secuencia didáctica (Anexo 4).

3.5.1 Estructura del instrumento

La secuencia de aprendizaje está constituida por una actividad diagnóstica (etapa 0) y cuatro etapas, cada una de ellas formulada en términos de guía de trabajo para las y los estudiantes de modo que registren sus respuestas de forma escrita, cada una de las cuatro etapas inicia con un cuestionamiento principal (Q_i) y se divide en secciones; la cantidad de secciones depende de los objetivos de aprendizaje que se busca alcanzar, ya que cada sección aborda un contenido distinto al relacionado con el estudio de la circunferencia, y lo articula con los contenidos estudiados en la etapa anterior.

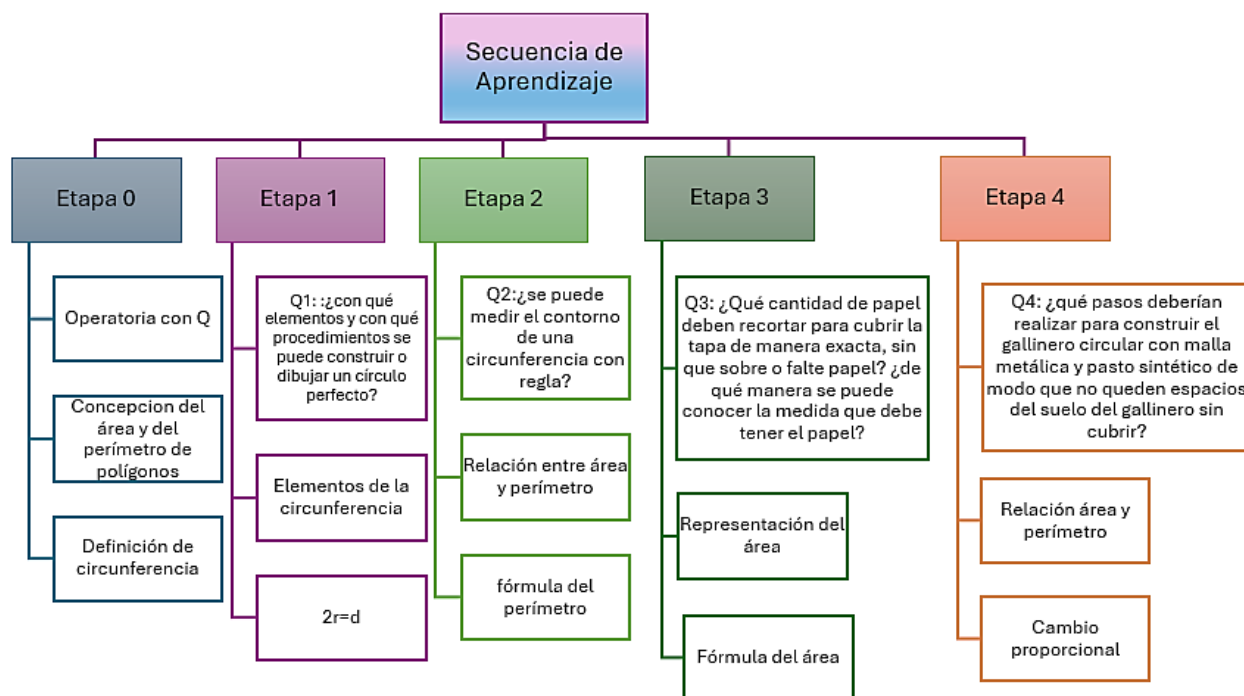


Imagen 3.2: Etapas de la secuencia de aprendizaje. Elaboración propia.

La imagen anterior, presenta a grandes rasgos los elementos que se presentan en cada una de las etapas de la secuencia.

A continuación, se describen las 4 etapas de la secuencia de aprendizaje, sus propósitos y la lógica progresiva seguida entre ellas, detallando las secciones que componen cada una de ellas:

En la primera etapa de la secuencia didáctica se espera que las y los estudiantes aprendan sobre los elementos de la circunferencia; centro, radio y diámetro, la comprensión de estos objetos matemáticos es fundamental para el estudio del área y del perímetro. En la sección 1 está acondicionada con el fin de que logren definir el centro y el radio de la circunferencia, la sección 2 busca que los estudiantes logren establecer las características del radio, por ejemplo, que todos tienen la misma medida. En la sección 3 se espera establecer la definición del diámetro como el segmento de mayor medida que se encuentra al interior de la circunferencia, mientras que en la

sección 4 debe establecer la relación entre el diámetro y el radio. En las situaciones de institucionalización se formaliza el nombre, símbolo y denominación de cada elemento de la circunferencia. Las dificultades que se pueden presentar en esta sección se relacionan directamente con el cambio en la manera de presentar las actividades, ya que, tanto los estudiantes como el docente no han vivenciado actividades de estudio y de investigación en la que el profesor es solo un guía y los alumnos construyen su aprendizaje.

Las actividades de la segunda etapa de la secuencia didáctica están orientadas a que los estudiantes aprendan sobre el perímetro de la circunferencia y la definición del número π , se antepone este conocimiento por sobre el área ya que en esta etapa de la secuencia las y los estudiantes conocen el número π que posteriormente interviene en las fórmulas para calcular el perímetro y el área de la circunferencia. En la sección 1 debe utilizar los materiales para establecer una relación entre el contorno y el diámetro de elementos circulares y cilíndricos. La sección 2 busca establecer la relación anterior, pero de forma numérica al completar una tabla. La sección 3 corresponde a situaciones de institucionalización en donde se formaliza el perímetro y el número π , y la fórmula algebraica para encontrar el valor numérico del contorno de una circunferencia cualquiera. En esta parte de la secuencia la dificultad que se presenta se relaciona con el temor a realizar cálculos matemáticos sin seguir el procedimiento que realiza el docente y sin consultarle si los pasos que realizaron están correctos, a pesar de que se les permite el uso de la calculadora.

Las actividades de la tercera etapa de la secuencia se enfocan en que los estudiantes comprendan el área de la circunferencia. La sección 1 corresponde a una actividad manual en la que deben cubrir una circunferencia de papel con lana, cortarla por su radio y construir una nueva figura geométrica con la lana utilizada, en la sección 2 deben identificar elementos de la circunferencia en un triángulo formado con la lana. La sección 3 es la última sección y en ella se

establece que el valor del área de la circunferencia es igual al área del triángulo es la misma, porque se utiliza la misma cantidad de lana. En esta sección la situación de institucionalización incluye el trabajo algebraico para obtener la fórmula del área para cualquier circunferencia. La dificultad que se experimentó en esta parte de la secuencia se relaciona con el dominio algebraico que tenían los estudiantes del nivel al momento de establecer la fórmula para el cálculo del área de la circunferencia, por lo tanto, gran parte del proceso debió ser guiado por el docente, pero con preguntas para incentivar la participación de los estudiantes.

La última etapa de la secuencia busca que los alumnos establezcan una relación entre el área y el perímetro, en la sección 1 contiene tres actividades claves, en la primera deben dibujar una circunferencia máxima en un espacio con medidas determinadas e identificar el valor del radio y de diámetro de esta, en la segunda actividad deben identificar qué material de los entregados representan el área y el perímetro de la circunferencia anterior y, finalmente, la actividad 3 les pide identificar el valor del perímetro y el área a través de la suma del material concreto y la validación del valor por medio de las fórmulas institucionalizadas en las etapas dos y tres de la secuencia. La sección 2 busca establecer una relación entre el perímetro y el área de la circunferencia por medio de la variación del valor del radio, esta relación es formalizada en la última sección de la secuencia. Esta parte de la secuencia fue motivadora para los estudiantes, pero la dificultad se evidenció al momento de institucionalizar la relación entre el perímetro y el área de la circunferencia; si bien se logró establecer que, si el radio aumenta, aumenta el valor del perímetro y del área, no se puede establecer que los estudiantes comprendieron que lo hacen en distinta proporción.

A continuación, se presenta un esquema en que se pueden visualizar las situaciones de tensión que permiten generar aprendizaje considerando cada etapa de la secuencia.

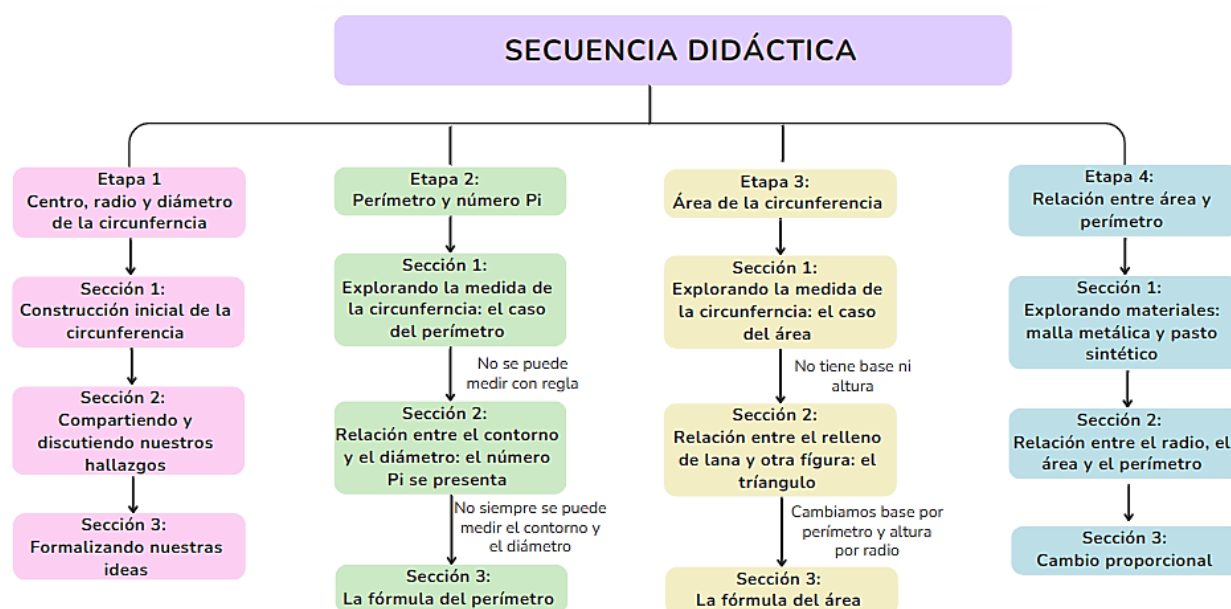


Imagen 3.3: Secuencia de aprendizaje de la circunferencia. Elaboración propia.

El esquema presenta cada una de las etapas de la secuencia didáctica, revelando que en la primera de ellas se construyen los elementos principales de la circunferencia: centro, radio y diámetro llegando a su caracterización con la participación activa de las y los estudiantes. En la segunda etapa se busca estudiar el perímetro de la circunferencia, estableciendo una primera problemática: el círculo no se puede medir con regla, de modo que se establece la relación entre el contorno y el diámetro de la circunferencia y con ella, la aparición del número PI. Una segunda problemática de esta etapa corresponde a que no siempre se puede medir el contorno y el diámetro de una circunferencia, por lo tanto, es necesario establecer la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia. En la tercera etapa se estudia el área de la circunferencia relacionándola con el área de un triángulo, lo que lleva a la formalización de la fórmula del área de la circunferencia. Finalmente, en la etapa cuatro se busca establecer una relación entre el perímetro y el área de la circunferencia a través de la posible construcción de un gallinero circular con malla metálica y pasto sintético.

3.5.2 Análisis a priori del instrumento

A continuación, se presentan los indicadores del análisis a priori para cada una de las actividades que componen la secuencia didáctica, detallando los objetivos, habilidades, respuestas esperadas, respuestas que podrían entregar los estudiantes y posibles preguntas auxiliares.

Actividad Diagnóstica

Para la actividad diagnóstica se establecieron los indicadores que se presentan en la tabla 3.1, ya que el objetivo es identificar los conocimientos previos que poseen los estudiantes, esta actividad no requiere de preguntas auxiliares y se responde de forma individual. El tiempo estimado para esta actividad fue de 60 minutos.

Tabla 3.2

Indicadores para la actividad diagnóstica

Actividad	Objetivos	Repertorio de Respuestas	Habilidades
Actividad 1	Mostrar que resuelven multiplicaciones con números racionales positivos.	Respuesta Esperada: Se espera que el estudiante resuelva la multiplicación de números naturales con decimales positivos, y la multiplicación entre decimales positivos. identificando el resultado como un número decimal ubicando correctamente la posición de la coma. Respuestas Posibles: Se debe considerar que los estudiantes pueden no recordar o no conocer el procedimiento para multiplicar decimales o que se compliquen cuando el divisor tiene más dígitos que el dividendo, por lo que pueden no llegar al resultado correcto o bien,	Resolución de operatoria básica con números racionales

		no establecer correctamente el lugar de la coma en el decimal resultante. En la retroalimentación el docente debe reforzar la operación y recordarles la conmutatividad de la multiplicación.	
Actividad 2	Mostrar que resuelven problemas que involucran área de cuadriláteros	Respuesta Esperada: Se espera que el estudiante logre identificar cuál superficie de frazada es mayor, por lo que debe calcular el área de lo tejido por Santiago y Valeria, aplicando la multiplicación de números racionales positivos, luego comparar los resultados. Respuestas Posibles: Al igual que en la pregunta anterior los estudiantes pueden errar las respuestas por dificultades en el procedimiento de multiplicación de decimales. Se debe considerar la posibilidad de que confundan las fórmulas para el área y que multipliquen de forma duplicada los valores del área y el perímetro. Otra respuesta que se puede presentar es que en lugar de calcular el área calculen el perímetro de cada frazada, obtendrán la respuesta correcta, pero con el procedimiento erróneo.	Comprensión del problema: comparar resultados e identificar el valor mayor. Resolución de operatoria básica con números racionales.
Actividad 3	Mostrar que comprenden los conceptos de área y perímetro y la relación entre los conceptos matemáticos.	Respuestas Esperadas: El estudiante debe responder las preguntas estableciendo con sus propias palabras lo siguiente: El área de un polígono corresponde a la superficie determinada al interior de los límites de estas (aristas de la figura), se puede calcular multiplicando la longitud de	Definición de conceptos relacionados con el área y el perímetro de figuras planas identificando su relación y unidad de medida.

		dos de sus lados o bien, multiplicando la base por la altura, en caso del rectángulo o cuadrado. ● El perímetro de un polígono corresponde a la longitud de su contorno, se puede calcular como la suma de las longitudes de todos sus lados. ● El área se representa en unidades cuadradas y el perímetro en unidades lineales. ● No se puede utilizar la misma unidad para medir el área y perímetro ya que el área se utiliza para medir la superficie interior de la figura y el perímetro para su contorno. ● El área y el perímetro determinan el tamaño de una figura geométrica, por lo tanto, si una aumenta la otra también debe aumentar y si una disminuye, la otra también debe disminuir. ● El área y el perímetro de los polígonos no aumentan ni disminuyen de forma proporcional. Respuestas Posibles: El estudiante puede confundir los conceptos de área y perímetro y asociar la suma de las longitudes de los polígonos al área y la multiplicación con el perímetro. Otra respuesta posible es que tanto el área como el perímetro tienen la misma unidad de medida, ya que para ellos la multiplicación de números no se ve afectada por las unidades. Se debe considerar que los estudiantes pueden no establecer	
--	--	---	--

		diferencias o relaciones del área o perímetro en cuanto a la unidad de medida.	
Actividad 4	Mostrar que resuelven situaciones que involucran el cálculo del área y el perímetro de cuadriláteros y triángulo	Respuesta Esperada: El estudiante debe calcular el área de cada polígono utilizando las fórmulas de área para cuadriláteros y triángulos según corresponda, utilizando los valores de base y altura o bien largo por ancho. El alumno debe calcular el perímetro de cada polígono identificando en primer lugar los lados que son de igual medida y luego sumando la longitud de cada arista. Respuestas Posibles: Se debe considerar que el estudiante puede confundir los procedimientos y sumar para calcular el área y/o multiplicar para calcular el perímetro.	Resolución de ejercicios que involucran el cálculo del área y del perímetro de figuras planas aplicando fórmulas.
Actividad 5	Identificar los elementos y las características de la circunferencia	Respuesta Esperada: Es un contenido no estudiado en niveles anteriores por lo que se espera que identifiquen que es una figura geométrica llamada círculo o circunferencia, que es un objeto redondo, que posee centro y se puede dibujar con un compás. Respuestas Posibles: Los estudiantes pueden establecer que la figura es una figura redonda o circular, que se puede dibujar usando objetos circulares, cilíndricos o redondos.	Caracterización de la circunferencia y sus elementos, se puede apoyar por medio del dibujo.

Elaboración propia

Etapa 1: Elementos de la circunferencia

La tabla que se presenta a continuación (tabla 3.3), presenta los indicadores de evaluación para la primera etapa de la secuencia de aprendizaje, con la que se espera que los estudiantes definan el concepto de circunferencia, centro, radio y diámetro. A diferencia de la actividad anterior, esta etapa se divide en preguntas y no en actividades, y se presentan posibles preguntas auxiliares para apoyar el tránsito de los estudiantes por la actividad.

Los materiales para utilizar en el desarrollo de las actividades corresponden a un ovillo de lana, un plumón, un soporte con ventosa plástica para pizarra y tijeras. Los materiales serán utilizados por la profesora en la pizarra de la sala, pero los estudiantes pueden interactuar voluntariamente con los elementos para que puedan validar la información entregada por la docente. Para realizar la actividad los estudiantes se reúnen en grupos de tres o cuatro personas y el tiempo estimado para esta actividad es de 70 minutos.

Tabla 3.3

Indicadores para etapa 1

Pregunta	Objetivos	Repertorio de Respuestas	Habilidades	Preguntas Auxiliares
Pregunta 1 y 2	Motivar e introducir la actividad a realizar. Definir el concepto de circunferencia a	Respuesta Esperada: La profesora realizará el dibujo de una circunferencia utilizando la lana como un compás y utilizando la ventosa plástica como centro. Respuesta Posible: Se espera que los estudiantes identifiquen qué figuras se pueden	Argumentación de sus respuestas frente a sus pares.	¿Cómo utilizaron los materiales para dibujar? ¿Cómo utilizó la profesora los materiales para dibujar la circunferencia?

		formar con los materiales, es posible que utilicen la lana como una regla y dibujen polígonos.		
Pregunta 3	Identificar el centro de la circunferencia	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben identificar que el centro de la circunferencia corresponda a la ventosa plástica, indicando que está “en el medio de la circunferencia” Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes ubiquen el centro en el otro espacio de la circunferencia, esto se puede retroalimentar solicitando que utilicen la lana para dibujar una circunferencia y establecer si se replica la circunferencia dibujada por la profesora.	Identificación de conceptos espaciales y argumentación.	Si se mueve la ventosa plástica ¿se va a dibujar la misma circunferencia ?

Pregunta 4, 5 y 6	Definir el radio de una circunferencia.	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes identifiquen que el radio de una circunferencia es un segmento que inicia desde el centro de la circunferencia y va hacia cualquier punto en ella. Los estudiantes deben establecer que la medida del radio define el tamaño de la circunferencia. Respuesta Posible: Puede que los estudiantes no logren identificar que un radio es cualquier segmento que llega hasta cualquier punto de la circunferencia y que piensen que sean solo las dibujadas en la pizarra. También es posible que no logren identificar que un radio define el tamaño de la circunferencia, para ello se puede realizar la actividad en la pizarra modificando la lana que permite dibujar la circunferencia.	Validación de intuiciones generadas en el momento del aprendizaje a través de la argumentación poniendo en práctica diversas ideas.	¿Cuál es la diferencia si se utiliza una lana más larga que otra para dibujar una circunferencia? ¿todos los segmentos trazados desde el centro hasta la circunferencia pueden ser un radio?
-------------------------------------	--	---	--	---

Pregunta 7 y 8	Establecer que una circunferencia tiene infinitos radios y todos son de la misma medida	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben identificar que una circunferencia tiene infinitos radios que poseen una única medida. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes indiquen en primera instancia que una circunferencia tiene un número limitado de radios, por ejemplo, pueden ser formando una cruz o una x con ocho radios en la circunferencia. También puede que consideren que las medidas de los radios son diferentes porque llegan a lugares diferentes de la curva, pueden verificar sus creencias comprobando con la lana en la pizarra.	Validación de intuiciones generadas en el momento del aprendizaje a través de la argumentación poniendo en práctica diversas ideas, como la comparación de medidas por medio de la observación y reflexión.	¿se puede dibujar una única circunferencia con radios de diferente medida?
Pregunta 9	Definir el diámetro de una circunferencia	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes indiquen que el segmento de mayor medida que va de un punto a otro en la circunferencia corresponde a un diámetro. Respuesta Posible: Es posible que consideren otra cuerda como la de mayor medida, p bien, que existe la posibilidad que consideren que diversos diámetros tiene distintas	Validación de intuiciones generadas en el momento del aprendizaje, a través de la argumentación poniendo en práctica diversas ideas, como la comparación de medidas por medio de la observación y reflexión.	¿cuántos diámetros puede tener una circunferencia ?

		medidas debido a que llegan a distintos lugares de la curva, ambas situaciones pueden verificarlo de manera empírica con la lana en el dibujo de la pizarra		
Pregunta 10	Definir el diámetro a partir del radio	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes logren establecer que un diámetro está compuesto por dos radios, pero es importante establecer que estos radios deben ser colineales y paralelos. Respuesta Posible: Es esperable que algunos estudiantes no logren identificar la relación entre el radio y el diámetro por lo que establezcan solo que uno tiene mayor medida que otro, por ello es necesario ayudarlos a identificar que tienen al centro como elemento en común y pueden dibujar los radios que conforman un diámetro.	Asociación de ideas respecto a elementos que tienen uno o más elementos en común. Argumentación de respuestas por medio de la observación y la construcción geométrica.	¿Qué características tienen en común el diámetro y el radio? ¿Cuántos radios permiten obtener un diámetro?

Elaboración propia

Etapas 2: Perímetro de la circunferencia

En esta actividad se busca que los estudiantes aprendan sobre el perímetro de la circunferencia, pero para ello es necesario que conozcan el número Pi, concepto que se formaliza en esta guía de trabajo. En esta parte de la secuencia deben manipular objetos circulares o cilíndricos y deducir información por medio de la medición y relación del contorno y el diámetro

de diversas circunferencias. La tabla 3.4 entrega los indicadores de evaluación de la tercera parte de la secuencia didáctica. El tiempo estimado para esta actividad fue de 70 minutos.

Tabla 3.4

Indicadores para etapa 2

Pregunta	Objetivos	Repertorio de Respuestas	Habilidades	Preguntas Auxiliares
Previo a la actividad	Motivar e introducir la actividad a realizar por medio de la manipulación de los materiales y relacionando lo aprendido en la actividad anterior.	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes identifiquen que con los materiales pueden dibujar o producir circunferencias de diversos tamaños. Respuesta Posible: Es posible que consideren que van a medir para comparar medidas de circunferencias o de los elementos de ella que aprendieron con la actividad anterior.	Argumentación de sus respuestas frente a sus pares.	
Pregunta 3	Establecer una relación matemática entre el diámetro y el perímetro de cada circunferencia	La actividad consiste en rodear cada elemento con lana para definir circunferencias, cortar y reservar la lana, luego deben utilizar la lana para establecer la medida del diámetro de cada objeto y buscar una relación entre los del diámetro y del contorno de cada uno de los objetos que poseen. Respuesta Esperada: Se espera que logren establecer que la lana de menor tamaño cabe aproximadamente tres veces en la lana mayor.		¿Cómo podemos formar una circunferencia perfecta utilizando la lana y el objeto? ¿Es posible llegar a la medida de la lana mayor con la lana de menor tamaño?

		Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes solo logren establecer que una lana es de mayor medida que la otra, por lo tanto, es importante guiar a una división.		
Preguntas 4 y 5	Completar la tabla y realizar conjeturas con los datos obtenidos	Respuesta Esperada: En esta parte de la secuencia los estudiantes deben medir las lanas obtenidas para completar la tabla y luego dividir llegando a valores aproximados a 3,14. Para facilitar el cálculo se les puede permitir el uso de calculadora y escribir la respuesta truncando a 2 decimales. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes no midan correctamente la lana, o bien, que no formen la circunferencia al definir el contorno con ella, sino que formen figuras elípticas, lo que modificaría el valor de la división, si eso ocurre, el grupo puede intentar medirlo nuevamente.	Medición de elementos utilizando herramientas manuales (regla o huincha de medir). Resolución de operatoria básica con números racionales.	
Actividad posterior	Definir el valor de Pi y establecer la fórmula para el perímetro	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben establecer que el valor de Pi se aproxima a 3,14 y se le asigna el símbolo π . Se debe formalizar que la medida que corresponde al contorno de la circunferencia se denomina perímetro y se puede calcular por medio de la transformación de la ecuación $\pi = c:d$.	Relación de los conceptos contorno y perímetro de la circunferencia y asociarlo a una fórmula.	Si $\pi = c:d$ ¿Cuál es el valor del contorno?

		Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes no logren llegar a la fórmula $P = \pi \cdot d$, debido a que no consideran reemplazar c por P (contorno por perímetro), también es importante considerar que en el nivel de 7° básico no resuelven ecuaciones con producto, por lo tanto, es necesaria la intervención del docente para construir la fórmula. Posteriormente, se debe incorporar el cambio de variable de diámetro a dos veces el radio ($d = 2r$) obteniendo $P = 2r\pi$		
--	--	--	--	--

Elaboración propia

Etapla 3: Área de la circunferencia

Esta guía de trabajo busca que los estudiantes construyan el concepto de área de la circunferencia formalizando la fórmula con el apoyo del docente, para poder desarrollar esta actividad, en las clases previas se reforzó el contenido de potencias y, adicional a los materiales establecidos en la guía, se les facilita un compás que aprendieron a utilizar previo a la secuencia didáctica. En la tabla siguiente (tabla 3.5) se presentan los indicadores de evaluación para la actividad. El tiempo estimado para esta actividad fue de 80 minutos.

Tabla 3.5

Indicadores para etapa 3

Pregunta	Objetivos	Repertorio de Respuestas	Habilidades	Preguntas Auxiliares
-----------------	------------------	---------------------------------	--------------------	-----------------------------

Previo a la actividad y pregunta 1	Motivar e introducir la actividad a realizar por medio de la manipulación de los materiales y relacionando lo aprendido en la actividad anterior.	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes identifiquen que con los materiales van a cubrir una circunferencia, es decir, que trabajaran con el área considerando que en la clase anterior aprendieron sobre el perímetro. Respuesta Posible: Puede que los estudiantes consideren cubrir objetos cilíndricos o circulares como en la clase anterior, pero al continuar la actividad comprenderán que utilizaran una circunferencia dibujada en una hoja de papel.	Argumentación de sus respuestas frente a sus pares.	
Actividad a y b	Manipular los materiales para que identifiquen que próximamente trabajarán en el área de la circunferencia	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben dibujar con el compás una circunferencia en una hoja de papel, esta debe cubrir toda la superficie de la hoja y van a rellenarla con circunferencias de lana desde el borde hasta el centro. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes busquen realizar la actividad de manera rápida y en lugar de rellenar con circunferencias lo realicen en forma de espiral o bien no cubren toda la circunferencia con la lana, en ambos casos se debe corregir y se debe solicitar volver a realizar la actividad, ya que es	Tolerancia al desarrollar una actividad manual que es repetitiva y requiere precisión.	

		necesario seguir las instrucciones para la pregunta siguiente.		
Pregunta 2	Identificar que cubrir una figura geométrica en su totalidad corresponde a establecer el área de dicha figura	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes relacionen la actividad anterior con el área de una circunferencia. Respuesta Posible: Puede que los alumnos no encuentren la relación porque anteriormente han ejercitado superficies utilizando otro tipo de materiales, como por ejemplo pintura, siembras, etc.	Relación entre una actividad y un concepto geométrico conocido.	Si se cubre una figura geométrica ¿Qué concepto matemático se está trabajando?
Actividad c Preguntas 3, 4 y 5	Preparar la actividad principal de la secuencia	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben manipular la lana y formar un triángulo e identificar la base y la altura de este. Respuesta Posible: Es posible que quieran formar figuras curvas o bien que no cubran por completo la superficie de nueva figura, es necesario orientar que el uso de la lana debe ser en forma recta y que se debe cubrir toda la figura creada con todos los trozos de lana que se obtuvieron al desarmar la circunferencia, Los alumnos deben identificar la base y la altura del triángulo formado, si no recuerdan el docente deberá orientarlos a recordar.	Construcción de una figura geométrica siguiendo las instrucciones. Reconocer los elementos de un triángulo.	
Preguntas 6 y 7	Relacionar elementos del	Respuesta Esperada:	Relación entre elementos de	Si se dibuja la circunferencia

	triángulo con elementos de la circunferencia	Se espera que los estudiantes identifiquen que la altura del triángulo corresponde al radio y la base corresponde al contorno de la circunferencia. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes no asocien los elementos y para orientarlos sería útil que con lanas vuelvan a construir la circunferencia y establecer la relación.	diferentes figuras geométricas a partir de la observación, manipulación y la transformación de ellas.	¿en qué lugar se puede ubicar la lana que forma la base del triángulo?
Pregunta 8	Establecer la fórmula del área del triángulo rectángulo en términos de la circunferencia	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes logren establecer el área del triángulo en términos del perímetro y del radio de la circunferencia. Esta pregunta requiere de rigor matemático por lo que debe ser guiada por el docente, considerando el nivel y las dificultades algebraicas que se pueden presentar. En primera instancia se debe establecer la fórmula del área del triángulo considerando la base “b” y altura “a” $A_T = \frac{b \cdot a}{2}$ Posteriormente, se debe recordar que la base del triángulo es el contorno de la circunferencia que corresponde al perímetro “P” y la altura corresponde al radio “r”, reemplazando en la fórmula se tiene:		Se pueden incluir preguntas auxiliares para ayudar a comprensión de los estudiantes: ¿Cuál es la fórmula para calcular el área del triángulo? Si la altura corresponde al radio ¿con qué letra se puede denominar? Si la base corresponde al perímetro ¿con qué letra se puede denominar? Si se divide un número por sí mismo ¿cuál será el resultado? Si se multiplica dos veces un

		$A_T = \frac{P \cdot r}{2}$ De la clase anterior se tiene que $P = 2 \cdot r \cdot \pi$ y reemplazando tenemos: $A_T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot r}{2}$ Ordenando la ecuación tenemos: $A_T = \frac{2 \cdot r \cdot r \cdot \pi}{2}$ Resolviendo $\frac{2}{2}$ y $r \cdot r$ se tiene $A_T = r^2 \cdot \pi$		número ¿Cómo se puede escribir como potencia?
Pregunta 9 y 10	Establecer el área de la circunferencia	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes comprendan que la cantidad de lana utilizada se puede calcular con la fórmula establecida, y como la cantidad de lana es la misma utilizada para cubrir la circunferencia y el triángulo la fórmula de la circunferencia es: $A_C = r^2 \cdot \pi$	Relación entre elementos que se corresponden en cantidades equivalentes.	

Elaboración propia

Etapla 4: Relación entre el área y el perímetro de la circunferencia

La secuencia didáctica finaliza con esta guía de trabajo, que busca establecer una relación entre el perímetro y el área de una circunferencia con medidas propuestas por medio de una actividad que se puede llevar a cabo en un espacio existente del establecimiento, esto motivó

profundamente a los estudiantes para realizar la actividad que consiste en construir un gallinero circular con malla metálica y pasto sintético. Para ello, se le entrega a cada grupo de estudiantes trozos de goma Eva y sectores circulares de cartulina que simulan la malla metálica y el pasto sintético respectivamente. La medida para construir el gallinero es de 10,8 metros y 13,95 metros, convertidos a cm para que los estudiantes puedan manipular los materiales, de modo que cada trozo de goma eva tiene una longitud de 6,78 cm y la cartulina un área de 18,31 cm², de tal manera que puedan construir la circunferencia requerida.

La tabla siguiente (tabla 3.6) presenta los indicadores de evaluación para guía de trabajo, el tiempo estimado para esta actividad fue de 80 minutos.

Tabla 3.6

Indicadores para etapa 4

Pregunta	Objetivos	Repertorio de Respuestas	Habilidades	Preguntas Auxiliares
Pregunta introductoria	Diseñar un plan de trabajo para la construcción de gallinero	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben identificar los materiales que requieren para construir el gallinero circular, se les indican las medidas del terreno y su representación en centímetros para que puedan trabajar en el proyecto. Respuesta Posible: Puede que los estudiantes no identifiquen que primero deben medir el espacio de construcción, sino que indiquen los pasos a utilizar de forma genérica, para establecer la importancia de medir el espacio a utilizar, al	Construcción de un plan de trabajo con pasos a seguir identificando un orden lógico	¿Qué pasos se deben realizar para comenzar una construcción? ¿Cómo puedo saber cuánto material se debe utilizar?

		compartir sus respuestas se debe resaltar al grupo que lo indique o bien incentivar la respuesta.		
Pregunta 1	Identificar el espacio para realizar la actividad y las unidades de medida del proyecto con su representación en centímetros	Respuesta Esperada: Para responder esta pregunta, los estudiantes pueden utilizar la última página de la guía en donde se les presenta un rectángulo con las medidas del terreno representadas en centímetros, se les entrega un compás y una regla para que puedan medir y encontrar el valor del radio que corresponde a 5,4 cm, la mitad del valor de la altura del rectángulo. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes encuentren un radio menor o de otra medida por no utilizar todo el espacio del rectángulo o por tener dificultades con las herramientas proporcionadas, en este caso es importante orientar el dibujo. Otra respuesta posible es que consideren solo el valor del diámetro y no dividan la altura del rectángulo en dos, en cuyo caso hay que recordarles que estamos en búsqueda del radio y definirlo en conjunto con el grupo de trabajo, también es posible que no realicen el dibujo y deduzcan el valor de	Argumentación de sus respuestas por medio del trabajo empírico y explicación de sus ideas	¿A qué unidad de medida podemos traspasar los metros para que sea más fácil trabajar en el diseño? ¿Qué elementos podemos medir en la circunferencia dibujada? ¿Cuáles son las medidas de los elementos que han aprendido en la circunferencia dibujada?

		forma mental. Para todos estos casos, es importante que el docente corrija y guíe al desarrollo correcto para que puedan trabajar con los mismos datos que el resto del curso y no se confundan en la formalización.		
Preguntas 2 y 3	Calcular el valor del perímetro de una circunferencia	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben identificar que “cercar” el gallinero circular y calcular la medida de la cerca corresponde a calcular su perímetro, en la pregunta 2 se debe realizar con la suma de 5 trozos de goma eva y en la pregunta 3 se debe realizar con la fórmula. Los estudiantes deben llegar a los siguientes valores: Suma o multiplicación de los trozos de malla metálica: $P = 6,78 \cdot 5 = 33,9 \text{ cm}$ Con la fórmula del perímetro se tiene (utilizando $\pi = 3,14$): $P = 2 \cdot 5,4 \cdot 3,14 = 33,912 \text{ cm}$ Se debe establecer que el valor del perímetro se puede establecer como 33,9 cm. Respuesta Posible: Los estudiantes pueden responder utilizando la fórmula del área en lugar del perímetro, previo a compartir las respuestas el docente puede preguntar cuál es la	Relación entre el perímetro y actividades que hacen referencia al concepto geométrico. Resolución de operatoria con números racionales. Comparación de resultados para verificar igualdad	¿Qué significa cercar un espacio? ¿A qué actividad ya realizada en las clases anteriores se parece el término cercar un espacio circular? ¿Cómo podemos utilizar la goma eva para cercar el gallinero? ¿Cómo se calculaba el perímetro de la circunferencia?

		fórmula para calcular el perímetro. Existe la posibilidad de que los estudiantes tengan problemas con la suma o la multiplicación de decimales, si bien saben realizar ambas operaciones con números racionales, pero para evitar errores de cálculo pueden utilizar una calculadora para comprobar sus resultados, aproximando Pi a 3,14. Para que los estudiantes lleguen a que los valores son equivalentes y no los consideren distintos, el docente debe indicar que el resultado con fórmula debe ser aproximado a la décima.		
Preguntas 4 y 5	Calcular el valor del área de una circunferencia	Respuesta Esperada: Los estudiantes deben identificar que “cubrir” el piso del gallinero circular y calcular la medida del material a utilizar corresponde a calcular su área, en la pregunta 4 se debe realizar con la suma de 5 piezas de pasto alfombra y en la pregunta 5 se debe realizar con la fórmula aproximando Pi a 3,14. Los estudiantes deben llegar a los siguientes valores: Suma o multiplicación de los trozos de pasto sintético: $A = 18,31 \cdot 5$ $= 91,55 \text{ cm}^2$	Relación entre el área y diversas actividades que hacen referencia al concepto geométrico. Resolución de operatoria con números racionales. Aplicación de fórmula para el área y el perímetro de una circunferencia. Comparación de números decimales con aproximación y truncamiento.	¿Qué significa cubrir con algún material un espacio? ¿A qué actividad ya realizada en las clases anteriores se parece cubrir con pasto alfombra un espacio circular? ¿Cómo se calculaba el área de la circunferencia?

		Con la fórmula del área se tiene: $A = 5,4^2 \cdot 3,14$ $= 91,5624 \text{ cm}^2$ Respuesta Posible: Al igual que en la respuesta anterior, puede utilizar calculadora para comprobar los resultados y para establecer que los valores son equivalentes, el docente debe indicar que ambos resultados deben ser aproximados a la décima, o bien truncados a la décima.		
Pregunta 6 y 7	Establecer los cambios que se producen en el perímetro y el área de una circunferencia al aumentar el valor del radio	Respuesta Esperada: Con estas preguntas se espera que los estudiantes recuerden que el tamaño de la circunferencia depende del tamaño del radio, por lo tanto, el valor del perímetro y del área también. Los estudiantes deben comparar los siguientes valores: El radio inicial es de 5,4 cm y aumentarlo doble significa que su valor será de 10,8 cm, por tanto, los valores eran los siguientes: $P_1 = 2 \cdot 5,4 \cdot 3,14$ $= 33,912 \text{ cm}$ $P_2 = 2 \cdot 10,8 \cdot 3,14$ $= 67,824 \text{ cm}$ Efectivamente el valor del perímetro aumenta el doble. $A_1 = 5,4^2 \cdot 3,14$ $= 91,5624 \text{ cm}^2$ $A_2 = 10,8^2 \cdot 3,14$	Resolución de problemas que involucran el área y el perímetro de la circunferencia al aumentar el valor del radio de una circunferencia. Aplicación de fórmula para el área y el perímetro de una circunferencia. Comparación de números decimales.	¿Qué sucede con la circunferencia si aumenta la medida del radio? ¿Qué significa aumentar un valor al doble? ¿Qué relación existe entre un resultado y otro? ¿Cuántas veces cabe un resultado en otro?

		$= 366.2496 \text{ cm}^2$ El área no aumenta el doble, sino que aumenta cuatro veces su valor ya que aumentó al doble. Respuesta Posible: Es posible que los estudiantes tengan problemas al cambiar el valor del radio por lo que es importante que el docente guíe los cálculos y, al igual que en las preguntas anteriores, puede apoyarse con una calculadora. Los alumnos pueden evidenciar que el área aumenta mucho más que el doble, pero no logren identificar que corresponde a 4 veces más, el docente puede hacer énfasis en la respuesta solicitando dividir el valor del área inicial con el valor del área con el radio aumentado, pero es imprescindible que destaque que el área aumenta en mayor cantidad que el perímetro.		
Pregunta 8	Establecer los cambios que se producen en el perímetro y el área de una circunferencia al disminuir el valor del radio	Respuesta Esperada: La pregunta infiere que el valor del perímetro disminuye el doble al disminuir el radio a la mitad, sin embargo, es importante que se compruebe con la operatoria correspondiente. Por lo tanto, si el radio inicial era de 5,4 cm el radio	Resolución de problemas que involucran el área y el perímetro de la circunferencia al disminuir a la mitad el valor del radio de una circunferencia. Aplicación de fórmula para el área y el	¿Cómo es posible comprobar que si el radio disminuye a la mitad el perímetro también? ¿Cómo podemos verificar cuánto

		disminuido será de 2,7 cm: $P_1 = 2 \cdot 5,4 \cdot 3,14$ $= 33,912 \text{ cm}$ $P_3 = 2 \cdot 2,7 \cdot 3,14$ $= 16,956 \text{ cm}$ Comparando los números efectivamente el valor del perímetro disminuye a la mitad. En la pregunta se pide verificar que ocurre con el valor del área: $A_1 = 5,4^2 \cdot 3,14$ $= 91,5624 \text{ cm}^2$ $A_3 = 2,7^2 \cdot 3,14$ $= 22,8906 \text{ cm}^2$ Se evidencia que el área no disminuye a la mitad, sino que disminuye 4 veces su valor, ya que se redujo a la mitad. Respuesta Posible: El docente debe guiar los cálculos en caso de que cometan errores al reemplazar los valores en la fórmula, y pueden utilizar calculadora para comprobar y corregir posibles errores. Es importante que el docente guíe la reflexión de los estudiantes para que se evidencie que, a diferencia del perímetro, disminuye más del doble.	perímetro de una circunferencia. Comparación de números decimales.	disminuyó el área?
Pregunta 9 y actividad final	Establecer una relación entre el área y perímetro de la circunferencia	Respuesta Esperada: Se espera que los estudiantes formalicen que al cambiar el valor del radio tanto el valor del área como del perímetro cambian, pero no en la misma cantidad.	Argumentación de la respuesta reflexionando sobre la actividad realizada	Si el radio disminuye de 5,4 cm a 1,5 cm ¿la disminución del perímetro también será del doble?

		Respuesta Posible: Los estudiantes pueden identificar que, al cambiar el valor del radio, cambian los valores del perímetro y el área, sin dar importancia en la magnitud del cambio, lo puede llevarlos a creer que aumentan de forma proporcional, por ello el docente debe recordar que aumentaron en distintas cantidades. Los alumnos pueden generalizar estos cambios y considerar que, frente a cualquier cambio del radio, el valor del perímetro aumentará al doble o disminuirá a la mitad, y que el valor del área aumentará 4 veces, o bien, disminuirá 4 veces. El docente debe dar énfasis en que los casos estudiados son casos particulares para comprender el suceso y que no siempre van a aumentar los valores del radio, el perímetro y el área en la misma proporción, resaltando que el área siempre aumentará o disminuirá en mayor medida que el perímetro.		Si el radio disminuye de 5,4 cm a 1,5 cm ¿la disminución del área también será 4 veces su valor? Si ahora el radio aumenta de 5ccm a 6 cm ¿el valor del perímetro aumentará al doble y el del área aumentará 4 veces?
--	--	--	--	---

Elaboración propia

Con esta actividad finaliza la secuencia, sin embargo, posterior a ella se aplica nuevamente la actividad diagnóstica para medir la evolución de los estudiantes.

4 CAPÍTULO: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan las respuestas de las y los estudiantes para cada una de las actividades de la secuencia didáctica incluyendo la actividad diagnóstica. Para la recopilación de la evidencia del proceso de aplicación de dicha secuencia, se incorporó, además de la secuencia en formato escrito, una bitácora de campo para registrar instancias que la docente consideró significativas durante la implementación. Para el estudio, análisis y comparación de los resultados obtenidos por las y los estudiantes, se realizarán diversas matrices que permiten vaciar las respuestas de las y los alumnos y comentarios de la profesora producto de observaciones de la clase que no fueron registradas de forma escrita por los estudiantes pero que se consideran relevantes para el análisis. Cada sección presenta una matriz desarrollada para registrar las transcripciones de las respuestas a las preguntas de cada sección y, también, una columna llamada “observaciones no registradas por los estudiantes” en la que se registran respuestas explícitas de los estudiantes o ideas que no registraron de forma escrita, como lo muestra la siguiente imagen.

Grupo	Respuesta 1	Complete	Observaciones no registradas por los estudiantes
1			
2			

Imagen 4.1: ejemplo de matriz para cada sección.

A diferencia de las etapas de la secuencia, la presentación de los resultados de la actividad diagnóstica se divide por actividades y no por secciones, ya que cada actividad propuesta busca identificar un tipo de conocimiento previos específico de las y los estudiantes. Además, dicha actividad diagnóstica es respondida por las y los alumnos de forma individual y no en grupos.

Para cada transcripción correspondiente a las respuestas de la secuencia, se omitirán las faltas de ortografía en las que hayan incurrido las y los estudiantes y se mantendrá su redacción para no afectar el análisis.

Es importante destacar que, previo a la aplicación de la secuencia, a las y los estudiantes se les presentó el compás como herramienta para dibujar círculos, dibujaron círculos de distintos tamaños utilizando como unidad de medida los cuadros de las hojas de sus cuadernos sin mencionar que dicha medida corresponde al radio de la circunferencia. Esta actividad les facilitó comprender y ubicar el centro de la circunferencia.

4.1 Actividad Diagnóstica

A continuación, se presentan las respuestas de la primera aplicación de la actividad diagnóstica que, como ya hemos planteado previamente, las y los estudiantes respondieron en forma individual y que busca identificar los conocimientos previos que poseen para establecer los posibles obstáculos o facilidades que podrían enfrentar para transitar por la secuencia didáctica.

Actividad 1

La primera actividad corresponde a tres ejercicios de multiplicación de número decimal con número entero y el producto de número decimal con otro número decimal.

Actividad 1:
Resuelve cada una de las siguientes multiplicaciones, escribiendo el desarrollo

1) $1,5 \cdot 3 =$ $\begin{array}{r} 15 \\ 45 \\ \hline 45 \end{array}$	2) $4 \cdot 3,14 =$ $\begin{array}{r} 4 \cdot 3,14 = \\ 16 \\ 4 \times \\ + 1256 \\ \hline 1256 \end{array}$	3) $1,4 \cdot 2,15 =$ $\begin{array}{r} 14 \cdot 215 = 2990 \\ 140 \\ 2800 \\ \hline 2990 \end{array}$
--	---	---

Imagen 4.2: Respuesta actividad 1, estudiante 1

Esta imagen, presenta una dificultad habitual en las y los estudiantes al multiplicar números decimales. En efecto, este estudiante realiza la multiplicación sin cambiar el orden de los factores, pero se presenta un error en el tercer ejercicio en el proceso de la multiplicación, ya que al multiplicar $14 \cdot 5$ obtiene como resultado 40.

Actividad 1:
Resuelve cada una de las siguientes multiplicaciones, escribiendo el desarrollo

1) $1,5 \cdot 3 = 4,5$ ✓	2) $4,3,14 = 3,14 \cdot 4 = 12,56$ 12,56	3) $1,4 \cdot 2,15 = 2,15 \cdot 1,4 = 3,010$ 2,15 × 1,4 ----- 860 + 2150 ----- 3010
-----------------------------	---	--

Imagen 4.3: Respuesta actividad 1, estudiante número 2

La imagen anterior, presenta la respuesta del estudiante denominado con el número 2; sus respuestas están correctas para cada ejercicio. Se observa que en los ejercicios 2 y 3 invierte el orden de los factores para resolver la multiplicación, y en cada ejercicio ubica la coma en la posición correcta.

Las respuestas de las y los alumnos se registran en la tabla siguiente (tabla 4.1) asignando a cada estudiante un número e indicando el resultado que obtuvo en cada ejercicio y las observaciones que se consideran pertinentes para el análisis posterior.

Para las observaciones se utilizan los siguientes códigos de posibles errores que pueden cometer las y los estudiantes:

- EPM: error en el proceso de multiplicación como error en el resultado del producto de los dígitos o la suma de estos.

- EPC: error en la posición de la coma; considera una ubicación errónea o bien la ausencia de ella.
- COF: Cambia el orden de los factores en la multiplicación
- NCOF: no cambia el orden de los factores en la multiplicación

Tabla 4.1

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 1

Número de estudiante	Devolución del estudiante			
	Ejercicio 1: $1,5 \cdot 3 = 4,5$	Ejercicio 2: $4 \cdot 3,14 = 12,56$	Ejercicio 3: $1,4 \cdot 2,15 = 3,010$	Observaciones
1	4,5	12,56	2,980	EPM
2	4,5	12,56	10,75	EPM y EPC
3	4,5	125,6	10,10	No presenta desarrollo en ejercicios 2 y 3.
4	4,5	1256	3010	EPC
5	4,5	1256	10190	EPM y EPC
6	4,5	16,52	2960	EPM y EPC
7	4,5	125,6	30,10	EPC
8	4,5	1226	3010	No presenta desarrollo en ejercicios 2 y 3.
9	4,5	13,11	3,010	EPM
10	4,5	12,16	3,010	EPM
11	4,5	3,18	3,019	No presenta desarrollo en ejercicios
12	45	12,56	30,10	EPC
13	45	1,256	3,010	EPC
14	45	12,56	1,075	EPM y EPC
15	45	12,56	2,60	EPC y no presenta desarrollo en ejercicios 3.
16	4,5	12,56	3,010	NCOF
17	4,5	12,56	3,010	NCOF
18	4,5	12,56	3,010	NCOF
19	4,5	125,6	30,10	EPC
20	60	-	-	EPM
21	4,5	125,6	10,10	EPM Y EPC
22	4,5	12,56	3,010	NCOF
23	4,5	12,56	3,010	NCOF

24	4,5	12,56	3,010	COF
25	45	1256	3,010	EPC
26	4,5	12,56	3,010	COF
27	4,5	12,56	3,010	COF
28	4,5	1256	3060	EPC
29	4,5	12,56	3,010	COF
30	4,5	12,56	3,010	COF

Elaboración propia

De la tabla anterior se puede establecer que el 76% de las y los estudiantes respondieron correctamente el ejercicio 1 de la actividad 1, que correspondía a multiplicar un decimal por un entero. La mitad de las y los alumnos responde correctamente al resolver el producto de un entero por un decimal; algunos de ellos mantienen el orden y otros lo invierten dejando como primer factor al decimal. Y más de la mitad de las y los estudiantes responden correctamente el ejercicio 3 de esta actividad, que consiste en multiplicar dos números decimales.

Si bien cada ejercicio es respondido correctamente por al menos la mitad de las y los alumnos, sólo un 33% de los estudiantes logran responder correctamente los 3 ejercicios de esta actividad. Los errores observados se deben a una aplicación incorrecta del algoritmo de la multiplicación al no respetar el dígito decimal y errores al escribir la posición de la coma. Con la información obtenida, se realizó una nivelación considerando el algoritmo de la multiplicación y la posición de la coma al operar números racionales, estableciendo que los errores corresponden a dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación de racionales, ya que no lograron integrar el conocimiento en los niveles anteriores.

Actividad 2

Para poder resolver la actividad 2 el estudiante debía calcular la medida del área de cada frazada y comparar los resultados obtenidos para identificar que la de mayor medida corresponde a Santiago, como lo muestra la imagen (imagen 4.3).

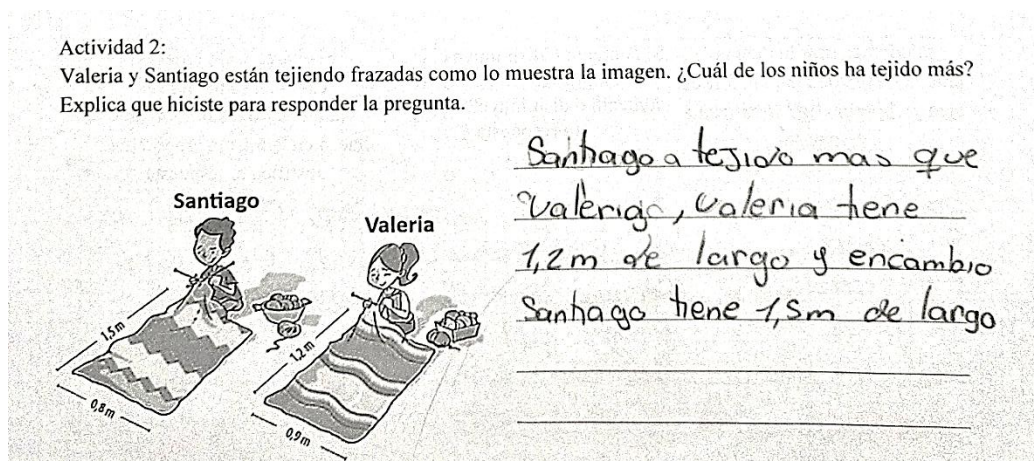


Imagen 4.4: respuesta de la actividad 2 de estudiante n°24

En la imagen se puede apreciar que el estudiante no calculó el área de la frazada y escribió el resultado correcto, pero por las razones equivocadas ya que justifica su respuesta considerando solo la medida del largo de la frazada de Santiago que es mayor a la de Valeria, sin considerar que el ancho de la frazada de Valeria es mayor a la de Santiago.

La tabla siguiente (tabla 4.2) muestra las respuestas de los estudiantes indicando si la respuesta fue Valeria o Santiago y las observaciones que se consideran pertinentes para el posterior análisis.

Tabla 4.2

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 2

Estudiante s	Valeria	Santiago	Observaciones
6 y 28			Los estudiantes no realizan actividad
15			El estudiante indica que debe calcular el área, realiza el cálculo, pero no responde la pregunta
23			El estudiante indica que se deben medir los lados de la frazada, pero no realiza los cálculos ni responde la pregunta
5, 13 y 20	x		Los estudiantes comparan las medidas e indican que como el ancho de la frazada de Valeria es mayor, ella ha tejido más.

25 y 26	x		Los estudiantes calculan el perímetro de la frazada y obtienen un resultado erróneo en la suma
11 y 19		x	Los estudiantes indican la respuesta correcta pero no argumentan la respuesta ni realizan cálculos.
1, 4, 9, 14, 16, 18, 22 y 24		x	Los estudiantes comparan las medidas del largo y del ancho de las frazadas estableciendo que: • La medida del largo de la frazada de Santiago es 0,3 metros mayor a la de Valeria • La medida del ancho de la frazada de Valeria es 0,1 metros mayor a la de Santiago. Como la diferencia de la medida del largo es mayor que la diferencia de la medida del ancho, Santiago ha tejido más. Obtiene la respuesta correcta, pero sin la argumentación esperada.
2, 3, 10, 12, 21, 27 y 30		x	Los estudiantes calculan el perímetro de cada frazada, obteniendo la respuesta correcta por las razones equivocadas
7, 8, 17 y 29		x	Los estudiantes calculan en área y obtienen la respuesta correcta con la argumentación esperada.

Elaboración propia

De la tabla anterior se puede concluir que:

- Cinco de los estudiantes indican que deben calcular o calculan el valor del área de cada frazada para responder la pregunta, se puede inferir que ellos comprenden el concepto de área, y cuatro de ellos aplican la fórmula para calcular el área de un cuadrilátero.
- Diez estudiantes indican que deben calcular o calculan el perímetro de las frazadas, se puede inferir que los estudiantes confunden o bien no reconocen que para responder la pregunta deben calcular el valor del área.
- Once estudiantes comparan las medidas del largo y del ancho para responder la pregunta, algunos justifican su respuesta considerando que la diferencia entre el largo de cada frazada es mayor a la diferencia entre el ancho, y por ello la frazada más larga es la de Santiago.
- Dos estudiantes escriben la respuesta correcta pero no la justifican, por lo tanto, no se puede identificar si comprendieron la pregunta o bien la hicieron al azar.

- Dos estudiantes no responden la pregunta y al consultarles porque omitieron su respuesta, indican que no entendieron que debían hacer.

Esta actividad permite establecer que los estudiantes no comprenden que tipo de problemas involucran el concepto de área de una superficie, o bien, confunden cuando deben utilizar el concepto de área o de perímetro para resolver un problema que no indica si se requiere calcular la superficie, el contorno o bien directamente los conceptos de área o perímetro.

Actividad 3

Para responder la actividad 3 los estudiantes deben reflexionar sobre los conocimientos que han adquirido en los niveles anteriores respecto del área y perímetro de los polígonos. En la actividad escrita se les presenta a las y los estudiantes un rectángulo con medidas de un dígito que pueden utilizar de ejemplo para responder las preguntas, a pesar de que se espera que realicen cálculos utilizando la figura, el valor obtenido no es la respuesta esperada, sino que corresponde a conceptos que intervienen en la figura como, por ejemplo, el cálculo del área o del perímetro.

La imagen (imagen 4.5) muestra una de las respuestas escritas por un estudiante.

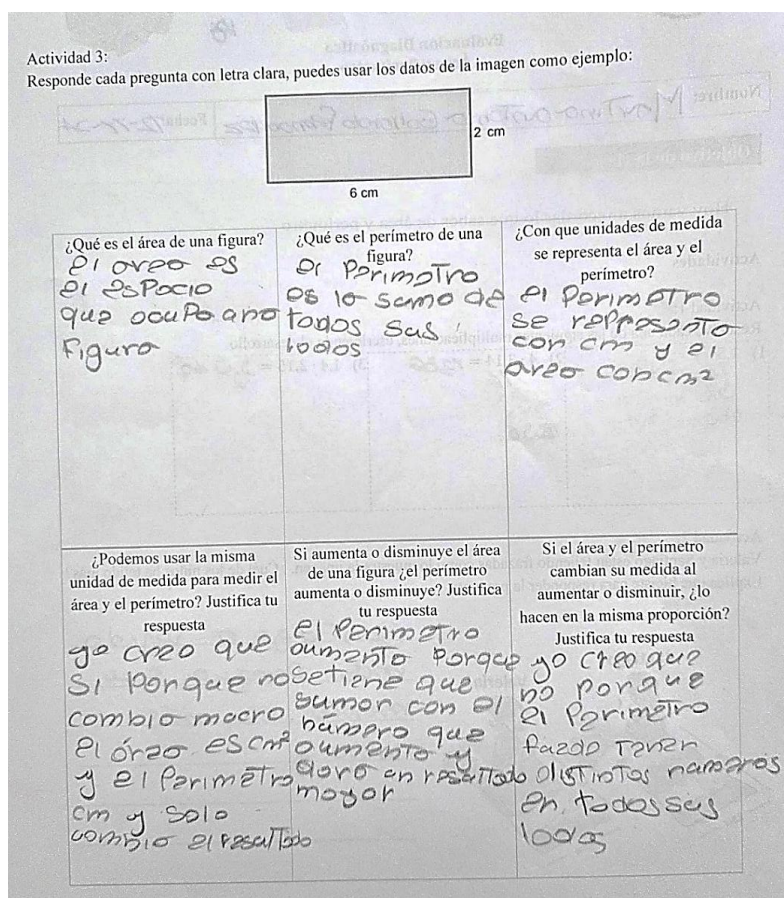


Imagen 4.5: Respuesta a la actividad de 3 del estudiante n°18

En esta actividad, se contabilizó que solo diez estudiantes respondieron todas las preguntas sin considerar si estas eran correctas o no, se le preguntó al resto porque no respondieron e indicaron que no tenían claro que debían responder o bien que no sabían las respuestas a las preguntas y no se atrevieron a redactar una respuesta intuitiva.

La tabla 4.3 muestra los tipos de respuestas entregadas por los estudiantes para cada pregunta de la actividad 3.

Tabla 4.3

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 3

Pregunta	Respuest a tipo 1	Respuest a tipo 2	Respuest a tipo 3	Respuest a tipo 4	Respuest a tipo 5	No responde
----------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------

¿Cuál es el área de una figura?	Calcula el valor del área del rectángulo (2 alumnos)	El área es lo interior de la figura (5 alumnos)	El área es la multiplicación de la base por la altura (4 alumnos)	El área como es espacio que ocupa una figura (15 alumnos)	Otra respuesta (1 alumno)	3 alumnos
¿Cuál es el perímetro de una figura?	Calcula el valor del perímetro del rectángulo (2 alumnos)	El perímetro como la suma de los lados de la figura (11 alumnos)	El perímetro es el contorno de la figura y se calcula sumando los lados (8 alumnos)	El perímetro es el contorno de la figura (3 alumnos)	-	4 alumnos
¿Con qué unidades de medida se representa el área y el perímetro?	Indican diversas unidades de medición como cm, m, km, etc. (3 alumnos)	Cm como unidad de medida (6 alumnos)	El perímetro se representa con cm y el área como cm^2 (3 alumnos)	Se debe multiplicar y sumar (6 alumnos)	-	12 alumnos
¿Podemos usar la misma unidad de medida para medir el área y el perímetro? Justifica tu respuesta	No se puede utilizar la misma unidad de medida porque una unidad es mayor a la otra (2 alumnos)	Si, porque lo único que cambia es el valor del resultado (4 alumnos)	No porque las medidas son diferentes (1 alumno)	No porque el área se calcula con 2 lados y el perímetro con 4 lados (4 alumnos)	-	19 alumnos
Si aumenta o disminuye el área de una figura ¿el	Si el área aumenta o disminuya el perímetro	Depende de la figura (1 alumno)	Cambia el perímetro porque la figura	-	-	21 alumnos

perímetro aumenta o disminuye? Justifica tu respuesta	también porque cambian las medidas de la figura (7 alumnos)		cambia (1 alumno)			
Si el área y el perímetro cambian su medida al aumentar o disminuir ¿lo hacen en la misma proporción? Justifica tu respuesta	No cambian en la misma proporción porque no pueden quedar iguales (5 alumnos)	No porque depende de la forma (1 alumno)	No porque uno aumenta y el otro disminuye (2 alumnos)	Otra respuesta (2 alumnos)	-	20 alumnos

Elaboración propia

Con la tabla anterior (tabla 4.3), se puede establecer que las preguntas 1 y 2, relacionadas con la definición de área y perímetro, son las que tienen mayor cantidad de respuestas por parte de los estudiantes. La mayoría definen el área como el espacio que ocupa una figura, y, por otro lado, la mayoría de los que respondieron la segunda pregunta definen el perímetro como la suma de los lados de una figura, en segunda mayoría indican que el perímetro corresponde al contorno de la figura y que se puede calcular sumando los lados.

La pregunta 3 fue respondida por dieciocho estudiantes, de los cuales solo tres de ellos indicaron que el perímetro se representa en unidades lineales (cm) y el área en unidades cuadradas (cm^2).

Las preguntas 4, 5 y 6 son respondidas de forma intuitiva por los estudiantes, justificando por sus creencias sobre la forma y los tamaños de las figuras, por ejemplo, indicando que los valores del área o del perímetro aumentan más en una figura que tiene una mayor cantidad de lados que otra. Esta actividad permite suponer que los estudiantes buscan justificación a sus respuestas por medio de la forma y de la cantidad de lados que posee una figura, lo que se vuelve relevante al momento de estudiar la circunferencia.

Actividad 4

La actividad 4 consiste en calcular el valor del área y del perímetro de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo con medidas escritas en cada figura.

A continuación, la imagen (imagen 4.6) muestra las respuestas de un estudiante con su respectivo desarrollo, se les pedía calcular el valor del área y el perímetro para un cuadrado, un rectángulo y un triángulo; el estudiante completa correctamente el cálculo del valor del perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo, pero no del triángulo, lo que se replica con el resto de las y los estudiantes del curso.

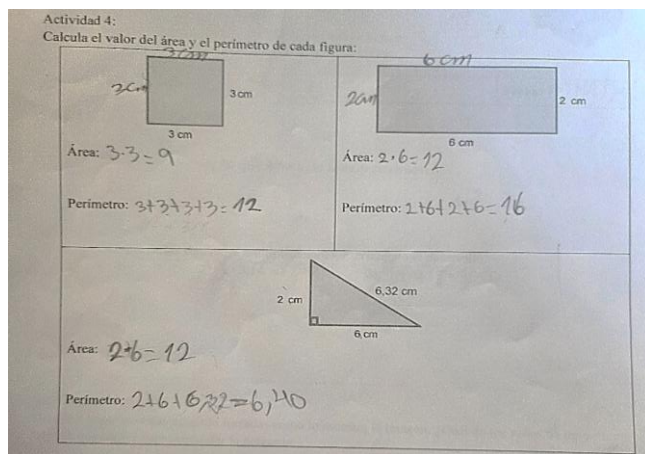


Imagen 4.6: Respuesta a la actividad de 4 del estudiante n°23

La tabla 4.4 que se presenta a continuación, muestra las producciones realizadas por los estudiantes para la actividad 4 de la guía diagnóstica, en las observaciones se indica información que se considera relevante para el análisis, como el ejemplo errores en el desarrollo del ejercicio.

Tabla 4.4

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 4

Número de Estudiante	Cuadrado		Rectángulo		Triángulo		Observación
	Área	Perímetro	Área	Perímetro	Área	Perímetro	
6 y 21	9	12	12	16	-	-	Sin desarrollo
10	9 cm ²	12 cm	12 cm ²	18 cm	-	-	Sin desarrollo
17, 18, 26 y 27	9	12	12	16	12	640	Multiplican la base por altura del triángulo y suman 2+6+632
4 y 23	9	12 cm	12	16 cm	12	6,40	Multiplican base por altura del triángulo y suman de forma incorrecta, agregando los números enteros como decimales
22	9	12	12	16	37,92	14,32	Multiplica la base por la hipotenusa del triángulo y suma 2+6+6,32 de forma correcta
9	9	12	12	16	37,92	6,40	Multiplica la base por la hipotenusa del triángulo y

							suma 2+6+6,32 de forma incorrecta
1	9	9	12	16	12,32	14,32	Sin desarrollo
24	9 m ²	12 m	4 m ²	16 m	2 cm	6,38	Multiplica el mismo lado del rectángulo, no presenta desarrollo en el triángulo
30	9	12	12	16	75,84	6,40	Multiplica los 3 lados del triángulo y suma 2+6+6,32 de forma incorrecta
2	9	12	12	16	12	14	Sin desarrollo
14 y 25	9	12	-	-	-	-	Sin desarrollo
11, 15 y 29	-	-	-	-	-	-	Sin resolver
8 y 16	-	12	-	16	-	-	Sin desarrollo
28	9	-	-	-	-	-	Sin desarrollo
7 y 19	9	18	12	40			Sin desarrollo
13	6	12	8	16	2	6,38	Indica que sumó en cada ejercicio
5	9	81	12	144	14	7584	Sin desarrollo
12 y 20	12	12	-	-	-	-	Desarrolla solo el perímetro
3	9	9	12	12	276,4	-	Sin desarrollo

Elaboración propia

En la tabla anterior, se evidencia que la mayoría de las y los estudiantes logran realizar el cálculo de perímetro y área del cuadrado y el rectángulo dejando en claro que comprenden cómo utilizar las fórmulas, pero no cuándo aplicarlas si no se solicita directamente o utilizando palabras como contorno o superficie.

También se puede establecer que no saben calcular el área de un triángulo y, en cuanto al perímetro de la misma figura, la mayoría no realiza correctamente la suma de números racionales. Para poder transitar por la secuencia didáctica es importante que hayan adquirido este conocimiento por lo que se realiza una clase de nivelación del área y el perímetro de polígonos que incluyen al cuadrado, rectángulo y triángulo, considerando el triángulo como la mitad de un cuadrado o un rectángulo, de modo que lo relacionen con una figura conocida y con una absolutamente diferente.

Actividad 5

La actividad 5 consiste en escribir la información que conozcan sobre el dibujo de una circunferencia de centro O, se espera que recuerden actividades que han realizado en niveles anteriores como, por ejemplo, su nombre, patrones que contienen al círculo, representación gráfica de fracciones, etc.

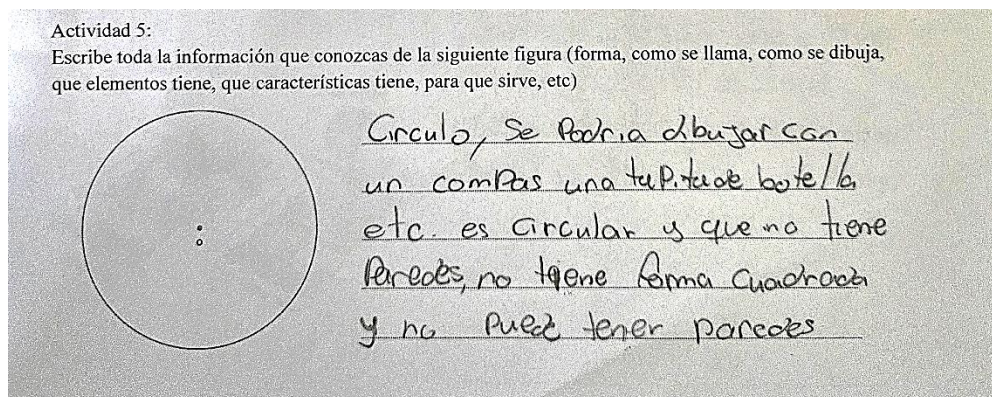
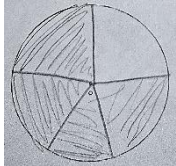


Imagen 4.7: Respuestas de un estudiante para la actividad 5

La imagen muestra las respuestas de un alumno quien destaca que la figura no tiene lados. La tabla 4.5 muestra las respuestas de los estudiantes en esta actividad diagnóstica, las respuestas similares fueron agrupadas para generalizar. Es importante destacar que los alumnos del nivel no han estudiado la circunferencia con anterioridad.

Tabla 4.5

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 5

Número del estudiante	Respuesta
3, 27	Se llama círculo, se dibuja con un compás y sirve para representar figuras como un sol.
20	Es una forma circular, se llama círculo, se dibuja así O
5	No tiene bordes, no tiene fin y se dibuja con un compás
16, 17, 30	Círculo, circular
13	Círculo, se dibuja con un compás, que es redondo y no tiene lados, es una figura que no se puede hacer casi nada, se pueden hacer estructuras
2	Esta figura no es un polígono, se dibuja poniendo una pelota al medio y con una cosa para hacer círculos, es una figura redonda
1	Esta figura se llama círculo y funciona como todas las figuras
7, 14 y 19	Esta forma se llama círculo y tiene un punto en el medio para ver los cm
18	Esta figura se llama circunferencia y es de forma circular
9, 26	 Esta figura que vemos aquí es un círculo, su característica es que un círculo y también sirve utilizarlo como fracción, ósea, así como vemos en la imagen y se dibuja como un círculo
24	Círculo, se podría dibujar con un compás, con una tapita de botella, etc. Es circular y que no tiene paredes, no tiene forma cuadrada y no puede tener paredes
4, 6, 8, 10, 11, 12, 15, 21, 22, 23 25, 28 y 29	No responde

Elaboración propia

La tabla permite establecer que los estudiantes reconocen la figura como un círculo o como una figura circular o redonda, es decir, que no posee lados, también indican que se puede dibujar con un compás o con una figura que genere círculos como una tapa de botella. El 43% de los

estudiantes no respondió la pregunta; al consultar el motivo indicaron que no le alcanzó el tiempo y que no sabían que escribir.

La aplicación de la actividad diagnóstica permitió identificar que las y los estudiantes tienen dificultades en la comprensión y en la operatoria con números decimales, en particular, en la multiplicación de números enteros por números decimales, lo que puede afectar al momento de descubrir el número Pi y en consecuencia en el cálculo del valor del perímetro y del área de la circunferencia. De cara a nuestros propósitos, es importante distinguir problemas o errores en los cálculos, de problemas en la comprensión de estas nociones geométricas. Para poder solucionar esta dificultad y, a la vez lograr que la concentración de las y los alumnos no se vea afectada por la frustración al no poder obtener los resultados, se permite el uso de calculadora, recordando que las actividades que involucran decimales presentan un obstáculo epistemológico que genera dificultad en los estudiantes (pág. 26).

Otra dificultad que se presenta en las producciones de las y los estudiantes en la actividad diagnóstica se relaciona con la confusión entre el perímetro y el área de polígonos, tanto en su cálculo como en su definición. Una gran cantidad de estudiantes no responde, o responde de manera incorrecta, la definición del perímetro y del área. Por ejemplo, en la actividad 2 se puede observar que los estudiantes no reconocen que la pregunta corresponde a calcular el área de la figura, y en la actividad 3 confunden el procedimiento a realizar, de modo que para calcular el área suman, multiplican la suma dos veces, suman la multiplicación, etc. En cuanto al círculo, los estudiantes lo definen como una figura circular, redonda y que sirve para hacer dibujos, que se puede dibujar con compás o con formas circulares, destacan que no posee lados y no distinguen elementos ni propiedades. Estas definiciones de la figura están acorde al nivel puesto que solo han trabajado con polígonos que se caracterizan por ser formado por segmentos rectos o lados y sus vértices, elementos de los que carece el círculo.

4.2 Etapa 1: Elementos de la circunferencia

Con esta primera etapa inicia la secuencia de aprendizaje construida; para su aplicación se conformaron grupos de trabajo de tres o cuatro estudiantes definiéndose, de este modo, ocho grupos en total que se mantuvieron hasta el final de la implementación de la secuencia.

Los objetivos de aprendizaje de esta etapa corresponden a identificar el centro, radio y el diámetro de una circunferencia, estableciendo sus características y la relación matemática entre ellos, con el fin de que en la etapa 2 comiencen a trabajar con el perímetro, es posible que no todos los grupos logren establecer que el diámetro corresponde a dos veces el radio, o bien, no comprendan por qué en una circunferencia se pueden trazar infinitos radios y diámetros.

La etapa se separa en diferentes secciones; en la sección 1 se realizan preguntas y actividades que permiten formalizar el concepto de circunferencia, en la sección 2 las y los estudiantes identificaron el centro y el radio de la circunferencia, en la sección 3 se busca establecer las características del radio y en la sección 4 el diámetro, para finalizar, en la última sección se busca establecer la relación entre el radio y el diámetro de la circunferencia. Cada una de las actividades de completar la oración fueron realizadas con la profesora para formalizar los conceptos contruidos por los estudiantes que han sido mencionados anteriormente, y se relacionan con una situación de institucionalización.

Para cumplir con los objetivos se presenta a las y los estudiantes la siguiente pregunta ¿con qué elementos y con qué procedimientos se puede construir o dibujar un círculo perfecto? Se espera que los estudiantes respondan con el compás, por lo que se realiza el siguiente cuestionamiento ¿qué elementos o partes de la circunferencia nos permiten realizar la construcción?

Sección 1: Preguntas introductorias

Estas preguntas permiten iniciar la secuencia, las preguntas 1 y 2 corresponden a situaciones que requieren de la comunicación de los estudiantes del grupo para establecer una respuesta compartiendo sus ideas.

La tabla 4.6 presenta las respuestas de los grupos de estudiantes para las preguntas 1, 2 y el complete. Para comenzar las y los estudiantes deben responder la pregunta 1.

Pregunta 1: Con los materiales que tiene la profesora (plumón, ventosa para pizarra y un trozo de lana amarrado a la ventosa) ¿qué figura creen que va a dibujar si tensa al máximo la lana y amarra un plumón en uno de sus extremos? ¿por qué?

Luego de otorgarles tiempo para escribir sus respuestas, la docente recopila las producciones en voz alta y posteriormente dibuja una circunferencia amarrando una punta del trozo de lana a la ventosa plástica y la otra al plumón, se pega la ventosa a la pizarra y se utiliza la lana como un compás.

Los estudiantes observan el dibujo realizado por la profesora y responden la pregunta 2.

Pregunta 2: ¿Se dibujó la figura que pensaron? ¿por qué sí o por qué no? ¿cómo se utilizaron los materiales?

Un representante de los grupos que se ofrece voluntariamente lee en voz alta su respuesta a la pregunta 2, la profesora indica que la figura dibujada se llama circunferencia y posteriormente en conjunto con la docente completan la actividad de completar la oración.

Complete: El dibujo que se acaba de realizar es una _____.

Tabla 4.6*Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 1 de la secuencia*

Grupo	Respuesta 1	Respuesta 2	Complete	Observaciones no registradas por los estudiantes
1	Podría dibujar un cuadrado porque es más fácil y es lo primero en lo que uno piensa.	No, porque ocupa la lana de una forma distinta a la que pensamos, pensábamos que lo iba a ocupar con las manos no con un plumón.	-	A la respuesta 1: Hay que estirar la lana para ver que se puede formar
2	Pensamos que la profe va a hacer una línea y un cuadrado porque es lo más fácil de hacer con una lana.	No, porque la profe ocupo todas las cosas de manera diferente a como lo pensamos.	Circunferencia	
3	Un rectángulo porque va a usar mucha lana.	Hace otro dibujo porque la figura era redonda y una circunferencia.	Círculo	
4	Pensamos que dibujaría una línea porque es lo más fácil.	No, porque pensamos que ocuparía de manera diferente, no como un compás.	Circunferencia	A la respuesta 1: La lana se mueve un poco, pero se pueden hacer líneas igual
5	Un cuadrado porque lo puede poner en la pizarra e ir remarcándolo.	No, porque la profesora lo usó como compás.	Círculo	
6	Una raya como un cuadrado estirando la lana porque al estirarlo puede poner dos horizontales y dos no horizontal.	No, porque hizo un círculo pegando el plástico en la pared con la lana y estirando para hacer un círculo con el plumón.	-	A la respuesta 1: Se puede hacer un círculo, pero no quedaría tan redondo. Es posible que hayan intentado poligonizar un círculo.
7	Usará la cinta porque la profe dibujará una línea y la cinta es igual de larga.	Porque si es igual de larga que un rectángulo.	cinta	Los estudiantes escribieron cinta para referirse a la lana

8	Un cuadrado porque la lana tensa puede formar todas sus partes y el tamaño de la lana coincide para formar todas sus partes.	No, porque la profe ocupó la lana en forma de compás y pensamos que la ocuparía para medir.	Circunferencia	
----------	--	---	----------------	--

Elaboración propia

En la tabla 4.6 se puede suponer que los grupos no registraron que se podía dibujar una circunferencia, sino que todos imaginaron figuras con líneas o segmentos rectos lo que es consistente con sus conocimientos previos sobre polígonos, sin embargo, un estudiante del grupo 6 manifestó que se podía realizar una circunferencia, pero usando la lana como su borde, diferenciándose del resto de los alumnos puesto que reconoce que existen figuras no poligonales y que se trabajará con una de ellas.

Luego de dibujar en la pizarra, la profesora les explica que la figura se llama circunferencia y que es distinta a los polígonos que estudiaron anteriormente ya que no posee vértices ni lados y para medirla no pueden utilizar una regla.

Los grupos 4, 5 y 8 reconocen el uso de la lana como un compás y que tiene un centro, les pide que ubiquen el centro y para ello algunos estudiantes pasan a la pizarra y validan la información usando la lana, esta actividad es el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el círculo y la circunferencia, ya que el estudio de lo curvo está implícito en el currículum hasta este nivel escolar, presentando descripciones generales de la figura tales como: es redondo, circular, cerrado, entre otros. Por ello, el proceso de aprendizaje de figuras curvas enfrenta dificultades en este nivel, ya que se presenta de una manera formal por primera vez. Estas dificultades se observan de manera nítida en el desarrollo de esta primera etapa por parte de las y los estudiantes.

Sección 2

La sección 2 corresponde a un conjunto de preguntas que contribuyen a que las y los estudiantes elaboren una primera idea respecto del radio de una circunferencia.

La profesora marca 4 puntos en la circunferencia dibujada en la sección anterior, y les pide a los estudiantes que respondan la pregunta 3.

Pregunta 3: Si la profesora marca diferentes puntos en la circunferencia dibujada (A, B, C Y D), ¿la medida entre el centro de la circunferencia donde está fijada la lana y los puntos que se han marcado en la circunferencia (A, B, C Y D) ¿será siempre la misma o será diferente? ¿Por qué?

Los estudiantes registran sus respuestas en el papel y luego la profesora les pide que voluntariamente lean en voz alta sus respuestas a la pregunta 4.

Al leer la pregunta 5, la docente toma la lana utilizada para dibujar la circunferencia anterior, y corta el extremo que tenía el plumón, vuelve a amarrar el plumón en la lana y dibuja una nueva circunferencia y les pide a los estudiantes que respondan la pregunta 5.

Pregunta 4: Si se corta la lana y una de sus puntas se posiciona en el centro, al tensar y dibujar ¿se sigue dibujando una circunferencia? ¿será de igual tamaño a la anterior o será más grande o pequeña? ¿por qué?

La docente otorga tiempo para que puedan discutir las preguntas y escribir sus respuestas, posteriormente les pide a cuatro grupos que puedan leer sus respuestas en voz alta para confirmar que si se corta la lana se puede dibujar una circunferencia de menor tamaño a la anterior debido a que el tamaño de la lana define el tamaño de la circunferencia.

La docente le pide a un estudiante que lea la pregunta seis y les otorga tiempo para discutir y responder.

Pregunta 5: ¿Qué relación se puede establecer entre el tamaño de la circunferencia y la medida de la lana que parte desde el centro hasta un punto de la circunferencia?

En conjunto con la profesora se completa la oración, destacando que el segmento va desde el centro y realizando la convención de llamar a la lana utilizada para dibujar la circunferencia como radio.

Complete: Un segmento que va desde el centro de la circunferencia a un punto de ella se llama _____, este permite determinar el tamaño de la circunferencia o su longitud y se denomina con la letra _____.

Esta actividad de completar la oración corresponde a una situación de institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza el concepto otorgándole un nombre y un símbolo de representación r , y además permite establecer que la medida del radio determina el tamaño de la circunferencia.

En la tabla 4.7 se registran las respuestas a las preguntas 4, 5, 6 y el completar la oración correspondiente al concepto de radio.

Tabla 4.7

Respuestas de los estudiantes para la sección 2, etapa 1 de la secuencia

Grupo	Respuesta 3	Respuesta 4	Respuesta 5	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Van a ser iguales porque es un círculo y las medidas siempre son iguales además si fueran distintos no sería un	Si sigue siendo una circunferencia porque sigue siendo un círculo, pero solo cambia la medida se vuelve más que pequeño	Miden lo mismo porque si la lana mide 8 cm la circunferencia medirá lo mismo	Radio r	

	círculo si no sería un ovalo				
2	Iguales, porque la figura es igual de todos los lados y no hay diferencias	Si se sigue dibujando una circunferencia, solo que el círculo será más pequeño ya que no será el mismo punto de partida anterior	Que al ser la lana más corta el círculo será más pequeño, la circunferencia depende del tamaño de la lana	Radio r	
3	Siempre será diferente porque hay círculos de diferentes tamaños	Va a ser más chica porque cada tamaño es distinto en la circunferencia	Si porque cada uno crea la circunferencia	Radio r	
4	Siempre será la misma distancia desde el centro, ya que un compás hace que el círculo sea simétrico	Sí porque sigue siendo un círculo, será más pequeño el círculo debido a que están achicando el compás	Se relacionan porque dependiendo del largo de la lana será el tamaño que tendrá la circunferencia	Radio r	Si son diferentes va a ser otra cosa, como un círculo mal dibujado.
5	La misma porque tiene la misma medida a pesar de verse algo diferente a menos que sea un ovalo.	Más pequeña porque al cortar la lana la circunferencia será más pequeña por lo tanto la distancia será más corta.	Sí porque el tamaño de la circunferencia depende de la medida	Radio r	
6	Van a ser iguales porque es un círculo ya que no tiene rayas y las medidas deben tener lo mismo.	No, yo creo que si se corta la lana puede ser un círculo de otro tamaño porque tenemos que buscar una solución de otro porte	Va a depender del tamaño de la circunferencia ósea si es grande se va a agrandar el tamaño de la lana	Radio r	El centro debe estar justo al medio.
7	Será siempre la misma ya	Se seguirá dibujando la	De que si la lana sea	Radio r	

	que uso la lana en el centro para afirmar el plumón y hacer el círculo.	circunferencia y será pequeño más o menos. Solo cambió el tamaño	grande es una circunferencia grande, pero si la lana es pequeña seguirá siendo una circunferencia así que si es una relación		
8	Si es que el círculo es perfecto se sería la misma medida de distancia y si el círculo es imperfecto sería diferente.	Si seguirá siendo una circunferencia, pero sería más pequeña porque la profesora corto la lana entonces es más corta para medir la circunferencia.	Que la lana pequeña tiene la misma medida de distancia de la circunferencia pequeña con la grande	Radio r	

Elaboración propia

Si bien no es trivial encontrar el centro de la circunferencia, a las y los estudiantes les fue fácil identificarlo pues previo a la aplicación de la secuencia construyeron circunferencias con compás lo que favoreció la comprensión del elemento, sin embargo, se sugiere incluir una actividad adicional en la secuencia con el propósito de determinar la ubicación del centro de la circunferencia a través del doblado de papel por los ejes de simetría.

Con las respuestas que se presentan en la tabla 4.7 se puede inferir que los estudiantes logran establecer con sus propias palabras que todos los radios deben tener la misma medida para que se pueda dibujar una circunferencia y a partir de la institucionalización que realizaron con la docente, se establece que la medida del radio permite determinar el tamaño de la circunferencia, que, si un radio es mayor a otro, la circunferencia del primer radio es de mayor tamaño que la circunferencia del segundo radio. El grupo 4 basa sus respuestas relacionando la lana atada a la

ventosa con un compás, esto les facilitó identificar de mejor manera las propiedades del radio, sin embargo, continúan pensando en la conservación de las formas de las figuras rectas y sus medidas. En general, los estudiantes utilizan la palabra “lados” evidenciando que utilizan los elementos de los polígonos como una manera de comunicar sus ideas lo que refuerza la ausencia del estudio previo de las figuras curvas, y la dificultad para describirlas.

Sección 3

La sección 3 corresponde a las preguntas que permiten caracterizar el radio de una circunferencia. La tabla 4.8 muestra las respuestas a la pregunta 6, 7 y el complete la oración:

La docente le pide a un estudiante que lea la pregunta en voz alta, y luego les pregunta ¿Qué podemos hacer para saber cuántos radios tiene una circunferencia? Algunos estudiantes indican que pueden dibujar y se les pide que dibujen y luego escriban las respuestas.

Pregunta 6: ¿Cuántos radios se pueden dibujar en una circunferencia? ¿cómo se pueden dibujar todos estos radios?

Algunos estudiantes levantan la mano para responder esta pregunta y se llega a la conclusión de que la circunferencia puede tener infinitos radios.

Luego lee la pregunta 8 y les otorga tiempo para responder.

Pregunta 7: La medida del radio es la distancia que hay entre el centro y un punto de la circunferencia. ¿Pueden ser los radios de una circunferencia de medida diferente, algunos pueden ser más pequeños o grandes que otros? ¿Por qué sí o por qué no?

Algunos estudiantes comparten sus respuestas y dibujos llegando a la conclusión de que los radios deben ser de igual medida.

Complete: Un radio es un segmento que parte desde _____ y que llega hasta un punto de la circunferencia. En una circunferencia todos los radios tienen _____ medida.

Esta actividad de completar la oración corresponde a una situación de institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza el concepto otorgándole un nombre y un símbolo de representación.

Tabla 4.8

Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 1 de la secuencia

Grupo	Respuesta 6	Respuesta 7	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	No podríamos decirlo porque va dependiendo de la cantidad de radio que vas poniendo en la circunferencia	No se puede porque no sería una circunferencia porque tiene que ser todos los lados iguales para que sea.	El centro La misma	
2	Infinitos ya que le podemos poner todos los radios que queramos	No porque si fueran radios más chicos o grandes no sería un círculo sería otra figura	El centro La misma	Respuesta 1: Podemos dibujar como 4 o yo creo que más
3	Puede tener radios infinitos porque pueden poner puntos en cualquier lado de una circunferencia	No porque cuando uno hace una circunferencia todos los radios son iguales	El centro misma	
4	No podríamos, porque podemos poner la cantidad de radios que queramos o no poner ninguno, también puede depender del tamaño de la circunferencia	No porque una circunferencia al ser simétrica desde la distancia del centro siempre será la misma medida de radio	El centro La misma	Respuesta 1: Si no ponemos ningún radio no podemos conocer la circunferencia.
5	Depende, pueden llegar a ser muchos o incluso tener un solo radio porque se	No, porque el radio se mantiene del mismo tamaño, por ejemplo, si hay una	El centro La misma	Responde a la respuesta del grupo 6: Si la circunferencia es más grande va a tener

	pueden dibujar muchos (son infinitos)	circunferencia grande el radio mantiene tamaños iguales		radios más largos o cortos, pero van a ser los mismos, o sea, la misma cantidad
6	No porque puede depender del tamaño de la circunferencia	Si porque solamente va a cambiar el tamaño y el tamaño no importa	El centro	
7	No podríamos ya que hay más de un radio como infinitamente	Si puede ya que si el radio es pequeño seguirá siendo una circunferencia	El centro Un centro	
8	La circunferencia solo puede tener un radio porque es la medida del centro para formar bien la circunferencia	No porque los radios deben tener la misma medida	El centro La misma	Respuesta 1: puede tener muchos radios, pero tienen que ser del mismo porte del primero que se dibuja.

Elaboración propia

Las respuestas que se presentan en la tabla 4.8 permiten en primera instancia, evidenciar que los estudiantes se refieren a la figura como circunferencia y utilizan el concepto de radio lo que indica que se están apropiando de un nuevo lenguaje matemático, y también se puede establecer que la mayoría de los grupos identifican que una circunferencia puede tener infinitos radios, sin embargo, el grupo 6 indica que no se puede definir la cantidad de radios que puede tener una circunferencia ya que depende del tamaño de esta. Al compartir su respuesta, el grupo indica que mientras más grande sea la circunferencia más radios se pueden dibujar una respuesta que es consecuente con sus estudios previos puesto que mientras más grande sea el tamaño de un polígono mayor es la medida de sus lados, un compañero de curso de otro grupo les explica que no depende del tamaño de la circunferencia y realiza un dibujo, de modo que los estudiantes del grupo 6 logran comprender que los radios son infinitos porque “pueden dibujar los que ellos quieran”. Por otro lado, el grupo 8 indica qué quiso decir que la medida va a ser la misma para los infinitos radios pero que la determina un radio inicial, este grupo está construyendo la diferencia entre el radio

como elemento y la medida o longitud del radio, puesto que quieren indicar que la medida del radio es única, pero hay infinitos radios, es importante compartir esta construcción con el resto del curso ya que el concepto de infinito no es una idea intuitiva.

Sección 4

La sección 4 corresponde a las preguntas que permiten caracterizar el diámetro de una circunferencia, en la tabla 4.9 se presentan las respuestas entregadas por los ocho grupos de trabajo a las preguntas 8, 9 y el complete la oración de la sección:

Pregunta 8: Si en una circunferencia se dibujan diferentes cuerdas que van de un punto a otro y que pasen por el interior de ella ¿todas tendrán la misma medida o habrá algunas de mayor tamaño? ¿Por qué sí o por qué no?

La docente dibuja una línea que va de un punto de la circunferencia a otro, es importante diferenciar los puntos al interior, exterior y en la circunferencia, para que los estudiantes puedan responder correctamente la pregunta.

Luego de que comparten sus respuestas se establece que no todas las líneas que van de un punto a otro de la circunferencia son del mismo tamaño, sino que depende el lugar en que se ubiquen, la profesora les pide que se reúnan con su grupo, lean y escriban la respuesta de la pregunta 10.

Pregunta 9: ¿Cuál o cuáles de las cuerdas que pasan por el interior de la circunferencia tiene mayor tamaño? ¿Qué diferencia tiene esa cuerda con las otras que se pueden dibujar?

Esta pregunta corresponde a una institucionalización del conocimiento ya que debe comunicar a sus compañeros de grupo sus ideas compartiendo las similitudes y diferencias que

encontraron. Llegan a la conclusión de que hay más de una línea de mayor tamaño y serán las que pasan por el centro.

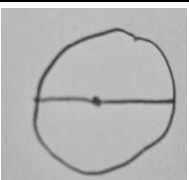
Complete: Una cuerda que va desde un punto a otro en la circunferencia y que pasa por el centro de esta, se llama _____ y se denomina con la letra ____.

Esta actividad de completar la oración corresponde a una institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza el concepto otorgándole un nombre y un símbolo de representación.

Tabla 4.9

Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 1 de la secuencia

Grupo	Respuesta 9	Respuesta 10	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	No todos los lados serían iguales ya que podrían tener puntos más cerca y puntos más lejos	La línea que está en el medio siempre será la más larga	Diámetro d	Respuesta 1 hace referencia a los segmentos que se dibujan en la circunferencia y no a los lados.
2	No porque las líneas van dependiendo de la distancia	La diferencia las líneas que una pasa por al medio del punto y es la más larga	Diámetro D	
3	No porque hay algunos radios que son vueltas y no hace que sean más largos	Las líneas que dan vueltas son más largas porque dan vuelta de un radio a otro	Diámetro d	Respuesta 1: los radios se mueven como un reloj y van haciendo las líneas.
4	No serían del mismo tamaño porque va dependiendo de en donde estén posicionados los puntos	Los que tienen mayor tamaño serán las cruzan por el centro de la circunferencia, la diferencia es que por estar posicionada al centro será más larga.	Diámetro d	

				
5	No, porque el tamaño cambia dependiendo de la posición donde se ubique el punto	Las líneas de mayor tamaño son las que pasan por el centro	Diámetro D	
6	Yo creo que no porque dependería del tamaño del punto donde estará	La línea más larga es por la que pasa el centro	Diámetro b	
7	No ya que la radio no puede estar en cada lado y solo tiene que estar en el centro	En el centro la línea mayor es la que sostiene a todo el círculo un tanto deforme	Diámetro D	
8	No porque el tamaño de la línea depende de la distancia entre los puntos	Sería la línea que pasa por el centro	Diámetro D	Respuesta 1: hacen una indicación con la mano indicando que es la línea horizontal que pasa por el centro

Elaboración propia

La tabla 4.9 permite inferir que los estudiantes comprendieron que los segmentos o líneas interiores más largas de la circunferencia corresponde a las que pasan por el centro, y se denominan diámetros.

El grupo 1 continúa refiriéndose a lados cuando mencionan los segmentos, el grupo 3 se refiere a que un radio gira como las manecillas de un reloj originando los segmentos que pasan por la circunferencia, por eso se refieren a vueltas, para corregir esto, la profesora les muestra que los segmentos deben ir de un punto a otro sin generar quiebres, es decir, por medio de una única línea recta. Si bien las respuestas del grupo 7 son extrañas, cuando se le pregunta directamente que es el diámetro, el grupo logra dibujar (figura 4.7) un segmento que pasa por el centro de la circunferencia y llega a dos puntos en ella.

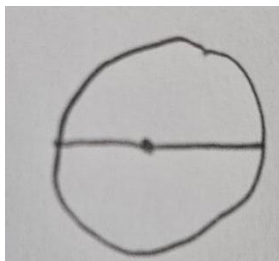


Figura 4.1: Respuesta grupo 7 a la definición de diámetro.

Para la formalización del elemento se define el diámetro como un segmento que va de un punto a otro en la circunferencia pero que debe ser completamente recto, sin puntos de quiebre o de inflexión, y, además debe pasar por el punto del centro de la circunferencia. La profesora pregunta en voz alta ¿Cuántos diámetros tiene la circunferencia? los estudiantes después de discutir entre ellos responden que son infinitos, si bien la idea es similar a la del radio se sugiere agregar esta pregunta a la secuencia, recordando que el infinito es una idea construida y no intuitiva.

Sección 5

Esta sección corresponde a la última parte de la etapa y busca que los estudiantes establezcan una relación entre el radio y el diámetro. La tabla 4.10 presenta las producciones de los estudiantes a la pregunta 11 y un complete la oración:

Pregunta 11: Considerando lo que aprendieron sobre el radio y el diámetro de una circunferencia ¿qué relación matemática existe entre la medida de ambos elementos?

La docente lee la pregunta y les explica a los estudiantes que una relación matemática puede ser una comparación o bien una operatoria que permite encontrar un resultado, les da tiempo y algunos grupos leen su respuesta en voz alta voluntariamente llegando a la conclusión que dos radios equivalen a un diámetro y se realiza el dibujo en la pizarra dando énfasis en que deben estar en un mismo eje o bien enfrentados.

Complete: El radio y el diámetro son segmentos que contienen _____ de la circunferencia.

Y la medida del diámetro es igual al _____ de la medida del radio.

Esta actividad de completar la oración corresponde a una situación de institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza la relación que existe entre el radio y el diámetro de la circunferencia.

Tabla 4.10

Respuestas de los estudiantes para la sección 5, etapa 1 de la secuencia

Grupo	Respuesta 11	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	La relación entre ambas es que la línea del radio mide igual que el del diámetro <u>además de eso si yo sumo dos radios voy a tener un diámetro</u>	Centro 2	Agregan lo subrayado posterior a la respuesta del grupo 8
2	Las dos líneas pasan por el diámetro	El centro 2	Corrige indicando que quiso decir que ambas líneas pasan por el centro.
3	Es que los dos son líneas, solo que el radio pasa por el centro	El centro 2	
4	Las 2 son líneas y pasan adentro de la circunferencia	El centro 2	
5	Que si juntamos 2 radios obtenemos un diámetro	El centro 2 veces	
6	Que los dos pasan por el círculo y son distintos	- 2 veces	
7	No tienen la misma longitud porque <u>si dos radios son iguales a un diámetro</u>	El centro 2 veces	Agregan lo subrayado posterior a la respuesta del grupo 8
8	Que si juntamos dos radios formamos un diámetro	Centro 2 veces el radio	Respuesta 1: una estudiante del grupo responde a viva voz: si juntamos dos radios, uno al lado del otro, se forma un diámetro

Elaboración propia

A diferencia de las secciones anteriores, las respuestas de la tabla 4.10 permiten establecer que solo los grupos 5 y 8 lograron identificar que la medida del diámetro equivale a la medida de dos radios. Si bien los grupos 1 y 7 parecen haber identificado la relación, no se puede afirmar con las respuestas obtenidas ya que son agregadas posteriores a la respuesta del grupo 8.

Es importante diferenciar que la medida de dos radios es igual a un diámetro, pero pictóricamente estos radios deben estar en un mismo eje, uno al lado del otro en dirección opuesta, con la figura 2.1 se puede mostrar que al sumar las medidas de los radios $\underline{CO}$ y $\underline{OA}$ se obtiene la medida del diámetro, pero no se puede construir el elemento; $\underline{CO}$ y $\underline{OA}$ no forman un diámetro, ya que los puntos C, O y A no son colineales.

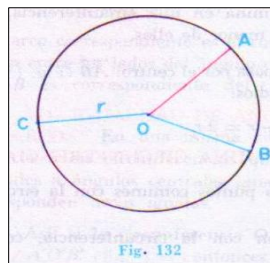


Figura 2.2: definición de circunferencia, incluyendo definición de radio. Obtenido de Baldor et al. (2004), p. 128.

La institucionalización de este saber matemático se complementa con la relación algebraica posterior a la formalización con palabras; $d = 2r$, es importante resaltar que esta relación algebraica corresponde a las medidas geométricas y no a los elementos geométricos. Esta relación algebraica es necesaria puesto que posteriormente se instaure la fórmula para calcular el perímetro sin necesidad de medir el contorno.

Con las producciones de los estudiantes se puede establecer que con la primera etapa de la secuencia lograron definir la circunferencia, el centro, el radio y el diámetro, más no todos los grupos lograron indicar, por sí solos, una relación entre los dos últimos. Esta relación se podría

mejorar utilizando medidas concretas, por ejemplo, una lana que represente el diámetro y otra que represente el radio en la circunferencia.

En cuanto al desempeño de los grupos se destaca que al relacionar la lana, que permite dibujar la circunferencia, con un compás, el grupo 4 logró identificar de mejor manera las propiedades del radio. Los grupos 5 y 8, responden de manera más directa ya que las y los estudiantes tienen interés y reconocen que “les gusta” la asignatura, lo que promueve su participación. Los grupos 2 y 7 tienen integrantes que pertenecen al programa de integración por lo que en algunos casos es necesario repetirles y/o replantearles las preguntas, sus respuestas son acertadas, pero es necesario indagarlas porque tienden a ser confusas. Los grupos 1, 3 y 6 registran las respuestas escritas y las indican en forma oral de manera correcta, complementan las respuestas con las de sus compañeros, pero se logra evidenciar su trabajo y participación en clases. El grupo 6 se destaca por registrar reflexiones matemáticas de mayor nivel que sus compañeros al interiorizar los conceptos y mostrar intuiciones acertadas respecto a este nuevo mundo curvo con el que se están encontrando.

En relación con el análisis a priori, con esta parte de la secuencia se logró que las y los estudiantes logaran establecer las características de los elementos de la circunferencia; lograron identificar el centro de la circunferencia, las características del radio de modo que comprendieron que siempre se extiende desde el centro a un punto de la circunferencia y su medida define el tamaño de la circunferencia, lograron establecer que una circunferencia puede tener infinitos radios pero una única medida. En cuanto al diámetro lo identifican como el segmento más largo que va de un punto a otro de la circunferencia y que debe contener al punto del centro, sin embargo, no todos las y los alumnos lograron instaurar la relación matemática entre el radio y el diámetro; se esperaba que logaran visualizarlo al dibujarlo en la pizarra, pero no todos los grupos lo lograron por lo que se sugiere una actividad más concreta para generar este conocimiento.

4.3 Etapa 2: Perímetro de la circunferencia

La segunda etapa de la secuencia busca establecer la definición y fórmula del perímetro de la circunferencia, ya que las y los estudiantes se encuentran con la siguiente dificultad: ¿se puede medir el contorno de una circunferencia con regla? Frente a esta surge la idea de utilizar la medida de algo lineal de la circunferencia, como por ejemplo el diámetro, buscando relaciones entre esta medida lineal y el contorno, a través de la exploración de la existencia de esta relación en distintas figuras redondas se torna necesario comprender el número PI, lo que se realiza por medio de una actividad de medición de contornos y diámetros de diversos objetos cilíndricos o circulares.

Al igual que en la etapa 1, la etapa 2 de la secuencia se divide en secciones que buscan generar un aprendizaje específico; la primera sección corresponde a las preguntas introductorias que buscan motivar y generar interés, la segunda sección corresponde a la exploración por medio de la medición del material concreto para pasar a la sección 3, en donde se establece la relación numérica de las mediciones anteriores construyendo el valor de PI, finalmente en la sección 4 se establece la fórmula del perímetro de la circunferencia.

Esta etapa necesita de los elementos de la circunferencia definidos en la etapa 1 para instaurar la definición del valor de PI, que es fundamental para establecer la fórmula del perímetro y. en la etapa siguiente, la fórmula del área de la circunferencia. Es importante mencionar que se trabajara el número PI con su aproximación al número 3,14 lo que se corresponde con el nivel, ya que solo han trabajado con decimales finitos.

Sección 1: Preguntas Introductorias

Esta sección corresponde a las preguntas a) y b) que buscan introducir la etapa y relacionarla con la experiencia que vivieron en la etapa anterior. Los materiales por utilizar corresponden a tijeras, cuatro objetos circulares o cilíndricos de diversos tamaños que se les solicitaron a las y los estudiantes en la clase anterior, lana y regla o huincha de medir proporcionadas por el establecimiento. Para los estudiantes que se presentan sin materiales, la profesora les proporciona algunos objetos, también los pueden compartir con sus compañeros o bien utilizar los que se encuentran en la sala de clases como, por ejemplo, tubos de cartulina. Previo a responder las preguntas, se les entregan los materiales para que puedan manipularlos y generar hipótesis del uso que les darán.

La profesora lee en voz alta las preguntas y les otorga tiempo para responder.

Pregunta a): ¿Qué tienen en común los objetos con los que vamos a trabajar? Recordando lo que hicieron en la guía anterior ¿por qué creen que utilizaran estos objetos y no otros, como por ejemplo una caja de lápices?

Pregunta b): Escriban para qué creen que van a utilizar los materiales para la clase de hoy.

Rápidamente los estudiantes responden que trabajaran con objetos que permiten el estudio de la circunferencia por medio de la medición. La tabla 4.11 representa la matriz de comparación de las respuestas a y b de la sección 1 de la etapa 2.

Tabla 4.11*Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 2 de la secuencia*

Grupo	Respuesta a)	Respuesta b)	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Lo que tienen en común es que todos son circulares. No usamos otros objetos porque estamos viendo circunferencia y en la circunferencia se ven objetos circulares.	Los utilizaremos para calcular distintas medidas de radio y mejorar en el tema de la circunferencia, que sabemos	
2	Que todos tiene formas circulares	Para sumar los materiales y hacer circunferencias	Respuesta b: se refiere a sumar las medidas de los elementos por medio de la lana.
3	Tienen mucho en común, la regla sirve para medir la lana sirve para crear, las tijeras y la circunferencia para poder medirlas	Yo creo que la vamos a utilizar para hacer circunferencias y saber cuánto miden	
4	Todos los objetos son circulares, para medir el diámetro y el radio	Para hacer circunferencias y medir radio y diámetro	Podemos dibujar círculos más rápido que con el compás.
5	Que todos los objetos tienen una circunferencia	Creemos que vamos a hacer una circunferencia	
6	Que son una circunferencia y solo es el círculo porque está el radio y el diámetro para medirlos en el centro	Para medir la radio y el diámetro	
7	Que cada objeto tiene un círculo como una moneda o una botella	Lo usaremos para medir la lana y con un lápiz o plumón y hacer el círculo	
8	Porque necesitamos algo que tenga que ver con la circunferencia y si ocupamos una caja no sirve ya que el objeto es cuadrado	Para hacer círculos o alguna actividad que tenga con la circunferencia	

Elaboración propia

Las respuestas entregadas por los estudiantes permiten establecer que los grupos intuyen que se va a trabajar con circunferencias que se pueden producir con los materiales solicitados, la mayoría

utiliza la palabra circunferencia a excepción del grupo 7 que se refiere al elemento como círculo que es la denominación que ha tenido la figura en los niveles anteriores, ya que, a diferencia de los polígonos que han estudiado, se incorpora el nombre circunferencia al profundizar el estudio de la figura y probablemente los estudiantes del grupo consideran que posee dos nombres y no que se refiere a conceptos geométricos diferentes. Los grupos 4 y 6 hacen referencia al radio y el diámetro que se definieron la clase anterior, estos grupos relacionaron la lana con un compás y se puede considerar que esto les permitió incorporar el conocimiento de los elementos estudiados.

Sección 2

La sección 2 corresponde a una actividad manual en la que deben utilizar dos trozos de lana para establecer con ellas la medida del contorno y la del diámetro de cada objeto circular (imagen 4.8), y escribir una relación entre esas medidas sin necesidad de establecer su longitud en centímetros, sino que, por medio de la observación y manipulación de los trozos de lana. Esta actividad la deben realizar con cuatro objetos circulares o cilíndricos y luego, deben responder la pregunta 3 indicando la relación que encontraron.



Imagen 4.8: Imágenes de la actividad realizada por diferentes estudiantes

La docente explica la actividad y recorre la sala para supervisar el trabajo de los grupos. Les otorga aproximadamente 15 minutos reforzando que deben utilizar la lana de la forma más horizontal posible para rodear los objetos, sin estirla y les sugiere registrar sus respuestas para que puedan responder la pregunta 3.

Pregunta 3: Observando los trozos de lana por cada objeto ¿indiquen si existe alguna relación aproximada entre la medida del contorno y el diámetro de cada objeto? Escribe la relación que encontraron

La tabla 4.12 presenta las respuestas de los grupos a la pregunta 3 que finaliza la sección.

Tabla 4.12

Respuestas de los estudiantes para la sección 2, etapa 2 de la secuencia

Grupo	Respuesta 3	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	No porque sus medidas son distintas	¿Qué es una relación?
2	El diámetro es más grande y se puede meter adentro del contorno	Los dos son con lana, pero una es más grande
3	No existe ninguna relación entre el contorno y el diámetro	
4	El contorno siempre será más grande que el diámetro	
5	Es que son circunferencias de distintos tamaños	
6	La relación es que cabe tres veces o de otras formas 2, 5	
7	De que las líneas son casi igual pero no del mismo tamaño	
8	La relación es que con tres pedazos del radio se puede hacer un diámetro.	Son tres pedazos y un poquito más.

Elaboración propia

Previo a las respuestas entregadas por los estudiantes, fue necesario indicar a qué se refería la palabra “relación” ya que los estudiantes no lograban comprender qué se les estaba pidiendo, se les indicó que una relación matemática corresponde a establecer similitudes u operaciones

matemáticas que se pueden producir entre dos o más elementos, en este caso, con el diámetro y el contorno.

En cuanto a las producciones, los grupos 2, 6 y 8 lograron establecer una relación de división indicando que un trozo cabe dentro de otro, además el grupo 8 logró determinar que la lana del contorno equivale a aproximadamente tres lanas del diámetro. El resto de los grupos no encontró relación o bien destacaron la comparación de medidas ya que uno de los trozos es de mayor tamaño que el otro, o bien, indicaron que son del mismo material, lo que permite suponer poca reflexión matemática, se puede inferir que esto se debe a la ausencia de la construcción del conocimiento en niveles anteriores y/o la falta de reflexiones en el estudio de otros contenidos matemáticos en el pasado.

Se establece con el todo el curso que el diámetro cabe 3 veces y un poco más en el contorno, lo que se verifica fácilmente de forma manual si lograron medir de la forma correcta. Algunos grupos complementaron o cambiaron su respuesta escrita como lo muestra la imagen siguiente (imagen 4.9).

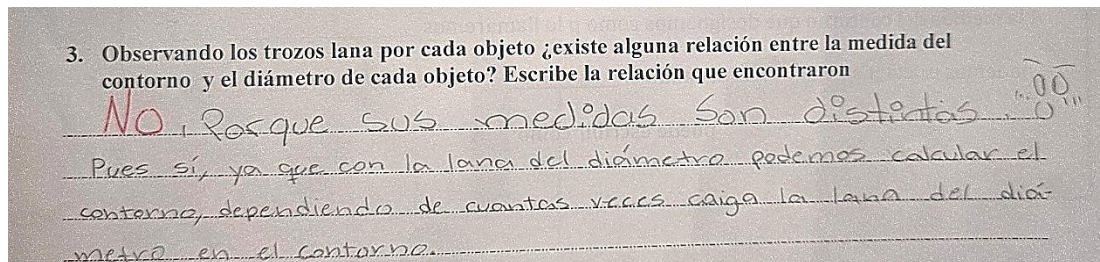


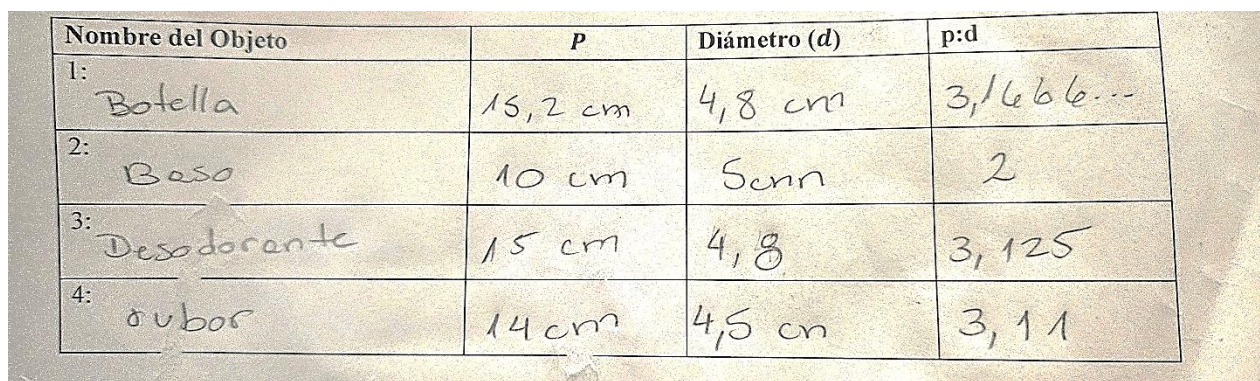
Imagen 4.9: Respuesta corregida del grupo 1

Al establecer la relación, se planteó a los grupos que no la visualizaron que reconocieran donde pensaban que estaba su error y se les animó a realizar la experiencia nuevamente. Por ejemplo, los que en lugar de medir el diámetro medían una cuerda menor a él, o los que medían el contorno de la circunferencia de manera inclinada y no lograron llegar a la relación esperada.

Sección 3

En la sección 3, se formaliza numéricamente la actividad anterior; los estudiantes deben medir con huincha o regla los dos trozos de lana de cada figura y completar una tabla en la que deben dividir el valor del contorno (P) con el valor del diámetro (d) de un mismo objeto. El objetivo es llegar al valor 3,14 que corresponde al número PI.

La imagen 4.10 presenta una tabla que fue completada por los estudiantes.



Nombre del Objeto	P	Diámetro (d)	p:d
1: Botella	15,2 cm	4,8 cm	3,1666...
2: Baso	10 cm	5 cm	2
3: Desodorante	15 cm	4,8	3,125
4: ovbor	14 cm	4,5 cm	3,11

Imagen 4.10: Respuestas grupo 2

La docente explica cómo llenar la tabla y se les otorga tiempo a los grupos para que la completen.

La docente les pide a algunos grupos que compartan sus resultados de la división (columna p: d) en voz alta y que respondan la pregunta 5.

Pregunta 5: ¿El resultado de la división se parece a la relación que establecieron en la pregunta 3? ¿a qué valor se puede aproximar el resultado de la división?

La tabla 4.13 presenta los resultados tabulados de cada grupo de trabajo, se evidencia que el trabajo con las medidas, en varios casos, no se acercó al valor esperado producto de las imprecisiones en la medición, pero también debido al material utilizado ya que la lana puede estirarse y encogerse cambiando su medida al manipularla, una sugerencia para rehacer esta

actividad es considerar utilizar un material que no se estire como yute o un cordón, o medir directamente con la huincha el diámetro y el contorno de cada objeto.

Tabla 4.13

Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 2 de la secuencia

Grupo	Resultados tabla				Respuesta 5	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Sí, porque literalmente nos dio 3	Aproximaron los valores para que no fueran decimales
	Flauta	9 cm	3 cm	3		
	Tapa de perfume	12 cm	4 cm	3		
	Perfume	18 cm	6 cm	3		
	Botella	15 cm	5 cm	3		
2	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Si, pero no tanto porque los decimales son diferentes y no nos dio 3. A 3 casi todos.	
	Botella	15,2	4,8	3,16666		
	Vaso	10	5	2		
	Desodorante	15	4,8	3,125		
	Rubor	14	4,5	3,11		
3	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Se parece a 3	Los estudiantes indicaron que les faltó tiempo para medir, porque no siguieron la instrucción.
	Estuche	2	9			
	Audifono	17,5	5,5	3,5		
4	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Se aproxima a los números 2 y 3	
	Tapa de bebida	10	4	2,5		
	Tapa desodorante	11,3	3,1	3,64		
	Desodorante	15	4,4	3,4		
	Rubor	14	5	2,8		
5	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	No tanto, no se	
	Perfume	17	5	3,4		

	Botella de agua	26	10	2,6	parece a nada	
	Tónico	14,3	3,5	4,8		
	Iluminador	24	7,8	3,7		
6	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Si se puede, se acerca a 3 o 2	
	Envase de tempera	10	5	2		
	Tapa de botella	14	6	2,3		
	Desodorante	15	3	5		
	Pegamento	14	5	2,8		
7	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Algunos se parecen a 2 y otros a 4	
	Vaso	2	7,5	3,75		
	botella	7	22	3,1428		
	lápiz	3	9	3		
	audífonos	2,25	9,9	4,4		
8	Objeto	P	Diámetro (d)	P: d	Si nos dio el 2	Lo medimos todo mal.
	Termo	23	12	1,7692...		
	Moneda	8	6	-		
	Botella	25	13	1,923...		
	flauta	7	10	1,4228...		

Elaboración propia

La tabla anterior (4.13) permite establecer que gran parte de los grupos no logró acercarse al valor esperado que corresponde a 3,14, esto se puede relacionar a errores con la medición de los objetos y no a la operación matemática ya que se les permitió utilizar calculadora para la dividir el valor del contorno con diámetro. Algunos grupos miden a partir del número uno de la regla y la huincha, lo que pone en evidencia que no han superado el obstáculo didáctico que supone haber construido los números naturales con la cinta numerada y asociarla con el concepto de recta numérica en niveles anteriores.

Las y los estudiantes discuten y comparten los valores en voz alta, por lo que se logra realizar la retroalimentación en el momento al curso completo; se plantea una discusión en torno a

la pertinencia de hacer aproximaciones en la vida real ya que en diversas situaciones se requieren medidas precisas. Se les propone poner una malla en al aro de basquetbol del colegio y se les pregunta ¿qué sucederá si se utiliza un valor no decimal para la medida de la malla? Se espera que los estudiantes reconozcan que quedaría un pedacito de aro sin malla y con ello identifiquen que el trozo de malla faltante se relaciona con la parte decimal que no se incorporó a la medida inicial de la malla. Luego se anima a los estudiantes a realizar la actividad tomando medidas más precisas del contorno y el diámetro de un objeto, este paso se verifica grupo por grupo para ayudarlos a medir correctamente; sin exagerar el estiramiento de la lana, buscando el centro de la circunferencia para medir el diámetro, estableciendo cómo se mide usando huincha. Posteriormente realizan la división con calculadora para llegar a un resultado más preciso y logran llegar a resultados cercanos a 3,14 y para luego formalizar el valor de π .

Esta actividad fue más compleja de realizar ya que anteriormente solo han realizado operatoria de polígonos con números naturales y las mediciones que han realizado han sido solo con números enteros positivos, en este caso, en la medición se enfrentaron a medidas no enteras y existe cierta resistencia a trabajar con decimales y su operatoria, debido a los números racionales generan dificultades en los alumnos producto a su densidad, definición y la enseñanza de la operatoria entre ellos de forma memorística (Godino, Batanero et al., 2004), se establece, una vez más, que los decimales son un obstáculo epistemológico para las y los estudiantes y dificultan el estudio de la circunferencia.

El grupo 3 no logró completar la tabla de medidas porque no comprendieron la instrucción y se quedaron sin realizar la actividad hasta que la docente llegó a sus puestos a orientarlos. Por otro lado, el grupo 1 explicó su temor a trabajar con decimales y completó la tabla aproximando los valores de las medidas a números enteros, se les retroalimenta la actividad, pero decidieron no cambiar los valores por temor a que al dividir decimales pudieran obtener resultados erróneos.

Sección 4

La sección 4 corresponde a la formalización de los siguientes conceptos:

- El valor de la medida del contorno se llama perímetro de la circunferencia.
- El valor de PI es 3,14 y se denomina con el símbolo π .
- El perímetro se calcula con la siguiente fórmula: $P = d \cdot \pi$ y como el diámetro equivale a 2 veces la medida del radio y $\pi = 3,14$ se tiene: $P = 2 \cdot r \cdot 3,14$

Esta última fórmula la realiza la profesora en la pizarra con la participación de los estudiantes.

Para lograr la formalización, los estudiantes, con ayuda del docente, completan dos elementos para completar la oración y las respuestas se presentan en la tabla 4.14.

Completa la oración 1: Podemos establecer que la medida del contorno P corresponde a aproximadamente ____ veces la medida del diámetro de cada objeto circular. Con la tabla podemos establecer que corresponde exactamente a _____ veces. El valor 3,14 se conoce matemáticamente como PI y se denomina con el símbolo π .

Completa la oración 2: A la medida del contorno que designamos como p lo llamaremos _____ y podemos r su valor multiplicando el _____ por 3,14. Algebraicamente se puede escribir como $P = d \cdot$ ____

Estas actividades de completar la oración, corresponde a una situación de institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza la definición del número Pi y la fórmula algebraica para calcular el valor del perímetro de la circunferencia.

Tabla 4.14*Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 2 de la secuencia*

Grupo	Completa la oración 1	Completa la oración 2
1	3 3	Perímetro Diámetro $P = d \cdot 3,14 = d \cdot \pi$ $P = 2 \cdot r \cdot 3,14 = 2 \cdot r \cdot \pi$
2	3 2	
3	3 3,14	Perímetro diámetro
4	3 2	Perímetro diámetro
5	3 2	Perímetro diámetro $P = d \cdot 3,14$
6	3 2	Perímetro Diámetro $P = d \cdot 3,14 = d \cdot \pi$ $P = 2 \cdot r \cdot 3,14 = 2 \cdot r \cdot \pi$
7	3 2	$P = d \cdot 3,14 = d \cdot \pi$ Diámetro
8	3 2	Perímetro diámetro $P = 2 \cdot r \cdot 3,14 = 2 \cdot r \cdot \pi$

Elaboración propia

La tabla 4.14 permite establecer que sólo el grupo 3 completó correctamente la primera actividad de la sección 4 pero no completaron la fórmula ya que se preocuparon de poner atención y olvidaron escribirla, el grupo 2 indica que no completaron la parte dos ya que no entendieron y se distrajeron al igual que el grupo 4 quienes indicaron que se enredaron. El resto de los grupos escribió la fórmula siguiendo los pasos escritos en la pizarra, pero indicaron que no lograrían realizarlo solos.

A pesar de lo anterior, la mayoría logró comprender que la medida del contorno de la circunferencia se llama perímetro y se calcula utilizando el valor de PI que corresponde a 3,14 y es una razón entre el contorno y el diámetro de una circunferencia, es decir, se logró formalizar los conceptos, pero de manera memorística y no a partir de la actividad.

Es importante recordar que las y los estudiantes no saben resolver ecuaciones lineales con productos entre valores numéricos ni con términos algebraicos, ya que no han adquirido el conocimiento de pasar de datos e incógnitas a trabajar con variables, equivalente a pasar del mundo aritmético al algebraico lo que es un obstáculo para las y los alumnos. Por lo que la explicación de la fórmula requiere de su mayor atención, aun así, lograron comprender que en la fórmula se reemplaza el valor 3,14 por el símbolo π y que la letra P corresponde a la medida del perímetro o contorno de la circunferencia, y volvieron a utilizar la equivalencia de medidas: $d = 2r$.

En comparación a la etapa 1, esta etapa tuvo más complicaciones debido a obstáculos didácticos y epistemológicos relacionados con la ausencia del conocimiento respecto a la solución de ecuaciones lineales con productos y por la falta de comprensión de los números decimales como obra matemática y producto de la enseñanza de estos en niveles anteriores. Los estudiantes no están acostumbrados a explorar y construir respuestas o hacer preguntas, por lo que con esta secuencia didáctica se cambia el contrato didáctico y los alumnos se resisten.

Respecto a los objetivos que se propusieron en el análisis a priori de esta etapa, se considera que, adquirieron el conocimiento relacionado al número π y la fórmula del perímetro por medio de la institucionalización de la profesora pues el conocimiento aún no está estabilizado. Esto se evidencia en la etapa siguiente, donde la mayoría de los grupos relaciona el símbolo π con el número 3,14 y al valor del perímetro como la medida del contorno, pero en su mayoría sin lograr explicar cómo se generó este conocimiento, aunque hacen referencia las medidas del contorno y del diámetro de objetos circulares, pero no a su relación.

4.4 Etapa 3: Área de la circunferencia

El propósito de la etapa 3 se centra en que los estudiantes construyan el concepto de área de la circunferencia y comprendan el sentido de la fórmula, que incluye el valor de π estudiado en la etapa anterior y puedan aplicarla posteriormente para calcular el área de diversas circunferencias a partir de los valores del radio o del diámetro. Para construir y comprender el concepto de área, transitan por diversas secciones, a partir de la manipulación de los siguientes materiales: una hoja de papel, lana, tijeras y pegamento.

Para esta etapa la dificultad se presenta con el cálculo de la medida del área de la circunferencia puesto que a diferencia de los polígonos con los que han trabajado anteriormente, la circunferencia no posee lados. Para comenzar, a cada grupo se le entrega una tapa circular, en la mesa del docente hay trozos de papel lustre y se les presenta la siguiente problemática: sin llevar la tapa a la mesa del ¿Qué cantidad de papel deben recortar para cubrir la tapa de manera exacta, sin que sobre o falte papel? ¿de qué manera se puede conocer la medida que debe tener el papel?

Para cumplir con el objetivo, en la primera sección deben identificar los conceptos aprendidos durante las etapas anteriores, en la segunda sesión realizarán una actividad manual que les permitirá comprender el concepto de área de la circunferencia, en la sección 3 utilizan lo generado con la actividad manual para relacionar el área de la circunferencia con el área de un triángulo. Finalmente, en la sección 4 se construye en conjunto con el grupo curso la fórmula algebraica del área de la circunferencia.

Sección 1: Preguntas Introdutorias

Esta sección corresponde a las tres primeras preguntas de la etapa que buscan identificar qué es lo que recuerdan las y los estudiantes de lo estudiado en las etapas 1 y 2 de la secuencia, y motivar las actividades a realizar durante esta clase. La docente lee las preguntas en voz alta y les otorga tiempo para que puedan responder, la tabla 4.15 presenta las respuestas de los grupos de trabajo para las preguntas introductorias:

Primera pregunta: ¿Qué conceptos han aprendido durante las clases pasadas? la imagen les entrega algunas pistas.

Segunda pregunta: Considerando las actividades que se han realizado en las clases anteriores y los materiales que se les presentan ahora ¿qué creen que podrán aprender hoy?

Tercera pregunta: ¿Cómo creen que utilizaran los materiales en esta clase?

Tabla 4.15

Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 3 de la secuencia

Grupo	Respuesta 1	Respuesta 2	Respuesta 3	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Aprendimos sobre el radio, el perímetro y diámetro de la circunferencia	Podríamos medir el radio y el diámetro con lana	Podríamos hacer una circunferencia con la lana y podríamos medir el hilo.	Respuesta 1: medimos el radio y el contorno.
2	Lo que hemos aprendido es el perímetro, el radio y el diámetro.	Hoy podemos aprender a medir el radio	Para hacer un radio y una circunferencia.	
3	En la clase pasada hemos aprendido la circunferencia y el diámetro	Yo creo que vamos a aprender a medir otras figuras y poder hacer más figuras	Haciendo una circunferencia y midiendo con lana.	

4	Hemos aprendido sobre el radio, el diámetro, circunferencia y perímetro.	Nosotros creemos que vamos a trabajar con otras figuras	Creemos que vamos a usar los materiales para hacer algo similar a la clase pasada	Respuesta 1; medimos el contorno que es lo mismo que el perímetro
5	Sobre las circunferencias, a cómo calcular el diámetro, el perímetro, el radio y el número π .	Creo que podríamos aprender sobre cómo hacer circunferencias de distintos tamaños	Creemos que se utilizaran para dibujar en el papel una circunferencia en la hoja y después remarcar con lana	Respuesta 1: Usamos la lana para medir y después vimos que el diámetro cabe 3 veces en la lana de contorno y eso da 3,14.
6	Hemos aprendido sobre la circunferencia del perímetro y el diámetro	Medir el radio como el círculo	Medir la circunferencia como el perímetro, el radio y el diámetro.	
7	Medir los materiales redondos, calcular la medida del hilo y medir bien la circunferencia	Medir nuevas cosas	Lo utilizaremos para hacer circunferencias	
8	Aprendimos que con la lana y un plumón se puede hacer una circunferencia	Hacer nuevos tipos de circunferencia y para medir el perímetro y el área	Nosotros creemos que los materiales se van a ocupar para saber medir, medir mejor el radio y el área.	Respuesta 1: medimos alrededor de las cosas y la línea del medio y después había que dividir.

Elaboración propia

La tabla 4.15 permite establecer que la mayoría de los grupos reconoce haber aprendido sobre el radio, el diámetro y el perímetro de la circunferencia en las etapas anteriores, solo el grupo 5 hace referencia al número π y la actividad con la que se llegó a su valor, por otro lado, el grupo 8 se refirió a lo realizado en la etapa 1, al preguntarles por la clase anterior indican que recuerdan que midieron con lana, pero no recuerdan el nombre de los conceptos estudiados, lo que permite inferir que la actividad pudo ser más compleja para ellos lo que les impidió apropiarse de los conceptos.

Cuando se les pregunta a los estudiantes sobre los posibles aprendizajes que obtendrán en esta etapa, indican que se realizarán mediciones a pesar de que no se utilizaran herramientas de medición, se puede suponer que infieren que establecerán relaciones métricas como en la clase anterior cuando buscaron una relación entre los trozos de lana. Los grupos 3 y 4 piensan que medirán otras figuras ya que no se les solicitó elementos circulares, esto es consecuente con lo aprendido en niveles anteriores ya que el estudio de polígonos incluye más de una figura geométrica. Se puede suponer en esta primera parte de la etapa que han adquirido y se comunican con el lenguaje matemático que requiere el estudio de la circunferencia.

Sección 2

La sección 2 se centra en una actividad manual a realizar; esta consiste en dibujar una circunferencia en la hoja de papel entregada con un compás, cubrirla completamente con circunferencias de lana sin que queden espacios en blanco (imagen 4.11), es importante que el docente verifique que cumplan con la instrucción ya que de lo contrario no se logrará el objetivo.



Imagen 4.11: Resultados de la actividad realizada por 2 grupos.

La imagen 4.11 presenta las actividades realizadas por dos grupos, la imagen de la izquierda presenta la circunferencia bien realizada, pero la imagen de la derecha muestra que no han rellenado

correctamente, a estos estudiantes hay pedirles que corrijan lo realizado, de lo contrario el paso siguiente no será efectivo.

Una vez realizada la actividad manual, la profesora lee la pregunta uno en voz alta y les pide que compartan sus respuestas con el resto del curso,

Pregunta 1: La clase pasada aprendieron que el contorno de la circunferencia corresponde al perímetro. ¿Qué concepto geométrico representa ahora toda la lana que cubre la circunferencia?

La tabla 4.16 presenta las respuestas de los estudiantes a esta pregunta.

Tabla 4.16

Respuestas para la pregunta 1 de la sección 2, etapa 3 de la secuencia

Grupo	Respuesta 1
1	Representa el área de la circunferencia
2	Significa el relleno adentro de la circunferencia
3	Representa el área
4	La lana representa el área de la circunferencia
5	El área de la circunferencia
6	Cubre la lana, es el área de la circunferencia
7	Es cubrir la circunferencia
8	El borde es el perímetro, pero cuando llenas una circunferencia es el área

Elaboración propia

La tabla anterior (4.16) presenta que los estudiantes reconocen que cubrir la superficie de una figura representa el área de esta, debido a que en el nivel anterior estudiaron el perímetro y el área de polígonos, sin embargo, se mantiene el cuestionamiento de cuánta lana se requiere para cubrir la circunferencia.

Posteriormente la docente lee la pregunta 2 y realiza una demostración en la que deben cortar la circunferencia por su radio, retirar cada trozo de lana que cubre la hoja de papel y construir una nueva figura con ella. Esta nueva figura debe ser construida con todos los trozos de lana que

se obtienen al cortar la circunferencia, estos se deben utilizar en forma recta y no deben quedar espacios en blanco.

Pregunta 2: Si separamos cada una de las lanas cortadas en la circunferencia ¿qué otra figura geométrica se puede formar usando todos los trozos de lana en forma recta sin que queden espacios sin recubrir? Escriban su respuesta y, al lado, realicen un dibujo con la forma en que utilizaron las lanas

La figura que se espera que construyan es un triángulo, pero ninguno de los grupos logra formarlo, en general, buscan construir rectángulos o cuadrados puesto que en niveles anteriores solo han estudiado y manipulado polígonos, solo un grupo se acerca a la construcción (imagen 4.12).

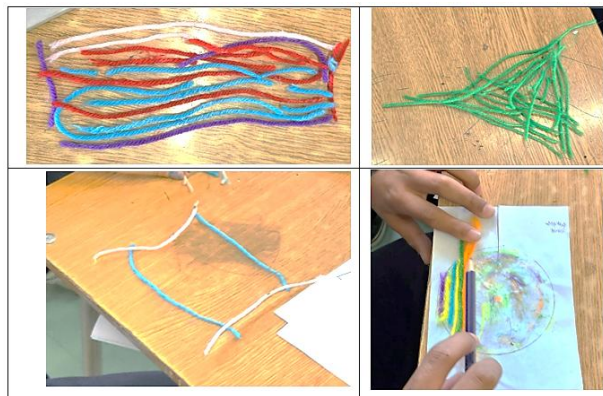


Imagen 4.12: construcciones de algunos grupos.

En la imagen (4.12) se puede apreciar los intentos de los grupos por cumplir con la instrucción anterior, la docente pasa por lo grupos reforzando la instrucción de que debe ser una figura que utilicen todos los trozos de lana en forma recta, sin dejar espacios en blanco, y sin sobreponer. La imagen inferior derecha muestra un acercamiento a la figura esperada.

Para orientar a los estudiantes a que formen el triángulo, la docente realiza la siguiente pregunta: ¿Qué figura se puede formar si se ordenan las lanas de menor a mayor tamaño? Luego

de recibir las respuestas de los grupos, dibuja la figura esperada en la pizarra y lee la pregunta 3 en voz alta, les pide a algunos estudiantes que respondan a viva voz y luego les otorga tiempo para registrar sus respuestas en el papel.

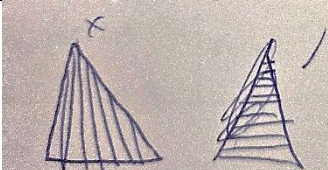
Pregunta 3: Observen la figura que formó la profesora. ¿es la misma figura que formaron ustedes?
¿Cómo se utilizó la lana para formar esa figura?

La tabla 4.17 presenta las respuestas para las siguientes preguntas de la sección 2:

Tabla 4.17

Respuestas para la pregunta 2 y 3 de la sección 2, etapa 3 de la secuencia

Grupo	Respuesta 2	Respuesta 3	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Un rectángulo poniendo todas las lanas rectas	No, ella hizo un triángulo, usó las lanas de forma recta también, pero las puso en un orden del más pequeño al más grande.	Se podría formar un rectángulo, pero habría que doblar la lana para rellenar
2	Como un triángulo, pero largo porque no se podía doblar entonces sería un triángulo con raya y con el resto lo rellenamos	Si, pero con distinto orden, como que la hicieron de lanas chicas y nosotros como se hace un triángulo	
3	Se puede crear un rectángulo	No es la misma figura y se forma de la lana más grande a la más chica	
4	Pudimos hacer un triángulo con las lanas, con el resto lo rellenamos	Se podría decir que hicimos la misma figura, pero de otra forma	Se puede hacer como una pirámide.
5	Un cuadrado o un rectángulo	No, no fue la misma y la figura se puede hacer estirando la lana haciendo que sea más parecida a la figura	
6	Hicimos un rectángulo. Corrección: Un triángulo semi triángulo, yo lo hice vertical y va del más pequeño al más grande	No, yo lo hice vertical y no horizontal, y era del más pequeño al más grande.	

			
7	Hicimos una casa y sin un borde redondo (sin dibujo)	Uso lana larga y poco a poco se hizo pequeña y formó un triángulo	
8	Se puede formar un rectángulo o un cuadrado.	No era la misma figura, hacer un ala y luego agregar una línea	

Elaboración propia

La tabla 4.17 presenta que la mayoría de los estudiantes pensó en construir cuadrados o rectángulos, esto concuerda con lo presentado en la actividad diagnóstica, ya que mostraron que reconocen el cálculo del área y el perímetro de estos polígonos estudiados, y son las figuras geométricas con las que han trabajado constantemente durante los niveles anteriores. Luego, ayudándose con la pregunta auxiliar de la profesora, logran construir el triángulo fácilmente ordenando las lanas de mayor a menor tamaño, pero solo el grupo 7 muestra una corrección en su respuesta escrita. Siguiendo las sugerencias del juicio de expertos se podría pedir directamente que construyan un triángulo, para facilitar la actividad, pero para esta primera aplicación se prefirió no establecer una figura y observar la manipulación del material por parte de los estudiantes.

Sección 3

La sección 3 busca que las y los estudiantes relacionen elementos del triángulo formado con elementos de la circunferencia, para posteriormente construir el área de la circunferencia a partir del área del triángulo.

La docente lee la cuarta instrucción de la sección 3, que corresponde a la siguiente: dibujen la figura formada por la profesora e identifiquen cuál es la base y cuál es la altura.

La respuesta se realiza en conjunto en la pizarra, y los grupos realizan el siguiente dibujo (imagen 4.13) en su guía de trabajo.

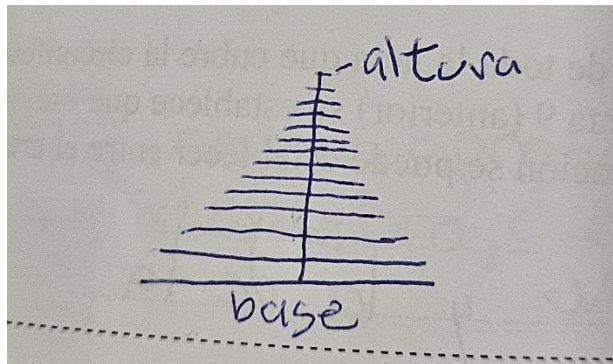


Imagen 4.13: dibujo del triángulo con su base y altura, representando el triángulo de lana

En la imagen 4.13 se observa un triángulo, a simple vista equilátero, con base horizontal y altura vertical, este reconocimiento de elementos se realiza para calcular el área del triángulo con el fin de poder guiar las respuestas a las preguntas 5 y 6 de la sección 3.

La docente lee la pregunta 5 y escucha algunas respuestas, y repite lo mismo con la pregunta 6.

Pregunta 5: Recordando lo aprendido en las clases anteriores ¿Qué representa el trozo de lana más largo en la circunferencia? ¿Qué representa este trozo de lana en el triángulo?

Pregunta 6: ¿Qué elemento representa la altura del triángulo relacionándolo con la circunferencia?

Se les pide a los estudiantes que busquen la relación utilizando el material concreto; primero el trozo de lana más largo que representa la base del triángulo, reubicándolo en la circunferencia y luego, tomando la circunferencia recortada por su radio para poder identificar a qué parte del triángulo es equivalente.

La tabla 4.18 presenta las respuestas a las preguntas 5 y 6 de la sección 3, con ellas se busca que los estudiantes reconozcan elementos como el radio y el perímetro de la circunferencia en el triángulo generado con lana.

Tabla 4.18*Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 3 de la secuencia*

Grupo	Respuesta 5	Respuesta 6	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Representa el contorno de la circunferencia	La altura es el radio de la circunferencia. $r = \text{altura}$	
2	El contorno de la figura	La radio	
3	Representa el contorno	Representa el radio de la circunferencia	
4	Representa el contorno en la circunferencia y el triángulo la base	La altura es el radio de la circunferencia	Si los ponemos de nuevo en el círculo uno se da cuenta al tiro
5	El borde, el cual representa el trozo de lana más largo	Son todas las lanas juntas	
6	La largo de la lana es el contorno de la circunferencia y es la base	La altura es el radio del triángulo	
7	Estábamos midiendo el contorno y la altura del triángulo mide el radio		
8	Es el perímetro de la circunferencia	Es como el diámetro de la circunferencia	

Elaboración propia

Se puede establecer que la mayoría de los estudiantes logran identificar que la base del triángulo se relaciona con el perímetro o contorno de la circunferencia, y el radio con la altura del triángulo.

Es importante destacar que una estudiante del grupo 4 grito las respuestas cuando las encontró, por lo tanto, existe la posibilidad que guiará la respuesta de otros grupos, sin embargo, el grupo 7 no responde ya que no logra relacionar el radio de la circunferencia con la altura del triángulo, la profesora les explica personalmente con un dibujo. Por otro lado, el grupo 5 identifica que el trozo más largo de lana corresponde al contorno de la circunferencia, pero no se puede

asegurar que lograron relacionar el radio con la altura, ya que su respuesta escrita no otorga más información.

Sección 4

La sección 4 es la última sección de la tercera parte de la secuencia, con ella se espera que los estudiantes conozcan la fórmula para calcular el área de la circunferencia a partir del área del triángulo.

La sección 4 inicia con la instrucción que es comunicada a los estudiantes por medio de la docente: Utilizando los elementos que relacionaron anteriormente, calculen el área del triángulo. Recuerda que el área se calcula multiplicando el valor de la base por la altura y el resultado se divide por dos. Escriban el desarrollo y encierren el resultado final.

Para seguir esta instrucción es necesario utilizar un nivel de álgebra que ellos no dominan al igual que en el caso del desarrollo de la fórmula del perímetro de la circunferencia, por lo tanto, es realizado por la profesora en la pizarra con la ayuda de los estudiantes.

el resultado final.

$$\begin{aligned} \text{ALTURA} &= R \\ \text{PERÍMETRO} &= D \cdot \pi = 2 \cdot R \cdot \pi \\ A_{\Delta} &= \frac{\text{BASE} \cdot \text{ALTURA}}{2} \\ A_{\Delta} &= \frac{2 \cdot R \cdot \pi \cdot R}{2} \\ A_{\Delta} &= \frac{R \cdot R \cdot 2 \cdot \pi}{2} \\ A_{\Delta} &= \frac{R^2 \cdot \cancel{2} \cdot \pi}{\cancel{2}} \\ A_{\Delta} &= R^2 \cdot 1 \cdot \pi = R^2 \cdot \pi \end{aligned}$$

Imagen 4.14: reproducción de lo escrito en la pizarra por uno de los grupos.

La imagen 4.14 muestra lo desarrollado en la pizarra y a continuación se relatan los pasos realizados:

- Se identifican los elementos de la altura y el perímetro con sus denominaciones algebraicas, según la relación establecida.
- Se escribe la fórmula del área del triángulo en palabras y luego se reemplaza la fórmula con sus denominaciones algebraicas.
- Se realiza el procedimiento algebraico ordenando los factores estableciendo la potencia r^2 y eliminado el divisor, obteniendo $r^2 \cdot \pi$.

Este paso de la secuencia debe realizarse de manera pausada buscando la comprensión de los estudiantes e incentivándolos a participar en el desarrollo, para ello se realizaron las siguientes preguntas auxiliares:

- ¿A qué equivale la altura del triángulo en la circunferencia? ¿Con qué letra se representa el radio?
- ¿A qué equivale la base del triángulo en la circunferencia? ¿Con qué letra se representa el perímetro o contorno?
- ¿Cómo se calcula el área del triángulo?
- ¿Se puede cambiar el orden de los números en una multiplicación?
- ¿Cómo se puede escribir $3 \cdot 3$ como una potencia? ¿cómo se escribirá entonces $r \cdot r$?
- ¿Cuál es el valor de $2:2$?
- ¿Cuál será entonces la fórmula para calcular el área del triángulo?

En esta etapa de la secuencia se presenta nuevamente el obstáculo didáctico que se relaciona con el contenido algebraico que dominan los estudiantes, además se suma otro obstáculo didáctico ya que no recuerdan, e incluso algunos reconocen no haber estudiado con anterioridad como se calcula el área de un triángulo, para solucionar este inconveniente la docente los guía estableciendo

que si un triángulo es la mitad de un rectángulo, el valor de su área corresponde al área del rectángulo dividido en dos.

Las preguntas 8 y 9 permiten establecer la fórmula del área de la circunferencia, y el completar la oración final formaliza el objetivo de la etapa. A continuación, se presentan dichas preguntas que la docente lee en voz alta a los estudiantes:

Pregunta 8: Tal como vimos en la pregunta 4, la unión de toda la lana que cubre la circunferencia corresponde al área de la circunferencia. Pero en la pregunta 9 (anterior) se establece que esa misma cantidad de lana produce el área del triángulo ¿Qué relación se puede establecer entre el área del triángulo y el área de la circunferencia?

Pregunta 9: Según la relación anterior ¿Se puede deducir el valor del área de la circunferencia?

Completa la oración: Podemos establecer que el área de la circunferencia corresponde a la superficie de esta y se puede calcular utilizando la fórmula: _____.

Esta actividad de completar la oración corresponde a una situación de institucionalización ya que con el apoyo del docente se formaliza la fórmula algebraica del área de la circunferencia.

La tabla 4.19 presenta las respuestas de las preguntas anteriores establecidas por los estudiantes.

Tabla 4.19

Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 3 de la secuencia

Grupo	Respuesta 8	Respuesta 9	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Miden lo mismo	Yo creo que sabiendo el valor del triángulo si, no sé	$r^2 \cdot \pi$	

2	Que mide lo mismo y que los dos tiene lana	Por π	$A_c = r^2 \cdot \pi$	
3	Miden lo mismo	Si	$r^2 \cdot \pi$	
4	El área del triángulo y la de la circunferencia miden lo mismo	$r^2 \cdot \pi$	$R^2 \cdot \pi$	Si usamos la misma lana, entonces es como el mismo espacio
5	Son lo mismo	$r^2 \cdot \pi$	$A_c = r^2 \cdot \pi$	
6	Que los dos son lo mismo	Si $r^2 \cdot \pi$	$r^2 \cdot \pi$	
7	Es lo mismo	$r^2 \cdot \pi \cdot 1$	Por pi	
8	Son iguales	Sería $r^2 \cdot \pi$	$A_c = r^2 \cdot \pi$	Como se ocupan los mismos pedazos de lana, tienen que ser iguales

Elaboración propia

La tabla anterior (4.19), permite establecer con la pregunta 8 que los estudiantes comprendieron que la cantidad de lana que tiene el triángulo construido es la misma de la circunferencia, por lo tanto, el valor de las áreas es la misma, es decir, la fórmula establecida para calcular la cantidad de lana que ocupa el triángulo es la misma de la circunferencia. En cuanto a la pregunta 9, el grupo 1 indicó que no sabían cuál era el valor del área porque no tenía ningún número, se les explica que lo encontrado fue la fórmula para calcular el valor del área y se realizó un ejemplo con el curso completo para mejorar la comprensión, asignando un valor para el radio.

En cuanto a los grupos, si bien no logran resolver ecuaciones algebraicas con multiplicación sin la guía del docente, buscan participar en la construcción de la fórmula del área de la circunferencia sin temor demostrando que comprenden cómo reemplazar un concepto por una denominación, por ejemplo, el radio por r y el perímetro por p , esto producto de su participación en la construcción de la fórmula del perímetro en la etapa anterior. Al preguntar en la fórmula cuánto vale π , a coro responden que su valor es 3,14 lo que refuerza la idea de que institucionalizaron el valor, y lograron reconocer que $r \cdot r = r^2$ a pesar de no haber estudiado potencias con lenguaje algebraico, lo que demuestra una mayor reflexión matemática, además, se

puede instaurar que con la secuencia están adquiriendo la comunicación por medio del lenguaje matemático.

4.5 Etapa 4: Relación entre área y perímetro de la circunferencia

La aplicación de esta etapa de la secuencia ocurrió previo a finalizar el año escolar, y no se asignó una recompensa ni una calificación por ella, lo que implicó que los estudiantes se comportaron de manera desordenada y desinteresada debido al cansancio y poca concentración al momento de formalizar el contenido.

La etapa 4 corresponde a la última parte de la secuencia, con ella se busca establecer una relación entre los valores del área y el perímetro de una circunferencia y se espera que puedan asegurar que, si se modifica el valor del radio o del diámetro cambiará el valor del perímetro y del área de la circunferencia aumentando o disminuyendo según el cambio realizado, pero no en la misma proporción. Para lograr el objetivo de la etapa, la situación diseñada para los estudiantes consiste en la construcción de un gallinero circular con malla metálica y pasto sintético en un espacio real del establecimiento educativo, junto al huerto que visitan mensualmente, esta situación provocó un gran interés de parte de los estudiantes, incluso fueron a preguntar a la encargada técnica pedagógica si podían traer palos ya cortados o si los podían cortar en el colegio y poder llevar a cabo la construcción.

Al igual que con las etapas anteriores, la etapa 4 se separa en secciones; la primera sección corresponde a una pregunta introductoria para motivar el resto de las actividades, en la sección 2 los estudiantes deben vincular los materiales entregados (goma eva y cartulina) con la malla metálica y el pasto sintético que se utilizará para construir el gallinero, y relacionar estos últimos

con el perímetro y el área de la circunferencia, en la sección 3 se busca identificar los cambios que experimentan el perímetro y el área, y en la última sección los estudiantes deben establecer la relación entre el área y el perímetro al modificar su valor.

Sección 1: Preguntas introductorias

La docente lee la siguiente pregunta introductoria posterior a entregarle el contexto a los estudiantes y les otorga tiempo para discutir y registrar su respuesta en el papel:

Pregunta: Imagina que a ti y a tus compañeros de grupo se les asigna la construcción del gallinero que estará al lado del huerto, ¿qué pasos deberían realizar para construir el gallinero circular con malla metálica y pasto sintético de modo que no queden espacios del suelo del gallinero sin cubrir? ¿en qué orden deben ser realizados los pasos? Las respuestas de los estudiantes se registran en la tabla 4.20.

Tabla 4.20

Respuestas de los estudiantes para la sección 1, etapa 4 de la secuencia

Grupo	Respuesta a pregunta introductoria	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Lo primero que haremos es la base del gallinero, seguido pondremos la malla metálica, tercero poner el pasto y después cubrir el contorno.	
2	Lo que vamos a hacer nosotras es armar un círculo para después poner la rejilla y luego el pasto sintético	
3	Primero cortaremos el pasto para que quede bien y no quede largo de un lado y corto del otro, después lo colocamos. Luego cortamos la malla metálica para que quede bien, luego ponemos la malla y sellamos el contorno.	
4	Primero ver el espacio, luego cortar el pasto en un círculo más grande para que no queden hoyos y por último poner la malla y enterrarla	¿Cuánto material vamos a usar? Porque si después no alcanza no se va a poder terminar

5	Primero ver el porte, luego corto el pasto sintético en un círculo un poco más grande que la medida para que no queden huecos y por último pongo la malla y las gallinas	Hay que saber cuánto va a medir el círculo
6	Primero pondremos pasto sintético, después le ponemos aserrín, luego la malla metálica y las gallinas. Antes cubrimos y medimos.	
7	Primero colocamos 3 metros de profundidad, luego cortamos tablas para ponerlos en los hoyitos, luego de pegarlo tendremos que medir todo para ver si todo está bien hecho. Después cortamos el pasto y ponemos todo el pasto falso, cortamos la madera y ya.	Vamos a tener que usar palos y clavos para que no se desarme. ¿profe en el colegio hay martillos?
8	Medir el material de la medida que necesitamos, enterrar la parte de debajo de la malla para que las gallinas no se salgan y luego colocar el pasto sintético en el centro de la malla.	

Elaboración propia.

La tabla permite evidenciar que los estudiantes empezaran a construir sin identificar el espacio a utilizar y calcular los materiales para la construcción; solo dos grupos, el grupo 4 y 5, van a medir antes de comenzar, lo que nos hace suponer que en los niveles anteriores no se han enfrentado a situaciones en donde deban investigar o recolectar datos antes de responder. Por lo tanto, se realizan las siguientes preguntas posterior a las respuestas de los estudiantes: ¿cuánto material van a utilizar para la construcción? ¿Cómo pueden saber que esa cantidad de material es la que va a permitir hacer la construcción tal y como es requerida? Con estas preguntas los alumnos comprenden que antes de construir deben identificar las medidas del gallinero circular y el grupo 6 agrega esta idea a su respuesta escrita.

La docente les indica que la medida del espacio para construir el gallinero circular es de 10,8 metros por 13,95 metros, y al final de la guía se les presenta un rectángulo representativo del espacio disponible con las medidas en centímetros, para que puedan dibujar la circunferencia en caso de que lo necesiten.

Sección 2

Con la sección 2 se busca que los estudiantes establezcan el valor del diámetro y del radio de la circunferencia que deberán utilizar para construir el gallinero, y que identifiquen que representan la malla metálica y el pasto sintético. Para esto, se le entrega a cada grupo un set que contiene rectángulos de goma eva amarilla que representan la malla metálica y sectores circulares de cartulina verde que representan el pasto sintético, cada set contiene siete piezas de goma eva y siete de cartulina, como lo muestra la imagen (imagen 4.16), pueden manipularlo previo a la lectura de la pregunta 1.

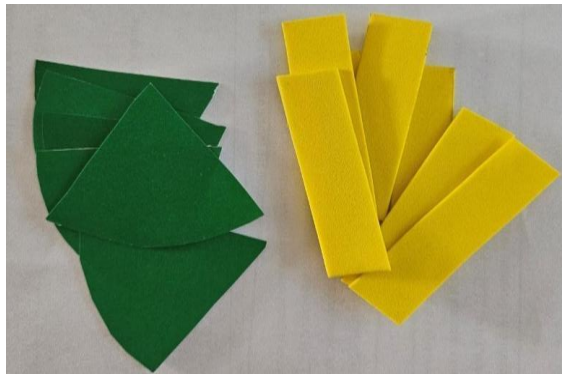


Imagen 4.16 Material concreto utilizado en la cuarta parte de la secuencia.

La docente lee la pregunta uno y en tabla 4.21 se presentan las respuestas, que busca que los estudiantes identifiquen el valor del radio de la circunferencia para posteriormente poder calcular su área y su perímetro.

Pregunta 1: ¿Cuál es la medida del diámetro que permite que el gallinero circular sea del tamaño más grande posible? Escribe cómo llegaste a esta medida e indica cuál es el valor del radio, puedes utilizar el espacio de la última hoja.

Tabla 4.21*Respuestas la pregunta 1 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia*

Grupo	Respuesta a pregunta 1	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	La medida que permite que el gallinero sea más grande el 10,8, llegamos a esa medida viéndolo	
2	Midiendo el círculo con la regla nos dio 10,5 metros	
3	La medida es 10,8, llegamos a esta medida midiendo con la regla, el radio es 5,4.	
4	Yo creo que es 10,8. Es 5,4 yo llego al diámetro porque está en la parte de al lado.	Como el diámetro es 10,8 y dos radios son un diámetro hay que ver cuanto por 2 nos da 10,8.
5	Yo creo que es 10,8. Es 5,4 yo llego al diámetro porque está en la parte de al lado.	Le copiamos al grupo 4 porque lo escribieron más bonito
6	La forma de hacer el gallinero más grande es agrandar el compás.	
7	En total el diámetro es de 10,8 en total.	
8	La medida del diámetro es de 10,8 cm, llegamos a esta medida con una regla. 2 radios son un diámetro, entonces el radio es de 5,4. Llegamos a este resultado dividiendo	Se nos olvidó responder la otra pregunta, pero es fácil porque hay que dividir

Elaboración propia.

La tabla nos permite establecer que la mayoría de los grupos identificó el diámetro de la circunferencia que corresponde a 10,8 metros, algunos lo hicieron de forma mental y otros dibujaron la circunferencia en el espacio de la guía que representa el terreno en centímetros, pero, solo la mitad de ellos identificó el valor del radio, al presentar sus producciones en voz alta, la mayoría indicó que olvidó responder esa parte la pregunta, pero que para conocer el valor del radio debían dividir en 2 la medida designada para el diámetro, para apoyar al grupo 6 en su respuesta, la docente se acerca al grupo y les pide que dibujen la circunferencia más grande posible y que con una regla puedan medir cuál es el valor del diámetro y el valor del radio. Se puede suponer que los grupos lograron comprender la relación entre la medida del radio y la medida del diámetro, el grupo

4 y el 8 explican la relación, demostrando lo aprendido en la etapa 1, debido a la relación que establecieron entre la lana y el compás.

Luego, la docente les indica que utilizaran el material concreto entregado y le pide a un estudiante que lea la pregunta 2 y les otorga tiempo para responder, luego de que comparten sus respuestas, la docente lee en voz alta la pregunta 3 y en la pizarra, en conjunto y con la ayuda de los alumnos, comprueban el resultado.

Pregunta 2: Tu profesora les entregará unas piezas de goma eva que simulan la malla metálica. Si el largo de cada pieza de goma eva mide 6,78 cm ¿Cuántas piezas de goma eva se necesitan para cercar el gallinero? Al sumar el largo de cada uno de esos trozos ¿cuál es el valor total de malla metálica que se necesita para cercar el gallinero? Recuerda que no debes cortar la goma eva.

Pregunta 3: Comprueba el valor del resultado anterior con la fórmula que construimos en la guía 2 y responde ¿Qué concepto geométrico representa la suma de los trozos de goma eva en el gallinero circular?

Luego de escuchar y comprobar el resultado de la pregunta 3 llenan el complete la oración y comparten sus respuestas.

Complete: Cuando cercamos o rodeamos un objeto circular y encontramos el valor de la medida necesaria para cercarlo, hacemos referencia al _____ de la circunferencia.

La tabla 4.22 presenta las respuestas de los grupos a las preguntas.

Tabla 4.22*Respuestas para las preguntas 2 y 3 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia*

Grupo	Respuesta 2	Respuesta 3	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	La cantidad de piezas que necesitamos es de 33,8	El concepto geométrico que representa la suma es el perímetro	Perímetro	Si juntamos los pedazos son 5 los que sirven
2	Lo que hicimos fue sumar 6,78 5 veces para que nos dé el resultado y me dio 33,912	El perímetro de la circunferencia	Perímetro	
3	Se necesitan 5 piezas de malla metálica para cercar el gallinero	El perímetro de la circunferencia	Perímetro	
4	4 casi 5, el total es 33,912	Si el concepto geométrico es un círculo	Perímetro	Es más fácil si juntamos las piezas, ahí da 5 pedazos y después sumamos el número 5 veces
5	5 el total es 33,912	El concepto es el círculo	Perímetro	
6	Usamos 5 gomas eva	El valor es de 33,912	Perímetro	
7	Se necesitan 5 gomas eva para cubrirlo, nos dio 33,912, multiplicamos $5 \cdot 6,78$	Si nos dio 33,912	Perímetro	
8	Necesitamos 5 piezas de goma eva, necesitamos 33,912 de malla metálica	Si nos dio 33,912 con calculadora. Es el perímetro	Contorno	Si sumamos es más fácil que multiplicar

Elaboración propia.

Durante la actividad se observa que los estudiantes rodean la circunferencia dibujada con la goma eva y rápidamente logran identificar que deben utilizar 5 piezas de ella, al sumar o multiplicar a mano o con calculadora, encuentran el valor del contorno, lo que se evidencia en la tabla anterior. Los grupos responden muy convencidos que la goma eva que representa la malla

metálica hace referencia al contorno o perímetro de la circunferencia. Para responder la pregunta 3 aplicando la fórmula del perímetro de la circunferencia, la profesora les pide recordarla, la escribe en la pizarra y la desarrolla para encontrar el valor cuando la medida del radio es de 5,4 cm con la ayuda del grupo curso.

Posteriormente los estudiantes utilizan el pasto sintético para responder las preguntas 4, 5 y el complete correspondiente al área de la circunferencia, la docente lee ambas preguntas y les pide que respondan y luego comparten sus respuestas en voz alta.

Pregunta 4: Tu profesora les entregará unas piezas de papel que simulan trozos de pasto sintético. Si cada pieza de papel tiene un área que mide 18,31 cm² ¿Cuántas piezas de papel se necesitan para cubrir el suelo del gallinero circular? Al sumar el área de cada uno de esos trozos ¿Cuál es el valor de la superficie total cubierta por pasto sintético que se necesita para cubrir el suelo del gallinero?

Pregunta 5: Comprueba el valor del resultado anterior con la fórmula que construimos en la guía 3 y responde ¿Qué concepto geométrico representa la suma de los trozos de papel en el gallinero circular?

Luego de responder las preguntas 4 y 5, la docente les indica que completen la oración y le pregunta al grupo 5 su respuesta y la formaliza con el resto del curso.

Complete: Cuando cubrimos la superficie de un objeto circular y encontramos el valor de la medida necesaria para cubrirlo, hacemos referencia al _____ de la circunferencia.

Las respuestas a las preguntas anteriores se presentan en la tabla 4.23.

Tabla 4.23

Respuestas para las preguntas 4 y 5 de la sección 2, etapa 4 de la secuencia

Grupo	Respuesta 4	Respuesta 5	Complete	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	El valor es 5	Representa el área de la circunferencia	área	El área es la lana que usamos la semana pasada.
2	Se puso pegamento en la circunferencia y nos dio 91,55	Corresponde al área de la circunferencia: $A_c = 5,4 \cdot 5,4 \cdot 3,14 = 91,5622$	área	
3	Se necesitan 5 piezas verdes y al sumar el área es 91,55	Es 91,55 y representa al triángulo	área	
4	5 piezas verde	Es el área de la circunferencia	área	
5	5 piezas verdes, 91,55	Si, el triángulo el área de la circunferencia	área	El área es el espacio que ocupa por dentro
6	Usamos 5 piezas de papel, 91,55	Si el área de la circunferencia	Área	
7	Son 5 piezas	Es el área	área	El área es la parte de adentro, como la lana de la clase pasada.
8	5 piezas también y nos dio 91,55	Representa el área de la circunferencia	área	

Elaboración propia.

Se evidencia que los estudiantes logran establecer que cubrir una superficie circular corresponde a identificar su área, los grupos 1, 4 y 7 no registran el valor de la suma de todas las piezas de malla metálica, se ven distraídos durante la actividad porque están manipulando el material. Al igual que con el perímetro, la profesora les pide recordar la fórmula del área de la circunferencia, pero una de las estudiantes del curso la entrega en voz alta, al preguntarle cómo logró aprenderla tan rápido responde que la encontró fácil porque era multiplicar el radio 2 veces

y después multiplicar por PI. Varios estudiantes intentan encontrar el valor del área de la circunferencia por medio de la fórmula y motivan a sus grupos a intentarlo replicando la actividad anterior que realizaron con el perímetro, demostrando su interés por aprender. En conjunto con la docente se aplica la fórmula para encontrar el valor del área de la circunferencia de radio 5,4 cm, obteniendo como resultado el valor 91,55.

La imagen siguiente (imagen 4.15) presenta a un estudiante que se esforzó para representar el gallinero con los materiales utilizados en la actividad.



Imagen 4.15: gallinero circular representado por un estudiante del curso.

Para mostrar la su representación de gallinero (imagen 4.15), el estudiante dice “aquí se ve clarito que se usan 5 de cada uno” haciendo referencia a las piezas de goma eva y de cartulina.

Sección 3

La sección 3 permite a los estudiantes establecer una relación entre el área y el perímetro, para facilitar esta actividad los estudiantes pueden utilizar calculadora, se le otorga a cada grupo de cinco a diez minutos para realizar los cálculos y luego la profesora los escribe en la pizarra, siguiendo el proceso que realizaron los estudiantes. Esta sección 3 está compuesta por las preguntas 6, 7 y 8, y las producciones se presentan en la tabla 4.24, la docente lee cada pregunta por separado,

otorgando tiempo para que registren sus respuestas y les pide a algunos grupos que las compartan en voz alta.

Pregunta 6: Si el valor del radio del gallinero circular aumenta al doble ¿el valor de la suma de la malla metálica que lo rodea aumentará al doble también? Justifiquen su respuesta

Pregunta 7: Si el valor del radio del gallinero aumenta al doble ¿el valor de la suma de la superficie del pasto sintético aumentará al doble también? Justifiquen su respuesta

Pregunta 8: Si disminuye el valor del radio a la mitad, y en consecuencia el valor de la suma de la malla metálica que rodea el gallinero ¿qué cambio se producirá en el valor de la suma del pasto sintético? ¿el cambio será en la misma proporción? Justifiquen su respuesta.

Tabla 4.24

Respuestas de los estudiantes para la sección 3, etapa 4 de la secuencia

Grupo	Respuesta 6	Respuesta 7	Respuesta 8	Observaciones no reportadas por los estudiantes
1	Si el valor aumenta al doble porque se multiplica además de que si crece el radio el perímetro aumenta.	El área aumenta, pero aumenta demasiado y eso provoca que no de la misma respuesta	El área disminuye porque no puede ser más grande que el perímetro.	Si uno crece el otro también tiene que crecer
2	Si porque al aumentar, dividir nos da el mismo resultado siempre	No, porque al multiplicar y al dividirlo por 2 no nos da el resultado que no debería dar normalmente. El nuevo resultado es mucho más grande	Si, porque multiplicamos ambos números y ambos disminuyen y también dividimos	
3	Si aumenta porque el espacio del gallinero es más grande	Si aumenta, pero no aumenta el doble, aumenta más del doble	Disminuye más del doble	

4	Si el valor aumenta al doble porque si uno de los dos aumenta	No porque tiene que cubrir más espacio y no rodear	Si porque tiene que rodear la circunferencia	
5	Si aumenta al doble porque si crece el radio también aumenta el perímetro	No, aumentará más del doble	Si, porque al ser la circunferencia más pequeña el radio se achica, ya que el radio se ajusta según el tamaño de la circunferencia. El área no puede ser más grande que el perímetro	
6	Si porque al multiplicarlo da el doble del número y si lo divides (por 2) da el número original	Si porque tiene que aumentar todo el pasto sintético al ser más grande	Si porque si se divide el radio también se divide el valor de la suma	
7	Si porque en total puede valer 10,8 y $p_c = 2 \cdot 10,8 \cdot 3,14 = 67,824$		Si porque tienen que rodear el perímetro por completo	
8	Si aumenta el doble por ambos deben aumentar.	Si aumenta, pero en más cantidad (que el perímetro)	Si, porque si uno disminuye ambos lo harán	Es fácil, si uno crece todos tienen que crecer y si uno se achica todos se tienen que achicar

Elaboración propia.

La tabla anterior permite establecer que los estudiantes comprenden que si aumenta la medida del radio al doble aumenta también el valor del perímetro, sin embargo, no se puede asegurar que identificaron que el perímetro también aumentará su medida al doble al igual que el radio. En cuanto al área, los estudiantes logran comprender que la medida del área aumentará más de lo que aumenta el perímetro, y que, si disminuye el valor del perímetro, también debe disminuir el valor del área, pero ninguno de los grupos responde sobre la proporción. Esto puede deberse a

que no han establecido relaciones entre las medidas del perímetro y el área de otras figuras geométricas.

Sección 4

Corresponde a la última sección de la secuencia y busca formalizar la relación entre el perímetro y el área. Para ello se genera una última pregunta y dos validaciones a través del complete la oración, la docente lee la pregunta y les pide que respondan, posteriormente revisan en conjunto las actividades de completar la oración.

- Pregunta 9:** Al cambiar el valor del radio del gallinero circular ¿Cómo se ven afectados el valor de perímetro y el valor del área? ¿Qué conocimiento matemático interviene entre la superficie del pasto sintético y la malla metálica?

Complete 1: Al aumentar el valor de la medida del radio de una circunferencia, él _____ y el _____ de la circunferencia aumentaran su valor simultáneamente. Si disminuye el valor de la medida del radio de una circunferencia, él _____ y el _____ disminuirán el valor de su medida simultáneamente.

Complete 2: La relación entre el área y el perímetro de una circunferencia corresponde a: si el valor del perímetro aumenta el valor del área también _____ pero en _____ cantidad, y si el _____ disminuye el valor de _____ también debe disminuir en una proporción distinta.

Ambos completan la oración buscan formalizar la relación entre la medida del área y del perímetro, por lo tanto, corresponden a una situación de institucionalización. Para esta sección se les da tiempo para que los grupos escriban sus respuestas y posteriormente se comparte con el resto del grupo para validarlas.

La tabla 4.25 presenta las respuestas de los grupos a la pregunta 9 y a los complete presentados.

Tabla 4.25

Respuestas de los estudiantes para la sección 4, etapa 4 de la secuencia

Grupo	Respuesta 9	Complete 1	Complete 2	Observaciones no registradas por los estudiantes
1	Cuando aumenta el radio, aumenta el perímetro y el área, pero el área aumenta en mayor cantidad o disminuye en menos cantidad	Perímetro, área. Área, perímetro.	Aumenta, distinto, perímetro, área	
2	No, porque el perímetro no puede ser más grande que el área	Perímetro, área. Área, perímetro	Aumenta, mayor, perímetro, área	
3	Aumenta el radio, el área y el perímetro, pero no en la misma cantidad	Perímetro, área. Área, perímetro.	Aumenta, distinto, perímetro, área	
4	Si el radio aumenta los dos aumentan o si disminuye, los dos disminuyen	Área, perímetro Área, perímetro	Aumenta, mayor, perímetro, área	
5	Si aumenta el radio aumenta el perímetro, también aumenta en distintas cantidades	Perímetro, área. Perímetro, área.	Aumenta, distinta, perímetro, área	
6	La relación es que aumentan y disminuyen igualmente los dos.	Perímetro, área. Área, perímetro.		
7	No porque disminuye más de la mitad	Perímetro, radio Perímetro, área	aumenta	
8	Si el radio crece o disminuye pasará lo mismo con el perímetro y el área, pero no en la misma cantidad	Perímetro, área. Área, perímetro	Aumenta, distinta, perímetro, área	

Elaboración propia.

La tabla anterior (4.25) permite establecer que los estudiantes comprenden que al variar el valor del radio cambia el valor del área y del perímetro de modo que si el perímetro aumenta su medida también lo hace el área, pero el área lo hace en mayor cantidad, lo mismo ocurre cuando el perímetro disminuye su valor. Sin embargo, también se evidencia que el grupo 2 y el grupo 7 no comprendieron lo anterior, sino que se quedaron con alguna idea de las preguntas anteriores.

Es importante destacar que se le dio énfasis a que si el radio aumenta al doble el perímetro también aumentará al doble pero este cambio ocurre sólo al duplicar el valor de la medida del radio y no en otro tipo de aumento, al igual que al disminuir a la mitad el valor del radio la medida del perímetro disminuye a la mitad.

Con esta etapa finaliza la secuencia para el aprendizaje de la circunferencia, con el análisis a priori se esperaba que logaran identificar en primera instancia que rodear o cercar una figura geométrica corresponde a identificar su perímetro, en este caso con la goma eva, y que cubrir o llenar una superficie corresponde a identificar su área, como por ejemplo con la cartulina verde, objetivo que se considera logrado. Además, se esperaba que logaran comprender que al aumentar o disminuir la medida del perímetro de una circunferencia, necesariamente aumenta o disminuye la medida de su área, pero el valor del área aumenta o disminuye siempre en mayor proporción, sin embargo, no se puede considerar logrado este objetivo debido a la actitud de los estudiantes al momento de aplicar la actividad. Se sugiere incorporar una actividad con material concreto o visual que les permita observar la variación mencionada.

De la secuencia didáctica, se puede concluir que fue una experiencia motivadora para los estudiantes, la mayoría de ellos logra construir el conocimiento por medio de la reflexión y manipulación de materiales y adquirir los aprendizajes esperados correspondientes a los elementos

de la circunferencia: centro, radio y diámetro, el grupo 4 lo logró con mayor facilidad al relacionar la lana utilizada en la etapa 1 con un compás y esta comprensión se evidenció a lo largo de la secuencia, los grupos 2 y 7 tuvieron más complicaciones al intentar llevar el ritmo de la clase al igual que el resto de sus compañeros, puesto que se confunden con facilidad al tratar de realizar las actividades de manera rápida, el grupo 6 y 8 presentaron una mayor reflexión e intuición matemática al relacionar los nuevos contenidos geométricos.

En cuanto al área y el perímetro, se puede establecer que las y los alumnos que transitaron por la actividad lograron diferenciar el área del perímetro pues en su mayoría los relacionaron con las actividades manuales realizadas, por ejemplo, relacionaron el perímetro con medir el contorno y con cercar el gallinero circular y el área con cubrir con lana o con pasto sintético una circunferencia, lo que se puede extender a otras figuras geométricas. Los ocho grupos memorizaron el valor de π identificándolo con el decimal 3,14, pero no es posible establecer si comprendieron que la medida del perímetro presenta un aumento proporcional, lo que no ocurre en el caso de la medida del área.

En cuanto a la fórmula del área y del perímetro de una circunferencia, no se puede garantizar que las y los estudiantes se hayan apropiado de las fórmulas del perímetro y del área a tal punto de volver rutinario su uso. No obstante, ello no formaba parte de los objetivos de la secuencia.

4.6 Actividad Diagnóstica segunda aplicación

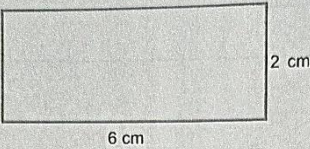
Para verificar los avances de los estudiantes en cuanto al aprendizaje de la circunferencia y la relación entre el área y el perímetro, se analizarán las actividades 3 y 5 de la actividad diagnóstica, omitiendo el análisis los tópicos relacionados con la multiplicación de números racionales, ya que se les facilitó realizarlo con calculadora, y el cálculo del área y perímetro de

polígonos puesto que este tipo cálculos no fue incluido como un aprendizaje de la secuencia didáctica.

Actividad 3

La actividad 3 consta de seis preguntas que hacen referencia al área y al perímetro de figuras, la imagen siguiente, presenta las preguntas de la actividad.

Actividad 3:
Responde cada pregunta con letra clara, puedes usar los datos de la imagen como ejemplo:



¿Qué es el área de una figura? El área de una figura es la medida de la superficie que ocupa la cantidad de espacio que encierra la figura	¿Qué es el perímetro de una figura? es una distancia que hay alrededor de una figura geométrica	¿Con que unidades de medida se representa el área y el perímetro? se mide en unidades cuadradas como el metro cuadrado (m²) y el perímetro en unidades lineales
¿Podemos usar la misma unidad de medida para medir el área y el perímetro? Justifica tu respuesta No, porque el área se mide en unidades cuadradas y el perímetro en unidades lineales	Si aumenta o disminuye el área de una figura ¿el perímetro aumenta o disminuye? Justifica tu respuesta depende, pero generalmente si el área aumenta el perímetro también lo hace aun que no siempre en la misma proporción	Si el área y el perímetro cambian su medida al aumentar o disminuir, ¿lo hacen en la misma proporción? Justifica tu respuesta No, porque el área cambia de forma cuadrática mientras que el perímetro cambia de forma lineal

Imagen 4.16: Respuesta a la actividad de 3 del estudiante n°18 segunda aplicación.

La imagen 4.16 presenta las nuevas respuestas del estudiante número 18, se presenta una evolución en las respuestas ya que hace mención de que los cambio entre el área y el perímetro son

en diferente proporción, en cambio, en sus respuestas anteriores hacía referencia a que el perímetro aumentaba al aumentar la medida de sus lados.

La tabla 4.26 presenta las respuestas para las seis preguntas por parte de los estudiantes en una aplicación posterior a la última etapa de la secuencia didáctica, se establecen los tipos de respuestas entregadas por los estudiantes.

Tabla 4.26

Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 3, segunda aplicación

Pregunta	Respuesta tipo 1	Respuesta tipo 2	Respuesta tipo 3	Respuesta tipo 4	Respuesta tipo 5	No responde
1. ¿Cuál es el área de una figura?	Calcula de forma correcta el valor del área del rectángulo 4 alumnos (anterior 2 alumnos)	El área es lo interior de la figura 11 alumnos (anterior 5 alumnos)	El área es el producto de la base por la altura 2 alumnos (anterior 4 alumnos)	El área es espacio que ocupa una figura 9 alumnos (anterior 15 alumnos)	Los lados que tiene la figura. 3 alumnos	1 alumno (anterior 3 alumnos)
2. ¿Cuál es el perímetro de una figura?	Calcula de forma correcta el valor del perímetro del rectángulo 1 alumno (2 alumnos)	El perímetro como la suma de los lados de la figura 2 alumnos (anterior 11 alumnos)	El perímetro son los lados de la figura. 6 alumnos	El perímetro es el contorno o borde de la figura 12 alumnos (anterior 3 alumnos)	El perímetro es lo que mide la figura por dentro. 4 alumnos	5 alumnos (anterior 4 alumnos)
3. ¿Con qué unidades de medida se representa el área y el perímetro?	El perímetro se representa con cm y el área como cm^2 3 alumnos (anterior 3 alumnos)	Cm como unidad de medida 2 alumnos (anterior 6 alumnos)	Con los lados 2 alumnos	Se debe multiplicar y sumar 3 alumnos (anterior 6 alumnos)	-	20 alumnos (anterior 12 alumnos)

4. ¿Podemos usar la misma unidad de medida para medir el área y el perímetro? Justifica tu respuesta	Si, porque lo único que cambia es el valor del resultado. 2 alumnos (anterior 4 alumnos)	No, porque las medidas son diferentes. 5 alumnos (anterior 1 alumno)	No porque el área se mide en metros cuadrados y el perímetro en metros. 1 alumno	No porque una va por fuera y otro por dentro. 2 alumnos	No, no me acuerdo. 2 alumnos	18 alumnos (19 alumnos)
5. Si aumenta o disminuye el área de una figura ¿el perímetro aumenta o disminuye? Justifica tu respuesta	Si el área aumenta o disminuye el perímetro también. 8 alumnos (anterior 7 alumnos)	Depende, pero generalme nte si el área aumenta el perímetro también lo hace, aunque no siempre en la misma proporción 2 alumno	Cambia el perímetro porque cambian los tamaños. 4 alumnos	Si, ya que el perímetro es el contorno del área de toda figura. 1 alumno	-	15 alumnos (anterior 21 alumnos)
6. Si el área y el perímetro cambian su medida al aumentar o disminuir ¿lo hacen en la misma proporción? Justifica tu respuesta	No cambian en la misma proporción el área podría tener una proporción distinta al perímetro. 11 alumnos (anterior 5 alumnos)	No porque el área cambia a números más grande o el perímetro a números más chico 6 alumnos (anterior 1 alumno)	El área se ajusta a su contorno, o sea al perímetro 1 alumno	Es diferente ya que los números cambian. 2 alumnos	Si, ya que si cambias el tamaño de la figura el número aumenta o disminuye, pero depende de los lados. 1 alumno	12 alumnos (anterior 20 alumnos)

Elaboración propia

Con la tabla anterior se evidencia una evolución en cuanto a las respuestas sobre la relación entre el área y el perímetro, si bien no todos respondieron las preguntas 5 y 6, en ambas preguntas

se redujo la cantidad de estudiantes que no respondieron. Respecto a la pregunta 5, en la primera aplicación 7 estudiantes indicaron que, si el área aumenta o disminuye su valor, el perímetro también aumenta o disminuye en esta segunda aplicación lo hicieron 10 alumnos, mientras que con la pregunta 6, doce estudiantes establecieron que el aumento o disminución es en distinta proporción, de ellos seis indican que el perímetro aumenta en menor cantidad y en la primera aplicación fueron solo 6.

En lo referente a la definición del área y del perímetro, se presenta un aumento en la cantidad de estudiantes que no responden las preguntas, del total de estudiantes se evidencia que cuatro de ellos intercambian la definición de perímetro con el área de una figura, un alumno define el perímetro como medir el interior de una figura y otro define el área como las paredes de una figura lo que se puede interpretar como el perímetro.

En cuanto a la unidad de medida del área y el perímetro en esta segunda aplicación, aumentó a ocho estudiantes los que no respondieron la pregunta y se mantienen los tres estudiantes que relacionan la unidad cuadrática con el área y la unidad lineal con el perímetro, sin embargo, la secuencia didáctica no hace referencia a la unidad de medida por lo que no puede atribuirse los cambios a esta última.

Actividad 5

La actividad cinco, busca que el estudiante escriba la información que conozca sobre la circunferencia, se espera que en sus respuestas se presenten los elementos de la circunferencia que se propuso que lograran aprender con la secuencia.

La tabla 4.27 presenta las producciones de los estudiantes en la segunda aplicación de la pregunta según el tipo de respuesta.

Tabla 4.27*Respuestas de la actividad diagnóstica para la actividad 5, segunda aplicación*

Número del estudiante	Tipo de respuesta
2, 7, 13	Se llama circunferencia, tiene forma circular
1,3, 4, 5, 14, 16, 30	Se llama circunferencia, tiene forma redonda, sirve para medir, se dibuja con compás, se puede obtener con objetos como botellas, sirve para hacer círculos
8, 12	Es una circunferencia o círculo, tiene el punto del centro.
9	Se llama circunferencia, hace referencia al contorno o perímetro
6, 18, 19	Tiene forma redonda, hace referencia al área o perímetro y punto del centro.
27	Se llama círculo o circunferencia y tiene diámetro
15	Es un círculo, se dibuja con compás, tiene centro y un elemento es el radio
26	Es una circunferencia sirve como fracción, su forma es circular (mantuvo su respuesta anterior) y tiene diámetro y radio.
25	Es una circunferencia, se dibuja con compás o algo redondo, tiene centro, tiene radio y diámetro.
20, 22	Es una circunferencia, tiene centro, radio y diámetro y se puede medir área y perímetro.
10, 11,17, 21, 23 24, 28 y 29	No responde (anterior 13 estudiantes, 6 repetidos)

Elaboración propia

La tabla 4.27 permite evidenciar un aprendizaje posterior a la secuencia didáctica aplicada; de trece estudiantes que no respondieron se baja a ocho por lo que siete de ellos respondieron la pregunta en la segunda aplicación. Se puede establecer que la gran mayoría de los participantes dejaron de llamar la figura círculo o la denominan circunferencia, trece de los estudiantes hacen referencia a al menos uno de sus elementos: centro, radio y diámetro y seis de ellos mencionan al área y/o el perímetro.

En esta segunda aplicación de la evaluación diagnóstica a modo de post test, se puede evidenciar un avance en el aprendizaje de las y los estudiantes al transitar por las distintas etapas de la secuencia didáctica, especialmente referidos a la adquisición de la noción de circunferencia

y de sus elementos, así como a la conceptualización de su perímetro y área, y al cálculo de sus medidas. También, se evidenció progreso en el estudio de variaciones en la medida del perímetro y área de la circunferencia al variar la medida de su radio. En efecto, gran parte de los estudiantes logró comprender que la variación, para el caso del perímetro es proporcional, mientras que para el caso del área no.

En cuanto al desempeño de los estudiantes durante el estudio planteado por la secuencia didáctica, se valora que lograron desarrollar habilidades matemáticas. En base a la manipulación de materiales y a las construcciones realizadas, consiguen argumentar sus respuestas y comunicar sus ideas a sus pares y al docente, utilizando un lenguaje matemático adecuado. Se observa que logran modelar un problema de cálculo de perímetro de una circunferencia y también de su área, a través de la reflexión y la toma de decisiones.

5 CAPÍTULO: CONCLUSIONES Y DISCUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación, que se obtienen esencialmente del proceso de construcción de la secuencia didáctica y, también, mediante su implementación y observación en aula del grupo de estudiantes que fueron parte de este estudio. Estas conclusiones no deben ser usadas ni interpretadas como una generalización hacia el resto de los alumnos y alumnas que cursan séptimo nivel de enseñanza básica en la Región Metropolitana, o en el país, puesto que las condiciones bajo las cuales fue implementada son particulares de este grupo curso y de este colegio.

En este sentido, es importante recordar aquí que el proyecto educativo del establecimiento al cual pertenecen los estudiantes contempla dos objetivos de carácter transversal y multidisciplinar, cuya ejecución demanda un tiempo considerable tanto al cuerpo docente como al estudiantado, disminuyendo el tiempo de trabajo en las asignaturas, en particular en la asignatura de matemáticas. En relación con el primer objetivo de este proyecto educativo, los estudiantes participan de un programa fuera del establecimiento en el que desarrollan habilidades relacionadas con la comprensión y el cuidado de la naturaleza, así como con las relaciones interpersonales, y que tiene una duración aproximada de 2 semanas. Un segundo objetivo del colegio se relaciona con el desarrollo de un proyecto ABP elaborado en torno a alguna temática establecida por las y los docentes, que integra a las diferentes áreas del conocimiento sin necesidad de que las actividades realizadas correspondan al nivel cursado por los estudiantes. Este proyecto se enfoca principalmente en el desarrollo de habilidades de comunicación escrita y oral. Este segundo objetivo se ejecuta en aproximadamente 2 semanas por cada semestre. Por lo anterior, los estudiantes que participaron en la investigación tenían, al momento de iniciar la secuencia didáctica, algunos rezagos en los contenidos que eran necesarios para entrar en el estudio que

proponía la secuencia didáctica, ya que, por la escasez de tiempo, no fueron expuestos a la enseñanza de dichos contenidos. No obstante, aun en estas condiciones, la mayoría de los estudiantes que participaron en el estudio lograron los aprendizajes esperados.

Esta investigación enfrentó varias complejidades y desafíos, entre los cuales es importante señalar que fue realizada a finales del año escolar, considerando una cantidad limitada de clases destinadas al estudio de los conceptos que intervienen en el aprendizaje de la circunferencia, su perímetro y su área. A su vez, tal como lo indica Cheuquepán y Barbé (2012), en los establecimientos se designa una menor cantidad de tiempo para la enseñanza de la geometría, a pesar de que en el currículum nacional presenta una mayor cantidad de objetivos mínimos obligatorios que en otros ejes de la matemática. Esto acompañado de que el eje de geometría por lo general se posterga para los últimos meses del año, provoca que, al momento de estudiar geometría, las y los alumnos se encuentren cansados y desmotivados para realizar la secuencia.

En cuanto a la actitud de los estudiantes, el tránsito por la secuencia didáctica permitió desarrollar su confianza y autonomía; esto se evidenció especialmente al entregar sus respuestas en voz alta, ya que, al ser validadas por su grupo de trabajo, lograron presentar diversas ideas sobre los problemas y actividades que realizaban, sin temor a equivocarse. Si bien dentro del aula se apreció un ambiente desordenado y ruidoso, esto fue debido a la exploración motivante del material concreto, a las discusiones entre los alumnos y alumnas que formaban parte de un grupo y, también, por la necesidad de ser escuchados antes de que otro grupo entregará la respuesta o las ideas que ellos habían descubierto. La secuencia didáctica aplicada logró fomentar la participación de las y los estudiantes con una actitud de respeto, escucha activa y promovió la cooperación para que otros también lograran concretar el aprendizaje por medio de sus distintas etapas. Sin embargo, en diversas ocasiones se apreció una resistencia de parte de las y los estudiantes al momento de

responder o realizar las actividades autónomamente, pues como lo indican Espinoza et al. (2009) y Chevallard (2000), desde los niveles iniciales los alumnos han transitado por la enseñanza escolar siempre esperando las indicaciones y las validaciones de los docentes, sin realizar actividades que permitan la exploración autónoma, ya que se privilegia el estudio de procedimientos para resolver ejercicios. De este modo, el contrato didáctico establecido de manera generalizada en nuestro país no contemplaba un rol activo de las y los estudiantes en su proceso de aprendizaje ni la responsabilidad de validar sus propias producciones.

Con respecto al aprendizaje de los alumnos y alumnas que participaron en la secuencia didáctica, es importante destacar que la ausencia del estudio de figuras curvas en niveles anteriores afectó considerablemente el desarrollo de las actividades de la secuencia, producto de que los estudiantes intentaban aplicar los conocimientos que tienen sobre rectas y polígonos al estudio de la circunferencia, por ejemplo, al pedirles que dibujen una figura con la lana y plumón realizan figuras con líneas rectas, y en diversas ocasiones algunos estudiantes indican la palabra lado para referirse al radio de la circunferencia. Lo que muestra que el paso del estudio de polígonos a figuras circulares no es algo trivial; los estudiantes enfrentan un obstáculo epistemológico que no debería ser ignorado por los docentes ni tratado como si fuera un “paso” natural. Aun así, se puede apreciar que, mediante la exploración de los materiales entregados y las tareas diseñadas, las y los estudiantes lograron integrar a sus conocimientos las características esenciales de la circunferencia y de sus elementos constitutivos; centro, radio y diámetro. Los grupos de trabajo demostraron que adquirieron estas nociones en el transcurso de las últimas actividades de la secuencia, además, logrando reconocer la relación matemática entre la medida del radio y la del diámetro.

Con relación a la construcción de la noción de perímetro y área de la circunferencia, se puede establecer que las y los estudiantes no lograron comprender a cabalidad la construcción del

número π mediante la relación de la medida del perímetro con la medida del diámetro. Apareció aquí otro obstáculo epistemológico relacionado esta vez con la construcción de los números irracionales (Centeno, 1997). El hecho de que un número pueda tener infinitas cifras decimales causó mucho desconcierto entre los estudiantes. Lo que sí lograron visualizar es que el número PI es un número mayor que 3, pero menor que 3,5, y que en el estudio trabajaremos con un valor aproximado de él, en este caso el decimal 3,14, y que se representa con el símbolo “ π ”. Logran identificarlo en las fórmulas y reemplazar el símbolo por su valor numérico para obtener la medida del perímetro o del área de una circunferencia.

En cuanto a estos dos objetos matemáticos mencionados, logran definir el perímetro de la circunferencia como la medida del contorno de una figura circular, y el área como la medida del espacio interior de la circunferencia; en particular utilizan la metáfora de “relleno” de la circunferencia. También lograron establecer que tanto la medida del perímetro como la del área se modifican al cambiar el valor del radio de una circunferencia, asimismo que si cambia el valor del perímetro de la circunferencia también cambiará el valor del área. Es importante destacar que lograron establecer que el cambio numérico en el valor del área es mayor al cambio de la medida del perímetro, aunque no todos lograron identificar que el perímetro de la circunferencia cambia en forma proporcional, lo que no ocurre con la medida del área. Adicionalmente lograron seguir un procedimiento para resolver ecuaciones lineales; comprendieron el proceso para reemplazar un símbolo por un valor numérico, es decir, reemplazar incógnitas y también variables, aunque en este curso aún no han aprendido a modelar ecuaciones lineales ni tampoco a manipularlas, como cuando lograron apoyar a la docente al momento de construir la fórmula del área de la circunferencia; sugirieron sustituir el valor de PI por 3,14 y reemplazar los valores de las medidas del radio y de la altura, pero no construir la ecuación.

Es importante destacar que, por medio del estudio de los distintos problemas y tareas que propuso la secuencia, los estudiantes lograron desarrollar diversas habilidades matemáticas al resolver problemas mediante el uso de relaciones entre objetos matemáticos, al comparar medidas, al modelar problemas a través de las nociones de perímetro y área de circunferencia, buscando la manera de argumentar y comunicar sus respuestas utilizando los conocimientos que adquirieron a través de la visualización y diversas representaciones, la manipulación del material concreto y los procedimientos algebraicos realizados junto al docente, demostrando la adquisición de lenguaje matemático, y realizando diversas reflexiones para modelar y resolver situaciones.

Con lo anterior, se puede establecer que la secuencia didáctica elaborada permitió a los estudiantes desarrollar habilidades matemáticas, construir y comprender los elementos de la circunferencia dándoles sentido y significado a través de las relaciones que establecieron por medio de las construcciones geométricas realizadas en las actividades. Además, logró promover entre los estudiantes la construcción de conocimiento entre pares, en un ambiente respetuoso y cálido, sin temor a que sus ideas fueran invalidadas o incorrectas.

La creación de la secuencia didáctica fue un desafío para la docente a cargo, puesto que le fue difícil buscar la manera en que los estudiantes lograran construir por sus propios medios los conocimientos vinculados al estudio de la circunferencia sin su intervención directa, lo que a su vez marca una diferencia significativa respecto de la enseñanza habitual al destinar bastante tiempo al proceso de aprendizaje mayor al que usualmente se necesita para realizar una clase expositiva. Sin embargo, tanto la secuencia didáctica como la gestión de la docente entregaron a los alumnos y alumnas las condiciones necesarias para construir su conocimiento, contando con la interacción de la profesora a través de preguntas y con la formalización de los objetos matemáticos. Se pusieron en evidencia los obstáculos epistemológicos a los que se enfrentaron los estudiantes, como por

ejemplo el trabajo con decimales, la definición del número π , el uso de variables en las fórmulas y el paso del estudio de líneas rectas al estudio de líneas curvas, anteriormente citados. En esta secuencia didáctica, en lugar de omitir estos obstáculos, se busca enfrentarlos y apoyar a las y los alumnos a estudiarlos.

Si bien la propuesta didáctica fue motivadora para los estudiantes y propició el logro de la mayoría de los aprendizajes esperados, aportando de manera positiva a que se involucraran en la construcción de los conocimientos matemáticos esperados, en esta primera aplicación y fruto del análisis de la experiencia y de las producciones de los estudiantes, a continuación se exponen algunas propuestas de mejoras a la secuencia didáctica, tanto a algunas preguntas como al uso de materiales con el fin de contribuir a optimizar su implementación y con ello los resultados de aprendizaje de los estudiantes.:

- Para la Etapa 1 en donde identifican los elementos de la circunferencia, se sugiere que los grupos puedan dibujar sus propias circunferencias con radios (lanas) de diversos tamaños en pizarras o algún material borrrable en sus puestos de trabajo, o bien con software gráfico y no solo en la pizarra. Esto permitiría una mejor visualización y mayor argumentación de sus ideas con sus compañeros de grupo. También, se sugiere agregar una actividad con material concreto o bien uso de tecnología para determinar el punto del centro y establecer la relación entre la medida del radio y del diámetro. También se sugiere incorporar las siguientes definiciones para mejorar el desarrollo de la actividad: punto en la circunferencia, punto al interior de la circunferencia, segmento y cuerda.
- Para la Etapa 2 cuyo propósito es que los estudiantes construyan una definición de perímetro de la circunferencia y su relación con π , es importante considerar que el número π genera un obstáculo epistemológico en el estudio de los alumnos, por lo que las actividades deben ser

gestionadas con cuidado y precisión. Una gran cantidad de estudiantes del curso utilizan la regla o la huincha midiendo desde el 1, y no desde el 0, por lo que se propone realizar una actividad que permita que los estudiantes descubran el error en esta manera de proceder al medir, y de ese modo construyan una forma adecuada para efectuarlo. Si se presenta este inconveniente, se debe considerar la manipulación de la lana, ya que este material se estira y esto puede afectar su función. También es importante incorporar una actividad que permita que los estudiantes reconozcan el error al medir el contorno de una figura cilíndrica al hacerlo de forma elíptica y no circular, y determinen cómo ello afecta los resultados de la actividad,

- Para la Etapa 3 cuyo objetivo es que los estudiantes construyan la noción del área de la circunferencia, se debe considerar que los estudiantes decidieron pegar la lana en la circunferencia para que no se soltara. Se pueden modificar los materiales para facilitar este proceso utilizando lana de mayor grosor, o bien yute, o una superficie en donde se puede adherir con mayor facilidad con, por ejemplo, un velcro.

Se puede orientar a los estudiantes a que construyan un polígono con la lana utilizada para cubrir la circunferencia y así disminuir el tiempo de aplicación de esta etapa de la secuencia, y evitar la sobre estimulación de los estudiantes que lleva a la distracción y a la frustración.

- Para la Etapa 4, cuyo propósito es que los estudiantes construyan la relación que existe entre el área y el perímetro de la circunferencia, se sugiere utilizar material concreto o bien uso de tecnología, para explorar y así deducir los cambios que experimentan las medidas del área y del perímetro al variar la medida de su radio.

Esta secuencia de aprendizaje se diseñó utilizando material concreto, pero se puede modificar integrando el uso de tecnología, contribuyendo de este modo a la visualización de los objetos geométricos estudiados y a la exploración de las relaciones entre ellos.

Al final de este escrito se encuentra el diseño de cada una de las etapas de la secuencia didáctica (anexos 6, 7, 8 y 9), con algunas modificaciones con el objetivo de contribuir a mejorar el aprendizaje de los estudiantes, y un rediseño a la evaluación diagnóstica (anexo 5). Es importante destacar que esta secuencia didáctica no busca el aprendizaje memorístico de las fórmulas del perímetro y área de la circunferencia, si no que pretende que los estudiantes las construyan obteniendo de este modo su sentido y significado, a así responder a las dificultades manifestadas por los docentes, por la confusión que generan estos conceptos en el estudiantado de manera generalizada. A pesar de que se evidencia una dificultad al asignar una unidad de medida al perímetro y al área, esta secuencia didáctica no se hace cargo de este concepto debido al tiempo disponible para su aplicación.

La secuencia didáctica creada con el modelo de actividades de estudio y de investigación permitió a los estudiantes construir el concepto de circunferencia y sus elementos otorgándoles sentido y significado. Este diseño permite la participación activa de las y los estudiantes de tal manera que se da solución a los fenómenos didácticos que evidenciaron los profesores entrevistados en el focus groups puesto las actividades propuestas permitieron a las y los alumnos enfrentarse a una situación problemática y lograron identificar cuando deben utilizar el perímetro y cuando el área y establecer una relación entre el área y el perímetro de la circunferencia.

Las características de esta secuencia didáctica permiten a las y los estudiantes construir su propio conocimiento con una intervención mínima del docente por medio de preguntas que guían el estudio pero que no entrega de forma directa las respuestas, pero, debido a los rezagos que poseen las y los alumnos, fue necesario intervenir en el desarrollo de ecuaciones lineales y de algunos cálculos.

Con lo anterior se puede dar respuesta a la pregunta de investigación puesto que la secuencia didáctica construida con el modelo de actividades de estudio y de investigación enmarcadas en la Teoría Antropológica de lo didáctico, permite a las y los estudiantes otorgarles sentido y significado a los elementos de la circunferencia y a la relación que existe entre su área y el perímetro, por medio de la discusión y validación de ideas con sus pares, la manipulación del material concreto para responder a las problemáticas propuestas, el uso del lenguaje formal para comunicarse y la intervención del docente destinada solo a guiar sus respuestas y a formalizar los contenidos.

Si bien esta investigación está orientada al estudio del aprendizaje de los estudiantes, es importante considerar que tanto la creación como la aplicación de la secuencia didáctica fue algo nuevo para la docente, lo que significó un desafío y un replanteamiento de su quehacer profesional. Por ello, resulta interesante investigar cómo afecta este tipo de cambio de paradigma en la práctica de los profesores y profesoras, y de ese modo comprender y valorar el tipo de complejidades que se pueden enfrentar al utilizar este tipo de secuencias y diversos materiales en otros niveles de enseñanza, sin naturalizar las dificultades que vivencian los estudiantes en el estudio de la matemática escolar.

REFERENCIAS

- Agencia de calidad de la educación (abril de 2024a). *Simce. Preguntas frecuentes 2023 (actualización 2024)*. Agencia Educación. Recuperado el 25 de julio 2024. [//efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/Simce+Preguntas+Frecuentes+actualizacion+abril+2024](https://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/Simce+Preguntas+Frecuentes+actualizacion+abril+2024)
- Agencia de calidad de la educación (abril de 2024b). *Diagnostico Integral de Aprendizaje. Preguntas frecuentes*. Agencia Educación. [//efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://diagnosticointegral.agenciaeducacion.cl/documentos/Preguntas_frecuentes](https://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://diagnosticointegral.agenciaeducacion.cl/documentos/Preguntas_frecuentes)
- Arana, R. Peralta, J., Salazar, O. y Trujillo, E. (2017). Diseño y análisis de un texto para la enseñanza de la circunferencia a través de configuraciones epistémicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 30. 624-632.
- Aravena, M., y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 139-178.
- Baldor, J., Santalo. M, Suardiaz, P. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. Ediciones y Distribuciones Codice.
- Baptista, P., Hernández, R. y Fernández, C. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill España.
- Bilbao, M, Llanos, V. y Otero, M. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 6(1), 102-112.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J., e Higuera, L. (2006). *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico*. *Educación matemática*, 18(2), 37-74.

- Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Bosch, M. (octubre 2020). *Cuestiones metodológicas en torno a los recorridos de estudio e investigación, propuestas y problemas abiertos, maestría en enseñanza de la matemática*. Universidad Católica del Perú.
- Brousseau, G. (1999). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas*.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas. la ed.* Buenos Aires.
- Calandra, M., y Costa, V. (2017). *Actividad de Estudio e Investigación para la enseñanza del concepto de Distribución Normal en carreras de ingeniería*. I Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI)(Paraná, 13 al 15 de septiembre de 2017).
- Carreño, X. y Cruz, X. (2007). *Geometría*. McGraw-Hill.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón. perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de educación (22).
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2000). Conceitos fundamentais da didáctica: As perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In J. Brun. (Org.). *Didáctica das matemáticas* (pp. 115–152). Lisboa: Instituto Piaget.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Recuperado el 04 de junio de 2025, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf
- Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Síntesis.

- Cheuquepán, D., y Barbé, J. (2012). Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 8(29).
- Corica, A., y Marín, E. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría.
- D' amore, B. y Fandiño. M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, 10 (1), 39-68.
- Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 157-168.
- Fabres, R. (2016) Estratégias metodológicas para o ensino e a aprendizagem da geometria, utilizadas por docentes de segundo ciclo, com a finalidade de gerar uma proposta metodológica que atinja os conteúdos. *Estudios Pedagógicos*, 62 (1), 87 – 105.
- Fernández, E. (2018, junio) La Geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi Revista de investigación, administración e ingeniería*, 6 (1), 34 – 63.
- Ferreira, M. (2018). Constructo didáctico de la geometría. Una visión de cambio y transformación en la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico. [Tesis Doctoral]. Universidad de Carabobo Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.
- García, F., Barquero, B., Florensa, I. y Boch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*. 15, pp. 75 – 94.
- Gazzola, M., Llanos, V., y Otero, M. (2011). Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). In Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Tandil, del (Vol. 8, pp. 493-500).
- Godino, J., Batanero, C., Font, V Ruiz, F., Roa, R., y Cid, E. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Recuperado en noviembre de 2023.

https://www.researchgate.net/publication/282325931_Didactica_de_la_matematica_para_maestros

- Iturra, F., Cabrera, M. y Manosalva, C. (2024). *Texto del estudiante. Matemática 7° básico*. SM.
- Lárez-Villaroel, J. (2018). Algunos obstáculos que imposibilitan el aprendizaje efectivo de la matemática. *Redalyc*, 33 (1), 53 – 74.
- Mantica, A., del Maso, M., Götte, M. y Marzioni, A. (2002). La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica. *Educación Matemática*, 14 (1), 111 – 119.
- Marino, V. A. (2022). *Los Focus Groups on line en Argentina: recomendaciones, alcances y limitaciones* (Master's thesis, Universidad Nacional de Rosario).
- Martínez, J. (2011). Métodos de Investigación Cualitativa. *Silogismo*, 8 (1), 1 – 34.
- Ministerio de Educación (2016). *Matemática. Programa de Estudio. Séptimo Básico*.
- Ministerio de Educación (2020). *Texto del estudiante 2° básico*.
- Ministerio de Educación (2020). *Texto del estudiante 5° básico*.
- Ministerio de Educación (agosto, 2020). Impacto del covid-19 en los resultados de aprendizaje y escolaridad en Chile. <https://www.mineduc.cl/impacto-del-covid-19-en-los-resultados-de-aprendizaje-en-chile/>
- Ministerio de Educación (2021). *Texto del estudiante 8° básico*.
- Ministerio de Educación (marzo 2023). *Actualización de la unidad de Currículum y Evaluación: orientaciones generales*. Ministerio de Educación. [//efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-331378_recurso_1](https://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-331378_recurso_1)
- Moreira, M. (2012). *Unidades de enseñanza potencialmente significativas*. UEPS. Instituto de física de UFRGS, Porto Alegre. <http://moreira.if.ufrgs.br>
- Rey, M. (1997). *Libro Didáctica de las Matemáticas Aportes y Reflexiones Gálvez Brousseau Sadovsky y Otros*. Paidós Educator.

- Ruminot, C. (2017). Los Efectos Adversos de una Evaluación Nacional sobre las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas: El Caso de SIMCE en Chile. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 10(1), 69-87.
- Scharager, J. y Armijo, I. (2001) Metodología de la Investigación para las Ciencias Sociales [CD-ROM]: Versión 1.0 Santiago: *Escuela de Psicología, SECICO Pontificia Universidad Católica de Chile. Programa computacional.*
- Vargas, G. & Gamboa, R. (2012). The Van Hiele Model And The Teaching Of The Geometry. *Uniciencia*, 27 (1), 74 – 94.

ANEXOS

Anexo 1: Focus Groups

A continuación, se presentan las preguntas discutidas con los profesores respecto a la enseñanza y aprendizaje de los elementos que componen el estudio de la circunferencia.

Preguntas establecidas previamente

1. ¿Cuánto tiempo han enseñado el concepto de circunferencia en el nivel de séptimo básico?
2. En relación con los objetivos de aprendizaje de la circunferencia ¿qué elementos consideran más difíciles de enseñar a los estudiantes?
3. ¿Qué dificultades se presentan en el estudio en específico del área y del perímetro de la circunferencia?
4. En relación con la metodología que utilizan en clases ¿qué dificultades han observado al momento de enseñar el contenido de circunferencia?

Preguntas Auxiliares

1. ¿Las dificultades corresponden a aplicaciones o definiciones?
2. ¿Los estudiantes logran seguir los procedimientos que se les enseñan o los olvidan fácilmente?
3. ¿Qué dificultades se presentan al resolver un problema: comprensión, modelación, ¿no relacionan los datos con los conceptos?
4. ¿Siempre utilizan la misma metodología de enseñanza?
5. ¿Replican preguntas y formas de preguntar en las evaluaciones?

Anexo 2: Asentimiento informado para las y los estudiantes



Asentimiento informado para estudiantes

La siguiente información se presenta para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación:

Título de la investigación:	Aprendizaje de área y perímetro de la circunferencia utilizando Teoría de Situaciones Didácticas en estudiantes de séptimo básico de la Región Metropolitana
Docente guía de la investigación:	Lorena Espinoza Salfate
Investigadores/as:	Carolina Espinoza Martínez

Dejo constancia, a través de mi firma, que participaré en forma voluntaria (anónima y no individualizada) en seis clases de la profesora Carolina Espinoza Martínez, profesora del colegio Padre Pedro Arrupe del cual soy estudiante, con el fin de cooperar con su investigación para obtener el grado de Magister en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile.

En el contexto de esta actividad y solo con motivo de ella, asiento lo siguiente:

- Que mis opiniones se analicen y valoren de manera anónima y no individualizada con el único fin de ser consideradas en las actividades especificadas.
- Autorizo a la utilización y reproducción de la imagen de los soportes físicos de mis opiniones, tales como trabajos, dibujos, u otro tipo, solo con los fines establecidos para la investigación antes mencionada. Las imágenes y diálogos podrán ser insertados en las publicaciones exclusivas de la investigación.
- Autorizo a realizar un registro y difusión de las imágenes de la actividad que incluya mi imagen personal dentro del grupo participantes, adoptando el/la facilitador/a todas las medidas de resguardo de mi identidad.
- Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres hayan dicho que puedo participar, es mi decisión hacerlo o no. Si en algún momento quiero retirarme o no responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio, sin que esto tenga consecuencias negativas para mí.
- Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de



riesgo ni costo, así como tampoco beneficios directos para mí.

La entidad se compromete a que la utilización de estas imágenes en ningún caso supondrá un daño a la honra e intimidad, ni será contraria a los intereses de los niños, niñas y adolescentes participantes, respetando la normativa en materia de protección de datos, imagen y protección jurídica del niño, niña o adolescente.

Yo, estudiante del curso _____, he decidido _____ (sí/no) participar voluntariamente en la investigación y que _____ (sí/no) me registren mediante vídeo, fotografía o audio durante el proceso.

Nombre completo del participante:

Rut:

Fecha:

Firma: _____


Firma del investigador/a




Firma director/a del establecimiento

Anexo 3: Consentimiento informado apoderados o tutores



Consentimiento informado para apoderados o representantes

La siguiente información se presenta para poder ayudar a tomar la decisión de permitir la participación o no de su hijo(a) o pupilo (a) en esta investigación:

Título de la investigación:	Aprendizaje de área y perímetro de la circunferencia utilizando Teoría de Situaciones Didácticas en estudiantes de séptimo básico de la Región Metropolitana
Docente guía de la investigación:	Lorena Espinoza Salfate
Investigadores/as:	Carolina Espinoza Martínez

El representante del o la estudiante, deja constancia, a través de su firma, que su hijo(a) o pupilo(a) participará de forma voluntaria en seis clases de la profesora Carolina Espinoza Martínez, profesora del colegio Padre Pedro Arrupe del cual mi hijo(a) o pupilo (a) es estudiante, con el fin de cooperar con su investigación para obtener el grado de Magister en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile.

En el contexto de esta actividad y solo con motivo de ella, consiento a lo siguiente:

- Que las opiniones de mi hijo(a) o pupilo(a) se analicen y valoren de manera anónima y no individualizada con el único fin de ser consideradas en la investigación antes mencionada.
- A la utilización y reproducción de la imagen de los soportes físicos de las opiniones de mi hijo(a) o mi pupilo(a) tales como trabajos, dibujos, u otro tipo, solo con los fines establecidos para la investigación antes mencionada. Las imágenes y diálogos podrán ser insertados en las publicaciones exclusivas de la investigación.
- Autorizo a realizar un registro y difusión de las imágenes de la actividad que incluyan la imagen personal de mi hijo(a) o mi pupilo(a) dentro del grupo participantes, adoptando el/la facilitador/a todas las medidas de resguardo de su identidad.
- La participación de mi hijo(a) o mi pupilo(a) en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando apruebe su participación, es su decisión hacerlo o no. Si en algún momento quiere retirarse o no responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puede retirarse del estudio, sin que esto tenga consecuencias negativas para mi hijo(a) o



mi pupilo(a).

- Se me ha informado que la participación de mi hijo(a) o mi pupilo(a) en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios directos para mi hijo(a) o mi pupilo(a).

La entidad se compromete a que la utilización de estas imágenes en ningún caso supondrá un daño a la honra e intimidad de su hijo(a) o pupilo(a), ni será contraria a los intereses de los niños, niñas y adolescentes participantes, respetando la normativa en materia de protección de datos, imagen y protección jurídica del niño, niña o adolescente.

Yo, apoderado(a) de un estudiante del curso _____, doy mi consentimiento para que mi hijo(a) o pupilo(a) _____ (si/no) participe voluntariamente en la investigación y que _____ (si/no) sea registrado mediante vídeo, fotografía o audio durante el proceso

Nombre completo niño, niña o adolescente:

Rut:

Nombre completo apoderado:

Rut:

Fecha:

Firma: _____

Firma del investigador/a



Firma director/a del
establecimiento

Anexo 4: Juicio Experto

Resultados del juicio de expertos

Actividad Diagnóstica Propósitos: Con estas actividades se espera que los estudiantes demuestren el dominio que poseen respecto de los siguientes conceptos: a. Multiplicación de números racionales; entero por decimal, decimal por entero, decimal por decimal. b. Resolución de situaciones y problemas que involucran cálculo del área y/o perímetro de polígonos regulares (cuadrado, rectángulo y triángulo) c. Argumentación matemática en las respuestas relacionadas con definiciones o procedimientos realizados. d. Definición de la circunferencia a través de los elementos y/o conceptos que reconocen en ella.			
Actividad	Calidad	Coherencia	Comentarios
Actividad 1	3	3	Se incluye solo un ejercicio por cada caso de multiplicación Considero que es poco.
Actividad 2	3	4	Problema adecuado
Actividad 3	3	4	Esta actividad tiene muchas preguntas (6). En las cuatro primeras se preguntan nociones básicas, pero las preguntas 5 y 6 son de argumentación y exige un nivel de reflexión mayor. Estas dos, las separaría en otra actividad. Tal vez podría ponerse un ejemplo concreto relacionado con rectángulo: “este rectángulo mide tanto. Analice que pasa con el perímetro y el área si los lados del rectángulo se duplican
Actividad 4	2	2	Está de más. Es muy elemental
Actividad 5	2	3	Preguntar por “toda la información que conozcas de la figura circunferencia”, me parece muy amplia. Sugiero precisarla.
Comentarios generales Actividad Diagnóstica Esta casi aceptable. Con los cambios sugeridos puede mejorar.			

Guía 1: Elementos de la circunferencia (centro, radio y diámetro)

Propósitos: Con estas actividades se espera que los estudiantes realicen una construcción intuitiva de las siguientes relaciones y/o conceptos:

- e. Una circunferencia posee un centro y la distancia desde el centro hacia cualquier punto de dicha circunferencia debe ser siempre la misma.
- f. El radio de una circunferencia es el segmento trazado desde el centro a cualquier punto de la circunferencia y su medida define el tamaño de la circunferencia.
- g. Una circunferencia posee infinitos radios y todos son de la misma medida.
- h. El diámetro de una circunferencia es un segmento que pasa por el centro y que va de un punto a otro en la circunferencia
- i. Un diámetro equivale al doble de un radio ($d = 2r$)

Preguntas	Calidad	Coherencia	Comentarios
1 a 4	2	3	La lana no es un buen material, ya que al tensarlo se expande, lo cambiaría por un cordel delgado de un material no extensible. Revisar las descripciones que se entregan. Por ejemplo, dice: "...se delimita un sector circular..." Al parecer se está confundiendo a una circunferencia con un sector circular que corresponde a una parte de un círculo que está delimitada por dos radios y un arco de circunferencia. En el ej. 4, se habla de puntos "fijados" en la circunferencia, sería mejor decir puntos marcados.
5 y 6	2	3	En el ejercicio 6, hay que precisar ya que se menciona el "tamaño de la circunferencia". ¿Se refiere al radio, al perímetro o al área? ¿O a las tres cosas?
7 y 8	2	3	En la pregunta 7 ¿Cuántos radios tiene una circunferencia? Es necesario precisar y distinguir entre: en un círculo se pueden dibujar infinitos radios el radio es único, en cuanto a longitud
9 y 10	3	3	Ej. 9 mejor sería hablar de cuerdas que de líneas, ya que una cuerda es un segmento y una línea es infinita.
11	2	3	Revisar el contenido del recuadro que aparece al final. No se entiende bien

Comentarios generales Guía 1: Es necesario redefinir el material a usar y precisar el lenguaje matemático.

Guía 2: Perímetro de la circunferencia

Propósitos: Con estas actividades se espera que los estudiantes realicen una construcción intuitiva de los siguientes conceptos:

- ~~El contorno de~~ los objetos cilíndricos o circulares permiten ~~generar~~ dibujar circunferencias.
- El contorno de una circunferencia equivale a aproximadamente 3,14 veces su diámetro.
- La medida del contorno de una circunferencia se conoce como el valor del perímetro de la circunferencia.
- El valor de Pi será definido **aproximadamente** como el decimal 3,14 y permite encontrar el valor del perímetro de la circunferencia.
- El perímetro de la circunferencia se puede establecer con la fórmula: $P = d \cdot \pi$

Preguntas	Calidad	Coherencia	Comentarios
a) y b)	2	3	
3 y 4	3	3	En 3. En vez de preguntarles ¿existe alguna relación entre la medida...? Podría pedirse: <i>Conjeturen si existe alguna relación aproximada entre...</i>
5	3	3	
6	2	3	En un recuadro dice: "Con la tabla podemos establecer que corresponde exactamente a. Los datos de la tabla solo permiten obtener un resultado aproximado.

Comentarios generales Guía 2

En esta guía, sería igualmente necesario sustituir la lana por un cordel delgado y hacer las precisiones matemáticas indicadas.

Guía 3: Área de la circunferencia

Propósitos: Con estas actividades se espera que los estudiantes realicen una construcción intuitiva de los siguientes conceptos:

- El área de la circunferencia **¿corresponde a cubrir completamente su superficie?**
- El triángulo rectángulo formado tiene como base el perímetro ($2 \cdot \pi \cdot r$) de la circunferencia y como altura si radio (r), por lo tanto, su área se puede calcular como: $\frac{2 \cdot r \cdot r \cdot \pi}{2} = r^2 \cdot \pi$
- El material utilizado (lana) para construir el triángulo corresponde al área de la circunferencia, por lo tanto, es igual al área del triángulo rectángulo de base c y altura r .
- el área de la circunferencia se ~~puede~~ calcular como $r^2 \cdot \pi$.

Preguntas	Calidad	Coherencia	Comentarios
a) y b)	2	2	Sugiero eliminar las preguntas iniciales
1 y 2	3	3	Se habla de yute además de la lana
3 a 8	3	4	¿En vez de preguntar qué otra figura se puede formar? (puede haber muchas. Les diría intente construir una figura triangular)
9 y 10	3	4	Esta actividad es interesante

Comentarios generales Guía 3

Esta guía propone una manera intuitiva y original para encontrar la fórmula del área de un círculo

Guía 4: Relación entre área y perímetro de la circunferencia

Propósitos: Con esta secuencia de actividades se espera que los estudiantes logren los siguientes conocimientos:

- a. Una circunferencia de mayor tamaño debe tener **un radio máximo**.
- b. Cercar el contorno de un objeto circular o cilíndrico corresponde a **identificar** el perímetro de la circunferencia.
- c. Cubrir con algún material **el interior de** una circunferencia corresponde a identificar su área.
- d. Al aumentar el valor del radio de una circunferencia, aumenta el valor del perímetro y del área, pero el área aumenta en mayor cantidad
- e. Al disminuir el valor del radio de una circunferencia, disminuye el valor del perímetro y del área, pero el área disminuye en mayor cantidad
- f. Al modificar el valor de radio, se modifica el valor del área y del perímetro de la circunferencia, pero en distinta proporción.

Actividad	Calidad	Coherencia	Comentarios
1	3	3	
2 y 3	2	3	Ej. 2 no queda claro si será necesario cortar alguna de las gomas eva dadas.
4 y 5	2	2	Al parecer los trozos de papel son sectores circulares y tienen cada uno un área de $18,31\text{cm}^2$ (para que justo se necesiten 5 de ellos) esto me parece demasiado preparado. Es el docente el que hizo los cálculos de las áreas de los sectores circulares, los estudiantes no participan de ello, solo verifican que con 5 de ellos se cubre la superficie.
6 a 7	3	3	
8	2	3	En encabezado de la pregunta debe ser mejorado (. el valor de la suma de la malla metálica?)
9	2	4	Mejorar la redacción de esta pregunta

Comentarios generales de la Guía 4

Esta propuesta de guía tiene buenas ideas, pero le falta precisión en la redacción y en el lenguaje matemático empleado

Anexo 5: Rediseño Actividad Diagnóstica

Actividad Diagnóstica

Área y Perímetro

Nombre:

Fecha:

Objetivo de la clase

Hoy vamos a recordar lo que sabes de área y perímetro

Actividades

Actividad 1:

Resuelve cada una de las siguientes multiplicaciones, escribiendo el desarrollo

1) $1,5 \cdot 3 =$

2) $4 \cdot 3,14 =$

3) $1,4 \cdot 2,15 =$

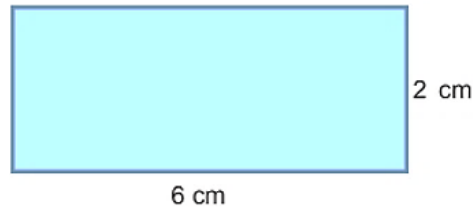
Actividad 2:

Valeria y Santiago están tejiendo frazadas como lo muestra la imagen. ¿Cuál de los niños ha tejido más? Explica que hiciste para responder la pregunta.



Actividad 3:

Responde cada pregunta con letra clara, puedes usar los datos de la imagen **como ejemplo**:



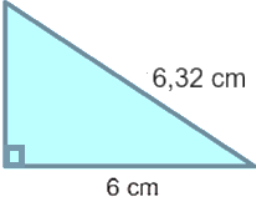
¿Cuál es el área de una figura?	¿Cuál es el perímetro de una figura?	¿Con qué unidades de medida se representa el área y el perímetro?	¿Podemos usar la misma unidad de medida para medir el área y el perímetro? Justifica tu respuesta

Considerando las medidas de los lados, del área y del perímetro del rectángulo anterior, responde las siguientes preguntas.

Si se duplica la medida de los lados del rectángulo ¿qué ocurre con la medida del perímetro y del área? ¿qué ocurre con las medidas si ahora la medida de los lados disminuye a la mitad? Justifica tus respuestas	Si el área y el perímetro del rectángulo cambian su medida aumentando o disminuyendo ¿lo hacen en la misma proporción? Justifica tu respuesta

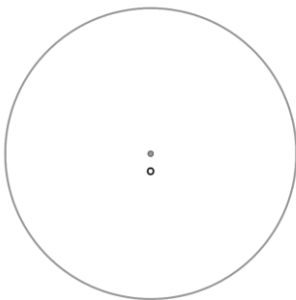
Actividad 4:

Calcula el valor del área y el perímetro de cada figura, escribe el desarrollo:

 3 cm 3 cm Área: Perímetro:	 6 cm 2 cm Área: Perímetro:
 2 cm 6 cm 6,32 cm Área: Perímetro:	

Actividad 5:

Escribe la información que conozcas de la siguiente figura considerando su forma, cómo se llama, cómo se dibuja, que elementos tiene, que características posee, para qué sirve, etc.



Anexo 6: Rediseño guía de Trabajo 1: Elementos de la circunferencia

Guía de Trabajo 1 Elementos de la circunferencia

Nombre:	Fecha:
----------------	---------------

Actividades

Junto a 2 compañeros respondan las siguientes preguntas:

¿Con qué elementos y con qué procedimientos se puede construir o dibujar un círculo perfecto?
¿Qué elementos o partes de la circunferencia nos permiten realizar la construcción?

1. Con los materiales que tiene la profesora ¿qué figura creen que va a dibujar si tensa al máximo la lana y amarra un plumón en uno de sus extremos? ¿por qué?

2. Observen lo que dibuja en la pizarra ¿Se dibujó la figura que pensaron? ¿por qué sí o por qué no? ¿cómo se utilizaron los materiales?

El dibujo que se acaba de realizar es una _____ ya que corresponde a la línea curva que contiene al círculo.

3. En la pizarra se dibujó una circunferencia que delimita un sector en la pizarra que posee un centro, en conjunto con sus compañeros dibujen el centro de la circunferencia ¿Por qué el centro se encuentra en ese lugar?

4. Si la profesora marca diferentes puntos en la circunferencia dibujada (A, B, C Y D), ¿la medida entre el centro de la circunferencia donde está fijada la lana y los puntos que se han marcado en la circunferencia (A, B, C Y D) ¿será siempre la misma o será diferente? ¿Por qué?

5. Si se corta la lana y una de sus puntas se posiciona en el centro, al tensar y dibujar ¿se sigue dibujando una circunferencia? ¿será de igual tamaño a la anterior o será más grande o pequeña? ¿por qué?

6. ¿Qué relación se puede establecer entre el tamaño de la circunferencia completa y la medida de la lana que parte desde el centro hasta un punto de la circunferencia?

Un segmento que va desde el centro de la circunferencia a un punto de ella se llama _____, este permite determinar el tamaño de la circunferencia o su longitud y se denomina con la letra _____.

7. ¿ Cuántos radios se pueden dibujar en una circunferencia? ¿cómo se pueden dibujar todos estos radios?

8. La medida del radio es la distancia que hay entre el centro y un punto de la circunferencia. ¿Pueden ser los radios de una circunferencia de medida diferente, algunos pueden ser más pequeños o grandes que otros? ¿Por qué sí o por qué no?

Un radio es un segmento que parte desde _____ y que llega hasta un punto de la circunferencia. Una circunferencia puede tener infinitos radios, pero todos los radios tienen la _____ medida.

9. Si en una circunferencia se dibujan diferentes cuerdas que van de un punto a otro y que pasen por el interior de ella ¿todas tendrán la misma medida o habrá algunas de mayor tamaño? ¿Por qué sí o por qué no?

10. ¿Cuál o cuáles de las cuerdas que pasan por el interior de la circunferencia tiene mayor tamaño? ¿Qué diferencia tiene esa cuerda con las otras que se pueden dibujar?

Una cuerda que va desde un punto a otro en la circunferencia y pasa por el centro de esta, se llama _____ y se denomina con la letra ____.

11. Considerando lo que aprendieron sobre el radio y el diámetro de una circunferencia ¿qué relación matemática existe entre la medida de ambos elementos?

El radio y el diámetro son segmentos que contienen al elemento de la circunferencia que se llama _____ de la circunferencia. Con relación a la medida del radio y el diámetro, podemos establecer que la medida del diámetro es igual a ____ veces la medida del radio, es decir $d =$

Anexo 7: Rediseño guía de Trabajo 2: Perímetro de la circunferencia

**Guía de Trabajo 2
Perímetro de la circunferencia**

Nombres:	Fecha:
-----------------	---------------

Para esta actividad debes juntarte con otros dos compañeros.

Materiales:



Objetos circulares o cilindros



Hilo o lana



Regla o huincha de medir

Responde las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué tienen en común los objetos con los que vamos a trabajar? Recordando lo que hicieron en la guía anterior ¿por qué creen que utilizaran estos objetos y no otros, como por ejemplo una caja de lápices?

- b. Escriban para qué creen que van a utilizar los materiales para la clase de hoy.

- c. ¿Se puede medir el contorno de una circunferencia con regla? ¿de qué manera se puede medir usando otros elementos?

Actividad

Para cada objeto realicen las siguientes actividades, conservando los trozos de lana separados por objeto.

1. Pasen un trozo de lana o hilo por el contorno (p) de cada objeto, corten la lana para conservar la medida.
2. Utilicen la lana para identificar el diámetro (d) de cada objeto corten la lana para conservar la medida.
3. Observando los trozos de lana por cada objeto ¿identifiquen si existe alguna relación aproximada entre la medida del contorno y el diámetro de cada objeto? Escribe la relación que encontraron

4. Para comprobar esta relación mide cada trozo de lana y completa la tabla.

1. A la medida del contorno llámenla p y escriban los datos obtenidos de cada objeto en la tabla.
2. A la medida del diámetro asignen letra d y escriban los datos en la tabla
3. Dividan el valor de la medida p con el valor de la medida d , pueden ayudarse con una calculadora.

Nombre del Objeto	P	Diámetro (d)	$p:d$
1:			
2:			
3:			
4:			

5. ¿El resultado de la división se parece a la relación que establecieron en la pregunta 3? ¿a qué valor se puede aproximar el resultado de la división?

Podemos establecer que la medida del contorno P corresponde a aproximadamente _____ veces la medida del diámetro de cada objeto circular. El valor 3,14 se conoce matemáticamente como Pi y se denomina con el símbolo π .

A la medida del contorno que designamos como p lo llamaremos

_____ y podemos calcular su valor multiplicando el

_____ por 3,14. Algebraicamente se puede escribir como: $3,14 \cdot d$

Anexo 8: Rediseño guía de Trabajo 3: Área de la circunferencia

Guía de Trabajo 3
Área de la circunferencia

Nombres:	Fecha:
-----------------	---------------

Para esta actividad debes juntarte con otros dos compañeros.

Materiales:



Respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué conceptos han aprendido durante las clases pasadas? ¿Qué creen que aprenderán hoy y cómo utilizarán los materiales para hacerlo?

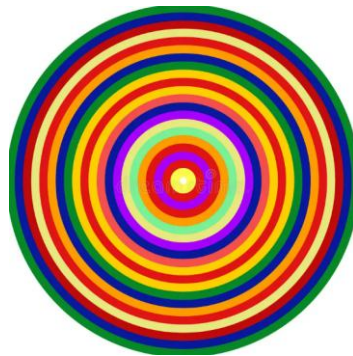
Actividades

En la mesa de la profesora hay trozos de papel de diversos tamaños, sin llevar la tapa circular que tienen a la mesa ¿Qué cantidad de papel deben recortar para cubrir la tapa de manera exacta, sin que sobre o falte papel? ¿de qué manera se puede conocer la medida que debe tener el papel?

Sigue los siguientes pasos y responde las preguntas que se te presentan:

- a) Dibuja la circunferencia más grande que puedas en la hoja de papel que te entregaron.

- b) Cubre toda la circunferencia dibujada con circunferencias de distintos tamaños hechas con lana. No debe quedar ningún espacio sin cubrir, como lo muestra la figura.



La clase pasada aprendieron que el contorno de la circunferencia corresponde al perímetro. ¿Qué concepto geométrico representa ahora toda la lana que cubre la circunferencia?

- c) **Dibuja un radio sobre la lana que cubre a la circunferencia y córtalo con una tijera, sin sobrepasar la medida dibujada.**



Si separamos cada una de las lanas cortadas en la circunferencia ¿qué otra figura geométrica se puede formar ordenando de menor a mayor todos los trozos de lana en forma recta sin que queden espacios sin recubrir? Escriban su respuesta y, al lado, realicen un dibujo con la figura formada

1. Dibujen la figura formada e identifiquen cuál es la base y cuál es la altura.



2. Recordando lo aprendido en las clases anteriores ¿Qué representa el trozo de lana más largo en la circunferencia? ¿Qué representa este trozo de lana en el triángulo?

3. ¿Qué elemento representa la altura del triángulo relacionándolo con la circunferencia?

4. Utilizando estos elementos calculen el área del triángulo rectángulo. Recuerda que el área se calcula multiplicando la base por la altura y el resultado se divide por dos. Escriban el desarrollo y encierren el resultado final.



5. Tal como vimos en la pregunta 4, la unión de toda la lana que cubre la circunferencia corresponde al área de la circunferencia. Pero en la pregunta 9 (anterior) se establece que esa misma cantidad de lana produce el área del triángulo ¿Qué relación se puede establecer entre el área del triángulo y el área de la circunferencia?

6. Según la relación anterior ¿Se puede deducir el valor del área de la circunferencia?

Podemos establecer que el área de la circunferencia corresponde a la superficie de esta y se puede calcular utilizando la fórmula: _____.

Anexo 9: Rediseño guía de Trabajo 4: Relación entre el área y el perímetro de la circunferencia

Guía de Trabajo 4
Relación entre área y perímetro de la circunferencia

Nombres:	Fecha:
-----------------	---------------

Para desarrollar esta guía de trabajo, reúnete junto a 2 compañeros y en conjunto desarrollen las siguientes actividades.

Actividad

Lee con atención cada una de las siguientes situaciones:

Para complementar las actividades extraprogramáticas del colegio, se aprobó la construcción de un **gallinero circular** junto al huerto. Se sabe que el terreno donde se debe construir el gallinero circular es de 10,8 metros por 13,95 metros.



Podemos
escapar sin un
gallinero

Para la construcción de gallinero circular, se les pide a los estudiantes de séptimo básico que puedan proporcionar ideas para la construcción de este, considerando que se debe construir con los siguientes materiales:

- malla metálica
- pasto sintético

Imagina que a ti y a tus compañeros de grupo se les asigna la construcción del gallinero que estará al lado del huerto, ¿qué pasos deberían realizar para construir el gallinero circular con malla

metálica y pasto sintético de modo que no queden espacios del suelo del gallinero sin cubrir? ¿en qué orden deben ser realizados los pasos?

2. ¿Cuál es la medida del diámetro que permite que el gallinero circular sea del tamaño más grande posible? Escribe cómo llegaste a esta medida e indica cuál es el valor del radio, puedes utilizar el espacio de la última hoja.

3. Tu profesora les entregará unas piezas de goma eva que simulan la malla metálica. Si el largo de cada pieza de goma eva mide 6,78 cm ¿Cuántas piezas de goma eva se necesitan para cercar el gallinero? Al sumar el largo de cada uno de esos trozos ¿cuál es el valor total de malla metálica que se necesita para cercar el gallinero? Recuerda que no debes cortar la goma eva.

4. Comprueba el valor del resultado anterior con la fórmula que construimos en la guía 2 y responde ¿Qué concepto geométrico representa la suma de los trozos de goma eva en el gallinero circular?

Quando cercamos o rodeamos un objeto circular y encontramos el valor de la medida necesaria para cercarlo, hacemos referencia al _____ de la circunferencia

5. Tu profesora les entregará unas piezas de papel que simulan trozos de pasto sintético. Si cada pieza de papel tiene un área que mide $18,31 \text{ cm}^2$ ¿Cuántas piezas de papel se necesitan para cubrir el suelo del gallinero circular? Al sumar el área de cada uno de esos trozos ¿Cuál es el valor de la superficie total cubierta por pasto sintético que se necesita para cubrir el suelo del gallinero?

6. Comprueba el valor del resultado anterior con la fórmula que construimos en la guía 3 y responde ¿Qué concepto geométrico representa la suma de los trozos de papel en el gallinero circular?

Quando cubrimos la superficie de un objeto circular y encontramos el valor de la medida necesaria para cubrirlo, hacemos referencia al _____ de la circunferencia.

7. Si el valor del radio del gallinero circular aumenta al doble ¿el valor de la suma de la malla metálica que lo rodea aumentará al doble también? Justifiquen su respuesta

8. Si el valor del radio del gallinero aumenta al doble ¿el valor de la suma de la superficie del pasto sintético aumentará al doble también? Justifiquen su respuesta

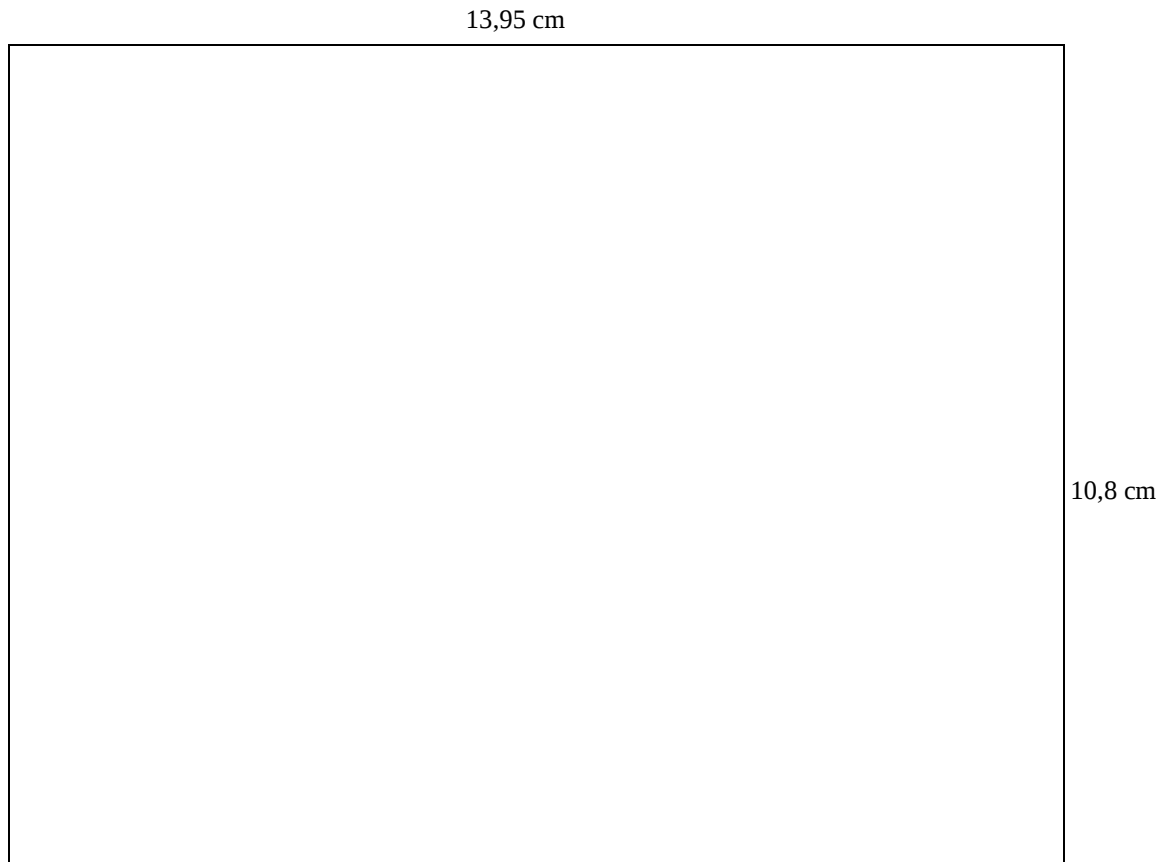
9. Si disminuye el valor del radio a la mitad, y en consecuencia el valor de la suma de la malla metálica que rodea el gallinero ¿qué cambio se producirá en el valor de la suma del pasto sintético? ¿el cambio será en la misma proporción? Justifiquen su respuesta

10. Al cambiar el valor del radio del gallinero circular ¿Cómo se ven afectados el valor de perímetro y el valor del área? ¿Qué conocimiento matemático interviene entre la superficie del pasto sintético y la malla metálica?

Al aumentar el valor de la medida del radio de una circunferencia, el _____ y el _____ de la circunferencia aumentaran su valor simultáneamente. Si disminuye el valor de la medida del radio de una circunferencia, el _____ y el _____ disminuirán el valor de su medida

La relación entre el área y el perímetro de una circunferencia corresponde a: **si el valor del perímetro aumenta el valor del área también _____ pero en _____ cantidad, y si el _____ disminuye el valor de _____ también debe disminuir en una proporción distinta.**

Terreno disponible para el gallinero circular medido en cm.



Espacio para cálculos o dibujos que necesiten: