UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES UTILIZANDO COMO HERRAMIENTA EPISTEMOLÓGICA EL ALGORITMO DE CLASIFICACIÓN DE RELEVANCIA DE PÁGINAS WEB PAGE RANK: UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE BLOMJØH Y HØJGAARD-JENSEN

Néstor Felipe Gajardo Guevara

Profesor guía:

Andrés Navas

Tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática

Santiago – Chile
2025

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como propósito diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica de modelación matemática orientada a la enseñanza de sistemas de ecuaciones. La propuesta integra representaciones algebraicas y figurativas, como los grafos, y se fundamenta en el modelo didáctico-cognitivo de Blomjøh y Højgard-Jensen. Como herramienta epistemológica, se empleará el algoritmo de selección de relevancia de páginas web, conocido como PageRank.

La metodología de investigación que se empleará será la ingeniería didáctica, la cual se define como el diseño y la evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas que están fundamentadas teóricamente. El objetivo es generar la aparición de fenómenos didácticos específicos, al mismo tiempo que se desarrollan recursos para la enseñanza que han sido comprobados.

Se espera que los resultados demuestren una mejora significativa en la comprensión matemática y en las habilidades de modelación y resolución de problemas en estudiantes en formación de pedagogía en matemática. La aplicación de la teoría de grafos y elementos del algebra lineal en contextos educativos busca fomentar una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos, además de desarrollar habilidades de pensamiento crítico y analítico.

Palabras clave: Teoría de Grafos,Algoritmo Page Rank, Sistemas de Ecuaciones, Modelización Matemática (Blomhøj y Højgaard-Jensen), Resolución de problemas.

Dedicatoria

Para Carmen y Amanda,
mi familia.

Agradecimientos

A todas aquellas personas que han confiado en mí y me han brindado su apoyo incondicional en la realización de este sueño de especializarme en una de mis mayores pasiones: la enseñanza de la matemática.

Agradezco profundamente a mi familia, compuesta por Carmen y Amanda, y a mis padres, quienes han sido mi principal sustento emocional y motivacional a lo largo de este camino. También extiendo mi gratitud a la Universidad de Santiago de Chile por brindarme la oportunidad de continuar desarrollándome académicamente y por permitirme aportar desde mi perspectiva a la investigación en educación matemática.

Quiero destacar y agradecer de manera especial a los estudiantes de primer año 2024 de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación, quienes participaron como sujetos de estudio en mi práctica y colaboraron activamente en este proceso de aprendizaje e investigación.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mi profesor tutor, Andrés Navas, cuya guía y constante inspiración fueron fundamentales para abordar un tema que me apasionó profundamente y que representó un desafío estimulante en cada etapa de la elaboración de esta tesis. Su apoyo y orientación fueron pilares esenciales en este recorrido académico.

Finalmente, extiendo mi gratitud a mis compañeros y profesores del Magíster en Educación Matemática (MEM), quienes, con su experiencia, sabiduría y motivación, contribuyeron significativamente a mi formación y al exitoso término de esta enriquecedora experiencia académica.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Capítulo 1: Introducción

La enseñanza de los sistemas de ecuaciones está presente en la formación matemática, tanto a nivel escolar como universitario. En el currículo chileno, los sistemas de ecuaciones se abordan principalmente desde una perspectiva algorítmica y gráfica, destacando su utilidad para resolver problemas reales a través de métodos algebraicos como sustitución, igualación y reducción. Sin embargo, esta aproximación limita la exploración de su potencial para modelar fenómenos más complejos y conectar con aplicaciones modernas en diversos contextos (MINEDUC,2016)(1).

En contraste, el enfoque universitario incorpora una visión más abstracta y teórica, enfatizando la solución de sistemas lineales mediante matrices, determinantes y vectores, con aplicaciones en áreas como física, economía e ingeniería (Santander, 2023)(2). Esta diferencia entre las perspectivas escolar y universitaria subraya la necesidad de integrar ambas en la formación de futuros docentes, para que puedan diseñar experiencias de aprendizaje significativas y alineadas con las exigencias curriculares y contextuales.

La presente investigación aborda esta brecha mediante el diseño de una secuencia didáctica basada en la modelación matemática, empleando el algoritmo de clasificación de relevancia de páginas web PageRank como herramienta epistemológica. Este enfoque se fundamenta en la teoría didáctica-cognitiva de Blomjøh y Højgaard-Jensen, destacando la interacción entre representaciones algebraicas y figurativas para resignificar el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones (Blomjøh et al., 2003)(3).

De manera general, en este documento, estructurado en ocho capítulos se reporta el desarrollo completo de esta investigación. El **capítulo 1** expone los antecedentes y la problemática asociada a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones en distintos niveles educativos, destacando las diferencias entre las perspectivas del currículo chileno y el enfoque universitario.

A nivel escolar, el currículo enfatiza métodos algorítmicos y gráficos (MINEDUC, 2016)(1), mientras que en el ámbito universitario se privilegia una visión teórica, con aplicaciones avanzadas en modelación matemática (Santander, 2023)(2). Esta dicotomía resalta la necesidad de una formación docente que integre ambos enfoques, promoviendo la resignificación del objeto matemático mediante herramientas como la modelación matemática y el **algoritmo PageRank**.

El **capítulo 2** se enfoca en analizar y comparar las definiciones escolares y universitarias de sistemas de ecuaciones. Se realiza un barrido curricular que revisa cómo este contenido se articula desde la educación básica hasta la media, evidenciando los vacíos en su tratamiento didáctico (MINEDUC, 2011; MINEDUC, 2016) (4), (1) . A partir de textos académicos y escolares, como Matemática 1º Medio (Fresno et al., 2020)(5) y Álgebra II (Santander, 2023)(2), se identifican enfoques complementarios y divergentes. Además, se incorporan aspectos históricos y epistemológicos para enriquecer la comprensión del objeto matemático (Blum et al.,2002)(6). Finalmente, se explora una aplicación del teorema de Perron-Frobenius en sistemas lineales 2x2 y 3x3, vinculando los sistemas de ecuaciones con contextos de modelación avanzados.

El **capítulo 3** expone el marco teórico de la investigación, sustentado en la modelización matemática como estrategia de enseñanza y aprendizaje. Se analizan las diferencias entre el modelo de modelización propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen y el enfoque del currículum chileno, destacando la importancia de la matematización y validación en la construcción del conocimiento matemático.

En el **capítulo 4** La investigación adopta un enfoque basado en la ingeniería didáctica, que combina el diseño, la implementación y la evaluación de secuencias didácticas para abordar problemas educativos específicos (Artigue, 1994)(7). El capítulo describe las etapas del diseño y las técnicas de recopilación y análisis de datos. Se detalla cómo se articula la teoría de Blomjøh y Højgaard-Jensen con la propuesta de actividades basadas en el algoritmo PageRank. Este enfoque metodológico permite observar la evolución de los estudiantes en términos de habilidades de modelación y resolución de problemas, alineándose con las competencias definidas en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2016)(1).

El **capítulo 5** detalla la intervención del proyecto, describiendo el diseño de la secuencia didáctica implementada en tres sesiones con estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. Se presentan las planificaciones de cada clase, las preguntas formuladas tanto para los docentes como para los estudiantes, y las respuestas esperadas en cada etapa del proceso de modelización.

Posteriormente, el **capítulo 6** desarrolla el estudio de clases, donde se documentan las interacciones entre los estudiantes y los objetos matemáticos durante la implementación de la secuencia.

Se hace mención a que el diseño didáctico se centra en el desarrollo de actividades contextualizadas que integran el algoritmo PageRank para la enseñanza de sistemas de ecuaciones. Este capítulo detalla las etapas de implementación, incluyendo momentos de inicio, desarrollo y cierre. Las actividades proponen problemáticas actuales, como la clasificación de relevancia de páginas web, para conectar la teoría matemática con aplicaciones prácticas. Este enfoque promueve el tránsito desde la comprensión básica hacia la modelación matemática avanzada (Blomhøj Højgaard-Jensen, 2003)(3).

A continuación, en el **capítulo 7**, se presentan los resultados del análisis, destacando la evolución de los estudiantes en cada sesión y su progreso en las distintas fases de la modelización matemática. Se contrastan los resultados con el análisis a priori del diseño, identificando fortalezas y oportunidades de mejora en la propuesta didáctica.

Finalmente el **capítulo 8, Conclusiones y Proyecciones**, sintetiza los hallazgos de la investigación, destacando la importancia de integrar herramientas innovadoras como el algoritmo PageRank en la formación docente. Los hallazgos de la investigación develan que la modelación matemática no solo fortalece el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones, sino que también contribuye al desarrollo de competencias transversales, como la resolución de problemas y el pensamiento analítico (Blum et al., 2003; MINEDUC, 2016). Además, se identifican limitaciones y se proponen líneas futuras de investigación, como la ampliación del diseño didáctico a otros objetos matemáticos y contextos educativos.

1.0.1. Alcance y divulgación del estudio

El impacto de esta investigación ha trascendido el ámbito académico a través de su difusión en distintos congresos especializados en educación matemática, permitiendo no solo la socialización de los hallazgos obtenidos, sino también la discusión de su aplicabilidad en contextos de formación docente y en el aula universitaria. La participación en estos encuentros ha sido clave para validar la relevancia de la propuesta didáctica y enriquecerla con aportes de expertos en el área.

En primer lugar, la propuesta fue presentada en el **Segundo Encuentro de Docencia e Innovación en Matemática Universitaria**, realizado en la **Pontificia Universidad Católica de Chile**. En este espacio, se abordaron los alcances del uso del algoritmo PageRank como herramienta didáctica para la enseñanza de sistemas de ecuaciones, enfatizando su potencial para la articulación de representaciones algebraicas y gráficas en la modelización matemática. Durante este evento, se generó un debate en torno a la viabilidad de integrar este tipo de estrategias en la formación de futuros docentes, así como sobre la importancia de fomentar una enseñanza que combine el pensamiento matemático avanzado con herramientas tecnológicas aplicadas.

Posteriormente, la investigación fue expuesta en la **XXVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática – 2024**, llevadas a cabo en la ciudad de Los Ángeles y organizado por la **Universidad de Concepción, sede Los Ángeles**. Este congreso, de carácter nacional, reunió a investigadores, docentes y formadores de profesores, constituyéndose en un espacio propicio para discutir la pertinencia de la modelización matemática en el currículo chileno y su impacto en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones. La exposición del estudio generó un gran interés entre los asistentes, quienes valoraron la incorporación del algoritmo PageRank como una estrategia innovadora que permite conectar la teoría matemática con aplicaciones actuales en ciencia de datos y computación.

Finalmente, el estudio fue presentado en el **Primer Congreso de Estudiantes de Postgrado en Educación**, organizado por la **Universidad de Chile**, donde se destacó su contribución al desarrollo de metodologías innovadoras en la enseñanza de las matemáticas. En este evento, la propuesta fue reconocida por su enfoque interdisciplinario, el cual vincula la educación matemática con elementos de la teoría de grafos y el álgebra lineal aplicada. Además, se discutió el impacto que el uso de herramientas digitales y algoritmos computacionales puede tener en la formación de profesores, promoviendo un aprendizaje más significativo y contextualizado.

La favorable recepción de la propuesta en estos espacios reafirma la pertinencia del estudio y su potencial para incidir en la formación de futuros docentes, promoviendo un enfoque de enseñanza que integre la modelización matemática y el uso de herramientas algebraicas avanzadas en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones. Además, las discusiones y reflexiones generadas en estos congresos han permitido fortalecer la investigación, proporcionando nuevos elementos de análisis y perspectivas que podrían ser consideradas en futuras aplicaciones y estudios complementarios.

El reconocimiento obtenido en estos eventos demuestra que la propuesta no solo responde a una necesidad detectada en la formación docente, sino que también tiene el potencial de ser escalada a otros niveles educativos y contextos de enseñanza. A partir de estas instancias de divulgación, se ha abierto la posibilidad de establecer colaboraciones con otros investigadores y docentes interesados en explorar nuevas aplicaciones de la modelización matemática en la educación, lo que podría derivar en futuras investigaciones y desarrollos en esta línea de trabajo.

1.1. Problemática y Antecedentes

La enseñanza de la matemática en Chile enfrenta desafíos significativos en el desarrollo de competencias que conecten los conceptos matemáticos con situaciones del mundo real. Uno de los enfoques más relevantes para lograr esta conexión es la modelación matemática, la cual permite representar fenómenos mediante modelos matemáticos, proporcionando herramientas para analizar y resolver problemas contextualizados (Blum Borromeo-Ferri, 2009)(8). Sin embargo, la implementación de la modelación matemática en la educación, particularmente en la formación de futuros docentes, presenta múltiples dificultades que han sido ampliamente documentadas en investigaciones nacionales e internacionales.

En el currículo chileno, la modelación matemática es reconocida como una habilidad fundamental desde la educación básica. Según las Bases Curriculares (MINEDUC, 2016)(9), la modelación debe promoverse a partir de séptimo año básico, definiéndola como el proceso de construir un modelo que permita estudiar, modificar y evaluar situaciones reales mediante representaciones matemáticas. Asimismo, en la educación media, esta habilidad se consolida como parte del eje Álgebra y Funciones, enfatizando su utilidad para interpretar y resolver problemáticas concretas (MINEDUC, 2016)(9).

A pesar de su inclusión curricular, la modelación matemática en Chile sigue siendo un área de desarrollo incipiente. En los textos escolares predominan ejercicios mecánicos y algoritmos predefinidos, mientras que los problemas contextualizados y las actividades de modelación son escasos o inexistentes (Felmer, 2014)(10). Esta carencia limita la capacidad de los estudiantes para construir relaciones significativas entre las matemáticas y su entorno, perpetuando un enfoque reduccionista que prioriza el cálculo sobre la comprensión (Blomhøj Højgaard-Jensen, 2003)(11).

Uno de los principales obstáculos para integrar la modelación matemática en las aulas chilenas radica en la formación inicial de los docentes. Estudios como los de Biembengut y Hein (2004)(12) señalan que las dificultades en los procesos de modelización tienen su origen en los planes de formación docente, los cuales no suelen incluir vivencias ni experiencias prácticas que preparen a los futuros profesores para diseñar e implementar actividades de modelación. Como resultado, los estudiantes en formación carecen de las herramientas pedagógicas necesarias para enseñar esta habilidad de manera efectiva.

Blum y Borromeo-Ferri (2009)(8) destacan que la enseñanza de la modelación requiere que los docentes desarrollen competencias específicas, tales como identificar problemas adecuados, seleccionar enfoques matemáticos pertinentes y guiar a los estudiantes en la construcción y validación de modelos. Estas competencias, sin embargo, suelen estar ausentes en los programas de formación docente en Chile, los cuales priorizan contenidos teóricos y algoritmos tradicionales sobre estrategias pedagógicas innovadoras.

El Plan de Formación Inicial Docente en Chile reconoce la importancia de la modelación y la resolución de problemas como habilidades esenciales para la enseñanza de las matemáticas. Según el MINEDUC (2016)(9), los docentes deben estar preparados para diseñar actividades que promuevan el pensamiento matemático crítico, la representación y la argumentación, habilidades que son fundamentales en la resolución de problemas y la modelación. Sin embargo, en la práctica, estas habilidades suelen relegarse a un segundo plano frente a los contenidos disciplinarios tradicionales.

Blomhøj y Højgaard-Jensen (2003)(11) proponen un marco teórico que destaca la modelación matemática como un proceso que va más allá de la resolución de problemas rutinarios. Este enfoque enfatiza la importancia de contextualizar los problemas matemáticos, permitiendo a los estudiantes explorar las relaciones entre los datos, los modelos y las soluciones. En este sentido, los planes de formación docente deben incluir actividades que conecten la teoría con la práctica, ofreciendo a los futuros profesores la oportunidad de experimentar con procesos de modelización en contextos reales.

El presente estudio busca abordar esta problemática mediante el diseño de una secuencia didáctica que utilice el algoritmo PageRank como herramienta epistemológica para la enseñanza de sistemas de ecuaciones. Esta propuesta tiene como objetivo fortalecer la formación docente inicial, promoviendo el desarrollo de competencias en modelación matemática y resolución de problemas en contextos auténticos.

1.2. Objetivo del estudio

A raíz de la problemática del presente estudio, se plantea como objetivo general:
Diseñar y validar localmente una situación de aprendizaje de sistemas de ecuaciones dirigida a estudiantes en formación inicial de pedagogía en matemática, que fomente el uso del registro geométrico y algebraico en la construcción del concepto, tomando como referente teórico la teoría de Blomjøh y Højgaard-Jensen.

1.2.1. Objetivos Específicos

- OE1: Identificar las competencias y habilidades clave requeridas por las nuevas Bases Curriculares (MINEDUC, 2019) relacionadas con la modelación matemática en el contexto de la enseñanza de matemáticas en estudiantes de pedagogía en matemática.
- OE2: Implementar una propuesta didáctica de modelación, utilizando la herramienta epistemológica “algoritmo de selección de relevancia de páginas web Page Rank”, desde la teoría de modelación matemática de Blomjøh y Højgaard-Jensen .
- OE3: Analizar las evidencias del diseño de modelación y verificar la presencia y/o ausencia de los procesos de modelación matemática de Blomjhø y Højgaard-Jensen.

Una vez finalizado el diseño de la secuencia didáctica (OE 1), se procede a la implementación de la primera de las tres clases planificadas (OE 2). Posteriormente, se realiza un análisis detallado de los resultados obtenidos a partir de dicha implementación (OE 3). La **figura 1.1** ilustra la relación existente entre los objetivos establecidos

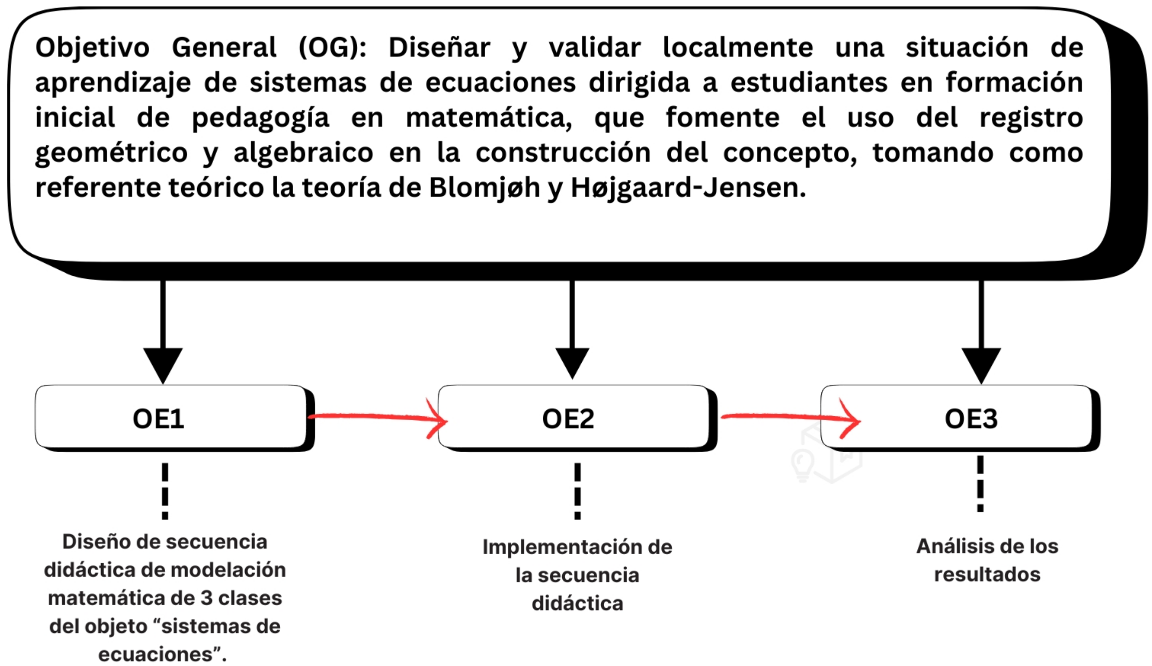


Figura 1.1: Esquema del objetivo general y los objetivos específicos.
Fuente: elaboración propia
.

1.3. Preguntas de investigación

Para complementar los objetivos declarados, en este estudio se plantean dos preguntas de investigación:

1. ¿Qué atributos didácticos debe poseer una situación de modelación para que los alumnos puedan lograr las fases del proceso de modelización matemática?(**P1**).
2. ¿Qué contribuciones ofrece el proceso de modelización matemática al aprendizaje del objeto matemático sistemas de ecuaciones? (**P2**).

Dado que las interrogantes de investigación deben estar vinculadas a los objetivos establecidos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) (13), en la figura **1.2** se ilustra esta relación entre dichos elementos.

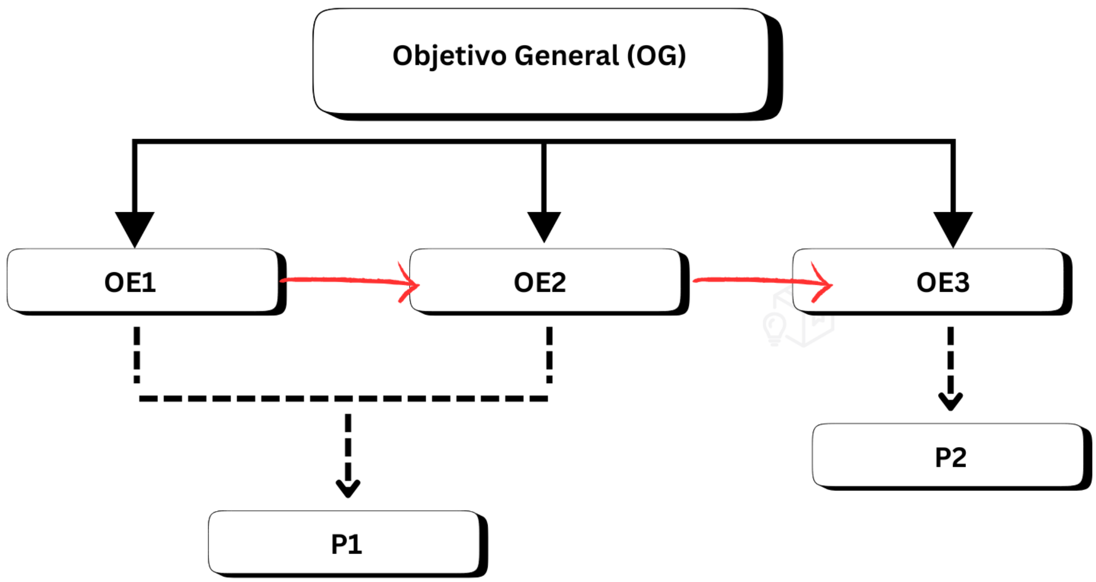


Figura 1.2: Relación entre objetivos y preguntas de investigación.
Fuente: elaboración propia.

1.4. Justificación y Antecedentes del estudio

La importancia de la modelación matemática como estrategia de enseñanza ha sido ampliamente documentada en la literatura educativa, destacándose su potencial para promover aprendizajes significativos y desarrollar habilidades matemáticas esenciales en los estudiantes (Bassanezi Biembengut, 1997 (14); Blomhøj Højgaard-Jensen, 2003 (11); Blum et al., 2003 (6); Guerrero-Ortiz Mena-Lorca, 2015 (15)). La modelación permite a los estudiantes conectar conceptos matemáticos abstractos con situaciones del mundo real, facilitando la construcción de significado y el fortalecimiento de competencias transversales como el razonamiento crítico y la resolución de problemas.

Los distintos enfoques y ciclos de modelización desarrollados desde la década de 1970 (véase Borromeo-Ferri, 2006 (16)) convergen en la idea de que la modelación es una herramienta pedagógica fundamental en todos los niveles educativos. Sin embargo, gran parte de los estudios existentes, como los de Arrieta y Hernández (2005)(17), García (2012)(18) y González et al (2015), centran sus propuestas en niveles universitarios y en disciplinas asociadas a ingeniería y ciencias, dejando una brecha significativa en la implementación de estrategias de modelación para niveles escolares. Esta investigación busca atender dicha brecha, enfocándose en la enseñanza de sistemas de ecuaciones en primer año medio.

El documento curricular vigente en Chile reconoce la modelación como una habilidad clave en la enseñanza de la matemática. Según el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2016), modelar implica que los estudiantes sean capaces de representar datos mediante diversas formas, seleccionar métodos matemáticos adecuados y utilizar herramientas apropiadas para resolver problemas. Esta habilidad es especialmente relevante en el contexto de sistemas de ecuaciones, dado su potencial para abordar problemas contextualizados y promover el aprendizaje significativo.

Sin embargo, en la práctica, la enseñanza de la modelación enfrenta múltiples desafíos, incluidos la falta de preparación de los docentes y la ausencia de experiencias significativas en la formación inicial que les permitan diseñar e implementar actividades de este tipo (Blomhøj Kjeldsen, 2009 (19); Felmer, 2014 (20)). Estas dificultades limitan el alcance de la modelación en el aula, relegándola a ejercicios mecánicos y descontextualizados.

La presente investigación propone una secuencia didáctica basada en la modelación matemática como estrategia para la enseñanza de sistemas de ecuaciones para estudiantes en formación de la carrera de pedagogía en matemática considerando los contenidos curriculares del primer año de enseñanza media escolar. Esta secuencia busca abordar las dificultades identificadas en la problemática del estudio, proporcionando a los docentes una herramienta práctica y fundamentada en un marco teórico sólido. Desde una perspectiva investigativa, la concatenación de un modelo didáctico-cognitivo con elementos de teorías de la didáctica de las matemáticas, como la de Blomhøj y Højgaard-Jensen (2003), permite analizar las construcciones mentales que emergen durante el ciclo de modelización, ofreciendo una visión más profunda de las prácticas en el aula y sus resultados.

El diseño de esta propuesta también está en consonancia con los lineamientos curriculares y las ventajas evidenciadas en investigaciones previas acerca de la modelación como práctica de aula (MINEDUC, 2016; Blum Borromeo-Ferri, 2009). Al enfocar el estudio en sistemas de ecuaciones, se busca resignificar este contenido matemático, conectándolo con problemas reales y actuales, promoviendo no solo el aprendizaje de procedimientos, sino también el desarrollo de habilidades como el análisis, la argumentación y la validación de soluciones.

En síntesis, esta investigación representa una contribución relevante al campo de la educación matemática, al proponer una estrategia innovadora para la enseñanza de sistemas de ecuaciones que combina fundamentos teóricos, principios curriculares y prácticas pedagógicas efectivas.

Capítulo 2: Sistemas de Ecuaciones y modelo Page Rank

El estudio de los sistemas de ecuaciones representa un componente esencial en la formación matemática, tanto en el ámbito escolar como en el universitario. Este capítulo tiene como objetivo analizar y comparar las definiciones y enfoques presentes en ambos niveles, utilizando como referencia el actual Currículum Nacional Chileno y el texto Algebra II de Ricardo Santander. Mediante un análisis exhaustivo, se pretende identificar los puntos de convergencia y divergencia entre estas perspectivas, subrayando las oportunidades pedagógicas que surgen de la integración de conocimientos avanzados en la enseñanza escolar.

El capítulo incorpora un análisis curricular exhaustivo que examina los objetivos de aprendizaje vinculados con los sistemas de ecuaciones en el nivel de primer año medio, contrastándolos con las formulaciones teóricas presentes en el texto universitario elegido para este estudio. Además, se incluye una referencia detallada a los aspectos históricos y epistemológicos asociados al desarrollo del concepto de sistemas de ecuaciones, enriqueciendo la comprensión del objeto matemático desde una perspectiva integral.

En la parte final, el capítulo presenta una aplicación concreta del Teorema de Perron-Frobenius, utilizando sistemas de ecuaciones de dimensiones 2x2 y 3x3 como ejemplos prácticos.

2.0.1. Definición Matemática y Escolar

2.0.1.1. Definición Formal de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Un **sistema lineal de** n **ecuaciones y** m **incógnitas** (o de orden $n \times m$) es una expresión de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n, \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del sistema, x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ son las incógnitas, y $b_i \in \mathbb{R}$ son los términos independientes.

Equivalentemente, un sistema lineal se puede expresar en **notación matricial** como:

$$A \cdot X = B,$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si $B = \mathbf{0}$ (el vector nulo), el sistema se denomina **sistema lineal homogéneo**.

La solución de un sistema lineal de ecuaciones puede representarse y resolverse utilizando la notación matricial. Dado el sistema lineal:

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de coeficientes, $X \in \mathbb{R}^n$ es el vector columna de incógnitas y $B \in \mathbb{R}^n$ es el vector columna de términos independientes, la solución, si existe, se obtiene de la siguiente forma:

1. Si la matriz A es **invertible** (determinante distinto de cero, $\det(A) \neq 0$), el sistema tiene una única solución dada por:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

donde A^{-1} es la matriz inversa de A.

2. Si $\det(A) = 0$, el sistema es **singular** y puede presentar:

- Ninguna solución (sistema inconsistente).
- Infinitas soluciones (sistema dependiente).

3. En caso de sistemas homogéneos ($B = \mathbf{0}$), las soluciones son:

- $X = \mathbf{0}$ (única solución trivial) si A es invertible
- Una familia infinita de soluciones si A no es invertible, correspondientes al espacio nulo de la matriz A.

4. Para resolver el sistema, los pasos comunes incluyen: - Calcular A^{-1}, si existe, utilizando el método de Gauss-Jordan o determinantes. - Verificar la consistencia del sistema analizando el rango de A y la matriz aumentada $[A|B]$.

2.0.1.2. Método de Cramer

Teorema 2.0.1. *Sea un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas representado en notación matricial como:*

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de coeficientes, $X \in \mathbb{R}^n$ es el vector de incógnitas, y $B \in \mathbb{R}^n$ es el vector de términos independientes. Si $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene una solución única, y cada incógnita x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se calcula mediante:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

donde:

- $\det(A)$ *es el determinante de la matriz de coeficientes A.*
- A_i *es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por el vector de términos independientes B.*

Ejemplo 2.0.2. Ejemplo: Para un sistema de $n = 3$, las incógnitas x_1, x_2, y x_3 se calculan como:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)},$$

donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

El método de Cramer es aplicable únicamente cuando $\det(A) \neq 0$ y el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas ($n \times n$). Para sistemas singulares ($\det(A) = 0$) o sistemas sobredeterminados ($n \neq m$), este método no es pertinente.

2.0.1.3. Definición Escolar de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Las siguientes definiciones serán obtenidas del texto oficial de primer año medio de enseñanza secundaria en Chile (5), que en sus páginas 71-72, refieren lo siguiente:

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** se define como un conjunto de dos ecuaciones lineales de la forma:

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y x, y son las incógnitas. La solución del sistema es el conjunto de valores (x, y) que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

- Si las rectas correspondientes a las ecuaciones son **secantes**, el sistema tiene una única solución, denominada *compatible determinado*.
- Si las rectas son **coincidentes**, el sistema tiene infinitas soluciones, denominado *compatible indeterminado*.

- Si las rectas son **paralelas**, el sistema no tiene solución, denominado *incompatible*.

El texto (5) analiza la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones lineales a través de la relación entre las rectas representadas por las ecuaciones del sistema y las propiedades de sus coeficientes. Dados dos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, la existencia y el tipo de solución se determinan considerando las razones entre los coeficientes:

- Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, las rectas son **secantes** y el sistema tiene una **única solución** (sistema *compatible determinado*).
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, las rectas son **coincidentes** y el sistema tiene **infinitas soluciones** (sistema *compatible indeterminado*).
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, las rectas son **paralelas** y el sistema no tiene **ninguna solución** (sistema *incompatible*).

Este análisis permite clasificar los sistemas lineales de acuerdo con su consistencia y determinar las condiciones algebraicas que afectan la existencia de soluciones. Además, se resalta la importancia de comprender estas relaciones para interpretar gráficamente la interacción entre las rectas asociadas.

2.0.2. Comparación entre las definiciones

2.0.2.1. Similitudes

- Ambos enfoques definen el sistema de ecuaciones lineales como un conjunto de relaciones lineales entre variables.
- Tanto la notación matricial como la definición escolar reconocen la solución como los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.
- En ambos niveles, se destacan las condiciones necesarias para que un sistema tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución, ya sea mediante análisis gráfico o propiedades algebraicas.

2.0.2.2. Diferencias

- La notación matricial, utilizada en el currículum universitario, generaliza los sistemas de ecuaciones lineales a un número arbitrario de incógnitas y ecuaciones ($n \times m$), mientras que en el nivel escolar se limita a sistemas con dos incógnitas (2×2).
- En la enseñanza universitaria, se enfatizan los métodos algebraicos y computacionales avanzados (inversión de matrices, determinantes), mientras que en el nivel escolar predominan los métodos gráficos y algorítmicos básicos.
- La perspectiva universitaria aborda los sistemas de manera abstracta y simbólica, mientras que la escolar se centra en su aplicación contextual, vinculando el contenido a problemas cotidianos y situados.

2.0.3. Observaciones en Relación al Currículo

- En el currículo de primero medio (MINEDUC, 2016), los sistemas de ecuaciones lineales se enmarcan dentro de los ejes de *Álgebra y Funciones*, destacando su resolución mediante métodos básicos y su conexión con situaciones reales. Este enfoque busca desarrollar habilidades de modelación y resolución de problemas.

- En contraste, el currículum universitario, particularmente en cursos de álgebra lineal, introduce la notación matricial como una herramienta general y eficiente para resolver sistemas complejos, lo cual está orientado a disciplinas como ingeniería, ciencias y matemáticas avanzadas.
- Existe una brecha significativa en la continuidad del tratamiento de los sistemas entre ambos niveles. La transición del enfoque aplicado en el nivel escolar al enfoque abstracto del nivel universitario no siempre está suficientemente articulada en la formación docente.

2.0.4. Conclusión

La comparación revela que, si bien ambos enfoques buscan abordar el mismo concepto matemático, sus objetivos, métodos y niveles de abstracción son considerablemente diferentes.

2.0.5. Mapa Conceptual

Con el propósito de resumir los contenidos previos para la formación del concepto matemático de *sistemas de ecuaciones*, el mapa conceptual mostrado en la **figura 2.1** los organiza para facilitar su visualización, teniendo en cuenta los objetos abordados en los ejes Números (representados en rosado) y Álgebra y Funciones (indicados en amarillo) del currículo nacional actual de primer año medio.

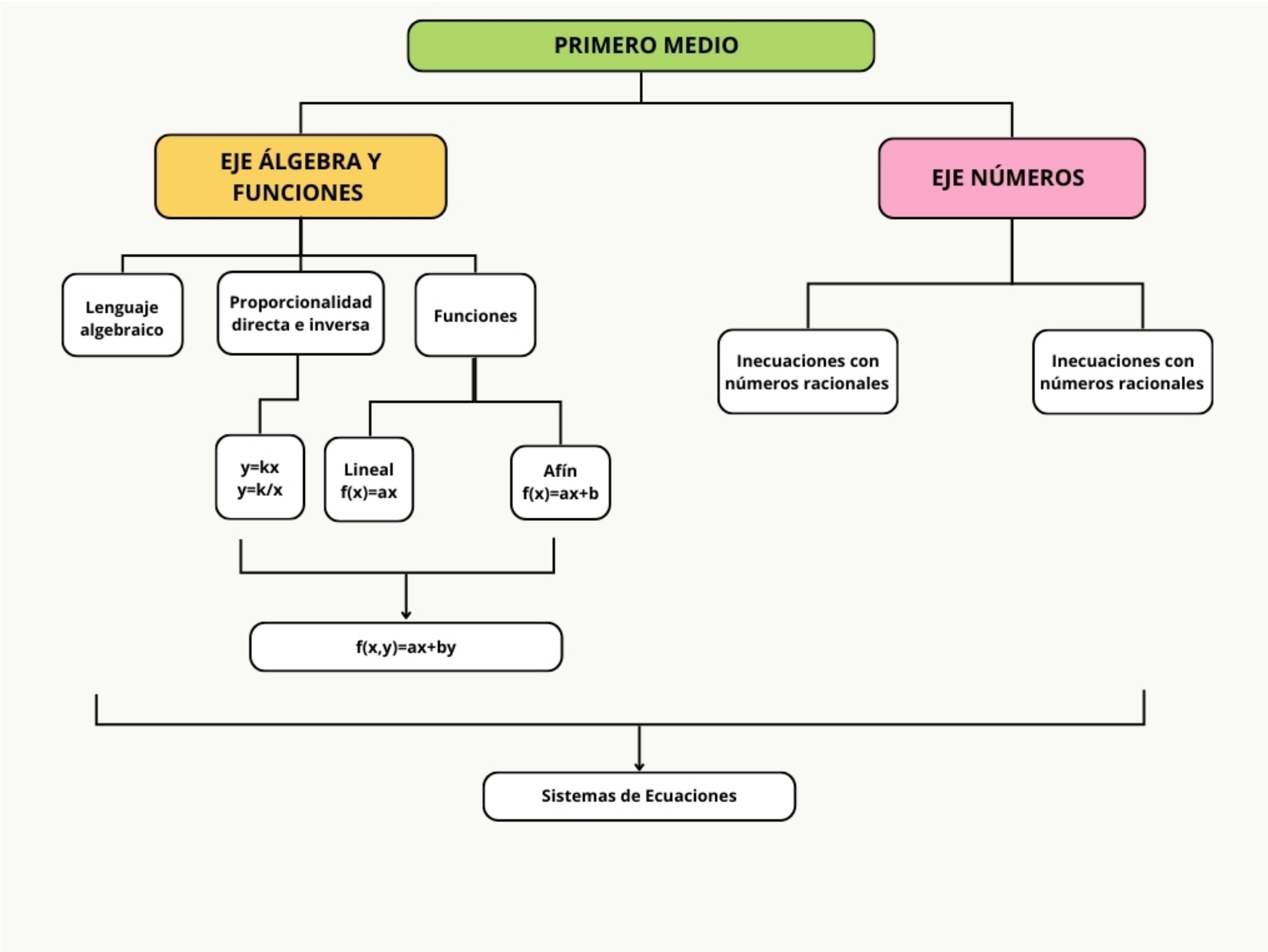


Figura 2.1: Mapa conceptual de Sistemas de Ecuaciones.
Fuente: Elaboración propia

2.0.6. Barrido Curricular

En este sección, se exponen tanto los contenidos abordados en los niveles anteriores que son esenciales para el desarrollo del concepto de sistemas de ecuaciones en primer año medio, así como la continuidad curricular que se establece en los cursos subsiguientes. Para tal fin, se toman en consideración los contenidos relacionados con funciones, estudiados en el eje de Álgebra y Funciones (Figura **2.2**) y las ecuaciones e inecuaciones, analizados en el eje Números (Figura **2.3**),en el periodo que abarca desde séptimo año básico hasta cuarto año medio.

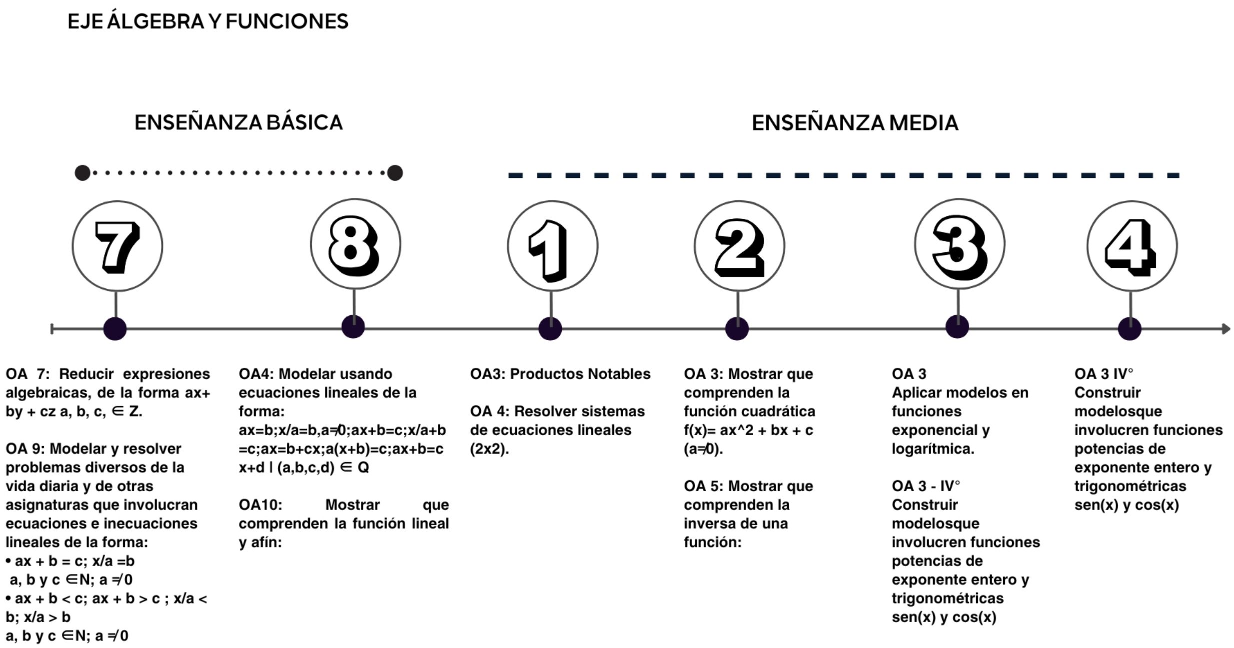


Figura 2.2: Esquema barrido curricular Eje Álgebra y Funciones.
Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la **figura 2.2** los contenidos descritos en las bases curriculares describen la modelación desde 7º y 8º. En 1º año medio no está mencionado como tal. En 3º medio se promueve la modelación como una aplicación en funciones exponencial,logarítmica y trigonométricas y en 4º medio como una construcción en problemas de función potencia.

Por otro lado, en el eje Números se distinguen los siguientes contenidos. Ver **figura 2.3**

Figura 2.3: Esquema barrido curricular Eje Números.
Fuente: Elaboración propia

En este esquema se describen los contenidos que promueven las habilidades de comprensión y resolución de problemas. En todos los niveles hay un especial énfasis en aquello y se hace mención desde 7º a 4º año de enseñanza.

Ambos esquemas presentados se fundamentan en la necesidad de establecer una progresión didáctica que permita la enseñanza de la modelación matemática en coherencia con el marco teórico de Blomjöh y Højgaard-Jensen (descrito en el **capítulo 3**). Este análisis es crucial para la identificación de una secuencia didáctica que favorezca el desarrollo de la competencia de modelación en los estudiantes, con especial énfasis en la formación de futuros docentes de matemáticas.

2.0.7. Análisis de textos

Con el propósito de analizar los textos escolares, se llevó a cabo una comparación del enfoque presentado por cada uno en relación con el concepto de sistemas de ecuaciones. Para ello, se seleccionaron tres textos de estudio: **Matemática 1º Medio proyecto Savia** Editorial SM (Setz y Muñoz, 2018), **Matemática 1º Medio Texto del Estudiante**, editorial Santillana (Fresno et al., 2020) y **Álgebra II**, Editorial USACH (Santander, 2023). Estos textos son utilizados en distintos contextos educativos: el primero en una institución de dependencia privada, el segundo en un establecimiento subvencionado/municipal, y el tercero como texto de referencia en la formación universitaria de estudiantes de pedagogía en matemática e ingeniería en la Universidad de Santiago de Chile.

El primer texto de estudio analizado (Fresno et al., 2020) comienza el contenido estableciendo un problema de motivación que promueve la modelación de dos situaciones de venta de entradas de una compañia de teatro, ver **figura 2.4**.


1. Un grupo de compañías de teatro itinerante decidió realizar una campaña para fomentar la asistencia a las diferentes obras que presentarán durante el año. La campaña presenta dos modalidades para la compra de entradas: la primera de ellas es de $4000 por entrada y la segunda consiste en un abono anual de $10 000 y un precio por entrada de $2000.

Figura 2.4: Problema 1, lección 5 pág 116.
Fuente: Matemática 1º medio, editorial SM

La pregunta siguiente atiende a lo anterior. Ver **figura 2.5**

a. Si x es el número de entradas e y es el costo de ellas, escribe una expresión algebraica para ambas modalidades.

$$\begin{cases} \text{Modalidad 1: } \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \text{Modalidad 2: } \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Figura 2.5: Pregunta a, lección 5 pág 116.
Fuente: Matemática 1º medio, editorial SM

Se espera que el estudiante sea capaz de llegar a las relaciones y escribir los dos modelos tanto para la Modalidad 1 y 2, los cuales son los siguientes:

Modalidad 1:

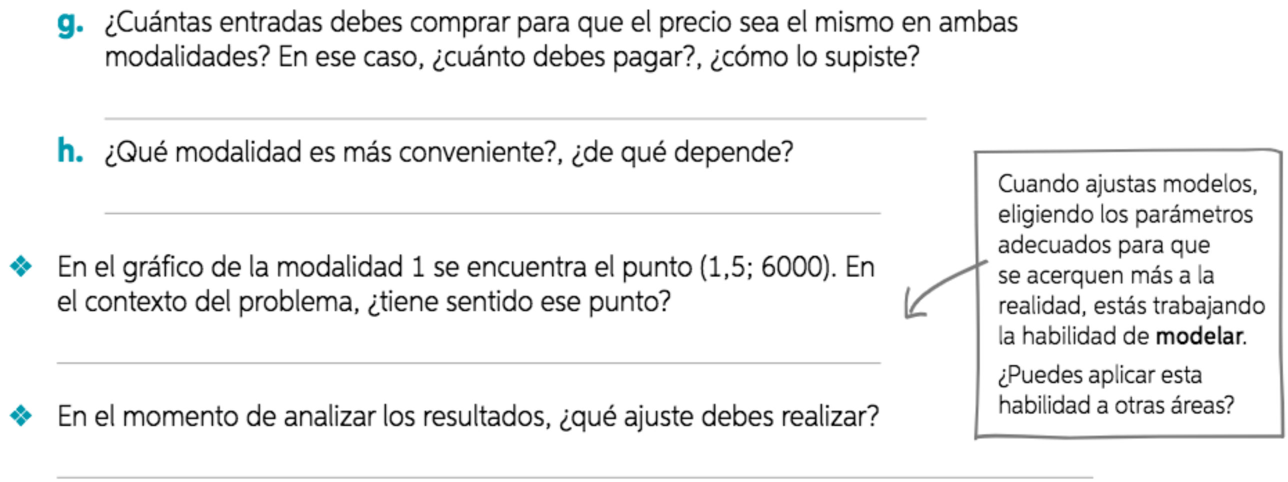
$$4000 \cdot x$$

Modalidad 2:

$$10000 + 2000 \cdot x$$

.

Luego se registran otras preguntas que van en la dirección de variar y ajustar parámetros. Se da la primera definición en términos de la habilidad a trabajar. Ver **figura 2.6**.



g. ¿Cuántas entradas debes comprar para que el precio sea el mismo en ambas modalidades? En ese caso, ¿cuánto debes pagar?, ¿cómo lo supiste?

h. ¿Qué modalidad es más conveniente?, ¿de qué depende?

- En el gráfico de la modalidad 1 se encuentra el punto (1,5; 6000). En el contexto del problema, ¿tiene sentido ese punto?

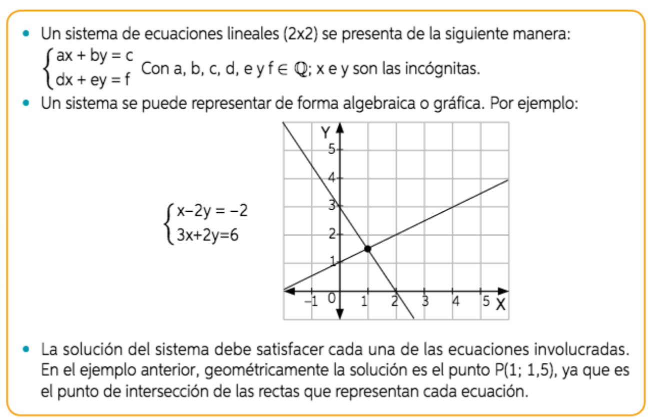
- En el momento de analizar los resultados, ¿qué ajuste debes realizar?

Cuando ajustas modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad, estás trabajando la habilidad de **modelar**.

¿Puedes aplicar esta habilidad a otras áreas?

Figura 2.6: Preguntas lección 5, pág 116.
Fuente:Matemática 1º medio, editorial SM

El libro presenta, en la página siguiente, la primera formalización de la representación de un sistema de ecuación. Ver **figura 2.7**



- Un sistema de ecuaciones lineales (2x2) se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \quad \text{Con a, b, c, d, e y f} \in \mathbb{Q}\text{; x e y son las incógnitas.}$$

- Un sistema se puede representar de forma algebraica o gráfica. Por ejemplo:

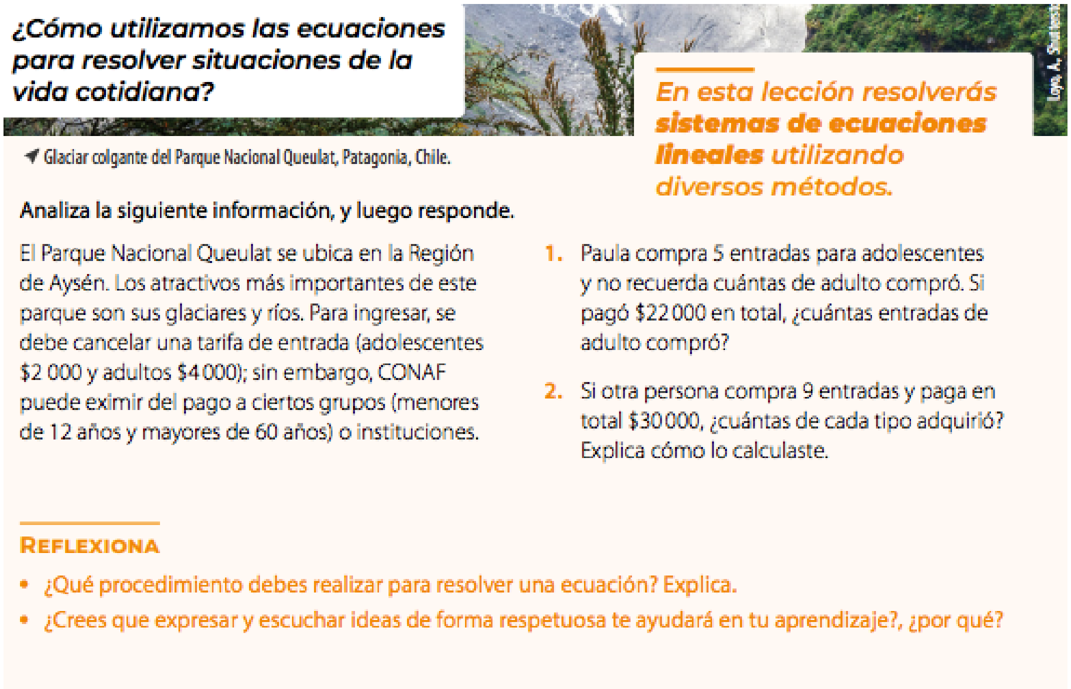
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

- La solución del sistema debe satisfacer cada una de las ecuaciones involucradas. En el ejemplo anterior, geométricamente la solución es el punto P(1; 1,5), ya que es el punto de intersección de las rectas que representan cada ecuación.

Figura 2.7: Sistema de Ecuaciones, lección 5 pág 117.
Fuente:Matemática 1º medio, editorial SM

A continuación, el texto aborda ejercicios orientados a la representación gráfica y el cálculo del punto de intersección entre rectas, además de problemas de formulación y análisis que incluyen la caracterización de sistemas de ecuaciones con solución única, soluciones infinitas o sin solución. Posteriormente, se introduce el desarrollo de problemas mediante los métodos de sustitución, igualación y reducción, complementados con la resolución de situaciones contextualizadas en problemas cotidianos.

Por otro lado el texto de 1º medio de editorial Santillana introduce el concepto matemático de "sistemas de ecuaciones.ª través de un problema inicial, acompañado únicamente de dos preguntas destinadas a la reflexión. Ver **figura 2.8**.



¿Cómo utilizamos las ecuaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana?

Glaciar colgante del Parque Nacional Queulat, Patagonia, Chile.

*En esta lección resolverás **sistemas de ecuaciones lineales** utilizando diversos métodos.*

Analiza la siguiente información, y luego responde.

El Parque Nacional Queulat se ubica en la Región de Aysén. Los atractivos más importantes de este parque son sus glaciares y ríos. Para ingresar, se debe cancelar una tarifa de entrada (adolescentes $2 000 y adultos $4 000); sin embargo, CONAF puede eximir del pago a ciertos grupos (menores de 12 años y mayores de 60 años) o instituciones.

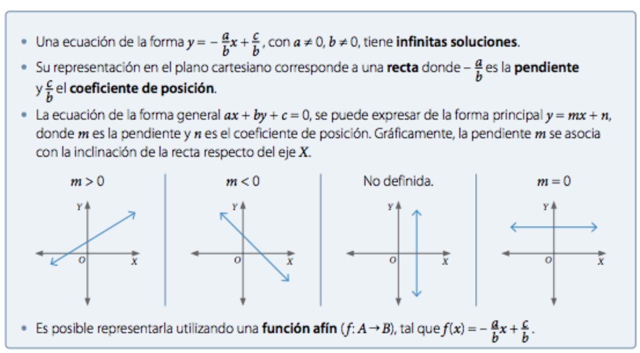
1. Paula compra 5 entradas para adolescentes y no recuerda cuántas de adulto compró. Si pagó $22 000 en total, ¿cuántas entradas de adulto compró?
2. Si otra persona compra 9 entradas y paga en total $30 000, ¿cuántas de cada tipo adquirió? Explica cómo lo calculaste.

REFLEXIONA

- ¿Qué procedimiento debes realizar para resolver una ecuación? Explica.
- ¿Crees que expresar y escuchar ideas de forma respetuosa te ayudará en tu aprendizaje?, ¿por qué?

Figura 2.8: Problema 1, lección 5 pág 66.
Fuente: libro 1º medio Matemática, ed. Santillana

A continuación, se presenta la función afín mediante su representación gráfica, destacando los diferentes tipos de gráficos que pueden generarse según los valores correspondientes a sus pendientes. Ver **figura 2.9**.

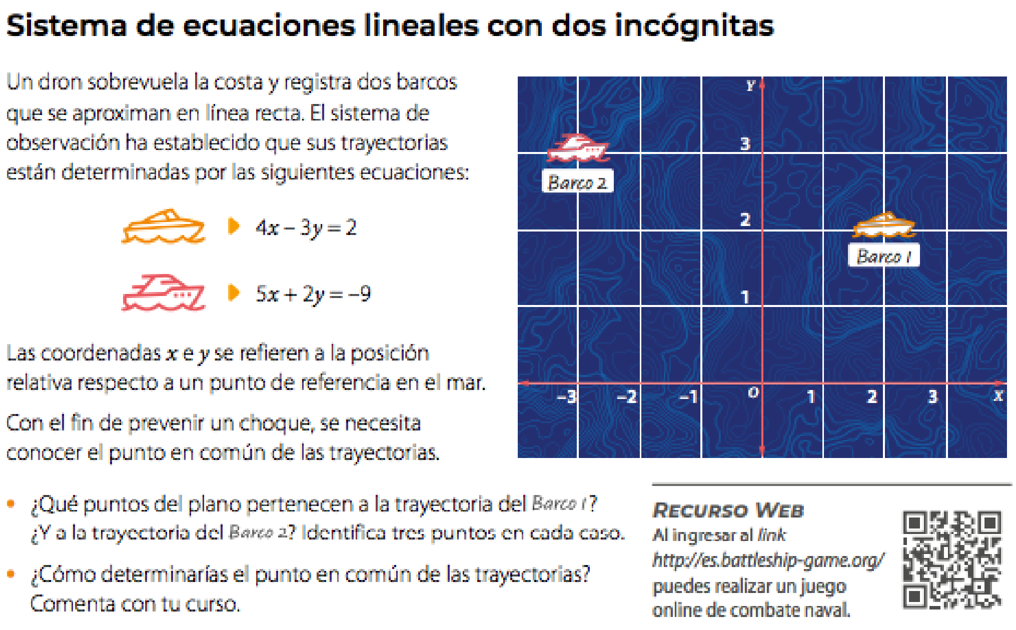


- Una ecuación de la forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, tiene **infinitas soluciones**.
- Su representación en el plano cartesiano corresponde a una **recta** donde $-\frac{a}{b}$ es la **pendiente** y $\frac{c}{b}$ el **coeficiente de posición**.
- La ecuación de la forma general $ax + by + c = 0$, se puede expresar de la forma principal $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n es el coeficiente de posición. Gráficamente, la pendiente m se asocia con la inclinación de la recta respecto del eje X.

- Es posible representarla utilizando una **función afín** ($f: A \to B$), tal que $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Figura 2.9: Función afín, lección 5 pág 68.
Fuente:libro 1º medio Matemática, ed. Santillana

Posteriormente, tras desarrollar una serie de ejercicios enfocados en la representación gráfica, la determinación de puntos de intersección con los ejes coordenados, la identificación de pares ordenados pertenecientes a una recta y la formulación de ecuaciones que modelan situaciones dadas, se introduce un problema relacionado con sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Ver **figura 2.10**.



Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un dron sobrevuela la costa y registra dos barcos que se aproximan en línea recta. El sistema de observación ha establecido que sus trayectorias están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$4x - 3y = 2$

$5x + 2y = -9$

Las coordenadas x e y se refieren a la posición relativa respecto a un punto de referencia en el mar.

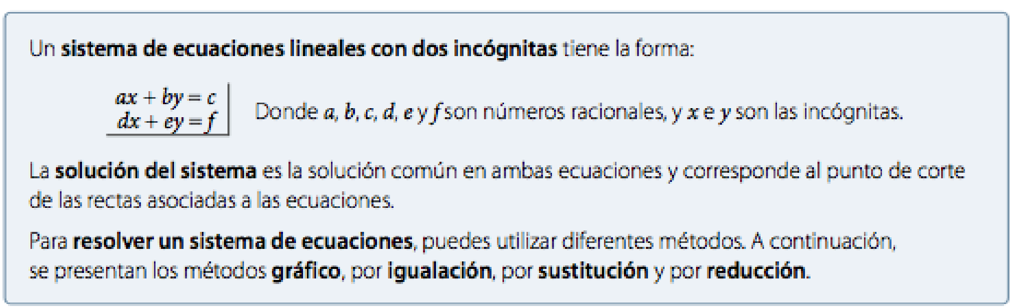
Con el fin de prevenir un choque, se necesita conocer el punto en común de las trayectorias.

- ¿Qué puntos del plano pertenecen a la trayectoria del Barco 1? ¿Y a la trayectoria del Barco 2? Identifica tres puntos en cada caso.
- ¿Cómo determinarías el punto en común de las trayectorias? Comenta con tu curso.

Recurso Web
Al ingresar al *link* *http://es.battleship-game.org/* puedes realizar un juego online de combate naval.

Figura 2.10: S.Ecuaciones, lección 5 pág 70.
Fuente: Libro 1º medio Matemática, ed. Santillana

En la sección final, se presenta la formalización y definición de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, estructurado de la siguiente manera: Ver **figura 2.11**.



Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right|$$

Donde a, b, c, d, e y f son números racionales, y x e y son las incógnitas.

La **solución del sistema** es la solución común en ambas ecuaciones y corresponde al punto de corte de las rectas asociadas a las ecuaciones.

Para **resolver un sistema de ecuaciones**, puedes utilizar diferentes métodos. A continuación, se presentan los métodos **gráfico**, por **igualación**, por **sustitución** y por **reducción**.

Figura 2.11: S.Ecuaciones, lección 5 pág 70
Fuente:Libro 1º medio Matemática, ed. Santillana

A continuación, el libro expone el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico, ilustrando las condiciones bajo las cuales un sistema puede no tener solución, tener una única solución o poseer soluciones infinitas, acompañando esta explicación con su correspondiente formalización. Ver **figura 2.12**.

En general, para analizar la existencia de la solución de un sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right|$, con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$, se puede considerar lo siguiente:

- Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, el sistema tiene una **única solución**.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema tiene **infinitas soluciones**.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema **no tiene solución**.

Figura 2.12: S.Ecuaciones, lección 5 pág 72.
Fuente:Libro 1º medio Matemática, Santillana

Finalmente, se presentan los procedimientos necesarios para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante los métodos de igualación, sustitución y reducción. La sección concluye con una serie de ejercicios y problemas contextualizados que completan la instrucción.

El último texto de referencia analizado es **Álgebra II**(2), de Ricardo Santander, publicado por la Editorial USACH. Este libro es de uso obligatorio para los estudiantes de las carreras de ingeniería y pedagogía que pertenecen a la Facultad de Ciencia, abarcando disciplinas como química, física y matemática. En su introducción, el texto presenta una motivación inicial basada en un problema de intersección de dos rectas, utilizando un enfoque técnico y algebraico para abordar su solución. Ver **figura 2.13**.

1. Motivación

Consideremos las rectas $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$, y $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x+1\}$ cuyos gráficos son los siguientes:

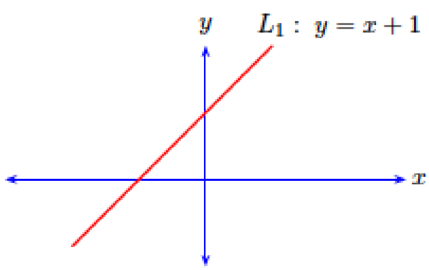


Figura 1: Gráfico de L_1

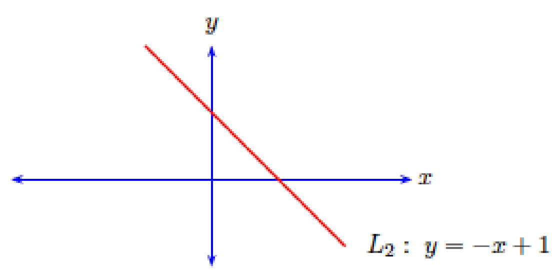


Figura 2: Gráfico de L_2

Juntando los gráficos de las rectas L_1 y L_2, obtenemos la nueva situación:

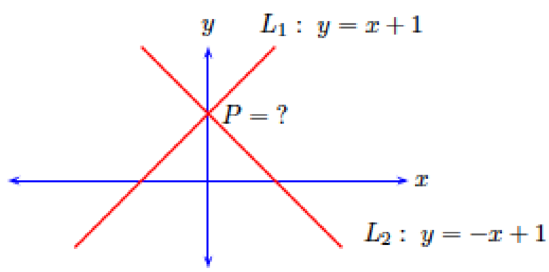


Figura 3: Gráfico de $L_1 \cap L_2$

Entonces la pregunta es:

¿Quién es el punto P, donde se "intersectan", ambas rectas.?

Para responder a esta pregunta podemos utilizar con seguridad varias estrategias, no obstante, antes de usar cualesquiera de ellas debemos aclarar y entender lo mejor posible el problema.

Figura 2.13: S.Ecuaciones.
Fuente: (2)

Posteriormente, se desarrolla una formalización teórica del concepto de sistemas de ecuaciones mediante el uso de matrices. En esta sección, se aborda la solución de sistemas de ecuaciones homogéneos. Ver **figura 2.14**.

2. Formalización

Definición 2.1. *Llamaremos Sistema Lineal de n-ecuaciones y m-incógnitas o de orden $(n \times m)$ a una expresión del tipo:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right| \tag{1}$$

Equivalentemente llamaremos notación matricial de (1) *a la ecuación matricial:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{2}$$

En fin, de ahora en adelante nos referiremos a un sistema lineal genérico poniendo

$$A \cdot X = B$$

donde A, X y B son como en (2).

En particular, si $B = (0)$ entonces llamamos al sistema, "Sistema Lineal Homogéneo". Es decir, este es de la forma:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & a_{12}z_2 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & 0 \\ a_{21}z_1 & + & a_{22}z_2 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & a_{n2}z_2 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Figura 2.14: Formalización S.Ecuaciones.
Fuente: (2)

Al final del capítulo, se introduce un algoritmo base junto con ejercicios propuestos y el análisis de sistemas lineales particulares, acompañados de sus respectivas soluciones. Asimismo, se dedica un espacio específico para el desarrollo de ejercicios adicionales y problemas contextualizados, que buscan reforzar la comprensión y aplicación de los conceptos estudiados.

2.0.8. Aspectos Históricos Epistemológicos

En la resolución de problemas, a lo largo de la historia, siempre se ha procurado determinar soluciones numéricas a los problemas planteados. La necesidad de resolver estos problemas se traduce en la búsqueda de soluciones a ecuaciones que representan las ideas matemáticas relacionadas con los fenómenos a estudiar. Aunque no es posible establecer un momento preciso en la historia de las matemáticas que marque su aparición, se acepta que el documento matemático más antiguo que ha perdurado hasta nuestros días es el papiro Rhind, el cual se conserva en el Museo Británico, anotándose también algunos fragmentos en el Museo de Brooklyn. Este texto es conocido como el Libro de Cálculo y fue elaborado por el sacerdote egipcio Ahmés alrededor del año 1650 a.C., siendo descubierto en Tebas en 1855 (COLETTE, Vol. I, pág. 40)(21). En este valioso manuscrito se abordan las ecuaciones de primer grado, donde la incógnita se representa mediante un "ibis", que simboliza la acción de escarbar en el suelo, posiblemente debido a su aplicación inicial en la agrimensura. El documento contiene un total de 85 problemas, redactados en escritura hierática, y fue concebido primordialmente como un manual práctico dirigido a aquellos que no poseían conocimientos avanzados. Según la declaración del propio Ahmés, este texto es una copia de uno más antiguo, datado entre 2000 y 1800 a.C., de cuyo contenido algunos fragmentos podrían proceder de épocas aún más remotas (Bell, 2021)(22).

En (Luzardo, D., Pena, A. J. (2006)(23) se menciona que Los babilonios poseían el conocimiento necesario para abordar problemas específicos que implicaban ecuaciones de primer y segundo grado, empleando técnicas como la completación de cuadrados o la sustitución. Además, también eran capaces de resolver ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, así como sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, tales como:

$$\begin{cases} x & \pm & y = a \\ x^2 & \pm & y^2 = b \end{cases}$$

Un ejemplo específico de una situación de este tipo ha perdurado hasta nuestros días en una de las renombradas *tablillas de Croquetta*, que pertenecen al último periodo sumerio, aproximadamente en el año 2100 a.C. El problema en cuestión es el siguiente:

Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cúal es el tamaño de cada campo?

Por otro lado, los matemáticos chinos en los siglos III y IV a.C. proseguían con la tradición babilónica, aportando así los primeros métodos del pensamiento lineal. Un ejemplo de ello se encuentra en el tratado "Nueve capítulos sobre el Arte Matemático", publicado durante la Dinastía Han, en el cual se presenta el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z = 39 \\ 2x & +3y & +z = 34 \\ x & +2y & +3z = 26 \end{cases}$$

De manera comparable a un procedimiento desarrollado para la identificación de respuestas, emerge la regla "fan-chen", la cual, en su esencia, se asemeja a la reconocida técnica de eliminación gaussiana que se utiliza en la actualidad.

Esta obra **Nueve capıtulos sobre el Arte Matematico** fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el añoo 152 a.C. y en el se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época (Ribnikov, K. (1987), pág. 31)(24). Es oportuno recordar que esta obra fue consultada por Carl Friederich

Gauss (1777-1855) en un estudio sobre la órbita del asteroide Pallas (25). Usando observaciones de Pallas, tomadas entre los años 1803 y 1809, Gauss obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas y da un método sistemático para resolver tales ecuaciones, hoy día conocido como eliminación gaussiana.

Posteriormente, se presentarían las contribuciones de los matemáticos islámicos y europeos, quienes continuaron desarrollando el pensamiento lineal. Un caso representativo es el de Leonardo de Pisa (1180-1250), más conocido como Fibonacci, en su obra Liber Quadratorum publicada en 1225, estudió un sistema de ecuaciones no lineal:

$$\begin{cases} x^2 & + & a = y^2 \\ x^2 & - & a = z^2 \end{cases}$$

Los matemáticos griegos, por su parte, no mostraron interés en los problemas lineales, a pesar de contar con un pensamiento lineal ampliamente reconocido en sus análisis geométricos de origen pitagórico y de influencias babilónicas (26). Sin embargo, en sus obras se pueden observar algunos intentos de análisis diofantino, particularmente en el examen de las magnitudes [(27),libro V] y en las propiedades aritméticas de los números enteros [(27), Libro VII]. Cabe recordar que la solución general de la ecuación de segundo grado se encuentra documentada en los Elementos de Euclides (27).

2.0.9. Algoritmo Page rank

El presente capítulo se ocupa del análisis teórico y matemático del algoritmo PageRank, una herramienta esencial en la clasificación de páginas web, concebida por los fundadores de Google, Larry Page y Sergey Brin. Este modelo ha transformado la forma en que los motores de búsqueda organizan y priorizan la información disponible en la web, fundamentándose en la teoría de grafos, los sistemas de ecuaciones lineales y los resultados fundamentales del álgebra lineal, tales como el teorema de Perron-Frobenius.

En términos fundamentales, PageRank atribuye a cada página web un valor numérico que indica su relevancia dentro de un grafo dirigido, donde los nodos representan páginas y las aristas dirigidas denotan hipervínculos. Este valor se establece de manera iterativa a partir de un sistema de ecuaciones lineales vinculado a la matriz de transición del grafo, ajustada para asegurar que cumpla con las condiciones de ser estocástica, irreducible y aperiódica. Dichas propiedades garantizan la existencia de un vector propio dominante, conforme al teorema de Perron-Frobenius, cuyo elemento predominante es el vector estacionario del modelo y determina las ponderaciones de relevancia deseadas.

El teorema de Perron-Frobenius asume una importancia fundamental en la comprensión y formalización del PageRank, dado que asegura que una matriz estocástica irreducible posee un único autovalor dominante (igual a uno) que se relaciona con un autovector positivo. Este hallazgo teórico fundamenta el sustento matemático que respalda la convergencia del algoritmo, posibilitando la interpretación del PageRank como una solución estable y única del sistema lineal que se deriva de la matriz de transición ajustada.

Además, el proceso de cálculo del PageRank puede ser analizado desde la óptica de una cadena de Markov (discusión que dentro de esta investigación no es considerada). No obstante, podemos mencionar que cada iteración denota una aplicación reiterativa de la matriz de transición al vector de estado, modelando el comportamiento de un "navegante aleatorio" que se desplaza entre páginas mediante hipervínculos con una probabilidad específica, o seleccionando de manera fortuita una nueva página con una probabilidad complementaria. Esta interpretación estocástica refuerza la relación entre el algoritmo PageRank y los sistemas de ecuaciones lineales, al mismo tiempo que subraya la importancia de las condiciones iniciales y las estrategias de normalización.

El presente apartado se centra en un análisis exhaustivo que examina cómo la teoría de sistemas lineales y el teorema de Perron-Frobenius fundamentan la solidez teórica del algoritmo PageRank. Para ello, se empleará una ilustración mediante modelos matriciales de dimensiones 2x2 y 3x3, permitiendo explorar de manera gradual y comprensible los conceptos subyacentes.

Asimismo, se examinarán las propiedades matemáticas de las matrices asociadas, junto con las condiciones necesarias para la aplicación rigurosa del teorema de Perron-Frobenius. Este análisis se complementará con un ejemplo detallado que se desarrollará a continuación, destacando su relevancia en la comprensión y aplicación práctica del modelo PageRank.

2.0.10. La World Wide Web

Internet no constituye simplemente una agrupación de textos independientes, sino que se presenta como un espacio virtual donde las páginas se referencian mutuamente. Para el análisis de esta estructura, dejaremos de lado el contenido de las páginas y nos centraremos únicamente en los enlaces que las conectan. El resultado de este enfoque es una estructura que podemos representar como un grafo.

Como ejemplo consideremos un sistema de tres páginas web conectadas mediante hipervínculos.

La estructura de enlaces se define como sigue:

- La página 1 tiene enlaces a las páginas 2 y 3.
- La página 2 tiene un único enlace a la página 1.
- La página 3 tiene enlaces a las páginas 1 y 2.

En la **figura 2.15** representamos esta información mediante un grafo.

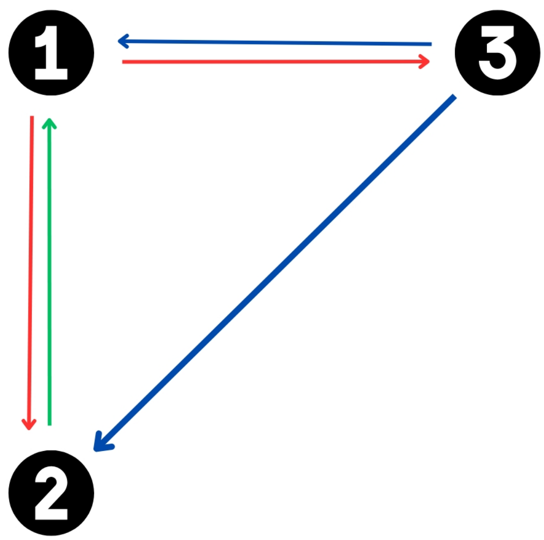


Figura 2.15: Ejemplo de enlaces o conexiones de tres páginas web.
Fuente: Elaboración propia

En este contexto, los vértices del grafo simbolizan las páginas web, mientras que las flechas indican los enlaces, lo que equivale a citas entre dichas páginas. Cada flecha se dirige desde la página que realiza el envío hacia la página que es citada.

A continuación se denotan las páginas $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ y podemos escribir $j \to i$ si la página P_j cita a la página P_i. En el recorrido del grafo observar que $3 \to 2$ pero no $2 \to 3$.

En el análisis de este grafo, se establece que la relación $j \to i$ representa una recomendación de la página P_j hacia la página P_i. Esto implica que la página P_i recibe un voto o una medida de relevancia proveniente de la página P_j, reforzando su importancia relativa dentro de la estructura de enlaces.

Nuestro primer acercamiento al modelo será lo que llamaremos **conteo ingenuo**. Este criterio considerará el supuesto que una página es importante si recibe muchos enlaces. Por lo tanto, la medida de importancia R de una página web se simbolizará con R_i y estará determinada por:

$$R_i = \sum_{j \to i} 1$$

Aquí, $\sum_{j \to i}$ representa la suma de los enlaces que apuntan a P_i y los sumandos tienen valoración 1, es decir, R_i es el número de votos o valoración de relevancia hacia la página P_i donde cada voto aporta el mismo valor 1.

En nuestro caso, los aportes son los siguientes:

- $R_1 = 1 + 1 = 2$
- $R_2 = 1 + 1$
- $R_3 = 1$

Donde R_1 recibe aportes de las páginas 2 y 3, R_2 recibe votos de las páginas 1 y 3 y finalmente R_3 solo recibe el aporte de la página 1.

El motivo de que este proceso se llame **conteo ingenuo** tiene sentido en el hecho que cada página web emite muchos enlaces y al distribuir su relevancia su *entrega*, será mucho menor al valor inicial 1. Por lo tanto si E_j corresponde al número de enlaces emitidos, podemos definir una medida más precisa para R_i como sigue:

$$R_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{E_j}$$

En sí, R_i cuenta el número de votos ponderados que llegan a la página P_i. En el ejemplo tenemos:

- $R_1 = 1 + \frac{1}{2}$
- $R_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
- $R_3 = \frac{1}{2}$

Aquí, R_1 recibe el aporte íntegro de la página 2 y $\frac{1}{2}$ de la página 3, R_2 recibe $\frac{1}{2}$ votos de las páginas 1 y 3 y finalmente R_3 solo recibe el aporte o voto de la página 1. A esta secuencia de conteo lo llamaremos **conteo ponderado**.

La formulación adecuada de lo anteriormente descrito consiste en conceptualizar los enlaces o votos como distribuciones, abordándolos dentro de un marco probabilístico. En este contexto, la relación $j \to i$ se define como proporcional a la valoración R_j asociada a la página receptora. Para una mejor comprensión de esta idea, el modelo que representa esta situación se presenta a continuación:

$$R_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{E_j} \cdot R_j$$

En nuestro caso, las ecuaciones asociadas a las páginas son:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot R_2 + \frac{1}{2} \cdot R_3 \\
\bigstar \quad R_2 &= \frac{1}{2} \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot R_3 \\
R_3 &= \frac{1}{2} \cdot R_1
\end{aligned}
$$

Para determinar la relevancia de las páginas, es fundamental resolver el sistema de ecuaciones asociado. Es importante destacar que dicho sistema es *homogéneo*, lo que significa que puede representarse de la siguiente manera:

$$
\left.
\begin{array}{rcrcr}
R_1 & - & R_2 & - & \frac{1}{2}R_3 = 0 \\
-\frac{1}{2}R_1 & + & R_2 & - & \frac{1}{2}R_3 = 0 \\
-\frac{1}{2}R_1 & & & + & R_3 = 0
\end{array}
\right\}
$$

o bien,

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Para abordar su resolución, expresaremos todos los términos en función de una variable común (R_3).
De la ecuación $R_3 = \frac{1}{2} \cdot R_1$, tenemos:

$$2 \cdot R_3 = R_1$$

Reemplazamos en la ecuación $R_2 = \frac{1}{2} \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot R_3$, donde se ebtiene:

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 2R_3 + \frac{1}{2}R_3$$

$$\Leftrightarrow R_2 = R_3 + \frac{1}{2}R_3$$

$$\Leftrightarrow R_2 = \frac{3}{2}R_3$$

Entonces, la solución $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ puede ser expresada como sigue

$$
\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R_3 \\ \frac{3}{2}R_3 \\ R_3 \end{pmatrix} = R_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Asumiendo que cada página tiene un orden de relevancia inicial igual a 1, es decir, $R_3 = 1$, la solución obtenida es:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el orden de relevancia de las páginas en orden creciente es:

$$R_1 > R_2 > R_3$$

La estructura de la solución de este ejercicio también puede representarse de manera matricial, considerando que cada enlace entre páginas, denotado como $i \to j$, toma el valor de 1 si y solo si la página P_i hace referencia a la página P_j. Bajo esta premisa, se establece la siguiente representación:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

M será llamada matríz de adyacencia, donde:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & i \not\to j \\ 1 & i \to j \end{cases}$$

Al analizar detenidamente la primera fila, correspondiente a las posiciones m_{11}, m_{12}, m_{13}, se observa que los valores asignados son 0, 1 y 1, respectivamente. Estos valores representan las conexiones o enlaces de la página P_1 hacia las páginas P_2 y P_3. Este patrón de relación se extiende de manera análoga a las demás filas de la matriz.

A continuación, para alcanzar los resultados esperados, se implementará una serie de pasos cuya fundamentación teórica será desarrollada en detalle en el **Apéndice B** de este documento. En esta sección, se presenta una descripción preliminar basada en los principios matemáticos subyacentes, con el objetivo de facilitar una comprensión más profunda de la conexión entre la estructura matricial y el teorema de Perron-Frobenius.

- Paso 1, calculamos la matríz traspuesta.

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto representa lo siguiente:

$$m^t_{ij} = \begin{cases} 0 & i \not\leftarrow j \\ 1 & i \leftarrow j \end{cases}$$

La primera fila de la matriz transpuesta presenta los valores $0, 1, 1$, los cuales representan los votos de relevancia que la página P_1 recibe de las páginas P_2 y P_3. De manera similar, la segunda fila contiene los valores $1, 0, 1$, que indican los votos recibidos por P_2 desde P_1 y P_3. Finalmente, la tercera fila, con valores $1, 0, 0$, refleja los votos de relevancia que P_3 obtiene de P_1 y P_2.

Al observar el resultado obtenido, se concluye que este corresponde al mismo valor alcanzado mediante el **conteo ingenuo** realizado en la ejecución del ejercicio anterior.

- Paso 2, Normalizamos la matriz traspuesta.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observar que la suma de los componentes de cada columna es igual a 1. Formalmente, esta propiedad caracteriza a N como una **matriz estocástica**.

En este contexto, N representa el **conteo ponderado** descrito previamente. En el conjunto de ecuaciones señaladas en ★, se establece:

- $R_1 = 1 \cdot R_2 + \frac{1}{2} \cdot R_3$
- $R_2 = \frac{1}{2} \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot R_3$
- $R_3 = \frac{1}{2} \cdot R_1$

En este sistema, la primera fila de N corresponde directamente a la relación expresada en la primera ecuación de ★, y así sucesivamente para las filas restantes.

La relación existente entre N y ★ se puede establecer de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

Para determinar el orden de relevancia, la teoría establece, a través del teorema de Perron-Frobenius, que si N es una matriz positiva, entonces posee un único valor propio $\lambda_{max} = 1$ dominante (positivo), el cual está asociado a un autovector $\overrightarrow{x}$ positivo.

De acuerdo a lo anterior, la matemática nos indica que si $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ es considerado un autovector, entonces:

$$N \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

siendo λ el valor propio asociado al autovector $\overrightarrow{x}$.

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{lcll} R_2 & + & \frac{1}{2}R_3 & = \lambda \cdot R_1 \\ \frac{1}{2}R_1 & + & \frac{1}{2}R_3 & = \lambda R_2 \\ \frac{1}{2}R_1 & & & = \lambda R_3 \end{array}\right\}$$

De aquí tenemos

$$R_1 + R_2 + R_3 = \lambda \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

Por lo tanto el único valor propio posible que valida lo anterior es $\lambda = 1$ y es nuestro valor buscado.

- Paso 3. Utilizando herramientas del álgebra lineal, procedemos a calcular los valores propios asociados a la matriz N. Para ello, es necesario resolver la siguiente ecuación característica:

$$det(N - \lambda \cdot I) = 0$$

Donde I es la matríz identidad.

$$\Leftrightarrow det(N - \lambda \cdot I) = |N - \lambda \cdot I|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \frac{3}{4} \cdot \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

- Paso 4, debemos considerar $\lambda_1 = 1$ (Por paso 2) y reemplazar en $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

  Entonces:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Paso 5, calculamos el vector $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de Perron-Frobenius y esto significa calcular:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Multiplicando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{llllll} -x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & - & x_3 & = 0 & & \end{array}\right\}$$

  Si observamos y reemplazamos los valores de x_1 por R_1 , x_2 por R_2 y x_3 por R_3 obtenemos el mismo sistema de ecuaciones del proceso anterior (★).

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Siguiendo el mismo procedimiento y con la ayuda del software matemático **matrix calculator**, reemplazamos los valores obtenidos de $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ obteniendo como vectores propios: $(**)$

$$v_2 = v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es importante destacar que, para determinar la relevancia de una página web, el teorema de Perron-Frobenius garantiza que el candidato óptimo está dado por el vector propio correspondiente al valor propio $\lambda = 1$. Este vector representa la máxima relevancia y, por lo tanto, identifica la página más significativa dentro del sistema.

Los resultados obtenidos, independientemente del enfoque seguido, conducen al mismo resultado. La justificación de por qué, en el desarrollo del ejercicio matricial, se realizaron una serie de pasos que derivaron en la obtención del vector de Perron-Frobenius será abordada en detalle, de manera técnica y rigurosa, en el **Apéndice B** de este documento.

Con el propósito de brindar mayor claridad al proceso, se presentará un esquema general que incluye matrices de adyacencia de dimensiones 2x2 y 3x3. Este enfoque permitirá ilustrar la complejidad inherente al cálculo de los valores propios y, en última instancia, a la determinación de los vectores propios.

2.0.11. El caso de una matríz de 2x2

Una matriz general no estocástica de 2×2 cuyos elementos son:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Donde a, b, c, d son números reales $\neq 0$.

Si cada columna de $\mathbf{M}$ suma 1, la matriz se convierte en una matríz estocástica M^E por columnas. Esto se puede lograr redefiniendo los elementos de la última fila como:

$$\mathbf{M^E} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$

De esta manera, se garantiza que:

$$a + (1-a) = 1, \quad b + (1-b) = 1.$$

Restamos $\lambda\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La nueva matriz es:

$$\mathbf{M^E} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{pmatrix}.$$

Luego, el det($\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$)=0, se calcula como sigue:

$$\text{det}(\mathbf{M^E} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El polinomio característico resultante es:

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a - b + 1) \cdot \lambda + (a - b) = 0$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = a - b$$

Si $\lambda_1 = 1$, el vector propio v_1 es el siguiente:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si $\lambda_2 = a - b$, el vector propio v_2 es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En el caso de una matriz de dimensiones 2x2, aplicada al análisis de enlaces entre páginas web, se descarta por completo la posibilidad de que una página se enlace a sí misma y que el valor de sus votos o conexiones sea un número negativo. Bajo estas restricciónes, las configuraciones posibles que se pueden considerar son las siguientes:

- Caso 1: Página 1 cite a la 2 y que la página 2 cite a 1.
- Caso 2: Página 1 cite a 2 y que 2 no cite a ninguna página.
- Caso 3: Página 1 no cite a ninguna página y página 2 cite a página 1.

De acuerdo a la primera posibilidad el valor que toma a es 0 y el valor de b es 1.

Los casos 2 y 3 carecen de una importancia sustancial, dado que, en estas configuraciones, si una página cita a otra, la página receptora de la citación se considera la más relevante. Por otro lado, en el caso 1, al sustituir los valores de a y b en v_1, se obtiene lo siguiente:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta conclusión es coherente con el resultado esperado, ya que, al citarse mutuamente, ambas páginas adquieren la misma relevancia.

2.0.12. El caso de una matríz de 3x3

Aquí se define una matriz general no estocástica de 3×3 cuyos elementos son:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & p & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Donde $a, b, c, d, p, f, g, h, i$ son números reales $\neq 0$.
Si cada columna de $\mathbf{M}$ suma 1, la matriz se convierte en una matriz estocástica M^E por columnas. Esto se puede lograr redefiniendo los elementos de la última fila como:

$$\mathbf{M^E} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & p & f \\ 1-a-d & 1-b-p & 1-c-f \end{pmatrix}.$$

De esta manera, se garantiza que:

$$a + d + (1 - a - d) = 1, \quad b + p + (1 - b - p) = 1, \quad c + f + (1 - c - f) = 1.$$

En nuestro caso de ejemplo descrito en **2.0.10**, nuestros valores iniciales son (Ω) :

$$a = 0; b = 1; c = \frac{1}{2}; d = \frac{1}{2}; p = 0; f = \frac{1}{2}$$

$$1 - a - d = \frac{1}{2}; 1 - b - p = 0; 1 - c - f = 0$$

Restamos $\lambda\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La nueva matriz es:

$$\mathbf{M^E} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & p-\lambda & f \\ 1-a-d & 1-b-p & 1-c-f-\lambda \end{pmatrix}.$$

Luego, el det($\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$) se calcula como sigue:

$$\det(\mathbf{M^E} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & p-\lambda & f \\ 1-a-d & 1-b-p & 1-c-f-\lambda \end{vmatrix}.$$

Para encontrar los valores propios, calculamos det($\mathbf{M^E} - \lambda\mathbf{I}$)=0. De acuerdo a lo anterior, el polinomio característico resultante es (Ψ) :

$$-\lambda^3 + (a-c-f+p+1)\cdot\lambda^2 - (a-c-bd+cd-af+bf-f+ap-cp+p)\cdot\lambda - (bd-cd+af-bf-ap+cp) =$$

$$-(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-(a-c-f+p)\cdot\lambda-(bd-cd+af-bf-ap+cp)) =$$
$$-(\lambda-1)\cdot\left(\lambda-\frac{a-c-f+p-(a^2+c^2+2ac+4bd-4cd+f^2+2af-4bf+2cf+p^2-2ap+2cp-2fp)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)\cdot$$
$$\left(\lambda-\frac{a-c-f+p+(a^2+c^2+2ac+4bd-4cd+f^2+2af-4bf+2cf+p^2-2ap+2cp-2fp)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)=0$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \frac{a-c-f+p-(a^2+c^2+2ac+4bd-4cd+f^2+2af-4bf+2cf+p^2-2ap+2cp-2fp)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$\lambda_3 = \frac{a-c-f+p+(a^2+c^2+2ac+4bd-4cd+f^2+2af-4bf+2cf+p^2-2ap+2cp-2fp)^{\frac{1}{2}}}{2}$

Si reemplazamos los valores de (Ω) en λ_2 y λ_3, tenemos

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}; \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

Ambos resultados son coincidentes con lo obtenido en el ejemplo propuesto de la figura **2.15**.

A modo general, dichos valores propios (λ) no son otra cosa que las raíces del polinomio cúbico (Ψ).
Uno de los valores propios será $\lambda_1 = 1$, los otros estarán determinados por lo siguiente:
Si

$$\Delta = a^2 - 2ac - 2ap + 2af + 4bd - 4bf + c^2 - 4cd + 2cp + 2cf + p^2 - 2pf + f^2.$$

Los otros dos valores propios son:

$$\lambda_2 = \frac{a-c+p-f}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{a-c+p-f}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

Si $\lambda_1 = 1$, el vector propio v_1 es el siguiente:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{c+bf-cp}{-1+a+bd+p-ap} \\ -\frac{cd+f-af}{-1+a+bd+p-ap} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nuevamente si reemplazamos los valores (Ω), el vector propio v_1 es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

El cuál, coincide con el valor del vector propio descrito en el ejemplo propuesto de la figura **2.15**.

2.0.12.1. Condiciones para $\lambda_2 > 0$

Para que $\lambda_2 > 0$, se requieren las siguientes condiciones:

1. $a + p > c + f$,
2. $a - c + p - f > \sqrt{\Delta}$,
3. $\Delta \geq 0$ (para garantizar que la raíz cuadrada sea real).

Si estas condiciones se cumplen, el valor propio λ_2 será positivo. De lo contrario puede ser negativo o tener una solución no real. En base a lo anterior, el vector propio v_2 es el siguiente:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{ac-c^2+2bf-cf-cp-c\cdot\sqrt{\Delta}}{ac-c^2+2cd-af+2bf-2cf-f^2-cp+fp-c\sqrt{\Delta}-f\sqrt{\Delta}} \\ -\frac{4cd-2af-2cf-2f^2+2fp-2f\sqrt{\Delta}}{2ac-2c^2+4cd-2af+4bf-4cf-2f^2-2cp+2fp-2c\cdot\sqrt{\Delta}-2f\sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.0.12.2. Condiciones para $\lambda_3 > 0$

Para que $\lambda_3 > 0$, se requieren las siguientes condiciones:

1. $c + f > a - p$
2. $\sqrt{\Delta} > c + f - a - p$
3. $\Delta \geq 0$ (para garantizar que la raíz cuadrada sea real).

Si estas condiciones se cumplen, el valor propio λ_3 será positivo. De lo contrario puede ser negativo o tener una solución no real. En base a lo anterior, el vector propio v_3 es el siguiente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{ac-c^2+2bf-cf-cp+c\cdot\sqrt{\Delta}}{ac-c^2+2cd-af+2bf-2cf-f^2-cp+fp+c\sqrt{\Delta}+f\sqrt{\Delta}} \\ -\frac{4cd-2af-2cf-2f^2+2fp+2f\sqrt{\Delta}}{2ac-2c^2+4cd-2af+4bf-4cf-2f^2-2cp+2fp+2c\cdot\sqrt{\Delta}+2f\sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si reemplazamos los valores de (Ω) en v_2 y v_3 obtenemos:

$$v_2 = v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ambos valores coinciden con los resultados obtenidos en $(**)$ del ejemplo propuesto de la figura **2.15** .

Capítulo 3: Marco Teórico

3.1. Marco Teórico

3.1.1. La modelación como estrategia de enseñanza

Los antecedentes históricos del concepto de modelación matemática se remontan a las grandes civilizaciones de la antigüedad, como los antiguos egipcios, babilonios y griegos, que aplicaron hábilmente las matemáticas para abordar una variedad de desafíos prácticos en la construcción, el comercio, la astronomía y la navegación. Estas culturas tempranas utilizaron métodos y conceptos matemáticos que formaron la base de los desarrollos posteriores. Durante la revolución científica del siglo XVII, la modelación matemática se avanzó y se perfeccionó aún más, convirtiendo las matemáticas en una parte esencial de las ciencias naturales. Esta integración, fue crucial para el progreso y los descubrimientos científicos. De este modo, allanó el camino para el desarrollo de modelos matemáticos avanzados que ahora se utilizan ampliamente en diversos campos, como la investigación científica, la ingeniería, la medicina y el análisis económico, destacando el papel principal de las matemáticas en la solución de los problemas complejos que enfrenta la sociedad moderna (Schøning, 2021).

Al examinar las diversas definiciones de la **modelación matemática**, se pueden identificar distintas perspectivas que enriquecen nuestra comprensión del concepto. Según Bassanezi (2002), la modelación matemática se entiende como el arte de transformar problemas provenientes de la realidad en problemas matemáticos que puedan ser resueltos, interpretando sus soluciones en un lenguaje accesible y comprensible para el contexto real. Por otro lado, Blomhoj (2004) sostiene que la **modelación** supone una comprensión profunda de las matemáticas involucradas, considerándola como una práctica educativa que establece una estrecha conexión entre el mundo real y las matemáticas, situando a estas últimas en el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje. En un enfoque más dinámico, Biembengut et al. (2004) definen la modelación como un proceso que se utiliza para la creación y validación de modelos matemáticos. Schmidt (2010), por su parte, describe la modelación matemática como el uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Finalmente, Blum y Borromeo (2009) entienden la modelación matemática como un proceso centrado en situaciones o fenómenos reales, que facilita el traslado bidireccional del mundo real a las matemáticas.

En el presente trabajo, se adoptará la definición de Morten Blomhoj (2004) sobre la **modelación matemática** , debido a su énfasis en la comprensión de las matemáticas involucradas en el proceso y su estrecha relación con el mundo real. Esta perspectiva resulta fundamental para guiar el enfoque metodológico del estudio.

3.1.2. Modelación Matemática en el Currículum Chileno

La modelación matemática tiene un papel destacado en el currículo educativo chileno, considerándose una competencia esencial para vincular el conocimiento matemático con situaciones del mundo real. Esta competencia, denominada "modelar", se presenta en el currículo como un nexo entre la comprensión abstracta de las matemáticas y su aplicación en contextos prácticos (MINEDUC, 2016b). La modelación facilita a los estudiantes la construcción de modelos algebraicos, geométricos o funcionales que representan fenómenos reales, proporcionando relevancia a los conceptos matemáticos y potenciando la alfabetización matemática.

De acuerdo con el currículo chileno, la modelación se describe como "la creación de un modelo físico o abstracto que capture ciertos aspectos de una realidad con el propósito de estudiarla, modificarla y/o evaluar su comportamiento" (MINEDUC, 2016b, p. 108). Este proceso abarca la habilidad de representar datos de manera apropiada, elegir métodos matemáticos y utilizar herramientas adecuadas para la resolución de problemas. Así, los estudiantes fomentan una comprensión contextualizada de las matemáticas y su aplicabilidad.

El currículo resalta, además, la relevancia de que los estudiantes descubran significados en las matemáticas, tanto en contextos abstractos como en su aplicación en la vida diaria. Este enfoque se encuentra en consonancia con los principios vigotskianos, que sostienen que el aprendizaje se produce a través de la interacción entre el conocimiento matemático y la realidad sociocultural del estudiante (MINEDUC, 2016b).

La actividad de modelar se considera un proceso en el que el estudiante atraviesa diversas etapas para el desarrollo de la competencia de modelado. El currículo detalla tales etapas de la siguiente manera (MINEDUC, 2016b):

- Expresar acciones o situaciones con lenguaje matemático.
- Aplicar, seleccionar y evaluar modelos que involucren operatoria.
- Identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático.
- Aplicar, seleccionar y evaluar modelos que involucren patrones y regularidades.
- Traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa.

Asimismo, se propone una perspectiva cognitiva en relación al significado de la acción matemática cuando un estudiante lleva a cabo un proceso de modelación, tal como se ilustra en la **figura 3.1**

Figura 3.1: Pensamiento y acción matemática cuando una tarea de modelación desafía al estudiante en un contexto del mundo real. Fuente: MINEDUC, 2016b

El currículo define el modelamiento matemático como una forma de resolución de problemas, subrayando que su objetivo es que los estudiantes analicen, razonen y comuniquen conceptos matemáticos; implica el planteamiento, la resolución y la interpretación efectiva en contextos cotidianos. Asimismo, se especifican cinco etapas que este enfoque de resolución de problemas requiere cuando un estudiante se enfrenta a un desafío:

- 1. Se comienza con una problemática contextualizada en la realidad.
- 2. Se estructura conforme a principios matemáticos que identifican las matemáticas pertinentes.
- 3. De manera progresiva, la realidad se va disminuyendo a través de procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Este proceso pone de manifiesto los aspectos matemáticos de la situación cotidiana y convierte el problema real en un problema de carácter matemático.
- 4. Se resuelve el problema matemático
- 5. Se otorga significado a la solución matemática en relación con la situación real, al tiempo que se reconocen las limitaciones inherentes a dicha solución.

En síntesis:

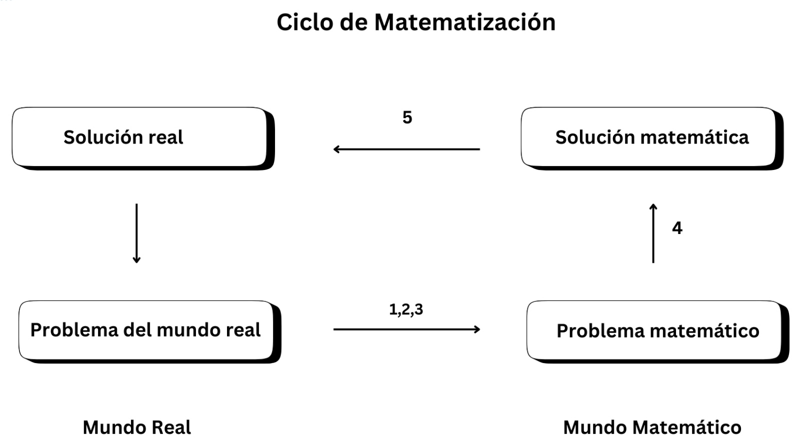


Figura 3.2: Caracterización de las 5 etapas del modelamiento matemático según el currículum chileno. Fuente:(MINEDUC, 2016b, p.15)

3.1.3. El proceso de modelación matemática

Para abordar la modelación matemática, es imprescindible seguir un proceso que permita comprender una realidad específica y, a través de diversas etapas, construir un sistema matemático que la represente de manera adecuada. Este proceso, conocido como **proceso de modelación matemática**, será el marco referencial para el desarrollo de este trabajo. En particular, se utilizará el modelo propuesto por Blomhoj y Højgaard-Jensen (2003), que se detalla en la **figura 3.3**.

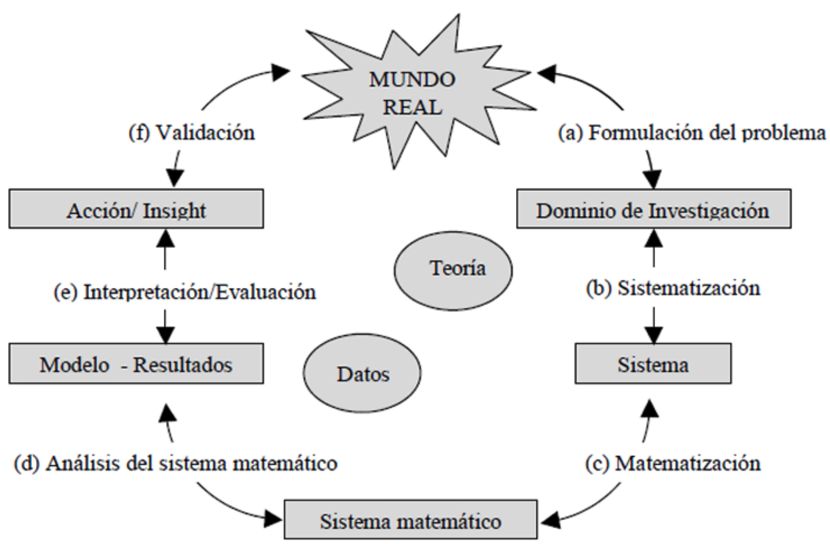


Figura 3.3: Proceso de Modelación Matemática propuesto por Blomhoj et al. (2003)

3.2. Relación entre la definición de modelación MINEDUC y proceso de modelación de Blomjhø y Højgaard-Jensen

La modelación matemática es una herramienta esencial en la enseñanza de las matemáticas, ya que permite vincular conceptos abstractos con situaciones del mundo real. En el contexto chileno, el Ministerio de Educación (MINEDUC) ha definido un esquema específico para abordar la modelación en el currículo escolar. Por otro lado, el modelo propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen (2003) presenta un enfoque estructurado basado en fases claramente delimitadas. Las similitudes y diferencias desde una perspectiva técnica y didáctica son las siguientes:

3.2.1. Similitudes entre ambos esquemas

Ambos modelos comparten ciertos principios fundamentales:

- **Relación con el mundo real**: Tanto el esquema del MINEDUC como el de Blomhøj y Højgaard-Jensen enfatizan la importancia de partir de problemas contextualizados en la realidad.
- **Proceso iterativo**: Ambos modelos consideran la modelación como un proceso cíclico en el que la validación y reformulación de los modelos juegan un papel crucial.
- **Uso de representaciones múltiples**: Se destaca la traducción entre distintos registros semióticos, como el lenguaje cotidiano, simbólico y gráfico.
- **Interpretación de resultados**: En ambos casos, la modelación no concluye con la obtención de una solución matemática, sino que esta debe ser interpretada en términos del problema original.

3.2.2. Diferencias entre ambos enfoques

A pesar de estas similitudes, existen diferencias clave en la estructuración de cada modelo.

- En relación a las **fases del proceso**, el currículo chileno plantea cinco etapas generales:
  1. Identificación de un problema contextualizado.
  2. Traducción del problema a un modelo matemático.
  3. Aplicación de procedimientos matemáticos para resolverlo.
  4. Interpretación de la solución en términos del problema real.
  5. Evaluación y validación de la solución
- Por otro lado, el modelo de Blomhøj y Højgaard-Jensen es más detallado, incluyendo **fases**, tales como:
  1. Formulación del problema (FP).
  2. Sistematización (SM).
  3. Matematización (MT).
  4. Análisis del sistema matemático (ASM).
  5. Interpretación y evaluación (IE).
  6. Validación (VL).

- Nivel de formalización: El modelo de Blomhøj y Højgaard-Jensen enfatiza un proceso más riguroso de matematización, incluyendo un análisis estructurado del sistema matemático y su validación dentro del contexto del problema original. En contraste, el esquema del MINEDUC está diseñado con un enfoque más didáctico y accesible para estudiantes de educación básica y media.
- Flexibilidad en la aplicación: El modelo del MINEDUC está orientado hacia la enseñanza escolar y se adapta al currículo nacional, mientras que el enfoque de Blomhøj y Højgaard-Jensen está pensado para contextos educativos más avanzados, como la formación de profesores o la educación superior.

Capítulo 4: Metodología

El presente trabajo de investigación es cualitativo exploratorio, al estar centrado en el diseño y validación de una situación de aprendizaje en “sistemas de ecuaciones”.

Su validación es local al ser experimentada en un grupo determinado de estudiantes en formación inicial de pedagogía en matemática, los cuales son los sujetos de estudio y la población para la que cobra sentido esta investigación.

El proceso de recolección de datos se realiza mediante el análisis de las producciones de los estudiantes. Con la intención de establecer la validación del diseño para ver el grado de completitud de conversiones y tratamientos en el marco analítico deductivo de Blomjhø y Højgaard-Jensen y se establece como metodología de investigación **la Ingeniería Didáctica**, que vigilará el uso del registro geométrico y algebraico en la construcción del concepto de “sistemas de ecuaciones”. Una característica crucial de esta metodología permite la validación interna de un diseño.

Es un enfoque metodológico desarrollado en el marco de la Didáctica de las Matemáticas, especialmente en la tradición francesa, que tiene como propósito el diseño, experimentación y análisis de situaciones de enseñanza con un fuerte respaldo teórico y empírico (Artigue, 1996) (28). Se fundamenta en la idea de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no pueden entenderse de manera aislada, sino en función de las interacciones entre los estudiantes, los docentes y los objetos matemáticos dentro de un contexto didáctico específico (Brousseau, 1997) (29).

La ingeniería didáctica sigue una secuencia de cuatro fases bien definidas (Artigue, 2009) (30):

- **Análisis y diseño a priori**: Se establecen los objetivos de aprendizaje y se diseña un conjunto de situaciones didácticas basadas en hipótesis teóricas sobre el conocimiento y su adquisición.
- **Experimentación en el aula**: Se implementa el diseño en un contexto real de enseñanza, observando las interacciones entre los estudiantes y los objetos matemáticos.
- **Análisis a posteriori**: Se estudian los resultados de la experimentación, contrastando las hipótesis iniciales con los datos empíricos obtenidos.
- **Validación y reajuste**: Se reformulan y optimizan las propuestas didácticas en función de los análisis realizados.

En este sentido, la Ingeniería Didáctica representa un enfoque cíclico e iterativo, donde el conocimiento didáctico se construye progresivamente a partir de la experimentación controlada y la teorización sobre la enseñanza y el aprendizaje. Su valor radica en la capacidad de proporcionar herramientas metodológicas para el diseño de secuencias didácticas fundamentadas, lo que permite evaluar y mejorar continuamente las prácticas educativas en matemáticas (Godino et al., 2014) (31).

4.0.1. Descripción del estudio

El diseño de la secuencia didáctica se fundamentó en el marco teórico propuesto por Hernández et al. (2014), como referencia principal para cumplir con el primer objetivo específico del proyecto: la elaboración de una secuencia didáctica claramente estructurada. Para ello, se diseñaron tres clases que aplican de manera efectiva la estrategia de modelación. En cuanto al segundo objetivo específico, relacionado con la implementación de una de estas clases, se adoptaron rigurosamente las etapas descritas por Isoda y Olfos (2009) (32), asegurando una aplicación precisa y cuidadosa de cada fase del proceso.

4.0.2. Etapas del diseño del estudio

El diseño del presente estudio se basó en las cuatro etapas de la investigación-acción propuestas por Hernández et al. (2014). Ver **tabla 4.1**.

Etapas	**Acciones**
1. Problemática y Diagnóstico	Se llevó a cabo la identificación y formulación de una problema relacionado con la carencia de ejercicios de modelación que utilicen sistemas de ecuaciones en los textos de estudio del curso de álgebra lineal destinado a estudiantes formándose en la carrera de pedagogía en matemáticas de la universidad de Santiago de Chile. Esta situación conllevó a la realización de una revisión curricular y de los textos correspondientes al nivel, además de la definición del objeto matemático que se encuentra en cuestión.
2. Formulación de un plan	Se elaboró una secuencia didáctica compuesta por tres sesiones con el propósito de abordar la problemática planteada, fundamentada en la metodología de la ingeniería didáctica. Esta secuencia se centra en una actividad que emplea la estrategia de modelación junto a los estudiantes, titulada ¿Qué página web es más relevante? Los planes de clase fueron concebidos en concordancia con el proceso de modelación matemática de Blomjøh y Højgaard-Jensen, considerado como el marco teórico para el presente estudio.
3. Implementación	Se realizaron tres clases o intervenciones del plan elaborado para la secuencia con estudiantes de segundo año que cursan el primer semestre de la asignatura **didácticas de las matemáticas**, correspondiente a la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. Se estableció contacto con la profesora a cargo de la asignatura,Daniela Soto, para posteriormente enviar una carta de invitación a los estudiantes con el fin de convocarlos a participar en el proyecto de tesis de magíster.
4. Reflexión	Posterior a cada implementación, se llevó a cabo una reflexión sobre la estructura, formato y preguntas a considerar en la nueva sesión. Esto permitió generar un plan de clase para la segunda intervención y mejoras para la tercera intervención.

Tabla 4.1: Etapas del diseño del estudio

4.0.3. Contexto y sujetos de estudio

Para llevar a cabo la implementación del primer plan de clase de la secuencia didáctica diseñada, se realizaron tres intervenciones. En la **tabla 4.2** se detalla el contexto en el que se desarrolló cada sesión, así como los participantes que actuaron como sujetos informantes.

Sesiones	Descripción del contexto y sujetos de estudio
Sesión 1	Realizada en la Universidad de Santiago de Chile; los sujetos informantes fueron 12 estudiantes del curso **didáctica de las matemáticas** del segundo año del primer semestre de carrera de pedagogía en matemática y computación de la Universidad de Santiago de Chile , quienes participaron de la clase con una duración de 90 minutos.
Sesión 2	Fue realizada en los laboratorios de computación de la Universidad de Santiago de Chile, el grupo de estudio fue el mismo que en la primera sesión. La duración de la actividad fue de 90 minutos
Sesión 3	Realizada de forma telemática y consideró el mismo grupo de estudio. La sesión tuvo una duración de 90 minutos

Tabla 4.2: Contexto y sujetos de estudio

Los estudiantes se organizaron en 4 grupos conformados cada uno por tres integrantes para el desarrollo de la actividad de clase implementada. Para el análisis, se tomaron en cuenta únicamente las producciones entregadas al término de las intervenciones que cumplieran con los criterios de orden y legibilidad, excluyéndose aquellas que no reflejaron un trabajo riguroso y comprometido con la actividad propuesta. La **tabla 4.3** detalla la clasificación de los grupos en función del orden de participación en las intervenciones realizadas en el aula.

Intervenciones	Grupos
Sesión 1	G2,G1,G3,G4
Sesión 2	G1,G2,G3,G4
Sesión 3	G2,G1,G4,G3

Tabla 4.3: Clasificación de grupos por orden de participación

4.0.4. Técnicas de recopilación de datos

Para el desarrollo de este estudio, se emplearon dos técnicas de recolección de datos, las cuales fueron aplicadas a lo largo de las tres intervenciones mencionadas previamente. Estas técnicas permitieron obtener información valiosa que contribuyó al análisis y evaluación de la secuencia didáctica propuesta. A continuación, la **tabla 4.4** presenta una descripción detallada de cada una de las técnicas utilizadas, especificando sus características, el propósito de su implementación y la forma en que se integraron al proceso de investigación. De este modo, se garantiza que la recolección de datos se llevó a cabo de manera sistemática y coherente, asegurando la validez y fiabilidad de los resultados obtenidos en el estudio.

Técnicas	**Descripción**
Registro Escrito	Actividad: ¿Cuál es la página web de mayor relevancia? (Partes I y II) y actividad: ¿Quién es el culpable?, que constituyeron la base esencial para la elaboración y desarrollo del plan de clase que se implementó. Estas actividades se llevaron a cabo de manera colaborativa por los estudiantes, quienes registraron sus respuestas y procedimientos detallados en la hoja de registro proporcionada a cada grupo, lo que permitió un análisis más profundo y formativo del proceso de aprendizaje.
Regístro audiovisual	Grabación en formato de video de la primera y segunda intervención en la universidad, las cuales fueron editadas posteriormente para observar los momentos más significativos de cada sesión.

Tabla 4.4: Técnicas de recopilación de datos

4.0.5. Categorías de análisis

Se realizó la implementación del proceso de modelación matemática sugerido por Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008). El propósito de esta integración fue identificar las acciones y procesos correspondientes a los subprocesos de matematización dentro del contexto del proceso de modelación.

La **tabla 4.5** presenta las categorías de análisis, que se entienden como las fases del proceso de modelación matemática, observadas en las producciones escritas de los participantes, acompañadas de los códigos correspondientes para su identificación.

Categorías	**Descriptores**
Formulación del problema (FP)	Elaborar comentarios respecto a la problemática presentada, elaboración de un plenario consultando las observaciones de la situación de estudio.
Sistematización (SM)	Elaborar una hipótesis en relación con la situación problemática. Representar, a través de un gráfo o matricialmente, lás páginas web y sus contribuciones que reciben de las páginas web que enlazan.
Matemátización (MT)	Identificar relaciones que pueden ser expresadas mediante modelos matemáticos a partir de la situación planteada.
Análisis del sistema matemático (ASM)	Identificar las variables que intervienen en la situación problemática, así como la naturaleza de la relación que existe entre ellas.
Interpretación y evaluación (IE)	Interpretar el modelo desarrollado. Realizar una evaluación empleando valores conocidos proporcionados en el marco del problema.
Validación (VL)	Proyectar el problema tomando otros enlaces o conexiones de páginas web. Realizar una representación gráfica (grafo)

Tabla 4.5: Fases del proceso de modelización matemática

4.0.6. Aspectos generales de la secuencia didáctica

Las clases que conforman la secuencia tienen objetivos específicos que están interrelacionados, cuyos aspectos generales se detallan en la **tabla 4.6**.

Clases	Objetivo	Actividades	Características
Clase 1	Utilizar el método de modelación matemática para determinar la relevancia de un conjunto de páginas web a partir de sus conexiones, desarrollando un grafo y una fórmula que represente las contribuciones entre páginas.	¿Cuál página web es más relevante?. Parte I	Sistemas de ecuaciones
Clase 2	Determinar el orden de relevancia de un conjunto de páginas web mediante modelación matemática, utilizando matrices normalizadas, valores y vectores propios.	¿Cuál página web es más relevante?. Parte II	Matrices, sistemas de ecuaciones
Clase 3	Determinar al culpable en un caso de acusaciones cruzadas mediante la representación de relaciones en un grafo o matriz, utilizando el análisis de relevancia para justificar las conclusiones obtenidas.	Los más buscados	Sistemas de ecuaciones, matrices

Tabla 4.6: Ejemplo de tabla con cuatro columnas alineadas y presentables.

En cada plan de clase, se establece una distinción entre el objetivo de la clase y la presentación de este a los estudiantes, permitiendo que sean ellos quienes lo descubran a medida que avanzan en las distintas etapas del proceso de modelación matemática de Blomjøh y Højgaard-Jensen. Ver tabla **4.7**

Clases	**Objetivo de la clase**	**Objetivo declarado a los estudiantes**
Clase 1	Aplicar conceptos de redes y grafos para analizar y modelar la relevancia de páginas web, utilizando criterios matemáticos de sistemas de ecuaciones	Utilizar el método de modelación matemática para determinar la relevancia de un conjunto de páginas web a partir de sus conexiones, desarrollando un grafo y una fórmula que represente las contribuciones entre páginas.
Clase 2	Representar, analizar y modelar relaciones entre páginas web utilizando matrices y vectores propios para determinar relevancia	Determinar el orden de relevancia de un conjunto de páginas web mediante modelación matemática, utilizando matrices normalizadas, valores y vectores propios.
Clase 3	Modelar una red de relaciones a partir de declaraciones para determinar al culpable utilizando herramientas matemáticas como grafos o matrices	Determinar al culpable en un caso de acusaciones cruzadas mediante la representación de relaciones en un grafo o matriz, utilizando el análisis de relevancia para justificar las conclusiones obtenidas.

Tabla 4.7: Distinción entre objetivo de la clase y objetivo declarado a los estudiantes

En respuesta a la necesidad de desarrollar una competencia esencial como lo es la capacidad de modelar (Blum y Borromeo-Ferri, 2009), se propone el diseño de esta secuencia didáctica, con el objetivo de integrar la modelación como estrategia pedagógica de manera habitual en el aula, tanto desde una perspectiva didáctica como curricular. En el ámbito didáctico, las clases que componen la propuesta se estructuran de tal forma que permiten a los estudiantes recorrer las fases del proceso de modelación matemática, conforme al modelo didáctico-cognitivo establecido para este estudio (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), con el fin de generar y validar un modelo para una situación dada, presentada como un desafío a los estudiantes. De igual manera, el nivel de complejidad de las sesiones es progresivo, permitiendo que los alumnos, basándose en sus experiencias previas y conocimientos adquiridos, formulen estrategias para abordar la actividad central de cada sesión.

4.0.7. Técnicas de análisis

Para el análisis de los resultados, se tomará en cuenta el registro más completo de cada grupo de sujetos informantes, obtenido durante las implementaciones. Estos registros serán tabulados clase a clase y clasificados según las etapas alcanzadas en el proceso de modelización matemática. Aunque todos los participantes desarrollan la actividad, se seleccionará aquel trabajo que el grupo considere más representativo para ser registrado en en una tabla como la indicada a **4.8**.

Grupos	**Categorías**					
*	FP	SM	MT	ASM	IE	VL
G1						
G2						
G3						
G4						

Tabla 4.8: Grupos y Categorías de análisis

Capítulo 5: Intervención del proyecto

La presente intervención didáctica se desarrolló en el contexto de la enseñanza del álgebra lineal en la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. Su propósito fue abordar la ausencia de ejercicios de modelación que empleen sistemas de ecuaciones en los textos de estudio de la asignatura. Para ello, se diseñó e implementó una secuencia didáctica basada en la modelación matemática como estrategia de enseñanza.

En una primera etapa, se identificó y formuló el problema a partir de la revisión curricular y del análisis de los materiales de estudio utilizados en la formación inicial docente. Este proceso permitió reconocer la carencia de actividades que promuevan el uso de sistemas de ecuaciones en situaciones de modelación, lo que evidenció la necesidad de diseñar una propuesta didáctica que incorporara este enfoque. Además, se definió con precisión el objeto matemático en cuestión, estableciendo un marco teórico que sustentara el desarrollo de la intervención.

Como respuesta a esta problemática, se diseñó una secuencia didáctica conformada por tres sesiones, fundamentadas en la metodología de la ingeniería didáctica. La actividad central de la propuesta, titulada ¿Qué página web es más relevante?, busca introducir a los estudiantes en la modelación matemática mediante la resolución de un problema contextualizado con sistemas de ecuaciones. Los planes de clase fueron elaborados siguiendo el proceso de modelación matemática de Blomjøh y Højgaard-Jensen, considerado el marco teórico adoptado en la investigación.

La secuencia didáctica fue implementada en tres instancias con la participación de 12 estudiantes de segundo año (primer semestre) de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile, quienes cursaban la asignatura **didáctica de las matemáticas**. Para la selección de los participantes, se estableció contacto con la profesora a cargo del curso, Daniela Soto(Jefa de la carrera de pedagogía en matemática y computación, USACH), y se envió una carta de invitación a los estudiantes, quienes aceptaron voluntariamente formar parte del estudio. Los participantes poseían conocimientos previos sobre sistemas de ecuaciones adquiridos en su formación escolar, según lo registrado en el barrido curricular de enseñanza media **(tablas 2.2 y 2.3)**, así como nociones básicas de álgebra lineal universitaria.

Luego de cada implementación, se llevó a cabo un proceso de reflexión orientado a evaluar la estructura de la actividad, el formato de la secuencia y la pertinencia de las preguntas formuladas. Estos análisis permitieron realizar ajustes y mejoras en los planes de clase, optimizando la propuesta en función de las observaciones obtenidas. Así, la segunda y tercera intervención incorporaron modificaciones que favorecieron una mejor comprensión de los conceptos y una mayor efectividad en el desarrollo de la actividad de modelación.

A continuación, se describen en detalle las tres sesiones de la secuencia didáctica, incluyendo sus respectivas planificaciones, el desarrollo de las actividades y las interacciones esperadas con los estudiantes. Además, se diseñaron y analizaron las preguntas formuladas tanto por el docente como por los alumnos, con el objetivo de orientar la construcción del conocimiento y promover la reflexión en torno al proceso de modelación matemática. Estas preguntas y respuestas fueron registradas y examinadas para evaluar su impacto en el aprendizaje y la comprensión de los sistemas de ecuaciones dentro del contexto de modelación.

5.1. Planificación clase 1

5.1.1. Indicaciones de la clase. 5 minutos

Categoría	**Descripción**
Objetivo de Aprendizaje (OA)	Aplicar conceptos de redes y grafos para analizar y modelar la relevancia de páginas web, utilizando criterios matemáticos de sistemas de ecuaciones.
Habilidades	• Interpretar situaciones reales y representarlas matemáticamente. • Analizar y argumentar decisiones en función de criterios matemáticos. • Resolver problemas utilizando modelos matemáticos.
Actitudes	• Mostrar disposición a justificar los procedimientos utilizados en el análisis matemático. • Valorar la utilidad de la modelación matemática en la toma de decisiones informadas.
Conocimientos Previos	• Representación de datos mediante gráficos y tablas. • Operaciones básicas con números racionales. • Resolución de sistemas de ecuaciones.
Objetivo de la clase	Utilizar el proceso de modelación matemática de Blomjøh y Højgaard-Jensen para determinar la relevancia de un conjunto de páginas web a partir de sus conexiones, desarrollando un grafo y una fórmula que represente las contribuciones entre páginas.

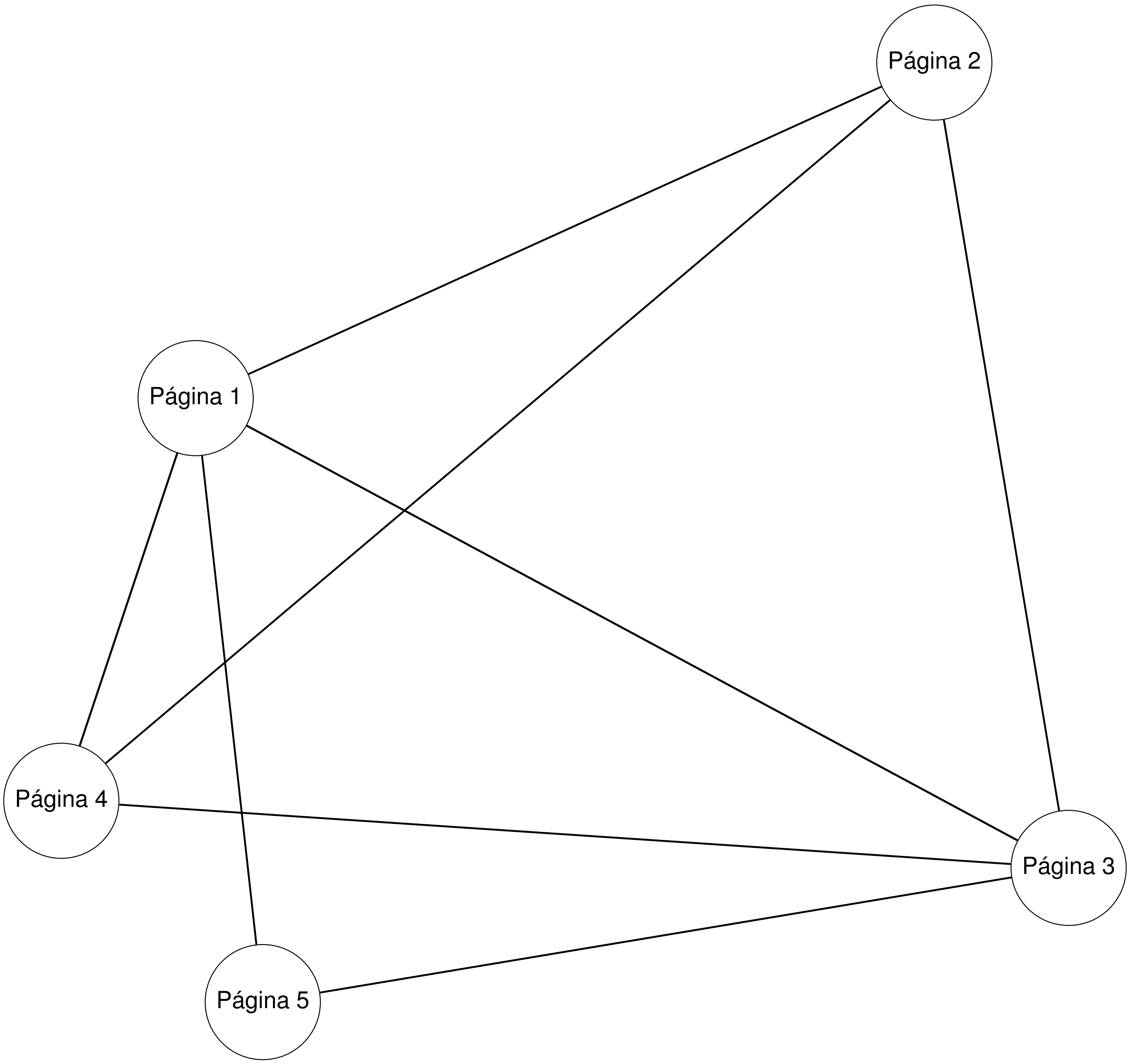
Tabla 5.1: Indicaciones para la planificación de clase.

5.1.2. Actividad de Inicio.10 minutos

5.1.2.1. Comprensión del contexto

Para comenzar la clase, se solicita a los estudiantes organizarse en equipos de tres integrantes. A cada grupo se le entrega una copia impresa de la actividad titulada «Qué página web es más relevante», la cual también se proyecta en la pizarra principal para facilitar la visualización colectiva. Iniciar la siguiente lectura:

¿Qué página web es más relevante?



Vivimos en un mundo donde las conexiones y las redes están presentes en todos los aspectos de nuestra vida diaria. Desde cómo interactuamos con otras personas, hasta cómo accedemos a información en internet, las relaciones entre distintos elementos juegan un papel fundamental. En particular, la web es un ejemplo fascinante de una red en constante interacción, donde las páginas están conectadas entre sí a través de enlaces.

Hoy exploraremos cómo estas conexiones influyen en aspectos como la organización de la información y cómo podemos representar estas relaciones de manera que nos ayuden a comprender mejor su funcionamiento. Para comenzar, veremos un video que presenta las interacciones entre páginas web, con un enfoque en los enlaces que las conectan y cómo estas conexiones pueden influir en su importancia dentro de la red.

Posteriormente:

- Presentar el objetivo de la clase a los estudiantes:

  Utilizar el método de modelación matemática para determinar la relevancia de un conjunto de páginas web a partir de sus conexiones, desarrollando un grafo y una fórmula que represente las contribuciones entre páginas.

- Proyectar en la pizarra el video introductorio [1], como motivación de la clase. (hasta el minuto 3).

Luego , responder las siguientes preguntas:

Preguntas de reflexión

¿Qué entiendes por un modelo matemático?

¿Qué es lo que llamó más tu atención en el video introductorio?

Si los estudiantes no logran formular una respuesta coherente, el docente proporciona una explicación adaptada al contexto, señalando que **un modelo matemático es una representación de una situación real que permite su análisis y comprensión**.

Para la segunda pregunta se solicita a los estudiantes que observen atentamente la información presentada. Posteriormente, se lleva a cabo una breve discusión grupal para reflexionar sobre los aspectos que más les llamaron la atención del video, fomentando su interés y participación activa.

[1] Video Page Rank. Vease Page Rank, el algoritmo matemático que hizo google dominar el mundo, disponible en https://youtu.be/b3fwA3EWCd8?si=36lriyr5aD4VZrLp

5.1.3. Formulación del problema. 15 minutos

Se procede a la lectura introductoria al problema:

Relevancia de una Página Web

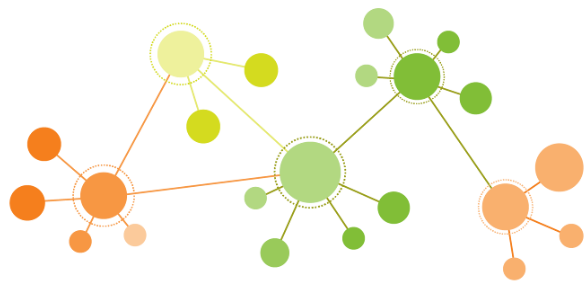


Figura 5.1: Conexiones páginas web.

En la actualidad, internet se ha convertido en una herramienta esencial para la vida diaria. Millones de personas recurren a la web para buscar información, resolver dudas, aprender sobre nuevos temas o simplemente entretenerse. Sin embargo, la vasta cantidad de contenido disponible puede ser abrumadora si no se cuenta con sistemas eficientes que ayuden a filtrar y priorizar la información más relevante. Aquí es donde los motores de búsqueda juegan un papel crucial.

Los motores de búsqueda han revolucionado la manera en que accedemos a la información. Al introducir una consulta, estos sistemas se encargan de analizar millones de páginas web en fracciones de segundo para ofrecer un conjunto de resultados ordenados según su pertinencia. Este orden no es aleatorio; se basa en complejos criterios diseñados para garantizar que las páginas más relevantes, confiables y útiles aparezcan primero en la lista de resultados.

La relevancia de este proceso radica en su impacto en nuestra vida diaria. Un motor de búsqueda eficiente no solo nos ahorra tiempo al evitar que revisemos información irrelevante, sino que también mejora la calidad de nuestras decisiones. Por ejemplo, cuando un estudiante busca recursos académicos, un profesional explora estrategias para un proyecto o una persona busca recomendaciones para un restaurante, los resultados que aparecen en los primeros lugares suelen ser los más valiosos y pertinentes.

La capacidad de los motores de búsqueda para priorizar páginas web relevantes ha simplificado enormemente la búsqueda de información, convirtiendo lo que podría ser una tarea ardua en una experiencia rápida y eficiente. Esto no solo beneficia a los usuarios, sino también a los creadores de contenido, quienes deben asegurarse de que sus páginas sean informativas y estén bien estructuradas para alcanzar una mayor visibilidad.

La forma en que se seleccionan y ordenan estas páginas está relacionada con la red de enlaces entre ellas. Las conexiones entre páginas web actúan como una especie de "votación"que determina su importancia relativa. De este modo, entender cómo se distribuyen estas interacciones puede ser clave para analizar cómo los motores de búsqueda organizan la información.

Durante los últimos diez años, Google ha liderado el mercado de los motores de búsqueda en Internet, destacándose por su capacidad para organizar de manera inteligente los resultados según su relevancia. Siguiendo esta idea, una empresa de marketing digital desea priorizar un conjunto de páginas web para ubicar anuncios publicitarios.

Dentro de una campaña publicitaria, dirigida hacia redes sociales, la empresa de marketing digital tiene los siguientes enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

Tras la lectura, se les solicita a los grupos que analicen la tabla presentada en la actividad y, en base a su observación, responder ¿qué página sería la más relevante para tí? y escribir dos ideas principales que consideren relevantes o llamativas. Este ejercicio tiene como objetivo fomentar la exploración inicial y la discusión colaborativa, además de activar habilidades de observación y análisis grupal.

Pregunta

De acuerdo a la tabla, ¿qué página sería la más relevante para tí?

Escribe dos ideas

5.1.4. Fase de Sistematización. 15 minutos

A partir de las observaciones realizadas por los estudiantes, el docente introduce la instrucción de «**representar, mediante un grafo, los enlaces entre las páginas web y sus conexiones**» (correspondiente a la **Fase de Sistematización, SM**). En este grafo, cada nodo simboliza una página web, mientras que las aristas representan las conexiones existentes entre ellas. Este enfoque visual facilita a los estudiantes la organización de los datos proporcionados y la identificación de relaciones estructuradas, constituyendo así un primer acercamiento al problema real planteado. El tiempo estimado para el desarrollo de esta actividad abarca desde el minuto 16 hasta el minuto 35 de la sesión, proporcionando un espacio adecuado para la discusión grupal, el trabajo colaborativo y la representación gráfica precisa de la información.

Indicación

Representar, a través de un gráfo, lás páginas web y sus conexiones

5.1.5. Fase de Matematización. 15 minutos

En el transcurso de los minutos 36 al 50, se lleva a cabo la **Fase de Matematización (MT)**, en la que los estudiantes, trabajando en sus respectivos grupos, avanzan hacia la formulación de relaciones matemáticas a partir del grafo previamente elaborado en la etapa de Sistematización (SM)

> Pregunta
>
> **¿Cuántos caminos o enlaces llegan a la página 1?**
>
> **¿A la página 2?**
>
> **¿A la página 3?**
>
> **¿A la página 4?**
>
> **¿Qué procedimiento utilizaste para determinar los valores?.Explique**

Durante este proceso, cada grupo asigna un valor inicial 1 de relevancia a cada página web representada por un nodo en el grafo. Este valor, que puede entenderse como una ponderación inicial, se distribuye de manera proporcional entre las páginas conectadas a través de las aristas, siguiendo la lógica de que una página transfiere parte de su relevancia a aquellas páginas con las que mantiene enlaces.

> Pregunta
>
> **Si la valoración o relevancia inicial de cada página es 1 y se distribuye proporcionalmente entre las páginas enlazadas, ¿cómo puedes expresar la valoración final de cada página como una suma de las contribuciones que recibe de las páginas que la enlazan**.
>
> **Representar, a través de un gráfo, lás páginas web y sus contribuciones que reciben de las páginas web que enlazan**
>
> **Escribe una ecuación que modele, para cada página, las relaciones descritas**

A partir de esta distribución proporcional, los estudiantes comienzan a identificar patrones y regularidades en los valores asignados, lo que les permite formular un sistema de ecuaciones algebraicas que modela el flujo de relevancia entre las páginas web. Dicho sistema constituye una representación matemática simplificada de la situación inicial, donde cada ecuación expresa la relación entre los valores de relevancia de una página y los de aquellas a las que está conectada. Este ejercicio promueve la traducción del problema contextual hacia un lenguaje matemático más formal, permitiendo a los estudiantes percibir cómo un fenómeno del mundo real puede ser representado mediante estructuras algebraicas.

Respuesta Experta:

$$P_1 = 1 + \frac{2}{2}; P_2 = \frac{1}{3}; P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; P_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

5.1.6. Análisis del sistema Matemático ASM. 10 minutos

Luego los estudiantes deben encontrar la ecuación que modela, para cada página, las relaciones descritas.

$$P_1 = 1 \cdot P_3 + \frac{1}{2} \cdot P_4; P_2 = \frac{1}{3} \cdot P_1; P_3 = \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{3} \cdot P_4; P_4 = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{3} \cdot P_1$$

Posteriormente, resolver el sistema de ecuaciones. Para ello se plantean dos preguntas

Pregunta

De acuerdo a lo anterior, ¿a través de qué procedimiento podrías obtener orden y relevancia final de cada página web?.

Resolver y determinar el orden de relevancia de cada página web de acuerdo al método escogido

Se espera que los estudiantes identifiquen y mencionen algún método previamente conocido para la resolución de sistemas de ecuaciones. En caso de que no puedan hacerlo, se procederá a proporcionar una retroalimentación estructurada que los guíe hacia la construcción adecuada de la solución. Para ello, se introducirá y explicará la estrategia recomendada, asegurando su comprensión y aplicación correcta.

Considerar también

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 4$$

Debido a que todas las páginas tienen relevancia 1. Esta técnica está asociada a la resolución de sistemas de ecuaciones homogeneos.

5.1.7. Interpretación y Evaluación (IE) y Validación (VL). 20 minutos

En los últimos 20 minutos de la clase (minutos 71 al 90), se lleva a cabo el momento de cierre, una etapa clave en la que se integran las fases de **Interpretación/Evaluación (IE)** y **Validación (VL)** del proceso de modelación matemática. Este momento tiene como propósito principal consolidar el aprendizaje, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre los resultados obtenidos, analizar su coherencia con la situación inicial planteada y discutir las estrategias implementadas a lo largo de la sesión.

Para ello, se consideran estas dos preguntas

Preguntas

Escribe el orden de relevancia, acorde a los valores obtenidos, de cada página web

¿Cómo podrías comprobar tu respuesta?. Valida tu resultado utilizando el método que estimes conveniente.

En esta fase, cada grupo presenta sus resultados al resto de la clase, explicando de manera estructurada y razonada cómo su modelo matemático representa la problemática propuesta. Esta presentación incluye la descripción de los procedimientos realizados, la interpretación de las soluciones obtenidas y su vinculación con el contexto real de las conexiones entre páginas web. Los estudiantes tienen la oportunidad de justificar las decisiones tomadas durante las etapas previas, como la formulación de ecuaciones o la exclusión de alguna ecuación redundante, y de argumentar la validez de su modelo en relación con los objetivos iniciales. Este ejercicio fomenta la comunicación matemática, desarrollando habilidades de expresión oral y argumentación lógica, esenciales en el aprendizaje de las matemáticas.

El docente, por su parte, asume el rol de facilitador en una discusión grupal, promoviendo la comparación de procedimientos, modelos y resultados entre los diferentes grupos. Durante esta discusión, el docente plantea preguntas orientadoras como: ¿Qué similitudes y diferencias observan entre los modelos presentados?, ¿Qué factores podrían explicar estas diferencias? o ¿Cómo se podría mejorar el modelo propuesto para hacerlo más robusto?. Estas interrogantes estimulan el análisis crítico y la reflexión colectiva, permitiendo a los estudiantes identificar fortalezas y debilidades en sus estrategias y resultados.

Asimismo, la **validación** de las soluciones constituye un aspecto central de esta etapa. Los estudiantes son invitados a evaluar la consistencia y plausibilidad de sus resultados mediante la verificación de las ecuaciones originales o el uso de métodos alternativos, como la sustitución directa o la revisión gráfica del modelo. Este proceso no solo refuerza la confianza en los procedimientos realizados, sino que también permite a los estudiantes comprender la importancia de la validación como una práctica habitual en el trabajo matemático. En caso de que se detecten inconsistencias o errores, se aborda de manera colectiva cómo estos pueden ser corregidos, transformando las dificultades en oportunidades de aprendizaje.

Por último, este momento de cierre proporciona una visión global del proceso de modelación realizado, conectando las fases previas (desde la **Formulación del Problema** hasta la **Matematización** y el **Análisis del Sistema** con la **interpretación** final del modelo. Los estudiantes no solo consolidan su comprensión de los conceptos abordados, sino que también adquieren una perspectiva integral de cómo las matemáticas pueden aplicarse para resolver problemas complejos del mundo real.

5.2. Planificación Clase 2

5.2.1. Indicaciones de la clase. 5 minutos

Categoría	**Descripción**
Objetivo de Aprendizaje	Representar, analizar y modelar relaciones entre páginas web utilizando matrices y vectores propios para determinar relevancia.
Habilidades	• Identificar estructuras matemáticas en problemas reales. • Resolver sistemas de ecuaciones. • Analizar y aplicar propiedades de matrices y vectores propios.
Actitudes	• Valorar la aplicación de las matemáticas para comprender situaciones reales. • Demostrar persistencia al resolver problemas complejos.
Conocimientos Previos	• Representación matricial de conexiones. • Concepto de matriz traspuesta. • Interpretación de sistemas de ecuaciones.
Objetivo de la Clase	Determinar el orden de relevancia de un conjunto de páginas web mediante modelación matemática, utilizando matrices normalizadas, valores y vectores propios.

Tabla 5.2: Indicaciones para la planificación de clase.

5.2.2. Actividad de Inicio. 10 minutos

5.2.2.1. Comprensión del contexto.

En el comienzo, presentar el siguiente objetivo de clase a los estudiantes: **Determinar el orden de relevancia de un conjunto de páginas web mediante modelación matemática, utilizando matrices normalizadas, valores y vectores propios**.
Luego de ello, generar un plenario de activación de conocimientos previos.

5.2.3. Formulación del problema. 15 minutos

Posteriormente, organiza a los estudiantes en grupos de 3 a 5 personas y da inicio a la actividad de lectura, presentándoles el siguiente texto:

Relevancia de una Página Web

Figura 5.2: Conexión a internet

En el mundo digital, las conexiones entre páginas web forman redes complejas que nos permiten acceder a la información de manera eficiente. Cada vez que navegamos por internet, interactuamos con una vasta red de páginas interconectadas a través de enlaces. Estos enlaces son como "puentes"que establecen relaciones directas entre las páginas. Para analizar estas conexiones de manera estructurada, podemos representarlas como un sistema de ceros y unos, que nos ayuda a visualizar y comprender cómo se organizan estas redes.

En este sistema:

a) Un 1 indica que existe una conexión o enlace entre dos páginas.

b) Un 0 indica que no hay conexión directa entre ellas.

En nuestra primera clase, exploramos cómo las conexiones entre páginas web pueden representarse matemáticamente para analizar su relevancia dentro de una red. A través de un sistema de ecuaciones, modelamos las relaciones entre las páginas, considerando cómo estas distribuyen su ïmportancia"mediante los enlaces que las conectan. Este enfoque nos permitió interpretar y resolver el problema inicial: ¿Qué página web es más relevante?.

5.2.4. Fase de Sistematización. 15 minutos

Luego de la formulación y lectura del problema , se describe lo siguiente en la actividad:

Ahora, en esta segunda experiencia, ampliaremos nuestro análisis utilizando herramientas más estructuradas. En particular, siguiendo los enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

Pregunta

De acuerdo a la tabla, ¿Cuál es la matríz asociada, tomando encuenta los puntos a) y b)?

Explique el por qué su decisión de estructurar la información de esa manera

La respuesta experta a la primera pregunta es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda pregunta tiene referencia a la lectura inicial, pues se menciona que *Un 1 indica que existe una conexión o enlace entre dos páginas.* y *Un 0 indica que no hay conexión directa entre ellas.*. Por lo tanto la matríz de adyacencia es la descrita por esta razón

En la misma fase, se generan las siguientes preguntas:

Pregunta

¿Cuál es su matriz traspuesta?

Una matriz normalizada es aquella donde la suma total de cada uno de los elementos de la columna da como resultado 1. De acuerdo a lo anterior, ¿Cómo podrías normalizar la matriz traspuesta.Encuentre la matriz normalizada y escríbela con un nombre

Sus respectivas respuestas expertas son:
Matríz traspuesta:

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matríz normalizada:

$$M^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2.5. Fase de Matematización. 15 minutos

En esta etapa el profesor motiva a los estudiantes a responder la siguiente pregunta:

Pregunta

¿Cuáles son los valores propios de la matriz normalizada?, ¿Cómo se determinan?

Una de las técnicas sugeridas es utilizar del software **Matrix Calculator** e ingresar los datos de la matríz y calcular los valores propios.
Otra técnica análoga es igualar a cero el determinante de la matríz

$$(M^N - \lambda \cdot I)$$

.

5.2.6. Fase de Análisis Matemático. 10 minutos

De acuerdo a la siguiente pregunta

Pregunta

Si evaluamos el mayor de los valores propios obtenidos en la matríz $M^N - \lambda \cdot I$. Calcular el vector propio $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ asociado. ¿Qué significado tiene en la situación?.

Como respuesta experta se plantea la evaluación del mayor valor propio en:

$$\left(M^N - \lambda \cdot I\right) \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

y se procede al cálculo del vector.

5.2.7. Fase de Interpretación y Evaluación (IE). 10 minutos

Con la finalidad de encontrar el valor del cálculo del vector propio , se promueve que los estudiantes puedan alcanzar, resolver e interpretar este sistema:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} -x_1 & + & & x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & - & x_2 & & & & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & - & x_4 & & = & & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +x_4 & = & 4 \end{array}\right\}$$

Posteriormente en la actividad se develan estas preguntas:

Pregunta

De acuerdo a lo anterior, ¿Observas alguna similitud y/o diferencia en los resultados obtenidos comparados con la primera clase para obtener el orden y relevancia final de cada página web?.

Determinar el orden de relevancia de cada página web

Las respuestas a ambas preguntas están determinadas por lo siguiente:

- 1. Existe una similitud evidente en ambos métodos. El método de representación gráfica y matricial determinan finalmente, sea cual sea el camino, el mismo sistema de ecuación.
- La relevancia de cada página web está determinada por:

$$\underbrace{x_1}_{\frac{48}{31}} + \underbrace{x_2}_{\frac{16}{31}} + \underbrace{x_3}_{\frac{36}{31}} + \underbrace{x_4}_{\frac{24}{31}} = 4$$

5.2.8. Fase de Validación (VL). 10 minutos

En esta fase, la actividad plantea la preguntas:

Pregunta

¿Cómo podrías comprobar tu respuesta?. Valida tu resultado utilizando el método que estimes conveniente.

Se procede finalmente a evaluar los valores obtenidos y reemplazarlos en la ecuación.

$$\underbrace{x_1}_{\frac{48}{31}} + \underbrace{x_2}_{\frac{16}{31}} + \underbrace{x_3}_{\frac{36}{31}} + \underbrace{x_4}_{\frac{24}{31}} = 4$$

5.3. Planificación Clase 3

5.3.1. Indicaciones de la clase. 5 minutos

Categoría	**Descripción**
Objetivo de Aprendizaje	Modelar una red de relaciones a partir de declaraciones para determinar al culpable utilizando herramientas matemáticas como grafos o matrices.
Habilidades	• Representar situaciones reales mediante grafos y matrices. • Analizar redes complejas para extraer conclusiones relevantes. • Argumentar y validar decisiones utilizando conceptos matemáticos.
Actitudes	• Valorar el uso de la matemática para resolver problemas de la vida real. • Trabajar colaborativamente para construir modelos matemáticos.
Conocimientos Previos	• Concepto básico de grafos y matrices. • Operaciones elementales con matrices. • Interpretación de relaciones entre elementos en un sistema.
Objetivo de la clase	Determinar al culpable en un caso de acusaciones cruzadas mediante la representación de relaciones en un grafo o matriz, utilizando el análisis de relevancia para justificar las conclusiones obtenidas.

Tabla 5.3: Indicaciones generales para la clase.

5.3.2. Actividad de Inicio. 10 minutos

5.3.2.1. Comprensión del contexto

En el comienzo, presentar el siguiente objetivo de clase a los estudiantes: **Determinar al culpable en un caso de acusaciones cruzadas mediante la representación de relaciones en un grafo o matriz, utilizando el análisis de relevancia para justificar las conclusiones obtenidas**.
Luego de ello, generar un plenario de activación de conocimientos previos.

5.3.3. Fase de Formulación del problema. 15 minutos

Posteriormente, organizar a los estudiantes en 4 grupos de 3 integrantes cada uno y dar inicio a la actividad introductoria, presentándoles el siguiente texto:

Cinco amigos (Alicia, Bruno, Carla, Diego y Elena) se ven envueltos en un misterioso caso relacionado con la desaparición de un objeto de gran valor. Aunque no hay evidencia clara que determine la culpabilidad, durante el juicio cada uno de ellos señala a otros como responsables, generando una compleja red de acusaciones cruzadas. Ante la falta de pruebas contundentes, la policía ha decidido emplear un método innovador basado en el análisis de la relevancia dentro de esta red de acusaciones. Según este enfoque, el culpable será aquel que resulte señalado con mayor frecuencia por los demás.

5.3.4. Fase de Sistematización (SM). 15 minutos

Luego de la formulación y lectura del problema , se describe lo siguiente en la actividad:
Las declaraciones (acusaciones) se organizan como sigue:

Informe Policial
Alicia: Bruno es culpable y Carla también lo es.
Bruno: Diego y Alicia son culpables.
Carla: Solo Alicia y yo somos inocentes
Diego: Alicia cometió el delito
Helena: Bruno, Diego y Carla son culpables.

Preguntas de reflexión

De acuerdo a lo estudiado en las sesiones I y II, ¿Qué modelo de representación elijes para resolver el caso (grafo o matrices)?. Argumente su respuesta

Representar la información de la tabla a través de un grafo o matríz

En las siguientes secciones, el desarrollo del modelo dependerá exclusivamente de la elección realizada por los estudiantes. Por consiguiente, basándose en las experiencias adquiridas durante las dos sesiones previas, se formularán únicamente las preguntas correspondientes a la etapa exploratoria. Además, se considerarán como parte integral de la planificación las orientaciones y directrices proporcionadas en los talleres 1 y 2.

5.3.5. Fase de Matematización (MT). 15 minutos

Instrucción

Según el modelo elegido, resolver el caso indicando todos los pasos en orden y argumentando sus decisiones de forma matemática.

Solución:

Ver directrices **5.1.5** o **5.2.5**

5.3.6. Fase de Análisis del sistema Matemático (ASM). 10 minutos

Ver directrices **5.1.6** o **5.2.6**

Cada persona se expresa como una suma de las acusaciones que recibe.

$$A = 1D + \frac{1}{2}B$$

$$B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}H$$

$$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}H$$

$$D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}H$$

$$H = \frac{1}{3}C$$

5.3.7. Fase de Interpretación y Evaluación (IE). 5 minutos

Para responder esta pregunta

Pregunta

De acuerdo a su orden de relevancia, ¿Quién es el culpable del delito?

$$\underbrace{A}_{\frac{8}{5}} + \underbrace{B}_{\frac{6}{5}} + \underbrace{C}_{\frac{9}{10}} + \underbrace{D}_{1} + \underbrace{H}_{\frac{3}{10}} = 5$$

De acuerdo a lo anterior, Alicia es culpable.

5.3.8. Fase de Validación (VL). 5 minutos

Descrito en el paso anterior.

5.3.9. Fase de Reflexión. 10 minutos

En esta sesión se incorpora una fase de reflexión destinada a profundizar en la perspectiva del estudiante respecto a sus impresiones y aprendizajes sobre el proceso de modelación desarrollado durante el estudio. Las preguntas formuladas para guiar esta reflexión fueron las siguientes:

Preguntas de reflexión

¿De qué manera el uso de grafos o matrices como herramientas matemáticas te permitió abordar la situación planteada de una forma diferente a otros métodos que habías utilizado anteriormente?

Preguntas de reflexión

¿Crees que podrías aplicar los métodos estudiados, como grafos o matrices, para modelar y resolver problemas en otros contextos o situaciones reales? Explica por qué.

La primera pregunta invita a los estudiantes a reflexionar sobre la innovación metodológica que representa el uso de modelos matemáticos como grafos o matrices en comparación con otros enfoques tradicionales o previamente utilizados.

La instancia promueve identificar cómo estas herramientas matemáticas pudieron ofrecer una nueva perspectiva o facilitar una solución más eficiente o precisa en el contexto del problema planteado. Además, se busca que los estudiantes reconozcan las ventajas y desafíos específicos que implica el uso de grafos o matrices en el análisis de situaciones reales.

En la segunda pregunta, se plantea un ejercicio de transferencia del aprendizaje, donde los estudiantes deben considerar si los métodos utilizados pueden extrapolarse a otros dominios de aplicación. La reflexión los lleva a explorar cómo las herramientas matemáticas aprendidas pueden ser útiles en diferentes contextos reales, ampliando su capacidad para aplicar lo aprendido fuera del ámbito académico. Se espera que los estudiantes justifiquen sus respuestas, demostrando una comprensión profunda de los métodos estudiados y su potencial aplicación en situaciones diversas, ya sea en áreas profesionales, sociales o incluso en la vida cotidiana.

Estas preguntas de reflexión son fundamentales para que los estudiantes no solo evalúen sus propios aprendizajes, sino que también desarrollen la capacidad de transferir y aplicar sus conocimientos matemáticos en distintos escenarios, lo que fortalece su formación como futuros profesionales en matemáticas y educación matemática.

Capítulo 6: Estudio de Clases

6.1. Planificación de clase 1: ¿Qué página web es más relevante?.

En esta sección, se presenta de manera detallada la primera lección de la secuencia didáctica que ha sido cuidadosamente elaborada e implementada. El objetivo principal de esta lección es modelar una situación que involucra sistemas de ecuaciones. Se comienza con una descripción exhaustiva de los tres momentos que integran esta lección, seguida de un análisis a priori que corresponde a cada uno de ellos. La lección, al igual que la secuencia didáctica en su conjunto, se organiza de acuerdo con las distintas etapas del proceso de modelización matemática. Esta organización se fundamenta en el marco teórico que respaldó su diseño, como lo establecen Blomhøj y Højgaard-Jensen en 2003, así como Blomhøj en 2008. Las fases que componen esta lección son las siguientes:

- Formulación del problema (sigla referencial FP).
- Sistematización (sigla referencial SM).
- Matematización (sigla referencial MT)
- Análisis del sistema matemático (sigla referencial ASM)
- Interpretación / Evaluación (sigla referencial IE)
- Validación (sigla referencial VL)

6.1.1. Momento de inicio

La clase comienza con la presentación del objetivo: **Utilizar el método de modelación matemática para determinar la relevancia de un conjunto de páginas web a partir de sus conexiones, desarrollando un grafo y una fórmula que represente las contribuciones entre páginas**. Para activar los conocimientos previos, el docente plantea al grupo la pregunta: ¿Qué entienden o recuerdan sobre un modelo matemático?. Si los estudiantes no logran formular una respuesta coherente, el docente proporciona una explicación adaptada al contexto, señalando que un modelo matemático es una representación de una situación real que permite su análisis y comprensión.

Seguidamente, como parte de la motivación inicial, se proyecta un video introductorio [1] hasta el minuto 3, que ilustra las conexiones y enlaces entre páginas web, así como su orden de relevancia en los buscadores. Se solicita a los estudiantes que observen atentamente la información presentada. Posteriormente, se lleva a cabo una breve discusión grupal para reflexionar sobre los aspectos que más les llamaron la atención, fomentando su interés y participación activa.

Para comenzar la clase, se solicita a los estudiantes organizarse en equipos de tres integrantes. A cada grupo y estudiante se le entrega una copia impresa de la actividad titulada **«Qué página web es más relevante»** (APÉNDICE C), la cual también se proyecta en la pizarra principal para facilitar la visualización colectiva. El docente guía una lectura conjunta de la actividad, asegurándose de que todos los estudiantes comprendan el contenido y el propósito inicial de la tarea.

Tras la lectura, se les solicita a los grupos que analicen la tabla presentada en la actividad y, en base a su observación, escriban dos ideas principales que consideren relevantes o llamativas. Este ejercicio tiene como objetivo fomentar la exploración inicial y la discusión colaborativa, además de activar habilidades de observación y análisis grupal.

[1] Video Page Rank. Vease Page Rank, el algoritmo matemático que hizo google dominar el mundo, disponible en https://youtu.be/b3fwA3EWCd8?si=36lriyr5aD4VZrLp

Esta etapa corresponde a la fase de **Formulación del Problema (FP)**, donde se introduce la situación a modelar y se promueve un acercamiento reflexivo al contexto planteado. El desarrollo de esta fase está diseñada para ocupar un tiempo aproximado de 15 minutos, manteniendo un ritmo dinámico que permita a los estudiantes concentrarse en la tarea y preparar el terreno para las etapas posteriores de la actividad.

6.1.2. Momento de desarrollo

A partir de las observaciones realizadas por los estudiantes, el docente introduce la instrucción de **«representar, mediante un grafo, los enlaces entre las páginas web y sus conexiones»** (correspondiente a la **Fase de Sistematización, SM**). En este grafo, cada nodo simboliza una página web, mientras que las aristas representan las conexiones existentes entre ellas. Este enfoque visual facilita a los estudiantes la organización de los datos proporcionados y la identificación de relaciones estructuradas, constituyendo así un primer acercamiento al problema real planteado. El tiempo estimado para el desarrollo de esta actividad abarca desde el minuto 16 hasta el minuto 35 de la sesión, proporcionando un espacio adecuado para la discusión grupal, el trabajo colaborativo y la representación gráfica precisa de la información.

En el transcurso de los minutos 36 al 50, se lleva a cabo la **Fase de Matematización (MT)**, en la que los estudiantes, trabajando en sus respectivos grupos, avanzan hacia la formulación de relaciones matemáticas a partir del grafo previamente elaborado en la etapa de Sistematización (SM). Durante este proceso, cada grupo asigna un valor inicial 1 de relevancia a cada página web representada por un nodo en el grafo. Este valor, que puede entenderse como una ponderación inicial, se distribuye de manera proporcional entre las páginas conectadas a través de las aristas, siguiendo la lógica de que una página transfiere parte de su relevancia a aquellas páginas con las que mantiene enlaces.

A partir de esta distribución proporcional, los estudiantes comienzan a identificar patrones y regularidades en los valores asignados, lo que les permite formular un sistema de ecuaciones algebraicas que modela el flujo de relevancia entre las páginas web. Dicho sistema constituye una representación matemática simplificada de la situación inicial, donde cada ecuación expresa la relación entre los valores de relevancia de una página y los de aquellas a las que está conectada. Este ejercicio promueve la traducción del problema contextual hacia un lenguaje matemático más formal, permitiendo a los estudiantes percibir cómo un fenómeno del mundo real puede ser representado mediante estructuras algebraicas.

Durante esta fase, el rol del docente resulta fundamental, ya que supervisa activamente el desarrollo del trabajo grupal, garantizando que los estudiantes avancen en la dirección correcta sin intervenir de manera directa en la resolución del problema. Para ello, el docente plantea preguntas orientadoras que guían el razonamiento matemático de los estudiantes y los invitan a reflexionar sobre los procedimientos utilizados. Ejemplos de estas intervenciones incluyen preguntas como: ¿Cómo expresarías la distribución de los valores en lenguaje algebraico?, ¿Qué sucede si una página no tiene enlaces salientes? o ¿Qué patrones matemáticos puedes observar en las relaciones del grafo?. Estas interrogantes fomentan la discusión y el análisis crítico dentro de los grupos, facilitando la identificación de los elementos clave necesarios para la matematización del problema.

Asimismo, este momento de la clase permite a los estudiantes fortalecer sus habilidades en la construcción y manipulación de modelos algebraicos, al tiempo que desarrollan una comprensión más profunda de los conceptos involucrados, como la proporcionalidad, la distribución de valores y la interdependencia entre las variables. La actividad requiere que los grupos trabajen de manera colaborativa y organizada, discutiendo y consensuando las relaciones matemáticas que emergen del grafo y registrando sus procedimientos en forma escrita para su posterior análisis.

En el transcurso de los minutos 51 al 70, se desarrolla la fase de **Análisis del Sistema Matemático (ASM)**, una etapa crítica en el proceso de modelación donde los estudiantes trabajan activamente en la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas formulado previamente durante la fase de Matematización (MT). Esta etapa implica un análisis riguroso del sistema planteado, buscando soluciones que permitan comprender el comportamiento del modelo matemático y extraer conclusiones pertinentes a la situación inicial representada.

Durante este período, los estudiantes, organizados en grupos, hacen uso de herramientas tecnológicas como calculadoras científicas o software educativo especializado (por ejemplo, GeoGebra, MATLAB o Excel), cuyo propósito es facilitar el manejo eficiente de los cálculos y el tratamiento simultáneo de múltiples ecuaciones. Estas herramientas desempeñan un papel fundamental en la resolución precisa del sistema de ecuaciones, además de proporcionar una visualización clara de los resultados, lo cual es crucial para interpretar y analizar las soluciones obtenidas en relación con el contexto del problema planteado.

En esta etapa, uno de los objetivos fundamentales es que los estudiantes logren determinar la solución del sistema de ecuaciones no homogéneo, identificando de manera crítica y razonada la posibilidad de descartar una de las cuatro ecuaciones en el proceso de obtención de las respuestas. Este ejercicio desafía a los estudiantes a realizar análisis estructurados de la información, reconociendo la redundancia o innecesariedad de ciertos elementos en el sistema planteado. Al hacerlo, los estudiantes no solo aplican estrategias algebraicas, sino que también desarrollan habilidades de razonamiento lógico y crítico.

Si bien el uso de herramientas tecnológicas es promovido como un recurso valioso en la resolución del sistema, es fundamental enfatizar que dichas herramientas no deben constituir el fin principal de la actividad, sino más bien un medio complementario que facilite la comprensión y la eficiencia en el desarrollo de los procedimientos. El objetivo principal sigue siendo que los estudiantes construyan un entendimiento profundo del problema y desarrollen competencias matemáticas esenciales, tales como la formulación, análisis e interpretación de sistemas de ecuaciones en un contexto real.

6.1.3. Momento de cierre

En los últimos 20 minutos de la clase (minutos 71 al 90), se lleva a cabo el momento de cierre, una etapa clave en la que se integran las fases de **Interpretación/Evaluación (IE)** y **Validación (VL)** del proceso de modelación matemática. Este momento tiene como propósito principal consolidar el aprendizaje, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre los resultados obtenidos, analizar su coherencia con la situación inicial planteada y discutir las estrategias implementadas a lo largo de la sesión.

En esta fase, cada grupo presenta sus resultados al resto de la clase, explicando de manera estructurada y razonada cómo su modelo matemático representa la problemática propuesta. Esta presentación incluye la descripción de los procedimientos realizados, la interpretación de las soluciones obtenidas y su vinculación con el contexto real de las conexiones entre páginas web. Los estudiantes tienen la oportunidad de justificar las decisiones tomadas durante las etapas previas, como la formulación de ecuaciones o la exclusión de alguna ecuación redundante, y de argumentar la validez de su modelo en relación con los objetivos iniciales. Este ejercicio fomenta la comunicación matemática, desarrollando habilidades de expresión oral y argumentación lógica, esenciales en el aprendizaje de las matemáticas.

El docente, por su parte, asume el rol de facilitador en una discusión grupal, promoviendo la comparación de procedimientos, modelos y resultados entre los diferentes grupos. Durante esta discusión, el docente plantea preguntas orientadoras como: ¿Qué similitudes y diferencias observan entre los modelos presentados?, ¿Qué factores podrían explicar estas diferencias? o ¿Cómo se podría mejorar el modelo propuesto para hacerlo más robusto?. Estas interrogantes estimulan el análisis crítico y la reflexión colectiva, permitiendo a los estudiantes identificar fortalezas y debilidades en sus estrategias y resultados.

Asimismo, la **validación** de las soluciones constituye un aspecto central de esta etapa. Los estudiantes son invitados a evaluar la consistencia y plausibilidad de sus resultados mediante la verificación de las ecuaciones originales o el uso de métodos alternativos, como la sustitución directa o la revisión gráfica del modelo. Este proceso no solo refuerza la confianza en los procedimientos realizados, sino que también permite a los estudiantes comprender la importancia de la validación como una práctica habitual en el trabajo matemático. En caso de que se detecten inconsistencias o errores, se aborda de manera colectiva cómo estos pueden ser corregidos, transformando las dificultades en oportunidades de aprendizaje.

Por último, este momento de cierre proporciona una visión global del proceso de modelación realizado, conectando las fases previas (desde la **Formulación del Problema** hasta la **Matematización** y el **Análisis del Sistema** con la **interpretación** final del modelo. Los estudiantes no solo consolidan su comprensión de los conceptos abordados, sino que también adquieren una perspectiva integral de cómo las matemáticas pueden aplicarse para resolver problemas complejos del mundo real.

6.1.4. Objeto matemático

El desarrollo de esta clase implica la incorporación y aplicación de los siguientes elementos matemáticos:

- Representación gráfica (grafos).
- Valoración probabilística de los caminos.
- Sistemas de ecuaciones no homogeneos.

6.1.5. Descripción de la actividad

El momento inicial de la actividad basada en **¿Qué página web es más relevante?** se centra en la adaptación y modificación de una propuesta previamente conocida como **El caso de un buzo**, presentada en Ledezma (2017)(33). Esta adaptación tiene como propósito integrar y gestionar el marco teórico de Blomhøj y Højgaard Jensen, el cual estructura el proceso de modelación matemática en subprocesos específicos. La modificación no altera sustancialmente el contexto original del problema, sino que redefine su enfoque para alinearlo con los objetivos de aprendizaje relacionados con las conexiones y relevancia de páginas web. Ver **figura 6.1**

Durante los últimos diez años, Google ha liderado el mercado de los motores de búsqueda en Internet, destacándose por su capacidad para organizar de manera inteligente los resultados según su relevancia. Siguiendo esta idea, una empresa de marketing digital desea priorizar un conjunto de páginas web para ubicar anuncios publicitarios.

Dentro de una campaña publicitaria, dirigida hacia redes sociales, la empresa de marketing digital tiene los siguientes enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

Pregunta

De acuerdo a la tabla, ¿qué página sería la más relevante para tí?

Escribe dos ideas

Figura 6.1: Problema 1 taller 1, pág 3 ¿Qué página web es más relevante?

Durante el desarrollo de la clase, se presentan a los estudiantes un conjunto de catorce preguntas (**descritas en el documento Clase 1,APENDICE C**) derivadas de la actividad central. Estas interrogantes están diseñadas estratégicamente para guiar a los estudiantes en el desarrollo progresivo de las dos etapas siguientes del proceso de modelización matemática, tras la fase inicial de Formulación del Problema (FP). Cada pregunta tiene como propósito específico promover habilidades de análisis, reflexión y construcción de un modelo matemático adecuado, acorde con la situación-problema planteada.

En las tres primeras fases del proceso de modelización (FP, SM y MT), las preguntas planteadas se centran en facilitar que los estudiantes estructuren y conceptualicen un modelo matemático válido que represente la problemática propuesta. Estas preguntas, cuidadosamente formuladas, estimulan a los estudiantes a identificar patrones, establecer relaciones matemáticas, traducir las condiciones del problema al lenguaje algebraico y realizar cálculos que sustenten el modelo construido.

Una vez que los estudiantes han obtenido un modelo matemático que consideran apropiado, el proceso avanza hacia las fases de Interpretación/Evaluación (IE) y Validación (VL). Durante estas etapas, se realizan acciones específicas que se articulan principalmente en torno a la puesta en común de los resultados. En esta instancia, los estudiantes presentan y discuten sus modelos con el grupo completo, analizando la coherencia de las soluciones y verificando su aplicabilidad en el contexto original del problema. Estas actividades permiten reflexionar sobre la eficacia del modelo construido, identificar posibles inconsistencias y proponer ajustes que fortalezcan la validez de las respuestas obtenidas.

Esta clase se caracteriza por la intervención estratégica del docente, quien guía el desarrollo de cada momento de la sesión mediante preguntas orientadoras. Estas preguntas están diseñadas para facilitar la progresión natural de las etapas de los subprocesos de modelización matemática, promoviendo una participación activa y reflexiva por parte de los estudiantes.

El propósito principal de estas intervenciones es estimular a los estudiantes para que sean capaces de formular modelos matemáticos adecuados, así como interpretarlos en el contexto de la situación-problema planteada. Además, se busca que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para evaluar críticamente la coherencia y pertinencia de los modelos propuestos, y finalmente validar sus resultados mediante la verificación de las condiciones y supuestos iniciales.

A través de este enfoque, el docente no solo actúa como facilitador del aprendizaje, sino que también crea un ambiente que fomenta la autonomía en el pensamiento matemático y el desarrollo de competencias clave asociadas a la modelización. Este método asegura que los estudiantes transiten de manera estructurada y fundamentada por cada una de las fases del proceso, fortaleciendo su capacidad para resolver problemas en contextos reales de forma significativa y sustentada.

6.1.6. Respuesta experta

En la **tabla 6.1** se presenta el análisis detallado de las respuestas esperadas expertas en relación con las preguntas y acciones planteadas durante la primera sesión de enseñanza. Dicho análisis se organiza conforme a las diversas fases que conforman el proceso de modelización matemática, permitiendo así una visión estructurada y sistemática de la interacción entre las actividades propuestas y los objetivos de aprendizaje asociados a cada etapa.

Fases	**Respuesta experta de las preguntas**
FP	¿Qué entiendes por un modelo matemático?. Resp: Es una representación simplificada de un fenómeno del mundo real, estructurada con base en conceptos y herramientas matemáticas, que permite analizar, interpretar, predecir o entender el comportamiento del fenómeno en cuestión
MT	Si la valoración o relevancia inicial de cada página es 1 y se distribuye proporcionalmente entre las páginas enlazadas, ¿cómo puedes expresar la valoración final de cada página como una suma de las contribuciones que recibe de las páginas que la enlazan. $P_1 = 1 + \frac{1}{2}; P_2 = \frac{1}{3}; P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; P_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
ASM	Escribe una ecuación que modele, para cada página, las relaciones descritas. $P_1 = 1 \cdot P_3 + \frac{1}{2} \cdot P_4; P_2 = \frac{1}{3} \cdot P_1; P_3 = \frac{1}{3} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot P_4; P_4 = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{3} \cdot P_1$

Tabla 6.1: Respuestas expertas primera sesión, taller 1

6.1.7. Posibles estrategias

En el análisis de la sesión de clase, se han tomado en cuenta las posibles estrategias que los estudiantes podrían emplear para la construcción del modelo matemático que aborda el problema planteado, específicamente durante el desarrollo de las fases de Matematización (MT) y Análisis del Sistema Matemático (ASM).

La **tabla 6.2** presenta una descripción detallada de dichas estrategias correspondientes a la primera clase de la secuencia didáctica.

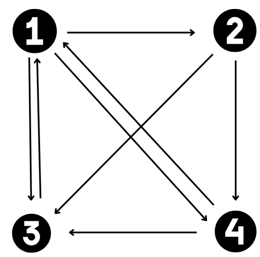
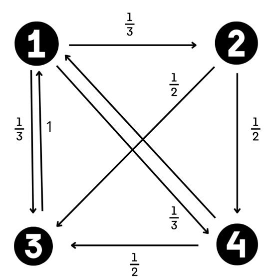
Estrategias	Ejemplos
Representación del grafo inicial, interpretando la tabla introductoria del problema	
Representación del grafo con valoración de sus enlaces. Esta estrategia puede ayudar a determinar el sistema de ecuaciones asociado al problema	
Conteo ingenuo. Determinar los enlaces que llegan y su valoración permiten tener una idea de **cierta relevancia numérica** de cada página (léase página 1 como x_1 sucesivamente página 2 como x_2 , página 3 como x_3 y finalmente página 4 como x_4	$\begin{cases} P_1 = 1 + \frac{1}{2} \\ P_2 = \frac{1}{3} \\ P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ P_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{cases}$
Determinación del sistema de ecuaciones no homogeneo asociado al problema	$\begin{cases} P_1 = P_3 + \frac{1}{2}P_4 \\ P_2 = \frac{1}{3}P_1 \\ P_3 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_4 \\ P_4 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \end{cases}$

Tabla 6.2: Estrategias y ejemplos primera sesión, taller 1

6.1.8. Dificultades y errores

En esta lección de la secuencia didáctica, se lleva a cabo un análisis detallado de las dificultades y errores potenciales que los estudiantes pueden encontrar durante las fases de sistematización (SM), matematización (MT), análisis del sistema matemático (ASM) e interpretación/evaluación (IE). Asimismo, se consideran las intervenciones y retroalimentaciones que el docente proporciona en respuesta a dichos desafíos. Los resultados de este análisis se presentan de manera pormenorizada en la **tabla 6.3**. No se abordan dificultades o errores en la fase de formulación del problema (FP), ya que esta etapa se concentra exclusivamente en la argumentación en torno a una pregunta contextual. Tampoco se incluyen en la fase de validación (VL), dado que dicha fase se desarrolla mediante una actividad de puesta en común con el grupo, lo que permite una evaluación colaborativa.

Categorías	Posibles errores y dificultades	Retroalimentación
SM	No logra representar a través de un grafo el problema correctamente	Unir cada enlace mediante una flecha (vector) y dibujar las conexiones entre las páginas a través de un grafo
MT	No comprende la valoración dada al unir cada página web con otra. No determina la cantidad de enlaces salientes y entrantes	¿Cuál es la cantidad de flechas (enlaces) salientes y entrantes del grafo?, si cada flecha entrante representa una *valoración* de 1 a la página receptora, ¿cuál es la valoración total de la página 1, de la 2, de la 3, de la 4?
MT	No comprende la estructura probabilística de la unión o conexión de los enlaces	Generar un recuerdo sobre problemas de planteo de sistemas de ecuaciones, tales como : En una alcancía hay monedas de 100 pesos y 500 pesos. En total hay 25 monedas. El valor total de las monedas es de $7{,}000$ pesos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la alcancía?. Hacer el simil con los camino o enlaces entre las páginas para obtener el resultado buscado.
ASM	No comprenden cómo solucionar un sistema de ecuación no homogeneo	De las ecuaciones obtenidas, dejar todas las expresiones en términos de una y trabajar solo con 3 de las 4 ecuaciones para hallar los valores
IE	No comprende el sentido de la solución del sistema de ecuaciones no homogeneo	Generar un espacio de reflexión grupal (plenario) sobre los valores obtenidos y determinar el orden de relevancia de cada página web

Tabla 6.3: Posibles dificultades y errores en base a los subprocesos de Blomjhø y Haghaard Jensen

6.2. Clase 2: ¿Qué página web es más relevante? Parte II

En esta sección, se expone la sesión 2 de la secuencia didáctica creada, iniciando con la descripción de sus tres fases y luego desarrollando los análisis apriori y posteriori correspondientes.

6.2.1. Momento de inicio

La sesión comienza con la **Formulación del Problema (FP)**, fase en la que el profesor presenta a los estudiantes una situación contextualizada, diseñada para motivar el análisis matemático a partir de un escenario de la vida cotidiana en el entorno digital. En este caso, se aborda la relevancia de páginas web dentro de una red, utilizando la teoría de grafos y matrices como herramientas para modelar las interacciones entre ellas. Este enfoque permite vincular conceptos matemáticos abstractos con fenómenos del mundo real, algo fundamental para que los estudiantes puedan percibir la aplicabilidad de las matemáticas en situaciones concretas.

Los participantes, organizados previamente en grupos de tres personas, reciben una hoja guía con un problema relacionado con la red de páginas web. En esta hoja, se les solicita modelar la red de enlaces entre páginas web utilizando una **matriz de adyacencia**, un concepto clave en el análisis de grafos. La pregunta central que deberán resolver es: ¿Cuál página web es más relevante dentro de la red?. Para ello, deben identificar cómo los enlaces entre páginas afectan su relevancia dentro de la estructura global, lo que implica la necesidad de realizar un análisis matemático de la red. Este problema, que a primera vista puede parecer lejano al ámbito matemático, se contextualiza en un escenario tecnológico altamente cercano a la vida diaria de los estudiantes, brindando un fuerte componente motivacional.

En este momento inicial, el docente comienza estructurando el diálogo con los estudiantes a través de preguntas orientadoras. El objetivo es hacerles reflexionar sobre los conceptos previos que pueden haber adquirido en clases anteriores, en especial sobre las matrices y los sistemas de ecuaciones. ¿Cómo representamos las conexiones entre páginas web?, ¿Qué características tendría una matriz de adyacencia en este contexto?, son algunas de las preguntas que el docente plantea. Estas preguntas permiten que los estudiantes recuerden y recuperen conocimientos previos sobre la representación de grafos y las propiedades de las matrices, facilitando el inicio del proceso de sistematización.

Además de recuperar conceptos, el docente fomenta la participación activa de los estudiantes, animándolos a compartir sus ideas y a debatir en grupo sobre las distintas maneras en que se podría abordar el problema planteado. En este sentido, el grupo se convierte en una comunidad de aprendizaje en la que se discuten enfoques, se comparan posibles soluciones y se reflexiona sobre cómo las herramientas matemáticas, como las matrices, pueden ser útiles para representar y resolver problemas del mundo real. El profesor aprovecha este momento para reforzar la importancia de la claridad en los procedimientos matemáticos, enfatizando que, aunque el contexto sea de la vida diaria, los métodos y las soluciones deben basarse en el rigor y la precisión propia de las matemáticas.

La interacción en este momento inicial no solo busca que los estudiantes comprendan los procedimientos, sino también que desarrollen un pensamiento crítico que les permita aplicar esos procedimientos en distintos contextos. El docente destaca que el propósito de la actividad no es únicamente resolver el problema en cuestión, sino también desarrollar una habilidad matemática transversal que los estudiantes podrán aplicar en futuros desafíos. De esta forma, la sesión se orienta a que los estudiantes no solo obtengan un resultado, sino que comprendan el proceso de modelización matemática y cómo los conceptos matemáticos que están utilizando, tales como las matrices y los sistemas de ecuaciones, se pueden aplicar a situaciones reales, como el análisis de la relevancia de páginas web en una red.

El desarrollo de esta fase está previsto para una duración aproximada de 15 minutos, manteniendo un ritmo adecuado que favorezca la concentración de los estudiantes en la tarea y permita sentar las bases para las etapas subsecuentes de la actividad.

6.2.2. Momento de desarrollo

Los estudiantes, al adentrarse en la fase de **Sistematización (SM)**, empiezan a asociar las filas y columnas de la matriz con las páginas web y los enlaces entre ellas. Este paso es clave para que comprendan cómo las estructuras abstractas de las matrices pueden representar conexiones reales y tangibles en un sistema, como lo es una red de páginas web. La tarea de traducir una red de enlaces en una matriz de adyacencia les permite visualizar de manera clara las relaciones entre las páginas y entender cómo cada una influye en la relevancia de las demás dentro de la red.

Para avanzar en esta tarea, los estudiantes primero deben representar gráficamente las conexiones que se les proporcionan en un **diagrama o red nodal**. En este diagrama, cada nodo representa una página web, y cada enlace entre nodos refleja una conexión entre dichas páginas. A través de este paso, los estudiantes tienen la oportunidad de visualizar cómo se estructura la red y cómo las interacciones entre las páginas se distribuyen. El uso de un diagrama de este tipo les permite obtener una representación más tangible del problema y facilita la comprensión de las relaciones entre los elementos antes de trasladarlas a una forma algebraica.

Una vez que la representación gráfica está lista, el siguiente paso consiste en traducir esa información en una **matriz de adyacencia**, donde cada elemento de la matriz refleja la presencia o ausencia de un enlace entre las páginas correspondientes. Este proceso de conversión de un diagrama a una matriz no solo ayuda a los estudiantes a comprender mejor la estructura de la red, sino que también refuerza su habilidad para trabajar con matrices y otros conceptos matemáticos abstractos.

Durante esta fase, los estudiantes trabajan de manera colaborativa en sus grupos. Discuten y debaten sobre cómo estructurar la información de forma ordenada, considerando las conexiones entre las páginas y asegurándose de que la matriz refleje correctamente la red de enlaces. Este trabajo en grupo fomenta la colaboración y el intercambio de ideas, lo que permite que los estudiantes lleguen a acuerdos sobre la mejor manera de representar las relaciones entre las páginas. Además, el docente juega un rol fundamental en este momento, guiando a los estudiantes y asegurándose de que comprendan la importancia de la precisión en la representación de las conexiones y la correcta organización de la información. De este modo, la fase de Sistematización se convierte en una oportunidad para que los estudiantes desarrollen habilidades tanto matemáticas como colaborativas, mientras se preparan para las siguientes etapas del proceso de resolución del problema.

El tiempo estimado para el desarrollo de esta actividad son 15 minutos.

Con la red inicial ya definida y representada gráficamente, se da paso a las fases de **Matematización (MT)** y **análisis de sistema matemático (ASM)**, los estudiantes comienzan a transformar la representación gráfica de las conexiones en una forma algebraica más precisa y estructurada. En esta etapa, los estudiantes proceden a escribir la **matriz traspuesta** a partir de la matriz de adyacencia que han construido previamente. Este paso es crucial, ya que la matriz traspuesta refleja las relaciones de los enlaces pero desde una perspectiva inversa, lo que permite analizar cómo la relevancia de una página web puede ser influenciada por las conexiones que otras páginas establecen hacia ella.

Una vez que la matriz traspuesta ha sido construida, los estudiantes pasan a la **normalización** de la matriz. En este proceso, se aseguran de que cada columna de la matriz sume 1, lo que es fundamental para que la matriz sea adecuada para su posterior análisis, especialmente en lo que respecta al cálculo de valores propios. La normalización tiene como objetivo distribuir uniformemente la importancia o relevancia entre las páginas web en la red, haciendo que cada columna represente la proporción de influencia que una página ejerce sobre las demás.

Este proceso asegura que los resultados obtenidos sean consistentes y comparables, dado que las matrices normalizadas son fundamentales para la aplicación de métodos como el de PageRank, que se utiliza para medir la relevancia de las páginas.

Durante esta fase, el profesor desempeña un papel clave, circulando entre los grupos y realizando preguntas orientadoras que estimulan la reflexión y el análisis de los estudiantes. Preguntas como: ¿Por qué es necesario normalizar las columnas? o ¿Qué implicación tiene esta transformación en el contexto de la relevancia de las páginas? están diseñadas para hacer que los estudiantes piensen más allá de los cálculos matemáticos y comprendan el impacto de la normalización en el significado de los datos que están manipulando. La normalización no es solo un procedimiento técnico, sino que tiene una implicación práctica significativa, ya que modifica la distribución de la relevancia entre las páginas, asegurando que se mantenga la coherencia en el análisis global de la red.

Estos procesos de **matematización** y **Análisis de sistema matemático (ASM)** son, además, unas fases ricas en argumentación y análisis crítico. A medida que los estudiantes realizan los cálculos y aplican la normalización, surgen discusiones sobre cómo las propiedades de la matriz modificada afectan la estructura inicial de la red de enlaces. Los grupos intercambian ideas sobre cómo la normalización cambia la manera en que las páginas web son consideradas en términos de su relevancia dentro de la red, y cómo la influencia mutua entre las páginas se refleja en la matriz transformada. Este es un momento clave para que los estudiantes profundicen en la comprensión del modelo matemático y su relación con el contexto real que están analizando, al mismo tiempo que desarrollan habilidades matemáticas más complejas.

El docente, en su rol de facilitador, guía estas discusiones, ayudando a los estudiantes a conectar los aspectos técnicos con el contexto práctico del problema. A través de la formulación de preguntas y de ofrecer ejemplos, el docente asegura que los estudiantes no solo realicen los cálculos de manera correcta, sino que también comprendan el propósito matemático detrás de cada paso y cómo la estructura de la matriz refleja las relaciones de relevancia entre las páginas web en el mundo digital. De este modo, las fases de **Matematización (MT)** y **Análisis de sistema matemático (ASM)** se convierten en un espacio de aprendizaje, donde los estudiantes desarrollan tanto su competencia técnica como su capacidad para interpretar y aplicar los conceptos matemáticos en contextos reales. La duración de esta actividad es de 30 minutos.

6.2.3. Momento de cierre

En los últimos 20 minutos, la clase avanza hacia las fases de **Interpretación/Evaluación (IE)** y **Validación (VL)**, donde los estudiantes comienzan a reflexionar sobre los resultados obtenidos a lo largo de la actividad. En primer lugar, los estudiantes interpretan los resultados del vector propio dominante, el cual representa el nivel de relevancia de cada página web dentro de la red que han modelado. Esta interpretación no solo implica el análisis de los valores numéricos obtenidos, sino también una comprensión profunda de cómo esos valores reflejan la estructura de la red y las interacciones entre las páginas. Cada grupo debe asignar un orden de relevancia a las páginas web, lo que permite observar cuál es la página más importante dentro de la red según el análisis realizado.

Una vez que los estudiantes han asignado el orden de relevancia, se les pide que comparen estos resultados con los obtenidos en la primera sesión, lo que les permite reflexionar sobre las similitudes o diferencias en los enfoques y resultados. Este momento es crucial para que los estudiantes establezcan conexiones entre lo aprendido en diferentes contextos y para que reflexionen sobre cómo el uso de herramientas matemáticas puede modificar la interpretación de un mismo problema. El docente, en este sentido, fomenta la discusión grupal mediante preguntas críticas que invitan a la reflexión y a la evaluación del proceso matemático. Algunas de las preguntas orientadoras son: ¿El procedimiento fue consistente?, ¿Qué diferencias o similitudes observan en los resultados obtenidos hoy con respecto a la clase anterior?* y ¿Cómo validarían su respuesta utilizando otro método?

Estas preguntas tienen como objetivo ayudar a los estudiantes a evaluar no solo los resultados obtenidos, sino también los métodos utilizados para llegar a esos resultados. Se les anima a reflexionar sobre si el modelo matemático empleado fue adecuado y si la interpretación de los datos fue correcta. Asimismo, se les desafía a considerar otros enfoques o métodos alternativos que podrían haberse utilizado para resolver el problema y validar los resultados obtenidos. Este tipo de reflexión fomenta una comprensión crítica del proceso matemático y les permite identificar posibles limitaciones o áreas de mejora en el análisis realizado.

Al concluir la reflexión grupal, cada grupo selecciona un representante para exponer sus conclusiones ante el resto de la clase. Este momento de exposición no solo refuerza el aprendizaje individual, sino que también promueve el aprendizaje colectivo, ya que permite a los estudiantes escuchar diferentes perspectivas sobre cómo abordar el mismo problema y comparar las soluciones propuestas por otros grupos. Además, la exposición de las conclusiones ofrece a los estudiantes la oportunidad de comunicar sus razonamientos matemáticos de manera clara y coherente, una habilidad fundamental tanto en el ámbito académico como en el profesional. El docente, durante las exposiciones, puede intervenir para reforzar puntos clave, aclarar dudas o proporcionar una retroalimentación constructiva, asegurándose de que todos los estudiantes compartan una comprensión común sobre los resultados y el proceso seguido.

En conjunto, las fases de Interpretación/Evaluación y Validación no solo permiten a los estudiantes consolidar los conocimientos adquiridos durante la clase, sino también desarrollar habilidades metacognitivas que les ayudarán a analizar y evaluar sus propios procesos de resolución de problemas en futuras situaciones. Al finalizar la clase, los estudiantes habrán tenido la oportunidad de conectar los procedimientos matemáticos con el contexto real del problema, al mismo tiempo que habrán practicado el razonamiento crítico, la comunicación matemática y la validación de resultados en un entorno colaborativo.

6.2.4. Objeto matemático

El avance de esta sesión conlleva la inclusión y utilización de los siguientes componentes matemáticos:

- Matríz de adyacencia.
- Matríz Traspuesta.
- Normalización de una matríz o Matríz Estocásticas.
- Valores y vectores propios
- Vector Perron-Frobenius.

6.2.5. Descripción de la actividad

Es importante recordar que, en el contexto de la modelización matemática, la etapa de Formulación del Problema (FP) constituye un elemento fundamental, dado que implica la interpretación y conversión de una situación real al lenguaje matemático. El comienzo de la sesión se orienta a examinar de qué manera la representación de las relaciones entre páginas web a través de una matriz binaria puede favorecer la comprensión y organización del problema en esta fase inicial del proceso de modelización matemática. Ver **figura 6.2**

Relevancia de una Página Web

Figura 1: Conexión a internet

En el mundo digital, las conexiones entre páginas web forman redes complejas que nos permiten acceder a la información de manera eficiente. Cada vez que navegamos por internet, interactuamos con una vasta red de páginas interconectadas a través de enlaces. Estos enlaces son como "puentes"que establecen relaciones directas entre las páginas. Para analizar estas conexiones de manera estructurada, podemos representarlas como un sistema de ceros y unos, que nos ayuda a visualizar y comprender cómo se organizan estas redes.

En este sistema:

a) Un 1 indica que existe una conexión o enlace entre dos páginas.

b) Un 0 indica que no hay conexión directa entre ellas.

En nuestra primera clase, exploramos cómo las conexiones entre páginas web pueden representarse matemáticamente para analizar su relevancia dentro de una red. A través de un sistema de ecuaciones, modelamos las relaciones entre las páginas, considerando cómo estas distribuyen su ïmportancia"mediante los enlaces que las conectan. Este enfoque nos permitió interpretar y resolver el problema inicial: ¿Qué página web es más relevante?.

Figura 6.2: Introducción situación-problema ¿Qué página web es más relevante?,parte II

Al inicio de la sesión , se plantean a los estudiantes dos interrogantes derivadas de la actividad, que permiten iniciar el proceso de modelización matemática y facilitan la comprensión de la etapa de Formulación del Problema (FP), como se detallará más adelante en el análisis de la respuesta experta. En específico, se les indaga acerca de cuál sería la matriz asociada, teniendo en cuenta los vínculos presentados en la tabla. Una vez que los estudiantes hayan construido la matriz de adyacencia, se procederá a una puesta en común con el objetivo de consolidar las fases de Sistematización (SM), Matematización (MT) y Análisis del Sistema Matemático (ASM). Ver **figura 6.3**

Ahora, en esta segunda experiencia, ampliaremos nuestro análisis utilizando herramientas más estructuradas. En particular, siguiendo los enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

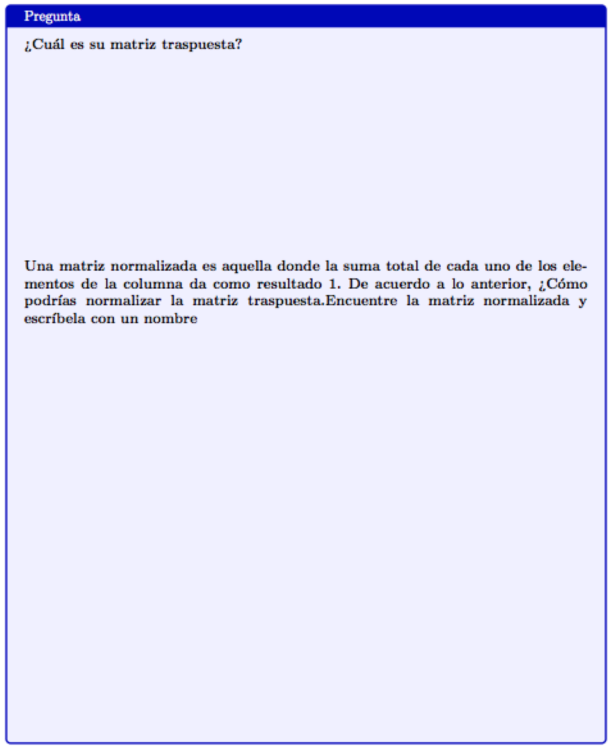
Pregunta

De acuerdo a la tabla, ¿Cuál es la matríz asociada, tomando encuenta los puntos a) y b)?

Explique el por qué su decisión de estructurar la información de esa manera

Figura 6.3: Preguntas de inicio actividad ¿Qué página web es más relevante?, parte II

A diferencia de la actividad previa, en la cual se solicitó a los estudiantes informantes que representaran la situación problemática mediante un grafo, en esta ocasión se requiere que la información sea representada a través de una matriz de adyacencia, su transpuesta y una matriz normalizada durante la fase de Sistematización (SM). Ver **figura 6.4** y **6.5**



Pregunta

¿Cuál es su matriz traspuesta?

Una matriz normalizada es aquella donde la suma total de cada uno de los elementos de la columna da como resultado 1. De acuerdo a lo anterior, ¿Cómo podrías normalizar la matriz traspuesta.Encuentre la matriz normalizada y escríbela con un nombre

Figura 6.4: Preguntas del proceso de Sistematización (SM), taller II

Pregunta

¿Cuáles son los valores propios de la matriz normalizada?, ¿Cómo se determinan?

Figura 6.5: Preguntas del proceso de sistematización (SM), taller II

Posteriormente, en la fase de Matematización (MT), se procederá a determinar los valores propios, lo cual permitirá, en la etapa de Análisis del Sistema Matemático (ASM), establecer el sistema de ecuaciones correspondiente al cálculo del vector propio, conocido como el vector de Perron-Frobenius.

De igual manera, las interrogantes planteadas por el educador exhiben un carácter orientador, aunque con menor grado de dirección en comparación con la sesión anterior. Si bien estas preguntas facilitan el avance a través de las etapas del proceso de modelización matemática, en un principio se lleva a cabo un recordatorio de los momentos esenciales de la experiencia previa, lo cual favorece que los alumnos realicen las actividades con mayor independencia.

6.2.6. Respuesta Experta

En la **tabla 6.4** y **6.5** se presenta un análisis detallado de las respuestas expertas, en relación a las preguntas y acciones planteadas durante la primera sesión de enseñanza. Este análisis se organiza siguiendo las diversas fases que componen el proceso de modelización matemática, lo que proporciona una visión clara y ordenada de la interacción entre las actividades propuestas y los objetivos de aprendizaje correspondientes a cada etapa.

Fases	Respuesta experta a las preguntas
SM	De acuerdo a la tabla, ¿Cuál es la matríz asociada, tomando en cuenta los puntos a) y b)? Resp: $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ M será llamada matríz de adyacencia.
SM	¿Cuál es su matriz traspuesta? Resp: $$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
SM	Una matriz normalizada es aquella donde la suma total de cada uno de los elementos de la columna da como resultado 1. De acuerdo a lo anterior, ¿Cómo podrías normalizar la matríz traspuesta.Encuentre la matriz normalizada y escríbela con un nombre. Resp: $$M^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabla 6.4: Respuestas expertas segunda sesión, taller 2

Fases	Respuesta experta a las preguntas
MT	¿Cuáles son los valores propios de la matriz normalizada?, ¿Cómo se determinan?. Resp 1: $$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -\frac{1}{2}; \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$ Resp 2: Se determina mediante el calculo de $$\left| M^N - \lambda \cdot I \right| = 0$$.
ASM	Si evaluamos el mayor de los valores propios obtenidos en la matríz $M^N - \lambda \cdot I$. Calcular el vector propio $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ asociado. Resp: $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
IE	¿Observas alguna similitud y/o diferencia en los resultados obtnidos comparados con la primera clase para obtener el orden y relevancia final de cada página web? Resp: $$\left.\begin{array}{cccccccc} -x_1 & + & & x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & - & x_2 & & & & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & - & x_4 & & = & & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +x_4 & = & 4 \end{array}\right\}$$ Es el mismo sistema de ecuaciones de la sesión 1.
VL	Determinar el orden de relevancia de cada página web Resp: $$\underbrace{x_1}_{\frac{48}{31}} + \underbrace{x_2}_{\frac{16}{31}} + \underbrace{x_3}_{\frac{36}{31}} + \underbrace{x_4}_{\frac{24}{31}} = 4$$

Tabla 6.5: Respuestas expertas segunda sesión, taller 2

6.2.7. Posibles estrategias

En el análisis de la sesión de clase, se han tomado en cuenta las posibles estrategias que los estudiantes podrían emplear para la construcción del modelo matemático que aborda el problema planteado, específicamente durante el desarrollo de las fases de Matematización (MT) y Análisis del Sistema Matemático (ASM).

La **tabla 6.6** presenta una descripción detallada de dichas estrategias correspondientes a la primera clase de la secuencia didáctica.

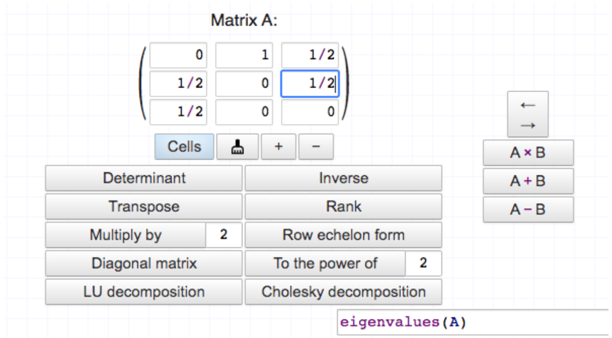
Estrategias	**Ejemplos**
Introducir los coeficientes de la matríz normalizada en el software matrix calculator y encontrar los valores propios	
Calcular el/los valor(es) propio(s) y calcular $\left(M^N - \lambda \cdot I\right) = 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$=0
Evaluar el mayor valor propio ($\lambda = 1$) y calcular su vector propio asociado (vector de Perron-Frobenius)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
Determinación del sistema de ecuaciones no homogeneo asociado al problema	$\left.\begin{array}{lllllll} -x_1 & + & x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & & = 0 \\ -x_2 & + & \frac{1}{3}x_1 & & & & = 0 \\ -x_3 & + & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + \frac{1}{2}x_4 & = 0 \\ -x_4 & + & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & = 0 \end{array}\right\}$

Tabla 6.6: Estrategias y ejemplos primera sesión, taller 1

6.2.8. Dificultades y errores

En esta lección de la secuencia didáctica, se lleva a cabo un análisis detallado de las dificultades y errores potenciales que los estudiantes pueden encontrar durante las fases de FP, SM, MT, ASM y IE en la **tabla 6.7**. No se abordan dificultades o errores en VL , dado que dicha fase se desarrolla mediante una actividad de puesta en común con el grupo, lo que permite una evaluación colaborativa.

Categorías	Posibles errores y dificultades	Retroalimentación
FP	No logra representar a través de una matríz de adyacencia el problema correctamente	Observar nuevamente la lectura inicial de introducción donde menciona: *Un 1 indica que existe conexión o enlace entre dos páginas* y *un 0 indica que no hay conexión directa entre ellas*
SM	No representa a través de una matríz traspuesta la matríz de adyacencia	¿Cuál es la criterio para generar una matríz traspuesta?.
SM	No representa a través de una matríz traspuesta la matríz Normalizada (estocástica)	Recordar que una matríz normalizada (estocástica) es aquella donde la sumatoria de los coeficientes de cada columna es igual a 1
MT	No comprenden cómo calcular el/los valor/es propio(s)	1)Incorporar los datos de la matríz normalizada (estocástica) al software Matrix Calculator y resolver. 2) Calcular el determinante de $$M^N - \lambda \cdot I = 0$$
ASM	No comprenden cómo calcular el vector propio asociado al problema (vector Perron-Frobenius)	Calcular evaluando el mayor valor propio lo siguiente: $$\left(M^N - \lambda \cdot I\right) \cdot \overrightarrow{v} = 0$$
IE	No comprende el desarrollo de solución del sistema de ecuaciones no homogeneo	¿Cómo se calcula un sistema de ecuaciones no homogeneo?

Tabla 6.7: Posibles dificultades y errores en base a los procesos de Blomjhø y Haghaard Jensen

6.3. Clase 3: Los más buscados

El desarrollo de esta actividad se estructura en tres momentos clave: inicio, desarrollo y cierre, fundamentados en los subprocesos de Blomjøh y Højgaard-Jensen (Formulación del problema, Sistematización, Matematización, Análisis del sistema matemático, Interpretación/Evaluación y Validación). La actividad se implementa en 4 grupos de 3 integrantes y está diseñada para una sesión de 90 minutos.

6.3.1. Momento de inicio

La sesión comienza con una introducción al caso planteado: un misterio en el que se debe identificar al culpable entre cinco individuos mediante herramientas matemáticas como grafos o matrices. El docente contextualiza la actividad conectándola con problemas reales donde se analiza información compleja mediante modelos matemáticos, enfatizando cómo estas herramientas permiten abstraer, simplificar y resolver situaciones que surgen en diversos campos como la investigación criminal, el análisis de redes sociales o la gestión de datos. Para captar la atención de los estudiantes, el docente puede ejemplificar brevemente un caso análogo y destacar la relevancia del pensamiento matemático en la vida cotidiana.

Durante este momento, se realiza la **Formulación del problema (FP)**, donde se explican los objetivos de la actividad y se plantea el interrogante principal: ¿Quién es el culpable según el análisis de las acusaciones cruzadas? Se subraya la importancia de comprender bien las relaciones entre los sospechosos y de elegir representaciones matemáticas adecuadas que permitan modelar y resolver el problema de forma eficiente.

El docente organiza a los estudiantes en 4 grupos de 3 integrantes, fomentando la colaboración y la discusión dentro de los equipos. Antes de comenzar el trabajo en grupo, se promueven acuerdos internos, como la asignación de roles (coordinador, encargado de registros, portavoz, entre otros) para optimizar la participación equitativa y la gestión del tiempo. A continuación, se entrega una copia del informe policial que contiene las declaraciones de los sospechosos. El documento presenta información rica y detallada que invita a los estudiantes a analizar las interacciones y las posibles contradicciones en los testimonios.

Cada grupo dispone de cinco minutos para leer y comprender el enunciado, identificando las conexiones clave entre los personajes. Durante este tiempo, los estudiantes subrayan las afirmaciones relevantes, discuten sus primeras impresiones sobre el caso y proponen preguntas iniciales que los ayudarán a estructurar su análisis posterior. Mientras tanto, el docente circula por el aula, atendiendo dudas puntuales y alentando a los estudiantes a enfocarse en las relaciones esenciales que deberán modelar matemáticamente.

Se ha estimado que esta fase tendrá una duración aproximada de 15 minutos, con un ritmo diseñado para facilitar la concentración de los estudiantes en la tarea, asegurando así una base sólida para las siguientes etapas de la actividad.

6.3.2. Momento de desarrollo

En el desarrollo de esta fase, que se extiende a lo largo de 60 minutos, se estructuran tres subprocesos fundamentales que permiten una profundización progresiva en el proceso de modelación matemática. El primero de estos subprocesos es la **Sistematización (SM)**, que ocupa los primeros 15 minutos. Durante este tiempo, los estudiantes, organizados en equipos de trabajo, analizan el problema presentado, identificando sus características clave y seleccionando el modelo matemático que consideren más adecuado para abordarlo. En este contexto, se da especial énfasis a la justificación de la elección del modelo, que puede incluir herramientas como **grafos** o **matrices**, dependiendo de la naturaleza del problema. La selección y justificación del modelo involucra una reflexión crítica sobre las propiedades del sistema a modelar, considerando las ventajas y limitaciones de los diferentes enfoques matemáticos posibles.

A continuación, se transita al subproceso de **Matematización (MT)**, que se desarrolla durante los siguientes 25 minutos. En esta fase, los estudiantes se enfocan en transformar la información y los datos del problema en representaciones matemáticas específicas, como grafos, matrices u otras estructuras matemáticas adecuadas. El objetivo principal es que los equipos construyan estas representaciones de manera precisa y coherente, asegurándose de que las relaciones planteadas en el caso original se reflejen adecuadamente en las herramientas matemáticas elegidas. Este subproceso es crucial, ya que permite la conversión de la situación problemática en un sistema matemático, lo que sienta las bases para el análisis posterior.

Finalmente, en los últimos 20 minutos, se lleva a cabo el subproceso de **Análisis del Sistema Matemático (ASM)**. Durante esta etapa, los estudiantes aplican técnicas y métodos matemáticos específicos para examinar el modelo previamente construido. Dependiendo del enfoque adoptado, esto puede incluir la evaluación de métodos de centralidad en grafos o la evaluación de patrones en las matrices, entre otros procedimientos matemáticos pertinentes. Este subproceso se caracteriza por un análisis profundo de las propiedades del sistema matemático modelado, donde los estudiantes exploran la validez de sus representaciones y buscan patrones, relaciones o soluciones dentro del modelo. Además, se favorece la discusión intergrupal, moderada por el docente, en la que los estudiantes comparan enfoques, argumentan sobre sus decisiones y reflexionan colectivamente sobre los resultados obtenidos. Esta instancia de debate matemático no solo promueve la colaboración y el intercambio de ideas, sino que también fomenta el desarrollo de competencias argumentativas y críticas en los estudiantes, esenciales para la consolidación de su comprensión matemática.

6.3.3. Momento de cierre

Finalmente, el cierre de la actividad, que se lleva a cabo durante los últimos 15 minutos, integra de manera estructurada las fases de **Interpretación/Evaluación (IE)** y **Validación (VL)** del proceso de modelación matemática. En los primeros 10 minutos de este cierre, los estudiantes se centran en la interpretación de los resultados obtenidos a partir de los modelos matemáticos que han desarrollado previamente. En esta etapa, los equipos analizan y discuten los resultados generados por sus representaciones matemáticas, buscando interpretaciones coherentes con el contexto original del problema. A partir de esta interpretación, los estudiantes formulan conclusiones sustentadas que deben estar basadas en una argumentación matemática sólida y justificada. En particular, se espera que los estudiantes resuelvan la pregunta central del problema planteado, como por ejemplo la identificación del culpable en el contexto de un caso hipotético, demostrando su capacidad para vincular las soluciones matemáticas con la situación real o hipotética modelada.

En los últimos 5 minutos, se da paso a la fase de **Validación (VL)**, donde los estudiantes reflexionan sobre las limitaciones inherentes a los modelos que han aplicado. Este proceso de validación implica una evaluación crítica de la idoneidad y precisión de los modelos matemáticos utilizados, reconociendo posibles suposiciones simplificadoras, puntos ciegos o restricciones que podrían haber influido en la fiabilidad de los resultados. Además, en esta fase, los estudiantes participan en un debate orientado hacia la identificación de posibles adaptaciones al modelo, en caso de que el escenario planteado incluyera información adicional, incertidumbres mayores o ambigüedades. Este ejercicio de reflexión no solo permite que los estudiantes reconozcan las limitaciones de sus propios enfoques, sino que también fomenta la capacidad crítica para proponer mejoras y ajustar sus modelos en función de nuevas condiciones o desafíos. En última instancia, este proceso de interpretación y validación tiene como objetivo fortalecer las competencias de los estudiantes en cuanto a la evaluación crítica de sus propios resultados matemáticos, promoviendo una comprensión profunda de la relación entre el modelo matemático y el contexto original del problema.

En el cierre de la actividad, además de las fases de **Interpretación/Evaluación (IE)** y **Validación (VL)**, se plantean dos preguntas de reflexión que buscan fomentar la autoevaluación crítica y la transferencia del aprendizaje a otros contextos. Estas preguntas son las siguientes:

1. ¿De qué manera el uso de grafos o matrices como herramientas matemáticas te permitió abordar la situación planteada de una forma diferente a otros métodos que habías utilizado anteriormente?. Esta pregunta invita a los estudiantes a reflexionar sobre la innovación metodológica que representa el uso de modelos matemáticos como grafos o matrices en comparación con otros enfoques tradicionales o previamente utilizados. Se les anima a identificar cómo estas herramientas matemáticas pudieron ofrecer una nueva perspectiva o facilitar una solución más eficiente o precisa en el contexto del problema planteado. Además, se busca que los estudiantes reconozcan las ventajas y desafíos específicos que implica el uso de grafos o matrices en el análisis de situaciones reales.

2. ¿Crees que podrías aplicar los métodos estudiados, como grafos o matrices, para modelar y resolver problemas en otros contextos o situaciones reales? Explica por qué. En esta segunda pregunta, se plantea un ejercicio de transferencia del aprendizaje, donde los estudiantes deben considerar si los métodos utilizados pueden extrapolarse a otros dominios de aplicación. La reflexión los lleva a explorar cómo las herramientas matemáticas aprendidas pueden ser útiles en diferentes contextos reales, ampliando su capacidad para aplicar lo aprendido fuera del ámbito académico. Se espera que los estudiantes justifiquen sus respuestas, demostrando una comprensión profunda de los métodos estudiados y su potencial aplicación en situaciones diversas, ya sea en áreas profesionales, sociales o incluso en la vida cotidiana.

Estas preguntas de reflexión son fundamentales para que los estudiantes no solo evalúen sus propios aprendizajes, sino que también desarrollen la capacidad de transferir y aplicar sus conocimientos matemáticos en distintos escenarios, lo que fortalece su formación como futuros profesionales en matemáticas y educación matemática.

6.3.4. Objeto matemático

De acuerdo a la elección del estudiante, el avance de esta sesión conlleva la inclusión y utilización de los siguientes componentes matemáticos:

Si es por representación de un grafo:

- Representación gráfica (grafos).
- Valoración probabilística de los caminos.
- Sistemas de ecuaciones no homogeneos.

Si es por representación matricial:

- Matríz de adyacencia.
- Matríz Traspuesta.
- Normalización de una matríz o Matríz Estocásticas.
- Valores y vectores propios
- Vector Perron-Frobenius.

6.3.5. Descripción de la actividad

La introducción de la situación-problema (FP) se hace mediante el estudio de un caso relacionado a la desaparición de un objeto de gran valor donde la persona culpable será aquella que posea mayor relevancia entre las acusaciones. Ver **figura 6.6**

Figura 6.6: Introducción situación-problema ¿Quién es el culpable?

El comienzo de la sesión se centra en examinar cómo las acusaciones o conexiones entre los 5 amigos pueden ser representadas, ya sea mediante un grafo (representación gráfica) o mediante una matriz binaria. Esta selección contribuye a facilitar la comprensión y organización del problema (SM) en esta fase inicial del proceso de modelización matemática, fomentando así una representación más clara y estructurada de los datos.

Esto se puede observar en la **figura 6.7**

Las declaraciones (acusaciones) se organizan como sigue:

Informe Policial
Alicia: Bruno es culpable y Carla también lo es.
Bruno: Diego y Alicia son culpables.
Carla: Solo Alicia y yo somos inocentes
Diego: Alicia cometió el delito
Helena: Bruno, Diego y Carla son culpables.

Preguntas de reflexión

De acuerdo a lo estudiado en las sesiones I y II, ¿Qué modelo de representación elijes para resolver el caso (grafo o matrices)?. Argumente su respuesta

Representar la información de la tabla a través de un grafo o matríz

Figura 6.7: Problema introductorio, taller 3: Los más buscados

A diferencia de las sesiones anteriores, en esta clase los estudiantes tienen la posibilidad de construir tanto un modelo gráfico como uno matricial para abordar la resolución del problema planteado. Esto implica que deben elaborar un grafo con el objetivo de extraer los datos relevantes y, a partir de ellos, avanzar hacia la fase MT, o bien construir su correspondiente matriz de adyacencia para continuar con las fases SM, MT, ASM, IE y VL. Las dos primeras preguntas propuestas en la actividad son clave para desarrollar las tres fases iniciales del proceso de modelización matemática y, simultáneamente, permiten dar respuesta integral a la situación-problema.

Asimismo, esta clase está diseñada para ser completamente autónoma para los estudiantes, quienes, en este punto, deberían haber comprendido las etapas del proceso de modelización matemática gracias a las experiencias previas. De este modo, se espera que puedan aplicar dichas etapas de forma independiente, considerando que, en esta instancia, el proceso actúa como una herramienta central para resolver el problema propuesto.

6.3.6. Respuestas Expertas

A continuación, se presenta un análisis de las respuestas expertas en relación con las interrogantes y acciones planteadas durante la tercera sesión. Este análisis se estructura de acuerdo con las distintas fases que integran el proceso de modelización matemática, ofreciendo una representación ordenada y sistemática de la interacción entre las actividades diseñadas y los objetivos de aprendizaje asociados a cada etapa. En las **tablas 6.8** y **6.9**, se detallan las respuestas esperadas para una representación gráfica en forma de grafo y, posteriormente en la **tablas 6.10** y **6.11**, a través de una representación matricial, resaltando su correlación con las etapas del proceso de modelización.

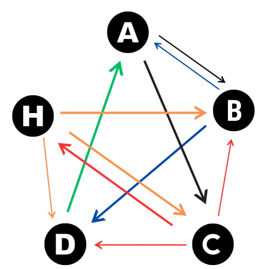
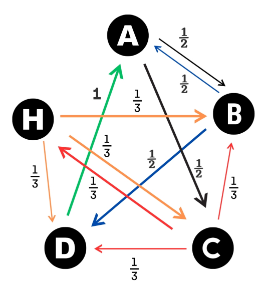
Categorías	Respuestas Expertas
SM	¿Cuál es el grafo asociado al problema? 
MT	Si la valoración o relevancia inicial de cada persona es 1 y se distribuye proporcionalmente entre las acusaciones. Es decir: 

Tabla 6.8: Categorías y Respuestas Expertas tercera sesión, taller 3

Categorías	Respuestas Expertas
MT/ASM	Cada persona se expresa como una suma de las acusaciones que recibe. $$A = 1D + \frac{1}{2}B$$ $$B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}H$$ $$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}H$$ $$D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}H$$ $$H = \frac{1}{3}C$$
IE/VL	¿Cuál es la relevancia de cada acusado? $$\underbrace{A}_{\frac{8}{5}} + \underbrace{B}_{\frac{6}{5}} + \underbrace{C}_{\frac{9}{10}} + \underbrace{D}_{1} + \underbrace{H}_{\frac{3}{10}} = 5$$ De acuerdo a lo anterior, Alicia es culpable.

Tabla 6.9: Categorías y Respuestas Expertas tercera sesión, taller 3

En esta sección se presentan las respuestas esperadas desde una perspectiva experta, desarrolladas en su forma matricial. Es fundamental subrayar que, en el transcurso del taller, se concede a los estudiantes la facultad de elegir el método que prefieran. A partir de esta selección, ellos determinan y llevan a cabo los pasos pertinentes que orientarán el proceso de resolución.

Categorías	Respuestas Expertas
FP	¿Cual es la matríz de adyacencia asociada al problema? $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
SM	¿Cuál es su matríz traspuesta? $M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
SM	¿Cuál es su matríz normalizada(estocástica)? $M^N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 6.10: Categorías y Respuestas Expertas tercera sesión, taller 3

Categorías	Respuestas Expertas
MT	¿Cuáles son el/los valor(es) propio(s)?. Para ello hay que calcular: $$\left(M^N - \lambda \cdot I\right) = 0$$ De esto tenemos que: $$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -\frac{1}{3}; \lambda_4 = \frac{-2-\sqrt{11}i}{6}; \lambda_5 = \frac{-2+\sqrt{11}i}{6}$$
ASM	Evaluar el mayor valor propio ($\lambda = 1$) y calcular su vector propio asociado (vector de Perron-Frobenius). Resp: $$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$
IE	¿Cuál es el sistema de ecuaciones asociado a la situación-problema? : Resp: De esto tenemos que: $$\left.\begin{array}{lllll} -x_1 + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_4 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - & x_2 & +\frac{1}{3}x_3 + & \frac{1}{3}x_5 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - & x_3 & + & \frac{1}{3}x_5 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 + & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}x_5 & = 0 \\ \frac{1}{3}x_3 - & x_5 & & & = 0 \end{array}\right\}$$
IE/VL	¿Cuál es la relevancia de cada acusado? $$\underbrace{A = x_1}_{\frac{8}{5}} + \underbrace{B = x_2}_{\frac{6}{5}} + \underbrace{C = x_3}_{\frac{9}{10}} + \underbrace{D = x_4}_{1} + \underbrace{H = x_5}_{\frac{3}{10}} = 5$$

Tabla 6.11: Categorías y Respuestas Expertas tercera sesión, taller 3

6.3.7. Posibles estrategias

En esta sección, se retoman y ponen en práctica las estrategias que fueron previamente presentadas y utilizadas en las sesiones 1 y 2. Tales estrategias han demostrado ser esenciales para orientar a los estudiantes en el proceso de modelización matemática, facilitando así la comprensión de los conceptos y fomentando el desarrollo autónomo de las habilidades analíticas requeridas para abordar la situación-problema planteada. La continuidad en la aplicación de estas estrategias fortalece los aprendizajes anteriores y establece una base robusta para la implementación progresiva y sistemática de las etapas del proceso de modelización matemática en contextos de mayor complejidad. Ver **tabla 6.2** y **tabla 6.6**.

6.3.8. Dificultades y errores

Para esta tercera sesión sesión , se mantienen las mismas directrices previamente establecidas en las sesiones 1 y 2. Estas pautas permiten la identificación, análisis y tratamiento sistemático de los errores comunes y las dificultades que los estudiantes pueden encontrar durante el proceso de modelización matemática. La repetición de estas directrices no solo asegura una consistencia metodológica entre las sesiones, sino que también facilita el monitoreo de los avances y retrocesos en el aprendizaje, ofreciendo una base robusta para la intervención y la mejora continua en el desarrollo de las competencias relacionadas con el modelado matemático. Ver **tablas 6.3** y **6.7**

Capítulo 7: Análisis de resultados

Este apartado se organiza en dos secciones principales. En la primera, se exponen los resultados derivados de las tres intervenciones realizadas en el marco del estudio, destacando las categorías de análisis identificadas. En la segunda, se presenta un análisis detallado y una discusión crítica de los resultados obtenidos, considerando su relación con los objetivos y preguntas de investigación planteados.

7.0.1. Evidencias de las categorías de análisis

Las **tablas 7.1 y 7.2** exponen las evidencias vinculadas al progreso de las fases del proceso de modelización matemática en la sesión 1, consideradas como categorías de análisis en la presente investigación. Dichas evidencias se fundamentan en extractos seleccionados de las producciones escritas de los participantes, complementados por una descripción minuciosa que caracteriza cada una de las etapas identificadas.

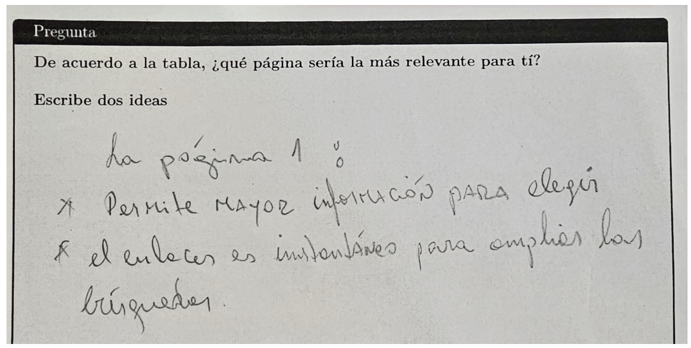
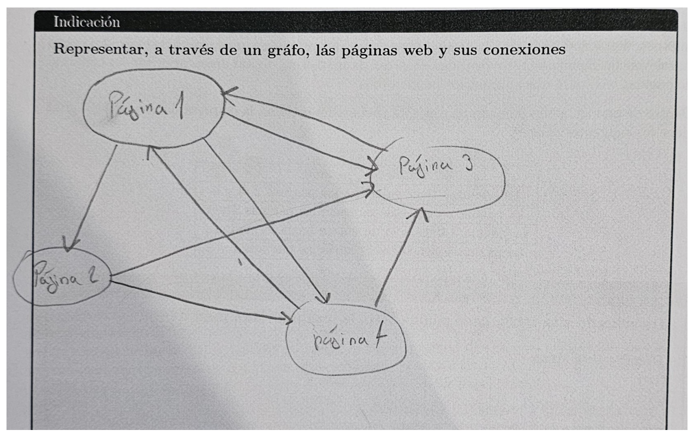
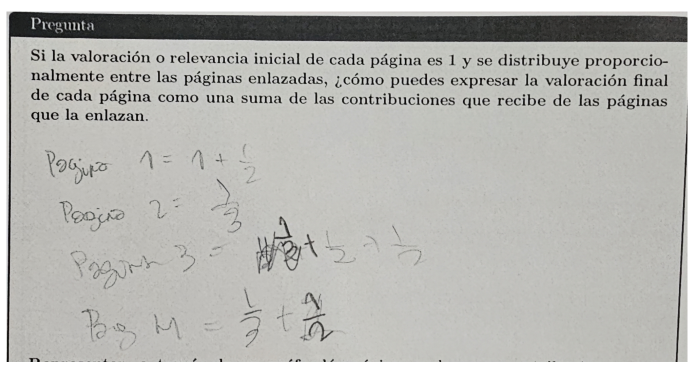
Descripción	Registro Escrito
La producción escrita del G2 evidencia la categoría FP. En ella, los estudiantes formularon observaciones sobre la situación-problema planteada y estblecieron como respuesta que la página más relevante es la página 1, con respecto a los enlaces de las páginas web dispuestos en la tabla	
La producción escrita realizada por los grupos G1, G2, G3 y G4 evidencia la categoría SM. En esta producción, los estudiantes representaron gráficamente la información contenida en la tabla mediante un grafo que muestra los enlaces entre las páginas. Las relaciones fueron diferenciadas utilizando flechas para indicar las conexiones.	
La producción escrita del G3 evidencia las categorías MT.Se observa que, a través de la valorización de cada página, logran identificar relaciones matematizables y las variables involucradas. Generan una expresión matemática que, posteriormente, se representa como un sistema de ecuación no homogéneo.	

Tabla 7.1: Descripción y registro escrito de la primera sesión, taller 1

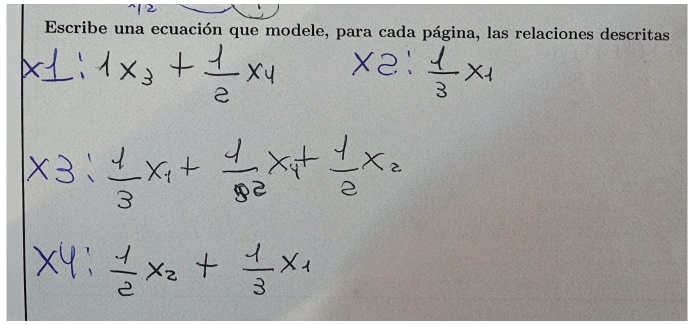
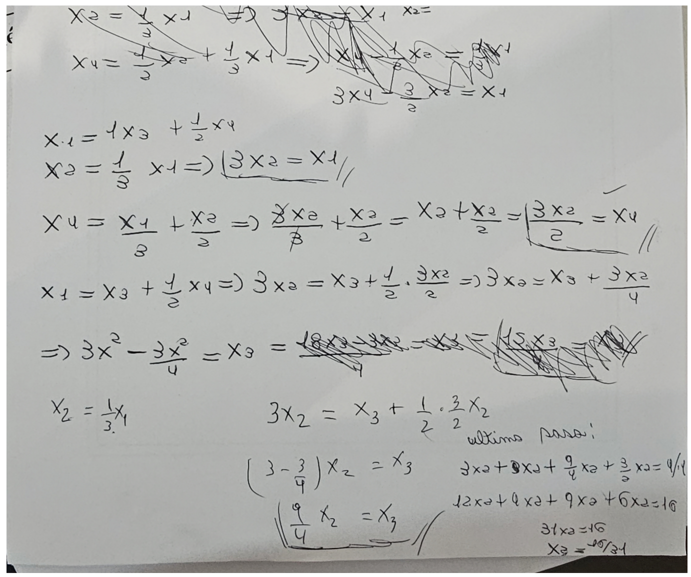
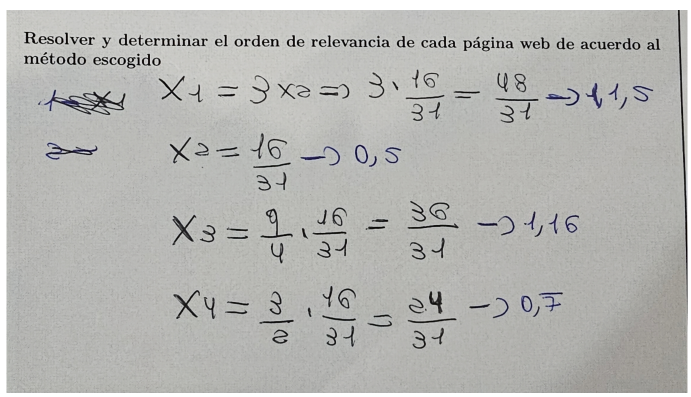
<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Registro Escrito</th></tr>
<tr><td>La producción de los grupos G1,G2,G3 y G4 revelan en su respuesta la evidencia de ASM. Los estudiantes mediante el proceso anterior (MT) lograron determinar el camino probabilístico y identificar la relación entre la valoración de la página y su camino.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La producción escrita del G1 evidencia la categoría IE. Una vez que los estudiantes generaron el sistema de ecuación no homogeneo que modela la situación, proceden a resolverlo y evaluarla con los valores conocidos para obtener el valor de relevancia de una página web. Lo anterior, se desarrolla en el marco de una puesta en común con el curso.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La producción escrita del G2 evidencia la categoría VL. En esta fase los estudiantes proceden a validar el modelo, a través de sus cálculos y revisión de procedimientos. Esta última fase, también en forma de una puesta en común con el curso, involucra la utilización de una calculadora para la determinación de los valores decimales correspondiente a cada página</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 7.2: Descripción y registro escrito de primera sesión, taller 1

Las **tablas 7.3 y 7.4** presentan las evidencias relacionadas con el avance de las fases del proceso de modelización matemática durante la sesión 2, las cuales son consideradas como categorías de análisis en la investigación actual. Estas evidencias se basan en extractos seleccionados de las producciones escritas de los participantes, acompañados de una descripción detallada que caracteriza cada una de las etapas identificadas.

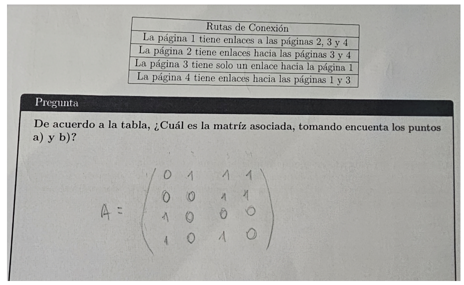
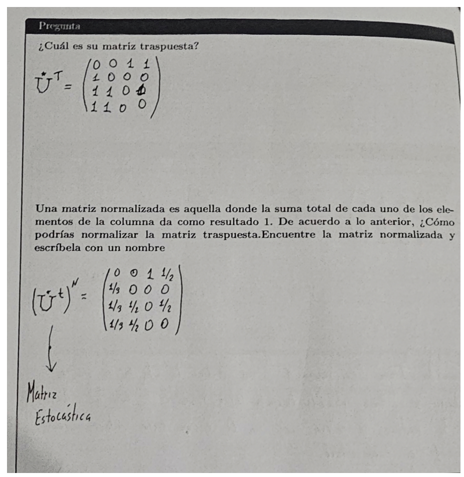
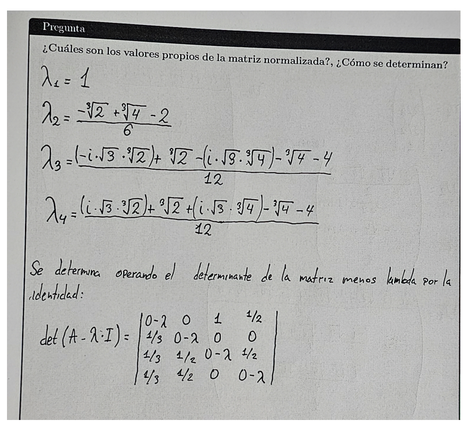
Descripción	Registro Escrito
La producción escrita del G1 evidencia la categoría FP. En ella, los estudiantes formularon la matríz asociada a la situación-problema planteada., con respecto a los enlaces de las páginas web dispuestos en la tabla	
La producción escrita llevada a cabo por el grupo G2 demuestra la categoría SM. En esta elaboración, los estudiantes plasmaron la información de la matriz transpuesta y su matríz normalizada (estocástica).	
La producción escrita del G3 evidencia las categorías MT.Se observa que, a través del calculo de los valores propios, generan una expresión matemática que, posteriormente, se utilizará en ma matríz estocástica para el cálculo del vector propio asociado.	

Tabla 7.3: Descripción y registro escrito de la segunda sesión, taller 2

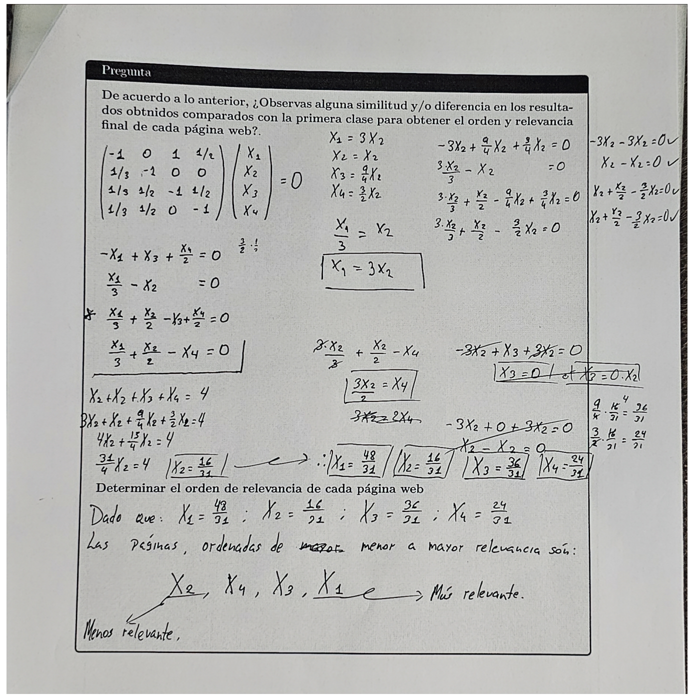
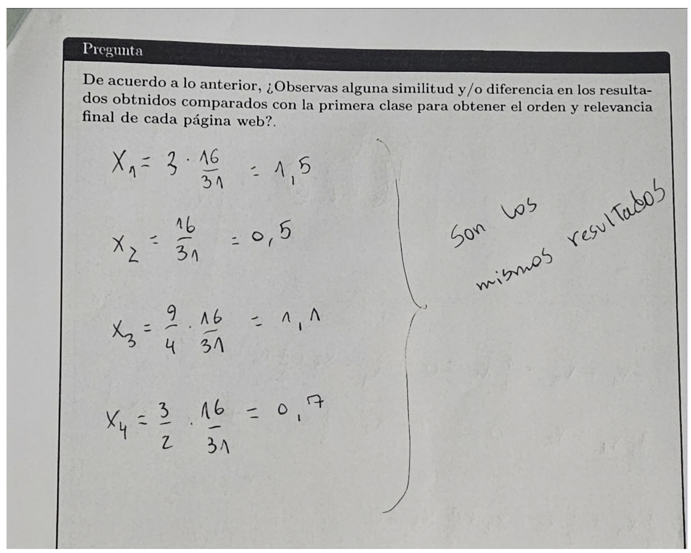
Descripción	Registro Escrito
La producción del G4 revelan en su respuesta la evidencia de ASM, IE y VL. Los estudiantes mediante el proceso anterior (MT) lograron determinar los valores propios y al valorizar este valor dentro de la matríz, ayuda a determinar el vector propio asociado	 Pregunta De acuerdo a lo anterior, ¿Observas alguna similitud y/o diferencia en los resultados obtnidos comparados con la primera clase para obtener el orden y relevancia final de cada página web?. Determinar el orden de relevancia de cada página web Dado que: $X_1 = \frac{48}{31}$; $X_2 = \frac{16}{31}$; $X_3 = \frac{36}{31}$; $X_4 = \frac{24}{31}$ Las páginas, ordenadas de ~~mayor~~ menor a mayor relevancia son: X_2, X_4, X_3, X_1 → Más relevante. Menos relevante.
La producción escrita del G1 evidencia la categoría VL. Una vez que los estudiantes generaron el sistema de ecuación no homogeneo que modela la situación, proceden a resolverlo y evaluarla con los valores conocidos para obtener el valor de relevancia de una página web. Lo anterior, se desarrolla en el marco de una puesta en común con el curso.	 Pregunta De acuerdo a lo anterior, ¿Observas alguna similitud y/o diferencia en los resultados obtnidos comparados con la primera clase para obtener el orden y relevancia final de cada página web?. $X_1 = 3 \cdot \frac{16}{31} = 1{,}5$ $X_2 = \frac{16}{31} = 0{,}5$ $X_3 = \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{31} = 1{,}1$ $X_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{31} = 0{,}7$ Son los mismos resultados

Tabla 7.4: Descripción y registro escrito de la segunda sesión, taller 2

Las **tablas 7.5**, **7.6** y **7.7** ofrecen evidencia vinculada al progreso de las fases del proceso de modelización matemática durante la sesión 3. Estas han sido clasificadas como categorías de análisis en la presente investigación. La evidencia está basada en fragmentos elegidos de las producciones escritas de los participantes, junto con una descripción minuciosa que caracteriza cada una de las etapas identificadas. Se eligió la evidencia del grupo 2 por encontrarse en mejor estado de visualización.

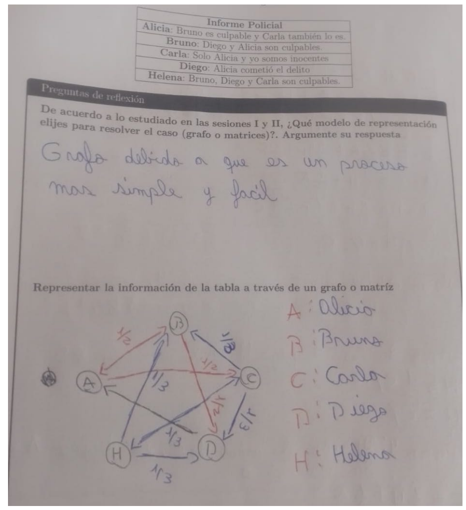
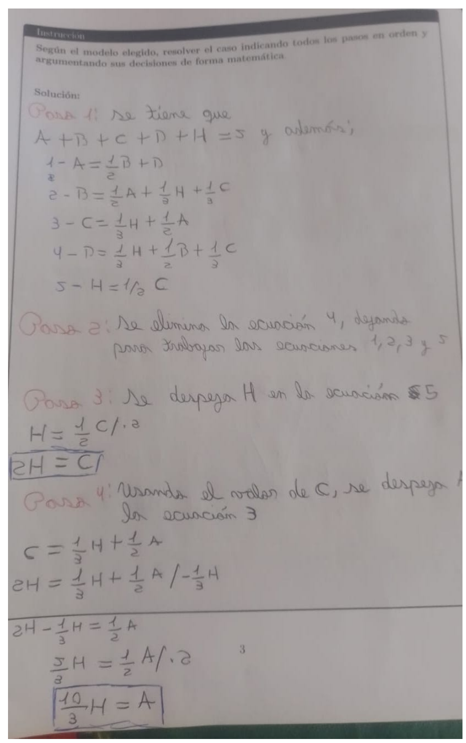
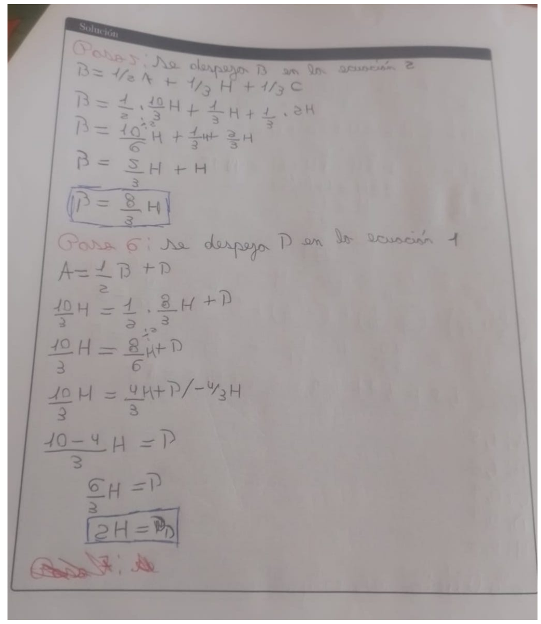
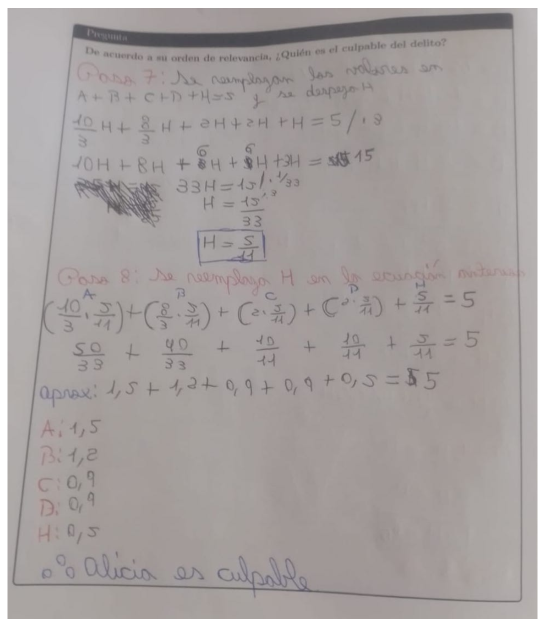
Descripción	Registro Escrito
La producción escrita del G2 evidencia la categoría FP y SM. En ella, los estudiantes representaron la situación-problema mediante un grafo y graficaron sus enlaces.	
La producción escrita realizada por los grupos evidencia la categoría MT y ASM. En esta producción, los estudiantes representan matemáticamente la información del grafo obteniendo un sistema de ecuación no homogeneo. **En este desarrollo, se distingue un error que el alumno comete al momento de interpretar** $H = \frac{1}{2}C$ **cuando lo correcto es** $H = \frac{1}{3}C$.	

Tabla 7.5: Estrategias y ejemplos tercera sesión, taller 3

Descripción	Registro Escrito
La producción escrita evidencia la continuación del ASM. **Por el error cometido en el paso anterior, el resultado no es el correcto pero el procedimiento sí**	
La producción escrita evidencia la categoría IE y VL. Una vez que los estudiantes generaron el sistema de ecuación no homogeneo que modela la situación, proceden a resolverlo y evaluarla con los valores conocidos para obtener el valor de relevancia de una página web. Se revela el mismo procedimiento de la sesión 1 y se calcula el valor de relevancia que otorga finalmente la culpabilidad a Alicia. **El grupo obtiene un resultado incorrecto debido al error en la fase de MT y ASM**	

Solución

Paso 5: Se despeja B en la ecuación 2

$B = 1/2\,A + 1/3\,H + 1/3\,C$

$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}H + \frac{1}{3}H + \frac{1}{3} \cdot 2H$

$B = \frac{10}{6}H + \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}H$

$B = \frac{5}{3}H + H$

$\boxed{B = \frac{8}{3}H}$

Paso 6: se despeja D en la ecuación 1

$A = \frac{1}{2}B + D$

$\frac{10}{3}H = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}H + D$

$\frac{10}{3}H = \frac{8}{6}H + D$

$\frac{10}{3}H = \frac{4}{3}H + D \,/ -\frac{4}{3}H$

$\frac{10-4}{3}H = D$

$\frac{6}{3}H = D$

$\boxed{2H = D}$

Pregunta

De acuerdo a su orden de relevancia, ¿Quién es el culpable del delito?

Paso 7: Se reemplazan los valores en $A+B+C+D+H=5$ y se despeja H

$\frac{10}{3}H + \frac{8}{3}H + 2H + 2H + H = 5 \,/\cdot 3$

$10H + 8H + 6H + 6H + 3H = 15$

$33H = 15 \,/\cdot \frac{1}{33}$

$H = \frac{15}{33}$

$\boxed{H = \frac{5}{11}}$

Paso 8: Se reemplaza H en la ecuación anterior

$\left(\frac{10}{3} \cdot \frac{5}{11}\right) + \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{11}\right) + \left(2 \cdot \frac{5}{11}\right) + \left(2 \cdot \frac{5}{11}\right) + \frac{5}{11} = 5$

$\frac{50}{33} + \frac{40}{33} + \frac{10}{11} + \frac{10}{11} + \frac{5}{11} = 5$

aprox: $1{,}5 + 1{,}2 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}5 = 5$

A: 1,5
B: 1,2
C: 0,9
D: 0,9
H: 0,5

∴ Alicia es culpable

Tabla 7.6: Estrategias y ejemplos tercera sesión, taller 3

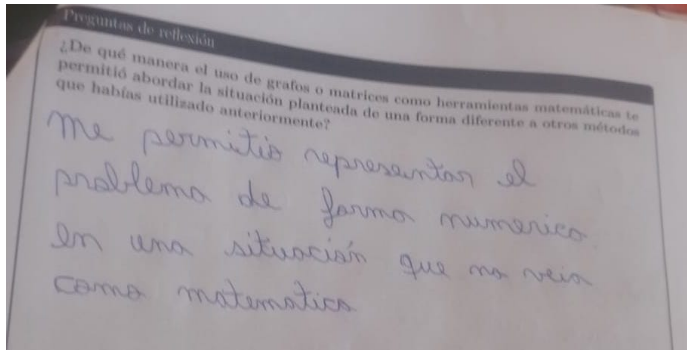
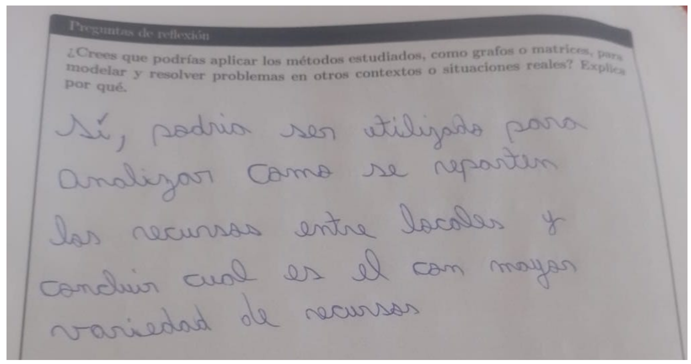
Descripción	Registro Escrito
La producción escrita pertenece a una reflexión en torno a los métodos propuestos (grafo o matrices).	
La producción escrita evidencia una proyección futura sobre este tipo de situación-problema de modelación.	

Tabla 7.7: Estrategias y ejemplos tercera sesión, taller 3

7.0.2. Síntesis global de resultados

A fin de resumir los resultados derivados de las tres intervenciones llevadas a cabo durante la fase de implementación del estudio, la **tabla 7.8, 7.9 y 7.10** presentan una categorización de los grupos de sujetos informantes conforme a las categorías en las que se manifiestan sus logros en relación con la actividad realizada, en lo que atañe a las etapas del proceso de modelización matemática durante las fases. Para ello, los datos fueron recopilados a partir de los escritos entregados por los 12 estudiantes participantes, los cuales fueron tabulados los escritos más completos y analizados. Posteriormente, se procedió al llenado de la tabla resumen de cada clase , identificando los procesos de modelización presentes en sus reproducciones (**marcando una X**) y determinando en qué medida lograron transitar por las distintas fases del modelo de Blomhøj y Højgaard-Jensen.

Clase 1

Grupos	**Categorías**					
*	FP	SM	MT	ASM	IE	VL
G1	X	X	X	X		
G2	X	X	X	X	X	X
G3	X	X	X	X		
G4	X	X	X	X	X	X

Tabla 7.8: Síntesis global de resultados clase 1

Clase 2

Grupos	**Categorías**					
*	FP	SM	MT	ASM	IE	VL
G1	X	X	X	X		
G2	X	X	X	X		
G3	X	X	X	X		
G4	X	X	X	X		

Tabla 7.9: Síntesis global de resultados, clase 2

Clase 3

Grupos	**Categorías**					
*	FP	SM	MT	ASM	IE	VL
G1	X	X	X	X	X	
G2	X	X	X	X	X	X
G3	X	X	X	X	X	X
G4	X	X	X	X	X	X

Tabla 7.10: Síntesis global de resultados, clase 3

Tabla resumen

Con el propósito de sintetizar los resultados obtenidos durante la implementación de la secuencia didáctica, se ha elaborado una tabla resumen que permite visualizar el grado de cumplimiento de las distintas fases del proceso de modelización matemática propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen. Esta síntesis se basa en los registros de los 12 estudiantes participantes, organizados en cuatro grupos de trabajo (G1, G2, G3 y G4), conformados por tres integrantes cada uno.

Para la construcción de la tabla, se consideraron los registros escritos entregados por los estudiantes, seleccionando aquel que cada grupo identificó como el más completo. Posteriormente, estos registros fueron analizados con el objetivo de determinar en qué medida se evidenciaban las distintas fases del proceso de modelización matemática: **Formulación del Problema (FP)**, **Sistematización (SM)**, **Matematización (MT)**, **Análisis del Sistema Matemático (ASM)**, **Interpretación y Evaluación (IE)** y **Validación (VL)**.

Cada una de las clases implementadas fue evaluada de manera independiente, permitiendo identificar la progresión de los grupos en el desarrollo de la modelización matemática a lo largo de la secuencia. En la tabla, la presencia de cada fase en los registros se indica con una "X", lo que denota que el grupo logró evidenciar dicha fase en su producción escrita. Adicionalmente, para determinar si un grupo alcanzó efectivamente una fase del proceso de modelización, se estableció el criterio de que esta debía estar presente en al menos dos de las tres sesiones realizadas.

Esta tabla constituye un insumo fundamental para el análisis de los resultados, ya que permite identificar patrones en la ejecución de la modelización matemática, reconocer las dificultades que enfrentaron los estudiantes en cada una de las etapas y evaluar la efectividad de la secuencia didáctica en la promoción de un aprendizaje significativo y articulado de los sistemas de ecuaciones a través de la modelización.

Grupos	**Categorías**					
*	FP	SM	MT	ASM	IE	VL
G1	X	X	X	X		
G2	X	X	X	X	X	X
G3	X	X	X	X		
G4	X	X	X	X	X	X

Tabla 7.11: Síntesis global de resultados, tabla resumen

7.0.3. Sobre la primera Sesión

La primera sesión tuvo lugar en el departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Universidad de Santiago de Chile, ubicada en la comuna de Estación Central, Chile. Para llevar a cabo su análisis, se tomaron en cuenta cuatro grupos de estudiantes que forman parte del programa de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación.

Los resultados obtenidos indican que, en dos de los grupos evaluados (G1 y G3), se presentaron dificultades y errores durante las etapas de Interpretación y Evaluación (IE) y Validación (VL). En particular, estos grupos no lograron implementar un procedimiento adecuado para resolver el sistema de ecuaciones no homogéneo planteado. La causa principal identificada se debe a la dificultad para traducir las ecuaciones descritas en términos algebraicos a términos numéricos, así como a la carencia de una interpretación adecuada del problema. Ver **figura 7.1**.

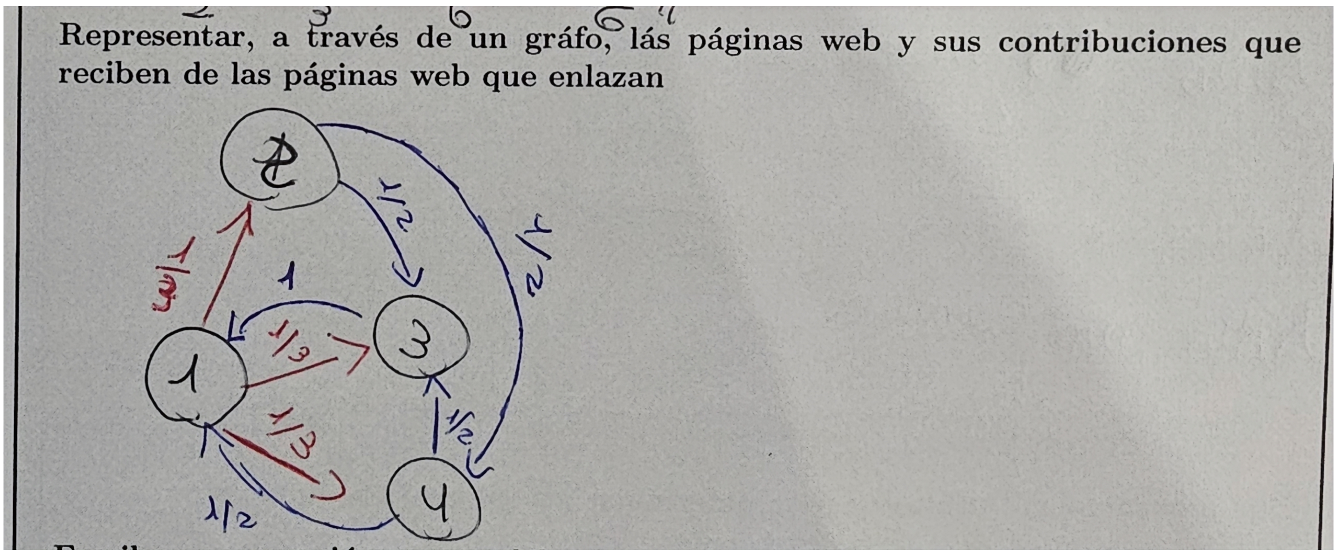


Figura 7.1: Representación del grafo asociado al problema

Se constató que la falta de una estructura adecuada en el grafo inicial dificultó a los estudiantes la correcta asignación de la valoración correspondiente a cada enlace. Ver **figura 7.2**.

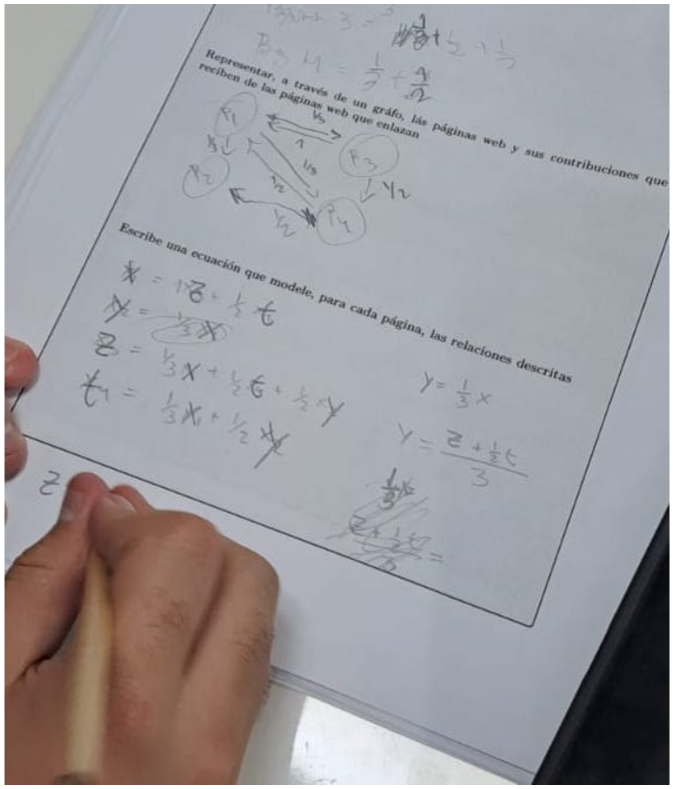


Figura 7.2: Dificultades en interpretación del grafo con expresión numérica a lenguaje algebraico

En este contexto, Brousseau (2002) (13) indica que “entender un problema implica identificar las variables significativas, reconocer las interrelaciones entre ellas y ubicarlas en un marco de referencia que posibilite la utilización de los conceptos y herramientas matemáticas adecuadas para su resolución”. Esta perspectiva teórica refuerza la imperiosa necesidad de adoptar un enfoque integral que integre la interpretación, el análisis y la movilización de conceptos matemáticos en la solución de problemas complejos.

Cuando los estudiantes identificaron los enlaces y sus valoraciones, el proceso de transición hacia su asignación probabilística presentó dificultades. Fue necesario implementar acciones de orientación que facilitaran el procedimiento, complementadas con ejemplos de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones, con el propósito de establecer conexiones entre dichos valores y las páginas correspondientes. Ver **figuras 7.3** y **7.4**.

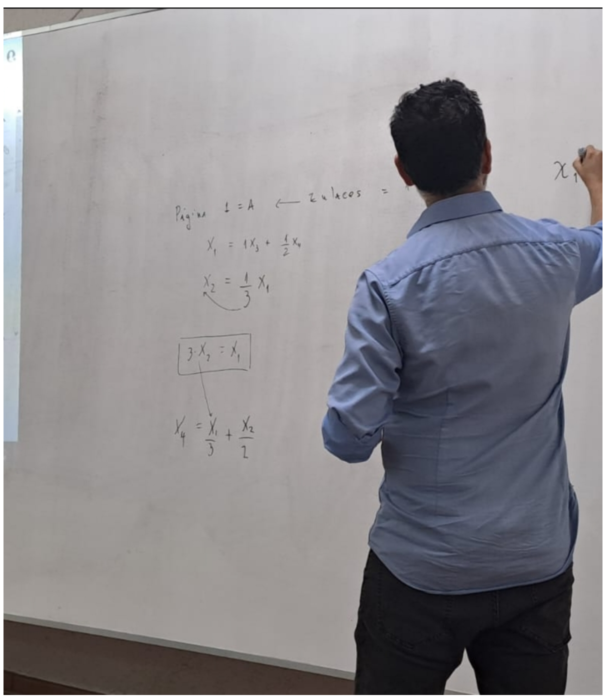


Figura 7.3: Retroalimentación sobre el transito de lenguaje numérico a lo algebraico

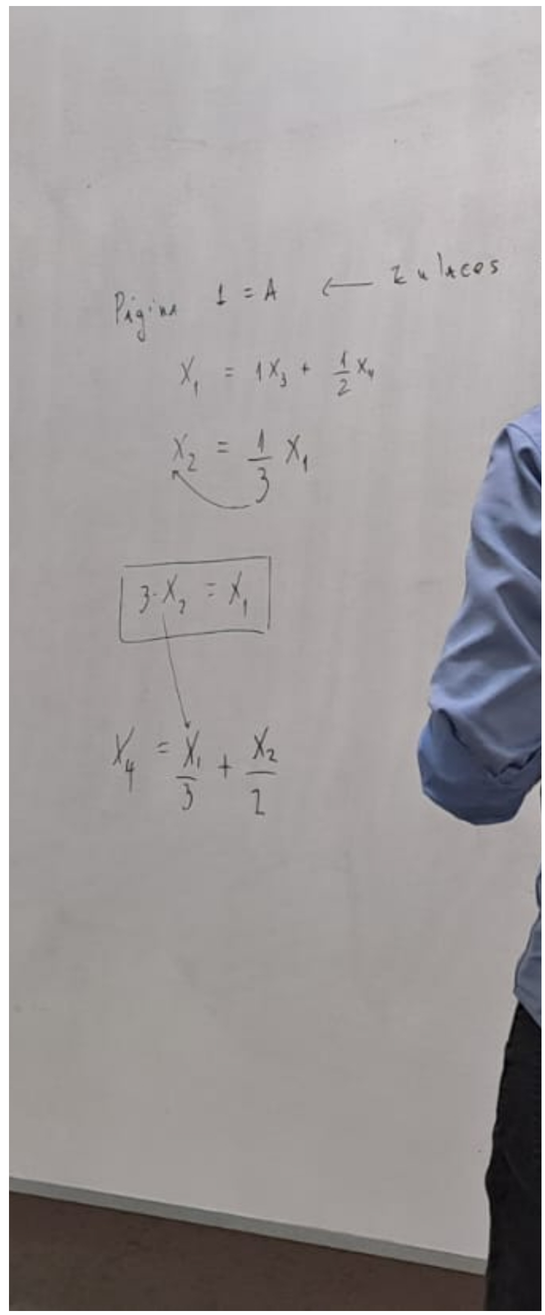


Figura 7.4: Retroalimentación sobre el transito de lenguaje numérico a lo algebraico

En conclusión, las dificultades y errores evidenciados en esta sesión estaban también vinculados a las conductas iniciales de los estudiantes, lo cual se hizo evidente en la incapacidad, en algunos casos, de realizar la traducción desde el lenguaje numérico al algebraico. Es pertinente destacar que la introducción formal de los sistemas de ecuaciones y su metodología de solución se efectúa en el primer año de educación media (OA n.º 2 en MINEDUC, 2016a, p. 60).

7.0.4. Sobre la segunda sesión

La intervención se llevó a cabo en los laboratorios de computación del departamento de matemática y computación de la Universidad de Santiago de Chile, empleando los mismos cuatro grupos de sujetos informantes seleccionados para el análisis. Estos grupos correspondían al curso de Didáctica de las Matemáticas de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación, que pertenece al segundo semestre del primer año.

Conforme a los resultados obtenidos, todas las producciones escritas reflejaron la elaboración del modelo matemático pertinente para la situación planteada; no obstante, no se logró concretar el proceso de modelización en su totalidad. Los grupos participantes se enfrentaron a una dificultad no anticipada en este estudio, vinculada con la falta de conocimientos sobre determinados elementos del álgebra lineal que no habían sido abordados durante su formación escolar ni universitaria. A pesar de que los estudiantes consiguieron identificar una relación funcional entre las variables presentes en la tabla y modelaron la situación a través de una matriz, logrando una comprensión adecuada de las fases FP (Formulación del Problema), SM (Sistematización) y MT (Matematización), encontraron dificultades en las fases ASM (Análisis del sistema matemático) y posteriores. Estas dificultades estaban relacionadas con el tránsito conceptual entre los valores propios y la obtención del vector propio, también conocido como vector de Perron-Frobenius.

Este problema demandó un período significativo, dado que los estudiantes, al no establecer vínculos evidentes entre los valores propios obtenidos y sus respectivas interpretaciones, no lograban entender de manera completa el desarrollo del procedimiento. Se hizo indispensable la implementación de una retroalimentación gráfica para orientar a los estudiantes hacia los resultados esperados. Ver **figura 7.5**.

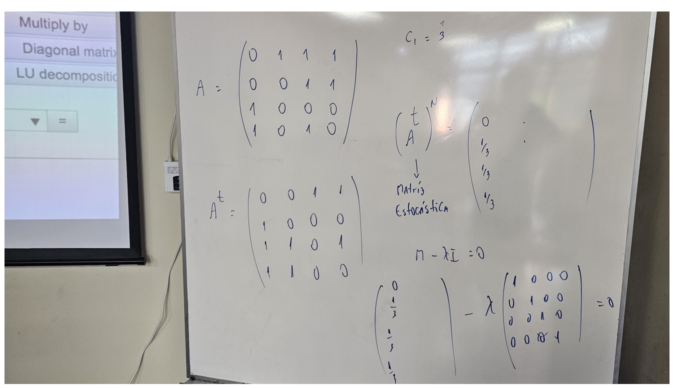


Figura 7.5: Cálculo de valores propios de la matríz estocástica (proceso manual)

Es importante destacar que la actividad fue desarrollada con el apoyo de herramientas tecnológicas, implementándose mediante el uso del software Matrix Calculator (34), una aplicación de acceso gratuito disponible en la web. Ver **figura 7.6**.

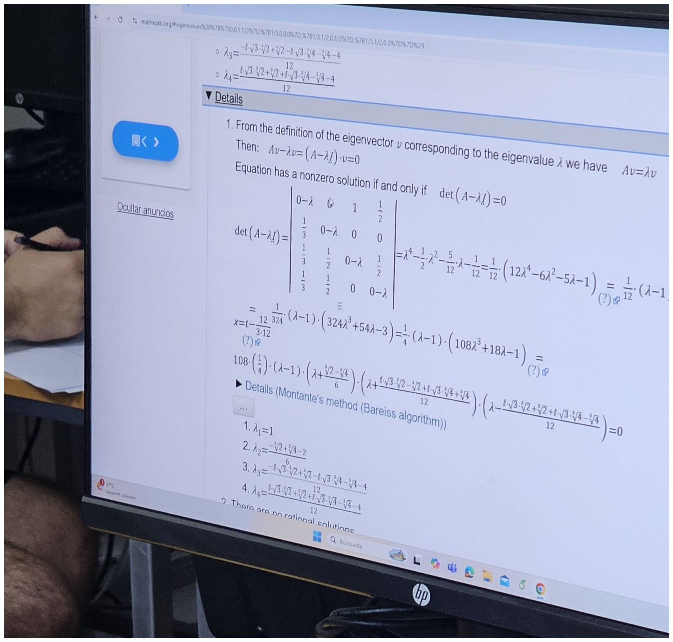


Figura 7.6: Cálculo de valores propios de la matríz estocástica asociada al problema

Después de la intervención, los estudiantes fueron capaces de identificar el sistema de ecuaciones pertinente, concluyendo que era el mismo sistema obtenido en la sesión uno. Los cálculos subsecuentes fueron análogos a los efectuados en la primera clase y se registraron en la hoja de respuestas del taller. Ver **figuras 7.7** y **7.8**

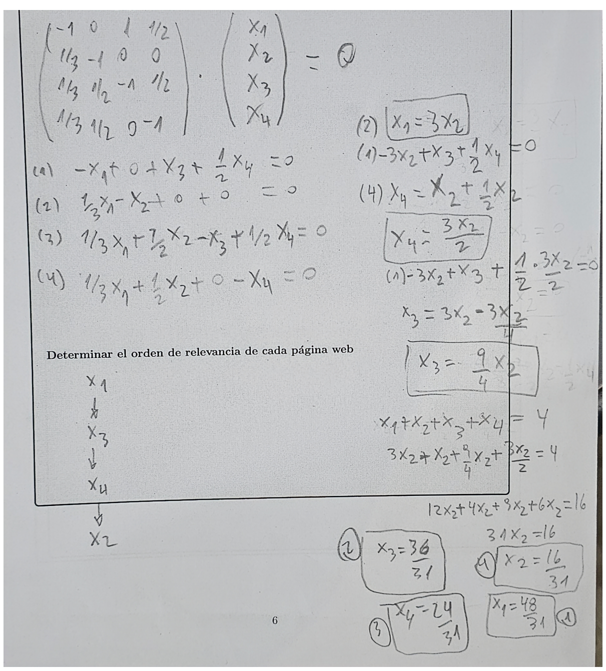


Figura 7.7: Sistema de ecuación obtenido por G1 a través del cálculo del vector propio, vector Perron-Frobenius

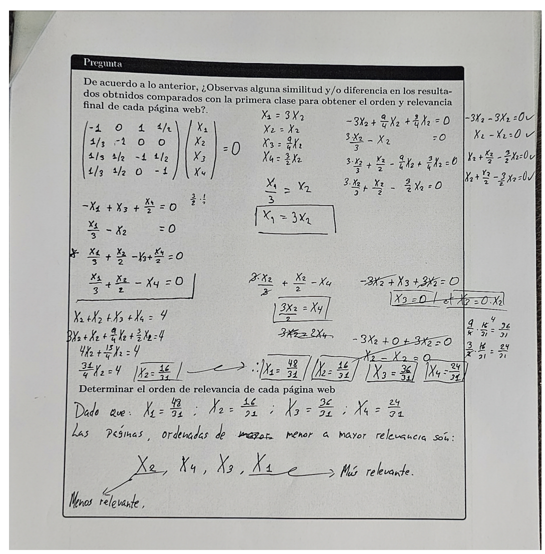


Figura 7.8: Sistema de ecuación obtenido por G2 a través del cálculo del vector propio, vector Perron-Frobenius

7.0.5. Sobre la tercera sesión

La presente sesión se desarrolló de forma telemática utilizando la plataforma Meet, contando con la participación de los mismos cuatro grupos de sujetos informantes seleccionados para el análisis. Los participantes eran estudiantes del curso de Didáctica de las Matemáticas, correspondiente al segundo semestre del primer año de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.

Con base en los resultados obtenidos, todas las producciones escritas volvieron a evidenciar la elaboración del modelo matemático adecuado para la situación presentada. No obstante, a diferencia de las sesiones anteriores, en esta ocasión se pudieron identificar todas las fases del proceso de modelización matemática en los grupos analizados.

Los grupos G1 y G2 experimentaron dificultades específicas en relación con la conversión del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, lo que generó un incremento en el tiempo necesario para llevar a cabo las etapas de Matematización (MT) y Análisis de Sistema Matemático (ASM). Esta demora fue la razón, dicho por ambos grupos, que impidió alcanzar la fase de Verificación Lógica (VL). En lo que respecta a los grupos G3 y G4, enfrentaron una situación similar; sin embargo, lograron completar de manera exitosa todas las fases del proceso de modelización a lo largo de la clase.

Todos los equipos presentaron sus trabajos a través de fotografías y decidieron emplear el método de representación de grafos como estrategia para abordar la solución. Esta metodología fue elegida debido a la consideración de que simplificaba tanto el proceso de modelización de la situación planteada como la elucidación de los aspectos requeridos.

7.1. Comparación entre análisis a priori y posteriori

La evidencia obtenida a partir de las tres intervenciones implementadas en el contexto de este estudio revela, en la mayoría de los casos, una notable y clara correspondencia con los análisis previos que se llevaron a cabo en este mismo estudio. Como se ha mencionado en secciones anteriores, las modificaciones realizadas en el plan de clase se basaron en las dificultades y errores específicos que fueron identificados en los estudiantes, lo que permitió no solo mejorar, sino también ajustar la adecuación de las retroalimentaciones que brindaron los docentes frente a las situaciones complejas que surgieron de manera inesperada durante el transcurso de las sesiones. Sin embargo, es importante destacar que dado que la calidad de esta propuesta reside principalmente en su naturaleza de constante perfeccionamiento y adaptación, el alcance de los análisis previos que se realizaron puede ser ampliado de manera progresiva a medida que se implementen nuevas versiones y actualizaciones de este plan de clase. Esto hará posible que se establezcan nuevas acciones y estrategias que respondan de mejor manera a las necesidades emergentes que puedan identificarse en futuras intervenciones.

Capítulo 8: Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio, comenzando con una revisión de los objetivos y las preguntas de investigación. Posteriormente, se procederá a discutir las limitaciones del trabajo llevado a cabo, para concluir con las proyecciones y aportaciones del estudio.

8.1. Sobre los objetivos y preguntas de investigación

El propósito general establecido para este estudio consistió en desarrollar y proponer una secuencia didáctica detallada y fundamentada, destinada especialmente al aprendizaje de la modelación matemática mediante el objeto matemático que se conoce como sistemas de ecuaciones mediante el uso del algoritmo de selección de relevancia Page Rank. Esta secuencia didáctica ha sido diseñada específicamente para estudiantes que se están formando en la carrera de pedagogía en matemáticas, y es fundamental en su proceso de aprendizaje. Para lograr este propósito, se definieron con claridad tres objetivos específicos que orientaron de manera precisa el diseño, la implementación y la evaluación de la mencionada secuencia didáctica. En este contexto, las conclusiones del estudio se respaldan en los logros obtenidos en relación con dichos objetivos específicos, los cuales se abordan de manera exhaustiva a lo largo de este capítulo. Adicionalmente, se presentan las respuestas a las preguntas de investigación formuladas, las cuales se encuentran relacionadas y conectadas con los objetivos de aprendizaje mencionados anteriormente. Estas respuestas no solo destacan los hallazgos del estudio, sino que también ofrecen una visión más clara de cómo la secuencia didáctica ha impactado en los estudiantes en su comprensión sobre la habilidad de modelar en la resolución de problemas.

8.2. Objetivo específico 1

A lo largo de la ejecución de esta investigación, y en línea con el primer objetivo específico establecido, se realizó la identificación de las competencias y habilidades esenciales requeridas por las nuevas Bases Curriculares (MINEDUC, 2019) (35) en relación con la modelación matemática en el ámbito de la formación de estudiantes de pedagogía en matemáticas. Este análisis se dirigió a establecer una conexión directa entre las necesidades formativas de los futuros educadores y las exigencias del currículo, considerando tanto las habilidades específicas de modelación como las competencias transversales que promueven la resolución de problemas en diferentes contextos.

La relevancia de este enfoque, como subrayan Isoda y Olfos (36), reside en su capacidad para permitir a los educadores optimizar sus competencias pedagógicas, lo cual resulta en un efecto favorable sobre el aprendizaje de los estudiantes, así como en la calidad de la práctica profesional y en la enseñanza de las matemáticas. En este marco, se acepta que la integración de habilidades de modelización matemática en la formación de docentes no solo favorece el rendimiento de los futuros educadores, sino que también refuerza su aptitud para abordar los desafíos educativos contemporáneos.

De manera particular, la relevancia de este estudio se relaciona con el marco conceptual establecido por Blomhøj y Højgaard-Jensen (37), quienes enfatizan que el proceso de modelación matemática representa un componente crucial en la enseñanza, favoreciendo el desarrollo de habilidades cognitivas y ejerciendo un efecto positivo en la práctica profesional. Para establecer esta conexión, se tomaron en cuenta las etapas del proceso de modelización matemática como una base estructural, la cual orientó tanto el análisis de las Bases Curriculares como el diseño de las propuestas pedagógicas destinadas a potenciar dichas competencias en los estudiantes de pedagogía.

En este contexto, la labor realizada evidenció la importancia de situar las competencias de modelación matemática en escenarios reales y pertinentes, acorde con las orientaciones del currículo y las exigencias de los futuros educadores. Este enfoque también facilitó la identificación, tal como señalan Aparisi y Pochulu (38), de los desafíos vinculados a la selección de problemas idóneos que, sin desviarse de las tendencias actuales del currículo, demuestren ser eficaces en la promoción del aprendizaje significativo.

La metodología utilizada en esta fase estuvo estrechamente vinculada al modelo didáctico-cognitivo propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen (39), cuyos principios facilitaron la estructuración de las competencias clave conforme a las diferentes etapas del proceso de modelización matemática. La consecución de este objetivo se evidenció a través de la identificación y análisis exhaustivo de las competencias y habilidades exigidas por el currículo, así como mediante el diseño de propuestas didácticas que integraran de manera coherente dichas competencias en la formación inicial de los futuros pedagogos.

8.3. Objetivo específico 2

El segundo objetivo específico de esta investigación, que implica la implementación de una propuesta didáctica de modelación mediante la utilización de la herramienta epistemológica denominada algoritmo de selección de relevancia de páginas web Page Rank, se ha abordado en el marco de la modelización matemática, conforme a las directrices teóricas establecidas por Blomjøh y Højgaard-Jensen (2008). Este objetivo ha facilitado la respuesta a la primera pregunta de investigación: ¿Cuáles son los atributos didácticos que debe poseer una lección de modelación para que los estudiantes puedan alcanzar las fases del proceso de modelización matemática?

La respuesta a dicha cuestión ha sido abordada a través de la implementación de una secuencia didáctica, la cual se llevó a cabo en tres intervenciones dentro de la primera clase concebida, favoreciendo una reflexión continua acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje. La aplicación de la metodología de estudio de clases de (Isoda y Olfos, 2009) resultó ser fundamental en la optimización de la propuesta, ya que proporcionó un marco para la reflexión pedagógica y la adaptación de la lección conforme a las necesidades de los estudiantes. La revisión constante, sustentada en los registros audiovisuales y la retroalimentación recibida, facilitó el ajuste de los tiempos y las estrategias pedagógicas, abordando las dificultades y errores detectados durante las intervenciones.

Desde una perspectiva didáctica, la investigación ha permitido identificar diversos atributos fundamentales que facilitan a los estudiantes el tránsito exitoso por las diversas etapas del proceso de modelación matemática. En primer lugar, es de suma importancia que la dinámica del aula propicie un equilibrio apropiado entre la intervención directa del docente y la autonomía del alumnado. De acuerdo con Blum y Borromeo-Ferri (2009), un entorno de aprendizaje debe posibilitar que los estudiantes se conviertan en protagonistas de su propio proceso de resolución de problemas, fomentando así el desarrollo de habilidades de modelación matemática a través de su razonamiento personal. En este sentido, la lección debe cultivar espacios de autonomía que permitan a los estudiantes la oportunidad de explorar, experimentar y construir modelos matemáticos de manera independiente, mientras que el educador interviene de manera estratégica para orientar el proceso sin imponer soluciones directas.

Un segundo atributo fundamental es que el problema propuesto debe ser desafiante, pero no irrealizable. Como afirman Blum y Borromeo-Ferri (2009), un problema matemático que sea adecuado para la modelación debe presentar una complejidad que motive a los estudiantes a desarrollar las diferentes fases del proceso de modelación, sin llegar a ser tan complicado que les cause desánimo. Las preguntas planteadas por el docente deben guiar el proceso sin ofrecer respuestas directas, facilitando así el recorrido de los estudiantes a través de las etapas sin obstaculizar su capacidad de pensamiento crítico y autonomía. Este atributo de desafío moderado debe ajustarse al nivel de los estudiantes y al contexto del aula, garantizando que el problema no sea únicamente un ejercicio matemático, sino un reto cognitivo relevante.

Un tercer atributo pertinente se relaciona con la implementación de herramientas epistemológicas adecuadas, como el algoritmo Page Rank, el cual debe ser presentado en un contexto que permita a los estudiantes aprehender su relevancia dentro del proceso de modelación. La incorporación de herramientas tecnológicas y algoritmos matemáticos debe ser planificada de tal manera que los estudiantes no solo adquieran habilidades para utilizar estos recursos, sino que además comprendan su fundamento teórico y su aplicabilidad a problemas matemáticos concretos. Blomjøh y Højgaard-Jensen (2008) argumentan que la utilización de herramientas tecnológicas debe favorecer la comprensión conceptual y la resolución de problemas en el marco de la modelación matemática, proporcionando un medio a través del cual los estudiantes puedan fortalecer su razonamiento y validar sus soluciones.

La implementación de la propuesta de modelación y el análisis crítico de cada intervención develan una contribución significativa a la mejora de la estructura de la clase, garantizando que los tiempos de trabajo fueran apropiados y que el flujo de la actividad facilitara un desarrollo continuo del aprendizaje de los estudiantes. Las mejoras continuas en la secuencia de la clase, mediante ajustes fundamentados en las observaciones y reflexiones realizadas, fueron fundamentales para abordar la pregunta de investigación planteada. Este enfoque se encuentra en consonancia con las ideas de Blum y Borromeo-Ferri (2009), quienes enfatizan la relevancia de un diseño flexible que permita realizar ajustes dinámicos según las necesidades del grupo y los objetivos de aprendizaje establecidos.

8.4. Objetivo específico 3

El tercer objetivo específico de la investigación (OE3), enfocado en el análisis de las evidencias relacionadas con el diseño de modelación y en la verificación de la presencia o ausencia de los procesos de modelación matemática según Blomjøhø y Højgaard-Jensen, se llevó a cabo a través de un estudio minucioso de los resultados obtenidos tras la implementación de la secuencia didáctica. Este estudio permitió una clasificación de los grupos de estudiantes, no únicamente en función de los logros alcanzados en el proceso de modelación matemática, sino también considerando la evidencia de las construcciones que se reflejan en sus producciones escritas.

Es fundamental señalar que, en el ámbito de este estudio, la çlase ideal"no fue concebida como aquella en la que los estudiantes logran desarrollar todas las etapas del proceso de modelación sin contratiempos ni errores, ni en el menor tiempo posible. Más bien, se entendió que la clase ideal es aquella en la que, a pesar de los errores y dificultades que puedan presentarse, estos son gestionados y superados gracias tanto a la intervención del docente como a las reflexiones autónomas de los estudiantes, permitiendo así alcanzar plenamente las fases del proceso de modelación matemática. En este contexto, se llegó a la conclusión de que la tercera implementación se aproximó más a una çlase ideal", ya que presentó un equilibrio entre los logros en las fases del proceso y la superación de los desafíos y errores. Durante la primera implementación, las dificultades resultaron ser considerablemente mayores a las previstas, afectando el desarrollo de la actividad en la mayoría de los grupos, a excepción de uno que logró superar dichas dificultades y completar el proceso. En la segunda implementación, las complicaciones fueron mínimas, lo que facilitó que la mayoría de los grupos finalizara la actividad en un tiempo significativamente inferior al estipulado, sugiriendo que el desafío no fue lo suficientemente relevante para los estudiantes. En contraste, la tercera implementación mostró un balance adecuado entre el logro de las fases del proceso y la superación de las dificultades, lo que promovió una mejor integración de los estudiantes en el proceso de modelación matemática.

Este análisis también permitió abordar la segunda pregunta de investigación formulada: **¿Qué contribuciones ofrece el proceso de modelación matemática al aprendizaje del objeto matemático sistemas de ecuaciones?** La evidencia recabada mediante las intervenciones indica que, en el contexto de una clase de modelación, se interconectan diversos objetos matemáticos y competencias previas de los estudiantes. No obstante, la combinación de estos elementos reveló una mayor reafirmación de los conocimientos previos por parte de los alumnos que un verdadero desarrollo de nuevos aprendizajes, particularmente en relación con el objeto matemático de los sistemas de ecuaciones. Aunque se registró un avance en la resolución de los problemas y aplicación de conceptos referentes al álgebra lineal, no se logró una profundización significativa en el conocimiento de los estudiantes, lo que sugiere la necesidad de un estudio más exhaustivo y detallado que permita brindar una respuesta más precisa a esta cuestión.

8.5. Reflexión sobre los objetivos

A lo largo de la presente investigación, se han planteado tres objetivos específicos esenciales que facilitan una comprensión del impacto de la modelación matemática en la formación de los estudiantes del área de pedagogía en matemáticas. Estos objetivos no solo se proponen abordar interrogantes referentes a las características de las lecciones de modelación y las competencias que es necesario desarrollar, sino que también proporcionan una perspectiva sobre cómo la implementación de una secuencia didáctica puede potenciar el aprendizaje de los estudiantes y optimizar las prácticas pedagógicas en el ámbito del aula. A continuación, se presenta una reflexión acerca de cada uno de estos objetivos, teniendo en cuenta los hallazgos obtenidos y sus respectivas implicaciones pedagógicas.

Sobre el objetivo 1

El primer objetivo se orientó hacia la identificación de las competencias y habilidades requeridas para la modelación matemática conforme a las nuevas Bases Curriculares (MINEDUC, 2019). Este análisis resultó apropiado para entender de qué manera las exigencias del currículo coinciden con las necesidades formativas de los futuros educadores en el ámbito de las matemáticas. La determinación de las competencias específicas en modelación matemática, así como de las competencias transversales vinculadas a la resolución de problemas, constituyen un paso esencial para establecer una base en la formación pedagógica.

Una de las principales conclusiones derivadas de este objetivo es que el proceso de modelación matemática, tal como lo indican Blomhøj y Højgaard-Jensen (2008), constituye un elemento relevante en la formación de habilidades cognitivas que influyen directamente en la práctica docente. La vinculación entre las competencias curriculares y las exigencias pedagógicas para los futuros educadores ofrece un marco coherente para la implementación de propuestas didácticas que promuevan el desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes. Este hallazgo subraya la importancia de posicionar las competencias de modelación matemática en contextos reales y relevantes, lo que propicia un aprendizaje significativo. Al incorporar estas competencias en la formación inicial de los futuros docentes, se fomenta no solo el crecimiento profesional de los educadores, sino también su capacidad para abordar los retos educativos actuales.

Sobre el objetivo 2

El segundo objetivo específico se enfocó en la ejecución de una propuesta didáctica que emplea el algoritmo de selección de relevancia de páginas web conocido como Page Rank, en el contexto de la modelación matemática. Esta etapa facilitó el análisis de la primera interrogante de investigación relacionada con las características didácticas que debe tener una lección de modelación, de manera que los estudiantes puedan progresar a través de las fases del proceso de modelación matemática.

La implementación de la secuencia didáctica y la reflexión constante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje han conducido a una mejora continua de la propuesta, facilitando una adaptación más efectiva a las necesidades del grupo de alumnos. A través de tres intervenciones durante la primera clase, se pudo observar que la intervención directa del docente debe equilibrarse con la autonomía de los estudiantes para promover un aprendizaje más significativo. Este enfoque, respaldado por los principios de Blum y Borromeo-Ferri (2009), permite que los estudiantes asuman un papel protagónico en su propio proceso de aprendizaje, desarrollando competencias en modelación matemática mediante el razonamiento personal. Adicionalmente, el desafío moderado presentado en los problemas resulta ser esencial para preservar la motivación y el interés de los estudiantes sin sobrepasar sus capacidades.

Una aporte de este objetivo fue la inclusión de herramientas epistemológicas, como el algoritmo Page Rank, que ofreció a los estudiantes una mejor comprensión sobre la aplicación de herramientas matemáticas en contextos reales. El uso de esta tecnología, conforme a Blomhøj y Højgaard-Jensen (2008), no únicamente enriqueció el razonamiento de los estudiantes, sino que también les facultó para validar sus soluciones y afianzar su comprensión conceptual.

Sobre el objetivo 3

El tercer objetivo específico se centró en el examen de las evidencias recopiladas tras la ejecución de la secuencia didáctica, con el propósito de comprobar la existencia de los procesos de modelación matemática de acuerdo con Blomhøj y Højgaard-Jensen. Este examen posibilitó la consideración de la segunda pregunta de investigación: ¿Qué aportes proporciona el proceso de modelación matemática al aprendizaje del contenido matemático denominado sistemas de ecuaciones?

La información obtenida mediante las intervenciones permitió llevar a cabo una clasificación exhaustiva de los estudiantes, tomando en cuenta los logros obtenidos en sus producciones escritas. Se subrayó que, aunque los estudiantes fueron capaces de resolver los problemas planteados y de aplicar conceptos de álgebra lineal, no se observó una profundización considerable de los conocimientos, sino más bien una reafirmación de los aprendizajes previos. Este descubrimiento indica la necesidad de realizar estudios futuros que investiguen de qué manera la modelación matemática puede contribuir de forma más eficaz al aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos, especialmente en áreas complejas como los sistemas de ecuaciones.

A través de las tres implementaciones de la clase, se notó un avance significativo en el progreso de los estudiantes para superar sus dificultades, lo que favoreció un mayor dominio de las etapas del proceso de modelación matemática. La tercera implementación se acercó más a lo que se podría considerar una çlase ideal", al exhibir un equilibrio entre los logros obtenidos y la gestión de errores y dificultades, lo que a su vez fomentó un aprendizaje más autónomo y reflexivo en los estudiantes. Este enfoque se encuentra en consonancia con los principios del Estudio de Clase de (Isoda y Olfos, 2009), que subraya la relevancia de la reflexión constante y la adaptación pedagógica para mejorar los resultados del aprendizaje.

En síntesis, los tres objetivos específicos de la presente investigación se encuentran interrelacionados de manera coherente, favoreciendo una mejor comprensión de los aspectos didácticos y pedagógicos asociados a la modelación matemática en la formación de futuros docentes en matemáticas. En primer término, la identificación de las competencias necesarias para la modelación matemática, conforme a las Bases Curriculares, permitió establecer un marco adecuado para el diseño de propuestas pedagógicas. En segundo lugar, la implementación de una propuesta didáctica utilizando la herramienta epistemológica Page Rank promovió una reflexión continua acerca de los atributos didácticos fundamentales que son cruciales para el éxito de la modelación matemática en el entorno escolar. Finalmente, el análisis de las evidencias recopiladas tras la ejecución de la secuencia didáctica proporcionó una visión detallada sobre la manera en que la modelación matemática contribuye al aprendizaje de los estudiantes, subrayando la necesidad de realizar más estudios que profundicen en los efectos del proceso de modelación en la comprensión de conceptos matemáticos más complejos.

En síntesis, los hallazgos de esta investigación subrayan la relevancia de formular clases de modelación matemática que no únicamente satisfagan los requerimientos curriculares, sino que también promuevan un ambiente de aprendizaje activo y reflexivo, donde los estudiantes puedan cultivar competencias en la resolución de problemas y edificar conocimientos de forma autónoma. La incorporación de herramientas epistemológicas, tal como Page Rank, junto con una reflexión pedagógica constante, constituyen aspectos fundamentales para mejorar tanto el aprendizaje como la enseñanza de la modelación matemática en el marco de los contextos educativos actuales.

8.6. Limitaciones del estudio

A lo largo de la presente investigación, se han establecido tres objetivos específicos que han facilitado la exploración de la modelación matemática en la formación de futuros docentes en pedagogía matemática. Esto se ha logrado mediante el análisis de las competencias curriculares, la implementación de una propuesta didáctica que utiliza la herramienta epistemológica Page Rank, así como el análisis de las evidencias vinculadas con el proceso de modelación matemática. Entendemos que los hallazgos obtenidos representan una contribución al ámbito de la educación matemática, entretanto, resulta relevante reconocer las limitaciones inherentes al diseño y ejecución del presente estudio. En esta sección, se llevará a cabo una reflexión sobre las principales restricciones del estudio, considerando los tres objetivos específicos de investigación junto a las preguntas de investigación correspondientes.

Limitaciones del Primer Objetivo: Identificación de Competencias y Habilidades Esenciales

El primer objetivo de la presente investigación consistió en identificar las competencias y habilidades fundamentales requeridas por las Bases Curriculares de la Educación Media en Matemáticas (MINEDUC, 2019), con un enfoque particular en las competencias de modelación matemática en la formación de estudiantes de pedagogía. Si bien este objetivo permitió establecer una conexión directa entre las exigencias curriculares y las competencias pertinentes para abordar la modelación matemática, debemos señalar que una limitación significativa reside en la naturaleza estática del análisis curricular.

El presente estudio se ha enfocado de manera preponderante en el análisis de las Bases Curriculares, sin una mayor consideración de la diversidad de contextos educativos ni la variabilidad en los enfoques pedagógicos que pueden impactar la enseñanza de la modelación matemática. Aunque las competencias identificadas son pertinentes, no necesariamente reflejan las realidades y necesidades específicas de cada grupo de estudiantes o de los futuros educadores en diversas instituciones o contextos pedagógicos. En otras palabras, la estandarización del currículo podría no abarcar la riqueza y diversidad de enfoques requeridos para una formación integral en modelación matemática, lo que limita la aplicabilidad universal de los hallazgos.

Asimismo, el estudio de las competencias se fundamentó en un marco teórico específico (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2008) y no en un enfoque más plural que contemple diversas corrientes pedagógicas o epistemológicas. Esta circunstancia puede haber limitado la comprensión de la modelación matemática a un conjunto restringido de habilidades y competencias, sin abarcar todas las posibles perspectivas que podrían enriquecer la formación docente en este ámbito.

Limitaciones del Segundo Objetivo: Implementación de la Propuesta Didáctica con Page Rank

El segundo objetivo de la investigación consistió en la implementación de una secuencia didáctica que utilizó el algoritmo de Page Rank como herramienta epistemológica dentro del proceso de modelación matemática. A pesar de que esta intervención facilitó el abordaje efectivo de la primera pregunta de investigación relacionada con los atributos didácticos necesarios para que los estudiantes alcanzaran las fases del proceso de modelación matemática, la implementación reveló diversas limitaciones que deben ser tomadas en cuenta.

En primer lugar, la utilización exclusiva de una única herramienta epistemológica, como el algoritmo Page Rank, podría haber limitado la amplitud del enfoque pedagógico. El proceso de modelación matemática se alimenta de una diversidad de herramientas y enfoques, y la dependencia exclusiva de Page Rank podría no haber facilitado la exploración de otras maneras de afrontar los problemas de modelación. La variedad de recursos epistemológicos disponibles para la enseñanza de la modelación matemática podría haber proporcionado una perspectiva más rica y multifacética respecto a cómo los estudiantes abordan y resuelven problemas matemáticos complejos. En este orden de ideas, la selección de una única herramienta tecnológica podría haber restringido las oportunidades de los estudiantes para experimentar con distintos métodos y enfoques.

De manera alternativa, la secuencia didáctica fue ejecutada a través de tres intervenciones, lo cual ofrece una perspectiva restringida sobre la manera en que los estudiantes responden al proceso de modelización matemática a lo largo del tiempo. Una implementación más amplia, que involucre un mayor número de clases y un tiempo adicional para la reflexión y la consolidación de los aprendizajes, podría haber brindado una comprensión más exhaustiva sobre la efectividad de las estrategias pedagógicas y la capacidad de los alumnos para superar las dificultades en el proceso de modelación. La distancia temporal entre las intervenciones, así como la ausencia de una evaluación continua durante un lapso más prolongado, limitan la validez de los hallazgos y la comprensión integral del impacto de la enseñanza de la modelación matemática.

Limitaciones del Tercer Objetivo: Análisis de las Evidencias del Proceso de Modelización

El tercer objetivo de la investigación consistió en llevar a cabo un análisis de las evidencias derivadas de la implementación de la secuencia didáctica, con el fin de verificar la presencia de los procesos de modelación matemática de acuerdo con las definiciones de Blomhøj y Højgaard-Jensen. Asimismo, se abordó la segunda pregunta de investigación, la cual se centra en las contribuciones del proceso de modelación al aprendizaje del objeto matemático correspondiente a los sistemas de ecuaciones. Aunque este análisis brindó información valiosa sobre la relación existente entre las actividades de modelación y el aprendizaje de los estudiantes, es importante destacar que se identifican diversas limitaciones en lo que respecta a la interpretación de los resultados obtenidos.

Una de las principales limitaciones del estudio es que no se logró una mayor profundización en los nuevos conocimientos adquiridos por los estudiantes, particularmente en lo que atañe a la comprensión de conceptos complejos como los sistemas de ecuaciones. La evidencia recopilada indica que los estudiantes reafirmaron aprendizajes previos en vez de adquirir nuevos saberes. Esto sugiere que la implementación de la modelación matemática, tal como se realizó en este estudio, podría no haber sido adecuada para propiciar un avance sustancial en el aprendizaje de los conceptos matemáticos implicados. Es posible que los problemas propuestos, a pesar de su nivel de desafío, no hayan sido lo suficientemente complejos o pertinentes para facilitar una exploración mayor de los conceptos subyacentes.

Asimismo, las intervenciones se analizaron predominantemente a través de las producciones escritas de los estudiantes, lo que restringió la comprensión del proceso de modelación a una dimensión cognitiva que podría no captar todos los aspectos del aprendizaje. La modelación matemática abarca no solo habilidades cognitivas, sino también dimensiones afectivas y sociales, tales como la motivación, la interacción entre los estudiantes y la capacidad para desarrollar un trabajo colaborativo. La falta de un análisis más integral del proceso de aprendizaje podría disminuir la validez de los resultados al no tener en cuenta estas dimensiones significativas.

8.7. Proyección del estudio

El estudio actual constituye un esfuerzo por entender y optimizar la enseñanza de la modelación matemática en la formación inicial de docentes, tomando como fundamento las necesidades y desafíos derivados del currículo chileno. A partir de los hallazgos obtenidos y las reflexiones surgidas en relación con los tres objetivos específicos y sus respectivas preguntas de investigación, se han identificado proyecciones encaminadas a ampliar el impacto de esta labor. Dichas proyecciones abarcan no solo futuras líneas de investigación, sino también aplicaciones prácticas y propuestas innovadoras que propicien la transformación de las prácticas pedagógicas en el ámbito de las matemáticas.

Proyección en la Formación Docente

En lo que respecta al primer objetivo específico, que se centró en la identificación de competencias y habilidades fundamentales para la enseñanza de la modelación matemática, una proyección significativa reside en la elaboración de programas de formación que integren de manera sistemática estas competencias en el currículo de formación docente. Este enfoque requiere la inclusión de metodologías innovadoras que superen los métodos de enseñanza convencionales, tales como el aprendizaje basado en proyectos (ABP) y el diseño de experiencias interdisciplinarias.

La modelación matemática facilita la vinculación entre las matemáticas y su aplicación en situaciones reales. En consecuencia, una innovación fundamental consistirá en el desarrollo de cursos y talleres que brinden a los futuros educadores la oportunidad de experimentar con una variedad de herramientas epistemológicas y tecnológicas, más allá del algoritmo Page Rank empleado en esta investigación. La integración de tecnologías emergentes, tales como la inteligencia artificial y los simuladores digitales, tiene el potencial de expandir el abanico de posibilidades en la enseñanza de la modelación matemática, favoreciendo la resolución creativa de problemas y propiciando un mayor nivel de motivación entre los estudiantes.

Proyección en el Diseño e Implementación de Propuestas Didácticas

El segundo objetivo específico, enfocado en la ejecución de una propuesta didáctica de modelación, resalta la relevancia de elaborar secuencias didácticas que sean flexibles y adaptatables, adecuándose a las necesidades de los estudiantes. Con base en los resultados obtenidos, una proyección es la creación de una plataforma interactiva que facilite la colaboración entre los docentes en la elaboración, ejecución y evaluación de lecciones de modelación matemática.

La mencionada plataforma podría incluir recursos audiovisuales, simulaciones interactivas y espacios destinados a la reflexión pedagógica. Este enfoque facilitaría el intercambio de experiencias entre educadores y promovería una comunidad de práctica que estimule la innovación y el aprendizaje continuo. Adicionalmente, la plataforma posibilitaría la recolección de datos en tiempo real acerca del desempeño de los estudiantes, proporcionando retroalimentación inmediata y contribuyendo al ajuste dinámico de las estrategias educativas.

La innovadora elaboración de lecciones debe igualmente tener en cuenta la diversidad presente en el aula, así como la necesidad de adaptar la enseñanza de manera personalizada. Esto conlleva la inclusión de problemas de modelación que sean culturalmente pertinentes y que se encuentren en consonancia con las vivencias de los estudiantes, fomentando de este modo un aprendizaje significativo.

Proyección en el Análisis y Evaluación del Proceso de Modelación

El tercer objetivo específico, vinculado al análisis de las evidencias del proceso de modelación matemática, permite la posibilidad de realizar un estudio más exhaustivo sobre las dimensiones cognitivas, afectivas y sociales que intervienen en dicho proceso. Un aspecto fundamental será la creación de instrumentos de evaluación más holísticos que no solo registren los resultados finales de la modelación, sino que también aborden los procesos de pensamiento, la dinámica de interacción grupal y el crecimiento de las habilidades metacognitivas.

En este contexto, la innovación se encuentra en la utilización de instrumentos fundamentados en la analítica del aprendizaje para supervisar y examinar el progreso de los estudiantes a lo largo de las actividades de modelación. Dichas herramientas pueden ofrecer información detallada sobre patrones de interacción, tiempos dedicados a la resolución de problemas y desarrollo del razonamiento matemático, lo que posibilita a los educadores realizar ajustes en sus intervenciones de forma más precisa y eficaz.

Asimismo, se presenta la oportunidad de llevar a cabo investigaciones que analicen de qué manera el involucrarse en actividades de modelación matemática influye en el aprendizaje a largo plazo y en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Tales estudios podrían adoptar un enfoque comparativo entre diversos métodos pedagógicos, lo que facilitaría la identificación de prácticas más eficaces y sostenibles.

Innovación como Eje Transformador

El concepto de innovación permea todas las dimensiones del estudio, desempeñando un papel relevante en el proceso de mejora continua en la enseñanza de la modelación matemática. Dicha innovación no se restringe únicamente a la implementación de nuevas tecnologías o metodologías, sino que abarca también la transformación de las actitudes y prácticas pedagógicas, promoviendo un cambio de paradigma donde los docentes actúan como facilitadores del aprendizaje y los estudiantes se convierten en protagonistas activos de su proceso educativo.

Este planteamiento contempla, además, la capacitación continua de los docentes en ejercicio, proporcionándoles oportunidades para renovar sus competencias en modelación matemática y ajustarse a las exigencias de un entorno en constante transformación. Los programas de desarrollo profesional fundamentados en talleres prácticos, mentorías y comunidades de aprendizaje pueden contribuir en la consecución de este objetivo.

Bibliografía

1. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, G. *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Mineduc, 2015.
2. BAEZA, Ricardo Santander. *Álgebra II*. Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias, 2010.
3. BLOMHØJ, Morten y JENSEN, Tomas Højgaard. Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*. 2003, vol. 22, n.º 3, págs. 123-139.
4. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, G. *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Mineduc, 2011.
5. FRESNO, Torres y Ávila. *Matemática 1º medio*. MINEDUC, Chile, 2020.
6. BLUM, Werner. Estudio ICMI 14: Aplicaciones y modelado en la educación matemática–Documento de debate. *Estudios educativos en matemáticas*. 2002, vol. 51, n.º 1, págs. 149-171.
7. ARTIGUE, Michèle. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. 1994, vol. 13, págs. 27-39.
8. BLUM, Werner y BORROMEO-FERRI, Rita. Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*. 2009, vol. 1, n.º 1, págs. 45-58.
9. MINEDUC. *Bases Curriculares de la Educación Matemática*. Ministerio de Educación de Chile, 2016.
10. FELMER, Patricio. *Resolución de problemas matemáticos en el aula*. Editorial Universitaria, 2014.
11. BLOMHØJ, Morten y HØJGAARD-JENSEN, Toke. Developing Mathematical Modelling Competence: Conceptual Clarification and Educational Planning. *Teaching Mathematics and its Applications*. 2003, vol. 22, n.º 3, págs. 123-139.
12. BIEMBENGUT, Maria Salett y HEIN, Nelson. Modelagem matemática: uma prática pedagógica para o ensino e a aprendizagem da matemática. *Boletim de Educação Matemática*. 2004, vol. 18, n.º 25, págs. 119-133.
13. BROUSSEAU, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Trad. por BALACHEFF, Nicolas; COOPER, Margaret; SUTHERLAND, Rosamund y WARFIELD, Virginia. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 978-0-7923-7026-6.
14. BASSANEZI, Rodolfo y BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática: Uma Prática Pedagógica*. Contexto, 1997.
15. GUERRERO-ORTIZ, Patricia y MENA-LORCA, Andrés. La Didáctica de la Modelación Matemática como Alternativa Pedagógica. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*. 2015, vol. 8, págs. 25-38.
16. BORROMEO-FERRI, Rita. Modelling Cycles in Mathematical Modelling: A Review. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*. 2006, vol. 38, n.º 2, págs. 128-138.
17. ARRIETA J. y Hernández, J. La modelación matemática como estrategia en la enseñanza de las ciencias: una propuesta didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 2005, vol. 8, n.º 2, págs. 201-222.
18. GARCÍA, P. La enseñanza de la modelación matemática en la educación superior: una experiencia en carreras de ingeniería. *Revista Educación Matemática*. 2012, vol. 24, n.º 3, págs. 45-62.
19. BLOMHØJ, Morten y KJELDSEN, Tinne Hoff. Project organised science studies at university level: Exemplarity and interdisciplinarity. *Zdm*. 2009, vol. 41, págs. 183-198.
20. FELMER, Patricio. *Resolución de problemas matemáticos en el aula: Una metodología basada en competencias*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria, 2014.
21. COLETTE, JP. Histoire des mathématiques, 2 Vols. *Éditiones du renouveau pédagogique, Montreal*. 1979.
22. BELL, Eric Temple. Historia de las matemáticas. 2021.
23. LUZARDO, Deivi y PENA, Alirio J. Historia delAlgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas*. 2006, vol. 14, n.º 2, págs. 153-170.
24. RIBNIKOV, Konstantín. Historia de las Matemáticas. *(No Title)*. 1987.
25. C.F, Gauss. Werke 12 Vols. Göttingen. *(No Title)*. 1870-1927.
26. BABINI, José. Historia de las ideas modernas en matemáticas. 1967.
27. HEIDERG, Lipsiae (Taubner). Euclides, Elementos Biblioteca Clásica Gredos, Vols. 155 y 191. 1991-1994.
28. ARTIGUE, Michèle. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1996, vol. 16, n.º 4, págs. 413-441.
29. BROUSSEAU, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
30. ARTIGUE, Michèle. Didactical Design in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. 2009, vol. 70, págs. 13-34.

31. GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen y FONT, Vicenç. *Didáctica de la Matemática: Fundamentos y Aplicaciones*. Pirámide, 2014.
32. ISODA, Masami. El estudio de clases: enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas en la experiencia japonesa. *Mejoramiento escolar en acción*. 2011, pág. 65.
33. LEDEZMA, C. *Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Højgaard*. 2017. Tesis doct. Tesis de magíster no publicada). Instituto de Matemáticas de la Pontificia . . .
34. MATRIXCALC.ORG. *Matrix Calculator* [https://matrixcalc.org/]. n.d. Accedido el 31 de diciembre de 2024.
35. MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. *Bases Curriculares Educación Básica y Media* [https://www.curriculumnacional.cl/]. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile, 2019. Accedido el 31 de diciembre de 2024.
36. ISODA, Masami y OLFOS, Raymundo. *Lesson Study: Japanese Approach to Improve Mathematics Teaching and Learning*. Singapore: World Scientific, 2009. ISBN 978-981-283-542-2.
37. APARISI, Mónica y POCHULU, Marcelo. La modelización matemática como competencia fundamental: Reflexiones sobre su inclusión en el currículo escolar. *Revista de Educación Matemática*. 2013, vol. 25, n.º 2, págs. 45-60.
38. BLOMHØJ, Morten y HØJGAARD JENSEN, Tine. Developing Mathematical Modelling Competence: Conceptual Clarification and Educational Planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*. 2003, vol. 22, n.º 3, págs. 123-139.
39. BLOMHØJ, Morten. *Different Perspectives in Mathematical Modelling*. Ed. por BARBOSA, Jorge y ARZARELLO, Ferdinando. Springer, 2008.
40. PERRON, Oskar. The Perron-Frobenius theorem. *Cit. on*. 2007, pág. 27.

Apéndice A: Tratamiento de Sistemas de Ecuaciones

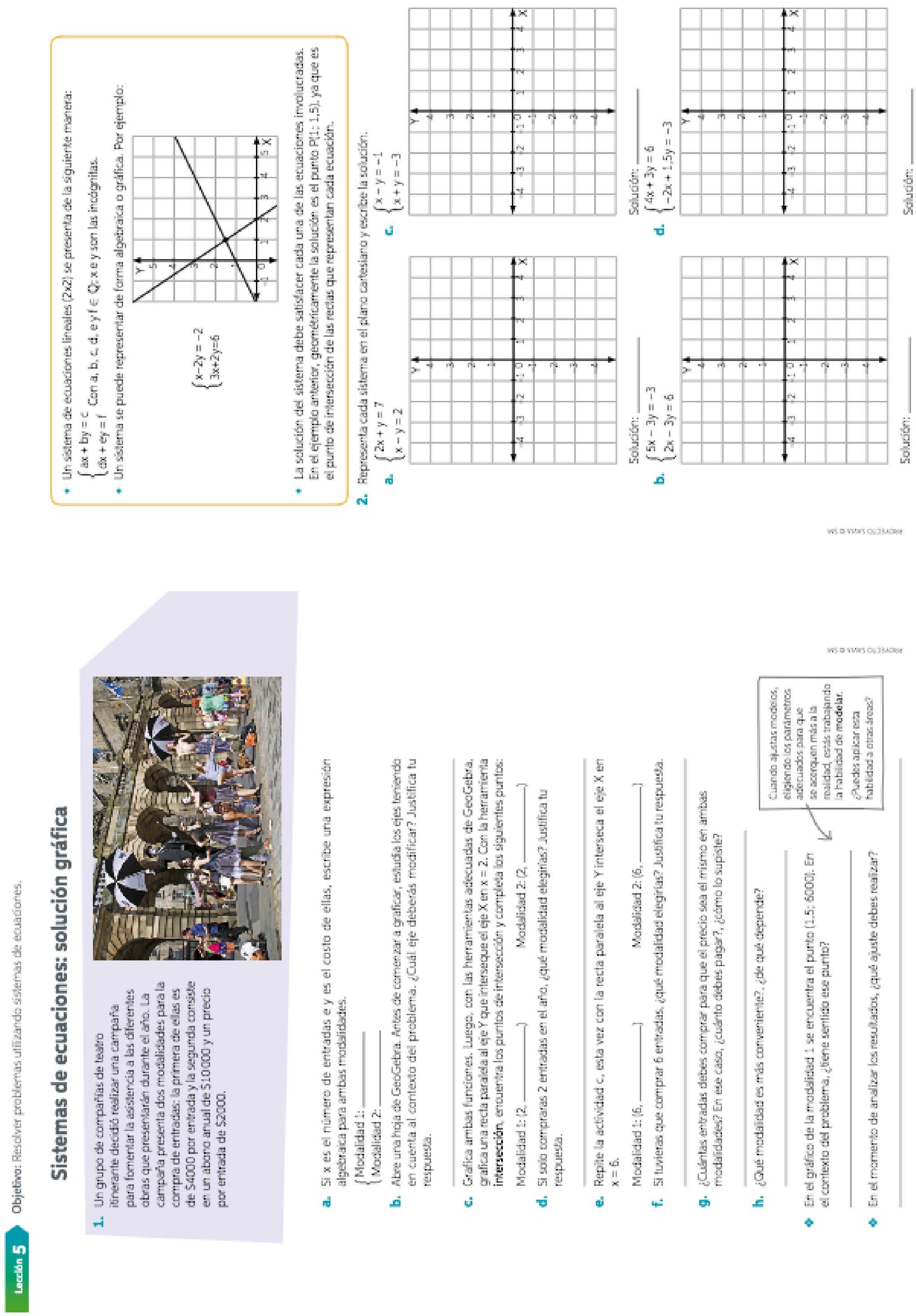
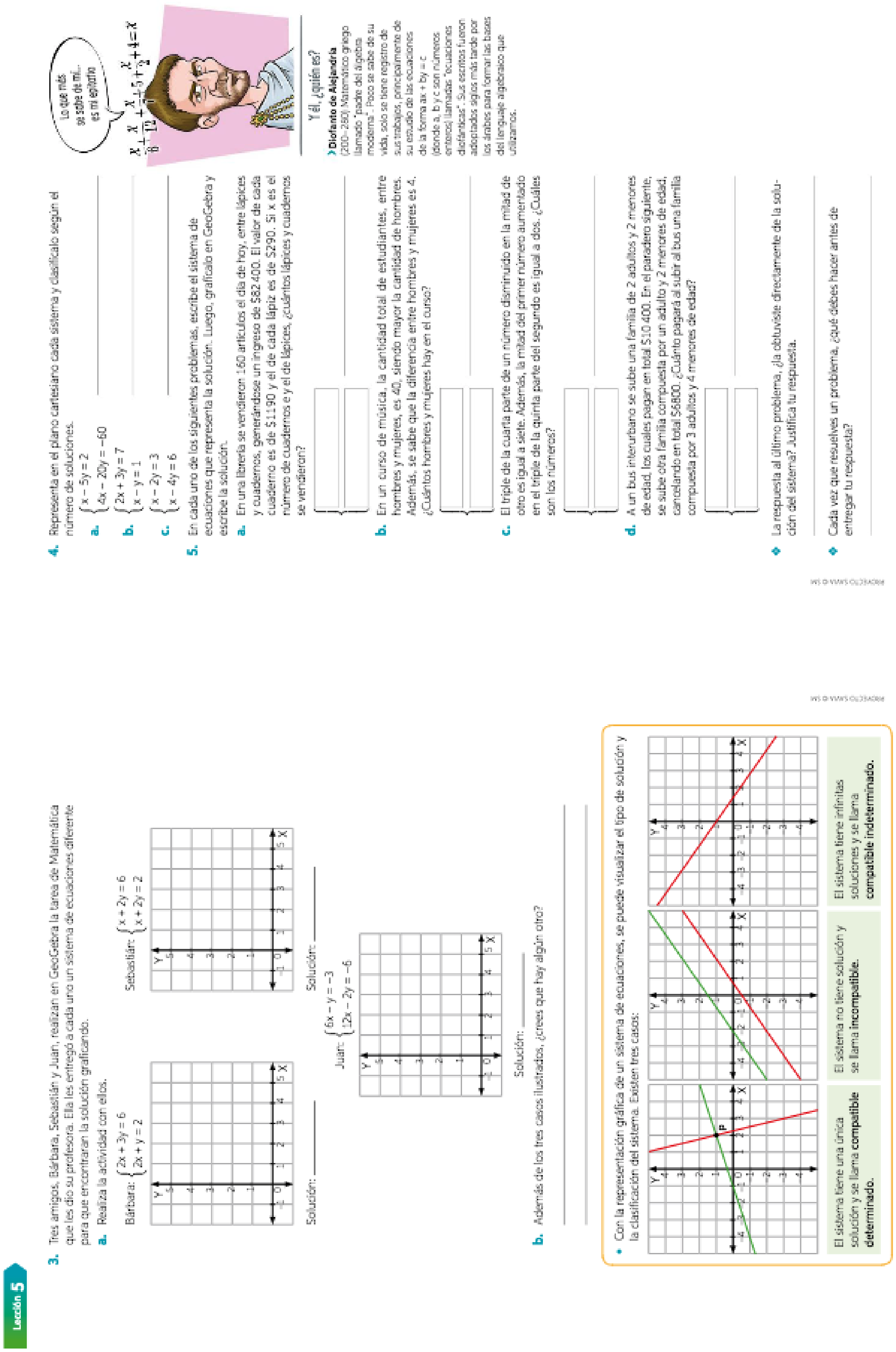


Figura A.1: Introducción al concepto de sistemas de ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.SM(2018, pp. 116-117).



Lección 5

3. Tres amigos, Bárbara, Sebastián y Juan, realizan en GeoGebra la tarea de Matemática que les dio su profesora. Ella les entregó a cada uno un sistema de ecuaciones diferente para que encontraran la solución graficando.

a. Realiza la actividad con ellos.

Bárbara: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Solución: ____

Sebastián: $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Solución: ____

Juan: $\begin{cases} 6x - y = -3 \\ 12x - 2y = -6 \end{cases}$

Solución: ____

b. Además de los tres casos ilustrados, ¿crees que hay algún otro?

- Con la representación gráfica de un sistema de ecuaciones, se puede visualizar el tipo de solución y la clasificación del sistema. Existen tres casos:

El sistema tiene una única solución y se llama **compatible determinado.**

El sistema no tiene solución y se llama **incompatible.**

El sistema tiene infinitas soluciones y se llama **compatible indeterminado.**

4. Representa en el plano cartesiano cada sistema y clasifícalo según el número de soluciones.

a. $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 4x - 20y = -60 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$

5. En cada uno de los siguientes problemas, escribe el sistema de ecuaciones que representa la solución. Luego, grafícalo en GeoGebra y escribe la solución.

a. En una librería se vendieron 160 artículos el día de hoy, entre lápices y cuadernos, generándose un ingreso de $82 400. El valor de cada cuaderno es de $1190 y el de cada lápiz es de $290. Si x es el número de cuadernos e y el de lápices, ¿cuántos lápices y cuadernos se vendieron?

b. En un curso de música, la cantidad total de estudiantes, entre hombres y mujeres, es 40, siendo mayor la cantidad de hombres. Además, se sabe que la diferencia entre hombres y mujeres es 4. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en el curso?

c. El triple de la cuarta parte de un número disminuido en la mitad de otro es igual a siete. Además, la mitad del primer número aumentado en el triple de la quinta parte del segundo es igual a dos. ¿Cuáles son los números?

d. A un bus interurbano se sube una familia de 2 adultos y 2 menores de edad, los cuales pagan en total $10 400. En el paradero siguiente, se sube otra familia compuesta por un adulto y 2 menores de edad, cancelando en total $6800. ¿Cuánto pagará al subir al bus una familia compuesta por 3 adultos y 4 menores de edad?

- La respuesta al último problema, ¿la obtuviste directamente de la solución del sistema? Justifica tu respuesta.

- Cada vez que resuelves un problema, ¿qué debes hacer antes de entregar tu respuesta?

Lo que más se sabe de mí... es mi epitafio

$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$

Y él, ¿quién es?

Diofanto de Alejandría (200–280) Matemático griego llamado "padre del álgebra moderna". Poco se sabe de su vida, solo se tiene registro de sus trabajos, principalmente de su estudio de las ecuaciones de la forma ax + by = c (donde a, b y c son números enteros) llamadas "ecuaciones diofánticas". Sus escritos fueron adoptados siglos más tarde por los árabes para formar las bases del lenguaje algebraico que utilizamos.

Figura A.2: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.SM (2018, pp. 118-119).

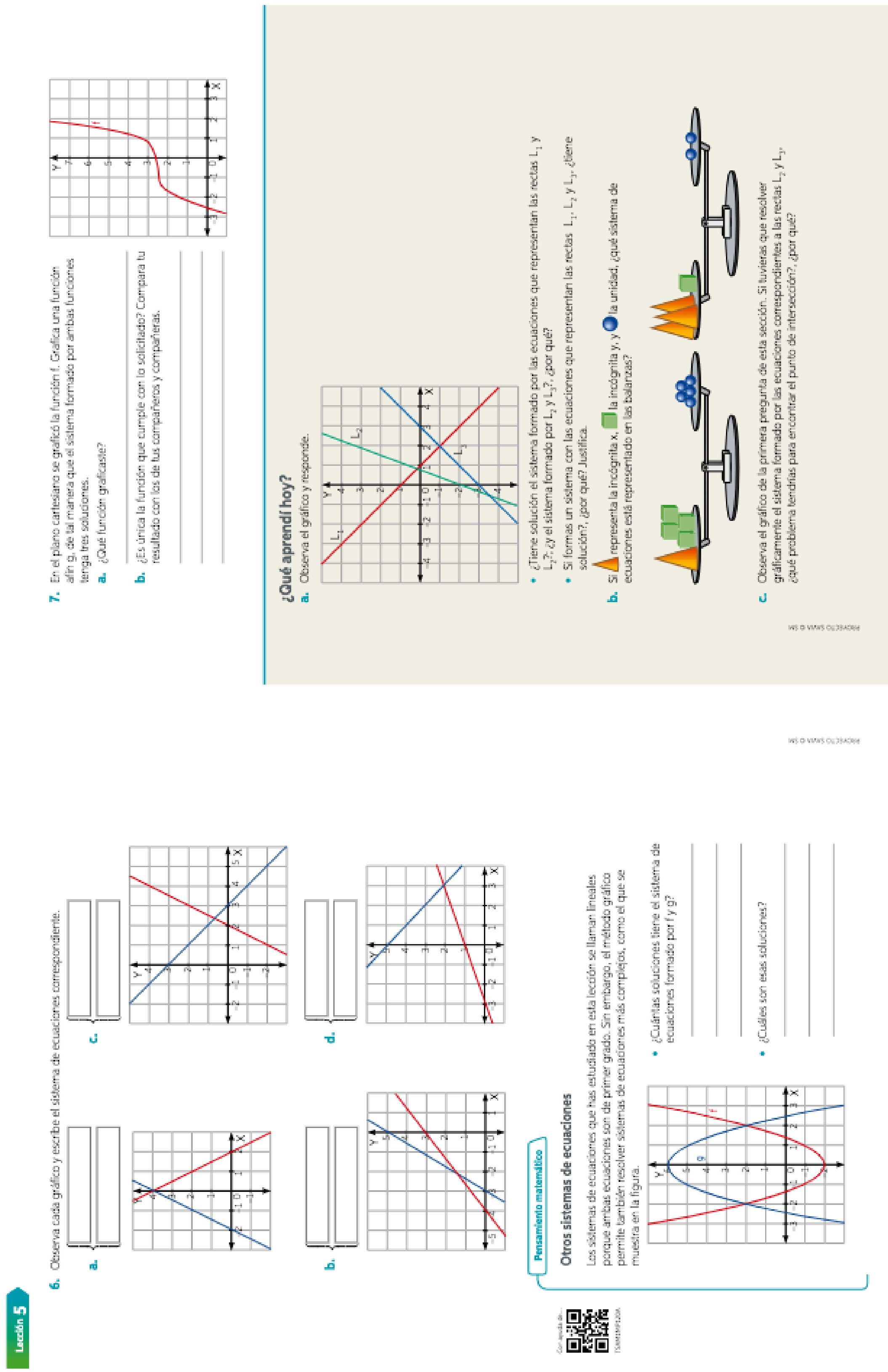


Figura A.3: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.SM (2018, pp. 120-121).

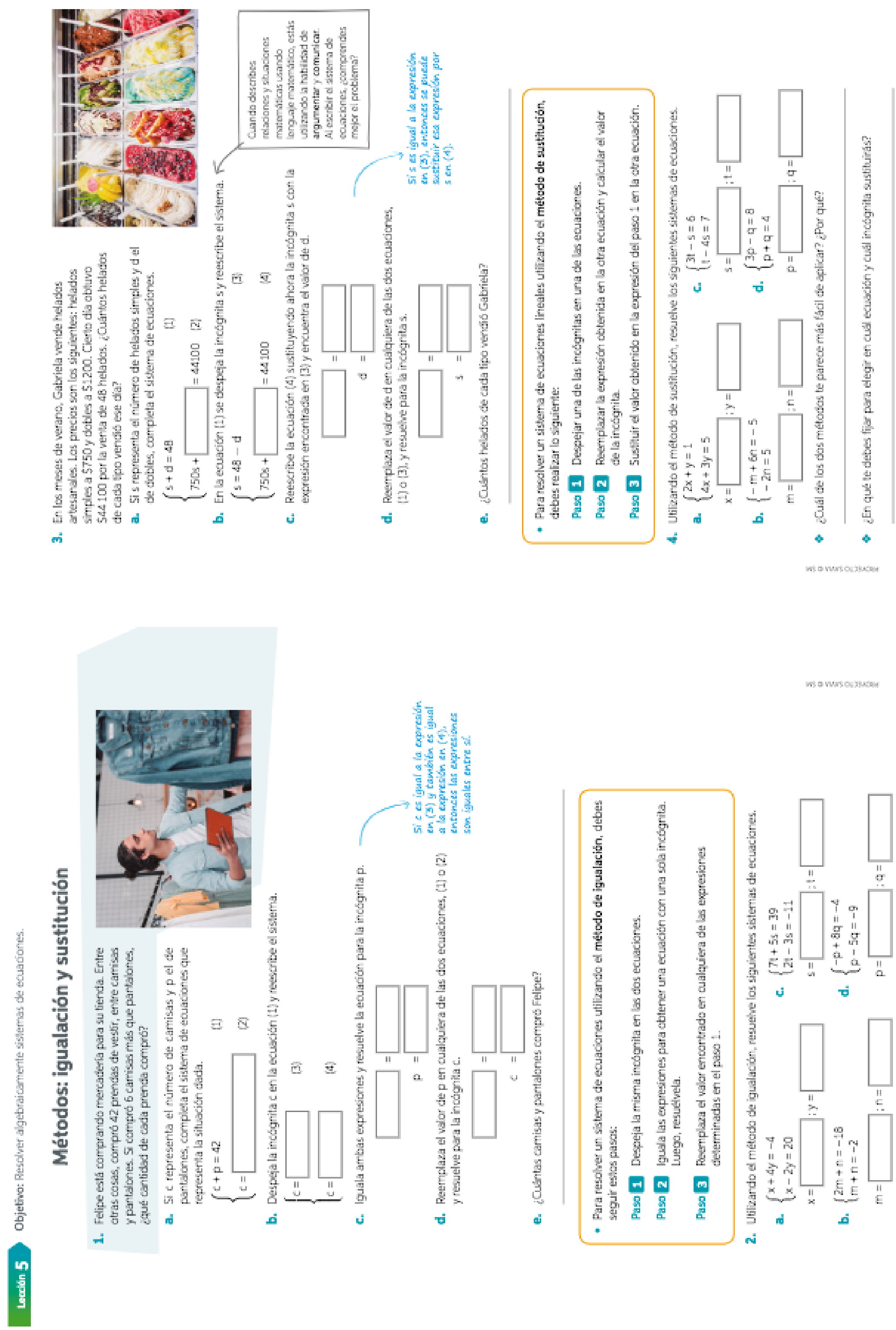
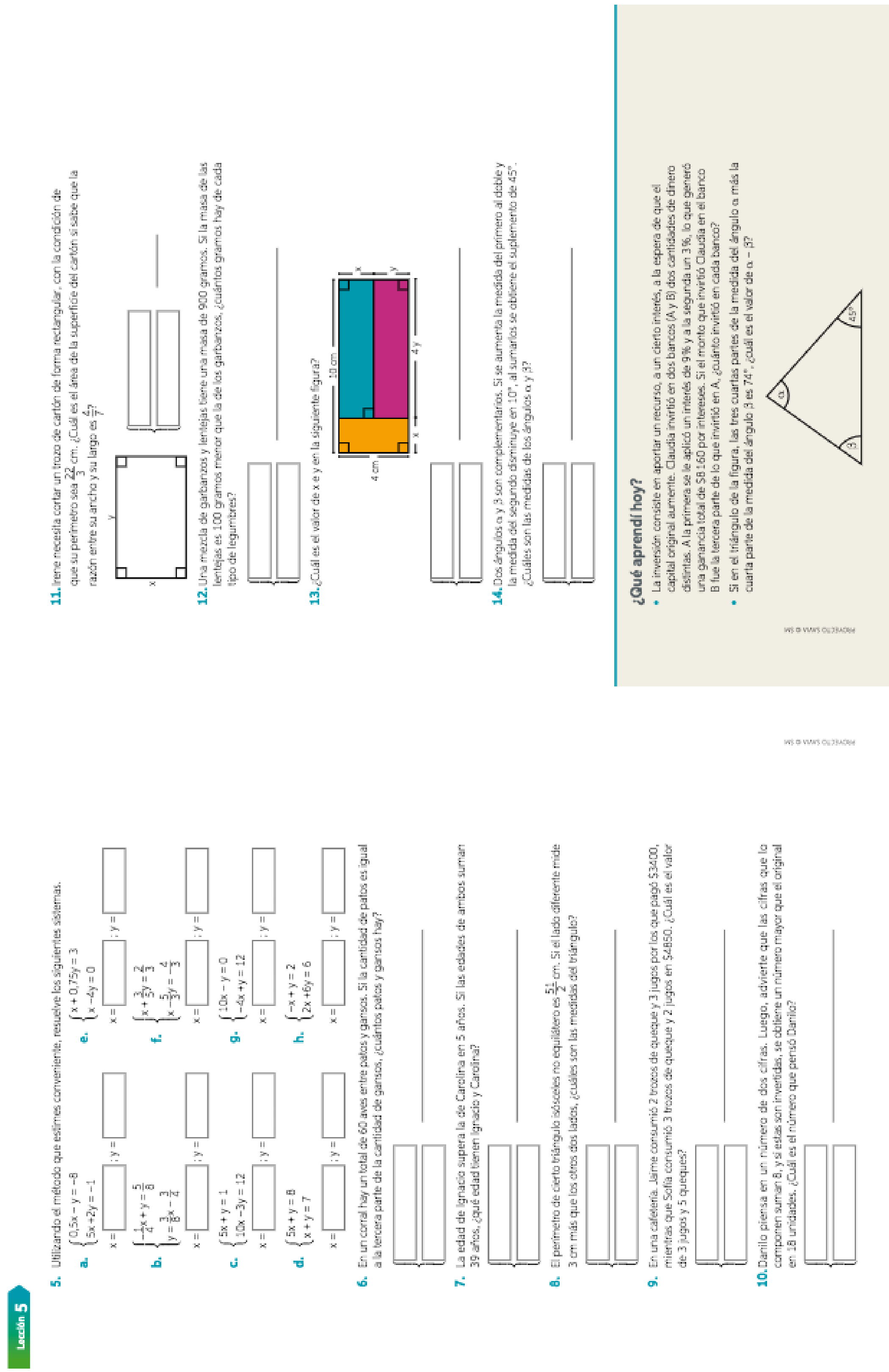


Figura A.4: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.SM (2018, pp. 122-123).



Lección 5

5. Utilizando el método que estimes conveniente, resuelve los siguientes sistemas.

a. $\begin{cases} 0{,}5x - y = -8 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$ x = ; y =

b. $\begin{cases} -\frac{1}{4}x + y = \frac{5}{8} \\ y = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \end{cases}$ x = ; y =

c. $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 10x - 3y = 12 \end{cases}$ x = ; y =

d. $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ x + y = 7 \end{cases}$ x = ; y =

e. $\begin{cases} x + 0{,}75y = 3 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$ x = ; y =

f. $\begin{cases} x + \frac{3}{5}y = \frac{2}{3} \\ x - \frac{5}{3}y = -\frac{4}{3} \end{cases}$ x = ; y =

g. $\begin{cases} 10x - y = 0 \\ -4x + y = 12 \end{cases}$ x = ; y =

h. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 6y = 6 \end{cases}$ x = ; y =

6. En un corral hay un total de 60 aves entre patos y gansos. Si la cantidad de patos es igual a la tercera parte de la cantidad de gansos, ¿cuántos patos y gansos hay?

7. La edad de Ignacio supera la de Carolina en 5 años. Si las edades de ambos suman 39 años, ¿qué edad tienen Ignacio y Carolina?

8. El perímetro de cierto triángulo isósceles no equilátero es $\frac{51}{2}$ cm. Si el lado diferente mide 3 cm más que los otros dos lados, ¿cuáles son las medidas del triángulo?

9. En una cafetería, Jaime consumió 2 trozos de queque y 3 jugos por los que pagó \$3400, mientras que Sofía consumió 3 trozos de queque y 2 jugos en \$4850. ¿Cuál es el valor de 3 jugos y 5 queques?

10. Danilo piensa en un número de dos cifras. Luego, advierte que las cifras que lo componen suman 8, y si estas son invertidas, se obtiene un número mayor que el original en 18 unidades. ¿Cuál es el número que pensó Danilo?

11. Irene necesita cortar un trozo de cartón de forma rectangular, con la condición de que su perímetro sea $\frac{22}{3}$ cm. ¿Cuál es el área de la superficie del cartón si sabe que la razón entre su ancho y su largo es $\frac{4}{7}$?

12. Una mezcla de garbanzos y lentejas tiene una masa de 900 gramos. Si la masa de las lentejas es 100 gramos menor que la de los garbanzos, ¿cuántos gramos hay de cada tipo de legumbres?

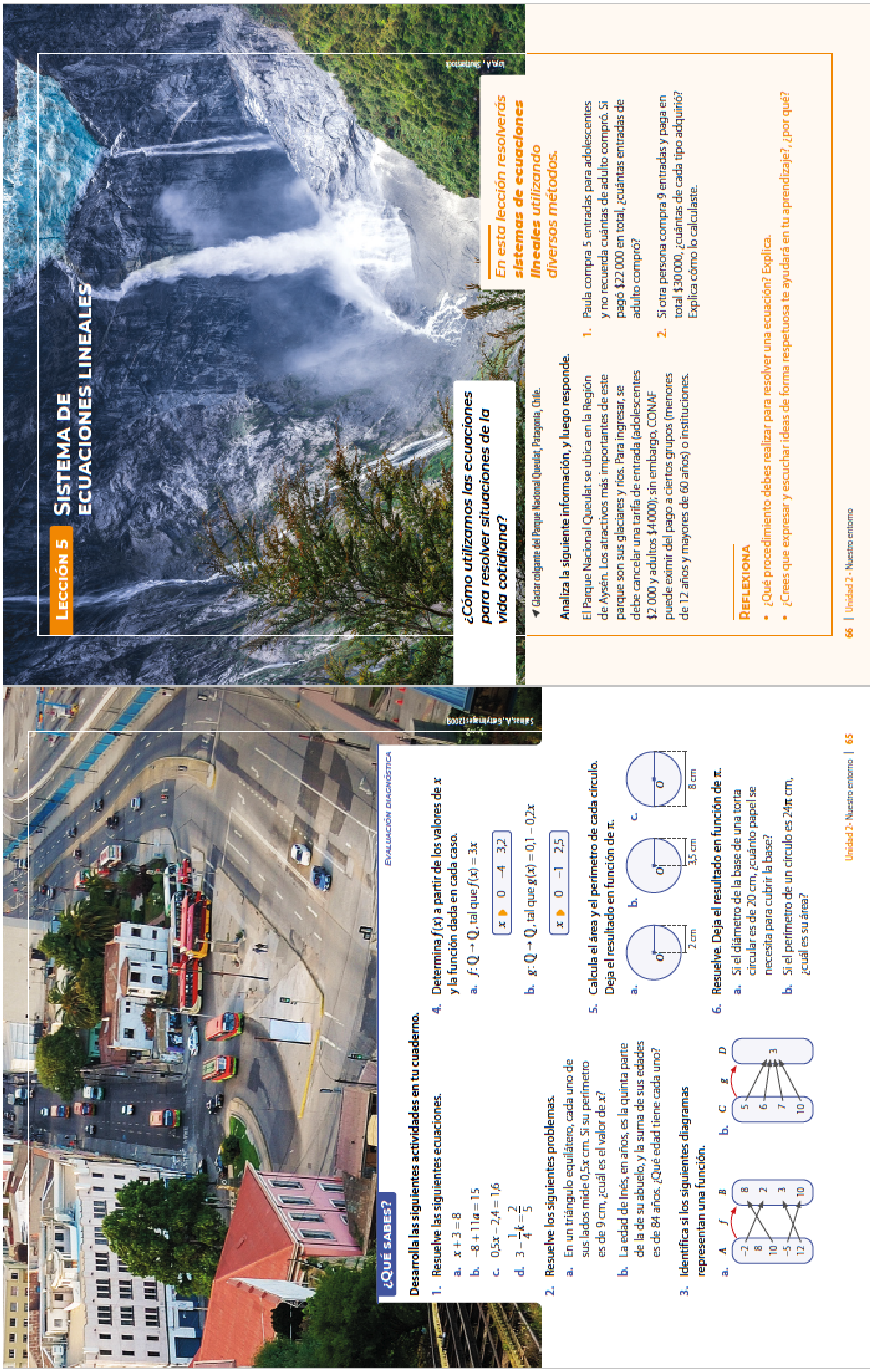
13. ¿Cuál es el valor de x e y en la siguiente figura?

14. Dos ángulos α y β son complementarios. Si se aumenta la medida del primero al doble y la medida del segundo disminuye en 10°, al sumarlos se obtiene el suplemento de 45°. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos α y β?

¿Qué aprendí hoy?

- La inversión consiste en aportar un recurso, a un cierto interés, a la espera de que el capital original aumente. Claudia invirtió en dos bancos (A y B) dos cantidades de dinero distintas. A la primera se le aplicó un interés de 9% y a la segunda un 3%, lo que generó una ganancia total de \$8160 por intereses. Si el monto que invirtió Claudia en el banco B fue la tercera parte de lo que invirtió en A, ¿cuánto invirtió en cada banco?
- Si en el triángulo de la figura, las tres cuartas partes de la medida del ángulo α más la cuarta parte de la medida del ángulo β es 74°, ¿cuál es el valor de α − β?

Figura A.5: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.SM (2018, pp. 124-125).



¿QUÉ SABES?

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a. $x + 3 = 8$
   b. $-8 + 11a = 15$
   c. $0{,}5x - 2{,}4 = 1{,}6$
   d. $3 - \frac{1}{4}k = \frac{2}{5}$
2. Resuelve los siguientes problemas.
   a. En un triángulo equilátero, cada uno de sus lados mide $0{,}5x$ cm. Si su perímetro es de 9 cm, ¿cuál es el valor de x?
   b. La edad de Inés, en años, es la quinta parte de la de su abuelo, y la suma de sus edades es de 84 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
3. Identifica si los siguientes diagramas representan una función.
   a. $A \xrightarrow{f} B$
   b. $C \xrightarrow{g} D$
4. Determina $f(x)$ a partir de los valores de x y la función dada en cada caso.
   a. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tal que $f(x) = 3x$

x	0	–4	3,2

   b. $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tal que $g(x) = 0{,}1 - 0{,}2x$

x	0	–1	2,5

5. Calcula el área y el perímetro de cada círculo. Deja el resultado en función de π.
   a. 2 cm
   b. 3,5 cm
   c. 8 cm
6. Resuelve. Deja el resultado en función de π.
   a. Si el diámetro de la base de una torta circular es de 20 cm, ¿cuánto papel se necesita para cubrir la base?
   b. Si el perímetro de un círculo es 24π cm, ¿cuál es su área?

Unidad 2 • Nuestro entorno | 65

LECCIÓN 5 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

¿Cómo utilizamos las ecuaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana?

Glaciar colgante del Parque Nacional Queulat, Patagonia, Chile.

*En esta lección resolverás **sistemas de ecuaciones lineales** utilizando diversos métodos.*

Analiza la siguiente información, y luego responde.

El Parque Nacional Queulat se ubica en la Región de Aysén. Los atractivos más importantes de este parque son sus glaciares y ríos. Para ingresar, se debe cancelar una tarifa de entrada (adolescentes \$2 000 y adultos \$4 000); sin embargo, CONAF puede eximir del pago a ciertos grupos (menores de 12 años y mayores de 60 años) o instituciones.

1. Paula compra 5 entradas para adolescentes y no recuerda cuántas de adulto compró. Si pagó \$22 000 en total, ¿cuántas entradas de adulto compró?
2. Si otra persona compra 9 entradas y paga en total \$30 000, ¿cuántas de cada tipo adquirió? Explica cómo lo calculaste.

REFLEXIONA

- ¿Qué procedimiento debes realizar para resolver una ecuación? Explica.
- ¿Crees que expresar y escuchar ideas de forma respetuosa te ayudará en tu aprendizaje?, ¿por qué?

66 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.6: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 65-66).

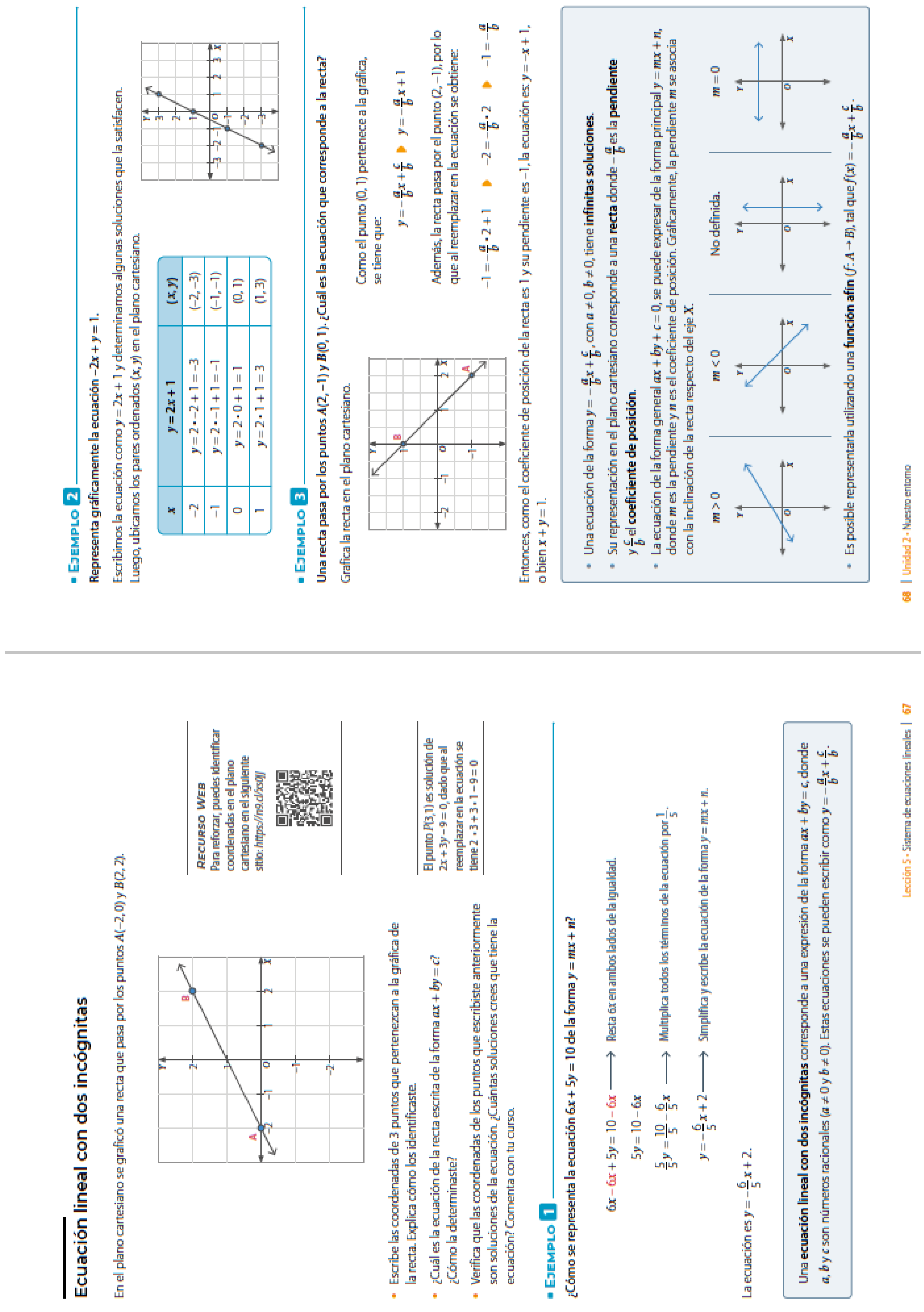
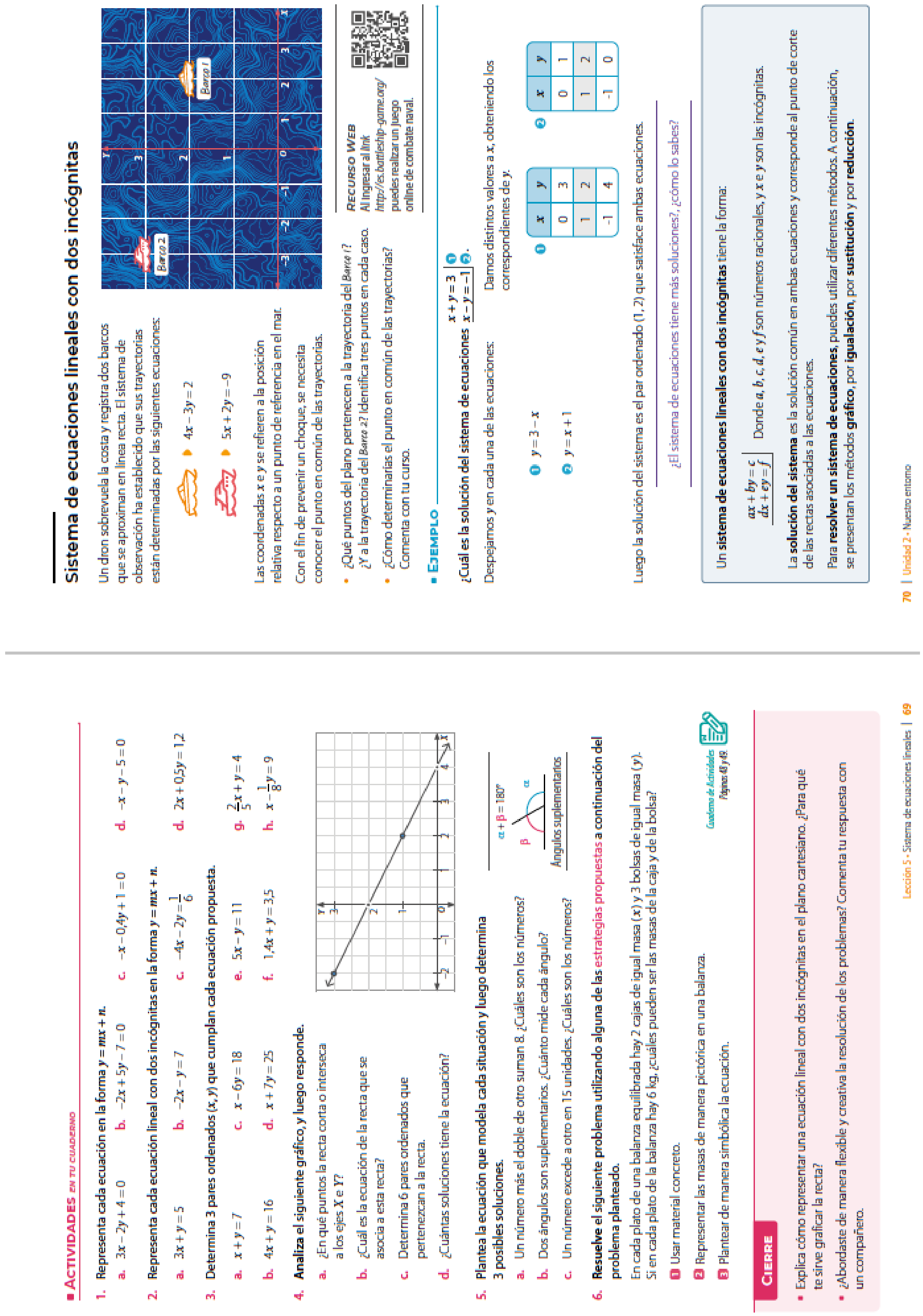


Figura A.7: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 67-68).



Actividades *en tu cuaderno*

1. Represents cada ecuación en la forma $y = mx + n$.
   a. $3x - 2y + 4 = 0$ b. $-2x + 5y - 7 = 0$ c. $-x - 0{,}4y + 1 = 0$ d. $-x - y - 5 = 0$
2. Representa cada ecuación lineal con dos incógnitas en la forma $y = mx + n$.
   a. $3x + y = 5$ b. $-2x - y = 7$ c. $-4x - 2y = \frac{1}{6}$ d. $2x + 0{,}5y = 1{,}2$
3. Determina 3 pares ordenados (x, y) que cumplan cada ecuación propuesta.
   a. $x + y = 7$ c. $x - 6y = 18$ e. $5x - y = 11$ g. $\frac{2}{5}x + y = 4$
   b. $4x + y = 16$ d. $x + 7y = 25$ f. $1{,}4x + y = 3{,}5$ h. $x - \frac{1}{8}y = 9$
4. **Analiza el siguiente gráfico, y luego responde.**
   a. ¿En qué puntos la recta corta o interseca a los ejes X e Y?
   b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que se asocia a esta recta?
   c. Determina 6 pares ordenados que pertenezcan a la recta.
   d. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?
5. **Plantea la ecuación que modela cada situación y luego determina 3 posibles soluciones.**
   a. Un número más el doble de otro suman 8. ¿Cuáles son los números?
   b. Dos ángulos son suplementarios. ¿Cuánto mide cada ángulo?
   c. Un número excede a otro en 15 unidades. ¿Cuáles son los números?

$\alpha + \beta = 180°$

Ángulos suplementarios

6. **Resuelve el siguiente problema utilizando alguna de las estrategias propuestas a continuación del problema planteado.**
   En cada plato de una balanza equilibrada hay 2 cajas de igual masa (x) y 3 bolsas de igual masa (y). Si en cada plato de la balanza hay 6 kg, ¿cuáles pueden ser las masas de la caja y de la bolsa?
   1 Usar material concreto.
   2 Representar las masas de manera pictórica en una balanza.
   3 Plantear de manera simbólica la ecuación.

Cuaderno de Actividades Páginas 48 y 49.

Cierre

- Explica cómo representar una ecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano. ¿Para qué te sirve graficar la recta?
- ¿Abordaste de manera flexible y creativa la resolución de los problemas? Comenta tu respuesta con un compañero.

Lección 5 • Sistema de ecuaciones lineales | 69

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un dron sobrevuela la costa y registra dos barcos que se aproximan en línea recta. El sistema de observación ha establecido que sus trayectorias están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$4x - 3y = 2$

$5x + 2y = -9$

Las coordenadas x e y se refieren a la posición relativa respecto a un punto de referencia en el mar.

Con el fin de prevenir un choque, se necesita conocer el punto en común de las trayectorias.

- ¿Qué puntos del plano pertenecen a la trayectoria del *Barco 1*? ¿Y a la trayectoria del *Barco 2*? Identifica tres puntos en cada caso.
- ¿Cómo determinarías el punto en común de las trayectorias? Comenta con tu curso.

Recurso Web
Al ingresar al link *http://es.battleship-game.org/* puedes realizar un juego online de combate naval.

Ejemplo

¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{array}$?

Despejamos y en cada una de las ecuaciones:

1 $y = 3 - x$

2 $y = x + 1$

Damos distintos valores a x, obteniendo los correspondientes de y.

1

x	y
0	3
1	2
-1	4

2

x	y
0	1
1	2
-1	0

Luego la solución del sistema es el par ordenado (1, 2) que satisface ambas ecuaciones.

¿El sistema de ecuaciones tiene más soluciones?, ¿cómo lo sabes?

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

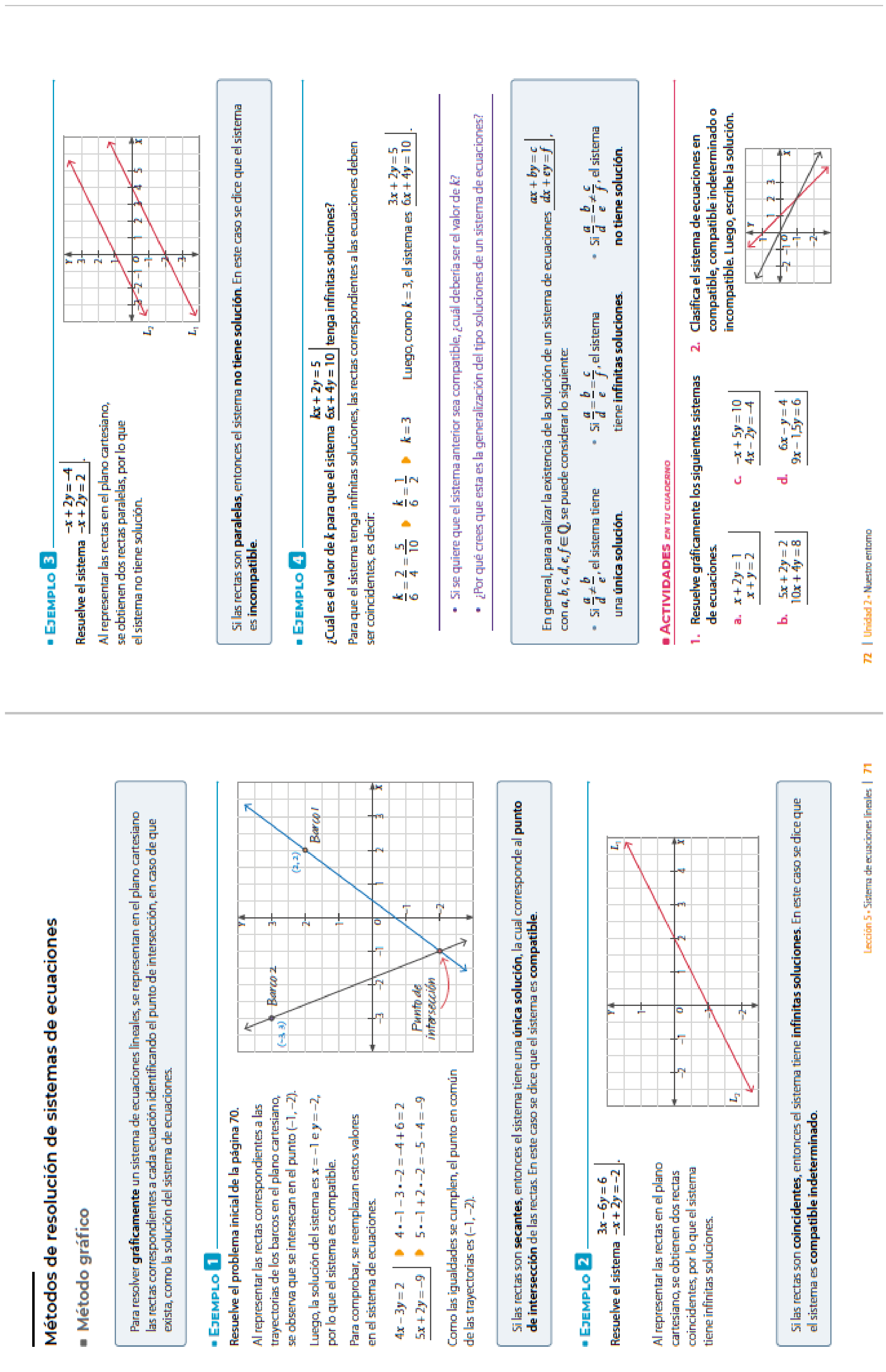
$\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$ Donde a, b, c, d, e y f son números racionales, y x e y son las incógnitas.

La **solución del sistema** es la solución común en ambas ecuaciones y corresponde al punto de corte de las rectas asociadas a las ecuaciones.

Para **resolver un sistema de ecuaciones**, puedes utilizar diferentes métodos. A continuación, se presentan los métodos **gráfico**, por **igualación**, por **sustitución** y por **reducción**.

70 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.8: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 69-70).



Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

■ Método gráfico

Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación identificando el punto de intersección, en caso de que exista, como la solución del sistema de ecuaciones.

■ EJEMPLO 1

Resuelve el problema inicial de la página 70.

Al representar las rectas correspondientes a las trayectorias de los barcos en el plano cartesiano, se observa que se intersecan en el punto (–1, –2).

Luego, la solución del sistema es $x = -1$ e $y = -2$, por lo que el sistema es compatible.

Para comprobar, se reemplazan estos valores en el sistema de ecuaciones.

$\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 5x + 2y = -9 \end{array}$ ▶ $4 \cdot -1 - 3 \cdot -2 = -4 + 6 = 2$ ▶ $5 \cdot -1 + 2 \cdot -2 = -5 - 4 = -9$

Como las igualdades se cumplen, el punto en común de las trayectorias es (–1, –2).

Si las rectas son **secantes**, entonces el sistema tiene una **única solución**, la cual corresponde al **punto de intersección** de las rectas. En este caso se dice que el sistema es **compatible**.

■ EJEMPLO 2

Resuelve el sistema $\begin{array}{l} 3x - 6y = 6 \\ -x + 2y = -2 \end{array}$.

Al representar las rectas en el plano cartesiano, se obtienen dos rectas coincidentes, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Si las rectas son **coincidentes**, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones**. En este caso se dice que el sistema es **compatible indeterminado**.

Lección 5 • Sistema de ecuaciones lineales | 71

■ EJEMPLO 3

Resuelve el sistema $\begin{array}{l} -x + 2y = -4 \\ -x + 2y = 2 \end{array}$.

Al representar las rectas en el plano cartesiano, se obtienen dos rectas paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.

Si las rectas son **paralelas**, entonces el sistema **no tiene solución**. En este caso se dice que el sistema es **incompatible**.

■ EJEMPLO 4

¿Cuál es el valor de k para que el sistema $\begin{array}{l} kx + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{array}$ tenga infinitas soluciones?

Para que el sistema tenga infinitas soluciones, las rectas correspondientes a las ecuaciones deben ser coincidentes, es decir:

$\frac{k}{6} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ ▶ $\frac{k}{6} = \frac{1}{2}$ ▶ $k = 3$ Luego, como $k = 3$, el sistema es $\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{array}$.

- Si se quiere que el sistema anterior sea compatible, ¿cuál debería ser el valor de k?
- ¿Por qué crees que esta es la generalización del tipo soluciones de un sistema de ecuaciones?

En general, para analizar la existencia de la solución de un sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$, con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$, se puede considerar lo siguiente:

- Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, el sistema tiene una **única solución**.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema tiene **infinitas soluciones**.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema **no tiene solución**.

■ ACTIVIDADES EN TU CUADERNO

1. **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.**

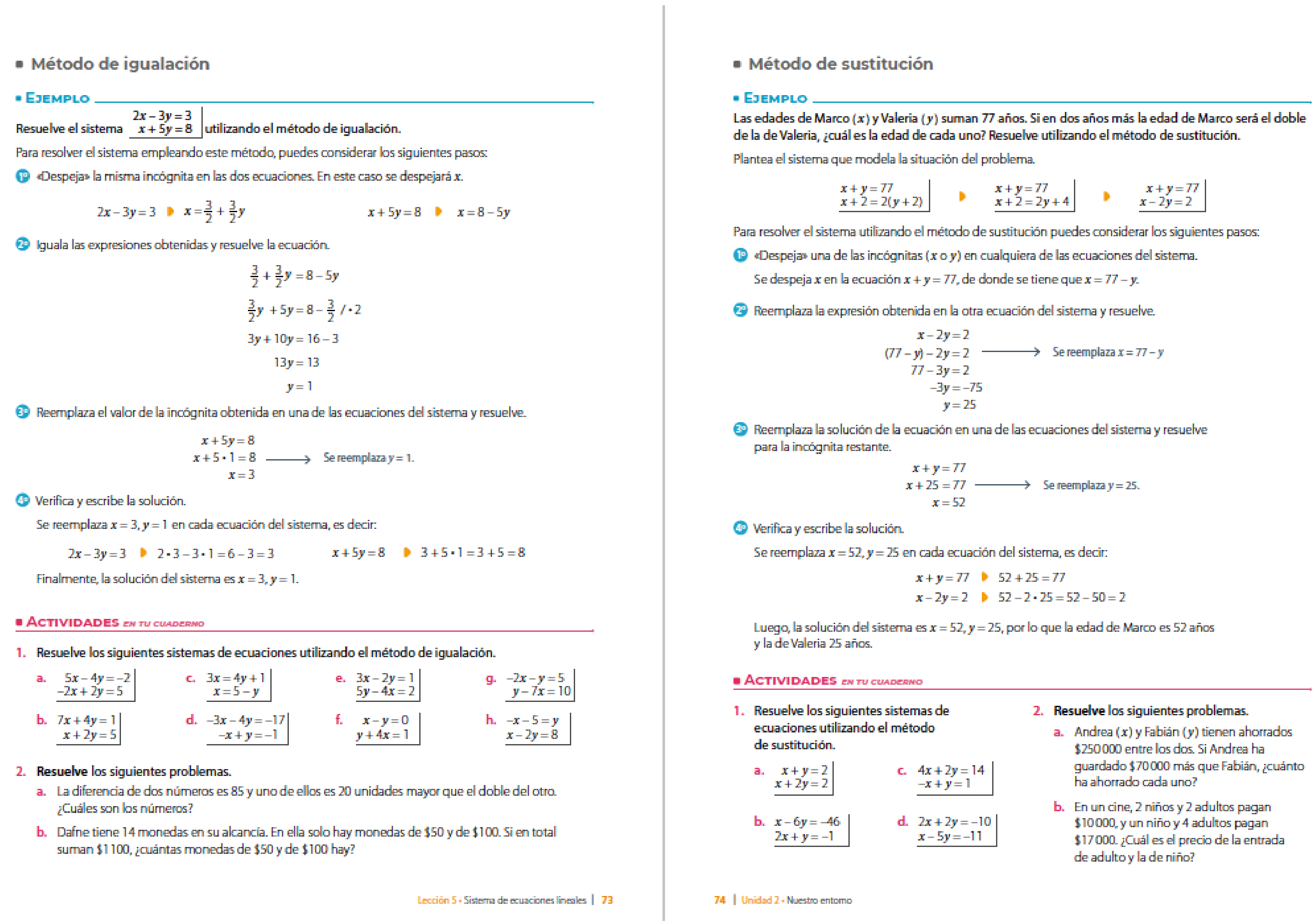
   a. $\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}$ c. $\begin{array}{l} -x + 5y = 10 \\ 4x - 2y = -4 \end{array}$

   b. $\begin{array}{l} 5x + 2y = 2 \\ 10x + 4y = 8 \end{array}$ d. $\begin{array}{l} 6x - y = 4 \\ 9x - 1{,}5y = 6 \end{array}$

2. **Clasifica el sistema de ecuaciones en compatible, compatible indeterminado o incompatible. Luego, escribe la solución.**

72 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.9: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 71-72).



Método de igualación

Ejemplo

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 5y = 8 \end{cases}$ utilizando el método de igualación.

Para resolver el sistema empleando este método, puedes considerar los siguientes pasos:

1º «Despeja» la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso se despejará x.

$$2x - 3y = 3 \;\blacktriangleright\; x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y \qquad x + 5y = 8 \;\blacktriangleright\; x = 8 - 5y$$

2º Iguala las expresiones obtenidas y resuelve la ecuación.

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y = 8 - 5y$$
$$\frac{3}{2}y + 5y = 8 - \frac{3}{2} \;/ \cdot 2$$
$$3y + 10y = 16 - 3$$
$$13y = 13$$
$$y = 1$$

3º Reemplaza el valor de la incógnita obtenida en una de las ecuaciones del sistema y resuelve.

$$x + 5y = 8$$
$$x + 5 \cdot 1 = 8 \longrightarrow \text{Se reemplaza } y = 1.$$
$$x = 3$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $x = 3$, $y = 1$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$2x - 3y = 3 \;\blacktriangleright\; 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3 \qquad x + 5y = 8 \;\blacktriangleright\; 3 + 5 \cdot 1 = 3 + 5 = 8$$

Finalmente, la solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

Actividades en tu cuaderno

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de igualación.
   a. $\begin{cases} 5x - 4y = -2 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} 3x = 4y + 1 \\ x = 5 - y \end{cases}$
   d. $\begin{cases} -3x - 4y = -17 \\ -x + y = -1 \end{cases}$
   e. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5y - 4x = 2 \end{cases}$
   f. $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 4x = 1 \end{cases}$
   g. $\begin{cases} -2x - y = 5 \\ y - 7x = 10 \end{cases}$
   h. $\begin{cases} -x - 5 = y \\ x - 2y = 8 \end{cases}$
2. **Resuelve** los siguientes problemas.
   a. La diferencia de dos números es 85 y uno de ellos es 20 unidades mayor que el doble del otro. ¿Cuáles son los números?
   b. Dafne tiene 14 monedas en su alcancía. En ella solo hay monedas de \$50 y de \$100. Si en total suman \$1 100, ¿cuántas monedas de \$50 y de \$100 hay?

Lección 5 • Sistema de ecuaciones lineales | 73

Método de sustitución

Ejemplo

Las edades de Marco (x) y Valeria (y) suman 77 años. Si en dos años más la edad de Marco será el doble de la de Valeria, ¿cuál es la edad de cada uno? Resuelve utilizando el método de sustitución.

Plantea el sistema que modela la situación del problema.

$$\begin{cases} x + y = 77 \\ x + 2 = 2(y + 2) \end{cases} \;\blacktriangleright\; \begin{cases} x + y = 77 \\ x + 2 = 2y + 4 \end{cases} \;\blacktriangleright\; \begin{cases} x + y = 77 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Para resolver el sistema utilizando el método de sustitución puedes considerar los siguientes pasos:

1º «Despeja» una de las incógnitas (x o y) en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Se despeja x en la ecuación $x + y = 77$, de donde se tiene que $x = 77 - y$.

2º Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve.

$$x - 2y = 2$$
$$(77 - y) - 2y = 2 \longrightarrow \text{Se reemplaza } x = 77 - y$$
$$77 - 3y = 2$$
$$-3y = -75$$
$$y = 25$$

3º Reemplaza la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelve para la incógnita restante.

$$x + y = 77$$
$$x + 25 = 77 \longrightarrow \text{Se reemplaza } y = 25.$$
$$x = 52$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $x = 52$, $y = 25$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$x + y = 77 \;\blacktriangleright\; 52 + 25 = 77$$
$$x - 2y = 2 \;\blacktriangleright\; 52 - 2 \cdot 25 = 52 - 50 = 2$$

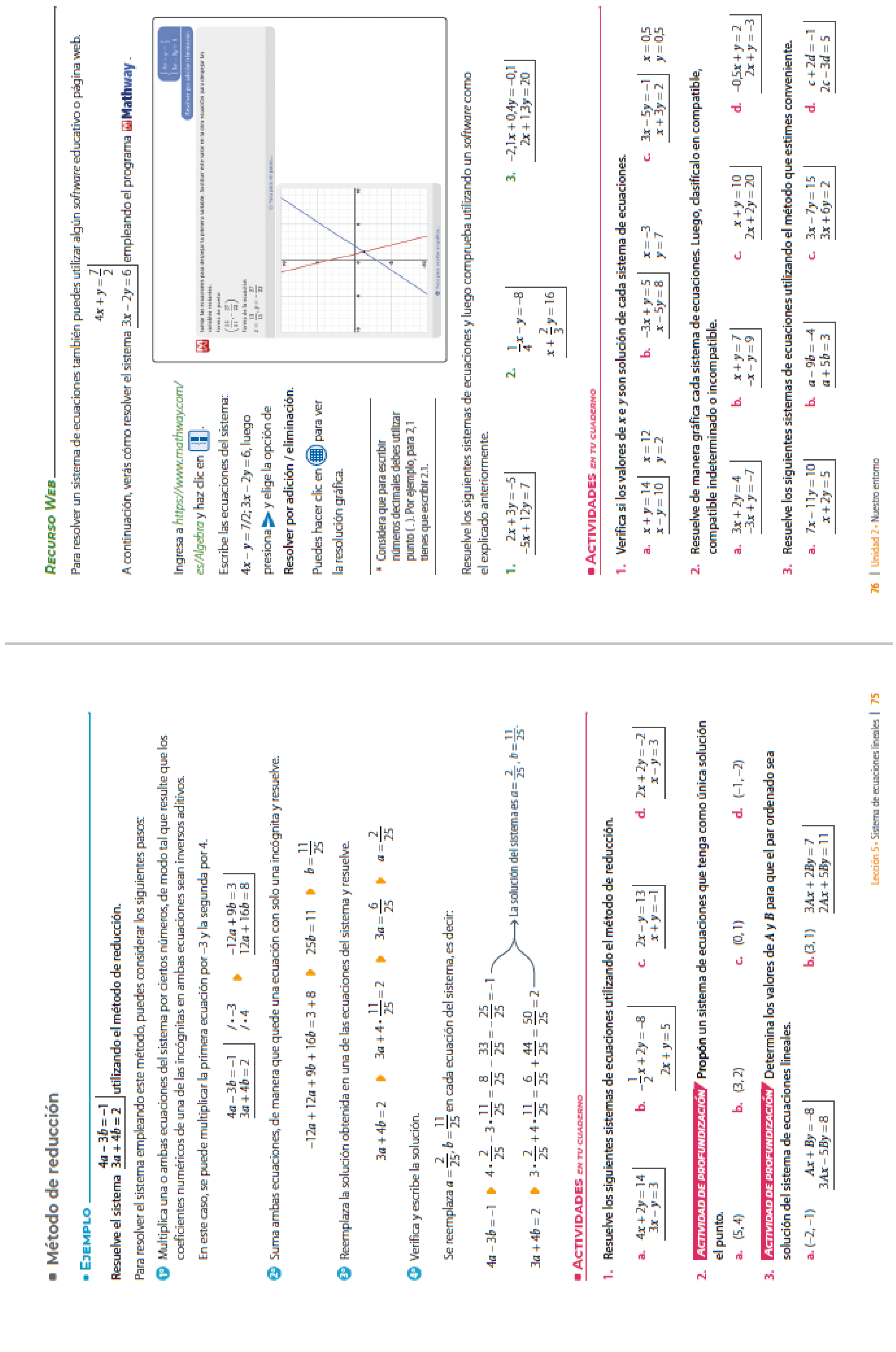
Luego, la solución del sistema es $x = 52$, $y = 25$, por lo que la edad de Marco es 52 años y la de Valeria 25 años.

Actividades en tu cuaderno

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución.
   a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x - 6y = -46 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ -x + y = 1 \end{cases}$
   d. $\begin{cases} 2x + 2y = -10 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$
2. **Resuelve** los siguientes problemas.
   a. Andrea (x) y Fabián (y) tienen ahorrados \$250 000 entre los dos. Si Andrea ha guardado \$70 000 más que Fabián, ¿cuánto ha ahorrado cada uno?
   b. En un cine, 2 niños y 2 adultos pagan \$10 000, y un niño y 4 adultos pagan \$17 000. ¿Cuál es el precio de la entrada de adulto y la de niño?

74 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.10: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 73-74).



■ **Método de reducción**

■ **Ejemplo**

Resuelve el sistema $\begin{cases} 4a - 3b = -1 \\ 3a + 4b = 2 \end{cases}$ **utilizando el método de reducción.**

Para resolver el sistema empleando este método, puedes considerar los siguientes pasos:

1º Multiplica una o ambas ecuaciones del sistema por ciertos números, de modo tal que resulte que los coeficientes numéricos de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sean inversos aditivos.

En este caso, se puede multiplicar la primera ecuación por –3 y la segunda por 4.

$$\begin{cases} 4a - 3b = -1 & / \cdot -3 \\ 3a + 4b = 2 & / \cdot 4 \end{cases} \;\blacktriangleright\; \begin{cases} -12a + 9b = 3 \\ 12a + 16b = 8 \end{cases}$$

2º Suma ambas ecuaciones, de manera que quede una ecuación con solo una incógnita y resuelve.

$$-12a + 12a + 9b + 16b = 3 + 8 \;\blacktriangleright\; 25b = 11 \;\blacktriangleright\; b = \frac{11}{25}$$

3º Reemplaza la solución obtenida en una de las ecuaciones del sistema y resuelve.

$$3a + 4b = 2 \;\blacktriangleright\; 3a + 4 \cdot \frac{11}{25} = 2 \;\blacktriangleright\; 3a = \frac{6}{25} \;\blacktriangleright\; a = \frac{2}{25}$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $a = \frac{2}{25}$, $b = \frac{11}{25}$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$4a - 3b = -1 \;\blacktriangleright\; 4 \cdot \frac{2}{25} - 3 \cdot \frac{11}{25} = \frac{8}{25} - \frac{33}{25} = -\frac{25}{25} = -1$$

$$3a + 4b = 2 \;\blacktriangleright\; 3 \cdot \frac{2}{25} + 4 \cdot \frac{11}{25} = \frac{6}{25} + \frac{44}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

→ La solución del sistema es $a = \frac{2}{25}$, $b = \frac{11}{25}$.

■ **Actividades** *en tu cuaderno*

1. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de reducción.**

a. $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2y = -8 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ x + y = -1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ x - y = 3 \end{cases}$

2. **Actividad de profundización** **Propón un sistema de ecuaciones que tenga como única solución el punto.**

a. (5, 4) b. (3, 2) c. (0, 1) d. (–1, –2)

3. **Actividad de profundización** **Determina los valores de A y B para que el par ordenado sea solución del sistema de ecuaciones lineales.**

a. (–2, –1) $\begin{cases} Ax + By = -8 \\ 3Ax - 5By = 8 \end{cases}$ b. (3, 1) $\begin{cases} 3Ax + 2By = 7 \\ 2Ax + 5By = 11 \end{cases}$

Lección 5 • Sistema de ecuaciones lineales | 75

Recurso Web

Para resolver un sistema de ecuaciones también puedes utilizar algún *software* educativo o página web.

A continuación, verás cómo resolver el sistema $\begin{cases} 4x + y = \frac{7}{2} \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ empleando el programa **Mathway**.

Ingresa a *https://www.mathway.com/es/Algebra* y haz clic en [icono].

Escribe las ecuaciones del sistema: $4x - y = 7/2$; $3x - 2y = 6$, luego presiona ➤ y elige la opción de **Resolver por adición / eliminación.**

Puedes hacer clic en [icono] para ver la resolución gráfica.

* Considera que para escribir números decimales debes utilizar punto (.). Por ejemplo, para 2,1 tienes que escribir 2.1.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y luego comprueba utilizando un *software* como el explicado anteriormente.

1. $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ -5x + 12y = 7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = -8 \\ x + \frac{2}{3}y = 16 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -2{,}1x + 0{,}4y = -0{,}1 \\ 2x + 1{,}3y = 20 \end{cases}$

■ **Actividades** *en tu cuaderno*

1. **Verifica si los valores de x e y son solución de cada sistema de ecuaciones.**

a. $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 10 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = 12 \\ y = 2 \end{matrix}$ b. $\begin{cases} -3x + y = 5 \\ x - 5y = 8 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = -3 \\ y = 7 \end{matrix}$ c. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{matrix}$

2. **Resuelve de manera gráfica cada sistema de ecuaciones. Luego, clasifícalo en compatible, compatible indeterminado o incompatible.**

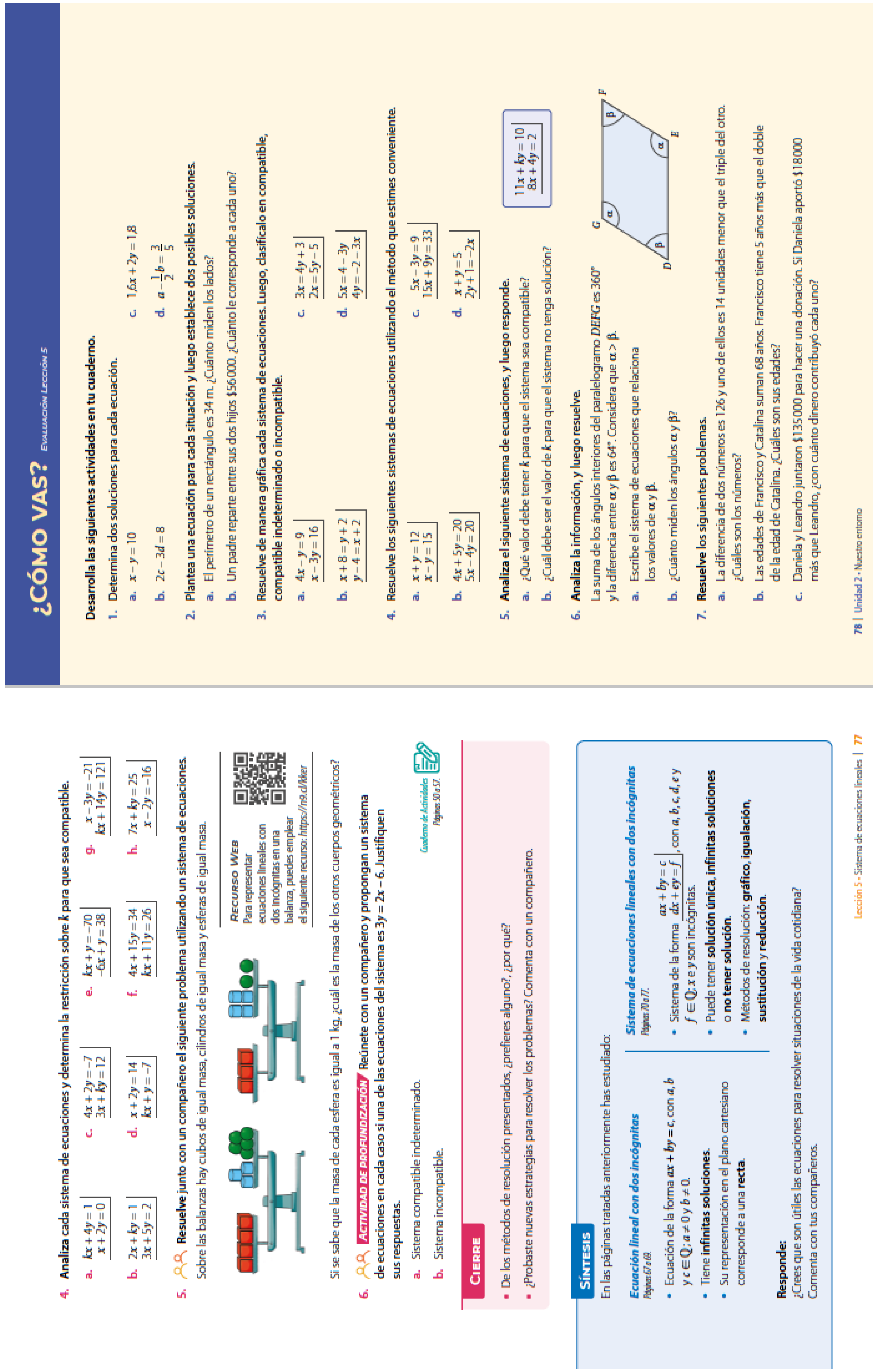
a. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = 9 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ d. $\begin{cases} -0{,}5x + y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$

3. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente.**

a. $\begin{cases} 7x - 11y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a - 9b = -4 \\ a + 5b = 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x - 7y = 15 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} c + 2d = -1 \\ 2c - 3d = 5 \end{cases}$

76 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.11: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 75-76).



4. **Analiza** cada sistema de ecuaciones y determina la restricción sobre k para que sea compatible.

a. $\begin{cases} kx + 4y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 4x + 2y = -7 \\ 3x + ky = 12 \end{cases}$ e. $\begin{cases} kx + y = -70 \\ -6x + y = 38 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x - 3y = -21 \\ kx + 14y = 121 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + ky = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ kx + y = -7 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 4x + 15y = 34 \\ kx + 11y = 26 \end{cases}$ h. $\begin{cases} 7x + ky = 25 \\ x - 2y = -16 \end{cases}$

5. **Resuelve** junto con un compañero el siguiente problema utilizando un sistema de ecuaciones.
Sobre las balanzas hay cubos de igual masa, cilindros de igual masa y esferas de igual masa.

Recurso Web
Para representar ecuaciones lineales con dos incógnitas en una balanza, puedes emplear el siguiente recurso: https://n9.cl/kker

Si se sabe que la masa de cada esfera es igual a 1 kg, ¿cuál es la masa de los otros cuerpos geométricos?

6. **Actividad de profundización** Reúnete con un compañero y propongan un sistema de ecuaciones en cada caso si una de las ecuaciones del sistema es $3y = 2x - 6$. Justifiquen sus respuestas.
a. Sistema compatible indeterminado.
b. Sistema incompatible.

Cuaderno de Actividades Páginas 50 a 57.

Cierre

- De los métodos de resolución presentados, ¿prefieres alguno?, ¿por qué?
- ¿Probaste nuevas estrategias para resolver los problemas? Comenta con un compañero.

Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

Ecuación lineal con dos incógnitas Páginas 67 a 69.
- Ecuación de la forma $ax + by = c$, con a, b y $c \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
- Tiene **infinitas soluciones**.
- Su representación en el plano cartesiano corresponde a una **recta**.

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas Páginas 70 a 77.
- Sistema de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, con a, b, c, d, e y $f \in \mathbb{Q}$; x e y son incógnitas.
- Puede tener **solución única**, **infinitas soluciones** o **no tener solución**.
- Métodos de resolución: **gráfico**, **igualación**, **sustitución** y **reducción**.

Responde:
¿Crees que son útiles las ecuaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana? Comenta con tus compañeros.

Lección 5 • Sistema de ecuaciones lineales | 77

¿CÓMO VAS? Evaluación Lección 5

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. **Determina dos soluciones para cada ecuación.**
a. $x - y = 10$ c. $1{,}6x + 2y = 1{,}8$
b. $2c - 3d = 8$ d. $a - \frac{1}{2}b = \frac{3}{5}$

2. **Plantea una ecuación para cada situación y luego establece dos posibles soluciones.**
a. El perímetro de un rectángulo es 34 m. ¿Cuánto miden los lados?
b. Un padre reparte entre sus dos hijos \$56000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

3. **Resuelve de manera gráfica cada sistema de ecuaciones. Luego, clasifícalo en compatible, compatible indeterminado o incompatible.**
a. $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x = 4y + 3 \\ 2x = 5y - 5 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + 8 = y + 2 \\ y - 4 = x + 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 5x = 4 - 3y \\ 4y = -2 - 3x \end{cases}$

4. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente.**
a. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 15 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 15x + 9y = 33 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 5x - 4y = 20 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y + 1 = -2x \end{cases}$

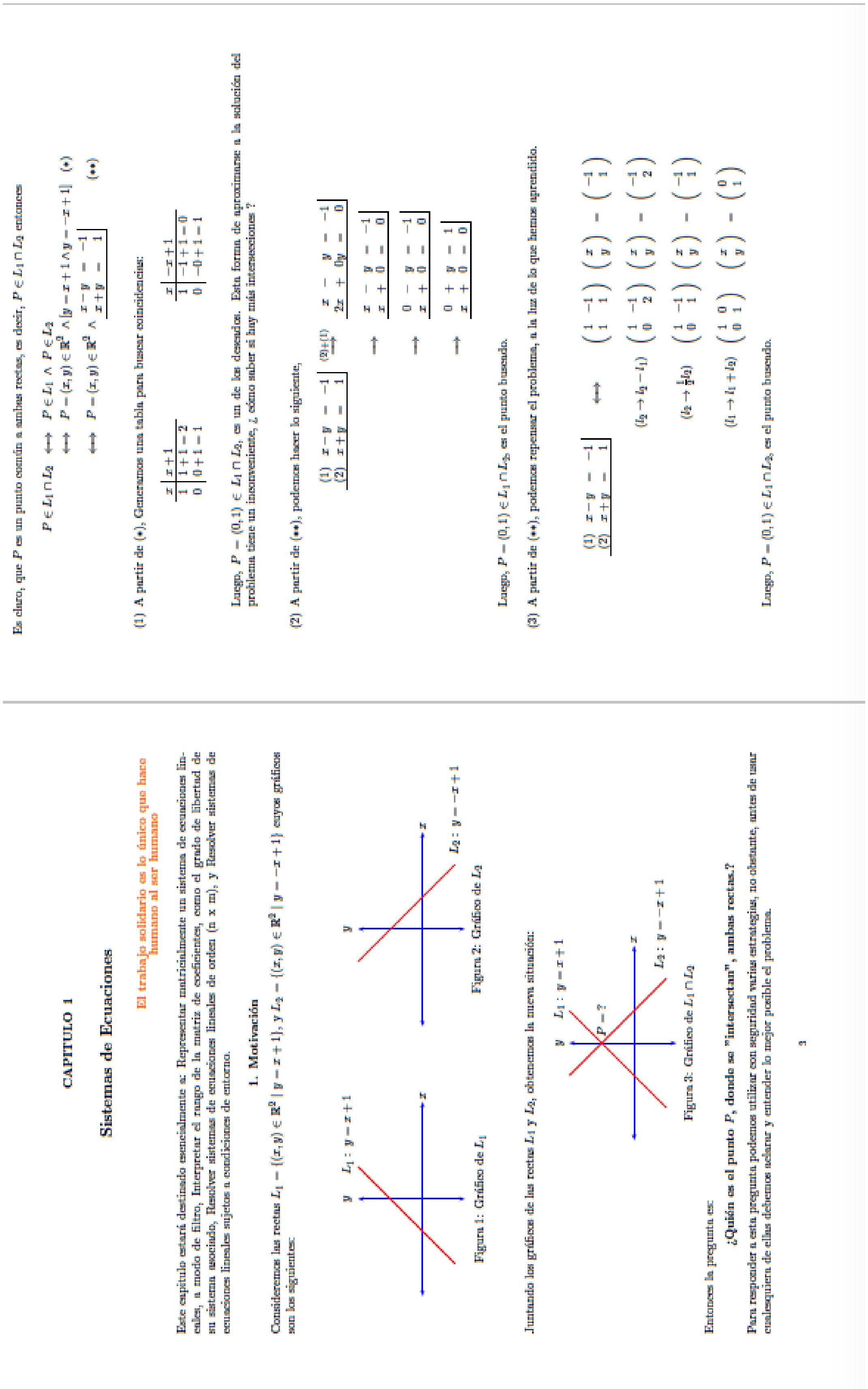
5. **Analiza** el siguiente sistema de ecuaciones, y luego responde. $\begin{cases} 11x + ky = 10 \\ 8x + 4y = 2 \end{cases}$
a. ¿Qué valor debe tener k para que el sistema sea compatible?
b. ¿Cuál debe ser el valor de k para que el sistema no tenga solución?

6. **Analiza la información, y luego resuelve.**
La suma de los ángulos interiores del paralelogramo $DEFG$ es 360° y la diferencia entre α y β es 64°. Considera que $\alpha > \beta$.
a. Escribe el sistema de ecuaciones que relaciona los valores de α y β.
b. ¿Cuánto miden los ángulos α y β?

7. **Resuelve los siguientes problemas.**
a. La diferencia de dos números es 126 y uno de ellos es 14 unidades menor que el triple del otro. ¿Cuáles son los números?
b. Las edades de Francisco y Catalina suman 68 años. Francisco tiene 5 años más que el doble de la edad de Catalina. ¿Cuáles son sus edades?
c. Daniela y Leandro juntaron \$135000 para hacer una donación. Si Daniela aportó \$18000 más que Leandro, ¿con cuánto dinero contribuyó cada uno?

78 | Unidad 2 • Nuestro entorno

Figura A.12: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de 1º medio ed.Santillana (2020, pp. 77-78).



CAPITULO 1

Sistemas de Ecuaciones

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este capitulo estará destinado esencialmente a: Representar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales, a modo de filtro, Interpretar el rango de la matriz de coeficientes, como el grado de libertad de su sistema asociado, Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden (n x m), y Resolver sistemas de ecuaciones lineales sujetos a condiciones de entorno.

1. Motivación

Consideremos las rectas $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$, y $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x+1\}$ cuyos gráficos son los siguientes:

Figura 1: Gráfico de L_1

Figura 2: Gráfico de L_2

Juntando los gráficos de las rectas L_1 y L_2, obtenemos la nueva situación:

Figura 3: Gráfico de $L_1 \cap L_2$

Entonces la pregunta es:

¿Quién es el punto P, donde se "intersectan", ambas rectas.?

Para responder a esta pregunta podemos utilizar con seguridad varias estrategias, no obstante, antes de usar cualesquiera de ellas debemos aclarar y entender lo mejor posible el problema.

3

Es claro, que P es un punto común a ambas rectas, es decir, $P \in L_1 \cap L_2$ entonces

$$\begin{aligned} P \in L_1 \cap L_2 &\iff P \in L_1 \wedge P \in L_2 \\ &\iff P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge [y = x+1 \wedge y = -x+1] \quad (*) \\ &\iff P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcr} x - y & = & -1 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right| \quad (**) \end{aligned}$$

(1) A partir de $(*)$, Generamos una tabla para buscar coincidencias:

x	$x+1$
1	$1+1=2$
0	$0+1=1$

x	$-x+1$
1	$-1+1=0$
0	$-0+1=1$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es un de los deseados. Esta forma de aproximarse a la solución del problema tiene un inconveniente, ¿ cómo saber si hay más intersecciones ?

(2) A partir de $(**)$, podemos hacer lo siguiente,

$$\left.\begin{array}{lrcr} (1) & x - y & = & -1 \\ (2) & x + y & = & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{(2)+(1)} \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -1 \\ 2x & + & 0y & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -1 \\ x & + & 0 & = & 0 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 0 & - & y & = & -1 \\ x & + & 0 & = & 0 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 0 & + & y & = & 1 \\ x & + & 0 & = & 0 \end{array}\right|$$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es el punto buscado.

(3) A partir de $(**)$, podemos repensar el problema, a la luz de lo que hemos aprendido.

$$\left.\begin{array}{lrcr} (1) & x - y & = & -1 \\ (2) & x + y & = & 1 \end{array}\right| \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

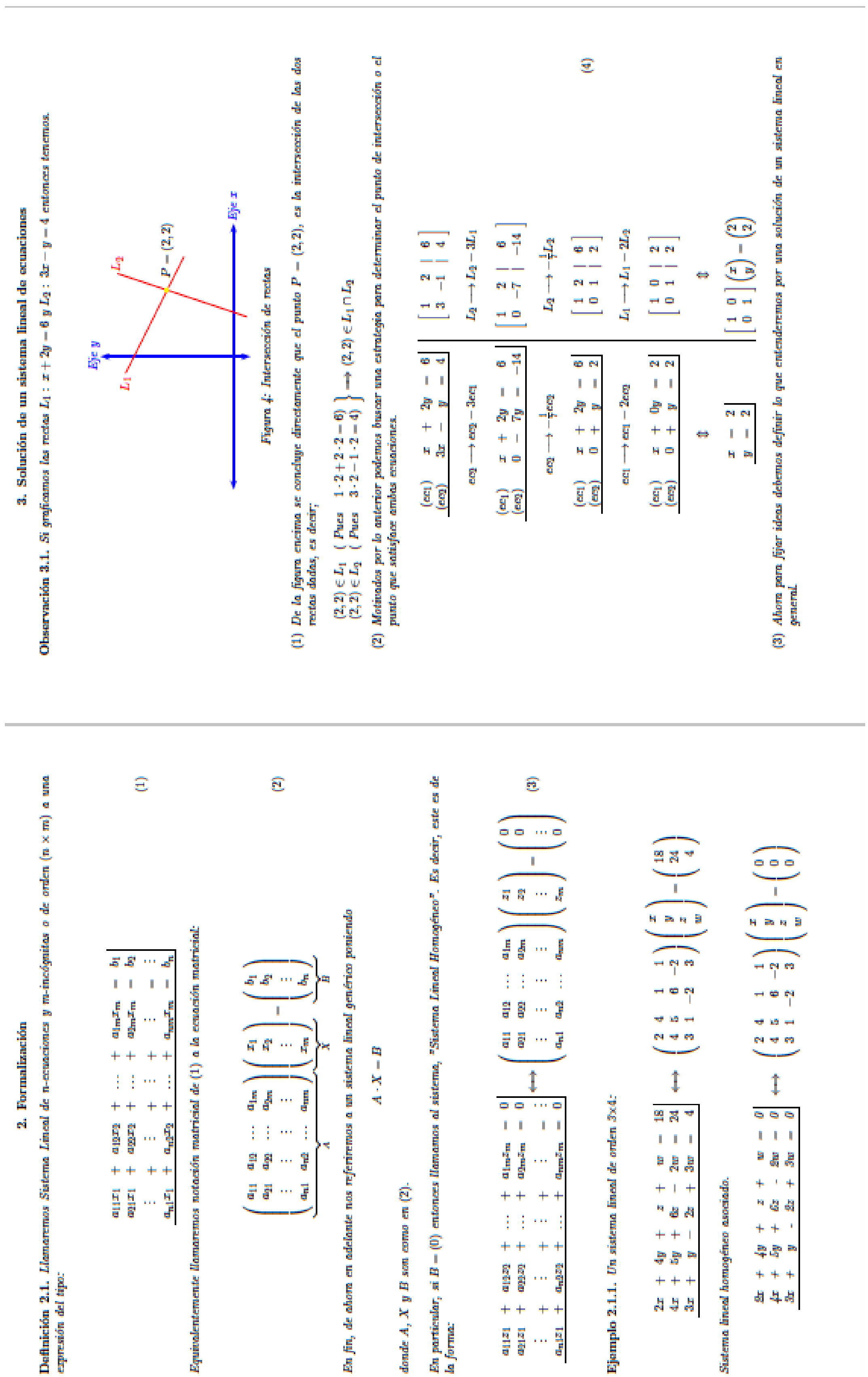
$$(l_2 \rightarrow l_2 - l_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(l_2 \rightarrow \tfrac{1}{2} l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(l_1 \rightarrow l_1 + l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es el punto buscado.

Figura A.13: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de Algebra lineal II R.Santander (2020).



2. Formalización

Definición 2.1. *Llamaremos Sistema Lineal de n-ecuaciones y m-incógnitas o de orden $(n \times m)$ a una expresión del tipo:*

$$\begin{array}{ccccccccc|} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \qquad (1)$$

Equivalentemente llamaremos notación matricial de (1) a la ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \qquad (2)$$

En fin, de ahora en adelante nos referiremos a un sistema lineal genérico poniendo

$$A \cdot X = B$$

donde A, X y B son como en (2).

En particular, si $B = (0)$ entonces llamamos al sistema, "Sistema Lineal Homogéneo". Es decir, este es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc|} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Ejemplo 2.1.1. *Un sistema lineal de orden 3x4:*

$$\begin{array}{ccccccccc|} 2x & + & 4y & + & z & + & w & = & 18 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & - & 2w & = & 24 \\ 3x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 4 \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sistema lineal homogéneo asociado.

$$\begin{array}{ccccccccc|} 2x & + & 4y & + & z & + & w & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & - & 2w & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Solución de un sistema lineal de ecuaciones

Observación 3.1. *Si graficamos las rectas $L_1 : x + 2y = 6$ y $L_2 : 3x - y = 4$ entonces tenemos.*

Figura 4: Intersección de rectas

(1) *De la figura encima se concluye directamente que el punto $P = (2, 2)$, es la intersección de las dos rectas dadas, es decir;*

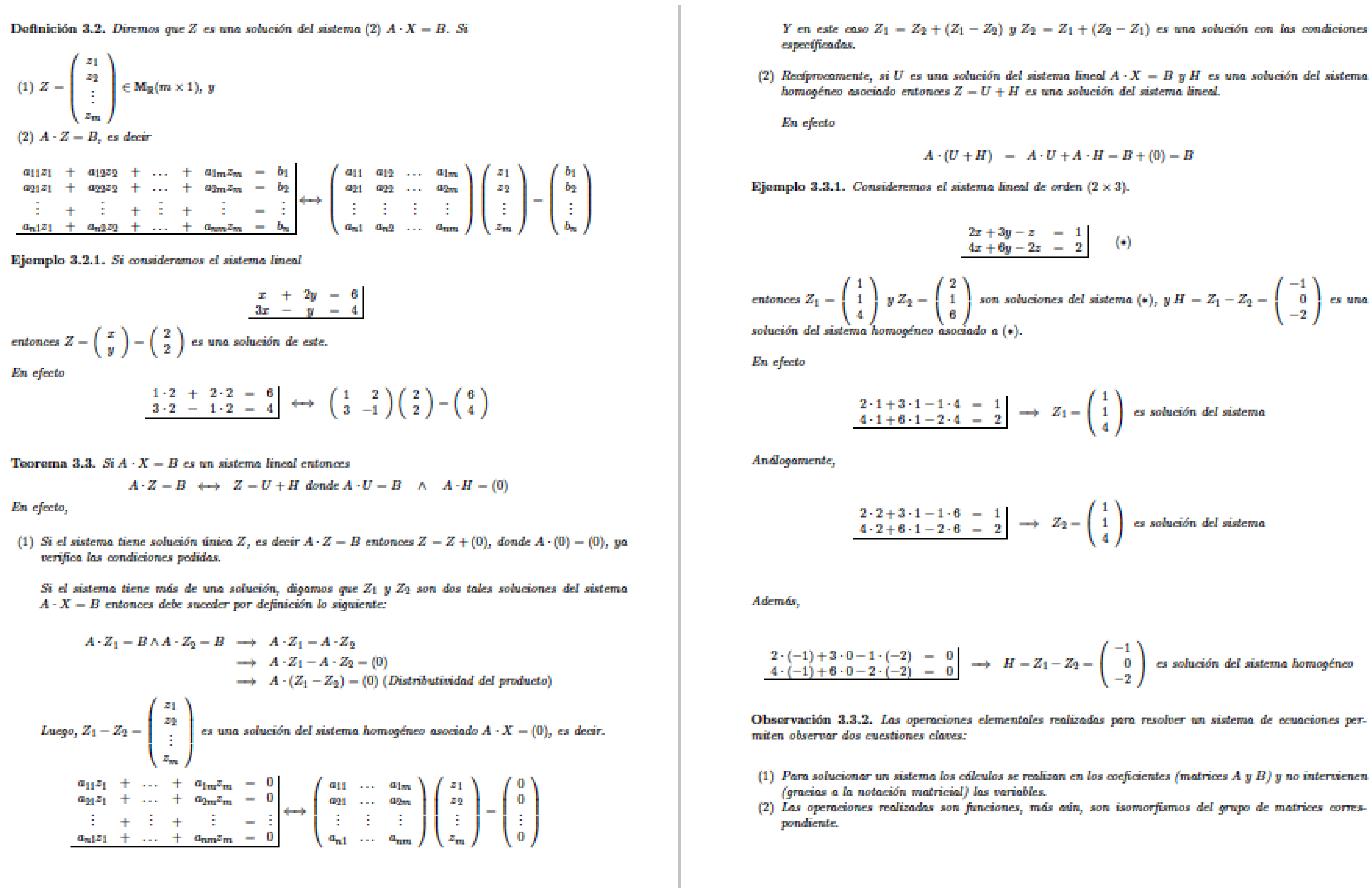
$$\left.\begin{array}{l} (2,2) \in L_1 \quad (\ Pues \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6) \\ (2,2) \in L_2 \quad (\ Pues \quad 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4) \end{array}\right\} \Longrightarrow (2,2) \in L_1 \cap L_2$$

(2) *Motivados por lo anterior podemos buscar una estrategia para determinar el punto de intersección o el punto que satisface ambas ecuaciones.*

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc|} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 3x & - & y & = & 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \\ ec_2 \longrightarrow ec_2 - 3ec_1 & L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ \begin{array}{cccccc|} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & - & 7y & = & -14 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \\ ec_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}ec_2 & L_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}L_2 \\ \begin{array}{cccccc|} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & + & y & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ ec_1 \longrightarrow ec_1 - 2ec_2 & L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\ \begin{array}{cccccc|} (ec_1) & x & + & 0y & = & 2 \\ (ec_2) & 0 & + & y & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \begin{array}{ccc|} x & = & 2 \\ y & = & 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (4)$$

(3) *Ahora para fijar ideas debemos definir lo que entenderemos por una solución de un sistema lineal en general.*

Figura A.14: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de Algebra lineal II R.Santander (2020).



Definición 3.2. *Diremos que Z es una solución del sistema (2) $A \cdot X = B$. Si*

(1) $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$, *y*

(2) $A \cdot Z = B$, *es decir*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & a_{12}z_2 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & b_1 \\ a_{21}z_1 & + & a_{22}z_2 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & a_{n2}z_2 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & b_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.2.1. *Si consideramos el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right|$$

entonces $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *es una solución de este.*

En efecto

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 2 & = & 6 \\ 3 \cdot 2 & - & 1 \cdot 2 & = & 4 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. *Si $A \cdot X = B$ es un sistema lineal entonces*

$$A \cdot Z = B \Longleftrightarrow Z = U + H \text{ donde } A \cdot U = B \quad \wedge \quad A \cdot H = (0)$$

En efecto,

(1) *Si el sistema tiene solución única Z, es decir $A \cdot Z = B$ entonces $Z = Z + (0)$, donde $A \cdot (0) = (0)$, ya verifica las condiciones pedidas.*

Si el sistema tiene más de una solución, digamos que Z_1 y Z_2 son dos tales soluciones del sistema $A \cdot X = B$ entonces debe suceder por definición lo siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot Z_1 = B \wedge A \cdot Z_2 = B &\Longrightarrow A \cdot Z_1 = A \cdot Z_2 \\ &\Longrightarrow A \cdot Z_1 - A \cdot Z_2 = (0) \\ &\Longrightarrow A \cdot (Z_1 - Z_2) = (0) \text{ (Distributividad del producto)} \end{aligned}$$

Luego, $Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ *es una solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = (0)$, es decir.*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}z_1 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & 0 \\ a_{21}z_1 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y en este caso $Z_1 = Z_2 + (Z_1 - Z_2)$ y $Z_2 = Z_1 + (Z_2 - Z_1)$ es una solución con las condiciones especificadas.

(2) *Recíprocamente, si U es una solución del sistema lineal $A \cdot X = B$ y H es una solución del sistema homogéneo asociado entonces $Z = U + H$ es una solución del sistema lineal.*

En efecto

$$A \cdot (U + H) = A \cdot U + A \cdot H = B + (0) = B$$

Ejemplo 3.3.1. *Consideremos el sistema lineal de orden (2×3).*

$$\left.\begin{array}{ccc} 2x + 3y - z & = & 1 \\ 4x + 6y - 2z & = & 2 \end{array}\right| \qquad (*)$$

entonces $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *y* $Z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ *son soluciones del sistema $(*)$, y* $H = Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *es una solución del sistema homogéneo asociado a $(*)$.*

En efecto

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & = & 1 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 & = & 2 \end{array}\right| \Longrightarrow Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema}$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 6 & = & 1 \\ 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 6 & = & 2 \end{array}\right| \Longrightarrow Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema}$$

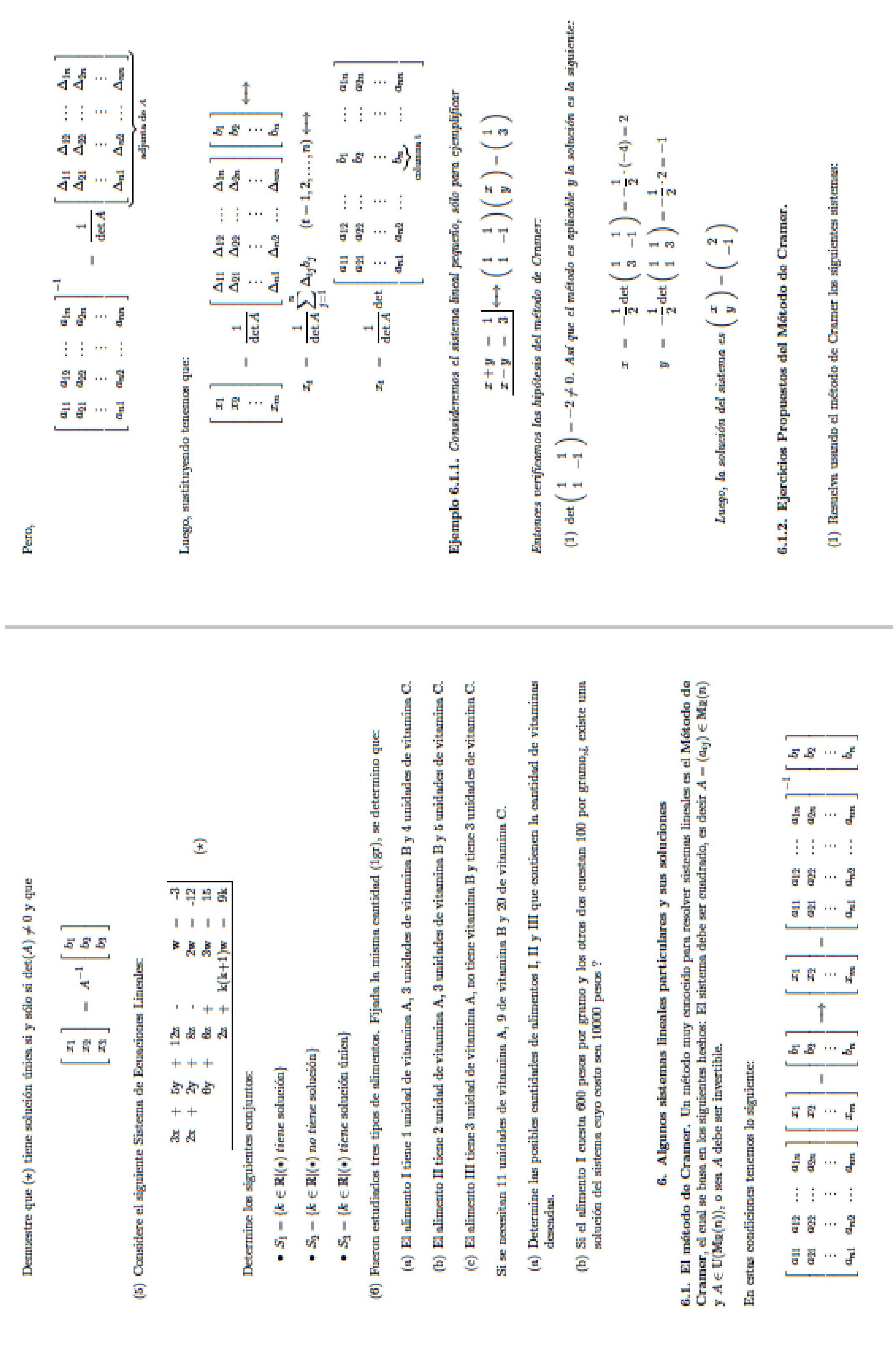
Además,

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) & = & 0 \\ 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow H = Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema homogéneo}$$

Observación 3.3.2. *Las operaciones elementales realizadas para resolver un sistema de ecuaciones permiten observar dos cuestiones claves:*

(1) *Para solucionar un sistema los cálculos se realizan en los coeficientes (matrices A y B) y no intervienen (gracias a la notación matricial) las variables.*
(2) *Las operaciones realizadas son funciones, más aún, son isomorfismos del grupo de matrices correspondiente.*

Figura A.15: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de Algebra lineal II R.Santander (2020).



Demuestre que $(\star)$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(5) Considere el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 5y & + & 12z & - & w & = & -3 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & - & 2w & = & -12 \\ & & 6y & + & 6z & + & 3w & = & 15 \\ & & & & 2z & + & k(k+1)w & = & 9k \end{array} \quad (\star)$$

Determine los siguientes conjuntos:

- $S_1 = \{k \in \mathbb{R} | (\star)$ *tiene* solución$\}$
- $S_2 = \{k \in \mathbb{R} | (\star)$ *no tiene* solución$\}$
- $S_3 = \{k \in \mathbb{R} | (\star)$ *tiene* solución única$\}$

(6) Fueron estudiados tres tipos de alimentos. Fijada la misma cantidad (1gr), se determino que:

(a) El alimento I tiene 1 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.

(b) El alimento II tiene 2 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 5 unidades de vitamina C.

(c) El alimento III tiene 3 unidad de vitamina A, no tiene vitamina B y tiene 3 unidades de vitamina C.

Si se necesitan 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B y 20 de vitamina C.

(a) Determine las posibles cantidades de alimentos I, II y III que contienen la cantidad de vitaminas deseadas.

(b) Si el alimento I cuesta 600 pesos por gramo y los otros dos cuestan 100 por gramo,¿ existe una solución del sistema cuyo costo sea 10000 pesos ?

6. Algunos sistemas lineales particulares y sus soluciones

6.1. El método de Cramer. Un método muy conocido para resolver sistemas lineales es el **Método de Cramer**, el cual se basa en los siguientes hechos: El sistema debe ser cuadrado, es decir $A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{R}}(n)$ y $A \in U(M_{\mathbb{R}}(n))$, o sea A debe ser invertible.

En estas condiciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pero,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{adjunta de } A}$$

Luego, sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \\ x_i &= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} b_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \Longleftrightarrow \\ x_i &= \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underbrace{b_n}_{\text{columna } i} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.1. *Consideremos el sistema lineal pequeño, sólo para ejemplificar*

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 3 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces verificamos las hipótesis del método de Cramer:

(1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. *Así que el método es aplicable y la solución es la siguiente:*

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (-4) = 2 \\ y &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

6.1.2. Ejercicios Propuestos del Método de Cramer.

(1) Resuelva usando el método de Cramer los siguientes sistemas:

Figura A.16: Sistemas de Ecuaciones. Fuente: extraído de Algebra lineal II R.Santander (2020).

Apéndice B: Demostración teorema Perron Frobenius (40)

El texto a continuación presenta una prueba clásica del teorema de Perron-Frobenius. La idea de esta demostración es geométrica y funciona sin problemas independientemente de la dimensión. Sin embargo, por razones pedagógicas, a lo largo de la discusión ilustraremos los argumentos solo en el espacio tridimensional. Esto permite, por una parte alivianar las notaciones y, por otro, visualizar los pasos importantes. Cabe consignar que probar el teorema en el caso tridimensional mediante cálculos directos es extremadamente largo y engorroso; de hecho, no conocemos ninguna referencia de una prueba completa. Sospechamos que probarlo para matrices de orden 4 debe ser imposible (al menos sin asistencia computacional) y que, para matrices de orden grande, debiese ser imposible incluso con la ayuda de un computador...

B.1. Algunas definiciones

Una matriz cuadrada es dicha *positiva* si todas sus entradas son números (reales) positivos. Es dicha *no negativa* si sus entradas no son números negativos (algunas pueden ser iguales a 0).

Una matriz no negativa M es *primitiva* si existe $k \geq 1$ tal que M^k es una matriz positiva, esto es, todas las entradas de M^k son positivas. La matriz M es dicha *irreducible* si para todo par de índices i, j existe k (que puede depender de i, j) tal que $(M^k)_{i,j}$ es un número positivo

La matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es irreducible pero no primitiva, pues para todo $k \geq 1$ se tiene

$$M^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si M es irreducible, entonces para todo ℓ suficientemente grande se tiene que la matriz $(I+M)^\ell$ es primitiva. Esto se deduce de la igualdad (teorema del binomio para matrices que conmutan)

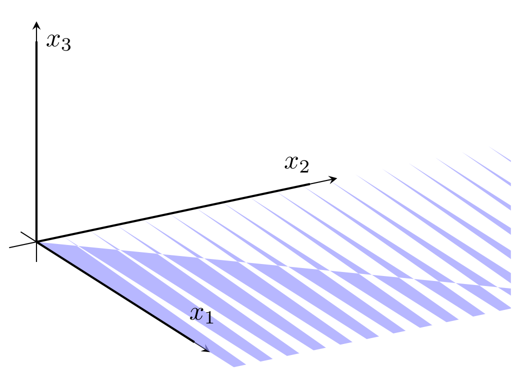
$$(I+M)^\ell = I + \ell \cdot M + \frac{\ell(\ell-1)}{2} \cdot M^2 + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{6} \cdot M^3 + \ldots$$

En efecto, basta tomar ℓ igual al máximo de los enteros k necesarios para que para cada par de índices i, j exista una potencia $k \leq \ell$ tal que la entrada $(M^k)_{i,j}$ sea positiva.

Denotamos $\mathcal{O}$ el *octante no negativo* de $\mathbb{R}^n$. Para el caso tridimensional, esto corresponde a:

$$\mathcal{O} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \, \vec{x} \neq \vec{0}\}.$$

Gráficamente:



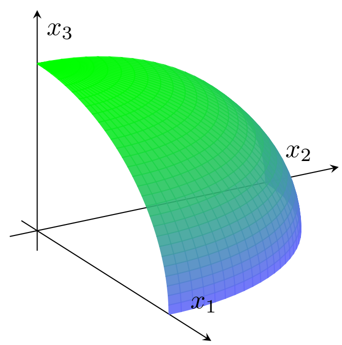
Asimismo, denotamos $\mathcal{O}^+$ el *octante positivo*, esto es,

$$\mathcal{O} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \colon x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

Finalmente, denotamos $\mathcal{C}$ el *casco no negativo* que determina el octante no negativo en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. De manera más precisa,

$$\mathcal{C} = \mathcal{O} \cap \mathbb{S}^2.$$

Gráficamente:



Igualmente, denotamos por $\mathcal{C}^+$ el *casco positivo* $\mathcal{C}^+ = \mathcal{O}^+ \cap \mathbb{S}^2$.
Definimos la relación de orden $\preceq$ en $\mathcal{O}$ (y, en general, en todo el espacio) por

$$(x_1, x_2, x_3) \preceq (y_1, y_2, y_3) \quad \text{si} \quad x_1 \leq y_1,\, x_2 \leq y_2,\, x_3 \leq y_3.$$

Notemos que $\preceq$ es solo una relación de orden parcial. Escribimos

$$\vec{x} \prec \vec{y}$$

si

$$x_1 < y_1,\, x_2 < y_2,\, x_3 < y_3.$$

Como se hace tradicionalmente, denotaremos los vectores en forma de columnas cuando los operamos con matrices. Así, para $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$M(\vec{x}) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3),$$

pues

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{pmatrix}.$$

B.2. Primeros resultados

A continuación presentamos algunas primeras consecuencias de que una matriz M sea irreducible. Estas son más fáciles de obtener para matrices primitivas, pero en la práctica este caso no basta para las aplicaciones. El teorema enunciado a continuación fue obtenido por Perron para matrices primitivas y luego extendido por Frobenius para matrices irreducibles.

Teorema B.2.1. *Si M es una matriz (no negativa e) irreducible, entonces M admite un valor propio real y positivo*

λ_{max} tal que, para todo otro valor propio μ, se tiene $|\mu| \leq \lambda_{max}$. Además, el espacio propio asociado a λ_{max} tiene multiplicidad (tanto geométrica como algebraica) igual a 1. Junto con esto si M es primitiva, entonces todo otro autovalor μ satisface la desigualdad estricta $|\mu| < \Lambda$.

En esta sección trabajaremos con una matriz irreducible M. Para lidiar con este caso, usaremos una matriz auxiliar. De manera concreta, fijamos $\ell \geq 1$ de modo que la matriz P definida por $P = (I+M)^\ell$ tenga todas sus entradas positivas (véase la Observación B.1). Dada la definición, se verifica rápidamente que P conmuta con M, esto es, $MP = PM$.

La idea principal de la prueba consiste en considerar la función $e = e_M$ definida en $\mathcal{O}$ por

$$e(\vec{x}) = \text{máx}\left\{\mu \geq 0 : M(\vec{x}) \succeq \mu\vec{x}\right\}.$$

La función e mide en qué proporción el vector $\vec{x}$ se "expande" en todas las direcciones al aplicarle la matriz M. La estrategia consiste en perseguir un vector propio buscando aquel que se expande más que los otros; más precisamente, será un vector que maximiza la función e.

Cómo maximizar la expansión en el casco positivo. Si se cambia un vector $\vec{x}$ por otro vector $r\vec{x}$ que apunta en el mismo sentido, se obtiene el mismo valor de e. En otras palabras, para todo $\vec{x} \in \mathcal{O}$ y todo $r > 0$ se cumple $e(r\vec{x}) = e(\vec{x})$. Por lo tanto, e puede ser vista como una función definida en el casco no negativo $\mathcal{C}$. Como este casco es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, resulta tentador pensar inmediatamente que e asume un máximo por teoremas estándar de maximización. Sin embargo, surge un pequeño detalle: la función e no es necesariamente continua en $\mathcal{C}$, pues pueden aparecer discontinuidades en el borde (es decir, en puntos donde una de las coordenadas se anula).

Ejemplo B.2.2. Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica rápidamente que

$$M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, M es primitiva (en particular, es irreducible).

Consideremos el punto $\vec{x}_0 = (1,0,0)$. Tenemos $M(\vec{x}_0) = (1,1,0)$, por lo que el conjunto

$$\{\mu \geq 0 : M(\vec{x}_0) \succeq \mu\vec{x}_0\},$$

es decir,

$$\{\mu \geq 0 : (1,1,0) \succeq \mu(1,0,0)\},$$

coincide con el intervalo $[0,1]$. Luego, $e(\vec{x}_0) = 1$.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$ consideremos el punto $\vec{x}_\varepsilon = (\sqrt{1-\varepsilon^2}, 0, \varepsilon)$. Tenemos

$$M(\vec{x}_\varepsilon) = (\varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2}, \sqrt{1-\varepsilon^2}, 0).$$

Por lo tanto, el conjunto

$$\{\mu \geq 0 : M(\vec{x}_\varepsilon) \succeq \mu\vec{x}_\varepsilon\},$$

es decir,

$$\{\mu \geq 0 : (\sqrt{1-\varepsilon^2}, 0, \varepsilon) \succeq \mu(\varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2}, \sqrt{1-\varepsilon)^2}, 0\},$$

se reduce esta vez a $\{0\}$. En consecuencia, $e(\vec{x}_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Sin embargo, como $\vec{x}_\varepsilon$ converge a $\vec{x}_0$, vemos que la función e es discontinua en $\vec{x}_0$.

Una manera razonable de intentar soslayar lo anterior consiste en restringir e al casco positivo $\mathcal{C}^+$, donde el fenómeno de discontinuidad anteriormente descrito desaparece. Sin embargo, surge un nuevo problema: el conjunto $\mathcal{C}^+$ no es compacto (pues no contiene los puntos de su borde), por lo que no podemos asegurar *a priori* que e

asume un máximo allí.

El problema se soslaya utilizando la matriz P gracias a la siguiente observación:

$$\text{para todo } \vec{x} \in \mathcal{C} \text{ se tiene } P(\vec{x}) \in \mathcal{C}^+ \text{ y } e(P(\vec{x})) \geq e(\vec{x}). \tag{B.1}$$

La primera afirmación es consecuencia inmediata de que P tiene todas sus entradas positivas, lo que torna inmediatamente positivas todas las entradas de $\vec{x}$ al operar sobre éste. De hecho, se comprueba rápidamente que el conjunto $P(\mathcal{C})$ es un subconjunto compacto del espacio, por lo que induce (dividiendo cada vector por su norma) un subconjunto compacto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$. Ahora bien, si μ es cualquier real positivo tal que $M(\vec{x}) \geq \mu\vec{x}$ entonces, usando la conmutatividad entre M y P, obtenemos

$$M(P(\vec{x})) = PM(\vec{x}) \geq P(\mu\vec{x}) = \mu P(\vec{x}).$$

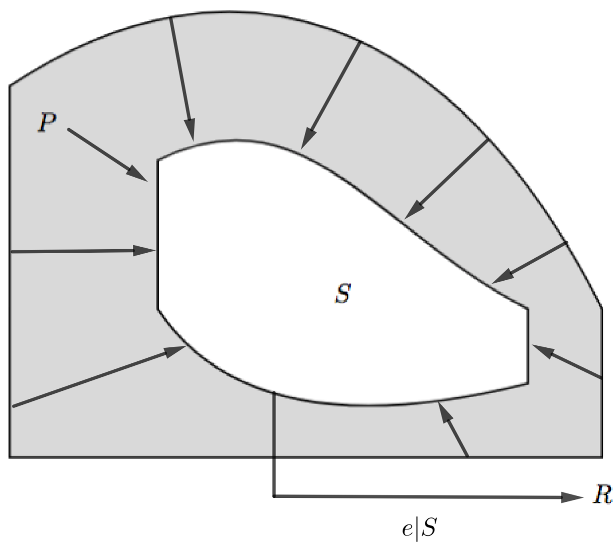


Figura B.1: Entradas positivas de P en un subconjunto compacto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$

Por definición, lo anterior implica obviamente que $e(P(\vec{x})) \geq e(\vec{x})$, tal como fue anunciado.

Podemos entonces concluir lo siguiente.

Lema B.2.3. *La función e asume un máximo positivo en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Siendo $\mathcal{S}$ compacto, la función e asume un máximo allí. Además, para cada $\vec{x} \in \mathcal{C}$ existe $\vec{y} \in \mathcal{S}$ tal que $e(\vec{y}) \geq e(\vec{x})$. En efecto, dado (B.1), basta tomar

$$\vec{y} = \frac{P(\vec{x})}{\|P(\vec{x})\|}.$$

Puesto que $\mathcal{S}$ está contenido en $\mathcal{C}$, lo anterior implica obviamente que

$$\sup_{\vec{x} \in \mathcal{C}} e(\vec{x}) = \sup_{\vec{y} \in \mathcal{S}} e(\vec{y}) = \max_{\vec{y} \in \mathcal{S}} e(\vec{y}).$$

Por otra parte, si $x \in \mathcal{S}$, entonces todas sus entradas son positivas, por lo que $e(\vec{x}) > 0$. En particular, el máximo de e debe ser positivo. $\square$

Lema B.2.4. *Si e se maximiza en $\vec{z} \in \mathcal{C}$, entonces $\vec{z}$ es un vector propio de M y tiene todas sus entradas positivas.*

Demostración. Como P tiene todas sus entradas positivas, si $\vec{x} \succeq \vec{y}$ son vectores distintos cualesquiera de $\mathcal{C}$, entonces $P(\vec{x}) \succ P(\vec{y})$. Afirmamos que esto implica que, si $\vec{z}$ maximiza e, entonces $\vec{z}$ es vector propio de M con valor propio $e(\vec{z})$. En efecto, por definición tenemos $M(\vec{z}) \succeq e(\vec{z})\,\vec{z}$, y la afirmación precedente indica que si $M(\vec{z}) \neq e(\vec{z})\,\vec{z}$ entonces

$$M(P(\vec{z})) = P(M(\vec{z})) \succ P(e(\vec{z})\,\vec{z}) = e(\vec{z})P(\vec{z}).$$

Sin embargo, esto implica rápidamente que $e(P(\vec{z})) > e(\vec{z})$, lo cual contradice el hecho que $\vec{z}$ maximiza e.

Finalmente, la igualdad $M(\vec{z}) = \lambda\vec{z}$ para algún $\lambda > 0$ nos da, gracias a la positividad de todas las entradas de P,

$$(0,0,0) \prec P(\vec{z}) = (I+M)^{\ell}(\vec{z}) = (1+\lambda)^{\ell}\,\vec{z}.$$

Claramente, esto implica que cada entrada de $\vec{z}$ debe ser positiva. $\square$

El paso siguiente consiste en establecer que cualquier otro autovalor de M está mayorado en valor absoluto por el número $e(\vec{z})$ de la prueba precedente.

Lema B.2.5. *Si $\vec{z} \in \mathcal{C}$ maximiza e, entonces para todo otro valor propio μ de M (real o complejo) se cumple $|\mu| \leq e(z)$.*

Demostración. Sea μ un autovalor de M y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un autovector asociado. Consideremos el vector $\vec{y} = (|x_1|, |x_2|, |x_3|)$. La igualdad $M(\vec{x}) = \mu\vec{x}$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\, x_1 \\ \mu\, x_2 \\ \mu\, x_3 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$|\mu||x_1| = |a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3| \leq a_1|x_1| + a_2|x_2| + a_3|x_3|$$

y, análogamente,

$$|\mu||x_2| \leq b_1|x_1| + b_2|x_2| + b_3|x_3|,$$
$$|\mu||x_3| \leq c_1|x_1| + c_2|x_2| + c_3|x_3|.$$

Estas desigualdades se traducen en $M(\vec{y}) \succeq |\mu|\,\vec{y}$. En particular, $e(\vec{y}) \geq |\mu|$. Ahora bien, como $e(\vec{y}) \leq \max e_{x\in\mathcal{C}}(\vec{x}) = e(\vec{z})$, concluimos que $|\mu| \leq e(\vec{z})$, como anunciamos. $\square$

B.3. La multiplicidad del valor propio maximal

Esta sección es un poco más delicada. Probaremos en particular que si M es irreducible y λ_{max} es su autovalor positivo maximal, entonces este está asociado a un único autovector. Para esto será fundamental considerar la matriz traspuesta M^T de M. Recuerde que esta es definida por $(M^T)_{i,j} = M_{j,i}$ y satisface la igualdad fundamental

$$M^T(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot M(\vec{y}) \quad \text{para todo par de vectores } \vec{x}, \vec{y},$$

donde $\cdot$ denota el producto punto.

Lema B.3.1. *Si M es irreducible y λ_{max} denota su autovalor positivo maximal, entonces M^T también es irreducible, y su autovalor positivo maximal coincide con λ_{max}.*

Demostración. Se verifica rápidamente que $(M^T)^k = (M^k)^T$ para todo $k \geq 1$, lo cual implica inmediatamente que M^T es irreducible si M lo es. Por lo probado en la sección anterior, la función de expansión $e = e_{M^T}$ asociada

a M^T se maximiza en un vector $\vec{x}$ que pertenece al casco positivo. Además, dicho máximo λ es un autovalor de M^T con autovector $\vec{x}$, y domina en valor absoluto a todo otro autovalor de M^T.
Si consideramos ahora un autovector $\vec{z}$ de M con autovalor λ_{max}, entonces la igualdad fundamental nos da

$$\lambda\, \vec{x} \cdot \vec{z} = (M^T(\vec{x})) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (M(\vec{z})) = \vec{x} \cdot \lambda_{max}\vec{z}.$$

Tanto $\vec{x}$ como $\vec{z}$ tienen todas sus entradas positivas, por lo que $\vec{x} \cdot \vec{z} > 0$. La igualdad anterior $\lambda\, \vec{x} \cdot \vec{z} = \lambda\, \vec{x} \cdot \vec{z}$ implica entonces que $\lambda = \lambda_{max}$, como fue anunciado. □

Dadas dos matrices no negativas N_1 y N_2, escribiremos $N_1 \succeq M_2$ si cada entrada de N_1 es mayor o igual que la entrada correspondiente de N_2. De manera más precisa, $(N_1)_{i,j} \geq (N_2)_{i,j}$ para todo par de índices i, j.

Lema B.3.2. *Si se tiene $M \succeq N$ para una matriz no negativa N distinta de M, entonces todo autovalor σ de N satisface $|\sigma| < \lambda_{max}$.*

Demostración. Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un autovector (no nulo) de N asociado al autovalor σ. Al igual que en la prueba del Lemma B.2.5, para $\vec{y} = (|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ tenemos $N(\vec{y}) \succeq |\sigma|\vec{y}$. Como $M \succeq N$, esto implica que $M(\vec{y}) \succeq |\sigma|\, \vec{y}$. Sea $\vec{z} \in \mathcal{C}^+$ un vector propio de M^T asociado al autovalor maximal λ_{max}. Tenemos

$$\lambda_{max}\, \vec{z} \cdot \vec{y} = (M^T(\vec{z})) \cdot \vec{y} = \vec{z} \cdot (M(\vec{y})) \geq |\sigma|\, \vec{z} \cdot \vec{y}.$$

Como $\vec{y}$ tiene coordenadas no negativas y las de $\vec{z}$ son positivas, el producto $\vec{z} \cdot \vec{y}$ es positivo, por lo que la igualdad anterior permite concluir que $\lambda_{max} \geq |\sigma|$.
Para completar la prueba, supongamos que $|\sigma| = \lambda_{max}$, y busquemos una contradicción. En tal caso, la desigualdad $M(\vec{y}) \succeq |\sigma|\, \vec{y}$ se transforma en $M(\vec{y}) \succeq \lambda_{max}\, \vec{y}$. Ahora bien, como λ_{max} corresponde al máximo valor de la expansión $e = e_M$, concluimos que $e(\vec{y}) = \lambda_{max}\, \vec{y}$. Por el Lemma B.2.4, el vector $\vec{y}$ tiene todas sus entradas positivas y satisface $M(\vec{y}) = \lambda_{\text{máx}}\, \vec{y}$. Como N es distinta a M, esto implica que $(M - N)(\vec{y})$ tiene todas sus entradas positivas, y además cumple

$$(M - N)(\vec{y}) = \lambda_{\text{máx}}\, \vec{y} - N(\vec{y}) \preceq \lambda_{\text{máx}}\, \vec{y} - |\sigma|\, \vec{y} = (0, 0, 0),$$

lo cual es absurdo. □

Corolario B.3.3. Si denotamos $M_{(i)}$ la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir las i-ésimas fila y columna de M, entonces todo valor propio σ de M_i satisface la desigualdad estricta $|\sigma| < \lambda_{max}$. En particular, $\det(\lambda_{\text{máx}}\, I - M_{(i)}) > 0$.

Demostración. Consideremos la matriz N de orden n obtenida al cambiar las entradas de las i-ésimas fila y columna de M por ceros. Claramente, N es distinta a M (en caso contrario, M no sería irreducible, pues las entradas de las i-ésimas fila y columna de M^k serían nulas para todo $k \geq 1$). Además, $M \succeq N$. Por el lema anterior, todo autovalor σ de N satisface $|\sigma| < \lambda_{max}$. Como todo autovalor de $M_{(i)}$ es obviamente un autovalor de N, esto prueba lo anunciado. □

Finalmente, podemos probar que la multiplicidad algebraica asociada al valor propio λ_{max} es igual a 1 (lo cual implica que la multiplicidad geométrica también es 1). Para esto, debemos probar que λ_{max} es una raíz simple del polinomio

$$q(\lambda) = \det(\lambda\, I - M),$$

lo cual es equivalente a verificar que la derivada de q no se anula en λ_{max}. Para esto utilizamos la fórmula[1]

$$\frac{dq}{d\lambda}(\lambda) = \sum_i \det(\lambda\, I - M_{(i)}).$$

En efecto, basta observar que, por el lema precedente, esta expresión es positiva para $\lambda = \lambda_{max}$.

[1]Esta se prueba mediante una aplicación directa de la regla de la cadena multidimensional. Véase *The Perron-Frobenius theorem* de D. Armstrong, disponible en https://www.math.miami.edu/ armstrong/685fa12/sternberg_perron_frobenius.pdf.

B.4. El caso de una matriz primitiva

Para matrices irreducibles, puede haber varios valores propios de norma λ_{max}. Por ejemplo, este es el caso de la matriz M del **Ejemplo B.1**:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

en efecto, para esta, el valor propio positivo maximal es igual a 1, pero el otro valor propio es igual a -1, que tiene la misma norma.

A continuación veremos que el fenómeno previamente ejemplificado no puede ocurrir para matrices primitivas.

Lema B.4.1. *Si M es primitiva, entonces para todo valor propio real μ de M distinto de λ_{max} se cumple la desigualdad estricta $|\mu| < \lambda_{max}$.*

Demostración. Primeramente, afirmamos que podemos suponer que M tiene todas sus entradas positivas y que su valor propio positivo maximal es 1. En efecto, para la primera propiedad, basta reemplazar M por una potencia M^ℓ con todas sus entradas positivas, pues si esta última satisface la propiedad enunciada entonces también será el caso para M (recuerde que los valores propios de M^ℓ son números de la forma μ^ℓ, donde μ es valor propio de M). Para la segunda propiedad, basta dividir las entradas de M por un factor positivo apropiado de modo de transformar su valor propio positivo maximal en 1.

Consideremos entonces una matriz M de entradas positivas cuyo valor propio positivo maximal sea 1. Sea $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ un vector propio unitario asociado a un valor propio μ de norma 1. Denotemos $\vec{y} = (|z_1|, |z_2|.|z_3|)$. Afirmamos que $M(\vec{y}) = \vec{y}$. En efecto, como en la prueba del **Lemma B.2.5**, de la igualdad $M(\vec{z}) = \vec{z}$ obtenemos que $M(\vec{y}) \succeq |\mu|\, \vec{y} = \vec{y}$. Ahora bien, si $M(\vec{y}) \neq \vec{y}$ entonces, denotando $\vec{x} = M(\vec{y}) - \vec{y}$, obtenemos que el vector $M(\vec{x})$ tiene todas sus entradas positivas (pues tal es el caso de M). Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $M(\vec{x}) \succeq \varepsilon\, M(\vec{y})$, es decir, $M(M(\vec{y}) - \vec{y}) \succeq \varepsilon\, M(\vec{y})$. Por lo tanto, $M(M(\vec{y})) \succeq (1+\varepsilon)\, M(\vec{y})$, lo cual equivale a $NM(\vec{y}) \succeq M(\vec{y})$ para $N = M/(1+\varepsilon)$. Aplicando N repetidamente obtenemos, para todo $k \geq 1$,

$$N^k M(\vec{y}) \succeq N^{k-1} M(\vec{y}) \succeq \ldots NM(\vec{y}) \succeq M(\vec{y}). \tag{B.2}$$

Sin embargo, los autovalores de N son todos estrictamente menores que 1, por lo que la matriz N^k converge a la matriz nula, lo que hace imposible que (B.2) se satisfaga para k suficientemente grande. Concluimos entonces que $M(\vec{y}) = \vec{y}$.

Notemos ahora que de las igualdades $\|M(\vec{z})\| = |\mu|\, \|\vec{z}\| = \|\vec{z}\|$ y $\|M(\vec{y})\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\|$ se concluye que $\|M(\vec{z})\| = \|M(\vec{y})\|$. No es difícil argumentar que esto implica que las entradas de $\vec{z}$ deben ser todas reales y del mismo signo. Así, $\vec{z}$ es un vector de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $e(\vec{z}) \leq \lambda_{max} = 1$, con la igualdad si y solo si $\vec{z}$ es el único vector de $\mathcal{C}$ que maximiza e. $\square$

Cabe consignar que lo anterior es válido también para valores propios complejos si la matriz tiene todas sus entradas positivas, pero puede dejar de serlo si es solo primitiva. Sin embargo, tratar el caso primitivo es bastante engorroso, por lo que cerraremos la discusión acá. Por lo demás, en la práctica basta considerar el caso el matrices de entradas positivas, pues se suele reemplazar la matriz de inicio por una en que se agrega un pequeño parámetro positivo a cada entrada.

Apéndice C: Clase 1

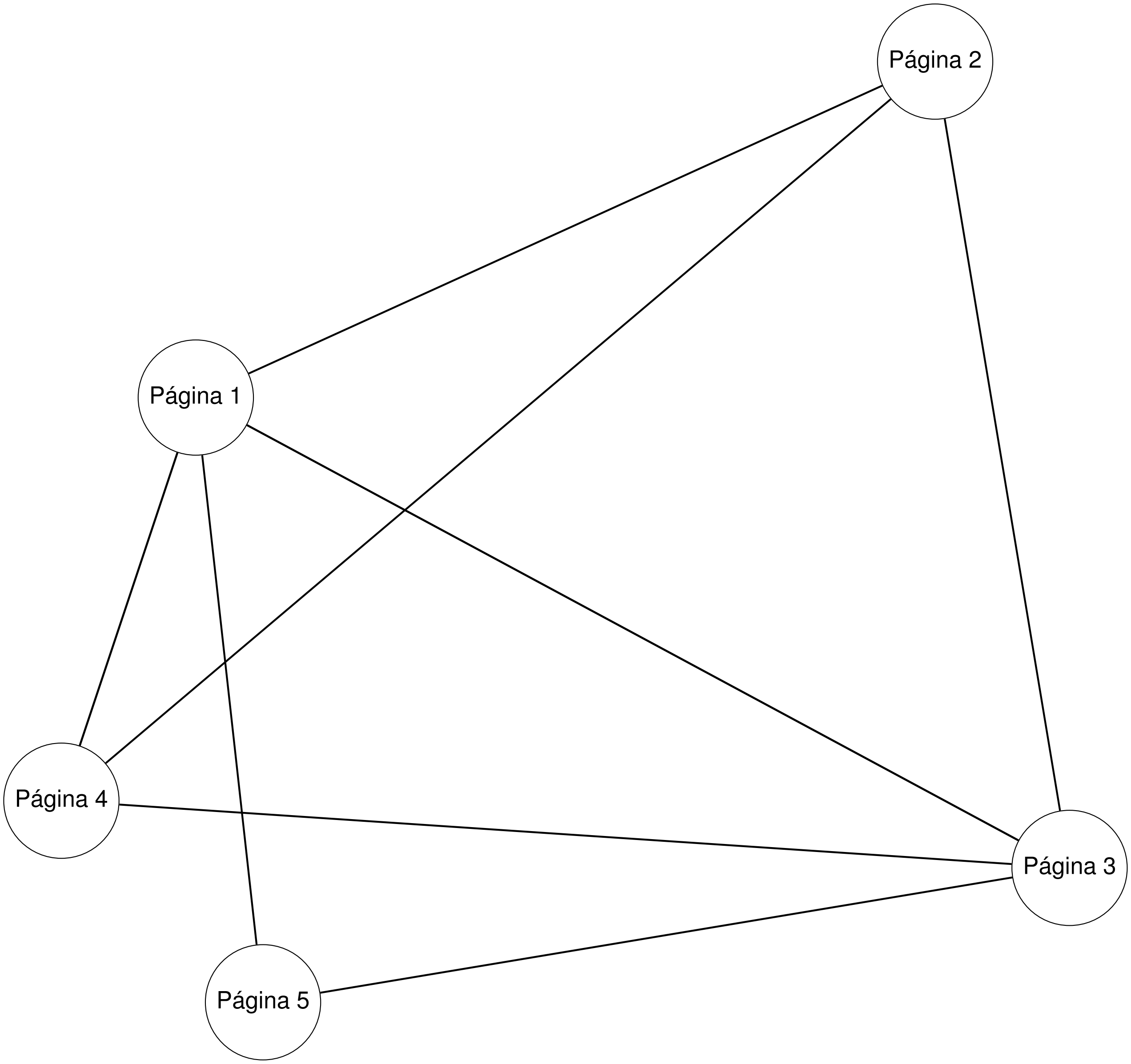
Universidad de Santiago de Chile

Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

¿Qué página WEB es más relevante? Parte I

Autor: Néstor F. Gajardo Guevara
Nombre estudiante:
Grupo:
Fecha: 2025

¿Qué página web es más relevante?



Vivimos en un mundo donde las conexiones y las redes están presentes en todos los aspectos de nuestra vida diaria. Desde cómo interactuamos con otras personas, hasta cómo accedemos a información en internet, las relaciones entre distintos elementos juegan un papel fundamental. En particular, la web es un ejemplo fascinante de una red en constante interacción, donde las páginas están conectadas entre sí a través de enlaces.

Hoy exploraremos cómo estas conexiones influyen en aspectos como la organización de la información y cómo podemos representar estas relaciones de manera que nos ayuden a comprender mejor su funcionamiento. Para comenzar, veremos un video que presenta las interacciones entre páginas web, con un enfoque en los enlaces que las conectan y cómo estas conexiones pueden influir en su importancia dentro de la red.

Preguntas de reflexión

1) ¿Qué entiendes por un modelo matemático?

2) ¿Qué es lo que llamó más tu atención en el video introductorio?

Relevancia de una Página Web

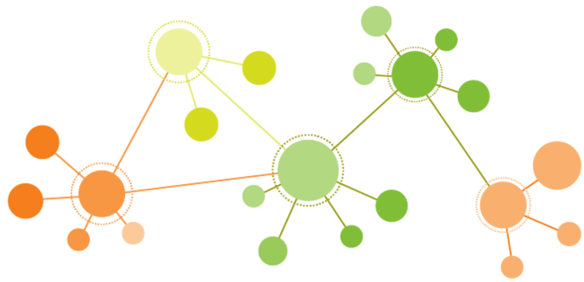


Figura C.1: Conexiones páginas web

En la actualidad, internet se ha convertido en una herramienta esencial para la vida diaria. Millones de personas recurren a la web para buscar información, resolver dudas, aprender sobre nuevos temas o simplemente entretenerse. Sin embargo, la vasta cantidad de contenido disponible puede ser abrumadora si no se cuenta con sistemas eficientes que ayuden a filtrar y priorizar la información más relevante. Aquí es donde los motores de búsqueda juegan un papel crucial.

Los motores de búsqueda han revolucionado la manera en que accedemos a la información. Al introducir una consulta, estos sistemas se encargan de analizar millones de páginas web en fracciones de segundo para ofrecer un conjunto de resultados ordenados según su pertinencia. Este orden no es aleatorio; se basa en complejos criterios diseñados para garantizar que las páginas más relevantes, confiables y útiles aparezcan primero en la lista de resultados.

La relevancia de este proceso radica en su impacto en nuestra vida diaria. Un motor de búsqueda eficiente no solo nos ahorra tiempo al evitar que revisemos información irrelevante, sino que también mejora la calidad de nuestras decisiones. Por ejemplo, cuando un estudiante busca recursos académicos, un profesional explora estrategias para un proyecto o una persona busca recomendaciones para un restaurante, los resultados que aparecen en los primeros lugares suelen ser los más valiosos y pertinentes.

La capacidad de los motores de búsqueda para priorizar páginas web relevantes ha simplificado enormemente la búsqueda de información, convirtiendo lo que podría ser una tarea ardua en una experiencia rápida y eficiente. Esto no solo beneficia a los usuarios, sino también a los creadores de contenido, quienes deben asegurarse de que sus páginas sean informativas y estén bien estructuradas para alcanzar una mayor visibilidad.

La forma en que se seleccionan y ordenan estas páginas está relacionada con la red de enlaces entre ellas. Las conexiones entre páginas web actúan como una especie de "votación"que determina su importancia relativa. De este modo, entender cómo se distribuyen estas interacciones puede ser clave para analizar cómo los motores de búsqueda organizan la información.

Durante los últimos diez años, Google ha liderado el mercado de los motores de búsqueda en Internet, destacándose por su capacidad para organizar de manera inteligente los resultados según su relevancia. Siguiendo esta idea, una empresa de marketing digital desea priorizar un conjunto de páginas web para ubicar anuncios publicitarios.

Dentro de una campaña publicitaria, dirigida hacia redes sociales, la empresa de marketing digital tiene los siguientes enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

Pregunta

3) De acuerdo a la tabla, ¿qué página sería la más relevante para tí?

Escribe dos ideas

Indicación

Representar, a través de un gráfo, lás páginas web y sus conexiones

Pregunta

4) ¿Cuántos caminos o enlaces llegan a la página 1?

5) ¿A la página 2?

6) ¿A la página 3?

7) ¿A la página 4?

8) ¿Qué procedimiento utilizaste para determinar los valores?.Explique

Pregunta

9) Si la valoración o relevancia inicial de cada página es 1 y se distribuye proporcionalmente entre las páginas enlazadas, ¿cómo puedes expresar la valoración final de cada página como una suma de las contribuciones que recibe de las páginas que la enlazan.

Representar, a través de un gráfo, lás páginas web y sus contribuciones que reciben de las páginas web que enlazan

Escribe una ecuación que modele, para cada página, las relaciones descritas

Pregunta

10) De acuerdo a lo anterior, ¿a través de qué procedimiento podrías obtener orden y relevancia final de cada página web?.

Resolver y determinar el orden de relevancia de cada página web de acuerdo al método escogido

Pregunta

Pregunta

Pregunta

Escribe el orden de relevancia, acorde a los valores obtenidos, de cada página web

11) ¿Cómo podrías comprobar tu respuesta?. Valida tu resultado utilizando el método que estimes conveniente.

Preguntas de reflexión

12) ¿Una página podría citarse o referirse a sí misma?. Si la respuesta es Sí. ¿Qué implicaciones tendría en el modelo estudiado

Preguntas de reflexión

13) Si la relevancia de cada página web fuese un número racional positivo. ¿Podría determinarse la relevancia de una página web bajo las mismas condiones?. Argumenta tu respuesta

Preguntas de reflexión

14) Si fuese un número negativo. ¿Podría determinarse la relevancia de una página web bajo las mismas condiciones?. Argumenta tu respuesta

Apéndice D: Clase 2

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

¿Qué página WEB es más relevante? Parte II

Autor: NÉSTOR F. GAJARDO GUEVARA
Fecha: Diciembre, 2024

Relevancia de una Página Web

Figura D.1: Conexión a internet

En el mundo digital, las conexiones entre páginas web forman redes complejas que nos permiten acceder a la información de manera eficiente. Cada vez que navegamos por internet, interactuamos con una vasta red de páginas interconectadas a través de enlaces. Estos enlaces son como "puentes"que establecen relaciones directas entre las páginas. Para analizar estas conexiones de manera estructurada, podemos representarlas como un sistema de ceros y unos, que nos ayuda a visualizar y comprender cómo se organizan estas redes.

En este sistema:

a) Un 1 indica que existe una conexión o enlace entre dos páginas.

b) Un 0 indica que no hay conexión directa entre ellas.

En nuestra primera clase, exploramos cómo las conexiones entre páginas web pueden representarse matemáticamente para analizar su relevancia dentro de una red. A través de un sistema de ecuaciones, modelamos las relaciones entre las páginas, considerando cómo estas distribuyen su ïmportancia"mediante los enlaces que las conectan. Este enfoque nos permitió interpretar y resolver el problema inicial: ¿Qué página web es más relevante?.

Ahora, en esta segunda experiencia, ampliaremos nuestro análisis utilizando herramientas más estructuradas. En particular, siguiendo los enlaces:

Rutas de Conexión
La página 1 tiene enlaces a las páginas 2, 3 y 4
La página 2 tiene enlaces hacia las páginas 3 y 4
La página 3 tiene solo un enlace hacia la página 1
La página 4 tiene enlaces hacia las páginas 1 y 3

Pregunta

1) De acuerdo a la tabla, ¿Cuál es la matríz asociada, tomando encuenta los puntos a) y b)?

Explique el por qué su decisión de estructurar la información de esa manera

Pregunta

2) ¿Cuál es su matriz traspuesta?

3) Una matriz normalizada es aquella donde la suma total de cada uno de los elementos de la columna da como resultado 1. De acuerdo a lo anterior, ¿Cómo podrías normalizar la matriz traspuesta.Encuentre la matriz normalizada y escríbela con un nombre

Pregunta

4) ¿Cuáles son los valores propios de la matriz normalizada?, ¿Cómo se determinan?

Pregunta

5) Si evaluamos el mayor de los valores propios obtenidos en la matríz $M^N - \lambda \cdot I$. Calcular el vector propio $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ asociado. ¿Qué significado tiene en la situación?.

Pregunta

6) De acuerdo a lo anterior, ¿Observas alguna similitud y/o diferencia en los resultados obtnidos comparados con la primera clase para obtener el orden y relevancia final de cada página web?.

7) Determinar el orden de relevancia de cada página web

Pregunta

Pregunta

Pregunta

Escribe el orden de relevancia, acorde a los valores obtenidos, de cada página web

8) ¿Cómo podrías comprobar tu respuesta?. Valida tu resultado utilizando el método que estimes conveniente.

Apéndice E: Clase 3

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

¿Quién es el culpable?

Autor: NÉSTOR F. GAJARDO GUEVARA
Grupo:

Fecha: 2025

Los más buscados

Cinco amigos (Alicia, Bruno, Carla, Diego y Elena) se ven envueltos en un misterioso caso relacionado con la desaparición de un objeto de gran valor. Aunque no hay evidencia clara que determine la culpabilidad, durante el juicio cada uno de ellos señala a otros como responsables, generando una compleja red de acusaciones cruzadas. Ante la falta de pruebas contundentes, la policía ha decidido emplear un método innovador basado en el análisis de la relevancia dentro de esta red de acusaciones. Según este enfoque, el culpable será aquel que resulte señalado con mayor frecuencia por los demás.

Las declaraciones (acusaciones) se organizan como sigue:

Informe Policial
Alicia: Bruno es culpable y Carla también lo es.
Bruno: Diego y Alicia son culpables.
Carla: Solo Alicia y yo somos inocentes
Diego: Alicia cometió el delito
Helena: Bruno, Diego y Carla son culpables.

Preguntas de reflexión

1) De acuerdo a lo estudiado en las sesiones I y II, ¿Qué modelo de representación elijes para resolver el caso (grafo o matrices)?. Argumente su respuesta

Representar la información de la tabla a través de un grafo o matríz

Instrucción

Según el modelo elegido, resolver el caso indicando todos los pasos en orden y argumentando sus decisiones de forma matemática.

Solución:

Solución

.

Pregunta

3) De acuerdo a su orden de relevancia, ¿Quién es el culpable del delito?

Preguntas de reflexión

4) ¿De qué manera el uso de grafos o matrices como herramientas matemáticas te permitió abordar la situación planteada de una forma diferente a otros métodos que habías utilizado anteriormente?

Preguntas de reflexión

5) ¿Crees que podrías aplicar los métodos estudiados, como grafos o matrices, para modelar y resolver problemas en otros contextos o situaciones reales? Explica por qué.