UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemática de Educación Media en la Enseñanza de los Números Irracionales

Miguel José Niño Ríos

Profesor Guía:
Carlos Vanegas Ortega

Tesis para optar al título grado de
Magíster en Educación Matemática

Santiago - Chile
2024

Resumen

El estudio se enfoca en la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de números irracionales en la educación media, empleando como marco teórico el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). El MTSK es una recurso teórico y analítico, que permite la identificación y comprensión del conocimiento del profesor. Fundamentado en su estructura, se diseñan el instrumento de recolección de datos, el cual se aplica a tres profesores de matemática que trabajan en instituciones de educación media, facilitando la caracterización de su conocimiento especializado en la enseñanza de los números irracionales. Esta caracterización brinda una perspectiva de los conocimientos que posee el profesorado, que lo hacen experto en la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales. Los resultados muestran que el profesorado posee un conocimiento matemático de los números irracionales que no son profundo o amplio, pero están alineados con la matemática escolar, además, no hacen referencia a teorías formales de la educación matemática para la enseñanza de los irracionales; sin embargo expresan estrategias generales que configuran como teorías personales desde la experiencia y los conocimientos pedagógicos. El estudio deja en evidencia que el MTSK del profesorado sobre números irracionales requiere más elementos en cuanto a su génesis, epistemología, sus características y fundamentos, así como el reconocimiento de los estudios y las teorías propias de la educación matemática.

Palabras claves: MTSK, profesorado de matemática, números irracionales.

Dedicatoria

Dedicada a mi hijo Franco y mi amada esposa Elizabeth

los cuales son mi ancla y apoyo

en el viaje de mi vida

Agradecimiento

A mi esposa por su apoyo incondicional en mis proyectos. Por ser un haz de luz en mi camino al logro. Por su motivación día a día, por su fortaleza en las dificultades, por su valor que me anima a seguir intentándolo en los momentos de desánimos y desaciertos.

A mi profesor guía Dr. Carlos Vanegas Ortega por sus luces y consejos que me han guiado en este proyecto desafiante. Gracias por su escucha cálida y paciente en los momentos críticos, por estar ahí y compartir un momento de sosiego con el aroma de un café.

A mis profesores del programa del Magíster por compartir sus conocimientos y experiencias de vida, que hacen reflexionar es esta labor tan humana y a la vez convulsionada del ser profesor.

Gracias a todas las personas del Magister, que día a día ponen su esfuerzo para que se cumpla la meta. Gracias por su grato saludo y su apoyo excepcional.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

Introducción

En la investigación en educación matemática el papel del profesor como sujeto de observación y exploración ha ido tomando fuerza en las últimas décadas, tanto de su praxis como de sus conocimientos, los cuales se ponen en juego al momento de enseñar un objeto matemático particular, como los números irracionales. Conocimientos que se pueden profundizar, caracterizándolos a través de modelos teóricos como el del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (en adelante, MTSK por sus siglas en inglés).

En este estudio se expone el origen y evolución de los números irracionales, así como las dificultades de su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, se presenta la comprensión de los profesores de matemáticas acerca de los números irracionales, lo cual posibilita la identificación del problema de investigación.

Seguidamente, se profundiza en la formalización de los irracionales como números, y como parte central se describe de forma detallada los componentes del modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática* (MTSK).

En cuanto al marco metodológico, se presentan las consideraciones de método, técnicas y muestreo para el desarrollo del estudio, junto con el proceso de elaboración, validación y aplicación de los instrumentos de recolección de datos.

Posteriormente se exponen los resultados y análisis de los datos, permitiendo la caracterización del conocimiento especializado de cada uno/a de los/as profesores/as participantes de la investigación.

Finalizando, se dan conclusiones del estudio referentes a los conocimientos especializados de los sujetos participantes del estudio, que derivan en una serie de orientaciones basadas en los resultados del MTSK para la actualización y especialización del profesorado de educación media.

1. Planteamiento del Problema

A continuación, se presenta un acercamiento a los números irracionales a través de su origen, evolución y formalización como números. Así mismo, se establece una relación entre los irracionales y los estudiantes, se abordan las dificultades de su enseñanza y aprendizaje, su vínculo con el profesorado, y finalmente, se delimita el problema de investigación.

1.1. El Origen de los Irracionales

Los números irracionales tienen su origen en la antigüedad Grecia, y se establecen en el siglo XIX mediante la organización de un sistema numérico nuevo y la necesidad de una fundamentación del análisis matemático, así como urgencia de oficializar técnicas operativas (Pineda y Ñañez, 2020). Los primeros indicios acerca de números irracionales surgen en el siglo VII a.C. en la escuela Pitagórica, donde consideraban al universo construido de forma armoniosa, y esta armonía podía verse reflejada como el cociente de dos números enteros (Crespo, 2009). De esta manera, la escuela Pitagórica empieza a comparar magnitudes entre sí, las cuales consideraban finitas, es decir, todo par de magnitudes las consideraban conmensurables. Con el descubrimiento de las magnitudes no conmensurables, (se cree que por Hipaso de Metaponto), la doctrina de la escuela pitagórica fue fuertemente remecida en sus cimientos (Crespo. 2009). Por ejemplo al comparar la diagonal del cuadrado con su lado y, la diagonal de un pentágono regular con su lado, se encontró la imposibilidad de hallar una unidad de medida que represente a estos dos segmentos, es decir, son inconmensurables (Pineda y Ñañez 2020).

Según Pineda y Ñañez (2020), con el surgimiento de la representación decimal hechas por Stevin en siglo XVI, introdujo una forma de operar a los irracionales, a través de la representación decimal, lo cual ayudó a intuir a los irracionales como números, aunque los resultados solo eran aproximaciones.

Asimismo, en este periodo surgen las fracciones continuas, como forma de representación de números irracionales, mediante el algoritmo de la división de Euclides. El primer registro se encuentra en la obra Bombay de 1572, quien representó a la raíz cuadrada de dos a través de una fracción continua (Levin, 2017), las cuales después fueron utilizadas como método a utilizar con los números irracionales con una aritmética racional (Reina. et al., 2012). Posteriormente, matemáticos como Pascal y Barrow en el siglo XVII, no consideraban a los irracionales como números en la solución de ecuaciones, sino como magnitudes geométricas.

Durante en el siglo XIX, ante el desarrollo de los números reales, se generan límites en la aceptación de los números irracionales, debido a que no contaban con un sustento formal, que los respaldaran como números. Se genera la necesidad de formalizar los números reales, además, que fuera construido con bases aritméticas entregadas por el análisis y el álgebra (Pineda y Ñañez. 2020). Desde la perspectiva de los reales, es aceptado el irracional como número, de acuerdo con los planteamientos teóricos expuesto por cada matemático. En el proceso de formalización de los números irracionales, Dedekind compara el dominio de los números racionales con el dominio de los puntos sobre de la recta numérica, e intuye que en los primeros hay saltos de un número racional a otro, mientras que la recta está conformada por infinitos puntos, algunos correspondían a los números racionales y los restantes a los números irracionales, y que al unirlos forman un nuevo conjunto denominado los números reales (Pineda y Ñañez. 2020).

De igual manera, Cantor define a los números irracionales a través de las sucesiones fundamentales; dada una sucesión fundamental que se aproxima a un punto entonces la distancia del punto a su origen, es el número correspondiente a la sucesión. Como resultado Cantor considera que a cada número le corresponde un punto en la recta con coordenadas igual al número.

1.2. El Estudiantado y los Irracionales

La forma en que los estudiantes forman el concepto de irracionalidad se refleja en sus ideas sobre el número real, lo que posteriormente les genera dificultades en el análisis matemático, mostrando obstáculos epistemológicos y didácticos en el aula (Crespo, 2009).

Zazkis y Sirotic (2004) identifican una dualidad "transparencia-opacidad", en la representación de los números racionales e irracionales dificultando su distinción; "transparencia" en cuanto a revelar algunas características, y "opacidad" en el sentido que ocultan algunas de ellas. Los números irracionales son considerados "opacos" porque no pueden ser expresados de manera finita y exacta, significando que no se puede visualizar de forma clara su estructura y propiedades. De igual forma, según Sirotic y Zazkis (2007), la ubicación de los números irracionales en la recta numérica expone conflictos cognitivos difíciles de gestionar, debido a su naturaleza y características.

Scaglia (2000) identifica dos dificultades que presentan los estudiantes con las representaciones de los números irracionales: ¿Cómo un número con representación infinita (decimal) puede asignársele un punto en la recta real?, ¿por qué la marca o trazo efectuados con el lápiz para representar un objeto geométrico no es realmente el objeto ideal?

En contraste, Kidron (2018), llevó a cabo investigaciones sobre las concepciones sobre los números irracionales en estudiantes antes de su ingreso a la universidad, donde los hallazgos revelaron que sólo el 19% de los estudiantes mostró entendimiento de los números irracionales, como decimales infinitos no repetido, y un 20% reconoció la existencia de los números irracionales en la recta numérica.

1.3. Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de los Números Irracionales.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deben a diversas circunstancias, que van desde una deficiente planificación curricular, hasta la naturaleza misma de las matemáticas (Socas, 1997). Este es el resultado de la combinación de elementos intramatemáticos como objetos, procesos, simbolismos, algoritmos, secuencias, entre otros, y extramatemáticos que abarcan cognición, actitudes, metodologías, currículo, concepciones, etc. Así, la irracionalidad de algunos números reales no tiene relevancia para los estudiantes, indicando señales que muestran que estos no han sido desarrollados correctamente y, además, de su importancia en la integridad de la recta numérica.

Crespo (2009) señala que, en el proceso de aprendizaje de los números irracionales, vinculados a la complejidad de los objetos matemáticos, se detectó una confusión semántica de referente a conceptos fundamentales, como los de raíz, índice, coeficiente, radical, racional, exponente e irracional, los cuales se diferencian de su significado en el lenguaje común y que pueden generar confusiones. Una dificultad adicional se presenta en la operatoria de los números irracionales, debido a la falta de comprensión de su naturaleza y características, lo que luego se manifiestan en la dificultad para situarlos en la recta numérica.

Siguiendo al autor (Crespo, 2009), los números irracionales generan obstáculos epistemológicos, como su asociación al concepto de infinito. Si bien los estudiantes aceptan que un número irracional tiene infinitas cifras decimales, al realizar operaciones, hacen un corte de cifras, sin llegar a comprender que no se trata del número irracional, sino de una aproximación, es decir, de un número racional. También consideran que todos los números infinitos son números irracionales, sin tener en cuenta un patrón de comportamiento en sus cifras decimales.

Respecto a la manifestación de obstáculos de tipo didáctico (Crespo. et al., 2008), en el aula se observan dificultades vinculadas a las demostraciones matemáticas, cuya excesiva rigurosidad genera confusión en los estudiantes, fomentando el desinterés en los números irracionales. Asimismo, los autores señalan carencias en los conocimientos previos, como el teorema de Pitágoras, o la insuficiencia de números racionales para resolver ecuaciones de la forma $x^2 = 2$.

1.4. Dificultades en la enseñanza de los números irracionales

La irracionalidad de algunos números reales es una idea que muchas ocasiones carece de sentido para los estudiantes, una explicación recurrente está asociada al rol y conocimiento del profesorado de matemática (Crespo. 2010). Muchas veces, los docentes piensan que estos números (irracionales) han sido enseñados apropiadamente; sin embargo, los aprendizajes de los estudiantes indican que los números irracionales no son correctamente construidos.

En Sánchez (2011), se indica que en ocasiones las carencias de los profesores de matemáticas en la comprensión de los números irracionales son sorprendentes. Deficiencias que llevan a reflexionar, analizar y profundizar en particular sobre la enseñanza del número irracional, un concepto clave en la matemática para la teoría de números, el algebra, la geometría o del cálculo.

Los números irracionales se presentan como un "paso obligado" para la apropiación de otras nociones, como es el concepto números reales, el análisis real, la geometría diferencial, el álgebra abstracta, entre otras disciplinas de la matemática, transformándose en un objeto de alta complejidad para su enseñanza, incluso en niveles avanzados (Reina. et al. 2014).

1.5. Estudio con Profesorado de Matemática

Un trabajo de investigación llevado a cabo por Sirotic y Zazkis (2005), acerca de la comprensión de los números irracionales en futuros profesores de secundaria, se centró en su representación como puntos en la recta numérica. Los resultados muestran confusión entre los números irracionales y su aproximación decimal, además de una fuerte dependencia de una definición de número irracional como aproximación decimal. De hecho, en sus estudios es particularmente notable la existencia de una creencia generalizada entre los profesores que la irracionalidad se fundamenta en su expresión decimal. De igual manera, determinaron que, aunque los futuros profesores sabían "cuándo" surgió el número irracional, solo unos pocos saben "cómo" surge. Esto también indicó que, aunque el concepto de irracionalidad está asociado con los griegos, no está vincula a su origen en la geometría (longitudes conmensurables e inconmensurables), sino que se entiende como fundamentado en decimales, siendo cierto que la introducción de la notación decimal y sus reglas ocurrieron en el siglo XVI gracias a Simón Stevis en su obra *L 'Arithmétique*.

Reina (2014), investigó sobre los conflictos semióticos y desafíos en la construcción del número irracional durante la formación de profesores, concluyendo que la construcción del concepto de número irracional, tiene una complejidad agregada, en la que el infinito matemático incide fuertemente en las nociones asociadas al conjunto de los números irracionales, tales como numerabilidad, cardinalidad, densidad de los irracionales en los reales, y también las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional.

Reina (2016) se señala que una de las dificultades que los profesores mencionan al introducir los números irracionales en la enseñanza es la distinción entre números racionales e irracionales. Además, la expresión decimal de ambos tipos de números se considera uno de los modos preferidos por los profesores para la enseñanza.

Por otro lado, en un estudio realizado por Rodríguez (2013), el objetivo de investigación era describir y analizar el dominio disciplinario de los docentes de matemáticas en ejercicio, evaluados en los programas de Asignación de Excelencia Pedagógica (AEP) y Asignación Variable por Desempeño Individual (AVDI) -programas del Ministerio de Educación cuyo objetivo es fortalecer la calidad de la educación a través del reconocimiento al mérito profesional de las y los docentes de aula-, y relacionar dicho dominio con las prácticas pedagógicas demostradas en sus clases. Esto permitió identificar patrones y caracterizar en primera instancia el dominio disciplinar de los participantes.

El análisis de resultados de los instrumentos de evaluación utilizados en los programas AEP y AVDI, en cuanto a los números irracionales, mostró que los profesores de enseñanza media obtuvieron resultados en los rangos clasificados como esperados: pueden ordenar números irracionales, distinguir entre números racionales e irracionales en contextos simples, e identificar la pertenencia a un conjunto numérico. Con dificultad media, se presenta resultados en lo que respecta a aplicar propiedades de orden y realizar operaciones sencillas con números irracionales. Con una dificultad mayor, se encontraron resultados como el comprender bajo qué condiciones se puede asegurar que el resultado de operaciones aritméticas entre racionales e irracionales es un número racional o irracional, así como la distinción conceptual entre número racional e irracional y la destreza operatoria en el ámbito de los números reales (por ende, también en los irracionales). Esta misma investigación observa dificultades para establecer relaciones entre dominios e integrar contenidos, así como para transferir el conocimiento a contextos diversos, mostrando una escasa comprensión profunda de la matemática elemental y, aún más, de una insuficiente anticipación a los errores de los estudiantes en la compresión del número real, fenómeno que se destaca en los números irracionales.

Priore et al. (2013), al realizar un estudio sobre la evolución de los números irracionales en la educación uruguaya a un grupo de profesores, en sus conclusiones, determinaron que el profesorado no considera referentes históricos a la hora de estudiar los irracionales en el aula, y el tiempo dedicado a su estudio es muy escaso.

Para Rodríguez (2013) una formación básica de matemáticas en la población escolar de un nivel deficiente, sumada a una formación superior que no logra subsanar tales debilidades, da como resultado profesores en ejercicio que tienen muy pocas posibilidades de revertir este círculo vicioso.

1.6. Delimitación del Problema de Investigación

La calidad del sistema de educación actual es la base para la prosperidad económica y social del país del mañana. Por lo tanto, en el debate social actual, la educación ocupa un lugar central, y dentro de esta discusión, el papel del profesorado es una pieza fundamental de un sistema cada vez más complejo (OCDE, 2015).

Contextualizando al docente en un área del saber, más exactamente en la matemática, es importante la distinción y comprensión de los conocimientos y habilidades que los profesores deben poseer para convertirse en generadores de aprendizajes (Rodríguez, 2013); conocimientos y habilidades que les permiten diseñar y aplicar acciones para dar respuesta a las inquietudes y cuestionamientos de los estudiantes. El impacto que genera el docente en la sociedad y en sus estudiantes está marcado por su acción en el aula de clase, la cual está condicionada por el dominio tanto del contenido como del conocimiento didáctico del contenido, posibilitando o restringiendo el aumento del logro de los aprendizajes de sus estudiantes (Carrillo et al., 2018).

En la matemática escolar chilena, en el eje de números, se plantea la comprensión por parte de los estudiantes de nuevos números y las operaciones entre ellos. Esto se realiza de forma progresiva, desde los números enteros hasta los reales (MINEDUC, 2016). De forma implícita, dentro del programa de estudios se tiene contemplada la enseñanza de los números irracionales, como un nuevo conjunto de números. Su estudio comienza en 7° año de educación básica, con la definición del número π, profundizando luego en segundo medio a través de la intuición de que existen números con escritura decimal no periódica, cuyas cifras se suceden indefinidamente sin obedecer una ley. Esta intuición es clave para la construcción conceptual de los números reales (Santís et al., 2017).

En Sirotic y Zazkis (2007) abordan la dificultad en el aprendizaje de conceptos asociados a los números reales, entre ellos el concepto de número irracionales, dificultades que se mantienen de manera sostenida y suelen ser evidentes para el docente.

No es desconocido en el ámbito del estudio matemático y de la investigación la importancia transcendental de la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales (Herrera, 2010), donde su surgimiento ocasionó crisis en la forma de comprender el concepto de número, de la conmensurabilidad y de la forma cómo se debía operar.

Zazkis y Sirotic (2004), en el estudio de los números irracionales, presentan problemas relacionados con la construcción incompleta o errónea del concepto, la no aceptación de algunas de sus representaciones como número, en la creencia de que su aproximación es el número racional en sí, la escasez de sus referentes históricos y la dificultad de su ubicación en la recta.

En su investigación, Herrera (2010) plantea que los futuros profesores requieren conocer de forma profunda las propiedades del número irracional para una construcción del concepto de forma viable y eficaz.

Para Reina. et al. (2014), los números irracionales se presentan no solo como un paso obligado para la apropiación de otras nociones, sino también como un objeto de gran complejidad para su enseñanza y aprendizaje. Esta complejidad está asociada al concepto de infinito matemático, considerado como un objeto que incide fuertemente en otras nociones vinculada a dicho conjunto, a saber: numerabilidad, cardinalidad y densidad de los irracionales en los reales; junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional.

La importancia de los números irracionales radica en su comprensión y en la correcta aplicación de sus propiedades (Fuentes y Saiz-Sáez. 2016) en temas como el cálculo de circunferencias, áreas y volúmenes, en el teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos, la ecuación ordinaria de la circunferencia, problemas de crecimiento poblacional, en el interés compuesto, en sustituciones trigonométricas y en logaritmos; así como en constantes que dan sentido a importantes ecuaciones matemáticas, como el número de Euler, utilizado en crecimiento de poblaciones o phi en el arte. Todas estas aplicaciones de los números irracionales se encuentran a lo largo de las bases curriculares emanadas del Ministerio de Educación de Chile y son objeto de estudio en parte de la educación básica, y en toda la educación media.

El estatus actual de los números irracionales se considera como un número cuya relevancia radica en dar el paso del sistema de los números racionales, al de los números reales (Sirotic y Zazkis. 2007) Por tanto, la aceptación de su definición como número fue producto del estudio del análisis matemático (Torres y Mora. 2004), en la formalización de los números reales.

Con base en estos antecedentes, es necesario develar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, es decir, los conocimientos que posee el profesor sobre los números irracionales, la manera en que conecta estos conocimientos, y cómo los presenta en el aula de clase. De la mano con ello, se debe considerar el conocimiento especializado referente al conocimiento didáctico del contenido, es decir, las formas en que enseña los números irracionales, las características de su aprendizaje y las expectativas de su conocimiento.

2. Pregunta de Investigación

En función de lo anterior, este estudio busca responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el conocimiento especializado del profesorado de matemática en la enseñanza de números irracionales a estudiantes de educación media?

3. Objetivo General y Específicos

Para responder a la pregunta de investigación, se plantea el siguiente objetivo general y los siguientes objetivos específicos:

3.1. Objetivo General

Caracterizar el conocimiento especializado que posee el profesorado de matemática en la enseñanza de los números irracionales a estudiantes de educación media.

3.2. Objetivos Específicos

Por lo tanto, se proponen los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los componentes del conocimiento especializado del profesorado de matemática de enseñanza media al enseñar números irracionales.
2. Describir los componentes del conocimiento especializado que utiliza el profesorado de matemática para la enseñanza de los números irracionales a estudiantes de educación media.

4. MARCO TEÓRICO

4.1. Los Números Irracionales

Los números irracionales han planteado desafíos desde el momento de su irrupción en la historia matemática. En este capítulo se da conocer los referentes históricos de su formalización como número y la demostración de su irracionalidad. En la segunda parte, se exponen los antecedentes del modelo MTSK y su estructura orgánica.

4.1.1. *Formalización de los Números Irracionales*

Referentes históricos de la matemática documentan que, en el siglo XIX, el concepto de número hacía referencia a dos definiciones: al número racional como aquel que puede representarse por medio de una expresión periódica, y al número irracional, como aquel que no tenía un periodo en su expresión decimal (Hernández, 2003). En este mismo siglo, se hizo necesario fundamentar el análisis matemático de forma rigurosa y detallada, puesto que no se contaba con una base estructural sólida, que facilitara la obtención de información sobre sus propiedades o la forma de operar con ellos. En este contexto, los trabajos de Cauchy, Karl Weierstrass, Charles Méray, George Cantor y Richard Dedekind, consolidan a los irracionales como números u objetos matemáticos, desligándose de las magnitudes inconmensurables.

En esta formalización de los números irracionales, se toman en consideración los trabajos realizados por Gregor Cantor y Richard Dedekind, que a continuación se detallada:

4.1.2. *Sucesiones Fundamentales de George Cantor*

Los trabajos de Gregor Cantor y Richard Dedekind formalizan los números reales a partir de las propiedades aritméticas y de orden. Gregor Cantor lo hizo a través de las sucesiones fundamentales y Richard Dedekind con sus cortaduras o subconjuntos de los números racionales.

Cantor parte del dominio de los números racionales, el cual llama dominio A, y a través de sucesiones infinitas de racionales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, estima aquellas que denomina sucesiones fundamentales.

La sucesión infinita $\{a_n\}$ se le llama sucesión fundamental si existe un entero N tal que para cualquier $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathrm{Q}$, se tiene que:

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon, \text{ para todo } m, \text{ y para todo } n > N$$

Cantor considera la correspondencia entre sucesiones fundamentales, de modo que si una sucesión $\{a_n\}$ está relacionada con un límite b, y otra sucesión $\{b_n\}$ es igual a la sucesión $\{a_n\}$, entonces, b también es límite de $\{b_n\}$.

Este nuevo conjunto donde convergen las sucesiones, Cantor lo visualiza como un sistema (B), el cual cumple con las relaciones de orden y de operaciones elementales de la misma forma que los racionales. De esta forma, este nuevo sistema corresponde al conjunto de los números reales. Cantor establece una relación entre cada uno de los elementos del sistema B en correspondencia con cada punto de la recta, donde cada sucesión fundamental $\{a_n\}$ tiene como límite un número b (racional o irracional), entonces a estos, se les puede relacionar con los puntos de la recta mediante estas sucesiones.

En conclusión, en la visión de George Cantor son las sucesiones fundamentales las que permiten ampliar el dominio de los racionales (A), hasta conseguir los números irracionales, y por ende obtener un nuevo dominio (B), siendo este el de los números reales, como conjunto con estructura algebraica de cuerpo, ordenado y completo.

4.1.3. Cortaduras de Richard Dedekind

Dedekind intuye que la construcción de los números reales se realiza a través de los números racionales, ya que estos se pueden aproximar de forma rigurosa con los naturales, siendo estos números, los naturales, los que permiten establecer las leyes fundamentales de la aritmética. En el proceso de formalización de los números reales, Dedekind establece pautas para identificar a los números irracionales. Parte de las propiedades que cumplen los números racionales, en donde a, b y c $\in \mathbb{Q}$, números distintos, se da las siguientes condiciones:

i. Si a > b y b > c; entonces a > c

i.i. Existen infinitos números entre a y c

i.i.i. Si *a* genera una partición de Q en dos clases, A_1 y A_2; donde A_1 contiene todos los números racionales a_1 menor que *a*, mientras que A_2 contiene todos los números racionales a_2 mayores que a. Esta partición corresponde a lo Dedekind llama *cortaduras* (A_1,A_2). Entonces todo número racional *a* determina una cortadura; esta cortadora cumple con la propiedad de tener entre los números de primera clase (A_1) un máximo, o entre los números de segunda clase (A_2) un mínimo. Ahora en el caso contrario, si una cortadura cumple con esta propiedad, entonces la cortadura está determinada por un número racional que viene siendo un máximo o un mínimo.

Dedekind (1988) propone que existen infinitas cortaduras que no pueden ser determinadas por números racionales, para esto propone lo siguiente:

Sea D un número entero positivo, pero que no es el cuadrado de un número entero, entonces hay un número entero positivo λ tal que $\lambda^2 < D<(\lambda+1)^2$. Si se coloca en la segunda clase A_2 cada número racional positivo a_2 cuyo cuadrado es > D, y en la primera clase A_1 todos los demás números racionales a_1, entonces esta partición constituye una cortadura (A_1, A_2), cada número a_1 es menor que cada número a_2. Pues si a_1 = 0 o a_1 es un número negativo, entonces a_1 es ya por este motivo menor que cada número a_2, porque éste es, de acuerdo con la definición, positivo; pero si a_1 es positivo, entonces su cuadrado es ≤ D, y por consiguiente a_1 es menor que cada número positivo a_1, cuyo cuadrado es > D. Esta cortadura, sin embargo, no está determinada por ningún número racional. Ahora, cada vez que se da una cortadura (A_1,A_2) que no está determinada por ningún número racional creamos un nuevo número, un número irracional α, que consideramos como perfectamente definido por esta cortadura (A_1,A_2); diremos que el número α corresponde a esta cortadura, o que él determina esta cortadura. Por lo tanto, a cada cortadura determinada le corresponde un y sólo un número determinado, racional o irracional, y consideramos a dos números como diferentes o desiguales si y sólo si corresponden a dos cortaduras esencialmente diferentes.

En esta propiedad, la de que no todas las cortaduras están determinadas por números racionales, consiste en la incompletud o discontinuidad del dominio *R* de todos los números racionales.

Dedekind determina que teniendo en cuenta la ubicación de los puntos sobre la recta, ya sea a la izquierda o derecha de un punto referencia, esta se descompone en dos clases: todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y solo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corta a la recta en dos partes. Dado que la recta es un conglomerado de puntos distribuidos de forma uniforme e infinitos, Dedekind intuye que algunos de estos puntos corresponden a los números racionales, produciéndose saltos en recta, y que los puntos sobrantes corresponden a los números irracionales, y que al unirlos formarían un nuevo conjunto con propiedades aritméticas denominado números reales *R*.

De esta forma Dedekind pudo demostrar la existencia de cortaduras producidas por números no racionales, dando a conocer la existencia del número √D como un nuevo número cuya propiedad es ser tanto el máximo como el mínimo de un par (A1, A2) respectivamente.

4.1.4. Demostraciones de la Irracionalidad

A continuación, se exponen varios casos de demostración de la irracionalidad a través de uno de sus representantes como lo es raíz cuadrada de dos.

El Caso de la Irracionalidad de $\sqrt{2}$. La inconmensurabilidad de la diagonal con el lado de un cuadrado es una de las demostraciones más antiguas que datan del siglo V a.C. en la escuela Pitagórica y que Aristóteles dio a conocer. Esta prueba de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ se suele desarrollar por el método de reducción absurdo, donde se niega la tesis y, si asumiendo esto se llega a una contradicción matemática o lógica, entonces se concluye que la tesis es verdadera (Tabaré, 2014)

Se parte de la afirmación que todo número racional se puede escribir como una fracción irreducible a/b, donde a y b son enteros sin factores comunes. ¿es $\sqrt{2}$ irracional?, supongamos que sí, entonces podemos expresarlo como una fracción irreductible: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, y con M.C.D (a,b)=1, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad: $a^2 = 2b^2$, deducimos que a^2 es un natural par. Ahora si a fuera impar, a^2 sería necesariamente par. Podemos escribir entonces que $a^2 = 2p$, donde p será algún número natural. Sustituyendo esta información alcanzamos la identidad $2p^2 = b^2$. Y, de nuevo, como b^2 es un entero par, *b* es par. Al sustituir la información tenemos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2p}{2q}$. Así hemos caído en una contradicción, porque tanto p como q son pares, que tienen un factor en común, pero habíamos supuesto que no tenían factores primos en común, demostrando así que la suposición inicial es incorrecta. Con esto se concluye que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como una fracción de números naturales.

Otra forma alternativa de la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es a través del teorema fundamental de la aritmética que afirma: "*todo número natural se puede descomponer, salvo reordenaciones triviales, como producto de factores primos y de forma única*".

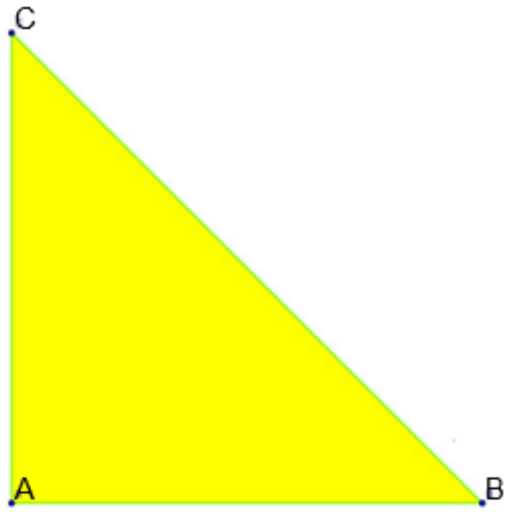
Supongamos que $\sqrt{\mathbf{2}}$ es racional por lo tanto es una fracción irreductible. Se tiene que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ se puede expresar como $2a^2 = b^2$; donde a^2 es el producto de *n* primos, y b^2 es el producto de *m* primos, lo que es absurdo, ya que en el primer miembro de la igualdad se tiene una multiplicación de un número impar de factores primos, y en el segundo miembro de la igualdad se tiene un número par de factores primos. Por lo tanto, se llega a una contradicción, donde se parte que $\sqrt{2}$ era racional, se concluye que $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración Geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{\mathbf{2}}$. El matemático Tom M. Apóstol presentó en el 2000 una demostración geométrica de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos en el American Mathematical Monthly de noviembre del año 2000 (páginas 841–842), mostrando la imposibilidad de la existencia de un triángulo rectángulo isósceles con sus tres lados enteros. El teorema de Pitágoras dice que un triángulo rectángulo isósceles de catetos cuya longitud sea 1 (triángulo mínimo), la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

Si $\sqrt{2}$ fuera racional, existiría un número entero tal que al multiplicar por él las longitudes de los lados del triángulo original lo transformaría en un nuevo triángulo rectángulo isósceles cuyos tres lados serían enteros. Pero, si existiera un triángulo rectángulo isósceles con todos sus lados de longitud entera, siempre se podría construir, otro triángulo rectángulo isósceles con sus tres lados iguales y menores; y nada impediría aplicar el proceso a lo largo de un descenso infinito. De modo que $\sqrt{2}$ no es racional.

Figura 6

Triángulo rectángulo Isósceles

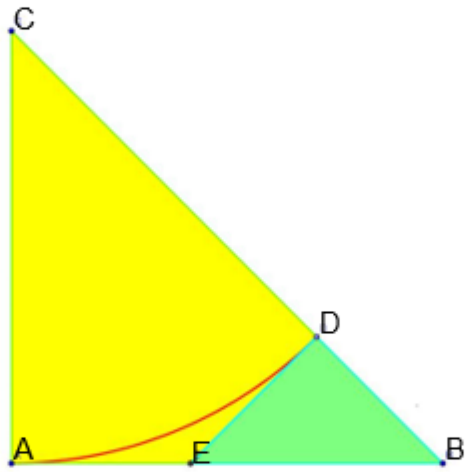


Partiendo del triángulo rectángulo ABC de lados enteros (Figura 1), se puede construir otro triángulo de lados enteros menores. Por hipótesis sus tres lados son enteros positivos. Con centro en C se proyecta un arco de circunferencia de uno de los catetos sobre la hipotenusa, dividiéndola en dos segmentos de longitud entera. Se traza una perpendicular por el punto D (Figura 2).

Los segmentos AC y CD son radios de una misma circunferencia, entonces miden lo mismo, como AC es un entero entonces CD es un entero. Se tiene que BC es un entero positivo y es mayor que el segmento CD, por lo tanto, el resultado de la resta de la longitud del segmento BC y DC es un número entero positivo (AB - CD = BD). Se traza una recta perpendicular al lado CB que pasa por el punto D. Esta recta corta al lado AB en el punto E. Ahora se traza el segmento DE formándose el triángulo BDE, el cual es isósceles, siendo BD y DE sus lados iguales (ya que DE es el simétrico de BD respecto de la recta perpendicular al lado AB que pasa por D). Por ello, la longitud del segmento DE también es un número entero. Los segmentos AE y DE son tangentes a un arco de circunferencia desde el mismo punto E, por lo que son iguales.

Figura 7

Construcción del Triángulo isósceles BDE con lados enteros



Se sabe que la longitud del segmento DE es un entero (Figura 2), por consiguiente, la longitud del segmento AE también es un entero. Se tiene que la longitud del segmento AB es un entero, y el segmento AE es menor que el segmento AB, por lo tanto, el segmento BE es también un entero positivo (AB - AE = BE).

Se tiene ahora el triángulo BDE, que es un triángulo isósceles, donde la longitud de sus lados son todos números enteros menores que el triángulo mínimo inicial. Puesto que este proceso se puede llevar al infinito, no existe tal triángulo, en consecuencia, la suposición que $\sqrt{2}$ es racional, es falsa. Por tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional.

4.2. El conocimiento Profesional del Profesorado de Matemáticas

El conocimiento profesional de las y los profesores puede considerarse como una de las características más importantes dentro de la enseñanza (Abell, 2007), lo que implica contar con competencias específicas, fundamentadas en conocimientos y destrezas adecuadas para la enseñanza y el aprendizaje.

En Ponte (2012), se señala que no basta sólo con la identificación del conocimiento necesario para el ejercicio profesional del profesor, sino que también, se debe comprender la naturaleza de dicho conocimiento, como un elemento inseparable entre la acción del profesor, y de la forma en que se construye el mismo conocimiento.

El creciente interés por el conocimiento especializado que posee el profesor ha suscitado numerosas investigaciones en las que el foco es el profesorado de matemática (Llinares, 1998; Grajales, 2017). Este interés se ha centrado en examinar cuáles son y cómo son los elementos que constituyen el conocimiento profesional, es decir, los componentes del conocimiento matemático y la naturaleza de estos.

Un momento crucial, en esta profundización, se da en los trabajos de Lee Shulman (1986; 1987), donde resalta la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza, diferenciándolos del contenido de la materia que tienen otros profesionales, o de los aspectos generales de la enseñanza. Como precursor, Shulman (1886) propone tres categorías para identificar los componentes del conocimiento que se requieren para la enseñanza: la primera categoría hace referencia al conocimiento del contenido, es decir, al volumen de conocimientos que el profesor posee, así como a la forma en que los organiza; el profesor necesita entender *que* algo es así, y el por *qué* es así. La segunda categoría es el conocimiento didáctico del contenido, que se refiere a las formas de representar y formular los contenidos de modo más comprensible, facilitando el aprendizaje de un tema específico. Como tercera categoría, el conocimiento curricular que comprende los diversos programas y materiales diseñados, válidos para la enseñanza de un tema en específico.

Este nuevo punto de vista introducido por Shulman en sus trabajos, orienta a los investigadores a centrarse en el conocimiento del contenido de las y los profesores (Sherin et al,. 2000), específicamente en las habilidades de las estructuras mentales de los docentes (Leinhardt y Greeno, 1986) y en las habilidades de los profesores para la enseñanza (Ball, 2000).

El conocimiento del profesorado de matemática se refleja en la acción misma de enseñar matemáticas, 'nadie enseña lo que no sabe'. Es importante tener en claro que la naturaleza de este conocimiento, no se puede separar de las acciones que realiza el profesor del contexto de la experiencia y de la reflexión.

A medida que se adentra en la comprensión y la transmisión del conocimiento del contenido por parte de los docentes, se hace evidente un marco teórico coherente (Shulman,1986), que le da un distintivo único y particular con relación a otras disciplinas, más allá de la cantidad de definiciones y procedimientos.

Climent y Carrillo (2011) describen el desarrollo profesional del profesor de matemáticas en términos de variables o de relación entre variables, como la toma de conciencia sobre los contenidos, su práctica y la relación con la teoría, el aprendizaje de estrategias, o el de explicar sus decisiones de forma clara y determinada. Esto le permite adquirir un discurso profesional que lleva a pensar de forma más estructurada sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y a comunicarlo.

Conocer en mayor profundidad el contenido disciplinar permite “ir más allá del conocimiento del contenido *per se* hacía una dimensión del conocimiento del contenido para la enseñanza” (Shulman, 1986, p. 64), incrementado la posibilidad de diseñar estrategias vinculadas al contenido y de justificar su relevancia en el aprendizaje de los estudiantes.

El profesor debe tener un mínimo de conocimientos que se propone enseñar, no solo conocer o comprender sobre los contenidos a enseñar, sino que también su origen y evolución, su epistemología, además del contexto de su aplicabilidad y sus posibles errores o dificultades en la enseñanza y el aprendizaje.

Se requiere estudiar al profesor de matemáticas, a través de marcos conceptuales que permitan comprender cómo él construye los significados matemáticos, los transforma y los representa en la práctica docente.

En beneficio de esto, se debe realizar un análisis del conocimiento que posee el profesor de matemáticas desde su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características, así como su relación con la enseñanza y el aprendizaje, y su conexión con otras disciplinas (Sosa y González, 2008).

4.3. Antecedentes del MTSK

Los antecedentes del MTSK, se ubican en el grupo de investigación de la Universidad de Huelva, a mediados de los años 90, donde su interés se centra en el profesorado de matemática, tanto en sus creencias sobre la matemática como en la enseñanza y el aprendizaje de la misma (Climent y Montes, 2022). Al reflexionar sobre su origen, se encuentran los trabajos realizados por Lee Shulman sobre un conocimiento referente a la enseñanza de la materia. En su trabajo, ‘Aquellos que Entienden: Desarrollo del conocimiento en la Enseñanza’ (Shulman, 1986), plantea la necesidad de considerar la particularidad del contenido que se está enseñando, así como el conocimiento que el profesor posee sobre la materia, que se transforma en contenido de enseñanza, y que lo hace especialista. Para Shulman, se ha ignorado un aspecto central del contenido: un “punto ciego” que es la materia por enseñar, lo que denomina el paradigma ausente, planteando el interrogante de cómo el profesor emplea su conocimiento del contenido en la enseñanza. Para ello, propone tres categorías que caracterizar el conocimiento del contenido en la enseñanza:

1. Conocimiento del contenido (CK).
2. Conocimiento pedagógico del contenido (PCK).
3. Conocimiento curricular.

En el conocimiento del contenido (CK), Shulman hace referencia al “volumen” de los conocimientos que el profesor posee y de cómo organizarlos; requiere ir desde los conocimientos de los conceptos hasta comprender la estructura de la materia. No solamente se trata de entender que algo es así, sino del por qué son así.

El conocimiento pedagógico del contenido (PCK), es un conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia por sí misma; es un conocimiento de la materia para la enseñanza. Shulman (1986), se refiere al PCK como la forma particular del conocimiento que incorpora los aspectos del contenido más pertinentes a su enseñanza, es decir, el modo en que se entiende, que pueda ser fácil o difícil.

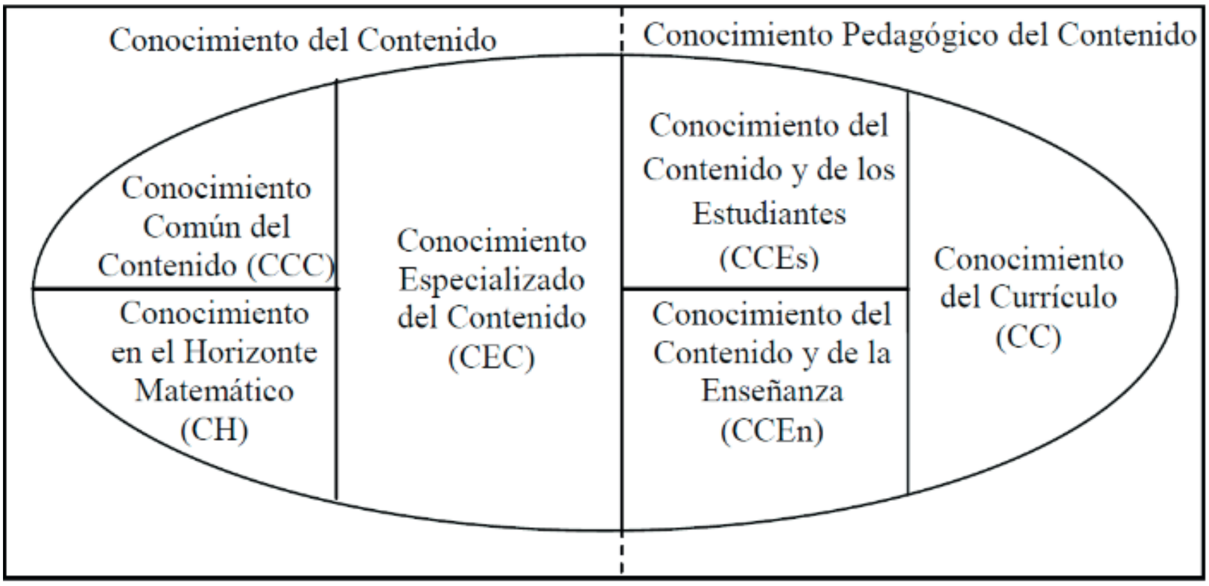
En cuanto al conocimiento del currículum, se refiere toda la gama de programas y los distintos materiales disponibles para la enseñanza en un nivel determinado, junto con sus indicaciones y contraindicaciones para su uso.

Si bien, los trabajos reivindicativos de Shulman han contribuido al desarrollo de la idea de un conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, los trabajos de Deborah Ball y de su grupo de investigación de la universidad de Michigan (Ball et al., 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008), permiten dar un paso importante en la caracterización de los componentes del conocimiento del profesor.

En su modelo de *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), Deborah Ball considera dos de los dominios del trabajo de Shulman: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. En este modelo, Ball et al. (2001) presentan el concepto de conocimiento especializado del contenido matemático, refiriendo que tal conocimiento no es cualidad que posee un matemático como virtud por haber estudiado matemáticas avanzadas, sino que se trata de un conocimiento particular para la enseñanza de las matemáticas, otorgando así al profesor de matemática de una identidad profesional.

Figura 8

Modelo MKT: Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008, p. 403).



El modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) está conformado por dos dominios: el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido.

1. El conocimiento disciplinar, se compone de:

El conocimiento común del contenido, que se supone a cualquier adulto educado, es decir, el conocimiento que se utiliza en profesiones u ocupaciones que utilizan las matemáticas.

El conocimiento especializado del contenido, el cual es un conocimiento matemático que sólo tiene sentido para el profesor de matemáticas, el cual le permite determinar qué representaciones son eficaces, en qué momento utilizarlas, dar explicaciones coherentes con la teoría matemática, realizar procedimientos, examinar y entender los métodos de resolución de problemas (Ball et al., 2005).

El horizonte matemático permite al profesor de matemáticas interrelacionar los contenidos a lo largo del currículo, realizar conexiones de contenidos anteriores y posteriores, como también el conocimiento de los principios del conocimiento matemático.

2. Conocimiento pedagógico del contenido, se compone de:

El conocimiento del contenido y los estudiantes, visto desde la perspectiva del aprendizaje, es conocer la forma en que razonan los estudiantes, sus errores y dificultades y sus estrategias más recurrentes con relación a un tema matemático.

El conocimiento del contenido y la enseñanza, desde la perspectiva de su enseñanza, el profesor construye estrategias adecuadas para el aprendizaje, y al mismo tiempo, aprende a corregir las concepciones erróneas.

El conocimiento del currículo hace referencia a los distintos contenidos y materiales curriculares; por ejemplo las matemáticas escolares (Ball. et al. 2008).

Si el Conocimiento Didáctico del Contenido supuso un avance muy importante en el modelo de Shulman, el Conocimiento en el Horizonte Matemático y el Conocimiento Especializado del Contenido, son probablemente las aportaciones más relevantes del modelo de Deborah Ball, al contemplar, por una parte, el conocimiento matemático del profesor desde la perspectiva de su diferenciación respecto a otros profesionales, y por otra, una comprensión transversal del contenido matemático, usando el currículo como guía. (Muñoz-Catalán. et al. 2015).

4.4. Modelo Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (MTSK)

El *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés), es una propuesta teórica y, a su vez, una herramienta metodológica. Como propuesta teórica, permite modelar *el conocimiento núcleo* del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas; como herramienta metodológica, permite analizar las diferentes prácticas del profesorado de matemática (Flores. et al. 2013). De tal forma, el MTSK permite conocer de forma analítica el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, como también, el análisis de las prácticas pedagógicas, de forma sistémica y organizada, a través de su estructura orgánica.

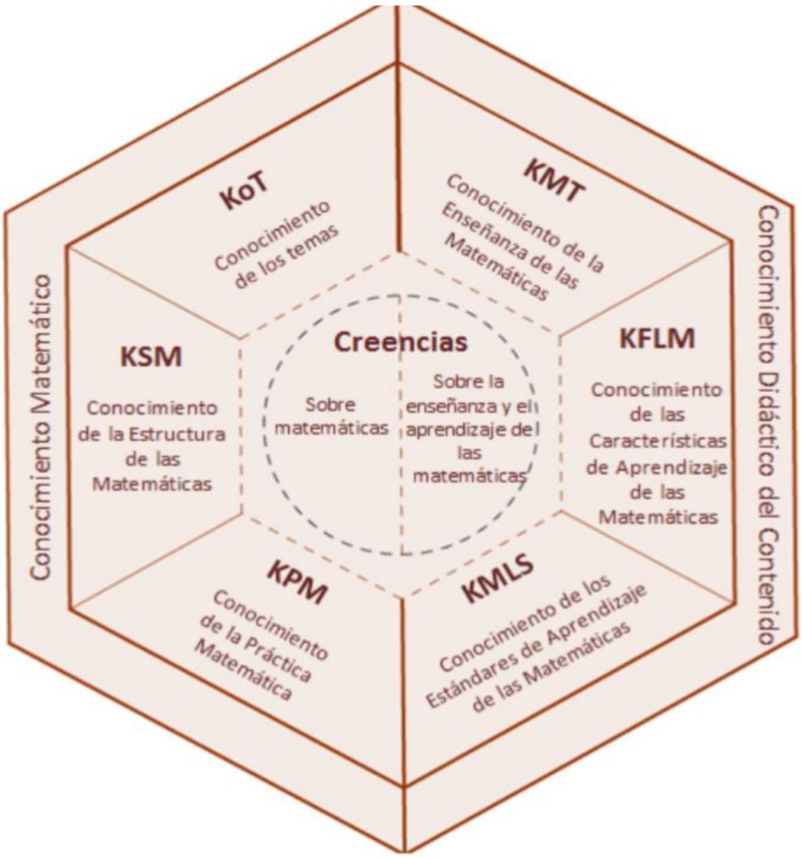
Basados en los trabajos realizados por Shulman (1986, 1987), el modelo MTSK considera dos grandes grupos sobre el conocimiento del profesor, que difieren en su naturaleza y medios de validación. Cada uno de estos grupos, llamados dominios, está a su vez conformado por subdominios y categorías, que permiten realizar una caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas. Un tercer grupo corresponde a las creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Como tal, el MTSK como modelo analítico, permite interpretar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. (Carrillo et al., 2013).

En su estructura general, el MTSK se conforma de dos grandes grupos: uno es el conocimiento que posee el profesorado de las matemáticas, como disciplina científica en un contexto escolar, y el segundo, es el conocimiento relacionado con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje, (Carrillo et al., 2013). También considera un tercer grupo sobre las creencias y concepciones de las y los profesores acerca de la matemática y su enseñanza-aprendizaje. Cada dominio está integrado por subdominio, que a su vez se les adjudica una serie de categorías, permitiendo identificar y organizar el conocimiento del profesor sobre algún tema matemático específico.

A continuación, se describe cada uno de los dominios que conforman el modelo MTSK, junto con sus subdominios y categorías correspondientes.

Figura 9

Estructura del Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Escudero, 2015, p. 2989).



4.4.1. Conocimiento Matemático

Un elemento fundamental en el profesorado de matemática es el conocimiento que posee de la propia disciplina. Schoenfeld y Kilpatrick (2008) enfatizan la importancia de que el profesorado disponga de un conocimiento amplio y profundo de la matemática, lo cual le permitirá seleccionar 'las grandes ideas', que le serán propuestas a los estudiantes. Por lo tanto, desde este punto de vista, es importante saber qué y cómo conoce de matemáticas el profesor de matemáticas.

El MTSK considera tres subdominios que conforman el conocimiento matemático, los cuales son: el conocimiento de los contenidos, de su estructura y de su práctica.

Conocimiento de los Temas (KoT).

Este subdominio hace referencia al conocimiento que posee el profesorado sobre los contenidos matemáticos, de una manera profunda y amplia. El conocimiento de un tema matemático va más allá de su aspecto procedimental, es el conocimiento de sus fundamentos que le dan sentido, y que le es propio al profesorado de matemática y de su labor de enseñar; en este sentido toma relevancia el conocimiento de la matemática escolar, ya que el profesor no debe confinar al conocimiento de aquello que los alumnos deben aprender, sino que debe conocer las características de los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada (Carrillo et al., 2014). Cabe señalar, según clasificación de la NCTM (2000), por temas, hace referencia a los contenidos que forman los grandes bloques o ramas, que tradicionalmente se han considerado en la matemática: números y operaciones, álgebra, geometría, medidas, análisis de datos y probabilidad, los cuales pueden ser adaptados o combinados según el currículo de cada país. Para este dominio se proponen las siguientes categorías.

Fenomenología y sus Aplicaciones. En esta categoría hace referencia al conocimiento del profesor sobre los fenómenos que están vinculados a un tema matemático, también al contexto a partir del cual se origina el objeto matemático, o situaciones en que se pueda utilizar o aplicar dicho tema matemático, sea dentro o fuera de la propia matemática (Freudenthal, 1983). En este sentido, es importante que el profesor conozca la génesis de los irracionales y su evolución en el tiempo, así como los diversos contextos donde se aplican o aparecen los números irracionales, como los son en las diagonales y lados de figuras geométricas, en la relación del diámetro con la longitud de la circunferencia, volumen de cuerpos geométricos, en razones trigonométricas, en la resolución de ecuaciones polinómicas o en el estudio de funciones continuas y discontinuas.

Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Esta categoría hace referencia al conocimiento de las propiedades específicas atribuibles a un contenido matemático particular, es decir, aquello que lo caracteriza y lo define como objeto matemático (Catalán. et al. 2015), ya sea de forma teórica o formalmente, o de formas alternativas (ejemplos o imágenes) asociadas.

De forma específica, se consideran los conocimientos para definir los números irracionales, ya sea desde una perspectiva numérica, geométrica o algebraica, como también de sus propiedades básicas, o de su estructura algebraica.

Registros de representación. Esta categoría se basa en los trabajos de Duval (1995), sobre los distintos sistemas de representación que se le pueden asignar a un contenido u objeto matemático. Estos registros de representación pueden ser gráficos, simbólicos, de lenguaje natural, aritmético, algebraico, pictográfico. Autores como Rojas (2014), hacen referencia a registros como material o concreto. En esta categoría se incluyen el conocimiento de la simbología y vocabulario usuales o alternativos para referirse a los irracionales.

Procedimientos. De acuerdo con Escudero (2015), es el conocimiento que posee el profesor sobre las diferentes acciones asociadas a un contenido matemático específico. En este sentido, es de gran importancia que el profesor conozca los procedimientos estándares como aquellos alternativos asociados a un contenido matemático, o que se ponen en juego al abordar un contenido matemático. En esta categoría ubicamos el conocimiento de algoritmos (acciones) tanto convencionales como alternativos que el profesor conoce para el abordaje o tratamiento de un contenido matemático, sustentado en la comprensión de su aplicación. En este sentido serán los conocimientos que posea el profesor sobre operatoria con números irracionales, en qué situaciones o fenómenos proceder con números irracionales y las características de los resultados cuando se involucran irracionales.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM).

Este subdominio tiene su origen en el Contenido del Horizonte Matemático (HCK) descrito en el MKT como "una conciencia de cómo se relacionan los temas en el ámbito de las matemáticas incluidas en el plan de estudios" (Ball et al., 2008, p. 17). Este subdominio lleva a comprender el conocimiento de la matemática desde un punto de vista de su integración y relación entre temas matemáticos, con estructuras avanzadas y amplias, como aquellas elementales de un concepto. El KSM describe el conocimiento del profesor de aquellas conexiones que hace entre distintos ítems matemáticos (Montes. et al. 2013), es decir, el establecer relaciones entre contenidos matemáticos (interconceptual), que se abordan en distintos momentos desde el punto de vista curricular, pero que se pueden relacionar de forma transversal o por la naturaleza propia del concepto.

El MTSK propone cuatro categorías de conexiones matemáticas que corresponden al subdominio del conocimiento de la estructura matemática.

Conexiones de complejización. Esta conexión relaciona los contenidos enseñados en un nivel determinado con los contenidos de niveles posteriores. Una visión de la matemática elemental proyectado a un nivel avanzado se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para contenidos a enseñar en un futuro. (Escudero. 2015). En esta categoría se puede dar la conexión que realiza el profesorado del número irracional *pi* en 7° básico, como integrante de un sistema numérico como lo son los números reales.

Conexiones de la simplificación. Estas conexiones establecen las relaciones entre los contenidos matemáticos tratados, pero considerando menos avanzados, es decir, una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental.

Por ejemplo, la conexión que el profesorado realiza de las funciones trigonométricas, con la longitud de la circunferencia que se enseña en 7° básico.

Conocimiento de conexiones transversales. Se hace referencia a conexiones entre diversos contenidos matemáticos, que tiene una cualidad en común que los relaciona, como podría ser el concepto de infinito que está ligado a la definición de número irracional.

Conocimiento de conexiones auxiliares. Es una conexión que se da con un contenido o elemento auxiliar, el cual prestan ayuda o sirven de herramienta a la comprensión y desarrollo del tema tratado. Aquí se tiene el teorema de Pitágoras como elemento auxiliar en el hallazgo de los números irracionales.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Este subdominio destaca la importancia del conocimiento que el profesor posea sobre las formas de hacer y proceder en matemática; no sólo que conozca los resultados matemáticos establecidos, sino que además, sepa cómo se llegan a dichos resultados. En Carrillo et al. (2018), la práctica matemática se describe como cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemática, con una sólida base lógica de la cual se puedan extraer reglas.

Se incluye en este subdominio los conocimientos relacionados con la construcción, validación y comunicación de los conocimiento matemáticos en un contexto educativo; las formas de demostración, de realizar generalizaciones válidas, del uso de conceptos y sus significados, de los axiomas o teoremas como elemento esencial de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis de la matemática, y del conocimiento heurístico en la resolución de problemas, desde una estructura lógica en la resolución.(Muñoz-Catalán. et al. 2015)

Por lo tanto, se destaca la importancia que el profesorado no solo conozca los resultados matemáticos, sino de aquellas formas de llegar a ellos, de saber razonar matemáticamente, de los distintos tipos de razonamientos y de aquellos contextos más adecuados en la aplicación de un objeto matemático (Montes, et al. 2014). Para este subdominio se tiene cuatro categorías:

El conocimiento de la práctica de demostrar. Se considera un conocimiento de métodos y tipos de demostración, como también el conocimiento de las funciones de demostración y el conocimiento de cómo desarrollar demostraciones.

El conocimiento de la práctica de definir. Definir es una de las formas de crear y establecer nuevos conocimientos (Leikin y Winicki-Landman, 2001). En el conocimiento que posee el profesor sobre práctica de definir, se debe tener en cuenta que las definiciones deben cumplir con ciertas características que, según Escudero (2014), incluyen la jerarquía, la no circularidad, la no ambigüedad, la no contradicción, la minimalidad, la independencia bajo el cambio de representación, la equivalencia y la elegancia.

El conocimiento de la práctica de resolver problemas. Las matemáticas consisten en formular problemas y soluciones. Así, además del planteamiento de conjeturas, la creación de modelos y el desarrollo de teorías; el quehacer de los matemáticos es continuamente resolver problemas de tipo desconcertante o difícil (Schoenfeld, 1992). De esta manera se identifica el conocimiento de las estrategias que el profesorado posee en la resolución de problemas.

Conocimiento del papel del lenguaje matemático. Uno de los aspectos característicos de la matemática es su vinculación con un lenguaje formal, es decir, preciso y riguroso, que se diferencia del lenguaje natural. En esta categoría se describe el conocimiento por parte del profesorado de matemática del uso del lenguaje matemático formado por símbolos escritos y hablados, términos y expresiones propias (Alcalá, 2002), que le permite comunicar ideas matemáticas, esenciales en la práctica matemática.

En estas categorías se describe la actividad matemática que desarrolla el profesor en el aula; de la forma de presentar los números irracionales, de las respuestas que dé a sus alumnos en cuanto a la demostración de la existencia de los irracionales, de las formas de definirlos, ya sea utilizando un lenguaje forma o natural, y de cómo opera los números irracionales para llegar a resultados lógicos y válidos que le permitan resolver problemas.

4.4.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

De la misma manera en que se plantea el conocimiento matemático, el MTSK considera un conocimiento particular del profesorado de matemática, que juega un papel importante en la caracterización de su conocimiento profesional.

En Shulman (1986) propone distinguir tres categorías de conocimiento del contenido, en la cual una de ellas es el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), dominio que va más allá del conocimiento de la materia *per se,* implica la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza. Dentro de esta categoría, afirma Shulman, se incluye las formas más sutiles de representación, de analogías, de definiciones, de explicaciones y demostraciones, también incluye la comprensión de aquello que facilita o dificulta el aprendizaje de un tema específico, es decir, el profesorado debe contar con un repertorio de diversas formas de representar y formular un tema para ser aprendido.

Siguiendo a Shulman sobre los componentes del PCK, es el conocimiento de las formas más efectivas de representación y formulación del contenido, de manera que este puede ser comprensible para otros. También propuso, que era dicha categoría la que distinguía al pedagogo del especialista en el contenido, ya que este era el conocimiento específico formado en la intersección del contenido y la pedagogía.

Lo que hace interesante al CPK, es su caracterización como un conocimiento propio del profesorado en su labor de enseñanza, y de su papel valioso dentro de la configuración del conocimiento profesional del profesorado.

En el MTSK se realiza una inclusión de los aspectos del PCK reconociendo la importancia del conocimiento del profesorado desde el punto de vista de la enseñanza, del aprendizaje y de los estándares de aprendizaje que se espera o se pretende alcanzar con el estudiante.

Este dominio dentro del modelo MTSK se denomina *conocimiento didáctico del contenido*, el cual está conformado por varios subdominios donde el aprendizaje y enseñanza está condicionado por el contenido matemático.

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT).

Es el conocimiento que tiene el profesorado sobre cómo el contenido matemático está condicionado por la enseñanza. Este conocimiento puede fundamentarse en teorías tomadas de la investigación en educación matemática o en la experiencia personal y la reflexión de la propia práctica (Carrillo et al, 2018). Existen elementos que se relacionan con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, Brommer (1994) da relevancia a la relación entre el contenido curricular y el proceso de enseñanza-aprendizaje, la que puede plasmarse en el aula de clase.

Como mencionan Bosch y Gascón (2001), la decisión de elegir una determinada representación, recurso, material, formas de instrucción o secuencia para trabajar un determinado contenido, demanda del profesorado especial atención en el potencial que tienen para ser usados en la enseñanza, considerando si sus características son las ideales para abordar el contenido matemático, si le es funcional, si su uso es pertinente o si existen otros posibilidades que pudieran serle de más utilidad.

Los componentes del KTM incluye el conocimiento del profesor en cuanto a teorías de la enseñanza de las matemáticas; recursos didácticos; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Ahora se describen las categorías que hacen parte del KTM

Teorías de Enseñanza de las Matemáticas. En la categoría de las teorías de enseñanza de las matemáticas, se tienen aquellas de carácter institucional, las cuales tienen el propósito de aportar elementos teóricos en la enseñanza de las matemáticas. Este es un conocimiento que el profesor posee de las teorías propias de la educación matemática, que se fundamentan en la investigación o producto de la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula (Muñoz-Catalán. et al. 2015).

En cuanto a las teorías de corte personal de enseñanza de la matemática, son producto de su conocimiento práctico, construido a través del proceso de enseñanza y de la reflexión personal como consecuencia de su experiencia laboral. Estas teorías personales pueden ser muy similares con teorías institucionales, además, el profesor puede adaptar diferentes teorías personales e institucionales, dependiendo de la actividad matemática de enseñanza que realice en el aula.

De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008), estas teorías condicionan la actuación del profesor y el uso que hace del conocimiento.

Recursos Didácticos (Físico y Digitales). Es el conocimiento de recursos físicos y digitales asociados al contenido matemático a enseñar (Flores-Medrano, 2015). Esto implica un conocimiento de sus potencialidades y limitaciones asociadas a su uso en la enseñanza de un contenido matemático; los textos de estudio, el uso de software como GeoGebra, pizarras virtuales, utilizar una regla y compás para ubicar un número irracional en la recta, o de aplicaciones como Robocompás para construir la diagonal de un triángulo rectángulo.

Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos. En esta categoría se consideran aquellos elementos que manifiestan la intencionalidad de enseñanza en un tema determinado, que los profesores consideren eficaces en la enseñanza de un contenido matemático.

Esta categoría implica el conocimiento sobre la potencialidad de actividades, estrategias, técnicas o ejemplos para enseñar un contenido matemático, de la misma forma que se debe conocer sus limitaciones, dificultades o los obstáculos que deberán superarse para que estas sean exitosas. Para la enseñanza de los números irracionales, esto sería el conocimiento del profesorado sobre el manejo de los cuadrados mágicos con números irracionales, lo mismo que la espiral de Teodoro, entre otras.

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

En este subdominio se abarca el conocimiento que posee el profesorado sobre los procesos de aprendizaje matemático; cómo se aprende y se piensa los contenidos matemáticos, así como de la forma en que los alumnos interactúan con estos mismos contenidos. Su foco de atención se centra en el contenido matemático como objeto de aprendizaje (Muñoz-Catalán. et al. 2015), es decir, interesa el conocimiento relacionado con las características del aprendizaje que se origina en su interacción con el contenido matemático.

Dentro del modelos MTSK se consideran las categorías que hacen parte de este subdominio.

Teorías de Aprendizaje Asociadas a la Matemática. Es el conocimiento que tiene el profesorado sobre los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma de los contenidos. Según las fuentes de las que provienen los conocimientos de las teorías que poseen los profesores, se definen dos tipos de conocimiento de teorías, ya sean de corte personal o institucional, tanto para la matemática general o de un contenido específico. Un profesor puede conocer de manera formal o informal, una explicación del desarrollo cognitivo cuando un estudiante se enfrenta a una tarea matemática.

Fortalezas y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. En este subdominio se incluyen los conocimientos que tiene el profesorado sobre las dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje. Se considera también las potencialidades asociadas a la naturaleza de un contenido que son aprovechables para su aprendizaje, todo esto sin dejar de lado que los conocimientos están vinculados a un contexto específico en el cual se aprende matemática. En el aprendizaje de los números irracionales es común que los estudiantes presenten dificultades en la diferenciación entre racionales e irracionales, pero al mismo tiempo, esto puede ser un factor potenciador, ya que al conocer sus diferencias se puede avanzar en el conocimiento de los números reales.

Formas de Interacción de los Estudiantes con el Contenido Matemático. Se refiere al conocimiento que tiene el profesorado sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos, como de aquellos no habituales (Sosa. et al. 2013), al abordar una determinada tarea o concepto matemáticos. Es típico en este sentido que los estudiantes cuando realizan operaciones con irracionales siempre quieren llegar a un número exacto, sin comprender la naturaleza infinita de los racionales, y los más como es usar la estrategia de truncar o aproximar el número irracional.

Aspectos Emocionales del Aprendizaje de las Matemáticas. Se refiere al conocimiento que tiene el profesorado sobre las expectativas o intereses de los estudiantes con respecto a un determinado contenido, como también las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas a un contenido específico de la matemática. Al abordar el contenido de las irracionales pudiera suscitar sentimientos negativos o de rechazo por considerarlos sin sentido o difíciles de aprender.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Este subdominio contempla los conocimientos que posee el profesor sobre lo que está estipulado que el estudiante debe aprender o saber en determinado momento o nivel, es decir, los conocimientos sobre estándares de aprendizajes matemáticos esperados, entendiendo como estándares de aprendizaje el nivel de capacidad -atribuible a los estudiantes en un determinado momento o nivel escolar- para atender, construir y saber matemáticas (Montes. et al. 2014).

Se trata de un conocimiento adquirido por el profesorado a través de fuentes diversas como lo es el currículo oficial, currículos no oficiales, de asociaciones profesionales o de investigación, o procedentes de la misma experiencia del profesor. Este subdominio hace referencia a una ubicación temporal de los contenidos matemáticos que considera las siguientes categorías:

Resultados de aprendizaje esperados. Es el conocimiento que dispone el profesorado de aquellos contenidos adecuados a cada nivel escolar, adquirido de diversas fuentes.

Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado. Se refiere al conocimiento sobre la profundidad a la cual se desea llegar con un tema específico en un determinado nivel escolar.

Secuenciación de temas. Conocimiento que posee el profesorado sobre la secuenciación de contenidos matemáticos que se dan dentro de un mismo curso, o en cursos anteriores, como también en cursos posteriores.

4.4.3. Creencias y concepciones del profesor de matemáticas

En el MTSK se consideran las creencias que posee el profesor sobre la matemática, de su enseñanza y aprendizaje. Estas creencias permean el conocimiento del profesor, pero al mismo tiempo permiten comprender o situar dicho conocimiento. Al colocar en el centro del modelo las creencias, los autores buscaban relacionar dos campos de estudio, como son los conocimientos que posee de la matemática y de aquella filosofía que lo guía (Carrillo et al., 2018). Aunque es uno de los dominios menos explorados del MTSK, permite interpretar la práctica del profesorado a la luz de los aspectos que la influyen; sin embargo, este dominio no se considera en este estudio.

5. Marco Metodológico

En este capitulo se establecen las consideraciones metodológicas de la investigación, su enfoque, el tipo de investigación, sus participantes, los instrumentos de producción de datos y su proceso de validación. De esta forma se dan a conocer el proceso de la obtención de datos para la caracterización del conocimiento especializado del profesor.

5.1. Consideraciones Metodológicas

Dado que el interés de la investigación se centra en determinar los componentes del conocimiento especializado del profesorado de matemática, y teniendo en cuenta las características del fenómeno en observación y de los objetivos planteados, la metodología que mejor se adopta para su estudio es de tipo cualitativa. En coherencia con Duran (2012), en la investigación cualitativa nos acercamos a una forma de buscar conocimiento, manipularlo y aplicarlo en una realidad concreta; esto implica poner énfasis en las cualidades o características de aquello que consideramos importante, captando la realidad a través de los ojos del sujeto actuante. Para Loayza-Maturrano (2006), la investigación de tipo cualitativo se enfoca en la comprensión de los fenómenos; el cómo o por qué de este fenómeno. Recopila datos en forma de palabras, textos e imágenes, a través de entrevistas, observaciones, fotografías o revisiones de documentos. La investigación cualitativa es una mirada centrada en el análisis de los fenómenos, examinando los elementos presentes en el ambiente y vinculados a su contexto, siendo esta la indicada cuando se pretende conocer cómo los individuos perciben los sucesos y situaciones que están presentes a su alrededor y, del mismo modo, profundizar en sus observaciones, la forma de interpretarlas y sus significados particulares (Guzmán, 2021). Este tipo de investigación busca comprender de manera más profunda las tendencias o reacciones que tienen lugar dentro de un grupo humano o comunidad. Siguiendo a Guzmán, se trata de entender su realidad social, además de su estructura como origen de su comportamiento.

En la presente investigación, se busca conocer de qué manera el profesorado de matemáticas percibe subjetivamente su realidad tal como es vivida; sus ideas, conocimientos, experiencias, sentimientos, opiniones, sus motivaciones, y la forma en que las fundamenta (de la Roche, et al., 2021). De forma específica, se encamina a realizar una descripción detallada de las características del conocimiento especializado del profesorado de matemática de educación media en la enseñanza de los números irracionales. Por tal razón, al ser una visión subjetiva de un tema en particular, el enfoque de la investigación es de naturaleza cualitativa. Por ende, buscamos aproximarnos a la comprensión del conocimiento del profesorado, mediante la interpretación de los datos obtenidos, que lleva a elegir el paradigma interpretativo para este estudio (Rojas, 2014).

5.2. Diseño de la Investigación

Siendo el profesorado de matemática el protagonista central de la investigación, se busca profundizar en su conocimiento especializado, es decir, su conocimiento matemático y didáctico; comprender el conocimiento que emplea para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar tareas (Schoenfeld, 2010), lo que, a su vez, está en concordancia con la pregunta de investigación: ¿cuál es el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas en la enseñanza de los números irracionales en estudiantes de educación media? Para dar respuesta a esta pregunta, se presentan dos perspectivas: lo que se pretende observar (conocimiento especializado), y un sujeto en un contexto definido (profesorado de matemáticas enseñando números irracionales).

Como el enfoque para la investigación que se lleva a cabo es tipo cualitativa, que se orienta a la obtención de datos descriptivos a través del discurso de las personas, en este caso las y los profesores, quienes los expresan de forma hablada y escrita (Urbina, 2020), de modo tal que permitan caracterizar el conocimiento especializado desde la perspectiva del profesorado.

Para el diseño de la investigación y por las características del tema que se pretende abordar, se considera que el estudio de caso simple es el más adecuado. Como señala Alonso, (2023), en estudio de caso simple, también conocido como holístico, el investigador considera el caso como una unidad de análisis. Se utiliza cuando el caso es especial y reúne las condiciones necesarias para confirmar, contrastar o ampliar la teoría que se le aplica. Este diseño permite centrarse en el caso estudiado, evitando desviaciones en el proceso de investigación, describiendo y explicando el fenómeno estudiado. En este orden de ideas, tal fenómeno está referido a la caracterización y naturaleza del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, en la enseñanza de un contenido en particular, como lo son los números irracionales.

Como técnica utilizada en la investigación, la entrevista semiestructurada se valora como la más conveniente, ya que, a través de las respuestas emanadas del profesor, este da a conocer sus conocimientos especializados. En todo este proceso, el MTSK, que a la vez es modelo, también es una lente metodológica y herramienta que permite caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemática.

Una vez recogida la información a través de la entrevista semiestructurada, se lleva a cabo un análisis de tipo cualitativo, que permite caracterizar el conocimiento especializado del profesorado bajo el modelo MTSK, en la enseñanza de los números irracionales a estudiantes de enseñanza media.

5.3. Descripción de los Casos

5.3.1. Participantes

Como señala Li y Kaiser (2011), el profesorado de matemáticas, se considera que tienen conocimiento de la estructura de la matemática y de sus contenidos, así como la forma en que estos se relacionan entre sí. Por lo tanto, es relevante la selección de los casos, y de los criterios para la elección de los participantes, que en referencia al marco teórico y al modelo MTSK (Rojas et al., 2012), para la elección de los profesores se tienen en cuenta las siguientes características:

1. Ser profesor de matemática
2. Estar activo, desempeñando tareas docentes en una institución de educación media
3. Comprensión de los contenidos matemáticos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de las estrategias de enseñanza
4. Haber enseñado o estar enseñando el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio, es decir, los números irracionales.
5. Tiene conocimiento sobre los estudiantes.
6. Comprende los Objetivos de aprendizaje del currículum en la asignatura de matemática.
7. Mostrar interés y disposición por participar en la investigación.

Como unidad de análisis para la investigación y objeto de observación, se considera al profesor o profesora de matemáticas de educación media. En la preselección del caso, se eligieron a cuatro profesores de enseñanza media, quienes cumplen con las características establecidas para el estudio. Siguiendo los protocolos establecidos a cada uno de ellos, se le envió a una invitación indicando el objetivo de la investigación y su rol como profesores informantes. De igual modo, se envió una carta de compromiso del investigados y un consentimiento informado (Anexo 1). Uno de los profesores rechazó la invitación por motivos de tiempo y compromisos labores, y tres de ellos manifestaron su disponibilidad para proporcionar la información requerida para el desarrollo de la investigación.

Algo importante de señalar en el momento de la investigación, es la situación de pandemia que se estaba viviendo debido al contagio mundial producido por el virus COVID-19. Esto llevó a una cuarentena decretada a nivel mundial. En Chile, el 18 de marzo del 2020 el presidente de la república decretó el estado de catástrofe, razón por la cual, las clases presenciales fueron suspendidas y se pasó a la modalidad de clases virtuales online. Esto obliga a que todo contacto con los profesores objeto de la investigación, se llevó a cabo de forma virtual, a través de videoconferencias por plataforma Google Meet. En este contexto, se elaboraron los instrumentos de recolección de datos, se realizaron los procesos de validación y confiabilidad, agendando hora y fecha para la entrevista. Al llegar el momento, se realizó la entrevista a través de la plataforma Google Meet, con un formato de entrevista semiestructurada que fue grabada en tiempo real.

5.3.2. ***Participantes***

A continuación, se detalla a cada uno de los profesores y profesoras participantes en la investigación. Para resguardar su identidad solo se utilizan nombres ficticios.

Grupo de profesores participantes		
Profesora Beatriz	**Profesora Luisa**	**Profesor Camilo**
Profesora de matemáticas con 30 años de experiencia, graduada con el título de Profesor de Estado, mención en Matemáticas. Su labor docente en matemáticas la ha desarrollado en la enseñanza media, impartiendo la asignatura en los cursos de 1° a 4° medio. Su labor docente la ha llevado a cabo casi en su totalidad en el mismo liceo en el que actualmente trabaja.	Profesora de matemáticas con 15 años de experiencia, graduada con el título de Profesor de Estado, mención en Matemáticas. Su labor docente la ha realizado en diferentes instituciones de educación media, en los niveles de 1° a 4° medio. También ha dictado cursos de nivelación matemática en institutos de educación superior	Profesor de matemáticas, con 10 años de experiencia, titulado como Licenciado en Educación Básica y con postítulo en matemáticas. Su práctica profesional la ha realizado en diferentes instituciones de educación media, en los niveles de 1° a 4° medio. También ha dictado cursos de capacitación como asesor pedagógico.

5.4. Instrumento de Producción de Datos

Los elementos fundamentales en toda investigación son los datos, los procedimientos de recolección, su análisis e interpretación, consignados en un informe que da cuenta del resultado del estudio (Rojas, 2014). Para esta investigación, que busca indagar sobre el conocimiento especializado del profesorado en la enseñanza de los números irracionales, la técnica adecuada para la recolección de datos es a través de la entrevista semiestructurada.

Canales (2006), define la entrevista como una técnica que establece una relación directa entre un investigador/entrevistador y un entrevistado; es decir, una comunicación interpersonal, en la cual se establece una relación dialógica, espontánea, concentrada y de intencionalidad variable, con el propósito de obtener respuestas verbales a las interrogantes planteadas.

En cuanto al tipo de entrevista, esta es de tipo semiestructurada. Si bien se sigue una guía de preguntas planeadas centradas en el tema, su ventaja radica en la posibilidad de adaptarse al entrevistado, ofreciendo mayor flexibilidad, reduciendo los formalismos y permitiendo la participación (Díaz-Bravo, et al., 2013).

Como parte del desarrollo metodológico de la investigación, se invitó a participar a un profesor experto de nivel universitario, bajo condiciones de confidencialidad, con el fin de identificar y poner atención en aspectos relacionados con el tema de los números irracionales (concepto, estructura, evolución, propiedades entre otros). Las observaciones proporcionadas por el profesor experto sirvió como guía y punto de referencia para la construcción y validación de la entrevista, pero no fue considerado para el análisis de datos.

Como se mencionó anteriormente, la entrevista se realizó durante el periodo de pandemia del COVID-19, de forma online y sincrónica, asegurando una gran cantidad de datos para su identificación y análisis y resultados (Cisneros-Caicedo et al,. 2022),

Se realizaron entrevistas a los tres profesores de matemáticas de educación media y una entrevista a un profesor experto de nivel universitario como referente para el conocimiento de forma amplia y en profundidad de los contenidos de los números irracionales. Las preguntas de la entrevista semiestructurada se elaboraron basados en la estructura orgánica del modelo MTSK, es decir, de los dominio, subdominios y categorías (Anexo 2).

Ya cumplido los protocolos y las fechas establecidas, se realizaron las entrevistas de manera virtual, centrando el diálogo en sus conocimientos especializados tanto en el conocimiento del contenido de los irracionales, como en los conocimientos didácticos del mismo. Se permitió que los entrevistado expresaran sus propias ideas (Espinoza, G. 2020), los cuales incrementaron sus aportes.

Realizadas las entrevistas, se recolectaron los datos aportados por los profesores en la entrevista, los mismo que serán sometidos a un proceso de codificación y análisis.

5.5. Proceso de Validación de los Instrumentos de Producción de Datos

Como afirma Yacuzzi (2005), la validez de un estudio es la cualidad que lo hace creíble y da testimonio del rigor con que se realizó, implica relevancia con respecto a sus objetivos, así como coherencia lógica entre sus elementos. Por lo tanto, en la validez del instrumento de investigación, sus objetivos deben estar relacionados con la investigación, como también un marco teórico que los sustente y una recolección de datos, permitiendo valorar el contenido y la forma de cada uno de los ítems del instrumento (Escofet et al., 2016)

Para la validación del instrumento de producción de datos, se sometió al juicio de tres expertos con experiencia profesional, académica o investigativa que les permite validar el contenido del instrumento (Rodríguez, A. 2014). Cabe destacar que, en el grupo de expertos seleccionados para la validación, una de ellas es coautora del modelo MTSK, siendo este la estructura central para el desarrollo de esta investigación. Se pide a cada integrante del grupo que determinen la coherencia, pertinencia y confiabilidad del instrumento de investigación que consiste en un formato de entrevista con preguntas guiadas, basadas en los componentes del modelo MTSK.

Grupo de expertos
Solange Aranzubia Vera: Profesora de estado en matemáticas y computación, con magíster y doctorado en Ciencias mención matemática de la Universidad de Santiago de Chile.
Yuri Marcela Cano: es licenciada en matemáticas y física, con maestría en ciencias mención física y doctora en educación en la línea de matemática educativa de la Universidad de Antioquia (Colombia).
Nuria Climent Rodríguez: es licenciada en matemática y doctora en Psicopedagogía (tesis en Didáctica de la Matemática) y profesora titular de la Universidad de Huelva (España).

El instrumento de investigación fue validado por las tres expertas, las cuales emitieron su juicio, ponderado la coherencia, pertinencia y la confiabilidad del instrumento. A cada uno de estos ítems (coherencia, pertinencia, confiablidad) se le dio una valoración de ponderación máxima de 15 puntos. En la siguiente tabla se puede apreciar la ponderación de cada uno de los integrantes del grupo de expertos.

Tabla 3

Porcentaje de aceptación por validadores

VALIDADORES	COHERENCIA	PERTINENCIA	CONFIABILIDAD
Solange Aranzubia	93%	87%	87%
Yuri Cano	93%	100%	100%
Nuria Climent	73%	87%	87%

Nota: Puntaje total 15/15 correspondiente al 100%

En cuanto a la coherencia, pertinencia y confiabilidad, se considera un valor óptimo para la investigación mayor al 70%; como se observa en la tabla resumen de la validación por parte de los profesores expertos, la ponderación de cada uno de los ítems supera este valor. Por lo tanto, el juicio emitido por los expertos, se considera que el instrumento cumple con el rigor necesario para ser implementado. En cuanto a las observaciones y recomendaciones, se tomó en cuenta para ajustar el instrumento respecto a la redacción, ortografía, e intencionalidad de las preguntas. Asimismo, se realizó una revisión de las preguntas principales y auxiliares que fueron señaladas. Algunas recomendaciones fueron desestimadas, ya que no se consideran en la investigación, por ejemplo, las creencias del profesorado.

Luego de realizar las modificaciones correspondientes al instrumento, considerando lo mencionado por los expertos, el instrumento fue aplicado a las y los profesores participantes.

6. PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se da conocer la unidad de análisis del discurso, del proceso de codificación y validación de datos por expertos y los indicadores de rigurosidad del análisis de los datos.

6.1. Análisis del Contenido del Discurso

El análisis del contenido es un conjunto de procedimientos interpretativos de mensajes, textos o discursos, que tienen como objetivo elaborar y procesar datos relevantes (González-Turel, 2015). Es decir, es una forma de análisis e interpretación de fuentes documentales u otras formas diferentes de registros de datos.

El denominador común de todos estos materiales es su capacidad de acoger un contenido que, tratado de forma adecuada, permite el conocimiento de diversos aspectos y fenómenos de la vida social (Abela. 2002).

Como señala Gonzáles-Turel (2015), en datos cualitativos, se trata de un proceso de codificación abierta, en el que el texto, después de su lectura detenida, se divide en unidades de análisis. Estas unidades se comparan y se agrupan en categorías que tratan el mismo tema y se etiquetan con un código, que puede ser un término o frase que exprese el sentido del fragmento analizado.

Como lo plantea Navarrete (2011), la información cualitativa obtenida a través de las entrevistas, que, para efectos de la investigación, se llevaron a cabo entrevista de forma virtual e individual, fue grabada y posteriormente transcrita a través del procesador de texto Word, obteniendo varios documentos, que podemos denominar texto de campo. Siendo un texto en bruto, el texto de campo debe ser procesado para ser estudiado y analizado. El procesamiento de la información cualitativa es la etapa de reducción y la disposición/transformación de los datos.

Debido a la naturaleza cualitativa de los datos, y al tipo de investigación, los datos recolectados están asociados a la complejidad del estudio de relaciones interpersonales y educativas (Vanegas, 2016). Se realiza un análisis del contenido del discurso, tomando como unidad de análisis el párrafo.

Para esto, se toma la secuencia expuesta por Tójar, J. (2006), donde se siguen los siguientes pasos:

1. Análisis previo o lectura flotante
2. Preparación del material por medio de la transcripción
3. Selección de categorías
4. Codificación inicial (abierta)
5. Explotación de resultados.

Para el paso 1, se realizó una lectura general y superficial de las respuestas, que cada profesor o profesora dio a los interrogantes planteados durante la entrevista. Para el paso dos, se realiza una transcripción de datos y se ordenan en una planilla Excel. Para el paso tres, se separa o dividir el texto por párrafos, que es la unidad de análisis. Para el paso 4, se elabora una matriz de codificación teniendo en cuenta la naturaleza de los datos categorizados y alineados con el modelo MTSK.

6.2. Criterios de rigor del análisis de datos

6.2.1. Triangulación

La triangulación es un criterio que asegura el rigor de la investigación cualitativa, ya que realiza una contraposición y comparación de distintos puntos de vista hacia el objeto de estudio (Bravo y Osorio. 2017), ya sea de diferentes fuentes de información, personas, métodos o teorías.

Según Arias (2000), el objetivo de la triangulación es reducir el sesgo intrínseco de los investigadores, de la teoría o método, y de esta manera incrementar la validez de los resultados. Siguiendo a la autora, hay cuatro tipos básicos de triangulación: a) por datos; b) por investigadores; c) de forma teórica; d) triangulación metódica.

En la triangulación por investigadores, se emplean varios observadores que reducen el sesgo potencial que proviene de una sola observación particular y aumentan la confiabilidad en las observaciones.

En esta investigación, y para una mayor confiabilidad en la categorización y codificación, y por ende en sus resultados, se realizó una triangulación de investigadores, donde dos personas, de forma independiente, actúan como observadores. Una de ellas es la persona que lleva a cabo la investigación. La otra persona es externa a la investigación, profesora de matemáticas, con experiencia en educación media, y universitaria, y con grado de magíster en matemáticas.

A cada evaluador se le entregó un archivo Excel con la categorización de las entrevistas realizadas a los profesores de educación media, junto con la matriz de códigos (Anexo 3). En esta matriz también se encontraban la definición y las características de cada código; se le pide a cada uno que, según su juicio, asignen un código a cada categoría del documento entregado. Posteriormente, ya con la codificación realizada por los investigadores, se llevó a cabo una comparación entre las dos codificaciones, para determinar la concordancia y fiabilidad de los datos a través del coeficiente kappa de Cohen.

6.2.2. Coeficiente Kappa de Cohen

En cualquier estudio de investigación es muy importante la fiabilidad de los procedimientos empleados. Dentro de la fiabilidad, un aspecto relevante es la concordancia entre observadores, que hace referencia a la proporción de acuerdo entre el número de codificadores (Gordillo, 2009).

En cuanto a la naturaleza de los datos de la investigación, y para determinar su fiabilidad, se utiliza el sistema de categorías y su respectiva codificación, se toma como referencia el coeficiente de Kappa de Cohen, que se define como un estadístico de concordancia entre dos investigadores que corrige las sesgoz debidos al azar.

Para interpretar el valor del coeficiente Kappa, es de utilidad disponer de una escala de valoración, para esto, Altman (1991) propone una clasificación de los índices Kappa, donde los coeficientes van de 0 a 1, siendo 0 el valor donde hay mayor desacuerdo entre investigadores y 1 el punto de mayor acuerdo. La siguiente tabla resume los valores propuestos por Altam:

Figura 10

Interpretación del Índice Kappa (Altman, 1991)

Valor de K	*Fuerza de concordancia*
< 0,20	Pobre
0,21 – 0,40	Débil
0,41 – 0,60	Moderada
0,61 – 0,80	Buena
0,81 – 1,00	Muy buena

Para facilitar el cálculo del coeficiente de Kappa, se empleó un software específico NVIVO . El programa permite obtener el cálculo del coeficiente con una varios codificadores y un máximo de dos a veinticinco códigos. Concretamente para la investigación se tiene dos codificadores y 7 códigos. Ya en el programa, se construyó una matriz de doble entrada la cual se ingresa al programa.

Respecto a los resultados que se obtuvieron del programa, se obtuvo una tabla que en primer lugar muestra índice kappa general, luego al kappa por códigos, junto a los índices de acuerdos y desacuerdos por codificación.

A continuación, se presentan dos tablas de resultados, donde la tabla 1 corresponde a la comparación del mismo investigador en distintos momentos (Análisis de estabilidad del investigador principal respecto de la definición de las categorías y la forma como las aplica a los datos), y la tabla 2 corresponde a la comparación entre distintos observadores.

Tabla 1

Resultados Kappa no ponderado Investigador

Nombre (código)	Kappa	Acuerdo	Desacuerdo
Aprendizaje	1,00	100,00	0,00
Currículo	0,91	99,74	0,26
Dinámica matemática en aula	0,94	99,74	0,26
Enseñanza	0,98	99,74	0,26
Integración y Relación	0,92	99,48	0,52
Ideas alternativas	1,00	100,00	0,00
Saber disciplinar	0,95	99,74	0,26
Kappa no Ponderado general: 097			

En la tabla 1 se obtuvo un coeficiente Kappa con valor k = 0,97. Según la clasificación de Altman (1991), se tiene un Kappa muy bueno, lo que implica un acuerdo alto y fiable entre la codificación que realizó el investigador en dos momentos diferentes, por tanto, se concluye que la forma como codifica y comprende las categorías el investigadoes es 'estable'.

Tabla 2

Kappa diferentes Observadores

Nombre (código)	Kappa	Acuerdo	Desacuerdo
Aprendizaje	0,77	97,64	2,36
Currículo	0,50	98,95	1,05
Dinámica matemática en aula	0,36	98,16	1,83
Enseñanza	0,93	99,95	1,05
Integración y Relación	0,66	99,70	2,09
Ideas alternativas	0,00	99,48	0,52
Saber disciplinar	0,52	98,16	1,83
Kappa no ponderado general: 0,75			

En la tabla 2 se puede observar que el resultado del coeficiente kappa con valor k = 0,75, hace referencia a un nivel bueno en la clasificación de Altman (1991). Esto proporciona una mayor confianza en el acuerdo entre los codificadores al lograr un Kappa de concordancia buena, de este modo garantizando la confiabilidad en la codificación y buen manejo de datos que se ajustan a la investigación realizada y es coherente con el sistema de categorías definidas.

7. Resultados y Análisis de la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesorado al Enseñar Números Irracionales

A partir de las respuestas dadas por las y los profesores en la entrevista, y en contraste con las categorías del modelo MTSK, se organiza la información para realizar un primer acercamiento a la caracterización de los conocimientos especializados manifestados por cada uno de los participantes.

7.1. Caracterización del conocimiento especializado de la profesora Beatriz

A continuación, se identifica y caracteriza el conocimiento especializado de la profesora Beatriz, a partir de los componentes del modelo MTSK (dominios, subdominios y categorías) y en función de la información proporcionada en la entrevista semiestructurada.

7.1.1. Dominio Conocimientos Matemáticos

Conocimiento de los temas (KoT): A continuación se realiza una descripción de los conocimientos sobre los números irracionales que expresa la profesora Beatriz, considerando las siguientes categorías: fenomenología y aplicaciones, definiciones, propiedades y fundamentos, registros de representación y procedimientos.

En cuanto a la categoría de *fenomenología y aplicaciones*, la profesora hace una referencia histórica al origen de los números irracionales: "*El número irracional aparece en el año 500 antes de Cristo en la famosa escuela pitagórica*" ... "*para Pitágoras, todo estaba en función de la unidad*". En estos relatos, la profesora expresa su conocimiento sobre el origen de los irracionales, ubicándolos en un tiempo y contexto específicos. Siguiendo su relato, "empezó a construir un cuadrado de medida uno, donde quiso trazar la diagonal" ... "*uno elevado a dos, más uno elevado a dos, le daría la raíz de dos*" ... "apareció un número desconocido para los pitagóricos". La profesora da a conocer un fenómeno específico en la proveniencia de los irracionales, como es el valor de la diagonal de un triángulo rectángulo de lado uno, al utilizar el teorema de Pitágoras. Luego, ella termina su relato histórico con la leyenda trágica del discípulo Hípaso, a quien se le atribuye el descubrimiento de los irracionales. Si bien hay una referente histórico, no se hace alusión al problema central que desencadenó el conocimiento de los irracionales, como fue el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Los Pitagóricos demostraron que, entre el lado y la diagonal del cuadrado, así como la diagonal del pentágono, las cuales no tenían una unidad capaz de expresar la media de ambas mediante números enteros. Tampoco se relata la evolución histórica de los números irracionales, ni de su reconocimiento como números, ni de lo fundamental para comprender la estructura de los números reales.

En cuanto a sus aplicaciones, se hace referencia a situaciones cotidianas donde aparecen los números irracionales, como en el cálculo del volumen de una piscina, de frascos o de una caja, así como el interés en el área de la economía. En este caso la profesora hace referencia a números irracionales que hacen parte de objetos matemáticos (fórmulas), lo cual da evidencia un conocimiento de la ubicación e integración de los irracionales en la matemática. Siguiendo con las aplicaciones, la profesora contextualiza la importancia del número *pi,* para el cálculo del área o volumen de un balón de fútbol, o aplicados al hallar el volumen de frascos que contienen una medicina.

No hay referencia a otras situaciones en las cuales se puede ubicar las aplicaciones de los irracionales, como sería el cálculo de la longitud de la circunferencia, o en la construcción de estructuras cilíndricas, o esféricas. También, dentro de los números irracionales conocidos está el número Euler (e), que se utiliza para el cálculo de una capitalización continua, o del crecimiento de poblaciones en el ámbito de la biología, o en la estadística para el cálculo de probabilidades, así como su importancia en la función de densidad de una distribución normal.

Tampoco alude a otro importante número irracional, este sería Phi (Φ) o la proporción áurea usado en obras arquitectónica, en el diseño y en la fotografía, está presente también en fenómenos o elementos de la naturaleza. La proporción áurea es utilizada en el diseño y creación de objetos como tarjetas bancarias, sitios web o logotipos.

En esta categoría de fenómenos y aplicaciones de los números irracionales, la profesora posee conocimiento más cercano a la matemática escolar, que se encuentra en el currículo nacional y los textos escolares de matemáticas.

En la categoría de *definición, propiedades y fundamentos*, la profesora los define como aquellos números, "que *no se pueden escribir como una fracción de números enteros"*, ... "no *se pueden escribir de la forma a partido por b".* Esta definición de los números irracionales está basada en una de sus características, en referencia al conjunto de los números racionales, y es la definición formal que se presenta en el texto escolar oficial del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2024). También los define como números que, "*tienen infinitos decimales no periódicos*", siendo esta definición la más conocida, la de su representación en expansión decimal (León, 2014), permitiendo una definición en términos accesibles y conocidos. En esta categoría no hay referencia a definiciones teóricas de los números irracionales, que den razón de un conocimiento más profundo, más allá de las matemáticas escolares, por ejemplo, vía cortaduras de Dedekind o de la convergencia de sucesiones fundamentales utilizadas por Gregor Cantor, (Ñañez y Pineda. 2020); definiciones que a partir de un proceso riguroso dieron formalización a los números reales como un sistema numérico, y como consecuencia, lograron también un reconocimiento de los números irracionales como verdaderos números.

En cuanto a *propiedades y fundamentos* en los números irracionales, podemos ubicar la referencia que hace la profesora sobre las operaciones que se pueden realizar en los números irracionales, "*las operaciones las podemos hacer todas*", en referencia a las operaciones aritméticas, mencionas de forma particular la suma y la resta. Asimismo, fundamenta los resultados que se pueden obtener al operar números racionales con números irracionales, "*si yo sumo un número racional con un irracional me va a dar un irracional*", denotando conocimiento en las características de los resultados en operar con estos números.

En esta misma línea, la profesora señala "*podemos aplicar la propiedad conmutativa, propiedad asociativa, distributiva en cuanto a la multiplicación, a la adición* ", señala "*que si sumo un número irracional me va a dar un número irracional*"... "*a veces no sale un número irracional, sale un número racional*". Esto muestra un conocimiento de las características y propiedades de los irracionales como conjunto numérico. La profesora sigue haciendo referencia a los números irracionales en cuanto a generalidades como es la priorización de la jerarquía de las operaciones, que le son comunes a las operaciones con números.

Llama la atención la referencia que realiza la profesora sobre los números irracionales que, "*también podemos decir que son densos*", que entre "*dos números va a haber un número irracional*" y también que es un "*conjunto infinito*". Esto alude a las propiedades algebraicas del conjunto de los números irracionales, donde son densos en el conjunto de los números reales (León. 2014). También hace referencia a los irracionales "*no tienen inicio ni final, es un conjunto infinito*", características fundamentales en los irracionales.

Sobre los *registros de representación*, la profesora refiere que los números irracionales se pueden representar como números decimales infinitos no periódicos, que no se pueden expresar de la forma *a* partido por *b*. Esto evidencia una representación de los irracionales de forma verbal y literal. También, su representación geométrica cuando alude que en la recta numérica hace construcción con regla y compás trazando su diagonal. Si bien la profesora alude a varias representaciones, estas corresponden a las representaciones que se dan en los textos oficiales del Ministerio de Educación en el texto de matemáticas para segundo medio. Igualmente, a los números irracionales se les puede representar como conjunto numérico por contracción, o a través de gráfico de conjuntos, o de símbolos matemáticos, también con letras mayúscula: se tiene en este mismo orden la representación teórica como sucesiones convergentes, o como conjunto de cortaduras de la recta numérica, también como descenso infinito de forma geométrica de la construcción de un triángulo isósceles a partir de un triángulo rectángulo. En este caso son limitadas las representaciones que da a conocer la profesora, las cuales corresponden a las que se plantea de forma tradicional en la matemática escolar.

Con relación a los *procedimientos*, la profesora se apoya en la representación gráfica de un cuadrado para abordar la temática de los números irracionales "*vamos a construir en la recta real un cuadrado de lado uno*", a partir de la representación gráfica, "*con regla y compás*", y con el apoyo del teorema de Pitágoras, halla el valor de su diagonal, y de esta forma llega al valor raíz cuadrada de dos. Igualmente refiere el uso de la calculadora para mostrar cifras decimales las cuales va a depender de la configuración de la calculadora en cuanto a cifras decimales, también se puede catalogar como procedimiento alternativo el uso de la calculadora para hallar el valor de un numero irracional.

Asimismo, hace referencia a que todas las operaciones se pueden realizar en los números irracionales, así como de las características de los resultados de estas operaciones cuando refiere que no siempre da un número irracional. Igualmente, menciona la racionalización que se aplica en fracciones con denominador irracional. Siguiendo en lo procedimental, la profesora hace mención de la jerarquía de las operaciones "*yo, por ejemplo, primero resuelve el paréntesis, la potencia, la raíz…*" de "*izquierda a derecha*". Esto lo hace desde una forma general y estructurada, lo mismo que al planteamiento de resolución de problemas y desarrollo de ejercicios, lo cual son afines al tratamiento de los números irracionales, de suma y resta que se pueden realizar con irracionales, lo mismo que la racionalización, todo esto enmarcado desde la explicación a través de ejemplos.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): A continuación se describen aquellas conexiones que realiza la profesora de forma interconceptual de la matemática escolar, de forma progresiva como regresiva, con relación a los números irracionales.

En cuanto a las *conexiones de complejización*, relata ejemplos en cuanto a la vinculación de los números irracionales con temas como logaritmos, trigonometría y geometría, en los cursos de tercero y cuarto medio. Hay una referencia en cuanto a los números reales "*está formado por el conjunto de los números racionales y los números irracionales*", de ahí que los números irracionales sean parte de un conjunto más extenso como son los reales.

En las *conexiones de simplificación,* no hay una conexión explícita, sólo hay indicios al mencionar que el primer acercamiento que tienen los alumnos con los números irracionales "*sabemos que en séptimo y octavo año los estudiantes ya tienen un acceso a la noción de número irracional*", esto haciendo referencia, a que en séptimo básico, es donde los estudiantes conocen *pi*, en el tema de circunferencia y la relación con el diámetro, luego alude a que "*en primero medio hay un reconocimiento un poquito más de la existencia del número irracional*", pero no hay una conexión específica intraconceptual. Según estos indicios se puede dar a entender la importancia de *pi* en el perímetro y área de sectores circulares, y en el área y volumen de un cono, que son temas que se dan en primero medio e involucra a los números irracionales.

En *conexiones transversales* la profesora no hace referencia explícita entre contenidos matemáticos con los números irracionales, solo menciona a los números reales o al infinito.

En *conexiones auxiliares*, la profesora destaca la utilización del teorema de Pitágoras para llegar, "*a encontrar con un número que se llama irracional*". Esta referencia al teorema de Pitágoras es un ente matemático que como herramienta da a conocer el origen y existencia de los números irracionales.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): se resalta que la profesora dispone de formas de hacer y proceder en la matemática para llegar a resultados cuando trabaja en el aula con números irracionales.

En las *prácticas ligadas a la matemática en general*, la profesora hace mención de las reglas de "*jerarquización de las operaciones*", de igual forma alude al tema de la racionalización donde "*tenemos que trabajar con el conjugado del denominador*", lo mismo con los números decimales al referir que "*hay que ordenarlos respetando el lugar de la coma*", en esta línea también hace referencia a las potencias, radicales, logaritmos y a las razones trigonométricas. Todos estos temas los trata de vincular o conectar con los números irracionales, pero no en profundidad, ni relación explícita.

Referente a las *prácticas ligadas a una temática*, como aquellos conocimientos de la forma de proceder que están asociados a los números irracionales, la profesora no realiza alusión alguna a la práctica de demostración como puede ser la reducción al absurdo, o utilizar teoremas relacionados con la existencia de los números irracionales, o definir las características necesarias que permitan identificar a un número irracional, como podría ser a través de los segmentos inconmensurable. No hay referencia a prácticas ligadas a las características algebraicas, densidad o de su carácter no numerable. En cuanto a las demostraciones geométricas, la profesora sólo realiza alusión a "*representar en la pizarra para que ellos puedan visualizar*" al número irracional como lo es raíz de dos, a través de la diagonal del cuadrado de lado uno y el teorema de Pitágoras; pero ello no es suficiente para definirlo como irracional, sin una profundización en el aspecto central que es la irracionalidad, de la cual se desprende toda la práctica matemática de los números irracionales.

Otra forma de proceder en los números irracionales que la profesora pone de manifiesto es en su operatoria, aparece cuando relata que "*si yo sumo un número racional con un irracional me va a dar un irracional*", de la misma manera "*que a veces no sale un número irracional, sale un número racional*"; esto evidencia un conocimiento las características de los resultados al operar con números irracionales, como también la forma de llegar a dichos resultados.

En los procesos asociados a la resolución de problemas dentro de la práctica matemática ligada a los números irracionales, se puede mencionar algunas aplicaciones que la profesora realiza en "*situaciones cotidianas*", como en áreas o volúmenes, donde solo hay referencia a "*tenemos el número irracional pi*", como único número irracional.

7.1.2. ***Dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PKC)***

En este dominio se reconoce el conocimiento de la profesora desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje de los números irracionales, así como de los estándares de aprendizaje que se espera o se pretende que alcancen los estudiantes en el conocimiento y aplicación de los números irracionales en un nivel determinado.

Conocimiento de la enseñanza de los números irracionales (KMT): Es el conocimiento que tiene la profesora sobre recursos, materiales, analogías, ilustraciones, formas de presentar los números irracionales, y de aquellos ejemplos adecuados para su enseñanza. Se incluyen conocimientos de teorías y estrategias de la enseñanza de los números irracionales.

En el *Conocimiento de las teorías de enseñanza*, la profesora da referencias a la enseñanza del concepto de los irracionales a través del enfoque histórico, referencia ligada con su conocimiento del origen de los irracionales. También refiere utilizar la "*resolución de problemas*" ... "*a través de situaciones concretas*", lo cual es muy recurrente dentro de su discurso, como es el relato de hallar el volumen o el área de objetos, como también el volumen de los "*frasquitos de medicamento*", o el de "*resolver ejercicios completos*" para después interactuar con ellos.

No se evidencia referencias a teorías institucionales propias de la didáctica de matemática como la teoría de las situaciones didácticas, teoría antropológica de la didáctica, la socioepistemología, teoría de las representaciones semióticas, ingeniería didáctica, Apoe, u otra dentro de la didáctica de la matemática. En su discurso la profesora evidencia un manejo de teoría más personal en cuanto del manejo de situaciones problemas, de lo concreto y de aquello que le pueda ser interesante al estudiante, de forma adaptada a la matemática escolar.

En cuanto al *Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza*, la profesora no hace referencia a recursos materiales en específico para la enseñanza de los números irracionales, ella refiere la utilización de los textos oficiales del Ministerio, "*me brinda un apoyo para yo poder trabajar*" ... "*me sirve como guía*". Cabe señalar que en los textos oficiales la referencia a los números irracionales es muy acotada, dada solo en el texto de segundo medio, en el capítulo de números. También alude al uso de GeoGebra, pero solo para referirse que "*es un recurso súper importante y fácil de aprender y motivador*", pero no de un conocimiento profundo y más aplicado a la enseñanza de los números irracionales.

Referente al *Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza*, hace referencia al contexto histórico de los irracionales como estrategia de enseñanza, como la visualización a través de la representación de un número irracional en la recta numérica con regla y compás, el de realizar ejercicios de operatoria con irracionales, al teorema de Pitágoras y de la resolución de problemas aplicando los números irracionales. En esta categoría menciona la activación de conocimientos previos, la retroalimentación, y la metacognición, siendo estas de corte más de la pedagogía en general y referidas a las acciones que realiza en clase en el momento de la enseñanza.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KLFM): En este subdominio se engloba el conocimiento que posee la profesora en cuanto al cómo se aprende y piensa los contenidos, así como de la forma en que los alumnos interactúan con los números irracionales.

En el *Conocimiento de las teorías de aprendizaje*, la profesora hace referencia al modelo "*aprendizaje significativo*", pero alude desde una posutura personal relacionada con los conocimientos previos que los alumnos tienen y la adquisición de nuevos conocimientos. Esto debido a que en segundo medio los estudiantes deben llegar con alguna noción del número irracional, ya que, en séptimo y octavo grado, han tenido que trabajar con números irracionales. La profesora refiere el constructivismo como metodología que sigue para el aprendizaje, como también la resolución de problemas y la exploración de conceptos, donde los estudiantes interactúen con los números irracionales. Igualmente, la profesora hace referencia a estudiantes con distintos estilos y ritmos de aprendizaje, y saber motivar a los estudiantes en la sala, despertando su interés. Esto evidencia un conocimiento pedagógico general, amplio, y práctico, el cual adapta al aprendizaje de la matemática. Algo interesante en su discurso es la referencia que hace al error como fuentes de aprendizaje y de retroalimentación, si ser descalificador. Del mismo modo hace referencia al trabajo colaborativo, el uso material concreto (como los frasquitos), que enfoca en el aprendizaje de los números irracionales.

En el *Conocimiento de las fortalezas y dificultades*, coherente con Herrera (2011), la profesora hace referencia a dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático como lo es el manejo de la simbología, de ser "*un número con infinitos decimales*", de que la representación en la recta no es punto exacto, sino un aproximado. También dificultades asociadas al aprendizaje que complejiza la comprensión de los números irracionales, como el manejo de la operatoria con radicales y de los signos en los números. Dificultades de tipo emocional como la desmotivación, el desinterés, "*el poco compromiso hacia sus deberes escolares*", además de la creencia en los estudiantes que las matemáticas son difíciles, por lo que afecta su aprendizaje.

Algo importante es lo que refiere la profesora de la dificultad de trabajar el infinito, "*que como los chicos no entienden eso*", ya que los resultados se trabajan con números exactos, y el truncar o aproximar números con infinitos decimales suele confundirlos. También está el error epistemológico (Crespo. 2008), en cuanto el comprender el concepto de la inconmensurabilidad, origen del número irracional y el demostrar la irracionalidad, ya que esto suele ser abstracto y representa para los estudiantes obstáculo en el aprendizaje de los números irracionales.

En cuanto al *Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes* con los números irracionales no hay referencia directa, la profesora da a conocer interacciones de los estudiantes hacia las matemáticas, "*hay alumnos que reprochan las matemáticas*", tratan de evadir el tema por las dificultades y obstáculos de su aprendizaje.

En el *Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes* al abordar los números irracionales, la profesora plantea el interrogante que le manifiestan los estudiantes, "*para qué nos enseña los números irracionales si no lo vamos a ocupar*". Similar a lo que expone Herrera (2015), la profesora hace referencia a las actitudes afectivas y emocionales que actúan como resistencia hacia la actividad matemática, la cual está muy presente en los estudiantes de educación media hacia las matemáticas.

Siguiendo con los intereses y expectativas, la profesora refiere explícitamente estos sfactores, "*bueno, la poca motivación, el poco compromiso con sus quehaceres escolares*", también refiere situaciones fuera del ámbito académico "*llegan atrasados, o el chico a lo mejor su estado de ánimo*", mostrando un conocimiento que afecta de forma directa el aprendizaje de la matemática y por ende a los números irracionales.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): contempla los conocimientos que posee la profesora sobre lo que el estudiante debe aprender o saber sobre los números irracionales en determinado momento o nivel escolar,

En *Resultados de aprendizaje esperado*, en cuanto a los números irracionales a nivel escolar, la profesora refiere "*que sean capaces de realizar operaciones matemáticas con números irracionales*"... "resolver situaciones problema",... , evidenciando un conocimiento de los aprendizaje de los números irracionales que los alumnos deben manejar en los diferentes niveles, como introductoria en básica, o formal en segundo medio, o ya integrado en operaciones complejas como números reales en tercero y cuarto medio.

En cuanto al *Nivel de desarrollo conceptual o procedimental,* la profesora refiere que los estudiantes en séptimo y octavo grado conocen y trabajan con *Pi*, lo mismo que con el teorema de Pitágoras, en primero medio conocen los números decimales periódicos, y ya en segundo medio conocen y definen a un número irracional, en tercero y cuarto medio operan con números reales. Como lo describe la profesora en forma secuencial, conoce el nivel conceptual de los estudiantes desde básica hasta cuarto medio. En séptimo y octavo básico los estudiantes conocen y realizan operaciones con el número *Pi*. En segundo medio ya conocen los irracionales como conjunto y lo definen, y realizan operaciones con irracionales. En tercero y cuarto medio conocen a los irracionales como parte del conjunto de los reales, y realizan operaciones complejas con números reales

En el *Conocimiento de la secuenciación de aprendizaje,* en cuanto a los números irracionales la profesora refiere un inicio en séptimo básico con el conocimiento de *Pi*, en octavo son el teorema de Pitágoras se aumenta el conocimiento de más números irracionales, igualmente refiere que en segundo medio se introduce la definición de número irracional, y en tercero y cuarto medio se trabaja con operaciones con los números reales.

La profesora da a conocer una secuencia en el aprendizaje de los números irracionales, desde el nivel donde se empiezan a conocer, luego su formalización, para luego culminar en los números reales, de los cuales hacen parte los números irracionales, manifestando un conocimiento de la secuencia curricular de los números irracionales en la matemática escolar.

7.2. Caracterización del conocimiento especializado de la profesora Luisa

7.2.1. *Dominio Conocimiento Matemático*

A continuación, se identifica y caracteriza el conocimiento especializado de la profesora Luisa, a partir de los componentes del modelo MTSK (dominios, subdominios y categorías) y en función de la información proporcionada en la entrevista semiestructurada.

Conocimiento Matemático (KoT): A continuación se realiza una descripción de los conocimientos de los números irracionales que expresa la profesora Luisa considerando las siguientes categorías: fenomenología y aplicaciones, definiciones, propiedades y fundamentos, registro de representación y procedimientos.

En la categoría *fenomenología y aplicaciones* la profesora plantea que en los irracionales "*el origen es bien antiguo data del tiempo del señor Pitágoras*", haciendo referencia a Pitágoras como personaje de importancia, así también al cuadrado de lado uno surgiendo raíz de dos. La profesora no hace referencias a los segmentos inconmensurables, los provocan el surgimiento de los irracionales, como tampoco a su evolución o establecimiento como números, ni tampoco refiere a ellos como parte fundamental de los reales el siglo XIX.

Según Priore, et al. (2013), los profesores no consideran referentes históricos en los números irracionales en el aula, dejando de lado un gran apoyo y motivación para la enseñanza de dicho conjunto numérico; también el tiempo dedicado a su estudio es muy escaso, por lo que no hay un conocimiento profundo de la epistemología de los números irracionales.

La profesora refiere situaciones en donde aplica los números irracionales como es el caso del número pi, "*la importancia de ellos en la construcción…por ejemplo en las bajadas*", refiriéndose a las inclinaciones de las rampas en cuanto al trabajo con ángulos. Así mismo, el trabajo con Phi como número de la belleza, de la razón de la estética, aplicado al diseño de los celulares, de las tarjetas bancarias, y reflexiona: "*la pizarra debería tener la misma razón aurea*" para que sea más atractivas e interesantes. Igualmente, especifica la relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia, para dar a conocer el número *pi*, a través círculos de madera que tiene en su salón, por lo que deja claro, "*son unos señores que me acompañan siempre*", especificando las aplicaciones de los números irracionales y su presencia en la realidad.

En cuanto a *Definiciones, propiedades y sus fundamentos,* la profesora Luisa, define a los irracionales de forma puntual como un número no racional, y también con decimales infinitos que no se pueden escribir como fracción, que no están bajo una ley, que no presenta un periodo en sus cifras decimales y que no se pueden escribir como fracción. Como plantea León (2014), de forma usual los números irracionales han sido definidos a partir de su representación decimal. Crespo (2009) promueve la representación de los números irracionales como decimales infinitos no periódicos, siendo esta la representación más recurrente y práctica a la hora de definir un irracional. En el relato de Luisa no hay referencia a otras definiciones de los números irracionales, que denotan un conocimiento poco profundo en su definición, como lo son fracciones continuas, cortaduras de Dedekind o de la convergencia de sucesiones utilizados por Cantor (Ñañez y Pineda. 2020),

De la misma manera, la profesora hace referencias a que son "*algebraicamente útiles*", en cuanto a las operaciones que se pueden realizar con estos números, "*esta raíz de dos acompaña al número como en álgebra*" ... "*la raíz de dos no se puede sumar con la raíz de* *tres, queda así*". Según estas referencias, la profesora Luisa denota un conocimiento de las propiedades que cumplen los irracionales junto con su operatividad en contexto de la matemática escolar. No hay referencias a propiedades como conjunto numérico, ni a su estructura algebraica, a su densidad, o a su propiedad de no numerabilidad, como de su importancia en la conformación de los reales.

Igualmente, la profesora refiere a la forma de ubicar números irracionales en la recta numérica, tomando al número pi como referente; "*se encontraría entre el tres y el cuatro, en un lugar ahí ...y así lo posicionamos*". Esto denota un conocimiento de la forma de ubicar un número irracional a través de una aproximación por exceso o por defecto. Además, los números irracionales como pi, necesariamente se presentan de forma aproximada ya que por su naturaleza es imposible escribir todas sus cifras decimales, y darle un punto específico. Como afirma Sirotic y Zazkis (2007), existe una dualidad transparencia-opacidad, y de conflictos cognitivos que conlleva el ubicar a los irracionales en la recta numérica.

En cuanto a qué más características cumplen o se dan en los números irracionales, refiere no estar clara frente a este tema, y da una serie de generalidades que se aplican tanto a los irracionales como a cualquier otro tema de la matemática, como son las operaciones algebraicas, la jerarquía en las operaciones y de sus resultados.

En cuanto a *registros de representación* la profesora refiere a los irracionales como un número que no se pueden escribir como fracción. Aludiendo a otra forma de representación, "*Pitágoras es el clásico*", refiriéndose a su teorema y al cuadrado de lado uno y la longitud de su diagonal raíz de dos. De igual manera se remite a la representación del número pi, de la relación entre el diámetro y la circunferencia. También, representa a los irracionales como un conjunto que unido a los racionales forman los reales. Si bien estas representaciones que hace alusión a los irracionales, no hay una definición formal, estructurada desde la misma matemática, como las fracciones continuas, construcciones geométricas, a través de las cortaduras de Dedekind o de la convergencia de sucesiones fundamentales de Cantor.

En lo *procedimental*, la profesora refiere la manera de hallar el número irracional de pi y de su importancia, relacionando el diámetro y la longitud de la circunferencia, lo cual lo hace tomando círculos de madera de diferentes tamaños. Igualmente refiere a los resultados de las operaciones con irracionales, "*una raíz de dos no se puede sumar con la raíz de tres*". De igual forma se refiere a la racionalización, a las propiedades de las raíces y a los resultados al operar con números irracionales. Esto denota un conocimiento del manejo operatorio de los números irracionales y de la forma procedimental al abordarlos.

Si bien la profesora denota un conocimiento de los números irracionales, éste no es profundo, se enmarca de forma extendida hacia la parte operativa y de forma repetitiva a algunos números irracionales como *pi* y raíz de dos, concluyendo en su argumentación que con esos números, los irracionales existen. Según su discurso, su conocimiento en cuanto al tema de los números irracionales solo se remite a la matemática escolar, es decir, al contenido del currículo oficial. Para un conocimiento extendido y profundo de los irracionales, se requieren más elementos en cuanto a su génesis, epistemología, de sus características y fundamentos, y también del criterio de irracionalidad.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): A continuación se describen aquellas conexiones que realiza la profesora Luisa de los números irracionales con contenidos de otros cursos o niveles posteriores, como también anteriores.

En cuanto a *conexión de complejización*, la profesora explicita una conexión de la importancia de los números irracionales con los números reales, en donde la existencia de los irracionales junto con los racionales, conforma el conjunto de los números reales. Según Pineda y Ñañez (2020), se ha considerado que una de las nociones fundamentales de las matemáticas, corresponde al conjunto de los números reales conformado por los números racionales e irracionales. Junto a esto, la profesora realiza una conexión de los números reales en el ámbito de la matemática escolar y la educación superior, "*los comienza uno a ver en la universidad*".

Aparece una *conexión de simplificación* que ella da desde un punto de vista elemental, es la relación que establece entre la longitud de la circunferencia y su diámetro: "*yo en mi sala manejo unos círculos de madera y le hago a ellos medir con una lana, o con un hilo, o con una huincha*" para dar a conocer el número *pi*, y de su relación con el infinito. En la matemática escolar, es en séptimo básico donde los estudiantes entran en contacto con su primer número irracional el cual es pi (Crespo, 2009), de esta manera la profesora conecta a los irracionales desde un punto de vista elemental.

En *conexiones transversales,* la profesora vincula al concepto de infinito a la definición de número irracional, refiriéndose a su expresión decimal, y que caracteriza a los números irracionales.

Como *conexión auxiliar,* la profesora da a conocer su recurrencia al teorema de Pitágoras como conexión auxiliar para llegar a la raíz de dos y darlo a conocer como un número irracional. Sí bien el teorema de Pitágoras no es un tema que pertenezca a los irracionales, es un elemento auxiliar que sirve de herramienta para abordar los números irracionales.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): A continuación se resalta las formas que la profesora dispone de hacer y proceder en la matemática para llegar a resultados cuando trabaja en el aula con números irracionales

El conocimiento de la *práctica de demostrar*, lo realiza "*dentro de lo concreto*", a través de la relación que se establece entre la longitud de la circunferencia y su diámetro: "*yo en mi sala manejo unos círculos de madera y le hago a ellos medir con una lana*". De esta forma da a conocer la existencia de un numero irracional pi, con cifras decimales infinitas. El número *pi* es el más citado por la profesora, cuando hace alusión a los números irracionales, que de forma paralela es más referenciado en los textos escolares de educación básica y media. En la utilización de material concreto la profesora realiza una demostración de la existencia de un irracional, lo hace de forma práctica, in situ, evidenciando una forma de proceder, para demostrar y llegar a resultados en los irracionales.

Otra forma de proceder para demostrar, es la ubicación de un número irracional en la recta numérica, de esta forma los estudiantes puedan visualizar un número irracional. Esta forma práctica de ubicar a un irracional a través de la diagonal del cuadrado de lado uno, es muy recurrente en la matemática escolar para demostrar de forma aproximada la ubicación de un irracional como raíz de dos.

Si bien la profesora realiza alusión a una forma de demostración a través de un objeto concreto, no hay referencia a una práctica de demostración sistemática (Carrillo et al, 2018), como puede ser la reducción al absurdo, o utilizar teoremas relacionados con la existencia de los números irracionales, o definir las características necesarias que permitan identificar a un número irracional, como pueden ser los segmentos inconmensurable, su densidad o su carácter no numerable.

En la categoría del *conocimiento de la práctica de definir,* la profesora se basa en los racionales para llegar a los irracionales, también de que ellos no cumplen una ley, al referirse a los racionales como números que no se pueden escribir como fracciones. Igualmente, procede a definir los irracionales como decimales infinitos que no presentan un patrón.

Esta forma de demostrar, utilizadas por la profesora están en lineamiento con lo que describe en el plan de estudio en el currículo nacional, en cuanto a la utilización de material concreto, o el de recurrir a metáforas, o al uso de las TIC, siendo esto un complemento al desarrollo de los conceptos matemáticos.

Sobre la *práctica de resolver problemas*, la profesora hace referencia a algunas aplicaciones en, "*situaciones cotidianas*", como áreas o volúmenes, o la proporción áurea en el diseño de tarjetas bancarias. Si bien la profesora alude a algunas aplicaciones de los irracionales, no hay una referencia a situaciones específicas, ya que también menciona que los irracionales son difíciles de aplicar en la realidad, ya que la forma más común de dar respuesta a los problemas con irracionales, sus resultados se aproximan, lo cual dificultan la visualización de los irracionales, deja en claro que utilizar los irracionales lleva al desarrollo del pensamiento.

En cuanto al *lenguaje matemático*, la profesora en su discurso utiliza en mayor medida un lenguaje natural, cercano y conocido, no hay un lenguaje estructurado en manejo de los números irracionales.

La actividad matemática que desarrolla la profesora en cuanto a la forma de presentar los números irracionales, es de forma concreta, visual, como demostrar la existencia de pi, o de ubicarlos en la recta numérica, de definirlos utilizando un lenguaje natural, utilizando comparaciones o metáforas. Por tanto, su conocimiento sobre la forma de proceder en los números irracionales es poco profunda, carente de rigurosidad y formalidad; sin embargo, logra un conocimiento del domino del tema de los irracionales acorde con el ámbito escolar.

7.2.2. Dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PKC)

En este dominio se reconoce el conocimiento de la profesora desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje de los números irracionales, así como de los estándares de aprendizaje que se espera o se pretende que alcancen los estudiantes en el conocimiento y aplicación de los números irracionales.

Conocimiento de la enseñanza de los números irracionales (KMT): Es el conocimiento que tiene la profesora sobre recursos, materiales, analogías, ilustraciones, formas de presentar los números irracionales, y de aquellos ejemplos adecuados para su enseñanza. Se incluyen conocimientos de teorías y estrategias de la enseñanza de los números irracionales.

En el *Conocimiento de las teorías de enseñanza de la matemática,* la profesora no hace referencias a teorías propias de la didáctica de la matemática, ni aplicada a los números irracionales, es más de tipo personal, tomada de la experiencia: "*siempre trato de que la matemática sea empática*".

En cuanto al *Conocimiento de los recursos didácticos*, la profesora hace referencia a recursos físicos como círculos de madera, moneda para hallar el número pi, a la utilización de los textos oficiales emitidos por el Ministerio. En cuanto a recursos digitales está el uso de la calculadora, que ella manifiesta como apoyo para dar a conocer el valor de un número irracional, pero además señala las limitantes. También está GeoGebra: "*es un recurso súper importante y fácil de aprender y motivador*", pero no refiere un conocimiento profundo sobre su uso e impacto en la enseñanza de los números irracionales.

Referente al *Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza* de los números irracionales, no hay referencias explícitas hacia la enseñanza de los números irracionales, sus ideas son de corte general como la activación de conocimientos previos, reinventar nuevas estrategias, nuevas metodologías "*para que el chico logre aprendizaje significativo*". De igual modo, como estrategia está el dejarle tareas de investigación, o el de tener un staff de ejercicios extra para aquellos alumnos que desarrollan las actividades de forma rápida, como también el plantear un problema como un desafío.

La profesora comenta que se requieren conocimientos previos para la enseñanza de los números irracionales, como conocer el conjunto de los números racionales y sus características más importantes, asimismo, el manejo de sus operaciones (Crespo, 2009).

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KLFM): En este subdominio se engloba el conocimiento que posee la profesora en cuanto a cómo se aprende y piensa los contenidos de los números irracionales, así como de la forma en que los alumnos interactúan con estos mismos contenidos.

En el *Conocimiento de las teorías de aprendizaje*, la profesora refiere "*el modelo constructivista es que yo uso para trabajar*", refiriéndose a la importancia que el estudiante sea partícipe en su aprendizaje, como sería a partir de experiencias como hallar el número *pi* a través de círculos de diferente diámetro, o el visualizar a los números irracionales en situaciones cotidiana. Especifica el aprendizaje significativo, el cual profesora evoca para lograr que los estudiantes adquieran un nuevo conocimiento, basado en lo que sabe. En su discurso la profesora hace referencia que, para el aprendizaje de los irracionales, debe conocer los conjuntos anteriores como los racionales. Esto denota un conocimiento de estrategias de aprendizaje de la pedagogía general y especifica algunas ideas al interior de la matemática. También la profesora expresa un aprendizaje de los estudiantes a través de lo cotidiano, desde concreto, más que seguir un referente o una teoría, trata que el estudiante aprecie las matemáticas, que se empatice con el quehacer diario; de esta forma, según afirma la profesora, toma lo que le es interesante. Esto es una evidencia de un desarrollo de una teoría propia, emanada de la experiencia y de una combinación de ideas globales sobre teorías o de formas de enseñar que son válidas con el ejercicio profesional. De modo general, no hay una conexión entre estas teorías y el aprendizaje de los números irracionales por parte de los estudiantes.

Siguiendo con las características de aprendizaje en los estudiantes, la profesora trae a colación situaciones de orden más emotivo, "*yo tengo todo tipo de estudiante con distintos estilos y ritmos de aprendizaje*", refiere a que los profesores deben saber motivar a los chicos en la clase de matemática.

En referencia a las *Fortalezas y dificultades* que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números irracionales, no hay una asociación específica a los números irracionales, sino situaciones generales que se dan en el aprendizaje de la matemática, "*no saben manejar bien las operatoria*", y también refiere errores en aprendizajes previos, lo cual la llevan a retroceder para enseñar o corregir conocimientos anteriores. No hay referencia a fortalezas o dificultades en torno a los números irracionales, como podrían ser de origen epistemológicos, la misma naturaleza del concepto de irracional, o de tipo didáctico como puede ser su rigurosidad en las demostraciones (Crespo. 2008).

En las *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático,* la profesora refiere que los estudiantes cuestionan el aprendizaje de los números irracionales: "*para qué nos enseña los números irracionales si no lo vamos a ocupar*". Como plantea Herrera (2015), la profesora referencia una dificultad asociada a actitudes afectivas y emocionales que actúan como resistencia hacia la actividad matemática, la cual está presente en los estudiantes de educación media.

En lo que tiene que ver con *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas,* en cuanto a los números irracionales, refiere poco o escaso interés por parte de los estudiantes, llegando a cuestionar su aprendizaje, ya que según ellos no los van a ocupar. De igual manera, los estudiantes se muestran desconcertados al no poder ubicar un número irracional en la recta numérica, o de darle un valor exacto. La profesora refiere la poca motivación, el poco compromiso de los estudiantes con sus aprendizajes, llegando también a considerar su estado de ánimo. La matemática genera sentimientos de intranquilidad, miedo, inseguridad, desconcierto e incertidumbre (Gil et al. 2006), y como lo refiere la profesora, la esencia de estas emociones es dada por los contenidos, como es el caso de los números irracionales, siendo este un tema con un alto grado de dificultad para manejarlos.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): contempla los conocimientos que posee la profesora sobre lo que el estudiante debe aprender o saber sobre los números irracionales en determinado momento o nivel escolar,

En los *resultados de aprendizaje esperados* sobre los números irracionales a nivel escolar, la profesora refiere "*que sean capaces de realizar operaciones matemáticas con números irracionales*" y también "*resolver situaciones problema*", aunque en sus discurso presenta a los número irracionales en situaciones de áreas o volumen, lo cual denota un aprendizaje operacional, no hay referencia al aprendizaje de la naturaleza del número irracional, su características, su origen o su nivel de definición según el nivel escolar.

En cuanto al *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado* para los números irracionales en momento escolar, no hay referencia, solo indicios que da la profesora sobre el conocimiento de los conjuntos numéricos en un determinado nivel escolar, como es el conocimiento del conjunto de los números naturales en básica, de los enteros y racionales en primero medio, o de los reales en tercero y cuarto medio.

En cuanto a la *secuenciación de temas de los números irracionales,* la profesora refiere alguna progresión en los números irracionales: "*sabemos que en séptimo y octavo año los estudiantes ya tienen acceso a la noción de número irracionales*", en esta referencia no da a conocer cuál es este acceso, ni cómo se da el número irracional en séptimo básico, que es donde se da el primer encuentro con un número racional. Luego en primero medio "*hay un* *reconocimiento un poquito más de la existencia de la definición de número irracional*", pero sin dar más detalles de cómo es este reconocimiento, cuáles son los temas específicos en cuanto a los irracionales. Continúa su referencia segundo medio "*y ahí es donde introducimos la noción de número irracional*", pero de igual forma no da detalles de cómo es esta apropiación del concepto, de cómo se determina que se ha logrado el aprendizaje requerido en cada nivel para el número irracional. Aunque la profesora da a conocer alguna secuencia en el conocimiento de los números irracionales, no entrega detalles de cómo es la secuencia, ni qué elementos intervienen.

7.3. Caracterización del conocimiento especializado del Profesor Camilo

7.3.1. Dominio Conocimiento Matemático

A continuación, se identifica y caracteriza el conocimiento especializado del profesor Camilo, a partir de los componentes del modelo MTSK (dominios, subdominios y categorías) y en función de la información proporcionada en la entrevista semiestructurada.

Conocimiento de los Temas (KoT): para este subdominio se realiza una descripción de los conocimientos de los números irracionales que expresa el profesor Cristian considerando las siguientes categorías: fenomenología y aplicaciones, definiciones, propiedades y fundamentos, registro de representación y procedimientos.

En la categoría *fenomenología y aplicaciones*, el profesor refiere como origen de los irracionales a la escuela pitagórica y al triángulo rectángulo de lado uno, luego hace un salto de tiempo para ubicar a los irracionales en el siglo XV. En ese momento, los irracionales "*fue lo oscuro de la matemática*", dando a entender, que en este periodo los irracionales no eran aceptados como números, ya que aquello carente de precisión no podía llamarse número (Pérez y Valdez, 2020). Si bien, da a conocer algunos aspectos del origen de los números irracionales, no hay mención a las magnitudes inconmensurables, siendo este el hecho que revela la irracionalidad. En cuanto a su evolución, realiza un salto en el tiempo, para dar a conocer que los números irracionales no eran considerados como números, pero indica un momento en donde se empieza a mostrar cierta preocupación por estos números. Frente a esto, no hay referencia al momento de su formalización como números (siglo XIX), ni bajo qué circunstancia sucede, como tampoco referencias a los trabajos realizados por Dedekind o de Cantor en la fundamentación de los números irracionales.

En cuanto a sus aplicaciones, hace referencia al cálculo de áreas y volúmenes de cilindros, como también en "*todas estas figuras de cuerpos redondos*". Igual refiere su aplicación en operaciones algebraica, en uso de logaritmos y la solución de ecuaciones. Su referencia a las aplicaciones de los irracionales los vincula de forma concreta en la geometría.

En cuanto a *Definiciones, propiedades y sus fundamentos,* el profesor define a los números irracionales como aquellos números que no se puede representar de forma fraccionada, también como números infinitos, refiriendo a su representación decimal, que según León (2014), es la forma usual de definir a los números irracionales en la matemática escolar. No hay referencia a otras definiciones de tipo formal o geométrica.

En sus fundamentos, el profesor refiere la existencia de los números irracionales, como algo real, que se puede dar en lo concreto, lo cual hace a través de objetos redondos, de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, es decir, del número *Pi,* y de su importancia en temas de la geometría.

También hace referencia a las propiedades de los números irracionales como conjunto numérico; la asociatividad, conmutatividad, cerradura, de su inverso aditivo. Hace hincapié en la propiedad de cerradura, afirmando que no la cumplen, ya que, al multiplicar dos números irracionales, su resultado puede ser un número racional.

En *registros de representación,* el profesor refiere a aquellos que no se pueden representar como fracción, también como números con decimales infinitos que no cumplen un patrón. Algo que llama la atención es que refiere como registros de representación a los logaritmos, pi, raíz de dos; siendo estos números irracionales los que usualmente se utilizan para dar a conocer los números irracionales en la matemática escolar y que limitan las representaciones de los racionales. Igualmente, como representación refiere a su ubicación en la recta numérica o en geometría, por ejemplo en figuras geométricas cilíndrica o esféricas, y en la diagonal del triángulo rectángulo de lado uno, al utilizar el teorema de Pitágoras.

En su discurso, el profesor no hace referencia a representaciones formales como sería los segmentos conmensurables o las cortaduras en la recta numérica, las sucesiones convergentes o también como fracciones continuas.

En lo *procedimental*, el profesor refiere las operaciones que se puede realizar con los irracionales, a la resolución de problemas que involucran racionales y en solución de ecuaciones. Como forma práctica, refiere en el manejo de figuras geométricas, sobre todo en las que se involucre números irracionales, como es el caso de *Pi*, en el área y volumen de cuerpos cilíndricos y esféricos. En cuanto a lo procedimental, el conocimiento del profesor es más orientado a lo práctico, como la operatoria en ejercicios, resolución de problemas, lo mismo en la manipulación de material concreto, como lo son objetos con circunferencias de diferentes tamaños. No hay referentes a un conocimiento procedimental de base teórica, ni algorítmica, pero sí insiste en la forma práctica, "*siempre un ejercicio práctico que lo vayan visualizando, lo vean*".

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): A continuación se describen aquellas conexiones que realiza el profesor Camilo de los números irracionales con contenidos de cursos o niveles posteriores como también anteriores.

En cuanto a *conexión de complejización*, no hay referencias explícitas en cuanto a conexiones de complejización, sí a través de indicios: "*yo por ahí por séptimo, sexto cuando están en transformaciones de fracciones, ahí trato de hablar de los números infinitos puros*", que también se puede identificar, como conexión transversal del concepto de infinito con los irracionales. En cuanto a conexiones de simplificación, hay referencia al número pi, en el tema de circunferencia y como el primer número irracional en conocer el estudiantado. Si bien en el discurso del profesor no se evidencian conexiones de tipo elemental o forma compleja de los números irracionales, hay indicios que pueden ser interpretadas como conexiones: "*ellos se van a encontrar con estos números y tienen que trabajarlos*".

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): A continuación se resaltan las formas que el profesor dispone de hacer y proceder en la matemática para llegar a resultados cuando trabaja en el aula con números irracionales.

En cuanto al conocimiento de la *práctica de demostrar*, el profesor enfatiza la existencia de los irracionales y lo realiza de manera concreta, "*hagan girar la circunferencia y vamos marcando cuántas veces cabe el diámetro en esa circunferencia*". También se refiere al desarrollo de ejercicios donde se apliquen los irracionales, de su ubicación en la recta numérica, como forma de visualizarlos y de demostrar su existencia, "*que los chicos se den cuenta que ahí están*". En su discurso no hay referencias a demostraciones rigurosas de la existencia de los irracionales, o de la irracionalidad de un número en particular, ni tampoco de sus características o propiedades. Algo que se destaca es la referencia es el profesor manifiesta: "*Ahí los* *profesores nos encontramos con dificultades de buscar cosas concretas*", refiriéndose a los números irracionales.

En la categoría del *conocimiento de la práctica de definir*, el profesor lo hace a través de las características de ciertos números irracionales como Pi y raíz de dos. De igual modo lo hace como números con infinitos decimales sin ningún patrón. Las definiciones que el profesor refiere en su discurso son más desde lo cotidiano, desde lo común, donde se refiere a ellos como aquellos que no tienen sentido, que no se pueden ubicar, pero existen. No hay evidencia o indicios de manejar definiciones que tengan características formales.

En el conocimiento de la práctica de resolver problemas, el profesor hace referencia a llevar a situaciones concretas a los irracionales, como lo sería en situaciones de figuras circulares y esféricas. De igual forma, como lo plantea Arcos y Mena-Lorca (2018), el profesor Camilo refiere que la resolución de problemas con irracionales permite un desarrollo de un pensamiento matemático, el cual puede ayudar cuando se enfrente a situaciones complejas.

En cuanto al *lenguaje matemático*, el profesor se refiere a los irracionales desde un lenguaje natural y cotidiano, no se evidencia el uso de símbolos o construcciones propias de la matemática.

7.3.2. Dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PKC)

En este dominio se reconoce el conocimiento del profesor Camilo desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje de los números irracionales, así como de los estándares de aprendizaje que se espera o se pretende que alcancen los estudiantes en el conocimiento y aplicación de los números irracionales.

Conocimiento de la enseñanza de los números irracionales (KMT): Es el conocimiento que tiene el profesor sobre teorías y estrategias en la enseñanza de los números irracionales, como también de recursos, materiales, analogías, ilustraciones, formas de presentar y de aquellos ejemplos adecuados para su enseñanza.

En el *Conocimiento de las teorías de enseñanza de la matemática,* el profesor no refiere teorías formales de la enseñanza de la matemática, sino desde la experiencia: "*yo trato de que ellos vayan indagando, analizando*", y también de las orientaciones oficiales del Ministerio, como son conocimientos previos, la utilización de material concreto y, problemas reales y contextualización (MINEDUC, 2013)

En cuanto al *Conocimiento de los recursos didácticos*, el profesor refiere utilizar material concreto como frascos, tapas y otros, para dar a conocer la existencia de Pi. De la misma forma refiere a utilizar el set de geometría y los textos oficiales. En cuanto a recursos digitales, menciona el empleo del software GeoGebra, aunque no especifica en qué forma lo utiliza para la enseñanza de los números irracionales.

Referente al *Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza*, hace referencia a utilizar material concreto para que los estudiantes relacionen los irracionales con la realidad. De igual manera, hace énfasis en los conocimientos que han adquirido los estudiantes: "*hacemos un recorrido primeramente por todo lo que vio en los cursos anteriores*". Según Morales (2009), los profesores considerando las estructuras anteriores que el estudiante dispone, le permite diseñar y propiciar situaciones son nuevos significados del objeto, permitiendo una construcción personal y social del conocimiento. En este sentido el profesor Camilo refiere rescatar lo que los estudiantes traen para darles formalidad y luego aplicar estos conocimientos para la resolución de problemas.

.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KLFM): En este subdominio se engloba el conocimiento que posee el profesor en cuanto a cómo se aprende y piensa los contenidos de los números irracionales, así como de la forma en que los alumnos interactúan con estos mismos contenidos.

En el *Conocimiento de las teorías de aprendizaje*, el profesor no hace referencia a una teoría formal de la didáctica de la matemática en cuanto al aprendizaje, lo que refiere es más desde su experiencia y las orientaciones formales del Ministerio, como son los aprendizajes previos, el aprendizaje significativo, uso de material concreto y de la participación del estudiante: "*trato de que ellos vayan descubriendo, que vayan generando el concepto*".

En referencia a las *Fortalezas y dificultades* que presentan los estudiantes, el profesor refiere a la dificultad que se les presenta para comprender el número irracional, ya sea por ser un concepto abstracto, por su inconmensurabilidad, o por estar ligado al infinito. En esto el profesor da a conocer que los estudiantes cuestionan el hecho de que algo que no es exacto pueda ubicarse en la recta numérica, "*entonces ahí genera bastante problema en el estudiante*", "*no es concreto este número*". Como señalan Scaglia (2000), Mirotic y Zazkis (2007), la ubicación de un número irracional en la recta numérica plantea a los estudiantes conflictos cognitivos, difícil de gestionar. Estas dificultades producen en los estudiantes poco interés en el aprendizaje de los irracionales.

En lo que tiene que ver con *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas,* el número irracional les genera conflicto cognitivo, específicamente la frustración en cuanto a su ubicación exacta en la recta: *"¿dónde colocamos este número?*",. De igual manera, el profesor continúa afirmando que a los estudiantes los irracionales no les genera sentido, no los toman en cuenta, y aún más, no logran visualizarlos en la realidad, su utilidad o dónde se van a ocuparlos, llevando a una confusión y desinterés por los números irracionales (Crespo el al., 2008). La irracionalidad es una característica que carece de significado para los estudiantes, provocando desinterés por su aprendizaje.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): contempla los conocimientos que posee el profesor sobre lo que el estudiante debe aprender o saber sobre los números irracionales en determinado momento o nivel escolar,

En los resultados *de aprendizaje esperados,* el profesor realiza una identificación de los aprendizajes de los irracionales, comenzando en la educación básica con la circunferencia y el número pi, para continuar con el teorema de Pitágoras en geometría, específicamente con raíz de dos. En este sentido, el profesor manifiesta que el estudiante debe llegar a realizar operaciones con números irracionales y resolver problemas que los involucren: "*ejercicio con raíces, cómo descomponer, cómo desarmar esta raíz, cómo trabajarla*". Estos resultados de aprendizaje que el profesor refiere están muy relacionados con los indicadores de evaluación de la matemática consignados en el currículo nacional para el tema de los irracionales.

En cuanto al *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*, en cuanto al aprendizaje de los irracionales, el profesor Camilo refiere que los estudiantes deben llegar a desarrollar un pensamiento abstracto, a realizar análisis, a evaluar, es decir, al desarrollo de habilidades superiores. También que desarrollen ejercicios, que resuelvan problemas y comuniquen lo que aprenden, que logren exponer, que den a conocer la forma como lo realizaron.

En cuanto a la *secuenciación de temas,* el profesor tiene conocimiento la secuencia de los números irracionales que se dan la matemática escolar, donde refiere a que comienzan en la educación básica de forma elemental, para ya en segundo medio su estudio es formal, concluyendo con un manejo de operaciones con irracionales en tercero y cuarto medio. Esto también demuestra el conocimiento del profesor del currículo oficial y de la secuencia de aprendizaje de los números irracionales.

8. Conclusiones

Con el fin de alcanzar el objetivo de la investigación, que buscaba caracterizar el conocimiento especializado del profesorado de matemática en la enseñanza de números irracionales a estudiantes de educación media, se eligieron tres profesores de matemática a quienes se les llevó a cabo una entrevista, y mediante sus respuestas se develó los componentes de su conocimiento especializado en la enseñanza de números irracionales. Para este fin, se realizó una identificación y análisis de los componentes presentes en su discurso, y a través del modelo MTSK.

A continuación, se realiza una síntesis de la caracterización de los conocimientos de los tres profesores, a partir de sus respuestas, organizada en torno a los subdominios dentro del MTSK.

En cuanto al Conocimiento Matemático:

Conocimiento de los temas (KoT): se identifica por parte de las y los profesores la ubicación del origen de los irracionales referenciada al personaje de Pitágoras y al teorema que lleva su nombre. En cuanto a definiciones, coinciden en que no se pueden representar como fracción, basándose en los números racionales, y en su expansión decimal. En el manejo de propiedades y sus fundamentos, lo realizan desde lo práctico y cotidiano, recurriendo a la operatoria de los irracionales y a la particularidad de números como pi y raíz cuadrada de dos, que son los más conocidos entre los irracionales, como también algunos rasgos de su estructura algebraica. En el aspecto procedimental asociado a los irracionales, está el manejo de raíces en operaciones, la radicación y de números como pi aplicado a fórmulas. En cuanto a su representación, hacen referencia a un número no racional, que no se puede escribir como fracción, con una expansión decimal infinita que no cumple con un patrón. De igual manera, relacionan a los racionales con el teorema de Pitágoras, la diagonal del rectángulo de lado uno, el número pi, un trazo en la recta numérica . En cuanto a fenomenología, los irracionales los vinculan con geometría, a volúmenes, áreas, así como a la circunferencia.

Conocimientos de la estructura matemática (KSM): en las relaciones de complejización, los profesores lo hacen considerando a los irracionales como parte del conjunto de los reales. Para conexiones de simplificación aluden a la existencia del número *Pi*, al relacionar la longitud de la circunferencia y su diámetro. Como conexión transversal, lo relacionan con el concepto de infinito y, como conexión auxiliar, está el uso del teorema de Pitágoras para llegar a un número irracional.

Conocimiento de la práctica Matemática (KPM): En cuanto a la forma de hacer y proceder de los profesores, no hay rigurosidad para demostrar la irracionalidad, pero sí de forma práctica a través de objetos concretos. Para la existencia de los irracionales lo hacen a de forma práctica hallando el número *Pi,* de igual forma, a través del teorema de Pitágoras con la raíz de dos. Los profesores tratan de visualizar a lo irracionales a través de ubicarlos de forma aproximada en la recta numérica, utilizan un lenguaje natural y casual, buscando hacer de los irracionales un objeto matemático más cercano para la comprensión de los estudiantes. Igualmente, los profesores evidencian un conocimiento de las operaciones con número irracionales, y también aplicados en la resolución de problemas en aula, de forma amplia a la geometría.

En cuanto al Conocimiento Didáctico del Contenido:

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT): para esta categoría los profesores no hacen referencia a teorías formales de la educación matemática en la enseñanza aplicada a los irracionales. Sí expresan estrategias generales desde la experiencia y sus conocimientos, como también desde la pedagogía, que configuran como teorías personales. En este punto, referencian la activación de conocimientos previos, el uso de material concreto, la participación activa y el desarrollo operacional. Como recursos está el uso de textos escolares, de manipulación de objetos, del software GeoGebra y el uso de la calculadora. En cuanto a estrategias referidas al contenido, realizan un recorrido por los conjuntos numéricos, refiriendo la importancia de la activación de conocimiento de las propiedades de los conjuntos, el de pertenencia a un conjunto, la ejercitación de operaciones con irracionales y dar solución a problemas contextualizados. Proponen también involucrar a sus estudiantes, hacerlos participe de las actividades, que aprecien las matemáticas y de hacerlas mas cercanas a ellos y ellas.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM): Para la enseñanza, las y los profesores refieren al constructivismo y al aprendizaje significativo como teorías de aprendizaje, pero se refieren a ellas en términos cotidianos y generales, sin explicitar las maneras concretas como se conectan con el aprendizaje de los números irracionales. En general, se se basan en la experiencia y las directrices del currículo Nacional. Del mismo modo, manifiestan que los irracionales no son representativos para los estudiantes, llegando a rechazar su aprendizaje, por lo abstracto del concepto, por no ser exactos. Además, reportan la dificultad en ubicarlos en la recta numérica. Como lo manifiestan los profesores, esto produce en los estudiantes sentimientos de rechazo de los irracionales y un desdén por su aprendizaje.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMSL): se evidencia que los profesores conocen los contenidos de los números irracionales que deben ser aprendidos en cada nivel escolar, tanto de la básica como de la media. Conocimiento adquirido a través de los programas de estudio del Ministerio de Educación y del contenido del Currículo Nacional. En cuanto a su desarrollo conceptual, manifiesta que se logra cuando el estudiante realiza operatoria con números irracionales y la resolución de problemas. En cuanto a la secuencia del aprendizaje de los irracionales, las y los profesores conocen que esta comienza en la educación básica con el número pi, luego en la educación media su momento de encuentro se da en segundo medio; y en tercero y cuarto medio, se profundiza en el manejo de operaciones que involucren a los números irracionales.

En síntesis, a la luz de los resultados se puede observar que el profesorado posee un conocimiento matemático de los números irracionales, no de forma profunda y amplia, pero sí alineada con la matemática escolar, en cuanto contenidos del Currículo Nacional, lo cual les proporciona una secuencia y organización en la enseñanza y aprendizaje de los irracionales. Conocen "cuándo" surge el número irracional, pero no "cómo" surge. Su definición la basan en su expansión decimal y en la imposibilidad de representarse como racional. Para caracterizar a los racionales se remiten a dos números irracionales como pi y raíz de dos, en torno a los cuales gira la demostración de la existencia de los racionales. También se observa un conocimiento en su operatoria, como de las características de sus resultados. Con dificultad reconocen su estructura algebraica y su importancia en la fundamentación de los números reales. Establecen conexiones entre contenidos de los irracionales de forma elemental, dificultándose establecer conexiones complejas. Tienen un conocimiento limitado de su fenomenología y con gran dificultad transfieren el conocimiento a contextos diversos, centrándose en aplicaciones de la circunferencia, área y volumen.

En el análisis del conocimiento didáctico del contenido, se observa un conocimiento propio de cada profesor y que lo caracteriza, en cuanto a la forma de gestionar los contenidos de los números irracionales y de la intencionalidad de la enseñanza; por ejemplo, utilizar material concreto para demostrar la existencia de los irracionales, visualizarlos en la recta, darles un valor aproximado. Igualmente, han logrado formar teorías personales sobre el conocimiento de la secuencia de su aprendizaje y de los indicadores de aprendizaje, la forma en que presentan los irracionales a sus estudiantes, y de utilizar recursos disponibles a su entorno.

.

De igual forma se destaca el conocimiento que poseen los profesores de las características de aprendizaje de sus estudiantes hacia lo números irracionales. En este aspecto los estudiantes consideran a los irracionales poco útiles, si sentido, considerando que no los van a utilizar, de hecho, cuestionan su aprendizaje. También lo consideran un concepto complejo de aprender por ser abstracto y no exacto, como el hecho de su infinitud. Todo esto produce expectativas de rechazo y conflicto hacia los irracionales y su aprendizaje,

Un dato que destaca es el reconocimiento por parte de las y los profesores en cuanto a la dificultad del manejo de los números irracionales para su enseñanza, por lo acotado en el currículo, sin relevancia aparente o se considera innecesario, también en ocasiones se trata de evadir su abordaje y, el tiempo dedicado a su comprensión es muy escaso.

En la caracterización del conocimiento especializado de las y los profesores, se observa que su conocimiento del contenido de los irracionales no es más de lo que matemática escolar ofrece, limitándose al contenido de los textos escolares. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, se basan en su experiencia, en el conocimiento del tema de los irracionales, de los lineamientos del Ministerio de Educación y de pedagogía en general, sin referencias a teorías o metodologías formales de la educación matemática. En el aspecto del aprendizaje, se observa un conocimiento de las características de sus estudiantes, de sus emociones y expectativas en el aprendizaje de los irracionales, más del corte de la pedagogía general, que desde un punto de la didáctica de la matemática.

Los resultados de la investigación llevan a reflexionar sobre la importancia del conocimiento del profesorado de los números irracionales de forma profunda y extensa, y con base en los resultados, se considera pertinente exponer algunas orientaciones que sean formativas o de actualización para las y los profesores, para la enseñanza de los números irracionales en la educación media.

Algo primordial que los profesores deben conocer es el enfoque histórico de los irracionales, permitiendo una comprensión más profunda y fundamentada de los números irracionales. En esto toma relevancia su origen en los inconmensurables, su relación histórica con la escuela Pitagórica y su evolución en el tiempo hasta su reconocimiento como conjunto numérico.

De igual manera, en cuanto a definiciones y representaciones, se hace necesario expandirlas más allá de la matemática escolar, en esto será clave profundizar en los trabajos que realizaron Richard Dedekind y Georg Cantor. En esta misma profundización se pueden establecer la importancia de los irracionales en la estructura que conforma y define los números reales. En el aumento del abanico de representaciones, es clave las magnitudes conmensurables e inconmensurables, base de la comprensión de la existencia de los irracionales, como también las fracciones continuas para su carácter infinito. Como forma de visualizar a los números irracionales, además de la recta numérica, se tienen las cortaduras de Dedekind, como también un preámbulo a los números reales. De igual manera, el profundizar en las propiedades de estos números y de su estructura algebraica, permite comprender su comportamiento en las operaciones con otros conjuntos numéricos. En las demostraciones de la irracionalidad, se recomienda conocer el método de reducción al absurdo, como también la demostración con el teorema fundamental de la aritmética. También de forma geométrica a través del método del descenso infinito, de los rectángulos áureos, o con la espiral de Teodoro. Como forma complementaria de la demostración de la existencia de los irracionales, se tiene el caso de *pi*, realizado a través del software GeoGebra, que determina de forma apropiada la relación entre la circunferencia y su diámetro. En cuanto a fenomenología, se recomienda profundizar y relacionar a los irracionales con la arquitectura, en la ingeniería, la matemática financiera, la criptografía, la medicina y la física cuántica. Estas aplicaciones en la vida real pueden ser interesantes y facilitadoras para la enseñanza y aprendizaje de los irracionales, más allá de las aplicaciones clásicas que trae la matemática escolar.

Con esta serie de recomendaciones que se han expuesto, no se pretende agotar la profundización en el conocimiento de los números irracionales, sino un punto de partida para el conocimiento especializado del profesor de matemática en la enseñanza de los números irracionales, dejando una puerta abierta para futura investigación bajo el lente del modelo MTSK. Además, es preciso recordar que, como este estudio se hizo desde el análisis de tres casos, sus conclusiones no buscan ser generalizables, sino que entregan pistas para seguir avanzando en el conocimientos especializado del profesorado de matemática que enseñana los números irracionales en la educación media.

Referencia Bibliográficas

Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Síntesis

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático.* Graó.

Alonso, J. C. (2003). *El estudio de caso simple: un diseño de investigación cualitativa.* Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Ciencias Políticas y Relaciones Internacionales.

Alonso, M. M. (2023). El Estudio de Casos como método de investigación cualitativa: Aproximación a su estructura, principios y especificidades. *Diversidad académica, 2*(2), 243-267.

Arcos, J. H., Borromeo-Ferri, R., & Mena-Lorca, J. J. F. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 36*(1), 99-115.

Ball, Deborah Loewenberg; Lubienski, Sarah Theule y Mewborn, Denise Spangler (2001). Research on teaching mathematics: The insolved problem of teachers, mathematical knowledge. En V. Richarson (Ed.). *Handbook of research on teaching.* (pp. 433 – 456). Macmillan.

Bravo, X. R., & Osorio, B. (2017). Criterios de calidad y rigor en la metodología cualitativa. *Gac pedagóg, 36*, 62-74.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. SträBer and B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Reidel.

Cantor, G. *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts*. 1. ed. Springer.

Carrillo, J. Montes, M y Cliiment N. (2022). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK): 10 años de camino*. Dikison

Cerón, M. C., & Cerâon, M. C. (2006). Metodologías de la investigación social. LOM ediciones.

Cisneros-Caicedo, A. J., Guevara-García, A. F., Urdánigo-Cedeño, J. J., & Garcés-Bravo, J. E. (2022). Técnicas e Instrumentos para la Recolección de Datos que apoyan a la Investigación Científica en tiempo de Pandemia. *Dominio de las Ciencias, 8*(1), 1165-1185.

Contreras, L. C., Montes, M., Climent, N., & Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista For-Mate, 3*, 7-15.

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa, 11*(41), 21-30.

De la Roche, M. M., Estupiñán, A. M. V., & Pulido, M. A. (2021). Características e importancia de la metodología cualitativa en la investigación científica. *Revista Semillas del Saber, 1*(1), 18-27.

Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Investigación en educación médica, 2*(7), 162-167.

Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista nacional de administración, 3*(1), 121-134.

Escofet, A., Folgueiras, P., Luna, E., & Palou, B. (2016). Elaboración y validación de un cuestionario para la valoración de proyectos de aprendizaje-servicio. *Revista mexicana de investigación educativa, 21*(70), 929-949.

Flores, P.; Moreno, A. (1999). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y oposiciones. *Actas de las 9ª Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Lugo.

Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas [Recurso electrónico].

González-Teruel, A. (2015). Estrategias metodológicas para la investigación del usuario en los medios sociales: análisis de contenido, teoría fundamentada y análisis del discurso. *Profesional de la Información, 24*(3), 321-328.

Gordillo, J. J. T., & Rodríguez, V. H. P. (2009). Cálculo de la fiabilidad y concordancia entre codificadores de un sistema de categorías para el estudio del foro online en e-learning. *Revista de Investigación educativa, 27*(1), 89-103.

Grajales, D. (2017). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en maestros en formación, proyectado a estudiantes de primaria de la escuela Normal Superior de la presentación de Pensilvania* (Tesis de maestría). Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Guzmán, V. (2021). El método cualitativo y su aporte a la investigación en las ciencias sociales. *Gestionar: revista de empresa y gobierno, 1*(4), 19-31.

Hernández, J. V. (2003). La construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (14).

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de investigación*. McGraw Hill.

Jiménez, B. E. J. (2009). *La Construcción De Los Números Reales De Karl Weierstrass* (Doctoral Dissertation, Universidad Del Cauca).

Li, Y., y Kaiser, G. (2011). *Experiencia en instrucción matemática: avances en la investigación y la práctica desde una perspectiva internacional*. Springer.

Llinares, S. (1998). La investigación «sobre» el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula, 10*, 153-179.

Loayza-Maturrano, E. (2006). La investigación cualitativa en educación. *Investigación educativa, 10*(18), 75-85.

Maturrano, E. F. L. (2020). La investigación cualitativa en Ciencias Humanas y Educación. Criterios para elaborar artículos científicos. *Educare Et Comunicare Revista de investigación de la Facultad de Humanidades, 8*(2), 56-66.

Morales Urbina, E. M. (2009). Los conocimientos previos y su importancia para la comprensión del lenguaje matemático en la educación superior. *Universidad, ciencia y tecnología, 13*(52), 211-222.

Navarrete, J. M. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista latinoamericana de metodología de la investigación social*, (1), 47-60.

Pérez, D. C. P., & Valdez, Y. V. N. (2020). *Desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales*. Graó

Pineda Pérez, D., & Ñañez Valdez, Y. (2018). *Intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales*. McGraw Hill

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-96). Graó.

Retana, J. F. G., & Muñoz, D. E. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14*(54).

Rojas-Gutiérrez, W. J. (2022). La relevancia de la investigación cualitativa. *Studium Veritatis, 20*(26), 79-97.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Doctoral dissertation, Universidad de granada).

Rojas, P. R., & de la Cruz, P. (2019). *El conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones* (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso).

Sayago, S. (2014). El análisis del discurso como técnica de investigación cualitativa y cuantitativa en las ciencias sociales. *Cinta de moebio*, (49), 1-10.

Schoenfeld, AH (2010). *Cómo pensamos: una teoría de la toma de decisiones orientada a objetivos y sus aplicaciones educativas*. Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14

Soriano Rodríguez, A. M. (2014). *Diseño y validación de instrumentos de medición*. McGraw Hill

Tójar Hurtado, J. C. (2006). *Investigación cualitativa: comprender y actuar*. Graó

Urbina, E. C. (2020). Investigación cualitativa. *Applied Sciences in Dentistry, 1*(3).

Valencia, M. M. A. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y educación en enfermería, 18*(1), 13-26.

Vásquez, G. E. (2020). *Caracterización Del Conocimiento Especializado Del Profesor De Matemáticas De Educación Media Sobre El Concepto De Función* (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso).

Verdejo, A. J. M., & Martínez, P. F. (2000). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales*. McGraw Hill

Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación* (No. 296). Serie Documentos de Trabajo.

ANEXOS

Se presentan los distintos documentos utilizados para asegurar el respaldo ético de la investigación, luego los documentos enviados a los expertos para la validación y finalmente las pautas de validación entregadas por los expertos junto con los comentarios realizados.

Anexo 1: Protocolos para el Cuidado Ético

FORMATO CARTA DE PRESENTACIÓN

Santiago de Chile, ______________

Sr(a). ______________

Referencia: Validación del instrumento para investigación educativa

Cordial saludo.
Mi nombre es Miguel José Niño Ríos, estudiante del Magíster en Educación Matemáticas de la Universidad Santiago de Chile. El Dr. Calos Mario Vanegas es el director de mi tesis titulada: **Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media en la enseñanza de números irracionales**, cuyo objetivo es de caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar números irracionales
Esta tesis está dividida en dos fases. En la primera fase se realizará una entrevista semiestructurada a docentes universitarios especializados en matemáticas, donde se buscará la visión que tienen sobre los contenidos que se deben enseñar sobre los números irracionales.
En la segunda fase se realizará una entrevista semiestructurada a profesores de educación media que ejerzan como profesor de matemáticas, donde se busca caracterizar el conocimiento especializado al enseñar números irracionales a estudiantes de dicho nivel.
Por su experiencia y mérito profesional en educación matemática, le invitamos a evaluar y comentar el instrumento diseñado para la segunda fase. Además del instrumento, se ha adjuntado una pauta para su evaluación. Si acepta nuestra invitación, estaremos muy agradecidos por sus observaciones y recomendaciones, las cuales esperamos recibir en el correo mignin01@gmail.com, en lo posible, antes del 20 de diciembre del año en curso.
Se despide respetuosamente.

Miguel José Niño Ríos
Profesor de Educación Media
Mención Matemática
Estudiante Magister en Educación Matemáticas
Universidad de Santiago de Chile

Elementos Básicos para comprender la Investigación

Preguntas de Investigación:

¿Cuál es el conocimiento especializado del profesor de matemática en la enseñanza de números irracionales en estudiantes de educación media?

Objetivo general de la Investigación

Caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemática de educación media en la enseñanza de los números irracionales.

Objetivos específicos de la investigación

1. Identificar los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemática de enseñanza media al enseñar números irracionales.
2. Analizar los componentes del conocimiento especializado que utiliza el profesorado de matemática para la enseñanza de los números irracionales a estudiantes de educación media.

CARTA DE COMPROMISO DE INVESTIGADOR

Yo Miguel José Niño Ríos, investigador del proyecto de investigación "Comprensión del conocimiento especializado que manifiestan el profesor de matemáticas en su rol docente, en la construcción del concepto de número irracional en estudiantes de educación media", mediante la suscripción del presente documento me comprometo a:

1. Declarar mis potenciales conflictos de interés ante el comité de ética de investigación.
2. Reportar por escrito al Comité cualquier desviación y/o modificación ya sea en el proyecto de investigación o en el proceso de consentimiento informado y suspender la ejecución del proyecto hasta la evaluación y pronunciamiento del Comité.
3. Elaborar informes de seguimiento y reportarlos al comité.
4. Elaborar el informe final al término del estudio y reportarlo al comité
5. Comunicar al Comité la suspensión del estudio en curso, enviando un informe con los resultados obtenidos, las razones de la suspensión y el programa de acción en relación con los sujetos participantes.
6. Garantizar que el procedimiento del consentimiento informado se lleve a cabo de tal forma que promueva la autonomía del sujeto, asegurándose que este logró entender la información respecto de la investigación, sus riesgos y probables beneficios.
7. Tomar a su cargo un número razonable de casos que no le impida asumir la responsabilidad del estudio en forma total.
8. Garantizar que los datos entregados sean íntegros y confiables, cumpliendo con el protocolo autorizado.
9. Custodiar los datos personales recopilados, resguardar la confidencialidad de los datos conocidos, mantener la más estricta reserva sobre el contenido de los datos como de los nombres de los participantes, ni ninguna otra información que permita individualizarlos, comprometiéndome a anonimizar esta información. Asimismo, me comprometo a eliminar estos datos una vez que concluya la investigación, pudiendo almacenarlos por un período máximo de 5 años. Finalmente, me comprometo a que en ningún caso las muestras y los datos recopilados serán utilizados para fines o proyectos diversos a los que fueron extraídos, sin previa autorización del Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.
10. Para el caso de investigación que utilizan fármacos/dispositivos médicos –clínicos–, debe obtener la autorización del Instituto de Salud Pública para su uso provisional, antes de ejecutar el estudio.
11. Debe informar al Comité Ético Científico USACH de cualquier nueva información que pueda afectar la seguridad de los pacientes o el debido desarrollo del proyecto.
12. Comunicar los eventos adversos en la forma más rápida al Comité de Ética, Instituto de Salud Pública y Patrocinador del proyecto.
    a. Notificar desde el momento que se da el evento hasta las 72 horas de ocurridos, los eventos adversos serios e inesperados que hayan ocurrido en pacientes de este centro.
    b. Notificar oportunamente de otros eventos no anticipados que potencialmente pongan en riesgo a los sujetos participantes del estudio o a los investigadores.

MIGUEL JOSÉ NIÑO RÍOS
Investigador Responsable

Miguel Niño

FIRMA

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Entrevista dirigida a docente de matemáticas que se desempeñan en educación media

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

1.- Título: Conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media en la enseñanza de los números irracionales

2.- Objetivo de la investigación: Caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemática de educación media en la enseñanza de los números irracionales.

3.- Su participación consistirá en una entrevista individual, lo que ocupará aproximadamente 30 minutos.

4.- Riesgos y beneficios: La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para el participante. En caso de que existan riesgos, estos podrían ser: divulgación de información por fuera del ámbito de la investigación. El investigador se compromete a minimizar los eventuales riesgos.
Esta investigación no implica beneficios para los participantes.

5.- Tipo de información que busca la investigación: A modo de ejemplo, el tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como:

6.- Participación Voluntaria: La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

7.- Derecho a retirarse de la investigación: Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al investigador por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo afecten.

8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación: Los resultados de este estudio, serán presentados ante el comité de titulación.

Si el participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

9.- Derecho al resguardo de la identidad del participante, de la información compartida y de sus datos personales.

Anonimato del participante: El participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

Confidencialidad del participante: Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

Derecho a la imagen del participante: En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

10.- Custodio de los Datos: El investigador responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

11.- Respecto de publicaciones: Se solicitará autorización al participante respecto de que la información aportada aparezca en artículos o libros que se podrían publicar como resultado de esta investigación. Igualmente se solicitará su autorización para que su nombre figure en la investigación. En el caso que el participante acepte aparecer con su identidad en la publicación, el investigador responsable, de manera previa enviará para su revisión la información a publicar. El participante podrá realizar las correcciones y/u observaciones que estime pertinentes en lo que respecta a los datos por él aportados.

12.- Compensaciones: En el caso que corresponda, el investigador deberá compensar o retribuir transporte, colación u otros gastos extraordinarios derivados de la participación del sujeto en el estudio.

13.-Investigador responsable: en caso de consultas, se puede dirigir a Miguel José Niño Ríos, Fono: +56 957344825, E-mail: mignin01@gmail.com

14.- Identificación del Comité de Ética Institucional: En caso de reclamos, se puede dirigir al Dr. Claudio Martínez Fernández, Presidente (I) del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. Email: comitedeetica@usach.cl

15.- Ejemplares: Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el investigador responsable y uno para el participante.

PARTICIPANTE:

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEIDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERISTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO ______ ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS ______ DESEO QUE EL INVESTIGADORES ME ENVÍE LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI ______ NO ______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: ______________________________	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO ______ NO ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS ______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE Miguel José Niño Ríos FIRMA Miguel Nino **FECHA** 13-07-2020	**PARTICIPANTE** NOMBRE FIRMA

Anexo 2 Instrumento de recolección de datos

Formato Entrevista Semiestructurada a Profesor de Matemática de Educación Media

Dimensiones (Aspectos a Indagar)	Objetivos específicos del instrumento	Preguntas Principales	Preguntas Auxiliares
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	Identificar el conocimiento disciplinar que posee el profesor de matemáticas de educación media sobre los números irracionales	¿Qué recuerda sobre el origen de los números irracionales? ¿Cómo se define el conjunto de los números irracionales? ¿Qué propiedades se les atribuyen a los números irracionales? ¿Cómo define la inconmensurabilidad en el conjunto de los números irracionales? ¿Se les puede considerar como un cuerpo conmutativo con las operaciones de adición y multiplicación? ¿Qué formas de representación conoce de los números irracionales? ¿Cuáles conocimientos son los más relevantes al momento de enseñar los números irracionales a estudiantes de educación media?	¿Cómo se conforma el conjunto de los números irracionales? ¿Cómo se ordenan y aproximan los números irracionales?
	Determinar conocimiento que posee el profesor de matemáticas de educación media sobre la estructura conceptual de los números irracionales desde la perspectiva de su integración con estructuras complejas como	¿Cuáles con los conocimientos base para abordar los números irracionales? ¿Cuál es la estructura en la matemática que sostiene los números irracionales? ¿Cuáles son las definiciones que conoce de los números irracionales? ¿Qué relaciones y diferencias hay entre ellas?	¿Qué relación existe entre los números irracionales y el conjunto de los números reales? ¿Qué relación hay entre los números irracionales y los números racionales? ¿Cómo se relaciona el concepto de infinito con el de número irracional? ¿Cómo éstos se integran a la

	estructuras simplificadas		matemática como cuerpo disciplinar?
	Comprender los modos de proceder del profesor de matemáticas de educación media para desarrollar la argumentación lógica de los números irracionales	¿Cuáles son las demostraciones matemáticas que le parecen fundamentales para comprender los números irracionales? ¿Qué secuencia utiliza para introducir a sus alumnos al concepto de número irracional?	¿Cómo prueba la existencia de los números irracionales? ¿Cómo demuestra que un número es o no irracional? ¿Cómo demuestra que existen por lo menos un número irracional entre dos números racionales?
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	Identificar el conocimiento que posee el profesor de matemáticas de educación media sobre las características asociadas al aprendizaje de los números irracionales	¿Piensas que es necesario que los alumnos de Educación Media conozcan los números irracionales? ¿Conoce cuáles son los errores, obstáculos y dificultades que presentan sus estudiantes al momento de abordar los números irracionales? ¿Cuáles son las preconcepciones, creencias u otra característica de los estudiantes que influyen para el aprendizaje de los números irracionales? ¿Qué instrumentos o recursos utiliza para el aprendizaje de los números irracionales? ¿Cuáles son sus potencialidades y sus limitaciones? ¿Qué aspectos, rasgos o características de sus alumnos tiene en cuenta al momento de enseñar los números irracionales? ¿Conoce cuáles son los procesos o estrategias utilizadas por los estudiantes al momento de aprender los números irracionales?	¿Qué tanto deben aprender los alumnos de educación media acerca de los números irracionales? ¿Qué teorías cognitivas considera que son las más adecuadas para el aprendizaje de los números irracionales? ¿Qué vocabulario utilizan los estudiantes al abordar el contenido de los números irracionales?

	Identificar el conocimiento que posee el profesor de matemáticas de educación media sobre aspectos relacionados con la enseñanza de los números irracionales	¿Qué teorías específicas de la educación matemática conoce que son las más adecuadas para la enseñanza de los números irracionales? ¿Cuál le gusta más a usted y por qué? ¿Qué factores por parte del profesor, reconoce que influyen de manera importante en la enseñanza de los números irracionales? ¿Qué estrategias ha empleado para enseñar los números irracionales? ¿Por qué piensa que han resultado más efectivas? ¿Cuál ha sido la mayor dificultad que ha experimentado al enseñar el contenido de números irracionales a alumnos de educación media? ¿De qué manera ha resuelto esa dificultad?	
	Determinar el conocimiento que posee el profesor de matemáticas de educación media sobre los estándares de aprendizaje de los números irracionales	¿De qué manera conecta el conjunto de los números irracionales con la matemática escolar de la básica y de la media? ¿Cuál es el objetivo de aprendizaje que se propone cuando enseña los números irracionales? ¿Cómo determina el logro de dicho objetivo de aprendizaje? ¿De qué forma y en qué momento el currículo nacional plantea la enseñanza de los números irracionales	¿Qué indicadores utiliza para evaluar el logro del aprendizaje de los números irracionales? ¿Cuáles son las formas específicas con las cuales averigua la comprensión o confusión que los estudiantes tienen con respecto a los números irracionales?

PAUTA PARA LA VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS/AS ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA PROFESORES/AS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombre del Experto/a: ____

A continuación, se presentarán algunos ítems construidos a partir de los planteamientos de Tójar Hurtado (2006), Flick (2014) y Patton (1987) con respecto a la coherencia, pertinencia y confiabilidad de la entrevista. En cada uno de los ítems propuestos marque con una equis (X) el grado de acuerdo o desacuerdo, según la siguiente escala:

5: Totalmente de acuerdo
4: De acuerdo
3: Ni en acuerdo ni en desacuerdo
2: En desacuerdo
1: Totalmente en desacuerdo

ÍTEM	JUICIO				
	5	4	3	2	1
COHERENCIA					
La entrevista está directamente relacionada con la pregunta y el objetivo general de la investigación					
Las preguntas planteadas responden a alguno/s de los objetivos específicos de la investigación					
Se puede identificar la intencionalidad clara en cada pregunta que ayude a abordar la problemática de estudio					
PERTINENCIA					
Las preguntas de la entrevista utilizan un lenguaje claro, inteligible y apropiado					
Las preguntas planteadas en la entrevista permiten al entrevistado argumentar de manera flexible y dinámica					
La estructura de la entrevista permite distinguir la información que se puede obtener en cada dimensión o grupo de preguntas					
CONFIABILIDAD					
La entrevista conserva un carácter abierto y se evitan preguntas sesgadas					
La entrevista considera preguntas principales o auxiliares que permiten hacer contrastes entre las respuestas del entrevistado					
La entrevista proporciona el espacio para que el entrevistado pueda utilizar su propio lenguaje					

MATRIZ DE CODIFICACIÓN

Código	*Definición*	*Subdominios MTSK*
Saber disciplinar	Conocimiento que posee el profesor sobre los números irracionales de manera profunda, lo que se evidencia en un conocimiento mayor a lo enseñado o lo estipulado en el currículo vigente. Incluye el conocimiento de conceptos y procedimientos, fundamentación, formas de representación, fenomenología y aplicación en contextos concretos.	KoT Conocimiento de los temas
Integración y relación	Conexiones que el profesor realiza entre estructuras avanzadas de los números irracionales con sus formas básicas de expresión. Contempla las conexiones que realiza el profesor entre los contenidos que está enseñado de los números irracionales, con contenidos posteriores avanzados, así como aquellas conexiones que realiza con los contenidos básicos y/o elementales de los números irracionales. Se incluyen las conexiones con contenidos	KSM Conocimiento de la estructura matemática

	transversales dentro y fuera de la disciplina, así como contenidos auxiliares relacionados con los números irracionales.	
Dinámica matemática en aula	Conocimiento que el profesor posee sobre la forma de proceder y desarrollar los temas inherentes a los números irracionales, para llegar a resultados matemáticos verdaderos. Esto incluye su validación y demostración de los números irracionales, en la organización y jerarquización de los conocimientos en los números irracionales, de la planificación y resolución de problemas, en usos de símbolos de representación, manejo del lenguaje formal, así como de las condiciones necesarias y suficientes para generar conocimiento en los números irracionales.	KPM Conocimiento con la práctica matemática
Aprendizaje	Conocimiento que el profesor posee y ha desarrollado acerca de la forma en que los estudiantes se aproximan y aprenden los números irracionales, así como de la forma en que los estudiantes interactúan con ellos. Incluye el conocimiento sobre teorías y estilos de aprendizaje, de las fortalezas y	KFLM Conocimiento de las características de

	dificultades en el aprendizaje de los números irracionales, obstáculos, errores y expectativas, así como el lenguaje o vocabulario que habitualmente asocian los estudiantes a los números irracionales.	aprendizaje de las matemáticas
Enseñanza	Conocimiento que posee el profesor de los recursos y modos de presentar los números irracionales. Incluye el conocimiento de teorías, metodología y estrategias propias de la enseñanza de la matemática, recursos materiales y virtuales, tareas, así como el conocimiento de ejemplos pertinentes a la enseñanza de los números irracionales.	KMT Conocimiento de la enseñanza de la matemática
Currículo	Conocimiento que el profesor tiene acerca de aquello que está estipulado en el currículo vigente sobre lo que debe o puede alcanzar un estudiante de educación media en el aprendizaje de los números irracionales. Implica conocer el o los objetivos, los contenidos e indicadores de aprendizaje del curso o nivel en el que se está impartiendo la clase, y de la forma de monitorear y evaluar el nivel de desarrollo conceptual y procedimental de los alumnos en el aprendizaje de los números irracionales.	KMLS Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

Ideas alternativas	Ideas matemáticamente erróneas sobre los números irracionales que se manifiestan en las formas de conceptualizar, proceder, demostrar y argumentar del profesor. Incluye la consideración de ideas desarticuladas o contradictorias con lo que plantea la didáctica de la matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números irracionales.	Creencias de los profesores sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Anexo 3: PAUTA PARA LA VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS/AS

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA PROFESORES/AS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PAUTA PARA LA VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS/AS

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA PROFESORES/AS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombre del Experto/a: NURIA CLIMENT

A continuación, se presentan algunos ítems construidos con respecto a la coherencia, pertinencia y confiabilidad de una entrevista. En cada una de los ítems propuestos marque con una equis (X) el grado de acuerdo o desacuerdo, según la siguiente escala: (he indicado el número correspondiente).

5: Totalmente de acuerdo

4: De acuerdo

3: Ni en acuerdo ni en desacuerdo

2: En desacuerdo

1: Totalmente en desacuerdo

ÍTEM	JUICIO				
	5	4	3	2	1
COHERENCIA					
La entrevista está directamente relacionada con la pregunta y el objetivo general de la investigación		X			
Las preguntas planteadas responden a alguno/s de los objetivos específicos de la investigación		X			
Se puede identificar la intencionalidad clara en cada pregunta que ayude a abordar la problemática de estudio		X			
PERTINENCIA					
Las preguntas de la entrevista utiliza un lenguaje claro, inteligible y apropiado		X			
Las preguntas planteadas en la entrevista permiten al entrevistado argumentar de manera flexible y dinámica	X				
La estructura de la entrevista permite distinguir la información que se puede obtener en cada dimensión o grupo de preguntas		X			
CONFIABILIDAD					
La entrevista conserva un carácter abierto y se evitan preguntas sesgadas	X				
La entrevista considera preguntas principales o auxiliares que permiten hacer contrastes entre las respuestas del entrevistado			X		
La entrevista proporciona el espacio para que el entrevistado pueda utilizar su propio lenguaje	X				

PAUTA PARA LA VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS/AS

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA PROFESORES/AS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombre del Experto/a: Solange Aranzuoia

A continuación, se presentan algunos ítems construidos con respecto a la coherencia, pertinencia y confiabilidad de una entrevista. En cada una de los ítems propuestos marque con una equis (X) el grado de acuerdo o desacuerdo, según la siguiente escala:

5: Totalmente de acuerdo
4: De acuerdo
3: Ni en acuerdo ni en desacuerdo
2: En desacuerdo
1: Totalmente en desacuerdo

ÍTEM	JUICIO				
	5	4	3	2	1
COHERENCIA					
La entrevista está directamente relacionada con la pregunta y el objetivo general de la investigación	X				
Las preguntas planteadas responden a alguno/s de los objetivos específicos de la investigación	X				
Se puede identificar la intencionalidad clara en cada pregunta que ayude a abordar la problemática de estudio		X			
PERTINENCIA					
Las preguntas de la entrevista utiliza un lenguaje claro, inteligible y apropiado		X			
Las preguntas planteadas en la entrevista permiten al entrevistado argumentar de manera flexible y dinámica	X				
La estructura de la entrevista permite distinguir la información que se puede obtener en cada dimensión o grupo de preguntas		X			
CONFIABILIDAD					
La entrevista conserva un carácter abierto y se evitan preguntas sesgadas		X			
La entrevista considera preguntas principales o auxiliares que permiten hacer contrastes entre las respuestas del entrevistado		X			
La entrevista proporciona el espacio para que el entrevistado pueda utilizar su propio lenguaje	X				

PAUTA PARA LA VALIDACIÓN POR JUICIO DE EXPERTOS/AS

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA PROFESORES/AS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombre del Experto/a: Yury Marcela Cano Murillo

A continuación, se presentan algunos ítems construidos con respecto a la coherencia, pertinencia y confiabilidad de una entrevista. En cada una de los ítems propuestos marque con una equis (X) el grado de acuerdo o desacuerdo, según la siguiente escala:

5: Totalmente de acuerdo
4: De acuerdo
3: Ni en acuerdo ni en desacuerdo
2: En desacuerdo
1: Totalmente en desacuerdo

ÍTEM	JUICIO				
	5	4	3	2	1
COHERENCIA					
La entrevista está directamente relacionada con la pregunta y el objetivo general de la investigación	X				
Las preguntas planteadas responden a alguno/s de los objetivos específicos de la investigación		X			
Se puede identificar la intencionalidad clara en cada pregunta que ayude a abordar la problemática de estudio	X				
PERTINENCIA					
Las preguntas de la entrevista utiliza un lenguaje claro, inteligible y apropiado	X				
Las preguntas planteadas en la entrevista permiten al entrevistado argumentar de manera flexible y dinámica	X				
La estructura de la entrevista permite distinguir la información que se puede obtener en cada dimensión o grupo de preguntas	X				
CONFIABILIDAD					
La entrevista conserva un carácter abierto y se evitan preguntas sesgadas	X				
La entrevista considera preguntas principales o auxiliares que permiten hacer contrastes entre las respuestas del entrevistado	X				
La entrevista proporciona el espacio para que el entrevistado pueda utilizar su propio lenguaje	X				