UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Magíster en Educación Matemática

RESIGNIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL COMO INDICADOR DE VARIACIÓN SÍSMICA:

Modelación Matemática con base Socioepistemológica

Michael Alexander Contreras Vargas

Profesor (a) Guía:

Daniela Soto Soto

Jarnishs Beltran Mejía

Santiago-Chile
2024

CONTENIDO

RESUMEN

El presente estudio tiene por finalidad proponer una secuencia didáctica para la resignificación del comportamiento de crecimiento exponencial en estudiantes de tercero medio, en un contexto de variación de magnitudes sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática. Así, rediseñar el discurso matemático escolar vinculado al fenómeno de crecimiento exponencial promoviendo el uso del concepto a través de situaciones de transformación que involucren las prácticas sociales emergentes del comportamiento tendencial de funciones, tratamiento de gráficas y ajustes de variaciones. Esto se hace para describir los significados desprendidos en el proceso de rediseño y caracterizarlos según su naturaleza.

La intención del estudio es reflexionar y atañer el fenómeno de exclusión y la falta de marcos de referencias que aparecen en la enseñanza tradicional, suscitando un cambio de paradigma sostenido en la usanza o funcionalidad de la noción de función exponencial, teniendo como elementos la modelación y la trata de gráficas. Para lograr este cometido, se utiliza la ingeniería didáctica como metodología de investigación, siendo ésta de carácter cualitativo, de manera que, bajos los lineamientos de la modelación matemática sustentada en la socioepistemología, la propuesta permita caracterizar los procesos de resignificación del discurso matemático escolar arraigado a la función exponencial emergentes de la praxis escolar. Invitando a una reflexión, desde la matemática, de un componente cultural como el impacto social y científico de los sismos en Chile.

Palabras claves: Resignificación, discurso matemático escolar, socioepistemología, función exponencial, fenómenos de exclusión, modelación, comportamiento tendencial.

ABSTRACT

The purpose of this study is to propose a didactic sequence for the resignification of exponential growth behavior in third-grade students, in a context of variation of seismic magnitudes from a socio-epistemological perspective of mathematical modeling. Thus, redesign the school mathematical discourse linked to the phenomenon of exponential growth, promoting the use of the concept through transformation situations that involve the emerging social practices of the trend behavior of functions, treatment of graphs and adjustments of variations. This is done to describe the meanings released in the redesign process and characterize them according to their nature.

The intention of the study is to reflect and address the phenomenon of exclusion and the lack of frames of reference that appear in traditional teaching, provoking a sustained paradigm shift in the use or functionality of the notion of exponential function, having as elements the modeling and it's about graphics. To achieve this goal, didactic engineering is used as a research methodology, this being of a qualitative nature, so that, under the guidelines of mathematical modeling supported by socioepistemology, the proposal allows characterizing the processes of resignification of the rooted school mathematical discourse. to the exponential function emerging from school praxis. Inviting a reflection, from mathematics, of a cultural component such as the social and scientific impact of the earthquakes in Chile.

Palabras claves: Resignificación, discurso matemático escolar, socioepistemología, función exponencial, fenómenos de exclusión, modelación, comportamiento tendencial.

DEDICATORIA

Dedicado a Dios por sobre todas las cosas…

Pues, por ÉL y para ÉL fueron hechas todas las cosas…

Este trabajo va dedicado a mis hijas Elena y Juliannita quienes son la huella que, de alguna manera, Dios me ha permitido plasmar en mi paso por este mundo…

Las amo con mi vida…

Dedicado a mis padres Eliana y Julio quienes me han brindado su apoyo en todo momento…

Los amo viejitos lindos…

Dedicado a Masiel Álvarez y Raúl Campos, pues sin su ayuda jamás hubiera sido la persona que ahora soy…una persona éticamente correcta. Esto es para ustedes mamita Shell y Mi Comandante.

Dedicado a todos los profesores … ¡Aguante! que somos parte de una hermosa praxis.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, a DIOS por su amor infinito y darme la posibilidad de poder sentirme libre en su misericordia. Gracias Señor de Señores, matemático de matemáticos y físico de físicos.

A Masiel por su apoyo incondicional desde el comienzo de mi travesía como padre de familia y como docente. Gracias infinitas, por tanto, por soportarme sin peros, por acompañarme con toda la armonía del universo y quedarte junto a mí en los días buenos y malos. Gracias por ser tú conmigo, por todo tu apoyo y por siempre, pero siempre creer en mi “Mamita Shell”.

A mis hijas, por regalarme siempre una sonrisa en todas mis travesías y otorgarme su amor sin condición alguna. Gracias Elenita y Juliannita.

A mis padres Eliana y Julio por inculcarme los valores que me han inculcado, por esa humildad que abriga y ese recibimiento incondicional y genuino cada vez que llego a Salamanca a verlos. Gracias por confiar en mí. Un besito a la distancia “Chiky” y “Kito”.

A mi profesora guía, Dra. Daniela Soto Soto por apoyarme incondicionalmente en todo este proceso extenso y complejo muchas veces, tanto en mi formación como en mi trabajo de investigación. Gracias profe por todo, por sus orientaciones, por su empatía, por su profesionalismo y su consejos tanto académicos como profesionales y valóricos. Simplemente Gracias.

A mi profesor guía, Dr. Jarnish Beltrán Mejía, por su ayuda en los aspectos disciplinares y por compartir sus conocimiento matemáticos dentro de mi formación en este proceso.

INTRODUCCIÓN

Uno de los motivos más relevantes para estudiar matemáticas es el poder entender y comunicar fenómenos que acontecen en el mundo real y natural con el que interactúa, desde siempre, el ser humano. El mismo Joseph Fourier diría “el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos” (Ugalde, 2014). Es bajo este velo que, el estudio de las funciones cumple un papel fundamental en dos aspecto trascendentales. El primero, para el entendimiento del mundo y sus fenómenos y, el segundo, para el entendimiento holístico del propio ser humano. Ugalde (2014) afirma que el desarrollo y estudio de los conceptos matemáticos, especialmente el de función, a lo largo de la historia va de la mano con los intereses de la humanidad de entender y tratar de describir la naturaleza en la que vive (p. 2).

Con base en lo anterior, y en virtud de la importancia del estudio de las funciones, Spivak (2012) asevera que uno de los conceptos más transcendentales en el estudio de las matemáticas es, sin duda alguna, el concepto de función. Según su apreciación, en casi todos los márgenes de las matemáticas modernas, la investigación se centra estrechamente en el estudio de éstas. Engrosando esta idea, Abrate et. al (2006) plantea que la real importancia de concebir las funciones como foco de estudio, es su carácter unificador, debido a su presencia y participación en todas las ramas de la matemática y sus epistemologías; Ya sea estableciendo relaciones entre variables o modelando situaciones reales.

Para el caso particular de la función exponencial, Vargas (2017) divulga la relevancia y flexibilidad que tiene esta función, estando involucrada en casi todas las expresiones algebraicas que se estudian en las matemáticas modernas. Es más, en el álgebra, las funciones y el cálculo, Vargas et. al (2006) postula que la exponencial es la función más importantes de todas, aludiendo que es la única función cuya derivada es proporcional a la propia función. El desafío, según los autores, está en que los estudiantes deben atribuir distintos significados a las diversas presentaciones de la función o descubrir su naturaleza para modelar algún fenómeno real o alguna situación de carácter científico.

Ahora bien, el estudio de funciones, en el sistema escolar chileno, se aborda de manera implícita en los niveles de enseñanza básica; en los niveles de quinto y sexto básico aparecen dentro de la obtenciones de patrones, en séptimo se abordan, de manera implícita, dentro del estudio de proporciones. Y en octavo, se esbozan desde el tratamiento de ecuaciones lineales. Pero, en términos formales y explícitos, su estudio se atañe recién en el nivel de primer año de enseñanza media, dentro del eje de Álgebra y Funciones, teniendo lineamientos, desde las bases curriculares, que se desprenden de las habilidades de *modelar* y *argumentar* fenómenos cotidianos e interdisciplinarios (MINEDIUC, 2016a).

Lo anterior impacta al momento de construir significados en torno a las funciones, incluso más allá del sistema escolar chileno. Sabiendo que nuestros estudiantes comienzan a generar significados de las funciones a la edad de 13 o 14 años, situación que puede excluir, de cierta manera, las construcciones previas. Pues, en esta línea, Abrate et. al (2006) manifiesta que los “errores” en el estudio de las funciones, no aparecen al azar, sino que surgen como resultado de un marco conceptual basado en los conocimientos previos adquiridos por los estudiantes.

Según la última actualización de las bases curriculares (MINEDUC, 2016a), el estudio formal de las funciones exponenciales se atañe recién en el nivel de tercero de enseñanza media, éste se materializa de la mano con las habilidades de modelar y argumentar (Bases curriculares actualización 2016), pero abordando situaciones o contextos que muchas veces son ajenos a la realidad que vive el estudiante chileno y, direcciona al alumno a construir significados de una naturaleza algebraica. Frente a esto, García (2018) generaliza que la modelación matemática resulta una base para el entendimiento y significación de la realidad, una realidad que no sea ajena al estudiante sino al contrario, una situación en la que él participa.

Desde una perspectiva socioepistemológica de la Matemática Educativa, la modelación se entiende como una práctica social que genera significados intuitivos, emergentes de los procesos de construcción de las comunicades de conocimiento. Este enfoque promueve una alternativa de enseñanza que se aleja de la matemática escolar tradicional, la cual a menudo se concibe como una verdad inmutable (Cantoral y Soto, 2014), y que suele estar dominada por significados puramente algebraicos, excluyendo otros enfoques o interpretaciones. La educación matemática tradicional, según Cordero y Solís (2007), privilegia la teoría y los conceptos como los elementos más relevantes y predominantes, dejando de lado la comprensión contextual y la aplicación social del conocimiento.

En este contexto, se plantea que el discurso Matemático Escolar (dME) en torno a la función exponencial tiende a excluir la construcción de significados contextualizados, debido a la falta de marcos de referencia que visibilicen otros significados posibles. Esto demanda un cambio de paradigma enfocado en la funcionalidad del concepto, con el fin de visibilizar a los estudiantes y los diversos significados que emergen en su interacción con el dME, y ampliar su bagaje cultural y disciplinar. Cantoral y Soto (2014) subrayan que la enseñanza matemática tradicional ha desarticulado nociones que deberían estar interconectadas, limitando la capacidad de la matemática para integrarse en el contexto cultural y educativo de los estudiantes.

En este marco, se plantea el supuesto de que los procesos de resignificación del concepto de función exponencial en los estudiantes de tercero medio estarán profundamente ligados a la modelación matemática de fenómenos sísmicos, debido a su relevancia en el contexto cultural y geográfico chileno. La modelación de estos fenómenos permitirá a los estudiantes construir significados más allá de lo puramente algebraico, conectando las matemáticas con situaciones reales y significativas.

Ugalde (2014) sostiene que los aspectos culturales, históricos y fenomenológicos son fundamentales para la construcción de conceptos matemáticos desde su génesis, y no deben limitarse a su comprobación algebraica con fines utilitarios (Soto y Cantoral, 2014). No integrar estos aspectos limita la investigación y la enseñanza, ya que el acto de socializar está intrínsecamente ligado a la evolución cultural (Cantoral et al., 2014). En un país como Chile, que forma parte de la cadena sísmica más importante del planeta, el carácter exponencial de los terremotos proporciona un contexto cultural ideal para enseñar la función exponencial, alejándose de su abstracción y dotándola de un significado social relevante (Ugalde, 2014).

Con base en lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación: **¿Cómo resignifican los estudiantes de tercero medio el concepto de función exponencial al modelar fenómenos de crecimiento y decrecimiento en situaciones de variaciones sísmicas, desde una perspectiva socioepistemológica?**

Esta pregunta busca explorar los significados que emergen en los estudiantes cuando se enfrentan a un contexto de modelación matemática contextualizada en fenómenos naturales, particularmente los sismos, y cómo dichos significados contribuyen a una resignificación del concepto de función exponencial.

Por tanto, el objetivo de esta investigación será Proponer una secuencia didáctica que permita resignificar el crecimiento exponencial en estudiantes de tercero medio, utilizando variaciones de magnitudes sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica. Esto implica promover el uso de gráficas en situaciones de transformación para favorecer la comprensión del fenómeno.

Esta secuencia permitirá primero, incluir diversos significados que surgen en el rediseño del discurso matemático vinculado al estudio de la función exponencial, abordada desde el tratamiento de gráficas en una situación de transformación y variaciones. En segundo lugar, identificar su naturaleza y poder describir cómo éstos aparecen y se concatenan para modelar el fenómeno a la luz de las prácticas sociales. Para, finalmente, poder caracterizar los significados emergentes de la resignificación del comportamiento de crecimiento exponencial bajo una situación de variaciones de variables sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática.

La figura de modelación matemática, para la aplicación de la secuencia, se extrae primordialmente de las aportaciones pulidas por Méndez y Cordero (2013); Méndez (2016; 2017); García (2018), entre otros. Siendo ésta concebida, como una categoría que permite que permite la construcción de conocimiento (Méndez y Cordero, 2014) o, también, un escenario en donde se pueden normar y resignificar los aprendizajes en el ámbito escolar, enfocándose en prácticas contextualizadas (García, 2018).

De esta manera es que se logran encadenar, coherentemente, elementos disciplinares con las significaciones emergentes de las experiencias. Ahora, bien, para modelar la función exponencial bajo la propuesta de Méndez (2016;2017), el desarrollo evolutivo del diseño subyace en tres momentos claves. El primero, en donde se evoca la experiencia y comienza la construcción de significados a raíz de la experimentación. Una segunda instancia en donde se abordan las variaciones locales y globales, articulando los significados emergentes en la construcción del modelo emulando la experiencia. Y, una última etapa en donde se engrana todo lo anterior con una puesta en común construida desde los significados emergentes, en correspondencia con lo disciplinar para la reconstrucción de una definición enriquecida por una epistemología arraigada a la naturaleza del fenómeno sísmico.

Para la materialización de lo anterior, es que resulta selecto, el uso de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, cuyas fundaciones se sustentan y se derivan de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997, citado en Artigue et. al, 1995). Para analizar reflexiones, significados y argumentos no jerarquizados sino complementarios y de diversa génesis. En esta arista, se pretende abordar la construcción de los instrumentos y el tratamiento de la información tomando la reflexión de sustentos preliminares y, de experimentación, contrastados o confrontados mediante análisis a priori (antes de la experimentación) y a posteriori (después de la experimentación).

Se manifiesta que el presente estudio se expone en una extensión de cinco capítulos partiendo por el estado del arte hasta desembocar en un apartado de conclusiones y reflexiones de la investigación. Así, es que, en el primer capítulo, se expone el estado del arte, partiendo por mostrar una epistemología asociada a la presentación de la exponencial a través de la historia, la didáctica asociada al estudio de la función pertinente, la problemática develada a raíz la forma unidireccional de estudio que impone el sistema escolar chileno, razón que, en ocasiones, constriñe a significar de una única forma el fenómeno y, culminando con los objetivos, supuestos de trabajo y pregunta de investigación.

CAPÍTULO 1: Antecedentes y Problemática

1.1.1 Problemática en la enseñanza de funciones: Develando una realidad en la enseñanza escolar:

En la realidad escolar secundaria, en las instancias de enseñanza y aprendizajes de diferentes objetos matemáticos, existen diversos factores que participan dentro de la construcción del discurso Matemático Escolar, por ejemplo, los procesos dilógico-interactivo entre docente-estudiante, que dependen de la variabilidad situación-sociedad. Por ende, los cambios inherentes a ésta no sólo otorgan nuevas instancias de aprendizaje, sino que también traen acciones que pueden motivar o desmotivar al estudiante en el estudio de disciplinas tales como la matemática (Borges, 2005). Pero, aunque existe movilidad en los medios, el tratamiento de algunos contenidos matemáticos conserva secuencias unidireccionales o lineales.

Tal es el caso de las funciones, cuyo patrón muchas veces inicia desde terrenos algebraicos, tomando este tipo de significados como base jerárquica e independiente de otros tales como los gráficos (Cordero y Solís, 1995). Desde esta perspectiva, la construcción matemática, aunque evolucione en recursos y medios para su enseñanza, a veces resulta aparentemente impuesta y excluye sutilmente. Esto, en la medida de que estudiante que no procesa bajo dichos lineamientos ajustadamente algebraicos es incorpóreo dentro del discurso matemático escolar o dME (Soto y Cantoral, 2014). Entendiendo el discurso matemático escolar como un sistema de razón que norma las prácticas y representaciones sociales de los actores del sistema educativo (Soto y Cantoral, 2014). O también, se considera como la declaración del conocimiento que, de cierta manera, es reglado por un sistema de creencias de quienes participan en la didáctica asociada al proceso de enseñanza (Cordero y Flores, 2007, citado en Astudillo et. al, 2023).

Otras aportaciones en consideración a las prácticas que generan el conocimiento matemático, en este caso, develan al dME como las prácticas sociales que rigen o norman el comportamiento de una comunidad (Reyes, 2011, citado en Introcaso et. al, 2013) y al fenómeno de exclusión como una imposición de argumentaciones, significados y procedimientos asociados a los objetos matemáticos que ha promovido el dME y que induce el que los actores didácticos sean excluidos de la construcción del conocimiento matemático (Soto y Cantoral, 2014, p. 1528). Generando un engranaje entre las nociones recién mencionadas, la intención de la investigación reside en proponer la construcción social de un discurso matemático comunitario, vinculado a la función exponencial, que aparezca como consecuencia de la actividad humana experimentando un fenómeno interdisciplinario en la escuela que no excluya al estudiante o a ninguno de los significados que construyan (Introcaso et. al, 2013).

Ciertos referentes en matemática educativa concuerdan que, muchas veces, en la enseñanza de la matemática escolar existe una predominancia que subyace en modelos meramente teóricos que conllevan a centrar el estudio, primordialmente, a los conceptos de las nociones matemáticas y anclarlos a su dominio (matemático) de manera utilitaria. Este modelo teórico de enseñanza genera un dME que privilegia los conceptos matemáticos como lo más importante y predominante (Cordero y Flores, 2007). Esto jerarquiza ciertos significados sobre otros, como el algebraico por sobre lo gráfico o algún otro. Las nociones, en ocasiones, se imponen reciamente, desde lo simbólico, sin otorgar un sentido social a la construcción del conocimiento matemático, develándose una dicotomía entre lo utilitario y lo funcional (Soto y Cantoral, 2014).

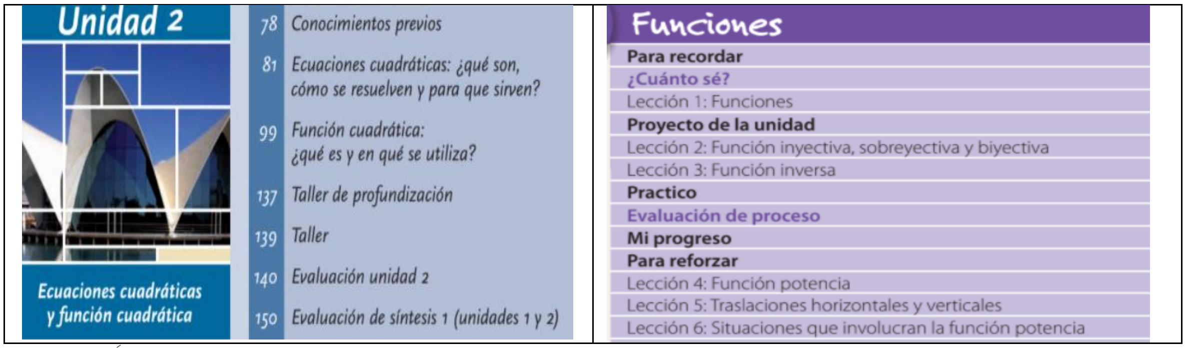
Entonces, resulta posible inferir que los conocimientos relacionados con las funciones, por ejemplo, en una enseñanza de tipo tradicional no se construyen, sino que suelen replicarse. Siendo esto, una metodología sutilmente ruda desde la imposición simbólica en la enseñanza matemática, que segrega para efectos de democratizar procesos de enseñanza y aprendizaje e invisibiliza al estudiante que no sigue dichos lineamientos, y que, además, se puede convertir en un cultivo de falta de marcos de referencias para la praxis docente (Soto y Cantoral, 2014).

En este ámbito, puede resultar evidente que el Objeto Matemático, como foco de estudio, no es trascendental ni se aborda, frecuentemente, en una situación de estudio transversal a las épocas. Este tipo de praxis, en diversas ocasiones, cimenta los fundamentos para una imposición de normas que pueden determinar, inclusive, un tipo particular de estudiante.

Actualmente algunos exponentes concuerdan en que el foco de interés, ligado al estudio de las matemáticas, resulta generalmente de lo que la sociedad en sí misma cultiva en las instancias sociales de interacción entre pares. Pues, las nociones adquieren sentido en las actividades humanas, historicidad, fenómenos o prácticas sociales que dan sentido a un objeto de estudio y que develan la naturaleza de éste (Ugalde, 2014). Esto es, que lo importante, en la construcción matemática es reflexionar respecto de la acción y las prácticas sociales que hacen que el estudiante signifique al objeto matemático (Cantoral et. al, 2006). Esto permite el aprovechamiento de la usanza del conocimiento matemático, en este caso, de la función exponencial para una mejor comprensión holística de los participantes y orientar la enseñanza de las matemáticas hacia una mayor intervención y participación social del estudiante en la construcción del dME en donde los individuos interactúen en comunidad con normas sociales de funcionamiento simultáneas y consensuadas (Soto y Cantoral, 2014).

1.1.2 La enseñanza del crecimiento exponencial en la educación matemática escolar chilena

Manteniendo la línea de reflexión del inciso anterior y, para tener una panorámica más amplia de la educación matemática escolar chilena, respecto de la enseñanza del concepto función exponencial, resulta interesante indagar en el marco curricular que norma la praxis docente y los recursos que disponen (textos, actividades, entre otros). Desde ahí, es importante destacar que en la normativa curricular que rigió en la educación matemática entre los años 2012 y 2018, en los niveles de tercero y cuarto medio, se aborda el objeto función exponencial (F.E), como una actividad complementaria (cursos electivos), aparte de los textos de enseñanza. Ahí, se aprecia un dME rígido y sesgado desde lo algebraico, construido desde una secuencia lineal. A partir del año 2018 hasta la actualidad se hace presente el estudio formal y transversal de la función exponencial, en tercero de enseñanza media, incorporándose en las unidades de estudios y en los textos, pero se aborda con la misma impronta o secuencia, esto lo podemos apreciar a continuación:


Unidad 2

Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática

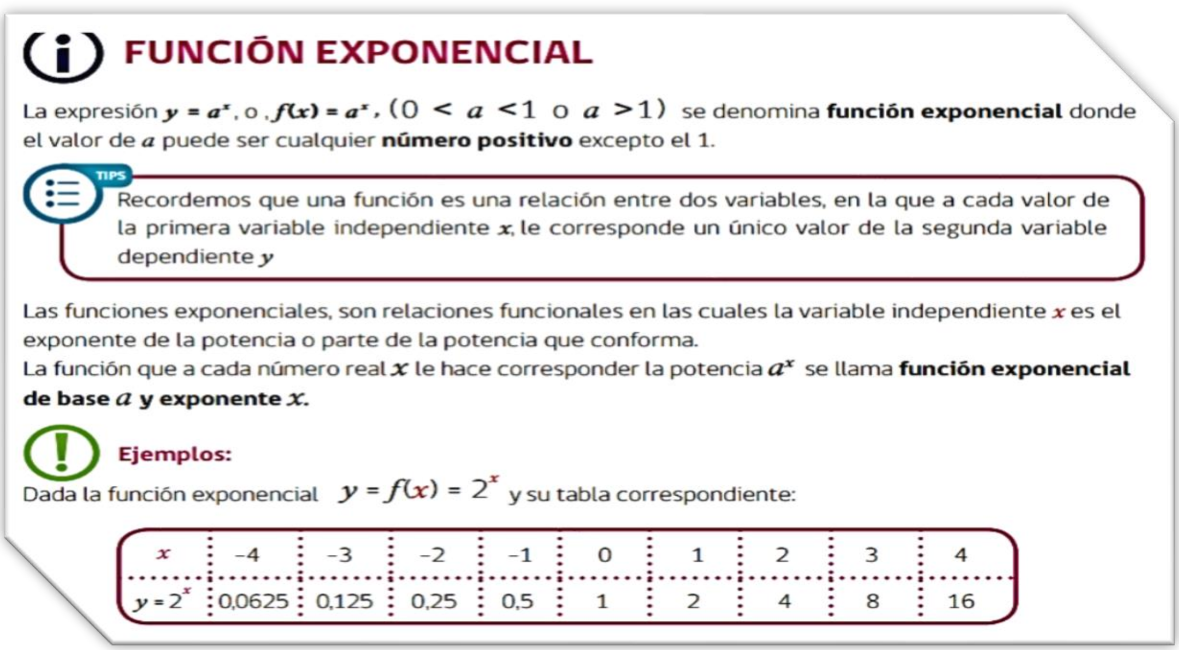
78 Conocimientos previos
81 Ecuaciones cuadráticas: ¿qué son, cómo se resuelven y para que sirven?
99 Función cuadrática: ¿qué es y en qué se utiliza?
137 Taller de profundización
139 Taller
140 Evaluación unidad 2
150 Evaluación de síntesis 1 (unidades 1 y 2)

Funciones

Para recordar
¿Cuánto sé?
Lección 1: Funciones
Proyecto de la unidad
Lección 2: Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva
Lección 3: Función inversa
Practico
Evaluación de proceso
Mi progreso
Para reforzar
Lección 4: Función potencia
Lección 5: Traslaciones horizontales y verticales
Lección 6: Situaciones que involucran la función potencia

Tabla 1 Índice de contenidos de texto del estudiante III y IV medio, respectivamente, desde año 2012 al 2018. Saiz y Blumenthal, 2012, índice, recuperado de https://drive.google.com/drive/folders/1dgBaowzcSw3X_jNkhDKch5c6dEbWtdku.

En la tabla anterior se muestran las unidades de contenidos matemáticos basales para los niveles de III y IV de enseñanza media. Según la información prospectada, se aprecia que el objeto matemático F.E. no está en los índices de contenidos, esto devela un estudio no transversal para el estudiantado y, da espacio a la inferencia de una posible no inclusión en la formación escolar matemática en dichos niveles de formación, por un período de 7 años. Complementariamente, se propone, en un texto extenso y de carácter extracurricular, el estudio de la exponencial como parte de los contenidos planificados para los *cursos electivos de modelación matemática*. Presentándose, desde sus cimientos, de la siguiente manera:


FUNCIÓN EXPONENCIAL

La expresión $y = a^x$, o, $f(x) = a^x$, $(0 < a < 1$ o $a > 1)$ se denomina **función exponencial** donde el valor de a puede ser cualquier **número positivo** excepto el 1.

TIPS
Recordemos que una función es una relación entre dos variables, en la que a cada valor de la primera variable independiente x, le corresponde un único valor de la segunda variable dependiente y

Las funciones exponenciales, son relaciones funcionales en las cuales la variable independiente x es el exponente de la potencia o parte de la potencia que conforma.
La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base a y exponente x.**

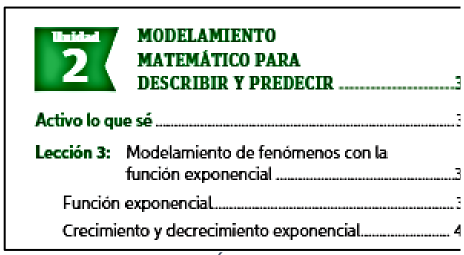
Ejemplos:
Dada la función exponencial $y = f(x) = 2^x$ y su tabla correspondiente:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Figura 1 Figura 1 Presentación de la función exponencial; 2012-2018 (Huircán y

Carmona, 2012), guía de aprendizaje, recuperado de texto complementario para cursos electivos de III y IV medio https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2019/06/Gu%C3%ADa-N%C2%B0-3-Matem%C3%A1tica-Modelado-del-mundo-con-funciones-exponenciales-y-logaritmos.pdf

Desde el año 2018 hasta la actualidad, se incluye el estudio de la función exponencial dentro en las unidades de contenidos y con carácter priorizado, bajo un marco obligatorio a nivel generalizado, tal como se aprecia en el índice de contenidos del texto escolar de tercero medio (Figura 2 y 3) presentado a continuación. Pero dicho concepto, desde sus cimientos y al igual que durante el período entre los años 2012-2018, se aborda siguiendo la ruta expuesta en la figura 1. Estos se modelan, pero de forma lineal, sutilmente rígida y fugazmente impositiva, desde algebraico o simbólico.



Unidad 2 MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR 3

Activo lo que sé 3

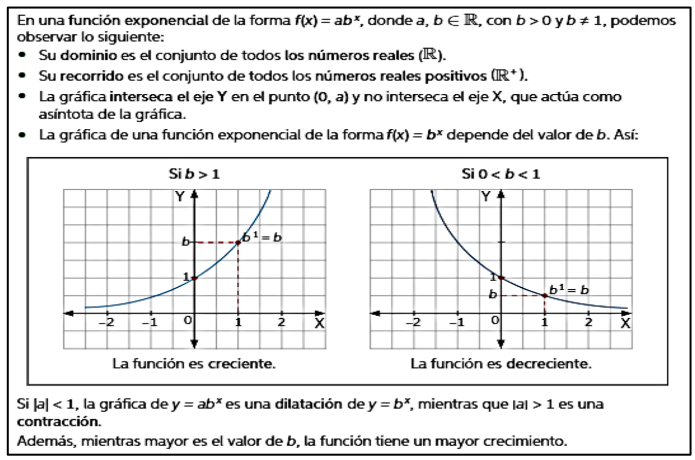
Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial 3

Función exponencial....3

Crecimiento y decrecimiento exponencial.... 4

Figura 2 Figura 2 Índice de contenidos III medio, unidad II. Osorio et. al, 2019, Texto escolar, Mineduc, recuperado

https://mitextoescolar.mineduc.cl/secciones/167/libro/167



En una función exponencial de la forma $f(x) = ab^x$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$, podemos observar lo siguiente:

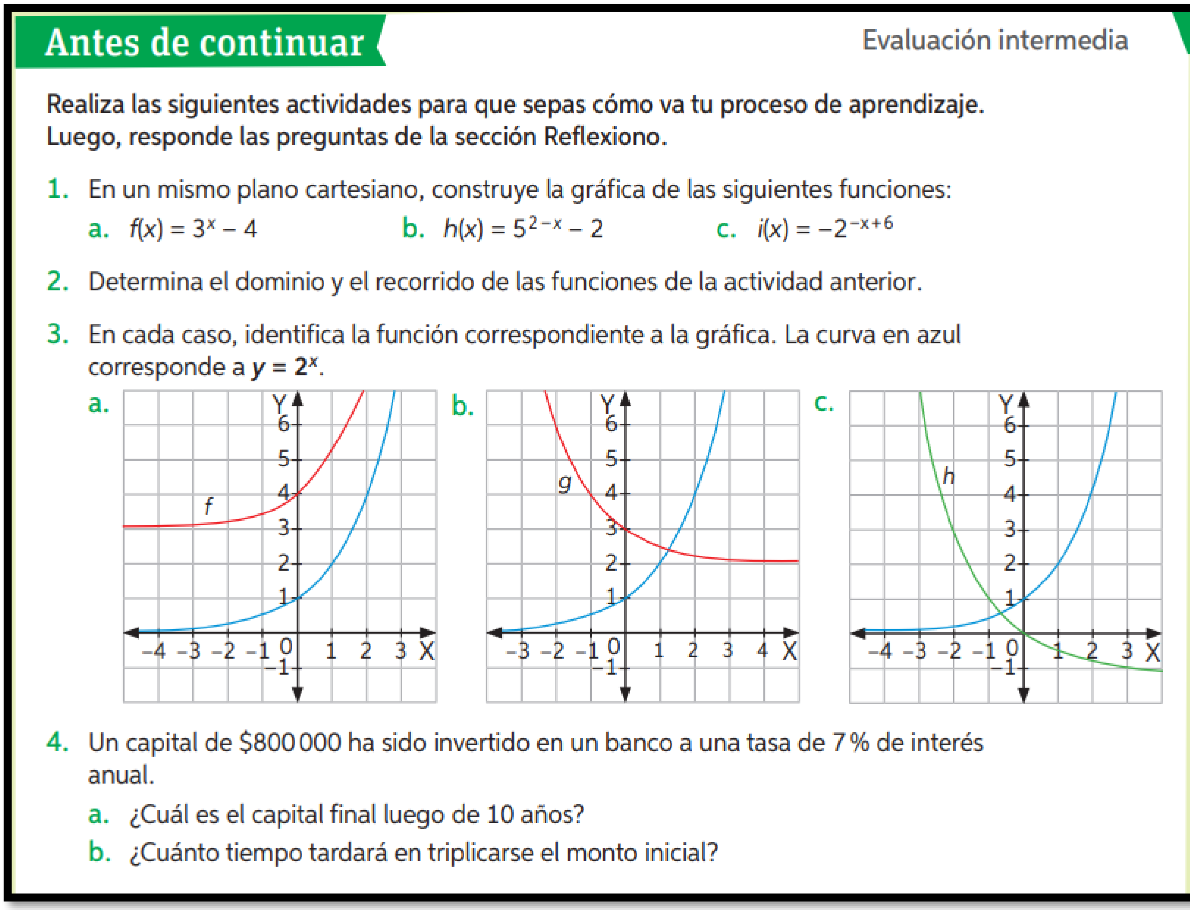
- Su **dominio** es el conjunto de todos **los números reales** ($\mathbb{R}$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- La gráfica **interseca** el eje Y en el punto (0, a) y no interseca el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de b. Así:

Si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una dilatación de $y = b^x$, mientras que $|a| > 1$ es una contracción.
Además, mientras mayor es el valor de b, la función tiene un mayor crecimiento.

Figura 3 Figura 3 Definición de F.E texto escolar de III medio. Osorio et. al, 2019, Texto escolar, Mineduc, recuperadohttps://mitextoescolar.mineduc.cl/secciones/167/libro/167

La secuencia que explicita la figura 3, reporta el estudio de la F.E de manera unidireccional, partiendo desde la expresión algebraica, jerarquizando su preponderancia por sobre otros argumentos y quedando los sustentos gráficos y tabulares como registros subordinados de los algebraicos para luego extrapolarlos a una dimensión utilitaria. Se presentan las funciones exponenciales como un conocimiento acabado y continuo que se puede apreciar, ligeramente, como una verdad absoluta que no incorpora componentes culturales ni sociales (Soto y Cantoral, 2014). Esta praxis puede presentar una fijación en el objeto matemático inmutable y, en ocasiones, invisibiliza al tipo de estudiante que no sigue dichos lineamientos en el proceso de estudio, no contempla todos los significados emergentes, no incluye argumentos culturales ni de desarrollo científico, es decir, no promueve, a primera vista, la construcción de conocimientos matemáticos para su desarrollo científico, social y tecnológico.

Engrosando lo anterior y, relacionado a lo descrito en la figura 2, se presenta un modelo de evaluación propuesto en el texto de matemática del estudiante vigente hasta la fecha en las prácticas del sistema escolar chileno:



Antes de continuar Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. En un mismo plano cartesiano, construye la gráfica de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = 3^x - 4$ b. $h(x) = 5^{2-x} - 2$ c. $i(x) = -2^{-x+6}$
2. Determina el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad anterior.
3. En cada caso, identifica la función correspondiente a la gráfica. La curva en azul corresponde a $y = 2^x$.
   a. b. c.

4. Un capital de \$800 000 ha sido invertido en un banco a una tasa de 7 % de interés anual.
   a. ¿Cuál es el capital final luego de 10 años?
   b. ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse el monto inicial?

Figura 3.1 Evaluación Intermedia propuesta como cierre del estudio de las funciones exponenciales. Osorio et. al, 2019, Texto escolar, Mineduc, recuperadohttps://mitextoescolar.mineduc.cl/secciones/167/libro/167.

Como se aprecia en la figura 3.1, la construcción del conocimiento vinculado a la función exponencial inicia sin visualizarse un sentido cotidiano o su uso en la sociedad o en alguna práctica científica para modelar mundo real. Se exhibe un orden jerárquico, bajo una apreciación visual, de ciertos registros sobre otros, concatenando ciertos significados como consecuencias de otros como lo tabular de lo algebraico y no relacionándolos como significaciones complementarias, sino como significados forzados que emergen desde lo algebraico. Esto revela una linealidad rígida en la presentación del concepto, obviando sustentos como la *intuición* e insita a construir el conocimiento matemático desde una única perspectiva, que según Soto y Cantoral (2014) resulta una matemática impuesta como verdad absoluta e inmutable, abordada desde su practicidad.

Lo anterior transfigura un problema en la construcción del conocimiento matemático, que puede develar, en ciertos casos, un tipo de rechazo al estudio de las matemáticas (Méndez, 2013 citado en Zúñiga y Méndez, 2016). Pues, según lo anterior y con base en lo prospectado, los conocimientos se han abordado de misma forma o con los mismos lineamientos por un período aproximado de 10 años, hasta la actualidad. Los sistemas de enseñanza con estas características metodológicas promueven una matemática utilitaria y no funcional (Cantoral et. al, 2014) carente de situaciones cotidianas para el estudiante chileno.

Esta monotonía ligeramente rústica, semióticamente, y exenta de ser considerada como una construcción que deriva de un fenómeno, contribuye a que los estudiantes no despierten interés y no signifiquen o resignifiquen conocimientos vinculados a funciones no lineales como las exponenciales, o peor que trabajen funciones no lineales como lineales (Sureda y Otero, 2013). Lo anterior tiene un impacto considerable en lo cognitivo pues el estudiante significa lo que en la escuela le presentan como objeto de estudio matemático, por lo tanto, su desarrollo cognitivo estará, evidentemente, limitado si se refiere a lo que el estudiante podría percibir de algún fenómeno científico, pues la significación, aunque se pretenda que tenga un uso cultural no deja de ser situada (Cantoral y Soto, 2014). Esto se fundamenta en la idea de exclusión y violencia simbólica asociada al dME, investigada por Soto y Cantoral (2014):

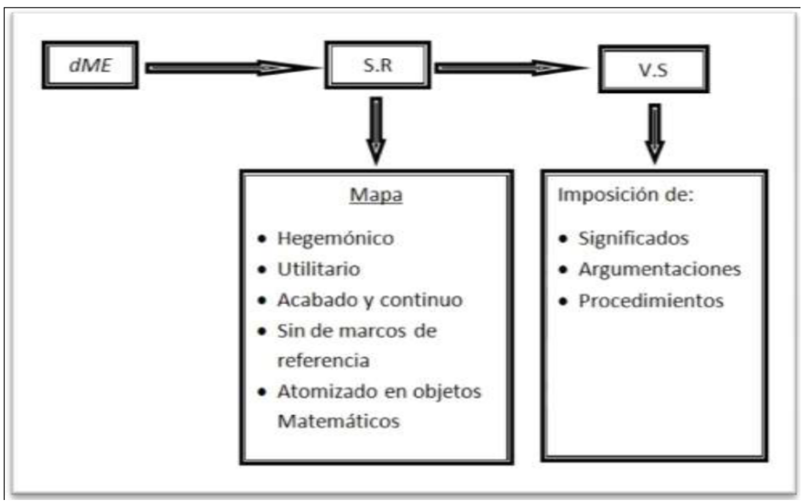


Figura 4 Figura 4 Modelo de Exclusión Soto y Cantoral (2014)

Según la figura anterior, Soto y Cantoral (2014) reafirman que en la construcción del dME se evidencia el fenómeno de exclusión debido a un sistema de razones (S.R) inmutables en la praxis en concordancia con significados, argumentos o procedimientos rígidos y lineales que denotan una violencia simbólica (V.S) en el estudios de las matemáticas.

1.1.3 La necesidad de encontrar una situación sísmica para que el uso del concepto adquiera sentido: Los sismos en Chile un escenario para el estudio de la exponencial

Por lo demás, se descubre otra dificultad presente en el dME, que la fijación en el objeto matemático no incluye significación ni entendimiento de las prácticas que originan el conocimiento. Se estudia y, por ende, se edifica desde la abstracción y no hay construcción de éste (Cantoral et. al, 2006), desde lo social ni funcional. Algunos autores aseveran que el estudio de funciones, a través de la historia, ha ido de la mano, o se ha correspondido, con los diversos intereses de la humanidad por entender y tratar de describir la naturaleza en la que vive y así significarlo desde su funcionalidad (Ugalde, 2014). Arista importante para contemplar el fenómeno sísmico, por ejemplo, como escenario cultural (dado que Chile es un país activamente sísmico) para que la construcción del conocimiento matemático escolar vinculado al crecimiento exponencial adquiera sentido.

Sustentando lo anterior, Ugalde (2014) señala que la cultura, historicidad y fenomenología son argumentos complementarios para la construcción del concepto desde su génesis y no para comprobar lo algebraico bajo una condición de aplicación utilitaria (Soto y Cantoral, 2014). El no aprovechar los aspectos de cultura, historia y de sociedad angosta y acota la dimensión de investigación dado que el socializar es intrínseco a la evolución cultural (Cantoral et. al 2014).

Ahora bien, como en el estudio de las funciones muchas veces es enseñado con base en contextos ajenos y lejanos a la cotidianidad del estudiante chileno (Vidal, 2010), algunas contribuciones destacan que la acción de enseñar matemática "le plantea al docente la necesidad de situar la información dentro de un significado compartido, por medio de la recreación de situaciones tomadas del contexto sociocultural del estudiante" (Moroño y Rodríguez, 2007, p.5). Escenario llamativo, para la construcción o resignificación de significados, puesto que Chile representa una plataforma idónea para la situación de aprendizaje, dado que, la energía liberada de un sismo responde a la naturaleza del crecimiento y decrecimiento exponencial. Además, hace que la noción adquiera sentido bajo la práctica sociales del tratamiento gráfico de información sísmica, emulando la experiencia en la modelación matemática del fenómeno. Situación que otorga un valor agregado debido a la reflexión sobre el impacto de los terremotos en Chile y la promoción de cultura sísmica detrás del conocimiento matemático.

Así, si se requiere de situaciones de carácter cultural para enseñar el concepto de F.E, el escenario se puede extraer, particularmente, de la idiosincrasia propia de un país que forma parte de la cadena sísmica más importante del planeta y que ha vivido bajo el yugo de sus efectos e impactos (energía sísmica que liberan los terremotos), como lo es Chile. Pues, el carácter exponencial, de la función que modela los eventos sísmicos, es una condición propia de la naturaleza éstos y no un ente abstracto carente de significado social (Ugalde, 2014).

1.1.4 Desde una linealidad en la enseñanza escolar y la necesidad de la resignificación de la exponencial hasta la pregunta de investigación

Según todo lo anterior y, a la luz de las teorías e investigaciones con respecto a la enseñanza de la F.E, es que la misma realidad escolar comienza a translucir una necesidad de una resignificación o rediseño del dME, y de lo que éste amerita, dado que, las acciones de enseñanza en matemáticas, en diversas ocasiones, develan una praxis caracterizada por la repetición y trabajo mecánico al enseñar conocimientos específicos (Avendaño, 2013, como se cita en Tarira et. al, 2020). Pues, según la modelación matemática a la luz de la socioepistemológica, el conocimiento matemático debe ser un resultado de la cultura humana para la satisfacción de necesidades sociales, materiales y espirituales, pero en virtud de lo anterior, los docentes desarrollan una capacidad limitada para situar y contextualizar el conocimiento, así como también deficiencias para vincular esta ciencia con otras disciplinas u otros niveles educativos (Tarira et. al, 2020).

Lo que se pretende es resignificar la función exponencial, es decir, reubicar el sentido que se lo otorga al estudio del objeto matemático, lo que, desde la psicología, se concibe como la capacidad de otorgar un sentido diferente al pasado a partir de una nueva o diferente comprensión en el presente (Arias et. al, 2020). En palabras coloquiales es resignificar la función exponencial, rediseñando el discurso matemático escolar vinculado al fenómeno de crecimiento exponencial

En palabra coloquiales, se pretende aplicar la funcionalidad del concepto utilizando los argumentos y las interacciones sociales que se dan al experimentar o imitar un fenómeno sismológico. De manera que, al abordar el objeto matemático, en un contexto de variaciones de magnitudes físicas, el dME no se limite en términos de significados, como ha sucedido durante la última década en la educación chilena, a mostrar y notificar obtenciones de imágenes de "x" dada la condición $y = ab^x$, o sólo a encontrar las imágenes de "x", tabulándolas, para luego relacionar, bajo un condicionamiento violento desde lo simbólico, las abscisas y ordenadas con la magnitud y energía de un sismo. Sino más bien, poder identificar que la energía liberada en realidad corresponde a una variación de energía, que es causada por una variación de la magnitud Richter. Y, además, poder interpretar, en el mejor de los escenarios, que ambas variaciones están relacionadas bajo una covariación.

Lo anterior se percibe en virtud de la importancia de los aspectos funcionales y de la usanza del conocimiento matemático, más allá del carácter utilitario develado del sistema escolar. Pues, según Morales y Cordero la importancia de la resignificación yace en los aspectos recién mencionados, pero, además, implica transformar el conocimiento matemático, de la función exponencial en este caso particular, en saberes funcionales en y con los seres humanos (2014, citado en García, 2018). Entonces un argumento para la resignificación de los procesos que encarnan el estudio de la F.E, se basa en que, "el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas" (Cantoral et. al, 2003, p. 19, como se cita en Tarira, 2020). Siendo el medio, en donde se llevará a cabo todo este proceso, la modelación matemática (Méndez y Cordero, 2013) del comportamiento de crecimiento. Entendiéndose que, sin las prácticas sociales no hay comprensión ni mucho menos rediseño del dME de un conocimiento matemático (García, 2018).

Con la necesidad de un rediseño en la significación de los procesos relacionados con la construcción del conocimiento de la F.E, expuesto con antelación, la intención es trastocar la enseñanza de la matemática escolar desde lo social, valiéndose de una epistemología que deriva de lo cultural (Tarira et. al, 2020). Usando la modelación matemática como medio para llevar a cabo la resignificación o reconstrucción matemática. Así, desde lo didáctico, se pretende innovar desde una mirada más amplia que salga de los márgenes unidireccionales (algebraico – pictórico – gráfico- aplicación) que no excluya a todo aquel que no siga dichos lineamientos, en donde el estudiante se adhiere a una matemática más bien universalizada e inmutable (Silva et. al, 2014) y, que no haga dependiente a algunas significados de otras, ni mucho menos los jerarquice. El desafío es cambiar la mirada hacia la enseñanza de las matemáticas, que deriva de fenómenos sociales y entender la complicidad entre la disciplina y la transposición. Lo que ciertos autores presentan con argumentos tales como que sin matemática no hay didáctica, ya que ambas nociones son procesos en sí mismos (Font, 2011).

Ahora bien, no se puede obviar que, para el desarrollo de las sociedades, primeramente, se debe reconocer el progreso de la matemática como también sus escenarios o espacio-tiempo para la evolución de la ésta en virtud de la sociedad (Méndez y Zúñiga, 2017). Por eso es fundamental navegar en dirección a una reformulación del dME, como una construcción social, para atenuar o disipar (en lo ideal) el fenómeno de exclusión asociado a éste y la falta de marcos de referencia que promuevan la construcción social del conocimiento matemático. De lo anterior, se devela la ***necesidad*** de una resignificación en los procesos de enseñanza y estudio de funciones bajo una perspectiva de constructo social orientada a su funcionalidad. Pues según las propias palabras de Méndez y Zúñiga (2017):

> es indudable que para el desarrollo de las sociedades se reconozca la importancia del desarrollo de la ciencia y la tecnología, en específico en la Matemática; ya que esta, permite explicar fenómenos físicos, químicos, biológicos, sociales u otros, que son el escenario para el desarrollo científico (p. 972).

Esto implica un cambio de escenario, partiendo por no jerarquizar ningún argumento sobre otro, iniciando la construcción del conocimiento desde las prácticas que lo originan, la sismicidad en este caso, que develan la importancia de argumentos que no tienen mucha participación desde lo tradicional, como la trata de gráficas, dado que la información sísmica se otorga mediante la usanza de gráficos.

Así, la intención es resignificar un modelo teórico de enseñanza que privilegia los conceptos matemáticos como lo más importante y predominante (Cordero y Flores, 2007), rediseñando el discurso asociado al fenómeno matemático. Rompiendo con la jerarquización de ciertas argumentos sobre otros, como el algebraico por sobre lo gráfico, por ejemplo. Para esto se pretende generar una secuencia de actividades encauzadas a caracterizar los procesos de resignificación, mediante la modelación de fenómenos situados en Chile y su territorio, de estudiantes de tercero medio cuando abordan el concepto de Función Exponencial como indicador sísmico en un contexto de enseñanza con base socioepistemológica y orientado hacia la cultura científica para la ciudadanía.

Con base en lo anterior, el interés es rediseñar y robustecer el dME con la inclusión de diversos *significados,* que derivan, además de lo social y cultural, del desarrollo de un pensamiento gráfico que permita al estudiante elaborar un discurso científico para y por la sociedad, pudiendo responder el docente, a su vez, cuestionamientos tales como *¿Cómo son los significados vinculados al proceso de resignificación de la función exponencial en estudiantes de tercero de enseñanza media cuando abordan y rediseñan el discurso matemático escolar de los fenómenos de crecimiento y decrecimiento exponencial en un contexto de variaciones sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática?*

Estas se pueden enriquecer con otras preguntas tales como ¿Cómo generar conocimiento matemático situado en el estudio de eventos naturales bajo un paradigma científico que evoque un fenómeno sísmico o natural y, lo modele a la luz de las prácticas sociales con el fin de promover cultura científica y sus significados asociados?

A continuación, se presenta un esquema aclaratorio, en donde se parte de una base o corriente de pensamiento, como la socioepistemología, descendida a las prácticas sociales en la escuela y al dME involucrado, sus agentes y aspectos culturales. En donde, de las prácticas sociales (P.S) dentro del dME se develan significados y de los aspectos de cultura se transfiguran los fenómenos científicos, códigos e historicidad de las prácticas sociales que le dieron sentido a dicho fenómeno, valga la redundancia. De esta manera, se puede establecer una correspondencia entre las significaciones y sus registros, por parte de los estudiantes, con la teoría y tecnicismo que dará los argumentos para proponer un diseño que permita resignificar la función exponencial como indicador de sismicidad, asociado a la variación de energía liberada:

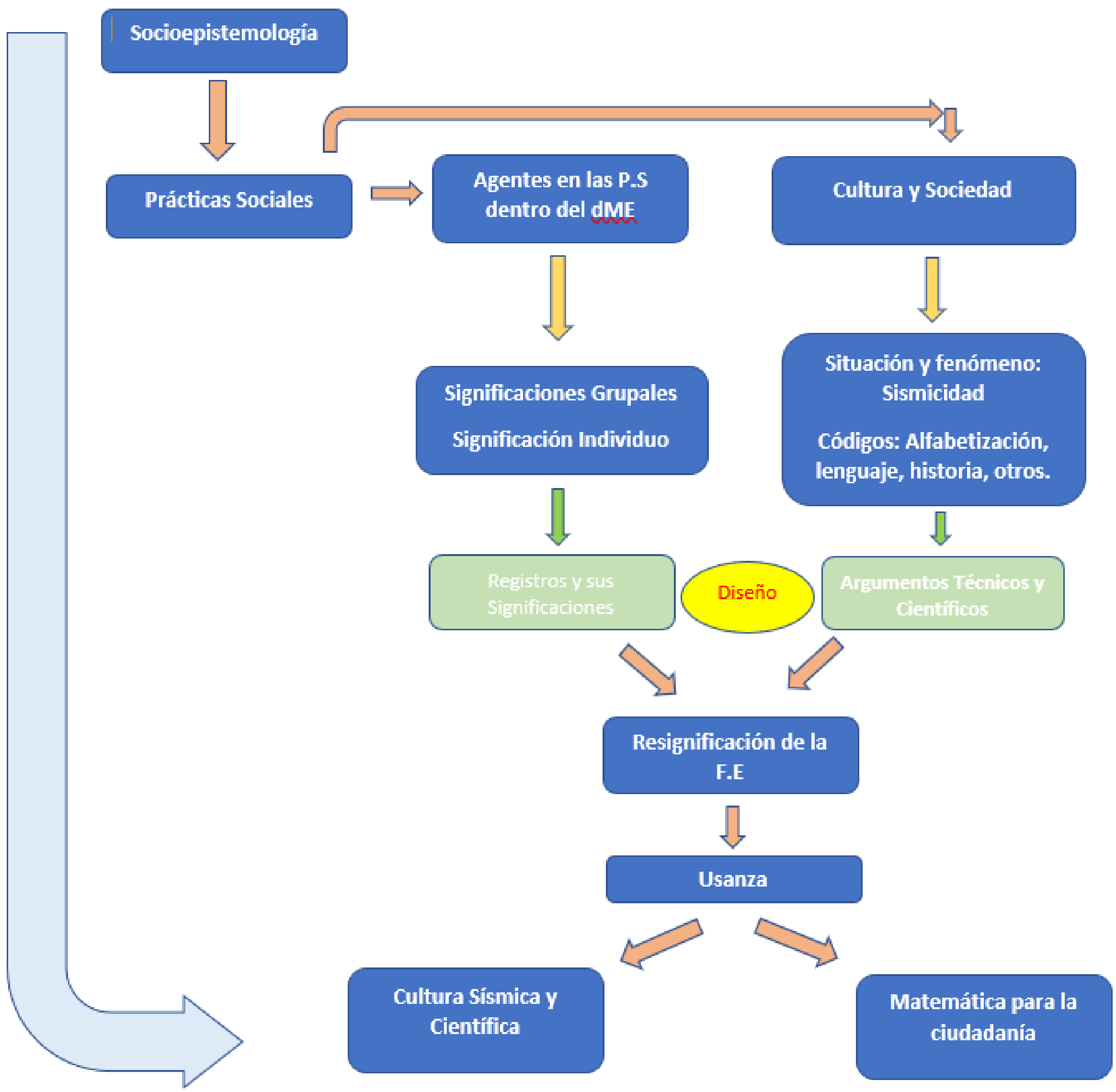


Ilustración 1 Esquema ilustrativo de las pretensiones investigativa para la caracterización de los procesos de resignificación vinculados al estudio de la F.E como indicador sísmico en un contexto de enseñanza con base socioepistemológica y orientado a la educación científica para la ciudadanía. Fuente: Cración del autor.

1.1.5 Pregunta de Investigación

La pregunta que se espera responder una vez terminada la investigación, guarda relación con describir los procesos de resignificación del concepto de F.E. que permita orientar el cambio o rediseño del dME, trastocado por las prácticas sociales, con un fin cultural y social bajo una situación de modelación y argumentación científica. Que vincule a un fenómeno natural como los sismos, los cuales forman parte de la sabiduría popular tales como el terremoto de valdivia, del 27 F, entre otros.

Lo trascendental subyace en la intención de caracterizar los procesos de resignificación de la F.E, cuando se van abordando los argumentos, que no se presentan de forma unidireccional, es decir, que no tienen como sustento base lo algebraico. Y cuya significación epistemológica parte desde el entendimiento de la naturaleza del fenómeno el cual se pretende representar con la F.E.

A raíz de lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo resignifican los estudiantes de tercero de enseñanza media el concepto de función exponencial al modelar matemáticamente fenómenos de crecimiento y decrecimiento en situaciones de variaciones sísmicas, desde una perspectiva socioepistemológica?

La intención de la pregunta de investigación es poder dejar una puerta abierta para una extensión de investigación a futuro y que la respuesta asociada tenga una sustancia enriquecedora más allá de un cuestionamiento que se responda con una afirmación o negación, dado que se investigará bajo una dimensión cualitativa.

1.1.6 Supuesto de Trabajo:

El supuesto de esta investigación busca orientar al lector hacia una posible respuesta a la pregunta de investigación. El enfoque del trabajo se sitúa dentro de una investigación cualitativa. Como supuesto de investigación se tiene que: Los procesos de resignificación del concepto de función exponencial en estudiantes de tercero medio se basan en significados que emergen de prácticas sociales, como el uso de gráficas en situaciones de transformación. Estos significados surgen a partir de la modelación matemática de fenómenos naturales, como los terremotos.

Se concibe la modelación como un medio idóneo para rediseñar el discurso matemático orientado hacia su funcionalidad en el mundo real, en un escenario que emule el fenómeno de los terremotos a través del estudio de las variaciones sísmicas, de lo contrario, resulta complejo, bajo en este escenario, promover cultura sísmica con base matemática, construir matemática con un fin social o rediseñar el discurso matemático de la función exponencial sin significados jerarquizados que reflejen el uso del concepto sin un proceso de estudio lineal.

A continuación, se presentan los objetivos general y específico, con los cuales se pretende, una vez culminada la investigación, responder la pregunta de investigación en todo su esplendor y, además, validar el supuesto investigativo propuesto en los incisos anteriores. De manera, que se evidencie claramente la meta y alcance de esta investigación y, se demarque el camino a recorrer para alcanzarlas.

1.1.7 Objetivos

General:

Proponer una secuencia didáctica que permita resignificar el crecimiento exponencial en estudiantes de tercero medio, utilizando variaciones de magnitudes sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática. Esto implica promover el uso de gráficas en situaciones de transformación para favorecer la comprensión del fenómeno.

Específico

- OE 01: Identificar los significados que emergen en el rediseño del discurso matemático escolar sobre el crecimiento exponencial y las relaciones entre la energía y magnitud de un sismo, mediante la modelación matemática y el uso de gráficas.

- OE 02: Describir cómo se construyen los significados sobre la función exponencial cuando los estudiantes trabajan en una secuencia didáctica basada en la socioepistemología, utilizando variaciones de magnitudes sísmicas y contrastando gráficas y representaciones algebraicas.

- OE 03: Caracterizar los procesos de resignificación de la función exponencial que permiten a los estudiantes reconstruir una definición formal y socialmente relevante de la función exponencial, utilizando la modelación de variaciones sísmicas como indicador clave.

1.2 En busca de una epistemología de la exponencial: La función exponencial a través de historia.

En este apartado, se muestra una síntesis breve, respecto de la presentación epistemológica y estudio de la función exponencial a través de la historia, identificando parte de los autores que aportaron sustentos para la construcción de la función exponencial. El estudio comienza con la meditación respecto de una evolución cultural e histórica que comienza con la acción intuitiva de contar hasta la presentación de la función exponencial en la época contemporánea.

Si bien es cierto que, a través del estudio del objeto matemático función exponencial, los argumentos o focos algebraicos han sido jerarquizados por sobre otros registros, o por lo menos así se ha sustentado en el desarrollo de los apartados 1.1 y 1.2 del presente escrito, también se han desarrollado aportaciones que han ayudado a desarrollar un acercamiento cualitativo del concepto. Es decir, que para un entendimiento cabal de la función exponencial hay autores que han conferido la importancia de tener un sustento adjetivo para una epistemología de lo exponencial en virtud de identificar un génesis o principio asociado a la naturaleza de la noción. Naturaleza asociada a las prácticas sociales que surgen del fenómeno de sismicidad asociado al crecimiento y decrecimiento exponencial, en este caso particular, por ejemplo.

Para un mejor entendimiento de los argumentos cualitativos hacia un acercamiento a la epistemología de la exponencial, no se debe perder de vista que, tanto el comportamiento de crecimiento o decrecimiento están estrechamente emparentado con el concepto de función, el que nace en virtud de una necesidad humana para entender o imitar la naturaleza que la rodea (Tarira et. al, 2020). Así, la epistemología asociada a los objetos matemáticos es fundamental, dado que bajo esta premisa las matemáticas se descubren en la naturaleza. Como diría el renombrado Jhosep Fourier "el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos" (Como se cita en Ugalde, 2014).

Descubriendo los fenómenos de crecimiento y decrecimiento exponencial como funciones, Ugalde (2014) entrega como puntos de interés fundamentales lo siguiente:

a) La noción de Función está íntimamente ligada al concepto de conjunto
b) El concepto de función, desde su génesis (independiente de su naturaleza particular) está ligado a la noción de cantidad, y más precisamente, a la noción de número.
c) La noción de función nace de un interés humano de entender el mundo que le rodea.

De lo anterior, destacamos que, para un acercamiento de la epistemología de lo exponencial, asociado a su presentación histórica y en sus procesos de estudio, los sustentos a presentar estarán ligados, de uno u otro modo y, explícita o implícitamente a los puntos a), b) y c) del párrafo anterior.

1.2.1 La Matemática antigua: Desde el conteo hasta la proporcionalidad

Se manifiesta que, para efectos de la construcción de este apartado, se vale de las aportaciones de autores tales como Tarira et. al (2020), Vargas (2017), Rodríguez et. al (2021), Pulido (2012), Castillo (2017) y González (2013). Quienes comparten información significativa para los requerimientos de este escrito, en términos de fechas, culturas, entre otras. Pues, se debe tener en cuenta que, la matemática como componente y producto de la cultura ha experimentados los mismos cambios que ha sufrido la sociedad en sí, en su desarrollo histórico (Pulido, 2012).

1.2.2 La antigua Babilonia (4000 a.C - 2000 a.C)

Entre los vestigios matemáticos de esta cultura, se encontraron registros de un sistema de numeración posicional de base 60. La simbología que identificaba a un grupo de cardinalidad 60 o de 60 unidades correspondía a una flecha orientada verticalmente. De hecho, la teoría acepta comúnmente esta base debido a su descomposición en factores. Dado que, $60 = 2x2x3x5$, esto lo ace divisible por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20\ y\ 30$. Entonces:

$$60: El\ entero\ más\ pequeño\ divisible\ por\ todos\ los\ enteros\ del\ 1\ al\ 6$$

Existen registros, en tablas de arcilla, en donde se evidencian aportes matemáticos. Los babilonios realizaron cálculos matemáticos asociados a la variación continua de la luminosidad de la Luna en intervalos de tiempo. Utilizaban tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y de raíces cubicas. Además, existen hallazgos de progresiones geométricas tales como $1 + 2 + 2^2 + \cdots$, que sirvieron de fundamentos, por ejemplo, para el entendimiento de la sucesión $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Autores han manifestado que los babilonios fueron poseedores de un congénito instinto de funcionalidad de los objetos matemáticos (Pedersen, 1974). Pedersen indagó en aquello en su profundización en métodos cuantitativo mediante su intención de encontrar alguna progresión aritmética de observaciones complejamente medibles, recurriendo a la interpolación y extrapolación en la búsqueda de ciertas regularidades, pues esta idea propone la existencia de un "cambio". En palabas de Pedersen se tiene *"función no sólo es fórmula, es también una relación que asocia elementos de dos conjuntos"* (1974, como se cita en Farfán y García, 2005, p.490).

Desde lo religioso y bíblico, pero no menos importante, dependiendo del paradigma, también hay registros de los babilonios como máximos exponentes de la astronomía en la antigüedad, siendo el profeta Daniel uno de los más importantes exponentes.

1.2.3 El antiguo Egipto (3500 a.C)

Desde las aportaciones de la cultura egipcia es interesante la estrecha relación entre lo numérico y lo geométrico. O, mejor dicho, la aparición de sustentos geométricos como funcionalidad de lo numérico. Los egipcios crearon sistema numérico con base 10, no posicional, sino aditivo. Un ejemplo concreto de lo anterior son las pirámides, éstas revelan, sin mayor objeción, su basto conocimiento tanto numérico como geométrico. También conocían, en su expresión más sencilla, la ecuación de segundo grado.

Las civilizaciones que usaron una base particular o un número límite para contar tales como 60, 20, 10 o la que sea, para el conteo de elementos u objetos, se valieron de la exponenciación de manera intuitiva. Todo esto para agrupar de manera sucesiva los elementos y así poder contarlos. Según, Pulido (2012) esto es parte de los fundamentos para trabajar con la base decimal actual: 1, 10, 100, 1000, entre otras. Dado que, cada nivel de agrupación corresponde al valor posicional de un dígito dentro del número. Si se toma como ejemplo el número 1025 se tiene:

$$1325 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$Una\ agrupación\ de\ 1000, tres\ de\ 100, dos\ de\ 10\ y\ 5\ unidades$$

Se destaca que con todo lo anterior, se visualiza una aplicación de lo meramente intuitivo con el objeto de lograr una identificación visual y directa de las cantidades de conteo.

1.2.4 La matemática griega

Basto fragmento de la filosofía aristotélica se consideraba devota del estudio la continuidad y del infinito como un estandarte divino. Existía una idea primitiva de función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables (González, 2013). Sin embargo, las nociones de cambio se apreciaban como externas a las matemáticas. Es decir, se reflexionaba sobre objetos matemáticos estáticos y sus relaciones. De esta corriente de pensamiento es donde se conduce inductivamente a nociones tales como proporciones, incógnitas o ecuaciones, no así al concepto de función.

El pensamiento reflexivo y filosófico son encarnados por exponentes tales como **Sócrates, Platón y Aristóteles**. En el ámbito de las ciencias médicas hay referentes como **Hipócrates** y en las matemáticas surgen nombres tales como el de **Pitágoras** (569 a.C – 475 a.C). A través del estudio de los triángulos y sus propiedades, los del círculo pitagórico abordaron sustanciosamente las proporciones entre ellas las medias aritméticas y geométricas, entre otras. Los pitagóricos encontraron el carácter incontable de la $\sqrt{2}$.

1.2.5 La Grecia de Alejandro Magno (300 a.C – 600 d.C)

Como consecuencia de las conquistas de Alejandro el Magno, la expansión de su imperio trae como secuela, la asimilación y diversificación de Europa en términos culturales y de saberes. Una amalgama de saberes de Persia, India y Asia menor. He aquí el surgimiento del máximo exponente de la matemática griega cuya influencia llega hasta nuestros días, Euclides (325 a.C – 265 a.C.).

Euclides. (325 a.C – 265 a.C) En sus aportaciones aborda diferentes propiedades de las proporciones, los números los considera enteros y discretos, sin embargo, las magnitudes son continuas. González (2013) contribuye:

> Mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será difícil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, solo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad en la variabilidad de los mismos (p.24).

Si bien es cierto que los babilonios, los egipcios y los griegos, manejaban el concepto de progresión geométrica, Euclides, toma todos estos argumentos preexistentes y pasa a la historia con su obra *Elementos.* Los problemas algebraicos los resuelve mediante métodos geométricos. Y, es en esta obra que aparece un enunciado que establece que para n y m enteros positivos, se cumple (Como se cita en Cambronero, 2022):

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

Arquímedes. (287 a.C – 212 a.C) Este matemático y Físico, pudo deducir el valor de pi (π) como $3\frac{1}{7}$, además de obtener el área bajo la curva de una hipérbola (Pulido, 2012). En su obra titulada *Psammite* ("El cálculo de los granos de arena" o "El Arenario"), demostró la necesidad de desarrollar una notación para ciertas potencias vinculadas a números grandes proveniente de cálculos astronómicos. Situación que se materializa con el trabajo de Diofanto. Con los sustentos Euclidianos y Arquimedianos es que más adelante, se puede mostrar y entender la idea de covariación entre una progresión aritmética y geométrica (Castillo, 2017)

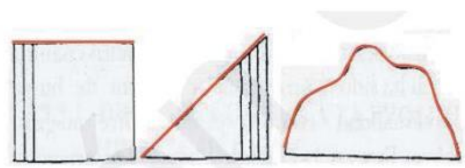
Diofanto de Alejandría. (200 d.C – 284 d.C) Considerado por muchos como el primer algebrista, intenta hallar soluciones exactas a ecuaciones, pero sin contar con una referencia geométrica. En su obra *Arithmética*, se exhiben, por primera vez y forma sistemática, símbolos algebraicos, abreviaturas para potencias y operaciones, sin referencia geométrica gráfica (Pulido, 2012; Vargas, 2017). De manera concreta, aparecen abreviaturas para la incógnita, sus potencias hasta la sexta, las operaciones adición y sustracción, y los inversos (Kline, 1972, como se cita en Vargas, 2017). Colerus (1972) afirma "es importante tener en cuenta que a un pueblo que escribía números concretos mediante letras, difícilmente podía ocurrírsele indicar con letras los números genérico" (como se cita en Vargas, 2017, p.49).

1.2.6 La Función Exponencial presentada en la Edad Media.

Se considera la edad media como la época o lapsus de tiempo comprendido entre el siglo IV d.C al siglo XV d.C. Específicamente, y siendo más rigurosos, entre los años 436 al 1453. Algunos de los eventos históricos significativos y que marcaron este período son la caída del imperio romano y la llegada de Europa a América. En este período temporal casi la totalidad de Europa pasa de los compendios de la Grecia ancestral al régimen Feudal. El pensamiento de la edad media estuvo presidido por la idea de explicar racionalmente los fenómenos naturales. Esto se produjo gracias a la recuperación gradual de la lógica de Aristóteles, de la matemática griega y árabe. Se desarrollan aportaciones a las nociones de cinemática y la geometría de las relaciones funcionales (Crombie, 1979, como se cita en González, 2013).

Al Jhwarismi (750 d.C – 830 d.C) y la matemática hindú-arábiga. En el período post caída del imperio romano los árabes se convirtieron en una especie de guardianes del conocimiento matemático y filosófico de los griegos. Algo así, como una comunidad guiada bajo un paradigma de resguardo y transmisión cultural (Pulido, 2012). Al Jhwarismi resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas valiéndose de métodos para despejar la incógnita, a lo que llamó *Al-jabr*, expresión parte de la etimología de la palabra álgebra.

Nicole de Oresme. (1323 – 1382) Músico y Matemático francés, uno de los precursores de las funciones. Oresme generalizó la noción de potencias, introduciendo y profundizando los exponentes fraccionarios (Ribnikov, 1991, como se cita en Vargas 2017). Enuncia expresiones irracionales, reglas de multiplicación y división de una expresión racional y una irracional, operaciones con expresiones que se encuentran elevadas a una potencia cualquiera, conjuntamente, enuncia la ley de distribución de potencias irracionales. Además, utiliza la representación gráfica de expresiones algebraicas (Pulido, 2012). Oresme afirmó que las propiedades de las figuras podían representar propiedades intrínsecas de la misma cualidad. Según González (2013), fue capaz de captar el principio de que una función, asociada a una variable, puede ser representada por una curva.



1.2.7 Historia de la exponencial en la matemática moderna (Siglos XV – XVI): Desarrollo de los aspectos algebraicos

En la etapa que comprende la edad moderna, existen momentos que demarcan un comienzo y un éxodo. Pues, como punto de partida se tiene el descubrimiento e invasión de América y el omega radica en la Revolución francesa. También, se hicieron posibles las navegaciones alrededor de todo el mundo, el primer viaje marítimo que circunda a África y, además, corresponde a una época en donde se masificó abrupta y rápidamente el interés y estudio por la astronomía (González, 2013).

Paralelamente, el mundo comienza a evolucionar, socialmente, con base en un cambio paradigmático sustentado estrechamente por lo religioso, estableciéndose nuevos cabos de desarrollo. El dominio europeo de Roma caduca con un quiebre religioso ampliándose la manera de ver al mundo y sus confines. El mundo es concebido como parte de un universo helio centrista gracias a las aportaciones de Copérnico y al descubrimiento y demostración de las órbitas elípticas de Kepler. El mundo se expande, las rutas se abren, y para esto fue importante el estudio astronómico, pues dichos cálculos permiten establecer las rutas comerciales (Pulido, 2012). Mediante la mejora de tediosos cálculos astronómicos, es que se comienzan a encontrar formas matemáticas que se introducen en la economía para eficiencia y eficacia. He aquí, el surgimiento de aportaciones tales como el interés compuesto bancario y asociados al capital de inversión. Lo que hoy en día, se conocen como aplicaciones de la función exponencial o verifica su funcionalidad.

Galileo contribuyó a la evolución del concepto de función, ya que buscó resultados y las relaciones que provenían de la experiencia más que las que provenían de la abstracción. Aquí, existe una disyuntivo con Oresme, para quien sólo con la teoría pura bastaba. Para Galileo, la experimentación estaba facilitada por los nuevos instrumentos de medida y así introdujo aspectos cuantitativos en campos en los cuales no se podía hablar antes más de que de forma cualitativa. (Rodríguez, 2013).

Nicolas Chuquet. (ca. 1450 – ca. 1500) Perfeccionó la simbología algebraica, respecto de la de Oresme, en el cual aún no existe un símbolo especial o permanente para la incógnita, que es designada por la palabra *premie* (Vargas, 2017). La denominación o potencia de la cantidad incógnita venía indicada por un exponente asociado al coeficiente del término en cuestión. Dicho sistema de notación devela los estatutos que norman las operatorias con exponentes. Chuquet previo a sus aportaciones, se había familiarizado con el trabajo de Oresme sobre proporciones *Algorimus proportionum* (Boyer, 2003, como se cita en Vargas, 2017). Según lo anterior, Chuquet planteaba, por ejemplo, que $72^1\ dividido\ sobre\ 8^3\ es\ igual\ a\ 9^{2m}$. Es decir:

$$\frac{72x}{8x^3} = 9x^{-2}$$

Esta notación, que se podría considerar "exponencial", viene justificada por la economía de la escritura de las multiplicaciones. Y, desde aquí, interesan dos puntos, el primero que Chuquet descarta las significaciones geométricas que posee el número primero de cantidad continua y sus multiplicaciones y, segundo, que el libre uso que hace de los números negativos, como exponentes, es una concepción adelantada para su época y admite la inferencia de que las multiplicaciones que realizaba con las potencias permitieron legitimar a los números negativos, por ejemplo. Esto significó un gran avance para las matemáticas (Martínez, 2000, como se cita en Vargas, 2017). Hasta estos entonces, y en términos matemáticos estrictos, no se puede establecer que se haya identificado que $x^0 = 1$, pues Chuquet usa el superíndice cero para indicar ausencia de variable.

Michael Stiefel. (1487 – 1567), matemático, fraile alemán y uno de los primeros seguidores de Martín Lutero. En 1544 es quien introduce por primera vez el término *exponente*, en su obra "*Arithmetica Integra"*. Aquí no se limitó a considerar, para efectos de estudio, de forma separada una progresión aritmética (PA) otra geométrica (PG). De manera contraria, declaró la importancia y beneficio práctico de una asociación o correspondencia entre ambas, lo que hoy en día se conoce como covariación (Vargas, 2017). Stiefel incluye los exponentes negativos y fraccionarios en todo su esplendor (Pulido, 2012). En términos coloquiales, Stiefel retoma lo propuesto por Arquímedes y estableciendo un contraste entre una PA y una PG y ancla o extiende dicho concepto al dominio de las potencias de una misma base o número con exponente racional y con exponente negativo (Castillo, 2017). Para un mejor entendimiento, es importante reflexionar sobre la tabla logarítmica de Stiefel, que es la siguiente:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Tabla 2 Tabla logarítmica de Stiefel

En términos de la comparación entre una PA y una PG, Stiefel propone que la suma en la parte superior de la serie aritmética corresponde a una multiplicación de la serie geométrica en la fila de abajo. Así, por ejemplo, $(-2) + (1) = -1$, en términos actuales sería $a_2 + a_5 = a_3$ (PA). Paralelamente, en la fila de abajo, se tiene $\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2}$, en términos actuales sería $a_2 \cdot a_5 = a_3$ (PG).

A los números de la serie aritmética en la parte superior, Stiefel los llama *"exponentes"* y a los números de la parte inferior simplemente los llama *"números".* Entonces, contemplando la base "2", Stiefel plantea lo siguiente:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right);\ 2^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right);\ 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \dots$$

Así, por ejemplo, el cociente entre $p^2\ y\ p^3$ resulta p^{-1}, esto se correspondería con el término -1 de PA (Kline, 1972, como se cita en Vargas, 2017). Otra contribución importante es que Stiefel usando la idea de exponentes fraccionarios de Oresme, genera un método o estrategia algebraica para resolver ecuaciones exponenciales. Como dato interesante, dentro de las observaciones que Stiefel expone, en su obra *Arithmetica Integra*, que "la multiplicación en la aritmética corresponde a la multiplicación por sí mismo (potenciación) en la geométrica" (Stiefel, 1544, como se cita en Castillo, 2017).

Jhon Napier. (1550 – 1617), matemático e inventor escocés que introduce la definición de logaritmo y, esto genera un argumento para un mejor entendimiento desde lo funcional o cotidiano, pues se da la existencia de un argumento físico. Nepier define al logaritmo como correspondencia cinética entre dos tipos de movimientos. Uno con velocidad constante cuyos el cual genera una serie aritmética de números enteros y otro movimiento con velocidad variable en donde se obtiene una serie geométrica o *antilogaritmo* (tabla 3).

Henry Briggs. (1561 – 1630), Matemático inglés que realiza cambios interesantes a la propuesta de Napier. Además, de construir la primera tabla de logaritmos en base 10. Gracias al acuerdo con Napier, de establecer el valor de "1" al logaritmo de "0", es que posteriormente se construye la tabla de logaritmos en 1619 (Pulido, 2012). Esto precisó una necesidad de aumentar los marcos de referencias desde lo abstracto, paso fundamental para establecer el concepto de función exponencial más a delante.

1.2.8 Función Exponencial en la Matemática Moderna: Un acercamiento en lo analítico y desde el tratamiento algebraico de exponentes de funciones (Siglos XVII – XVIII)

Los acontecimientos sociales que envolvieron la atmósfera de estudio de la exponencial vienen dados por una etapa inicial demarcada por la revolución francesa, pasando por revoluciones políticas y económicas de Europa, el apogeo de la búsqueda del conocimiento a través de la razón humana y hechos tales como la revolución industrial. Es en este período donde las ideas o argumentaciones se divulgaban con un fin de lid con la intencionalidad de obtener verdades, o fundamentos a través de la razón. En este apartado se continúa con una lista histórica de autores que aportaron para la construcción del concepto de función exponencial. Manteniendo un conducto regular ordenado desde lo cronológico y, manteniendo una coherencia desde lo argumentativo, matemáticamente hablando.

René Descartes. (1596 – 1650) Matemático, físico y filósofo francés es quien consolida, matemáticamente, los cambios en la naturaleza de lo que, hasta ese entonces se conocía como exponentes. Es uno de los procuradores de la disolución con las proposiciones griegas, ya que no sólo considera $x^2\ y\ x^2$ cómo representaciones área y volumen, respectivamente, sino simplemente como segmentos. Esto hace que los tratamientos algebraicos resulten mucho más flexibles (Vargas, 2017). Según González (2013), para Descartes x^2 no sugería un área, sino el cuarto término de la proporción $1\colon x = x\colon x^2$ y así, se puede considerar un segmento de unidad. De esta manera, cualquier potencia de una variable se puede significar o representar por un segmento de recta, pudiéndose generar esta construcción a través de la geometría euclidiana.

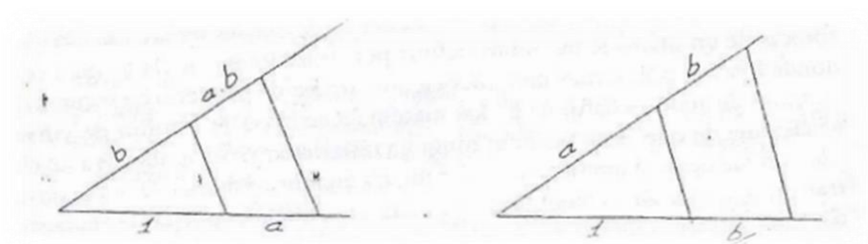


Figura 5 Determinación de productos y cocientes numéricos mediante segmentos de recta. Fuente González (2013, p.28)

Uno de los argumentos interesantes, dentro de las aportaciones de Descartes, fue el planteamiento de que cualquier punto del plano geométrico, se puede representar mediante un par ordenado, (x,y) o coordenadas cartesianas. Esto, simbólicamente, se puede significar como las distancias, que son trazos perpendiculares desde cada uno de los ejes del plano cartesiano hasta dicho punto. Esta idea permite establecer y poder concretizar la relación entre lo algebraico y lo geométrico, pues he aquí los fundamentos de lo que se conoce como *geometría analítica* (Pulido, 2012). Castillo (2017) expresa que Descartes "perfeccionó la notación de la función exponencial que venía dándose entre sus contemporáneos refiriéndose a ella como a^n (n, un entero positivo) marcando un gran un gran avance en el campo del álgebra simbólica" (Castillo, 2017, p. 54).

A raíz de los trabajos realizados por Descarte, surgieron aportes relevantes y significativos tanto para la concepción de la función exponencial como para la geometría analítica misma, pues se comienza a engrosar los argumentos matemáticos basados en correspondencias gráficas y algebraicas. **Christian Huygens** en 1661, argumenta y define la curva logarítmica dada por una PA en el eje de las "$abcisas$" y una PG en el eje de las "$ordenadas$". Esta curva logarítmica de dichos entonces hoy se concibe como la ***función exponencial.***

Gottfried Leibniz. (1646 – 1716) Matemático y filósofo alemán, fuertemente influenciado por Descarte, es uno de los pioneros en considerar los exponentes de las expresiones algebraicas como variables. Boa (1995) afirma "It was Leibniz who first introduced variable exponents. In 1679 he wrote to christiaan Huygens about the equation $x^x - x = 24$, which can easily be "seen"to have a solution $x = 3$, but for which none of known methods of solition of equation applied (p.7, citado en Castillo, 2017, p.54).

Gregory de Saint Vincent. (1584 – 1617) Matemático jesuita y geómetra belga, quien logra significar el logaritmo como el área bajo la curva de una hipérbola, recurriendo a la comparación entre el crecimiento geométrico de las abscisas y el aritmético de las áreas. Con esto confirma los resultados de los trabajos de Stiefel, Napier, entre otros.

John Wallis. (1606 – 1703) Matemático inglés y uno de los precursores del cálculo moderno, establece un punto de inflexión importante para el estudio de exponentes y su evolución algebraica. En Vargas (2017) se expone que, posterior a la etapa de estudio de curvas, la necesidad de homogeneizar las operaciones entre monomios y, la ampliación de índices o exponentes fraccionarios y negativos es que se experimenta, en el estudio matemático de la exponencial, una evolución de la noción hacia la conceptualización de lo que se denominan *exponentes continuos.* Wallis, propone una noción de índices fraccionarios y muestra cómo dicha ésta es válida tanto en escenarios geométricos como algebraicos. Incluso, la consideración de la idea de área bajo la curva engrosa la cantidad de argumentos para validar su definición aritmética sobre exponentes fraccionarios. Autores afirman que "su obra y, especialmente, su *Arithmetica Infinitorum* (1665) constituye la pieza fundamental para que la noción de exponente no natural sea aceptada de manera generalizada en la matemática de finales del siglo XVII" (Dennis y Confrey, 1665, citado en Vargas, 2017, p. 50).

Wallis mostró y demostró que $x^0 = 1$, recordando que el exponente igual a cero, para Chuquet, significa ausencia de variable, según Pulido (2012). Además, Wallis establece la relación $x^{-1} = \frac{1}{x}$ interpretando los enteros negativos como exponentes de la misma forma que se hace en la actualidad. Pues, define el exponente de $\frac{1}{x}$ como -1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, entre otros. Y, más aún, extiende esta definición a las fracciones (Vargas, 2012). De manera que, para la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$ el exponente sería $-\frac{1}{2}$, por ejemplo. En palabras de Carl Boyer se expresa lo siguiente:

> Nosotros solemos tomar ahora como lo más natural del mundo nuestra notación simbólica para las potencias y raíces, sin ponernos a pensar en la sorprendente lentitud con que se desarrolló esta notación a lo largo de la historia de la matemática (2003, p.338).

Sir Isaac Newton. (1642 – 1727) Matemático y físico inglés, entre otras disciplinas, y por lo demás, considerado uno de los más grandes de la historia, también generó aportes significativos en el estudio y presentación de la función exponencial, pues desarrolla en series muchas funciones algebraicas partiendo de series exponenciales (Pulido, 2012). Fue, junto con Leibniz, uno de los creadores del *Cálculo Infinitesimal*, del cual nacen el cálculo diferencial e integral. Newton atribuía a las matemáticas un valor instrumental. Bajo esta premisa, creía que los cálculos aportaban, especialmente, en la resolución de problemas concretos. Para Sir Isaac, el cálculo más allá de constituir un fin en sí mismos, constituyen un medio práctico para encerrar, en fórmulas precisas y sucintas datos e información con los cuales trabaja la mente humana (González, 2013). Esta disciplina permite, explotar una diversidad de posibilidades teóricas y experimentales, entre ellas las determinaciones de pendientes, variaciones, áreas de funciones continuas, análisis gráfico de funciones, incluyendo la función exponencial y su expansión en series.

Como dato importante, en 1683 **Bernoulli** examinó y profundizó el problema del interés compuesto. Durante dicho análisis y, recurriendo al teorema del binomio logra determinar que el $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se encuentra entre 2 y 3. Esto, denota un antes y un después, ya que, de manera implícita, surge por primera vez el número "e". En González (2013) se expone que, en 1960, "Leibniz le escribió una carta a Huygens en la que usa la notación "b" para lo que nosotros conocemos por e. Por fin el número e tenía nombre (aunque no sea el actual) y era reconocido" (p.30).

A finales del siglo XVIII y a raíz de las aportaciones de Newton, pero principalmente de Leibniz y Bernoulli, la noción de *función* se desprende de muchas deferencias matemáticas y toma, además, una postura analítica que, si bien se consideran en los escritos de Bernoulli, ésta se precisa casi a plenitud en el trabajo de Leonard Euler.

Leonard Euler. (1707 – 1783) Matemático y físico suizo quien precisa el concepto de función con la notación $f(x)$ en el año 1736, es decir, aplica la función f sobre un argumento x. Es más, la definición de función experimenta una evolución más cuando Euler define la función exponencial y la circunscribe dentro las denominadas funciones trascendentes (Vargas, 2017). La teoría de las funciones exponenciales se completa con el resultado de Bernoulli al encontrar el límite el cual Euler lo designa con la letra "e". Posteriormente Euler encuentra el valor de e^x.

Realizando un análisis un poco más preciso, Euler realizó una serie de descubrimientos respecto del número "e", pero no fue hasta 1748, en donde en su obra titulada *Introduction in Analysin Infinitorum*, en donde Leonard realiza un tratamiento completo, riguroso y cabal respecto de las ideas que se contemplaban alrededor de e (Morales, 2011). En términos generales, Euler demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \text{ ; y además que } e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Euler también estableció la notación para lo que son las funciones trigonométricas, la letra "e" como base del logaritmo natural, $\sum$ para la sumatoria de sucesiones y también la letra "i" como unidad imaginaria, entre otros aportes. Matemáticos afirman que Euler aportó racionalización a la simbología matemática con expresiones precisas, pertinentes y por sobre todo elegantes (Pulido, 2012). Euler utilizó la función exponencial y logarítmica para sus demostraciones, valiéndose de sus series de potencias para desarrollar la función exponencial enfocada a los complejos. Las expresiones emblemáticas del trabajo de Euler y, que, además, son consideradas como la expresión de belleza y elegancia en matemáticas son:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e^{i\varphi} = cos\ \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{1\pi} + 1 = 0$$

Otro análisis interesante es el que muestra Vargas (2017). En donde devela que Euler plantea la obtención del desarrollo de series infinitas para la función exponencial, suponiendo un ω infinitésimamente pequeño, de manera que, aunque no sea igual a cero, se verifique lo siguiente:

$$e^{\omega} = 1 + \psi$$

$$con\ \psi\ un\ número\ también\ infinitésimamente\ pequeño$$

Dentro de las reflexiones de Euler, ψ se aproxima a cero, de manera que se cumple:

$$a^{\omega} = a^0 = 1$$

Siendo la diferencia, una cantidad infinitesimal dada por la expresión $\psi = a^{\omega} - 1$. Además, considera $\psi = k\omega$ con k un número finito dependiente de la base "a". Por consiguiente, se usando el binomio generalizado de Newton, obtiene la expresión:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{k^4x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots +$$

De aquí obtiene dos resultados, el primero haciendo $x = 1$. Con esto obtiene una serie para la base "a" en función de "k", logrando:

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{k^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots +$$

Euler, considera la base "a" un número positivo mayor que 1, pues para la obtención del segundo resultado escoge la base "a" como una base concreta para la cual $k = 1$. Ahora como $x = k = 1$, es que Euler obtiene una expresión para la base concreta "a", esta es:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots +$$

Euler obtuvo esta base "a" llegando al valor $2{,}71828182845904523560 28$. A esta constante es la que designó con la inmortal y sublime letra "e". Ahora, si se tiene que $k = 1$ y $a = e$, entonces se obtiene la expresión:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1.2.9 Función Exponencial en la Matemática Contemporánea (Siglo XIX en adelante): Función Exponencial desde la teoría de números y funciones arbitrarias

Las reflexiones y análisis para esta época, concebía directrices cada vez más orientadas a un mayor nivel de abstracción y riguridad en el lenguaje matemático. Autores como Kline (1972) consideran que las aportaciones de Newton fueron la clave para la extensión de las notaciones contemporáneas de los exponentes negativos y fraccionarios (citado en Vargas, 2017). Esto, ya que, Carl Gauss, en 1801, adopta dichas ideas para adoptar y proponer que $x^2 = x \cdot x$. Notación que se convirtió en la usual.

Carl Friedrich Gauss. (1777 – 1855) Matemático, físico y astrónomo alemán, conocido como el "Príncipe de las Matemáticas", uno de los autores del teorema fundamental del álgebra, el cual establece que un polinomio de grado con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces o sea los números complejos forman un cuerpo algebraico cerrado.

Pero, una de las aportaciones, dentro de las muchas que tuvo para con las matemáticas, hacia el estudio y entendimiento del comportamiento exponencial, se da cuando obtiene la inmortal campana de Gauss. Esto es, una curva que corresponde a la distribución de probabilidades de una variable continua, conocida como curva de función de probabilidades (Pulido, 2012). Esta curva, o comportamiento, se puede describir mediante una función exponencial dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{u^x}{x!} e^{-u}, \text{ con } x = 1, 2, 3, \ldots$$

Se destaca que la expresión anterior tiene aplicabilidad y vigencia hasta la actualidad, siendo analizada en el estudio de las probabilidades y estadística de diversas carreras universitarias así también como en la enseñanza secundaria.

Gustave Dirichlet. (1805 – 1859) Este matemático alemán realizó aportes importantes en lo que se considera la noción de funciones arbitrarias. Una de las premisas utilizadas como sustento fue la de Cauchy (1827):

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (citado por González, 2013, p.34).

Dirichlet, es quien perfecciona y la definición y el entendimiento del concepto de función, proponiendo un trabajo sobre la representación de Funciones Arbitrarias en series de senos y cosenos. Aquí, expone una definición de función sin el requerimiento de relacionar las cantidades involucradas. Recurrió a una prueba analítica larga en la que utiliza la serie de Dirichlet como otro desarrollo de la función exponencial, en sus trabajos de convergencia (Pulido, 2012):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-z}$$

1.2.10 Acerca de la historia de la Función Exponencial

Desde la configuración de la especie humana, los individuos han experimentado la necesidad de impactar sobre la realidad material exterior, una actuación que ha dirigido el desarrollo histórico dentro de los cambios culturales paulatinos que sufren como seres en sociedad (Prats, 2012). Bajo esta premisa, resulta hacedero inferir que, las prácticas arraigadas al comportamiento de un grupo de individuos en sociedad (Soto y Cantoral, 2014), o en comunidad, cimentan el conocimiento que éstos adquieren en virtud de un mejor entendimiento del mundo que les rodea, es decir, el conocimiento se concibe como el resultado de cómo los seres humanos significan a la naturaleza o al mundo en su evolución histórica (Ugalde, 2014).

En matemática, no es diferente la situación, respecto del párrafo anterior, puesto que sólo cambian la dimensión del conocimiento, y, además, entendiendo que la matemática permite entender, modelar y analizar comportamientos propios de la naturaleza y de lo cambios evolutivos de la sociedad al enfrentarse a ésta. Así, según, Pulido (2012), cualquier conocimiento en particular, incluida la matemática, es un producto social resultado de las interacciones entre personas y comunidades, en circunstancias y momentos históricos que estimularon su producción intelectual, difusión y materialización, respondiendo a los requerimientos e interese de cada época en particular. Prats (2012), bajo la inferencia de que el conocimiento resulta la necesidad del ser humano para actuar sobre su exterior en virtud de darle sentido a su mundo interior, afirma lo siguiente:

> Esta necesidad imprescindible de actuar ha puesto en relación el mundo exterior al ser humano con su mundo interior. La relación básica se ha establecido a través de la actividad cognoscitiva: los seres humanos necesitan conocer en su interior mediante la fabricación de imágenes e ideas (es decir, la razón cómo facultad específica de los seres humanos y pensamiento cómo actividad resultante de esta facultad) para operar en la realidad espacio-temporal que les circunda y transformarla en el sentido que ellos deseen (p.3).

Según lo expuesto en este apartado, es palpable la correspondencia entre cultura y ciencia, como las matemáticas. Pues, el trayecto histórico del del saber matemático, por ejemplo, devela el esfuerzo humano que hay detrás de cada logro, debates, confrontaciones, entre otras, dentro del desarrollo de la sociedad misma (Pulido, 2012) en donde dicha correspondencia resulta intrínseca. En el caso de la función exponencial se da el mismo razonamiento, pues, su estudio y presentación a través del tiempo ha sufrido cambios en su estética, discurso, tratamiento y análisis de acuerdo con la situación histórica imperante en cada época, según la línea temporal que resulta de lo abordado dentro de los incisos 1.2.1 al 1.2.9, del presente capítulo.

La forma que ha tomado el discurso matemático dentro de lo que compete a la función exponencial, es un fiel reflejo de cómo debían responder, los seres humanos, a los requerimientos del mundo según la percepción de éste, acorde al paradigma imperante en la época. Eventos importantes que marcaron hitos sociales y la dirección evolutiva del mundo, desde la edad antigua hasta la contemporánea, pasando por la edad media y moderna, también influyeron en la forma de abordar este objeto matemático. Pues, si bien es cierto, que la significación y análisis respecto de la función exponencial ha sufrido cambios importantes y significativos a través de la historia, éstos, no necesariamente se dieron en virtud de un requerimiento o necesidad pedagógica, ni mucho menos didáctica, dado que este concepto es relativamente fresco, dentro de lo contemporáneo.

A raíz de las diferentes épocas que han determinado la trayectoria evolutiva del mundo, se aprecia que las aplicaciones del objeto matemático en cuestión son de carácter científico, pero con para responder una necesidad del mundo real, dentro del desarrollo holístico del ser humano. Así, la cosmovisión social ha diversificado las situaciones de estudio y análisis de las funciones exponenciales, partiendo de la edad antigua en donde se conciben para reflexionar sobre la noción de número y, como resultado del tratamiento aritmético de razones y proporciones. Luego, ya para la edad media, se presenta el mismo objeto matemático, pero desde una mirada más gráfica y bajo la sombra del entendimiento de un comportamiento tendencial, ya sea de crecimiento o decrecimiento. El consiguiente cambio en su estructura y forma de estudio se da a raíz de otro cambió social (época), en donde, la función exponencial se aborda desde una perspectiva más concreta orientado hacia su representación gráfica o sintética, un sistema de registro que denote una variación o covariación entre 2 progresiones. Todo esto, bajo un paradigma mundial, fuertemente impactado por lo religioso. Es decir, una vez entendida la noción del comportamiento de crecimiento y decrecimiento en la época antigua, luego en la edad moderna se vale de la geometría para darle una representación más concreta a la idea matemática trabajada durante la antigüedad.

Los requerimientos, una vez disipados los períodos de la antigüedad y la edad media, radican en paradigmas más sustentados, desde la rigurosidad matemática-algebraica y con un amplio impacto de la razón, de manera que, la abstracción es uno de los aspectos emergentes dentro del estudio de las funciones exponenciales. Esto se sustenta en la medida que, para dicha época, comienza a tomar fuerza, bajo demostraciones rigurosas y válidas, la noción de función. Ahora el mundo y la naturaleza se entendían matemáticamente, pero, desde la comprobación empírica y, por qué no teórica, de fenómenos de crecimiento y decrecimiento, para este caso en particular, presentes en él. Esto demarca, el discurso matemático de la función exponencial en la edad moderna, donde surge una expresión analíticas particular acompañado de una depuración pulcramente algebraica (belleza matemática presentada por Euler, por ejemplo). Se trabajan exponentes algebraicos y se precisan tanto los fenómenos como las situaciones de aplicación o funcionalidad del comportamiento denotado por la función exponencial, y, es más, se relaciona estrechamente con lo logarítmico desde, la noción matemática de un comportamiento inverso. Para finalmente, en la edad contemporánea, seguir, ampliando las aristas de reflexión, análisis y estudio, desde la mera abstracción. Esto es, que se la función exponencial soslayada al estudio de funciones arbitrarias, análisis de cálculo y precálculo, sucesiones o como resultado de ecuaciones diferenciales. La siguiente figura muestra la trayectoria temporal recién descrita de la presentación de la función exponencial a través de la historia:

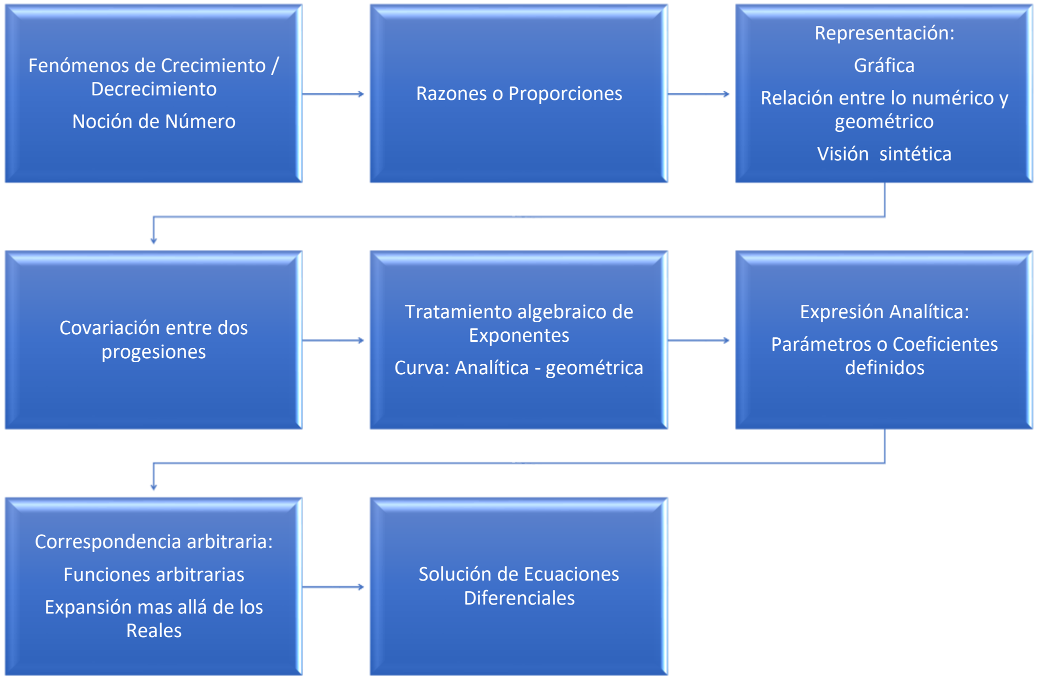


Ilustración 2 Figura 6 Presentación de la Función Exponencial a través de la historia. Creación propia

1.3 El sismo y la Función exponencial

En la dimensión disciplinar de las ciencias, ya existen aportaciones que abordan, desde el punto de vista técnico, la relación función exponencial-sismo. Éstas, con un fin meramente científico que subyacen a merced de divulgaciones para disciplinas tales como la física o la sismología. Contribuciones tales como la de Tobita (2016) exponen nociones importantes para entender la correspondencia entre las funciones logarítmicas y exponenciales para modelar el comportamiento post sísmico de territorios en las costas del pacífico. Mediante la combinación de las funciones logarítmicas y exponencial se pueden obtener datos y entender de manera más simple, el desplazamiento de superficies después de haber experimentado un sismo, involucrando variables tales como el desplazamiento y tiempo. La importancia del método anterior reside en la simplicidad para la obtención de información cuantitativa en contraste con otros métodos científicos más rigurosos y con mayor demanda de tiempo como el *método de los cuadrados*. Según Tobita (2016) "el modelo log + exp + exp tienen un rendimiento de ajuste y predicción a corto plazo significativamente mejor que los modelos de función de decaimiento convencionales" (p. 11).

En cuanto a la relación entre la función exponencial y la energía que liberan los terremotos, autores como Trifunac y Novikova (1995) entregan significativos aportes para el mundo de la ciencia de la tierra. Los investigadores recién citados, afirman que el tiempo de radiación energética de la falla de California, una de las más grandes del planeta, es consistente con estimaciones de tamaño y velocidad de dislocación de la falla. Según Trifunac y Novikova (1995), Dicha duración de energía liberada se puede describir mediante la función exponencial para magnitudes particulares de movimientos telúricos, magnitudes en grados Richter que están dentro de los intervalos]2,5; 7,5[. En palabras coloquiales, existe un camino para modelar características asociada al comportamiento sísmico valiéndose de la función exponencial.

A pesar de la fecha de estas aportaciones, su significación es tal que son consideradas como base importante de investigaciones más actuales como las de Peng Feng et. al (2019), en donde mediante las mismas relaciones, expuestas en el párrafo anterior, de puede entender y analizar la ruptura y deformaciones de fallas sísmicas.

Generalmente, las ondas sísmicas trasmiten parte de la energía que es liberada en el foco de un terremoto y su propagación. La energía sísmica se libera por la perturbación que tiene lugar el foco en el interior de la Tierra. Kanamori (1977) propone el cálculo de la magnitud a partir del momento sísmico, así como la magnitud energía Me a partir de la energía sísmica radiada del foco sísmico (Esis). Esta última puede ser calculada a partir de la relación Boatwrigth y Choy (1985, citado en Ordóñez, 2005):

$$M_E = (2/3)*\log Esis - 2.9$$

Ecuación 1. Ecuación de Magnitud sísmica en función de la energía liberada; Me: Magnitud - Esis: Energía del sismo

La relación de la magnitud es logarítmica, mientras la relación entre la energía en función de dicha magnitud es exponencial, esto último se desprende después de realizar ciertos tratamientos algebraicos a la expresión de la *ilustración 2*. Del trabajo realizado por Peláez (2011), se puede analizar cualitativamente los factores asociados a la energía liberada mediante la expresión anterior. Otros aportes interesantes se dan en los trabajos realizado por el experto en sismología, el Dr. Antoni Correig, activo hasta el 2009, en donde se entrega de una manera algebraica más simple, una expresión matemática que relaciona la función exponencial y la logarítmica. Según Correig (1977), la expresión más simple y con cercana aproximación para obtener la energía liberada en un sismo, es aquella que deriva de lo empírico y se desprende de la expresión:

$$logE_s = 11{,}8 + 11{,}5\ M_S$$

Ecuación 2. Ecuación de Energía sísmica (E_S) en función de la magnitud sísmica (M_S). Correig (1977)

Siguiendo con la corriente teórica y de pensamiento de este breve apartado para la construcción del estado del arte, se destaca que, a pesar de la importancia de las aportaciones recientemente expuestas, éstas no dejan de ser parte del paradigma científico, pero orientado a la entrega de relaciones puramente matemáticas y de análisis meramente cuantitativos, recordando que la presenta investigación tiene un norte didáctico u orientado hacia la educación matemática que involucra y relaciona los conceptos y nociones descritas recientemente en un contexto de enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar.

Un aspecto interesante es que los reportes sísmicos son ricos en argumentos o registros gráficos. Es decir, entregan una serie de información de esquema que, para efectos de la propuesta a presentar, aportan una fuente de información que el estudiante perfectamente podría significar, desde lo que ya conoce, y sin la necesidad de abordar obligatoriamente lo algebraico como punto de partida para el estudio de la función exponencial. Esto, dado que, la energía que liberan los sismos está en correspondencia exponencial con la magnitud de éstos e incluso el tiempo que transcurre durante el evento. Eventos sísmicos que, además, de proveer la situación o fenómeno en donde ocurre el génesis de las prácticas sociales que dan vida al objeto matemático, son parte de la cultura y evolución del territorio nacional, esto es, Chile país activamente sísmico

1.4 Educación matemática y funciones de Crecimiento o Decrecimiento: Didáctica de la Exponencial

En el ámbito de la matemática educativa existen diversas investigaciones y autores que han abordado el estudio y significación de la función exponencial desde lo pedagógico y didáctico. En este estado del arte, se presentarán y degustarán investigaciones que tengan constreñido vínculo con las prácticas sociales, construcción o reconstrucción de significados del objeto matemático en cuestión. Según Tarira et. al (2020), el desarrollo del pensamiento matemático se desarrolla en los humanos enfrentando la cotidianidad, esto es las prácticas sociales.

Parte importante de las aportaciones hacia el entendimiento del comportamiento exponencial se desprende de investigaciones de nociones cercanas y estrechamente relacionada, desde lo matemático, como la función logaritmo. En Ferrari (2010), por ejemplo, se presentan argumentos epistemológicos que permiten al lector establecer ciertas inferencias respecto del comportamiento de crecimiento exponencial dado que, se trabaja con la noción de función inversa de manera intrínseca, progresiones y prácticas sociales vinculadas a la construcción del concepto logaritmo, un escenario para pensar en la relación inversa entre lo logarítmico y la exponencial, desde la mirada de funciones.

Ferrari (2010), para promover la construcción del concepto de lo logarítmico, presenta, justificada y rigurosamente, argumentos para construir y significar una epistemología del comportamiento logarítmico que, desde la modelación matemática, se percibe como un resultado o producto de la covariación entre progresiones aritméticas y geométricas. Según la experta “lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición, cercana a la definición primigenia de logaritmo alejado del ambiente escolar” (p.55). Entonces, por una parte, se tienen las prácticas sociales vinculadas a patrones de crecimiento presentes en la naturaleza que, desde la matemática educativa o socioepistemología (Cantoral et. al, 2006), es el foco de interés que sustenta este trabajo y, por otro lado, la argumentación matemática para robustecer la construcción del objeto matemático implicado. Pues, si se realizan artilugios matemáticos apropiados, se establecen relaciones epistemológicas coherentes y pertinentes, y se sitúa una realidad o fenomenología propia del país como la sismicidad, ocupando la expresión de la $Ecuación\ 2$ de Correig (1977), se podría proponer una covariación entre el comportamiento de la magnitud y energía liberada de un sismo.

Además, existen trabajos a nivel de Bachillerato que tienen por finalidad específica, la caracterización de la función exponencial mediante una covariación de comportamientos o fenómenos de crecimiento suscitados por la modelación matemática. Méndez, Martínez y Ferrari (2017) proponen una forma de aproximar o modelar la función exponencial mediante el comportamiento covariacional sustentado en el trabajo de Confrey y Smith (1995) en donde la aproximación covariación al de una función exponencial se percibe como una relación de dos progresiones, cada una de ellas construida de manera independiente (como se cita en Méndez et. al, 2017).

Por otra parte, pero dentro de la misma filosofía disciplinar de la didáctica de las matemáticas, también es posible localizar contribuciones para suscitar la significación y entendimiento de la función exponencial, con la premisa de modelar o imitar situaciones de la vida real (Campo y García, 2021). Estos autores, incorporan a la ya expuesta idea de las covariaciones la teoría de las representaciones semiótica de Duval (1995). Esto, debido a la capacidad de flexibilidad y de relacionar ésta última teoría con otras corrientes de pensamientos de la didáctica de la matemática. Este acercamiento a la modelación de la función exponencial es conocido como *enfoque de conexiones matemáticas* y se percibe como una manera de reducir la dificultad de entendimiento del comportamiento exponencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Campo y García, 2021).

Dentro de los tributos para engrosar las argumentaciones que surgen de la descripción de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, Tarira et. al (2020) trastoca un punto clave de discusión, reflexión y análisis. Esto es, entender y significar la noción función exponencial promoviendo un acercamiento cualitativo que se enraíce en el génesis de las actividades de la naturaleza a las cuáles el ser humano tiene acceso y participa. De esta manera, es resulta más hacedera y significativa su comprensión y, en esa misma línea, reducir la consecuencia de que el estudiantado no vincule la construcción matemática a la cotidianidad y así se genere, en ocasiones, conocimiento descontextualizado y carente de sentido. En palabras de Tarira et. al, "las funciones exponenciales, son de suma importancia para la comprensión de las actividades humanas, vinculadas a diversos campos como la economía, la biología, la física la medicina o la demografía" (2020, p. 40). Esto, deja entre ver que, entender la naturaleza de la función exponencial, al momento de su estudio, facilita y promueve concretamente, establecer relaciones interdisciplinarias, resaltando así, el carácter funcional del objeto matemático función exponencial (Soto y Cantoral, 2014) estudiado desde las prácticas sociales, en este caso.

Con respecto a la idea de reconstruir o resignificar la noción función exponencial o fenómenos de crecimiento y decrecimiento, se puede adentrar en las obras realizadas por autores tales como Rodríguez et. al (2021) y González (2013). Trabajos que aportan una remirada al estudio de la función exponencial bajo una funcionalidad científica y social que implica modelar, desde lo empírico, la realidad más allá del contexto de enseñanza tradicional.

Dentro de las contribuciones asociadas con la pesquisa del párrafo anterior, las investigaciones orientadas hacia una resignificación o reconstrucción del comportamiento exponencial, siguen lineamientos conceptuales o cualitativos para poder significar el objeto matemático desde lo epistemológico, es decir, la función exponencial puede ser abordada desde una perspectiva constructivista con nociones sociales que derivan de modelar fenómenos reales de incremento y decrecimiento presentes en la naturaleza, bajo una rigurosidad empírica (Rodríguez et. al, 2021). Entre los argumentos que sustentan la propuesta de Rodríguez et. al (2021) se encuentran compendios vinculados, primeramente, al entendimiento del comportamiento exponencial. Existen, también, aportes de autores tales como Martínez-Sierra (2002), en donde se proponen artilugios matemáticos para realizar tratamientos en los exponentes, según sea el sistema numérico en el que se trabaje. Además, de los significativos trabajos didácticos abordados por Ferrari et. al (2017) y Confrey y Smith (1995), autores ya citados dentro de este mismo apartado.

Paralelamente, en Rodríguez et. al (2021) también se utilizan sustentos que guardan relación con acopiar situaciones, fenómenos y registros que permitan ampliar las posibilidades de significación, pero, al igual que la mayoría de los expertos citados con anterioridad, también basados en la modelación de fenómenos reales que orienten hacia la conceptualización de la exponencial con fines didácticos y pedagógicos. Para esto, se presentan, como sustentos, aportaciones otorgadas por Campo y García (2021) que derivan del entendimiento de la función exponencial desde las conexiones matemáticas, pero complementadas con algunos constructos del enfoque ontosemiótico. Bajo esta misma premisa, también se es posible evidenciar sustentos que ameriten situar procesos de enseñanza y aprendizaje que se recopilen datos empíricos y se trabajen desde lo tabular, lo algebraico y lo grafico para obtener una más amplia gama de ideas o argumentos que permitan construir un concepto de lo exponencial, Bush et. al (2015). Pero, aun así, se destaca la relevancia de lo algebraico como punto de estudio o noción previo al tratamiento gráfico.

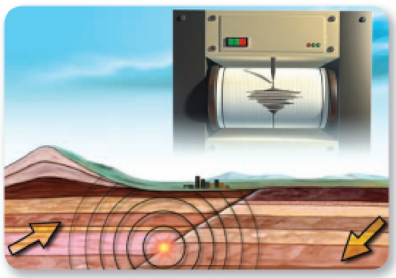
Ahora bien, dentro de todos los autores citados y todos los argumentos expuestos dentro de los apartados 1.1, 1.2 y 1.3, es posible establecer dos aristas que, para efectos de la presente investigación, permiten generar una atmósfera de discusión y reflexión, desde el punto de vista de los sustentos para el estado del arte y las argumentaciones de la problemática que demanda el mismo sistema escolar. Estas son las prácticas sociales vinculadas a un fenómeno natural entendido desde la ciencia y lo cualitativo y, la modelación como método para describir o imitar alguna parte del mundo real o fenómeno natural en términos matemáticos (Méndez et. al, 2016; Villa-Ochoa, 2007).

Finalmente, y en virtud del estado del arte presentado, se percibe que existen significativos aportes que abordan y exponen, de manera rigurosa y fehaciente, la relación entre las funciones exponenciales y los fenómenos sísmicos, tales como las magnitudes y liberación de energía, pero éstas no dejan de ser meramente científicas sin fines escolares, pedagógicos o didácticos. Además, también se aprecia dentro en el desarrollado en los puntos 1.2 y 1.3 que, para la reconstrucción o resignificación de la función exponencial, se utilizan diversas situaciones y registros que permitan ampliar las posibilidades de significación del concepto de manera que, se potencie lo cuantitativo con complementos cualitativos. Pero, se destaca que, tanto a nivel sudamericano como internacional, no se cuenta con un amplio bagaje pedagógico y didáctico que relacione o vincule la significación de la exponencial valiéndose de fenómenos sísmico o, siendo más específicos, que ocupen la energía que liberan los sismos dentro de territorios perteneciente a zonas activas del planeta. Pues, es en esta arista que la propuesta y ambición de la presente investigación presupone un evidente, pero satisfactorio desafío en cuanto a la modelación mediante la vinculación de situaciones de sismicidad, prácticas sociales y resignificación de la función exponencial como medio para promover la cultura científica. Sólo en un breve apartado, de 2 páginas, de un programa de profundización, el cual tiene una extensión de 48 páginas, propuesto por el MINEDUC desde el año hasta el año 2018, en donde se abordan los terremotos como situación para calcular y modelar, someramente, la función logaritmo (Huircán y Carmona, 2013). En la siguiente figura se expone la presentación de los terremotos como situación para modelar la función logaritmo en el documento recientemente citado.

1) Chile está ubicado en una franja geográfica llamada Cordón de fuego del Pacífico, donde se producen una gran cantidad de temblores y por la alta concentración de volcanes activos que existen en su territorio, somos uno de los países con mayor extensión de montañas en el planeta. Pero, no tan solo esto hace peligroso vivir en este país, su ubicación sobre una de las placas tectónicas que rodean el océano Pacífico con más movimiento de la Tierra, convirtiéndolo en uno de los países más sísmicos del mundo y donde se han registrado los terremotos más fuertes en la historia de nuestro planeta.

Los terremotos son medidos por medio de dos escalas: la de Richter, que mide la magnitud de un sismo y que da a conocer la energía liberada, y la escala de Mercalli, que representa la violencia con que se siente un sismo en diversos puntos de la zona afectada, siendo más subjetiva porque la intensidad aparente de un terremoto depende de la intensidad del epicentro a la que se encuentra el observador; es una escala que va de I a XII, y describe y puntúa los terremotos más en términos de reacciones y observaciones humanas que en términos matemáticos, a diferencia de la escala de Richter. Esta mide la energía del sismo en su epicentro y se basa en su modelamiento logarítmico común de la amplitud máxima de la onda medida en milímetros por medio de la función:

$M = \log(A \bullet 10^3)$, donde: M : es la magnitud del sismo.
A : Amplitud del sismo medida en milímetros (mm) en un sismógrafo.



El sismógrafo, mide la amplitud del movimiento telúrico.
En este caso, el sismo tuvo una amplitud de 23 mm:
a) Calcular la magnitud del sismo.
b) ¿Qué magnitud tiene un sismo de amplitud 25 mm?
c) Completar la tabla y graficar para las diversas amplitudes de sismos:

Solución
Complete lo que falta en cada caso:
a) Para calcular la magnitud del sismo evaluamos A=23 mm en:
$M = \log(A \bullet 10^3) \longrightarrow M = \log(\ldots\ldots\bullet 10^3) = \ldots\ldots$
b) Para calcular la magnitud del sismo evaluamos A=25 mm en:
$M = \log(A \bullet 10^3) \longrightarrow M = \log(\ldots\ldots\bullet 10^3) = \ldots\ldots$

TIPS
La escala de Richter, que mide la magnitud de un terremoto, se escribe en términos logarítmicos

Figura 6 Terremotos como situación para modelar F. Logaritmo en el programa MINEDUC 2013 (Huircán y Carmona, 2013)

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Socioepistemología desde las Prácticas Sociales y el Fenómeno de Exclusión

A diferencia de las corrientes de pensamiento o de matemática educativa que centran su foco de investigación en el objeto matemático, la socioepistemología busca edificar una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas (Cantoral et. al, 2015). Esto implica, rasgos que van más allá de lo cognitivo o de lo semiótico. Expertos en matemática educativa afirman:

> La epistemología de las experiencias busca intervenir en el procedimiento didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral et. al, 2006, p. 85).

En la enseñanza tradicional, el centro de interés yace en los acercamientos epistémicos tradicionales, el conocimiento resulta de adaptar explicaciones teóricas, impuestas abruptamente, con cierta cantidad de evidencias empíricas. Esto, en cierto sentido, ignora el rol que los escenarios culturales, históricos e institucionales juegan en las actividades humanas o de construcción social (Ugalde, 2014). Así, la Socioepistemología bosqueja una reflexión de la noción matemática, social, histórica y cultural bajo una situación que problematiza el conocimiento matemático bajo las circunstancias de su construcción, naturaleza y divulgación (Cantoral y Farfán, 2004, citado en Cantoral et. al, 2006). Bajo esta perspectiva, un conocimiento adquiere el estatus de saber, sólo en la medida en que se construya desde las prácticas sociales y cuyo fin se corresponde con la *divulgación científica* mediante las prácticas sociales hacia la sociedad.

Las PS, en donde los conocimientos se transforman en saberes, desde la experiencia, se *divulgan* en discursos que facilitan la significación en matemática logrando acuerdos entre los participantes de la construcción social. Este discurso es el Discurso Matemático Escolar (Cantoral 1990, citado en Cantoral et. al, 2006). El dME se extiende a horizontes más allá de la organización de los contenidos temáticos o de su función declarativa (impositiva) en el aula, esto es, llega a cimentar bases comunicativas en donde se generan acuerdos y construcciones semióticas compartidas y recíprocas, esto determina la unidad cultural (Minguer, 2004, citado en Cantoral et. al, 2006). La PS surgen en situaciones o contexto socioculturales como parte de las interacciones sociales y cognitivas que se originan en las explicaciones, discursos y transformaciones del entorno (Cantoral, 2013). En consecuencia, las prácticas sociales regulan, norman y permiten efectuar acciones concretas y premeditadas. En esta arista, el diálogo y la comunicación adquieren sentido en las comunidades y en las interacciones individuales que determinan la identidad de los participantes (García, 2018). Sustentando lo anterior, Cantoral (2013) expone que las PS están compuestas por cuatro funciones específicas la cuales son: Normativa, Identitaria, Pragmática y Discursiva.

Figura 1 Funciones de las Prácticas Sociales (Cantoral, 2013)

Cantoral y Reyes (2012) afirman que "La socioepistemología, como enfoque teórico, se cuestiona en primer término elé se enseña, y no sólo el cómo, replanteándose para ello un análisis en profundidad del saber matemático a través de su discurso Matemático Escolar" (p.60). De manera que, la importancia para el entendimiento depurado del dME se reconoce que la matemática escolar es producto de un proceso largo y complejo de selección y, que la transposición didáctica asociada traslada el saber sabio hacia un saber enseñado (Cantoral y Reyes, 2012). Dado que el dME implica una serie de características que, desde el paradigma tradicional, impone violentamente las nociones desde lo algebraico obligando al estudio mecánico y monótono en los procesos de enseñanza de las matemáticas, es que existen, de manera muy acotada pero profunda, investigaciones que han detectado sus repercusiones en la construcción del conocimiento matemático. Soto (2010) realiza las siguientes aportaciones:

- La atomización de conceptos: No incluye componentes culturales y sociales
- El carácter Hegemónico: Supremacía de argumentos, significados o tratamientos sobre otros.
- La matemática como un conocimiento acabado y continuo: Las nociones se presentan como verdades absolutas e inmutables, con un cierto grado de orden en su estudio.
- El carácter utilitario y no funcional del conocimiento matemático: El carácter utilitario se antepone a cualquier otra cualidad.
- La falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar: La matemática queda soslayada al hecho de responder a los requerimientos de otras disciplinas. La monotonía, además, implica falta de marco de referencia para el docente.

Todo lo anterior permite develar el fenómeno de exclusión como la "imposición de argumentaciones, significados y procedimientos asociados a los objetos matemáticos que ha promovido el dME y que induce a que los actores didácticos sean excluidos de la construcción del conocimiento matemático" (Soto y Cantoral, 2014, p. 1528). El estudiante queda invisibilizado del proceso de enseñanza.

Tradicionalmente, la matemática ha quedado a merced de lo preexistente, pues, se ha considerado independiente de las prácticas que la acompañan, así el conocimiento matemático es concebido como un sistema de verdades o estatutos válidos e inmutables, no modificables por la experiencia de la socialización humana (Espinoza, citado en Soto y Cantoral, 2014). El individuo queda ajeno, marginado total o parcialmente del proceso de construcción social del conocimiento matemático. Lo que se busca, a la luz de la Socioepistemología, es el rediseño o resignificación del dME de manera natural, incluyendo al individuo, en la interacción con otros individuos, en la construcción de significados, en este caso matemáticos. Según Soto y Cantoral (2014), el fenómeno de exclusión no hace referencia a una condición meramente de marginación respecto de un proceso o fenómeno, que es a lo que recurrentemente se suele a atribuir cuando se habla de este acercamiento. Desde este enfoque teórico, en la investigación de la exclusión en educación se perciben 2 planteamientos, pero que se relacionan entre sí.

> El primero tiene relación con una forma de excluir a los estudiantes a partir de la imposición de significados, socialmente establecidos y legitimados; Bourdieu y Passeron (2005) denominaron a este tipo de exclusión con el término violencia simbólica. El segundo se refiere a la discusión que se puede llegar a desarrollar en torno a quién excluye. Existe una perspectiva que plantea que la exclusión es producto de los sistemas de razón (conocimiento) que subyacen a las prácticas y representaciones sociales de los individuos. Estos sistemas de razón se pueden ver como mapas que delinean lo normal, norman y, por tanto, excluyen por omisión todo aquello que quede fuera (Soto y Cantoral, 2014, p. 1530).

El segundo tipo de exclusión plantea que la violencia simbólica (VS) es toda acción que impone significaciones como legítimas, encubriendo las interacciones de fuerza en que se funda la generación de dicha acción (como se cita en Soto y Cantoral, 2014). Según Bourdieu y Passeron "La violencia simbólica es esa violencia que arranca sumisiones que ni siquiera se perciben como tales apoyándose en unas "expectativas colectivas", en unas creencias socialmente inculcadas" (Bourdieu, 1997, p.173, como citó Soto y Cantoral, 2014, p. 1531). En la enseñanza tradicional, el dME apoya la VS, y la Socioepistemología aporta reflexiones desde la construcción social del conocimiento matemático que buscar no excluir al individuo. Bourdieu y Passeron (2005) aportan:

> La selección de significados que define objetivamente la cultura de un grupo o de una clase como sistema simbólico es arbitraria en tanto que la estructura y las funciones de esa cultura no se pueden deducir de ningún principio universal, físico, biológico o espiritual, puesto que no están unidas por ningún tipo de relaciones internas a la "naturaleza de las cosas" o a una "naturaleza humana" (p.48, citado en Soto y Cantoral, 2015, p.1531).

Por lo tanto, para la construcción social del concepto de función los tratamientos y argumentos se consideran construcciones o resignificaciones en sí mismas que surgen de la interacción social de los individuos frente al estudio de algún fenómeno. Es decir, no se tiene que seguir, imperativamente, un conducto regular que parta de lo algebraico, dejando esta argumentación por sobre otras, como las argumentaciones gráficas, por ejemplo. Estas son construcciones sociales en sí mismas (Cantoral y Reyes, 2012) que aportan a la significación global del concepto función exponencial, en este caso particular. Así emerge la necesidad de resignificar el discurso o trastocar el dME desde lo didáctico, pues el tratamiento didáctico de las distintas clases de funciones a través de sus representaciones como las gráficas, por ejemplo, enfrenta dificultades tanto en los momentos de construcción y de evaluación para los estudiantes, por su acotada consideración. A sabiendas, desde la teoría socioepistémica, que tales registros acercan al estudiante al entendimiento de la naturaleza del fenómeno asociado al objeto. Respecto a la significación de funciones Cantoral et. al (2006) afirman:

> Si bien la mera clasificación visual de sus representaciones puede ser un elemento de partida para distinguirlas en una explicación didáctica, habrá que explorar más profundamente aquellos elementos que les permitan aproximarse a la naturaleza de las distintas clases de funciones (p.86).

Para sintetizar el fenómeno de exclusión es que, según la literatura, se obtiene la ilustración de un modelo de exclusión establecido por la investigación y aportaciones de Soto y Cantoral (2014). Al abordar el fenómeno de exclusión, la intencionalidad es articular nociones usualmente disjuntas, en el ejercicio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Así, se explica la exclusión desde la imposición en del dME, primeramente, de los Sistemas de Razones (S.R) y, luego, desde la violencia simbólica:

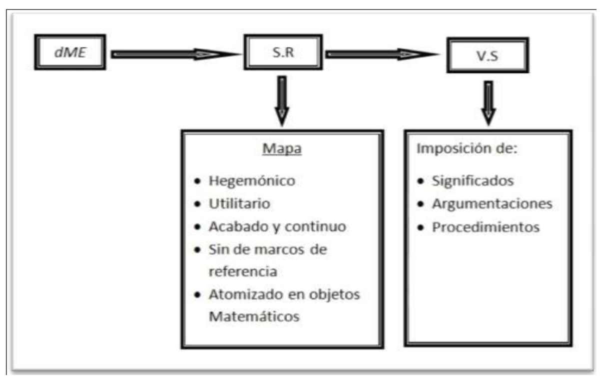


Figura 2 Modelo de Exclusión Soto y Cantoral (2014)

2.2 Resignificación

A sabiendas, según la problemática, de que cuando se habla de resignificación, básicamente, se apela, desde lo esencial, a la capacidad de otorgar un sentido diferente al pasado a partir de una nueva o diferente comprensión en el presente (Arias et. al, 2020), las prácticas sociales que emergen frente a un fenómeno resultan importantes, pues los individuos se comunican mediante discursos, matemático escolar en este caso, discurso que surge de las múltiples significaciones que se dan en las interacciones humanas (Cantoral, 2013) que pueden cambiar ya sea en un pasado o en un presente, y, además, porque los individuos, desde la percepción, son quienes tienen la tarea de comprender dicho objeto, fenómeno, entre otros.

La función exponencial resulta ser el objeto al cual se pretende otorgar un sentido o significación diferente, partiendo de las interacciones sociales que se dan cuando se aborda el fenómeno sísmico. A raíz de las diversas interpretaciones o significaciones resultantes se nutrirá, modificará y divulgará el dME vinculado a la función exponencial, desde la mirada diferente y con otro sentido de la usanza o funcionalidad del objeto en cuestión (García, 2018). En términos coloquiales, la intención es cambiar la mirada que se le da a los objetos matemáticos hacia el conocimiento funcional o en uso, pues cuando esto ocurre, se aprecia que, aunque un objeto (una definición, representación propiedad) no se conozca en toda su extensión, aristas y complejidad, sí se usa en alguna cotidianidad, y, además, irá adquiriendo y desarrollando diversas convenciones y funcionamientos dependiendo de las situaciones particulares que experimente el ser humano (Cordero, 2008; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2012, citado en Buendía y Hernández, 2013).

En aristas de la educación matemática, resulta interesante que una resignificación con base en la Socioepistemología pretende hacer más inteligible la realidad relacionada con la construcción, invención, descubrimiento, difusión e institucionalización del conocimiento escolar (García, 2018). Respecto de la resignificación en la matemática escolar, Montiel (2010) afirma que resignificar la matemática "presupone reconocerla como campo de saber e identificar los significados matemáticos asociados a ella según el escenario, el contexto y el nivel educativo donde se ubique" (p. 72). Así, al resignificar, en la escuela, un concepto como la función exponencial, por ejemplo, en particular se vincula el uso del conocimiento de agrupaciones humanas situados en un escenario concreto (Cordero, 2005) o también a la confrontación de significados previos ante un nuevo escenario o nueva situación problemática (García-Zatti y Montiel, 2008, citado en Montiel, 2010).

En efecto, resignificar involucra hacer más inteligible el pasar de lo abstracto a lo concreto, el cómo pasar de una explicación empírica a un argumento teórico de la realidad en sus dominios socioculturales (García, 2018). Como fruto, la resignificación permite explicar, interpretar y comprender el rol protagónico del individuo en la transposición de un conocimiento a un saber dentro de la praxis educativa. En palabras de Morales y Cordero "La resignificación está articulada con los aspectos funcionales del uso del conocimiento en cuestión" (2014, p.323, citado en García, 2018). En términos coloquiales, resignifica implica reconstruir el conocimiento, con un nuevo sentido, de manera que la intencionalidad subyace en transformar conocimientos en saberes funcionales en las interacciones humanas o sociales. Concibiendo la matemática funcional como una comprensión incorporada orgánicamente en los seres humanos, es decir, es un conocimiento que transforma al ser humanos desde lo holístico y que, además, le transforma su realidad, oponiéndose a la condición de que impone un conocimiento utilitario, por ejemplo. (Morales y Cordero, 2014, citado en García, 2018).

Resignificar el conocimiento matemático, a estas instancias, nos remonta, según Buendía y Hernández (2013) a involucrar al ser humano en la construcción del conocimiento, y esto implica una remirada a los objetos matemáticos que desembarca en una resignificación o reconstrucción del discurso matemático escolar. En este ámbito, García (2018) manifiesta que los individuos deben intervenir de forma activa en la manipulación del conocimiento. Teniendo en cuenta que, a la luz de la socioepistemología, dicha manipulación o intervención se lleva a cabo en los horizontes de las prácticas sociales, es decir, el ser humano necesita un parámetro o punto de referencia que regule y norme lo que se hace y lo que no, para un fin social e individual. Bajo este indicio, se reafirma que sin prácticas sociales no hay resignificación, o, mejor dicho, para que exista una remirada o resignificación de un conocimiento, el discurso asociado a ésta debe emerger de las prácticas sociales que se manifiesten y desarrollen.

Respecto de lo anterior y aludiendo a la resignificación del conocimiento matemático, Martínez (2005) declara lo siguiente:

> Busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la prexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. [Resignificar] emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en los marcos de los grupos humanos (p.200).

Reafirmando lo declarado con antelación, Martínez (2005) explica que al resignificar un conocimiento se aprovechan aquellas acciones intencionadas de los grupos humanos para transformar y comunicar una realidad social en una que es material. Y, un buen medio para generar o reconstruir el conocimiento bajo este criterio, es la modelación matemática desde las prácticas sociales.

2.3 Modelación Matemática desde una perspectiva socioepistemológica

Existen indicios significativos respecto de la modelación matemática como medio para llevar cabo la resignificación de algún objeto matemático, siendo ésta como un vehículo que transporta la antigua mirada o percepción de una noción hacia otra nueva basada en la funcionalidad social del concepto a resignificar. García (2018) expresa que es posible, y muy probable, inferir que las prácticas sociales de la modelación representan un escenario en donde se pueden normar y resignificar los aprendizajes en el ámbito escolar. Es más, afirma que la modelación "es un medio que permite enfocarse en prácticas contextualizadas; en efecto, el alumnado puede tener más protagonismo en la construcción del saber matemático" (p. 146). Paralelamente, Méndez y Cordero (2013) proponen a la modelación como un método o estrategia que permite enseñar matemáticas mediante la resolución de problemas.

Cordero y Méndez (2012) proponen la modelación matemática como un medio que busca atender problemáticas que emergen de un fenómeno. Problemas que brotan, según los autores, probablemente por modelos didácticos matemáticos que subyacen anclados a un dominio del objeto matemático no promoviendo la construcción de una matemática funcional. En palabras de Cordero y Méndez se expone:

> En síntesis se intenta buscar atender al problema que ha surgido tal vez porque los modelos del conocimiento que ha ocupado la didáctica de la matemática están anclados al dominio matemático y en consecuencia a los conceptos del mismo, mismos que no han logrado hacer de Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa 195la matemática un conocimiento funcional (Cordero, 2005), de modo que buscamos medios para reconstruir significados de los conocimientos matemáticos a luz de prácticas sociales (p.195-196).

Bajo esta perspectiva resulta casi evidente la inferencia de que para que exista resignificación es necesario y vital que ésta emerja de las prácticas sociales, y, por consiguiente, un buen medio para que este fenómeno se desarrolle es la modelación, la cual también, según Cordero y Méndez (2012), a su vez ayuda a la resignificación matemática cuando parte de las prácticas sociales. Pues, si se reflexiona sobre lo descrito anteriormente se podría afirmar que el funcionamiento del fenómeno que implica estos tres conceptos se da de manera transitiva. Entonces la modelación se concibe, como una práctica social que ayuda o permite resignificar un concepto o noción matemática (Arrieta, 2003; Cordero, 2006; Méndez, 2005 y 2008; Suárez, 2008, citado en Cordero y Méndez, 2012).

Engrosando en lo anterior, Méndez (2013) concibe el modelar situaciones matemáticamente, desde la socioepistemología, como una categoría de la modelación matemática escolar. Esto permite el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos, en la caracterización de comportamientos de variación, entre otros (Méndez, 2013). Lo interesante de esta categoría de modelación es que impulsa el uso de gráficas, tablas y expresiones analíticas como herramientas que permiten abordar y describir variaciones locales o globales (en el estudio del fenómeno), mediante conjeturas sobre la tendencia o caracterización del comportamiento en intervalos de variación.

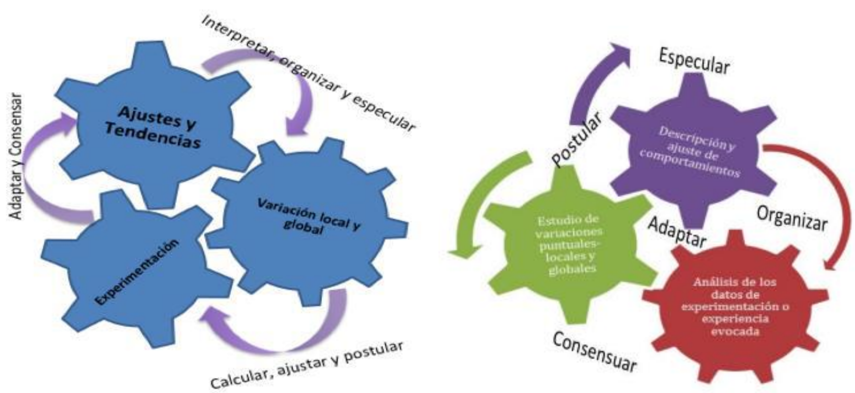


Figura 9 Categoría de modelación matemática de Méndez (2013)

En términos genéricos, la modelación matemática presenta tres momentos. Estos son: momento 1) La experimentación o experiencia evocada; de donde se busca información y se obtiene el sentido de la noción matemática, momento 2) El estudio de las variaciones locales y globales en los procesos estudio y resignificación. Aquí, aparecen significados de diferente naturaleza tales como lenguaje natural o gráficos – desarrollo del pensamiento gráfico (Cordero y Solís, 2005) y momento 3) en donde se da la descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los datos y significaciones para ser reconstruidos, en este caso (Esther y Méndez, 2017). Así, la modelación es un medio para la construcción de una matemática funcional que le encuentre un sentido al saber matemático desde una perspectiva social bajo las prácticas de tratamiento de gráficas, ajuste de variaciones, entre otras. Según Cordero y Méndez (2013):

> Concebimos a la modelación un proceso de construcción y desarrollo de usos de conocimiento matemático. La categoría que formulamos caracterizó a la modelación (Méndez & Cordero, 2011), y evidenció su funcionamiento en diseños de situación, que provocan en estudiantes de enseñanza media superior una matemática funcional. Esto se refleja en los desarrollos y articulación de usos a

> saber de; gráficas, tablas numéricas y expresiones analíticas al caracterizar tipos de variación ante la experimentación de fenómenos físicos (p. 1604).

La modelación matemática, fundada en la socioepisteología, no es lo predominante en la construcción del discurso matemático, pues la intención no es replicar un modelo tal cual, en una comunidad educativa, sino presentar un marco de referencia a la construcción matemática escolar sustentado en la presentación de la modelación matemática como una construcción continua del conocimiento (Meyer et. al, 2011, citado en Méndez, 2013).

Según Méndez (2013) la modelación matemática se presenta como un marco de referencia que:

> Se expresa en diseños de situaciones, que podemos llamar diseños de modelación escolar, que toman por eje los elementos de la categoría develando usos de conocimiento matemático que son argumentos funcionales para dar cuenta de la variación, la transformación y la predicción de comportamientos según el tipo de experimentos tratados (p.388).

En los diseños de modelación, el usos del concepto emergen como significados que los estudiantes emplean para describir los comportamientos de fenómenos reales, mediante la comparación de dos estados de tiempo (inicial y final) y su relación de variación, transformación o tendencia en dichos intervalos de tiempo (Méndez, 2013). Esto se vincula con los cambios de condiciones de un experimento y sus implicancias en las variaciones gráficas, tabulares o numéricas hasta culminar en reflexiones del tipo lógico-formal. Estas construcciones son enlazadas con prácticas sociales tales como describir, interpretar, graficar, postular, entre otras (Méndez et. al, 2013, p.388).

Desde la dimensión de la enseñanza escolar, la modelación orientada hacia los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas atraviesa dos categorías o programas de investigación representativos. El primero se corresponde con una concepción clásica, esto es concebir la modelación como una representación o imitación de la realidad, en efecto, resulta un medio para aplicar matemáticas; el segundo programa permite concebir a la modelación como una práctica que impulsa y promueve, de manera gravitante, la construcción y el descubrimiento de la funcionalidad de un conocimiento (Arrieta y Díaz, 2015).

Desde la mirada de García (2018) se entiende que la modelación representa algo más que un mero medio para imitar la realidad en la que se desenvuelven los seres humanos, "también es una heurística y una lógica contextualizadas en el desarrollo del conocimiento, de la construcción y comprensión de lo real a través de las matemáticas (p. 148). En esta arista, modelar matemáticamente algún fenómeno desde las prácticas sociales consiente el articular el modelo propiamente tal con lo modelado, atmósfera en la que los estudiantes tienen la oportunidad de participar un intercambio de información desde el diálogo, un diálogo significativo desde lo epistemológico y ontológico (Arrieta y Díaz, 2015, citado en García 2018). Según esto último, Arrieta y Díaz logran identificar que la modelación como actividad social relaciona dos *entidades*: el modelo y lo modelado. El modelo y los procesos de modelación ayudan a resignificar conocimientos no como una verdad previamente establecida o independiente de las actividades humanas sino como una construcción propia de la interacción subjetiva y objetiva de todos los sujetos que intervienen en el proceso de resignificación (2015).

2.4 Aspecto disciplinares de la Función Exponencial

Para establecer una definición de la función exponencial, desde lo disciplinar, se muestra brevemente una amalgama que proviene de una recapitulación de cómo se presenta este objeto matemático en los textos escolares vigentes del sistema escolar chileno y en los libros de precálculo. Así, de esta manera, se pretende generar un esbozo que aborde y exhiba los argumentos que pertenecen a la función en cuestión, sus coeficientes, dominio, rango y representación gráfica.

Se concibe, desde Vargas (2017) a la función exponencial como la expresión de la forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ab^x}$, siendo $a, b\ a\ \mathbb{R}$, y, además, con $b > 0 \wedge b \neq 1$. También en ciertos textos se presenta, ligeramente, como la expresión dada por $y = b^x$, siendo "b" una constante y "x" la variable independiente. Dentro de lo que se considera la definición de la exponencial, se muestra que ésta exige siempre una base positiva y diferente de 1. La condición de que la base sea diferente de 1 radica en que se obtendría la función constante $y = 1$. Y, para sustentar el hecho de que la base no puede ser negativa ($b > 0$), se pude reflexionar sobre lo siguiente:

Supóngase la función $f(x) = (-2)^x$

La intención es obtener una serie de datos, mediante un registro tabular que conduzcan a reflexionar sobre la imposibilidad de que la base de una función exponencial no puede ser negativa. Así, obtenemos lo siguiente:

X	**y**
0	1
$^1/_2$	…
$^1/_4$	…
$^1/_6$	…
1	-2
2	4
3	-8

Si se analiza la tabla anterior, se infiere, verosímilmente, que la función exponencial no admite una base negativa. Pues, si para los valores x=1/2, x=1/4, por ejemplo, se expresa la función exponencial como raíz enésima, estas raíces no tienen solución dado que, contemplan cantidades sub radicales negativas. por ejemplo. Así, se considera para $f(x) = a\,b^x$, $0 < b < 1$.

$$\text{Posibilidades para valores de la base "}b\text{"} \begin{cases} b > 1 \rightarrow \mathit{Función\ Decreciente} \\ 0 < b < 1 \rightarrow \mathit{Función\ Creciente} \end{cases}$$

La expresión genérica de la función exponencial se presenta como $\boldsymbol{f(x) = ab^{cx+d} + h}$, y, responde a los mismos sustentos y requerimientos anteriormente expuestos. Ahora bien, el dominio de esta función corresponde a $\mathbb{R}$ y su rango $[0, \infty[$ y, todas sus representaciones gráficas pasan por el punto (0,1) independiente del valor de la base.

La representación gráfica de la función exponencial, desde el texto escolar propuesto por el Ministerio de Educación (MINEDIUC) se contempla de la siguiente forma:

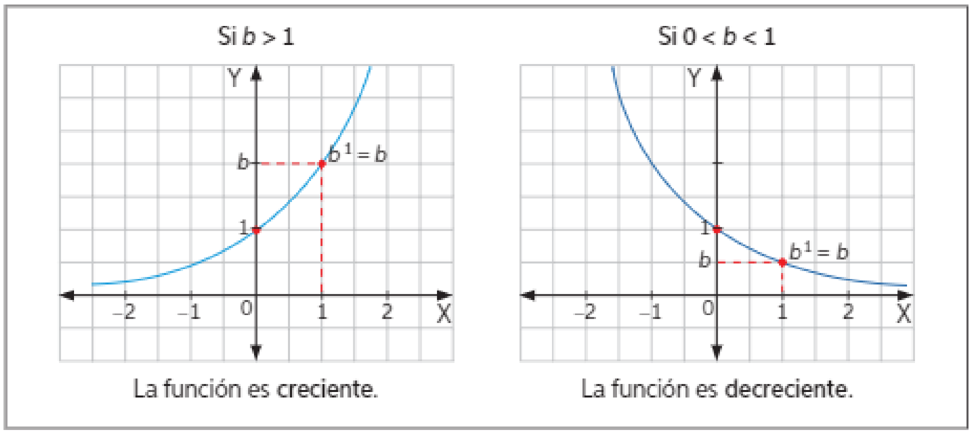


Figura 3 Gráfica de la función exponencial, texto del estudiante III medio (Mineduc)

Si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una dilatación de $y = ab^x$, mientras que $|a| > 1$ es una contracción. Además, mientras mayor es el valor de b, la función tiene un mayor crecimiento.

Como características generales se tiene que:

- ✓ El dominio es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)
- ✓ El recorrido es el conjunto de los reales positivos ($\mathbb{R}^+$)
- ✓ El valor de "y" se acerca a cero, pero nunca será cero, cuando "x" toma valores negativos en las funciones crecientes y positivos en las decrecientes.
- ✓ La gráfica interseca el eje Y en el punto $(0, a)$ y no interseca el eje x, que actúa como
- ✓ asíntota de la gráfica.
- ✓ Son funciones continuas

En Vargas (2017), se muestra una serie de gráficas para diferentes valores de la base, lo que conforma una serie de funciones exponenciales conocidas en el ámbito de las matemáticas:

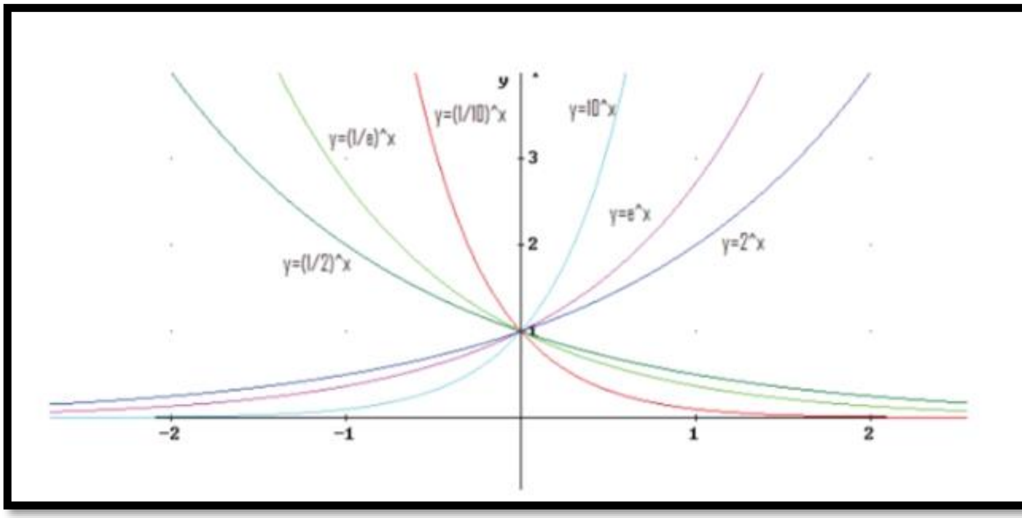


Gráfico 1 Función Exponencial para diferentes valores de "b" (Vargas, 2017)

2.5 Tratamiento gráfico y Comportamiento tendencial de funciones

Según la problematización, el estudio de la $F.E$ se aborda de manera unidireccional, partiendo desde la definición algebraica, jerarquizada por sobre otros argumentos y, quedando los sustentos gráficos o tabulares como registros subordinados de los algebraico para luego extrapolarlos a una dimensión utilitaria. Se presentan las funciones como un conocimiento acabado y continuo impuesto como verdad absoluta y que no incluye componentes culturales ni sociales (Soto y Cantoral, 2014). Tal es el caso de las funciones, cuyo patrón inicia desde terrenos algebraicos, tomando este tipo de registro como base jerárquica e independiente de otros, como, por ejemplo, el gráfico (Cordero y Solís, 1995). Así, teóricamente, no debiera ser imperativo partir de lo algebraico sino también de otras significaciones procedentes tales como las gráficas. Teniendo en cuenta que la información sismográfica se presenta, mayormente, en figuras y graficas que asocian magnitud y energía. Esto se corresponde con el subtema anterior ya que, según la problemática, son argumentos que no se contemplan en la enseñanza y estudio de funciones dentro del sistema escolar chileno, por lo menos durante la última década. Y si se abordan, se atañen buscando un sentido más utilitario en su aplicación.

Cordero y Solís (1997), desde los años 90 promovían el estudio del comportamiento de funciones como resultado del tratamiento de parámetros para desarrollar un pensamiento gráfico que aporte a la construcción del concepto sin la necesidad de partir de lo algebraico. Otorgándole el mismo valor a los argumentos a todos los tipos de registros, para disipar el conducto regular que obliga a partir el estudio de funciones desde una verdad algebraica absoluta. Esto no permite significar la naturaleza de las funciones ni el entendimiento de los parámetros asociados al comportamiento tendencial de éstas (Cordero y Solís, 1997, citado en Cordero y Solís, 2007).

Para un mejor entendimiento de la naturaleza de funciones se desprende información generando tratamientos gráficos y de coeficientes para enriquecer la construcción social del concepto función, incluyendo el análisis del comportamiento tendencial en la modelación de la función exponencial, por ejemplo. Evidenciando la construcción y tratamiento de gráficas como un elemento que aporta a la trasposición didáctica y que se integra o se corresponde con lo algebraico, pero que no surge a raíz de él (Codero y Solís, 1995). Es decir, se pasa de lo gráfico a lo algebraico, de esta manera se construye un conocimiento desde el génesis de su naturaleza. Una naturaleza que se transluce desde lo gráfico, como una construcción en sí misma en la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral et. al, 2006).

Las problemáticas asociadas al estudio de las funciones exponenciales planean en las dimensiones en donde coexisten diversos factores que hacen que los estudiantes, por ejemplo, no signifiquen dicho conocimiento debido a que los sistemas de registros son precarios y, por ende, repetitivos (Cerda et a., 2016). En palabras sencillas, existen factores que generan dificultades considerables en la construcción del concepto de función, que catapultan una violencia simbólica en las práctica docente y no garantizan el aprendizaje para quienes construyen la noción, al contrario, impone drásticamente el concepto, enseñado jerárquicamente desde lo algebraico, excluyendo al estudiante, al considerarlo dentro del dME, pero que es invisibilizado, pues sólo replica lo que se le imponen, sin dar espacio a la significación, resignificación y construcción de la función (Soto & Cantoral, 2014), que para efectos de este escrito radica en la exponencial.

Cordero y Solís, abordan el estudio del comportamiento tendencial de funciones como resultado del tratamiento de parámetros para desarrollar un pensamiento gráfico que aporte a la construcción del concepto de función:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_1 &= ax + b \\ Y_2 &= f(x) \\ Y_3 &= A\left[f(x)\right] + B \\ Y_4 &= A\left[f(ax+b)\right] + B \end{aligned}}$$

Figura 4 Iteración de funciones usada por Cordero y Solís (1997).

Con base, en todo lo anteriormente expuesto, si se reflexiona sobre la expresión $y = ab^{cx+d} + h \ (Ecuación\ 1)$, la meta está en que para construir el concepto es necesario que se visualice y entienda el comportamiento de cada uno de los parámetro o coeficiente: a, b, c, d y h.

El abuso de registro algebraicos hace del tratamiento gráfico un método de comprobación de lo algebraico, manifiesta la jerarquización en las prácticas docentes y/o la importancia de algunos registros sobre otros. Excluyendo al estudiante, y provocando que éstos se encuentren experimentando el fenómeno de adherencia dentro del dME, adherencia que se destaca porque quienes participan o reconocen otras epistemología -más allá de la tradicional- no cuestionen los argumentos ni trastoquen la matemática escolar (Silva et. al, 2015).

Las aportaciones de Cordero y Solís (1995) están orientadas a la educación matemática en contexto escolar intencionado la emergencia o desarrollo de un pensamiento gráfico a raíz del tratamiento de parámetros en el comportamiento tendencial de funciones que contribuyan sustanciosamente al dME en la construcción social del concepto función. Desarrollar argumentos gráficos que no se usan como meras representaciones de lo algebraico o significación que derivan ni dependen de aquello. Todo esto con el fin de generar una semiótica que no excluya, entendiendo y reflexionando sobre los parámetros de la función en cuestión, forjando tratamientos gráficos y de coeficientes para robustecer la construcción de la noción, incluyendo en dicha construcción el análisis del comportamiento tendencial de funciones en el modelamiento de la exponencial dentro de un dME en contexto escolar secundario. Evidenciando la construcción y tratamiento de gráficas como un elemento que aporta a la trasposición didáctica y que se complementa con lo algebraico, pero que no depende de él (Codero y Solís, 1995).

2.5.1 Lo Didáctico

La trasposición para el aprendizaje de una función, exponencial en este caso, se lleva a cabo desde una génesis gráfica (Cordero y Solís, 1997 citado en Mendoza et. al, 2018). Analizando el comportamiento tendencial, realizando cambios de parámetros, en donde la variable "x" ($y = ab^{cx+d} + h$) deja de ser el centro de atención y el estudio se centra en los coeficientes, generando una mirada distinta en cuanto a la dependencia de lo algebraico para la construcción de gráficas. El concepto de función se construye y se entiende no teniendo como requisito contar con la expresión algebraica, previamente y, la gráfica se aprecia como una construcción social en sí misma que se corresponde con lo algebraico y no depende de ello.

2.5.2 Lo Matemático

Se define a la función exponencial a la función de la forma $y = f(x) = ab^x$ $donde\ a, b \in \mathbb{R}$, $con\ b > 0\ y\ b \neq 1$. El dominio (valores que puede tomar x) es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$). De manera que su recorrido es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$). La gráfica interseca el eje Y en el punto $(0, a)$ y no interseca el eje X, pues se comporta como asíntota de la gráfica.

La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de b.

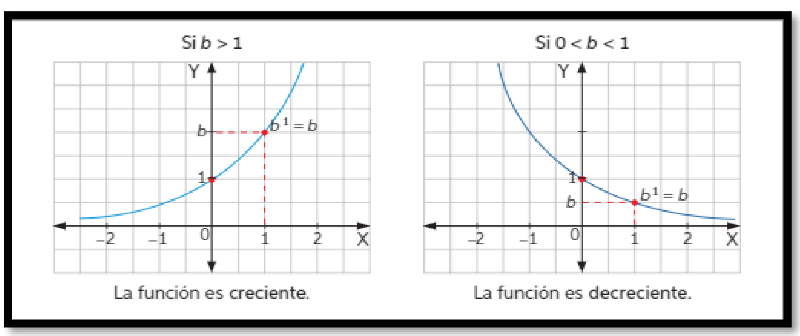


Figura 5 gráfica de Función exponencial para b>1 y 0<b<1

Si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una dilatación de $y = b^x$, mientras que $|a| > 1$ es una contracción. Teniendo en cuenta el cambio de parámetro y, por tanto, el comportamiento tendencial de Cordero & Solís (1997), la gráfica de $y = ab^{x-c}$ es una traslación horizontal de "c" unidades respecto de $y = ab^x$, hacia la derecha si c> 0 y, hacia la izquierda si $c < 0$. La gráfica dada por $y = ab^x + h$ es una traslación vertical de h unidades respecto de $y = ab^x$, hacia arriba si $h > 0$ y, hacia abajo si $h < 0$.

2.5.3 Variación de Parámetros

A sabiendas de que la matemática educativa, atiende primordialmente problemáticas relacionadas con la dicotomía entre la obra matemática y la matemática escolar, entre las que destacan el dME, como punto de interés para la presente investigación, resulta vital el entender la naturaleza de dicha confrontación (Cantoral y Morales, 2013). Según los autores para lograr un entendimiento de dicha naturaleza, el acercamiento socioepistemológico genera estrategias de análisis orientadas a desarrollar epistemologías que analicen las interacciones y circunstancias que permitan la construcción social del conocimiento matemático, abordando diferentes tipos de argumentaciones con un mismo grado jerárquico (Cantoral y Soto, 2014) y no dependientes unas de otras, sino complementarias, tales como argumentos gráficos, algebraicos, tabulares, entre otros. Es así, como dentro de los argumentos gráficos se tienen un cambio en la mirada que se les otorga al desarrollo del pensamiento gráfico, tratamiento que no depende de lo algebraico (Codero y Solís, 1995) y, que permite el estudio y entendimiento de los parámetros de una función como resultados de variaciones y no de imágenes, por ejemplo. De manera que al identificar cambios o variaciones que no son constantes, permite al estudiante diferenciar el carácter lineal o variable respecto del comportamiento de una función determinada (Cordero y Morales, 2013). Esto es fundamental para desarrollar epistemologías que permitan construir y diferenciar significaciones vinculadas a gráficas lineales de curvas, por ejemplo.

Autores como Artigue (1995) destaca lo siguiente:

> "…estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas de este dominio…" (p.321)

Para abordar un tratamiento gráfico que promueva el desarrollo de un pensamiento gráfico, para la emergencia de una epistemología, Cordero y Morales (2014) postula, como marco referencial, el alcance del siguiente lineamiento de situaciones: Variación, Transformación y Aproximación. Estas tres dimensiones vienen complementadas con cuatro elementos de construcción de significados que componen las situaciones de manera estructural. Estas son: significados, procedimientos, proceso - objeto y argumentación (citado en Cordero y Morales, 2013). Cada uno de estos elementos, conforman en sí mismo una epistemología diferente en virtud de la construcción del conocimiento matemático y en su conjunto también conforman una epistemología distinta a las particulares.

TABLA I
Socioepistemología del Cálculo

TABLA I
Socioepistemología del Cálculo

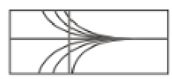
CONSTRUCCIONES EN LAS PRACTICAS	SITUACIÓN DE VARIACIÓN	SITUACIÓN DE TRANSFORMACIÓN	SITUACIÓN DE APROXIMACIÓN
Significados	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos Comportamiento tendencial de la función	Límite Derivación Integración Convergencia
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Límite de un cociente $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$
Proceso-Objeto	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Función
Argumentación	Predicción $E_0+variación=E_f$	Graficación – Modelación 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+...$

Figura 6 Estudio de Variaciones en la significación de expresiones vinculadas al cálculo; Cordero y Morales, 2014.

2.6 Terremotos: Energía y Magnitud sísmica

En la evolución histórica del planeta, los sismos y terremotos han sido considerados una amenaza constante para la humanidad, un cambio que, está ligado al desarrollo y cambio natural en el mundo, específicamente, en su conformación geológica. Aunque, éstos, han existido desde el comienzo de la Tierra, los primeros reportes comenzaron a ostentarse desde aproximadamente 1800 a.C, y, desde ese momento el hombre comenzó a dar muestras de interés sobre ellos, sin conocer su naturaleza ni sus consecuencias, hasta mediados del siglo XX donde aparecieron los primeros estudiosos de los temas sismológicos (Trujillo et. al, 2010). Estos, movimientos violentos de la tierra, eran considerados amenazas pare las sociedades, por cuanto, sus presentaciones de forma instantánea sacudían vastas regiones provocando severos daños; esto los catalogó como uno de los fenómenos naturales más devastadores y temidos por es ser humano (Vidal, 1994). Es tal, su relevancia que, textos como la biblia le dedica varios pasajes, vinculándolos a grandes hazañas y eventos que cambiaron a la humanidad y la naturaleza.

Según lo anterior, y a raíz de toda una gama de investigaciones de carácter científico, de fuentes certificadas, la Organización Mundial de la Salud, denomina a los terremotos como *Desastres Naturales*. Es más, en la actualidad, los científicos se interesan cada vez más en detallar a profundidad estos fenómenos naturales ya que producen grandes impactos catastróficos en la población y construcciones, entre otros (Shonhaut, 2013).

En Shonhaut (2013) se cita:

> “según la OMG, un desastre es una situación de ruptura del funcionamiento normal de un sistema o comunidad, cuyos efectos en las personas, así como las pérdidas y daños materiales o ambientales, sobrepasan la capacidad de esa sociedad o comunidad para responder y recuperarse de la situación” (p.21)

La aparición de los sismos y terremotos, así como otros fenómenos naturales, se debe a la estructura geológica de la Tierra. Estando relacionada, esto último, con la tectónica de placas o estructura de la corteza terrestre, que forma parte de la evolución de lo que se considera como la deriva continental (Rodríguez, 1994;2006). Bajo la premisa anterior, los sismos y terremotos surgen a raíz de los movimientos telúricos propios de una materia que puede decidir o de una *Tierra dinámica*, expresa el autor. Rodríguez, afirma que “la tectónica de placas señala que la capa más externa de la tierra está fragmentada en una serie de placas que presentan un movimiento relativo una respecto de la otra” (1994, p.120). Estos movimientos son originados por fenómenos que ocurren en el interior de la Tierra, tales como las corrientes de convección y fuerzas, y, generan una liberación de energía que a la postre se traduce en un desastre natural devastador para la humanidad.

La mayoría de los sismos, terremotos y erupciones volcánicas, entre otras, acontecen en regiones particulares, a lo largo de los límites entre las placas de la corteza terrestre. Una de las áreas sismológica y volcánicamente más activa del mundo la constituye el llamado "Cinturón de Fuego del Pacífico" donde la Placa Pacífica se encuentra rodeada por varias placas. En esta región es en donde se han registrado la mayor cantidad de sismos y terremotos a lo largos de la historia evolutiva del planeta Tierra. En López y Villareal (2017) se puede apreciar un registro del cinturón de fuego y los sismos que se han generado en este cinturón durante el período comprendido entre los años 1960 al 2014, dejando fuera, un período de 8 años hasta la fecha:

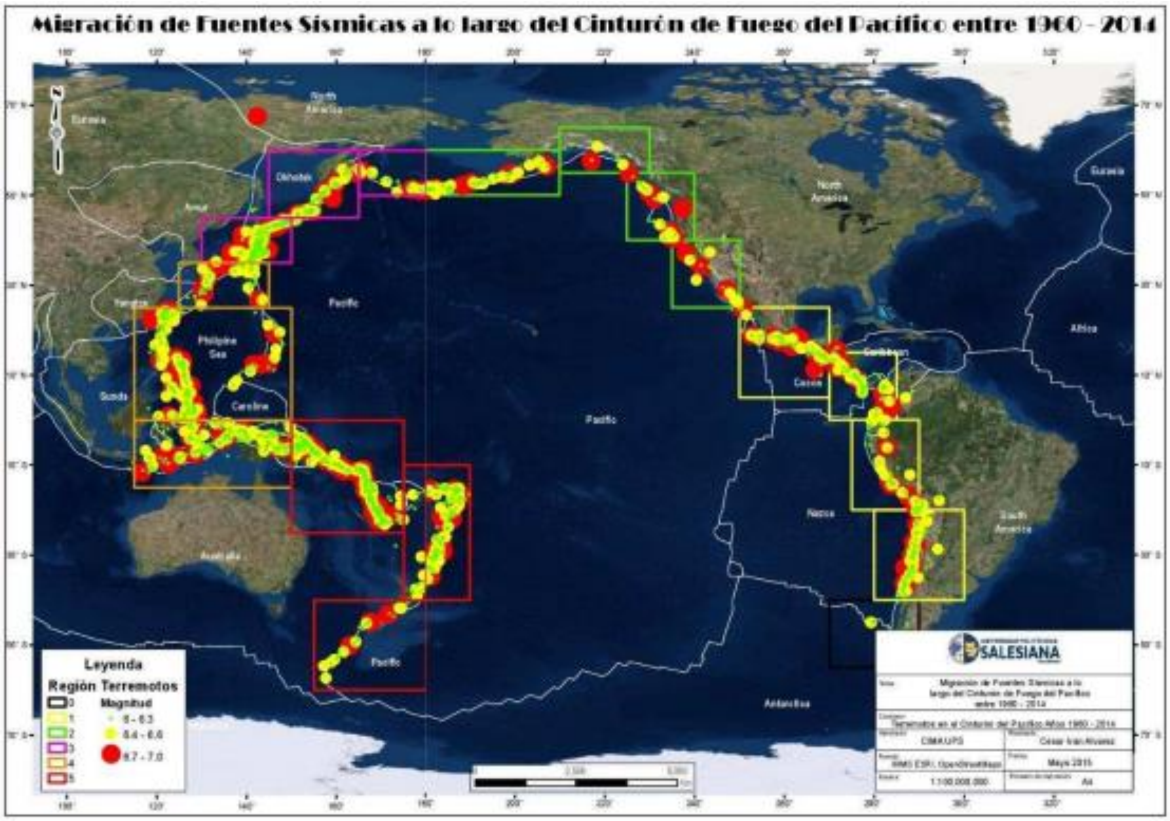


Figura 7 Distribución de Epicentros sísmicos 1960-2014. Región 1: cuadros de color amarillo; Región 2: cuadros de color verde; Región 3: cuadros

En términos disciplinares, los terremotos corresponden a, un movimiento brusco de la Tierra que libera cierta energía acumulada (Trujillo et. al, 2010). Según, Vidal (1994), un terremoto corresponde a un movimiento o vibración repentina originada por la relajación brusca y súbita de energía, almacenada por la deformación de la Litósfera, que se propaga como una onda, y, por ende, un fenómeno transitorio. Respecto a esta idea, Trujillo et. al (2010) aporta:

> Las placas, que flotan como témpanos sobre el mar de magma que está bajo ellas, viven frotándose y chocándose entre sí. Cuando quedan "trabadas", generan una tensión que va acumulando energía. La liberación abrupta de esa energía en el momento en que una placa rompe a otra, produce lo que denominamos terremoto (p.305)

Entonces, al referirse a los terremotos se apunta a movimientos de origen tectónico originados por la fricción entre placas en donde ocurren desplazamientos muy rápidos como una ruptura que se propagan dinámicamente sobre la superficie de una falla. Estos movimientos generan ondas sísmicas que llegando a la superficie provocan sacudidas que liberan energía, impactando directamente con el desastre y cambios de efecto natural sobre la región implicada (Vidal, 1994). Con base en lo anterior, resulta evidente o deducible identificar una inyección entre los terremotos (sismos) y la energía que éstos liberan. Y, que, dependiendo de ésta, es que se identifican unos de otros a raíz del impacto que causan en el medio ambiente. De manera que, la energía que liberada los terremotos está directamente relacionada con un impacto social y, sirve de puente para estudiar y analizar otras características de los terremotos tales como la magnitud, intensidad, entre otras.

Básicamente, y si se modifica la formalidad de cómo se interpreta un sismo, se podría vislumbrar el fenómeno de la siguiente manera: Si un movimiento telúrico genera gran impacto, es porque liberó mucha energía, y a esto, se le puede relacionar otra cualidad o característica como el tamaño del sismo. Por ende, a impacto mayor en el medio, mayor energía liberada y así un mayor tamaño del terremoto, análogamente, para sismos con impacto pequeño. Este tamaño del sismo es lo que disciplinarmente se conoce como la magnitud del terremoto. Según Vidal (1994;2006), el tamaño de un terremoto se mide con la magnitud, que es, técnicamente, una medida instrumental del terremoto basada en la amplitud de las ondas sísmicas.

2.6.1 Magnitud de un terremoto: "El tamaño de un terremoto se mide con la magnitud…"

En relación con la energía que liberan los terremotos, Vidal (1994) afirma que el foco o epicentro de un terremoto libera energía mecánica en función del tamaño del evento o del sismo y dicha energía radiada desde la fuente llega a la superficie provocando el movimiento de los suelos. Desde lo disciplinar, la magnitud es una medida cuantitativa de la energía liberada en forma de ondas sísmicas. Es un parámetro de origen de un terremoto y se mide en una escala continua (Trujillo et. al, 2010).

En términos empíricos, de magnitudes físicas y matemáticamente, la magnitud está relacionada estrechamente con la energía que libera un terremoto en su foco. Generándose diferentes escalas para la obtención instrumental de la magnitud de un sismo. La escala de medida de la magnitud de un sismo se conoce como escala de Richter. A continuación, se muestran algunas de las escalas más relevantes para efectos del desarrollo de la presente investigación:

Magnitud local (M_L)

Esta es la primera escala de magnitud definida por Richter a partir de la amplitud de un registro de Wood Anderson (W-A) (Período To = 0,8, Amplificación máxima = 2800, y razón de amortiguamiento Y= 0,8), como:

$$M_L = \text{Log } A_L (D) + F_L (D)$$

Donde A_L es la amplitud máxima registrada por el sismógrafo y F_L es la función de calibración FL (D) = - Log A (D/M_L=0)

Magnitud de ondas superficiales (M_S)

Se utiliza para calcular magnitudes de grandes terremotos superficiales que se extienden por vastas regiones. Para esto se utiliza la amplitud de las ondas superficiales.

$$M_s = 1{,}79\ m_b - 5{,}18$$

Donde m_b es la escala corporal de magnitud que usa ondas primarias (P)

Magnitud en función de la Energía sísmica

Las ondas sísmicas trasmiten parte de la energía que es liberada en el foco de un terremoto y su propagación. La energía sísmica se libera por la perturbación que tiene lugar el foco en el interior de la Tierra. Kanamori (1977) propone el cálculo de la magnitud a partir del momento sísmico, así como la magnitud energía Me a partir de la energía sísmica radiada del foco sísmico (Esis). Esta última puede ser calculada a partir de la relación Boatwrigth y Choy (1985, citado en Ordóñez, 2005):

$$Me = 2/3\, E_S - 2{,}9 \text{ (a)}$$

$$Me = 2/3(Log_{10}E_s - 4.4) \text{ (b)}$$

En la ecuación (b), la energía se mide en Joule

2.6.2 Energía Sísmica: Energía liberada por un terremoto …

La energía liberada por un sismo o terremoto puede ser analizada en varios parámetros, siendo algunos de los más difundidos hacia la sociedad, y con mayor relevancia para efectos de esta investigación, en función del tiempo y en función de la magnitud. Esta última dicotomía descrita en el punto anterior. Con respecto a la relación energía sísmica en función del tiempo, se pueden revisar las aportaciones de Cotovanu y Vacareanu (2020), investigación profunda que modela la liberación de energía de terremotos para un evento particular. En Di Giacomo et. al (2009) se deja de manifiesto el estudio y análisis de la energía que libera un sismo de manera rigurosa y como un argumento complementario y correspondiente al estudio de la magnitud, dado que de esta manera se establecen análisis más acabado con el fin de generar respuestas científicas, orientadas hacia la sociedad, más rápidas o eficaces frente a la emergencia de un evento de tamaña magnitud. De esta manera, el autor promueve la importancia de estudiar y entender las magnitudes de los terremotos en función de la energía sísmica liberada, en contraste con cualquier otra magnitud física, para poder evaluar cuáles son las potencialidades e impactos de las sacudidas de algún evento en particular. Esto, debido a que la Energía que liberan los sismos es proporcional a la velocidad de sacudida de un terremoto, por ejemplo. En palabras de Di Giacomo et. al (2009):

> In contrast, the energy magnitude Me, based on the radiated seismic energy ES, is more suitable than Mw for evaluating the earthquake’s shaking potential (Choy & Boatwright 1995; Choy & Kirby 2004) since ES is proportional to the squared ground motion velocity and is calculated over a wide frequency range that is much closer to frequencies of engineering interest. Therefore, Me is a useful complement to Mw in the rapid evaluation of the damage potential of large earthquakes (p. 362).

Algunos registros gráficos de la energía liberada por un terremoto versus el tiempo en que transcurre el evento se presentan de la siguiente manera:

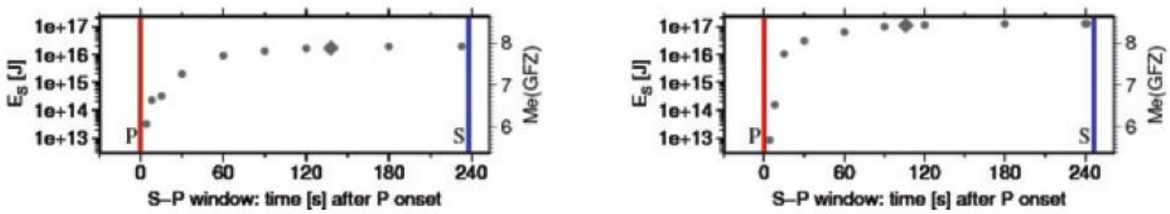


Figura 8 Gráficas de Energía vs tiempo una vez transcurrida la onda primaria (onda P), en el terremoto de Costa Rica de 1994. Di Giacomo et. al (2009)

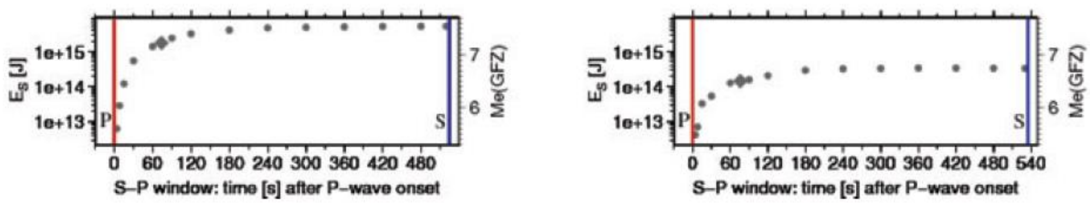


Figura 9 Gráficas de Energía vs tiempo una vez transcurrida la onda primaria (onda P), en el terremoto de Sumatra 2007. Di Giacomo et. al (2009)

En los registros anteriores se puede apreciar la forma gráfica de la función logaritmo, la que está íntimamente relacionada con la función exponencial, dado que son inversas. Esto es un punto de interés parala presente investigación, dado que la intencionalidad radica en resignificar o reconstruir la función exponencial en función de la magnitud, pero entendiendo ambos parámetros como resultado de variaciones y como como una dicotomía entre valores particulares.

2.6.3 Relación entre la Magnitud y Energía de un terremoto

En primera instancia y, como resultado del inciso anterior, se deja de manifiesto que la energía que liberan los terremotos es de un orden grande, es decir, inmensas cantidades desde el punto de vista cuantitativo. En términos teóricos, parte importante de su relación con la magnitud fueron determinadas empíricamente por Gutember y Richter. Estas expresiones se expresan de la siguiente forma (Vidal, 1994):

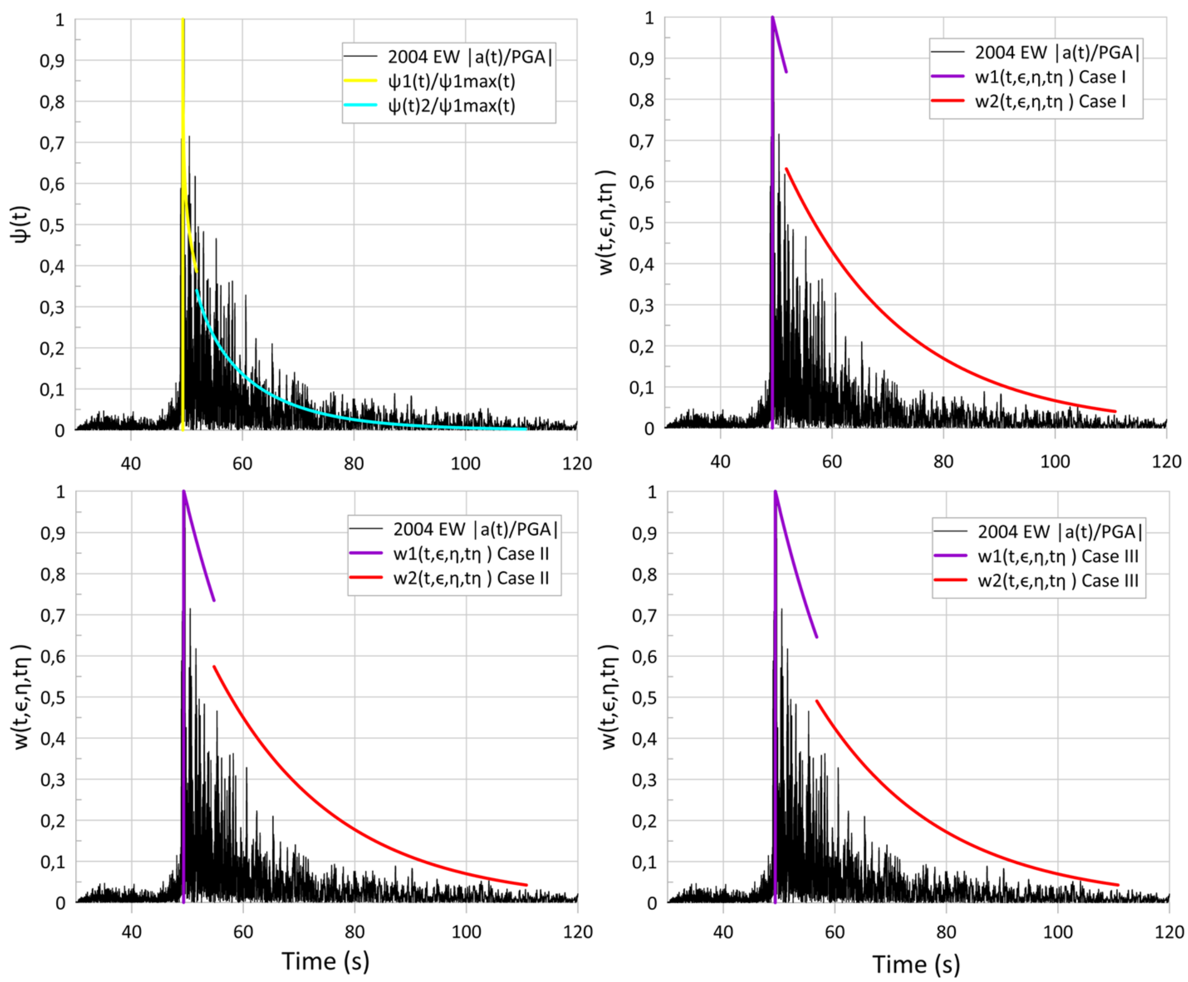
$$Log\ E = 5.8 + 2.4\ m_b \qquad\qquad Log\ E = 11.8 + 1.5\ M_s$$

Otras expresiones, ligeramente diferentes, obtenidas para la relación entre la energía y la magnitud, fueron las demostradas por Bäth (1973; citado en Vidal, 1994):

$$Log\ E = 4.78 + 2.57\ m_b \qquad\qquad Log\ E = 12.24 + 1.44\ M_s$$

Para todos los casos anteriores E viene expresada en ergios. Matemáticamente, esto implica que un terremoto de un grado de magnitud M_s mayor que otro es una 32 veces mayor y que uno de grado de magnitud m_b es mayor unas 250 veces, aproximadamente.

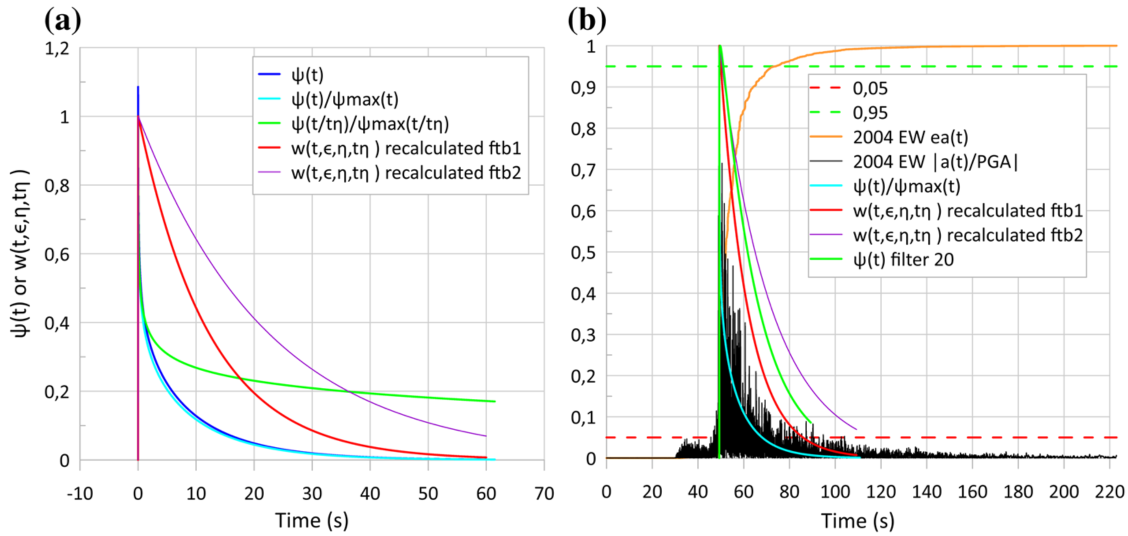
A continuación, se presentan registros empíricos, de terremotos reales, que relacionan daros de magnitud y energía, otorgando argumentos tanto tabulares como gráficos que develan una relación exponencial y/o logarítmica:



Gráfica 1 Datos de Energía vs tiempo de un sismo particular, el terremoto de Vrancea en el año 2004 (Cotovanu y Vacareanu, 2020).

En las aportaciones otorgadas por Cotovanu y Vacareanu (2020), se muestra la importancia del estudio energético de los terremotos y su relación exponencial con otras magnitudes físicas en virtud de proporcionar, de manera apropiada, rigurosa y cabal, una configuración para modelar y describir la liberación de energía de los movimientos de suelo generados en Vrancea a través del comportamiento exponencial, desde el punto de vista matemático. Esto con la finalidad de aportar tanto a la toma de decisiones, desde lo social, y a la comunidad científica en términos teóricos y empíricos. En palabras de Cotovanu y Vacareanu (2020) y, refiriéndose al terremoto de Vrancea del año 2004, se afirma:

> se describió un algoritmo para calcular los parámetros, y se determinaron los parámetros de la liberación media de energía. Usando el intervalo de dos funciones para describir la liberación de energía específica de Vrancea, terreno más apropiado resultaron simulaciones de movimiento (p.2564).



Gráfica 2 Datos de Energía vs tiempo del terremoto de Vrancea en el año 2004 (Cotovanu y Vacareanu, 2020). Modelación realizada mediante lo que el autor denomina "Función Ventana"

Otros argumentos empíricos, de los cuales se ha sustentado la presente investigación, se extraen del trabajo, dirigido hacia la comunidad científica de geofísica, realizado por Vidal (1994: 2002) en donde se pueden apreciar, de manera generalizada, datos reales que muestran una correspondencia entre la magnitud y la energía liberada para un terremoto o evento dependiendo de su intensidad, entre otras. Todo medido desde la instrumentación idónea tales como sismógrafos:

E (ergios)	M_s	m_b	I_o	a_o (cm / s^2)
10^{20}	5.4	5.9	VI - VII	40
10^{21}	6.1	6.3	VII - VIII	100
10^{22}	6.8	6.7	VIII - IX	200
10^{23}	7.5	7.1	IX - X	400
10^{24}	8.2	7.5	X - XI	1000
10^{25}	8.9	7.9	XII	2000

Tabla 3 Relación entre energía, magnitud, intensidad y aceleración máxima para terremotos (Bäth, 1973, citado en Vidal, 1994).

CAPÍTULO 3: ASPECTOS METODOLÓGICOS Y DE DISEÑO

3.1 La Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación

Considerando que las acciones vinculadas a los objetivos específicos son identificar, describir y caracterizar es que, dentro de la propuesta de secuencia didáctica, se deben abordar etapas o momentos que permitan el cumplimiento de cada una de estas acciones. Un recurso relevante será la observación, la que, según el momento, se complementa particularmente con la participación y guía del docente en ciertas instancias. De esta manera, poder generar argumentos y ajustes que permitan obtener diversos significados y caracterizar los procesos de resignificación y rediseño del discurso matemático. Esto permite tener una base más amplia para presentar una epistemología diferente e, idealmente, promover la ambición de extender esta propuesta más allá del escenario escolar secundario, como el bachillerato, por ejemplo y, en contextos en donde se aborde funciones exponenciales o ciencias de la tierra en donde se estudie la energía de los sismos.

Como soporte o argumento teórico para los aspectos metodológicos, la investigación se nutre de aportaciones de la ingeniería didáctica (ID) cuyas fundaciones se respaldan de y se derivan de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997, citado en Artigue et. al, 1995). Siendo el foco de interés la proposición de una secuencia experimental basada en las *realizaciones didácticas* sustentadas en las prácticas sociales, integradas por una bitácora de estudios de casos de resignificación y, por la validación interna del diseño contrastando un análisis a priori y a posteriori de éste (De Faria, 2006). Bajo la mirada de otros autores, y para un mejor acercamiento, la intención del diseño es basarse en las intervenciones didácticas de las clases y ver de qué manera se significan la concepción, realización, observación y análisis de la secuencia -también del conocimiento y el saber involucrados- validando el diseño desde una confrontación entre lo que se espera o *análisis a priori* y lo que se obtuvo o *análisis a posteriori*. No recurriendo a una validación externa basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales o de control (Godino et. al, 2013).

Para validar los causes o lineamientos que conducen a la secuencia hacia la resignificación y rediseño del discurso asociado al objeto matemático función exponencial concebido como *medio* de expansión y aceptación del conocimiento científico en correspondencia con el mundo natural (Méndez et. Al, 2017) se tomarán de la ingeniería didáctica engranada con la modelación matemática. Aquí, se atravesarán en etapas que derivan del sustento teórico de la ID: a) Análisis preliminares; b) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas; c) Experimentación; d) Análisis a posteriori o confrontación (Godino et. Al, 2013; Campeón et. al, 2018). Pero, con un complemento desde las aportaciones derivadas de la modelación matemática a la luz de los trabajos de Méndez (2016, 2017) que permitirá robustecer y entrelazar 2 enfoque dentro de una misma corriente de pensamiento de la matemática educativa, además de entregar información de los participantes, dado que las etapas de la ingeniería didáctica (De Faria, 2006; Godino et. al, 2013) se orientan a la secuencia propiamente tal y los momentos según las aportaciones de Méndez (2017) se sitúan dentro de la misma especialmente en las intervenciones o experimentaciones de los docentes y estudiantes dentro de la sucesión.

Se argumenta lo anterior en la flexibilidad, desde la metodología de investigación, que ostenta la ingeniería didáctica para poder entrelazarse y relacionarse con otras teorías o metodologías (Godino et. Al, 2013). La relación que se realiza con los trabajos de Méndez es porque la idea de resignificación de la investigación se corresponde, por lo menos desde la teoría, con la idea de modelación de la autora. En palabras coloquiales, se utiliza la Ingeniería Didáctica como sustento para validar la secuencia y la Modelación matemática como medio para rediseñar el discurso matemático o reconstruir la epistemología vinculada a las funciones exponenciales.

Los momentos de la situación de aprendizaje o secuencia, en el que los estudiantes jugarán un rol fundamental desde la construcción de una nueva epistemología de las experiencias, obedecen a la modelación matemática descrita en el marco teórico (Méndez, 2013; Méndez et. al, 2013). Estas son: momento 1) La experimentación o experiencia evocada; en donde el estudiante simula el fenómeno y la noción de función exponencial adquiere sentido bajo la práctica de caracterización y tratamiento gráfico de funciones, momento 2) El estudio de las variaciones locales y globales en los procesos estudio y resignificación, en donde los estudiantes usan el concepto bajo la práctica de variación de coeficientes y obtienen significados desde diferentes sistemas de registros tales como lenguaje natural o gráficos – desarrollo del pensamiento gráfico (Cordero y Solís, 2005)- momento 3) La descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los estudios de variaciones, los datos y significaciones para ser resignificadas, en este caso (Esther y Méndez, 2017) como un indicador de sismicidad o energía liberada. De esta manera, se concibe a la modelación como un medio para la construcción de una matemática funcional que le encuentre un sentido y significación al saber matemático desde una perspectiva social (Cordero y Méndez, 2013).

Dentro de la propuesta de secuencia, se pretende abordar la construcción matemática pasando por tres momentos, propios de la modelación matemática. Estos son un primero momento en donde surgen variaciones y experimentaciones que describen un fenómeno físico y sus implicaciones en transformaciones numéricas, tabulares y gráficas. Luego un segundo momento, en donde se identifican y trabajan las variaciones, aquí se caracterizan los incrementos y decrecimientos. Y, un momento 3, en donde se identifican patrones y se extrapola lo abordado gráfica, tabular y numéricamente a una expresión algebraica que modele dicho comportamiento de manera general.

Para un mejor entendimiento de la idea anterior se presenta el siguiente esquema:

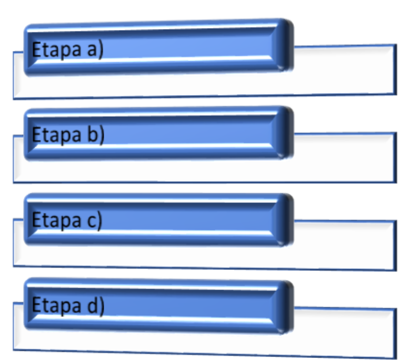


Figura 11 Momentos para la modelación (resignificación); Esther y Méndez (2017)

Figura 10 Etapas de Ingeniería Didáctica; Godino et. al (2013) para la validación de la secuencia

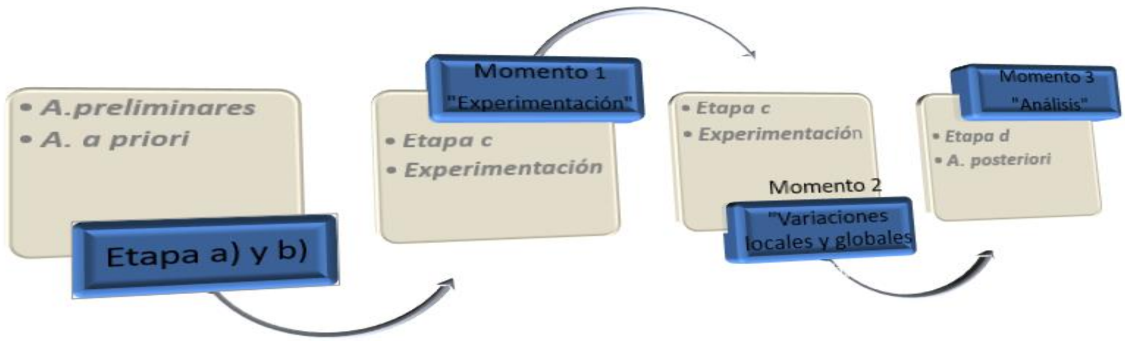


Figura 12 F. Correspondencia, para efectos de análisis y reflexiones, de la ingeniería didáctica en la validación del instrumento y los momentos de la modelación matemática en la construcción del dME.

Según el esquema presentado, es importante diferenciar entre etapas (Godino et. al, 2013) y momentos (Méndez, 2017), entendiendo que la ingeniería didáctica se utiliza en virtud de la construcción de los instrumentos y, la modelación matemática se concibe para la aplicación del instrumento en el aula. En la etapa a) se realizan los análisis epistemológicos y las restricciones a considerar para la secuencia y, también, para el diseño de las actividades. En la etapa b) el fin reside en realizar un análisis a priori de las actividades a presentarse en el diseño. En la etapa c) es donde se sitúa el momento de contacto entre le investigador, el docente y los estudiantes, estableciéndose los objetivos y aplicando los instrumentos diseñados. Aquí sucede el momento 1 en la participación del estudiante y el docente, aquí surgen emergencias de usos y significaciones que explican los cambios en la situación de estudio. Durante la misma etapa c) tiene su participación el momento 2 en donde los participantes experimentan los cambios globales y locales relacionados a los parámetros del objeto matemático en cuestión. Finalmente se da lugar al análisis de lo estudiado por parte de los participantes y, a su vez, el investigador realiza los análisis a posteriori.

El fin de la investigación es caracterizar los procesos de resignificación vinculados al estudio de la función exponencial como indicador de sismicidad. La forma de proceder fue, primero que todo, obteniendo información relevante de forma de abordar el objeto matemático y la epistemología asociada desde la entidad normativa y sus programas de estudios, así como también develar la forma de proceder que se proponen a los sistemas escolares desde los textos de estudio aportados por el MINEDUC. Es decir, revelar la realidad de cómo se aborda la función exponencial según el sistema escolar chileno.

En cuanto a las situaciones de enseñanza y aprendizaje, asociadas a la creación del diseño de las actividades, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Situación 1: Fenómeno y prácticas sociales para el estudio cualitativo del concepto o fenómeno “función exponencial” asociado a su génesis epistemológico, naturaleza y como indicador de sismicidad (energía liberada, magnitud, entre otras)
-

Situación 2: Construcción de significados mediante el tratamiento de sustentos gráficos desde fuentes de sismologías y con información sismológica empírica y propias del territorio de origen; Chile país sísmico.

- Situación 3: Significación de los argumentos gráficos para establecer una correspondencia entre la significación y construcción del conocimiento con su argumento algebraico. Esto es, de lo gráfico poder llegar a lo algebraico. Caracterización de los significados del discurso matemático.

La investigación, bajo una mirada metodológica cualitativa, se orientará con un carácter descriptivo, que permite recabar la mayor cantidad de información para poder caracterizar y de alguna manera poder establecer conjeturas que hagan emerger nuevas preguntas de investigación y así expandir los alcances para un mayor aporte a didáctico en la enseñanza de la matemática escolar o a la dimensión de la matemática educativa. Según, Bilbao et. al, *el enfoque cualitativo se orienta al análisis de la construcción de significados desarrollados por los propios actores sociales* (p. 484). Para lo anterior es importante que los estudiantes puedan contar con un acercamiento previo a la noción función exponencial o logaritmo.

Hacia la ejecución de la secuencia didáctica vinculadas a los procesos de resignificación, se pretende trabajar con una muestra que incluya integralmente a 10 estudiantes, pertenecientes al nivel de tercero medio, de las secciones A y B del liceo politécnico Santa Ana, de la comuna de Quinta Normal. Lo anterior, es en virtud de un mejor entendimiento de cómo se aborda la resignificación de nociones que han sido impuestas durante períodos de tiempos extensos. Dado que, se trabajará con niveles educativos ajenos al ejercicio del investigador, es que se deben cumplir con protocolos de ética, tales como asentimiento a menores exención de evaluación ética y consentimiento informado.

Los instrumentos requeridos deben estar orientado a la obtención de información empírica en amplio aspecto, de manera que el escenario social de aula funcione como un manantial de experiencias compartidas en el dME. Para el cumplimiento del primer objetivo específico se requerirán instrumentos o implementos de observación tales como video y reportes que permitan el análisis de conductas globales e individuales. Además, se deja de manifiesto que, dentro de la propuesta, se abordará una actividad previa al momento 1 de experimentación, la cual corresponde a una actividad o momento “0”, en donde se aborda la historia de la exponencial vinculada a una epistemología que entrelace los sismos y el comportamiento de crecimiento y decrecimiento exponencial.

En síntesis, se tiene que para lograr los objetivos se presentan instrumentos para la recogida de información de datos y conocimientos mediante un diseño de secuencia didáctica que se distribuyen en tres momentos más un momento cero o previo que sirva de culturización en virtud de una epistemología de lo exponencial desde los movimientos telúricos.

Momento 0: Construcción de la historia de la exponencial desde una perspectiva social y con base en los movimientos sísmicos. Es decir, historia y relación de los sismos y la exponencial; carácter funcional de la exponencial.

Momento 1: Establecimientos de los registros tabulares y su relación con registros gráficos.

Momento 2: Tratamientos gráficos desde el comportamiento tendencial de funciones, para analizar las variaciones de parámetros sísmicos.

Momento 3: Funcionalidad de la exponencial en la sociedad y modelación desde lo algebraico, a partir de lo gráfico.

3.2 Escenario y Actores

El diseño de secuencia didáctica se realizará a un grupo homogéneo de 5 estudiantes, las cuales son estudiantes de **tercer** año de enseñanza media, de un liceo particular subvencionado gratuito, de la comuna de Quinta Normal. Pues, se destaca que dentro del dME, no se aprecia, aparentemente, un tratamiento gráfico de funciones o del comportamiento tendencial de las mismas o de las exponenciales.

En cuanto a la aplicación de los instrumentos, éstos serán aplicados en diversos días, durante las clases de matemática y/o de taller de matemática. Siendo más precisos se utilizarán seis bloques pedagógicos de 45 minutos cada uno. Destacando que las estudiantes realizarán las actividades a través de documentos escritos que serán entregados al grupo de manera física. Pero, sin embargo, en todos los instrumentos se requerirá del apoyo y uso de softwares digitales tales como applets, GeoGebra, Excel y la internet misma como medio para la búsqueda de información. Se deja de manifiesto que el establecimiento en donde se aplicarán los instrumentos está dotado con laboratorios equipados con todo lo necesario, desde los computadores, interfaces hasta la conectividad misma para cada estudiante seleccionada.

La intención de la selección de las estudiantes respecto del nivel de cuarto medio se da en virtud de que se requiere como conocimiento previo el estudio de la exponencial y, en la etapa de aplicación del diseño, se contempla el estudio de la función exponencial como nivelación para el nivel mencionado. Todo lo anterior, se exponen entendiendo que dentro de las pretensiones de esta investigación está resignificar o reconstruir la función exponencial desde una matemática funcional basada en la construcción social del conocimiento que vincule el objeto matemático con una epistemología diferente a lo expuesto o impuesto, desde la problemática en el Capítulo I, en los textos escolares y en el dME dirigido por el marco curricular imperante.

Unidad	Descripción
Función Exponencial y Logarítmica	Modelamiento de situaciones de crecimiento y decrecimiento a través de las funciones exponencial y logarítmica. Análisis de las funciones exponencial y logarítmica utilizando tablas, gráficos y expresiones algebraicas. Variación de parámetros y ajustes según la situación
Objetivo	**Descripción**
FG-MATE-3M-OAC-03	Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

Tabla 4 Objetivos relacionado a la función exponencial según las bases curriculares

3.3 Aspectos del diseño

Desde lo curricular se aclara que los objetivos a abordar en el diseño de secuencia didáctica van de la mano con lo requerido por el currículum propuesto por la entidad normativa de educación. Estos, se obtienen de las bases curriculares y de los objetivos priorizados del nivel de tercero medio descritos en la página del ministerio de educación:

En el diseño se deben atañer los tres momentos descritos en la metodología más un momento cero o previo que se contempla como etapa preliminar para construir una epistemología diferente desde la historia de la exponencial como indicador de sismicidad.

En virtud de lo anterior, se procede a describir los momentos o etapas de la secuencia didáctica a proponer:

MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
0	ANEXO: Construcción de la historia de la exponencial desde una perspectiva social y con base en los movimientos sísmicos. Es decir, historia y relación de los sismos y la exponencial; carácter funcional de la exponencial
1	Análisis y reflexión de los significados tabulares y su relación con registros gráficos
2	Tratamientos gráficos desde el comportamiento tendencial de funciones, para analizar las variaciones de parámetros sísmicos
3	Funcionalidad de la exponencial en la sociedad, modelada desde una experiencia sísmica sustentada con significados algebraicos que sustente los tratamientos gráficos.

Para el momento 0 se cuenta con un instrumento ANEXO 1, que consta de una actividad que generaliza la historia de la exponencial y su relación con la sismicidad. Esta actividad requiere que el estudiante navegue en internet y aproveche los tiempos para una búsqueda responsable de la información. Esto siempre y cuando el docente lo estima pertinente. Además, el resultado de obtener una respuesta correcta le otorga al estudiante un panfleto informativo que permite reforzar conocimientos y, como información previa para los instrumentos que vienen posteriormente en los momentos siguientes. Se destaca que cada uno de los instrumentos posee un análisis a priori con una descripción detallada y pertinente a lo pretendido tanto por el ministerio de educación como por la intencionalidad de la presente investigación.

3.3.1 DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI

Los instrumentos para el diseño de secuencia didáctica a utilizar y, descritos con antelación se presentan a continuación con sus respectivos análisis a priori:

ACTIVIDAD I: Analizando sismos desde un pensamiento gráfico

Nombres	*Curso*
Fecha:	**Equipo**
Objetivo	***Analizar información de un evento sísmico usando la función exponencial como referencia. Obtener registros gráficos a partir de la intuición y tabla de datos respecto de eventos sísmicos, reconociendo las variables dependientes e independientes "x" e "y".***

	*En el centro de la tierra, cuando comienza el movimiento de las corrientes convectivas se empieza a acumular energía, y luego esta acumulación es liberada de forma abrupta y en grandes cantidades, hacia la superficie, generando el movimiento del suelo. Todo esto en respuesta a que la magnitud (o tamaño del sismo) se acrecienta continuamente en la misma medida.*

I- Según el párrafo anterior contesta las siguientes preguntas.

Deducción previa (antes de analizar datos)	
a) ¿Cuál crees que será la gráfica que obtendrás si modelaras la situación del párrafo anterior? Dibuja tu proyección	***b) ¿A qué factores o razones se debe tu propuesta de gráfica? Responde intuitivamente desde el enunciado***
c) Según tu propuesta de gráfica ¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica	***d) ¿Cómo será dicha correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona***

II- Evocando la experiencia sísmica… de lo ideal a lo empírico: En las siguientes tablas de datos se muestra información (idealizada) de la energía liberada y magnitud de un evento sísmico.

Recuerda que la energía es liberada de manera abrupta en virtud de la magnitud que crece en la misma medida, tu misión será construir un sustento gráfico que valide la experiencia del enunciado inicial y sea coherente

A) Construye dos gráficas (una para cada tabla) e identifica la gráfica que más le acomode al lenguaje natural utilizado en el enunciado. Una vez que decidas la gráfica complementaria a la tabla, significa la variable dependiente e independiente y analiza la relación entre ambas, con el fin de significar la matemática que hay detrás. Para lo anterior, ingresa los datos en el siguiente Applet: https://www.geogebra.org/m/kASGbAma

Magnitud (Richter)	Energía (kergios)
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Energía (kergios)	Magnitud (Richter)
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Gráfica Magnitud vs Energía	Gráfica Energía vs Magnitud
Variables dependiente e independiente	**Variable dependiente e independiente**
Interpretación	**Interpretación**

B) Simuladamente, en la siguiente tabla se muestran datos con información del inicio de un terremoto. Es importante que sepas que las unidades de medida, en este caso para la energía y magnitud de un evento sísmico son Ergios y Richter, respectivamente:

Magnitud Richter	Energía Sísmica (ergios)
0,0	0
0,0	1
0,5	5
1,0	23
1,5	108
2,0	512
2,5	2435
3,0	11585
3,5	55109
4,0	262144
4,5	1246974

Magnitud Richter	Energía Sísmica (ergios)
5,0	5931642
5,5	28215802
6,0	134217728
6,5	638450708
7,0	3037000500
7,5	14446490411
8,0	68719476736
8,5	326886762695
9,0	1554944255988
9,5	7396603090613

Tu misión ahora será construir gráficas de los datos presentados; una de magnitud vs energía y otra de energía vs magnitud. La intención es que a partir de las gráficas que obtengas puedas contrastar con tu propuesta de la actividad A), así puedas significar cuál es la variable dependiente e independiente.

Accede al siguiente enlace: Ingresa los datos (sólo ingresar los datos y visualizar la gráfica, no modifiques nada). Registra sólo lo que observas.

Gráfica Magnitud vs Energía	Gráfica Energía vs Magnitud
Variables dependiente e independiente	**Variable dependiente e independiente**
Interpretación	**Interpretación**

Desde lo empírico… *¡Imagínate el impacto que puede tener un terremoto dependiendo de la energía que libera!*

III- En la siguiente tabla se muestran los datos de energía y magnitud de un sismo real. Datos obtenidos bajo una experimentación con instrumentos sismográficos. : *Obtención de una gráfica que modele el fenómeno real ajustado a una línea de tendencia de funciones*.

Magnitud Richter	Energía Sísmica
6,0	6,30957E+20
6,1	8,91251E+20
6,2	1,25893E+21
6,3	1,77828E+21
6,4	2,51189E+21
6,5	3,54813E+21
6,6	5,01187E+21
6,7	7,07946E+21
6,8	1E+22
6,9	1,41254E+22
7,0	1,99526E+22
7,1	2,81838E+22
7,2	3,98107E+22
7,3	5,62341E+22
7,4	7,94328E+22
7,5	1,12202E+23
7,6	1,58489E+23
7,7	2,23872E+23
7,8	3,16228E+23
7,9	4,46684E+23
8,0	6,30957E+23

Esto es común en nuestra zona geográfica, dado que, Chile es un país sísmico que pertenece, al cordón activo más dinámico del planeta: "El cordón de fuego"

A) Ingresa los datos de la energía en el siguiente enlace, observa la gráfica obtenida, obtén la línea de tendencia que mayor le acomoda, responde las preguntas y obtiene tus conclusiones.

Observación: Si no sabes cómo obtener una línea de tendencia, realiza lo siguiente

- Ingresa primeramente los datos (aparecerá instantáneamente la gráfica)
- Pincha con clic derecho un punto cualquiera de la gráfica
- Ingresa en la sección que dice "Serie" y haz clic (izquierdo) en "Serie de datos 1"

- Debajo del recuadro que dice "Línea de tendencia" aparecerá un menú que dice "Tipo". Ahí elige la que tú creas que más le acomoda a la gráfica.

Responde

Gráfica Energía vs Magnitud	Línea de tendencia
	¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia?
¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?	**¿Qué aspectos diferentes aprecias?**
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?	**¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona**

"En términos empiricos, la energia liberada de un sismo responde a un crecimiento exponencial con base 10. La magnitud de un terremoto crece con una diferencia de 0,1 Richter"

ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 1				
Pregunta	**Estrategia**	**Respuesta esperada**	**Posibles obstáculos**	**Devolución**
I- a) ¿Cuál crees que será la gráfica que obtendrás? Dibuja tu proyección	Como estrategia se usa la intuición como punto fundamental de la construcción de significados. La semiótica se usa como estrategia para identificar el discurso matemático que el estudiante posee como preconcepto, en términos de significación gráfica para la epistemología del crecimiento exponencial.	Se requiere una gráfica en donde la energía o variable dependiente crezca en rápidamente o en mayor proporción que la variable independiente o magnitud, que crece en la misma medida. Esto es una gráfica exponencial (o parecida a una cuadrática). 	El estudiante no domina la noción de función y dentro de su discurso no significa el crecimiento exponencial mediante una epistemología que involucre el crecimiento abrupto de una variable física en virtud de otra. El estudiante no relaciona el lenguaje natural con lo gráfico como sustentos complementarios.	El docente guía al estudiante hacia una reflexión que involucre significar el crecimiento abrupto de una variable física en virtud de otra mediante un sustento que gráficamente se conciba como una exponencial en términos visuales o concretos, pero sin exponer términos algebraicos.
b) ¿A qué factores o razones se debe tu propuesta de gráfica? Responde intuitivamente desde el enunciado	Como estrategia se apela nuevamente a la intuición y semiótica para que el estudiante plantee su hipótesis o cuestionamiento. El estudiante involucra la noción de variación o diferencia al fenómeno de crecimiento abrupto de la energía para significarla como variable dependiente.	A que la energía se libera abruptamente y en enormes cantidades en respuesta a que la magnitud lo hace en la misma cantidad. Mientras la magnitud crece de la misma manera, la energía lo hace incrementándose siempre en altas cantidades.	El estudiante no domina la noción de función y dentro de su discurso no significa el crecimiento exponencial mediante una epistemología que involucre el incremento abrupto de una variable física en virtud de otra. El estudiante no posee la epistemología de variación dentro de los argumentos vinculados a funciones.	El docente guía al estudiante hacia una reflexión que involucre significar el crecimiento abrupto de una variable en virtud de otra, mediante una gráfica que sea coherente con el enunciado. El profesor guía hacia una mirada de la gráfica desde las variaciones en los ejes como parte de la naturaleza del fenómeno físico.

c) Según tu propuesta de gráfica ¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica	Uso de la intuición y el pensamiento gráfico como génesis para la construcción de significados del fenómeno de crecimiento como una función exponencial. Se involucra el análisis gráfico para identificar a la energía como variable dependiente. Ejemplo: trazar paralelas al eje "y". Considerar la magnitud como preimagen y la energía como imagen.	La variable dependiente es la energía liberada y la independiente es la magnitud Richter. Estas se pueden significar mediante una gráfica exponencial o que denote un crecimiento enorme de la energía versus un crecimiento constante de la magnitud.	El estudiante no domina la noción de función y dentro de su discurso no significa el crecimiento exponencial mediante una función o gráfica que evidencia el crecimiento de la energía. Pues, no significa la variable dependiente e independiente. El estudiante no tiene experiencia o cultura sismológica.	El profesor guía hacia una mirada de la gráfica desde las variaciones en los ejes como parte de la naturaleza del fenómeno físico. El docente impulsa la discusión para evocar la experiencia de los estudiantes e identificar la variable dependiente (energía) y la variable independiente (magnitud). Reflexión del impacto social.
d) ¿Cómo será dicha correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona	Una estrategia es identificar a la magnitud como la preimagen y la energía como la imagen de la magnitud.	La energía es la imagen de la magnitud. Mientras aumenta la magnitud del sismo, la energía también aumenta, pero visualmente demarca una diferencia mayor en el eje de coordenadas. La energía depende de la magnitud.	El estudiante no significa el concepto de función al fenómeno. Además, no interpreta, dentro de su discurso, a la magnitud y la energía como las preimágenes e imágenes de la función.	El docente promociona un espacio para la discusión e invita a evocar la experiencia desde el pensar. Tomando la referencia que, si crece la magnitud, crece la energía también, existe una relación directa.
A) Construye dos gráficas (una para cada	El estudiante, refuerza lo intuitivo evocando la	Se observan dos tipos de gráficas. Una para	El estudiante no posee la alfabetización digital	El docente proporciona un espacio para la

<table>
<tr>
<td>tabla) e identifica la gráfica que más le acomode al lenguaje natural utilizado en el enunciado. Significa la variable dependiente e independiente y analiza la relación entre ambas.
https://www.geogebra.org/m/kASGbAma
<table>
<tr><th>Magnitud (Richter)</th><th>Energía (kergios)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>32</td></tr>
<tr><td>6</td><td>64</td></tr>
<tr><td>7</td><td>128</td></tr>
<tr><td>8</td><td>256</td></tr>
<tr><td>9</td><td>512</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1024</td></tr>
</table>

Gráfica M vs E

Gráfica E vs M

Variables dependiente e independiente</td>
<td>experiencia. Hace uso del Applet para ingresar los datos y observar la gráfica que modela el comportamiento exponencial para después darle un significado matemático, físico y social.

El estudiante hace uso del applet para graficar o realiza experimentación manual ubicando puntos en el plano cartesiano.</td>
<td>magnitud vs energía y, otra para energía versus magnitud.

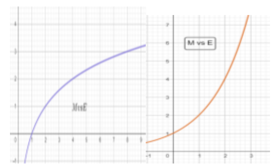
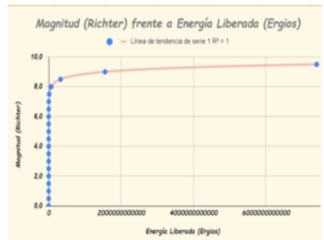

M vs E E vs M

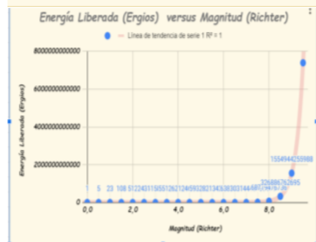
Gráfico 1: (logarítmica)
V.I: Energía
V.D: Magnitud

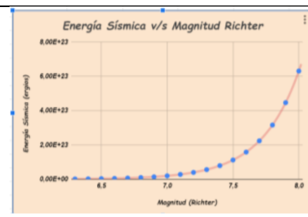
Gráfico 2: (exponencial)
V.I: Magnitud
V.D: Energía</td>
<td>o las competencias para hacer un uso correcto de las TICS (Applet). El estudiante no concreta la argumentación gráfica uniendo puntos en el plano cartesiano.

El estudiante no domina graficar manualmente. No posee las competencias para hacer un uso correcto de las TICS (Applet).</td>
<td>discusión en términos de las observaciones y significados que los estudiantes construyan en la experimentación. Recalcando que se obtienen dos gráficas diferentes que deben tener significados distintos. El profesor guía la realización en el primer cuadrante para ser coherente con las magnitudes (positivas).

El docente guía a la reflexión para que el estudiante signifique las gráficas, las relacione con el fenómeno y use su interpretación en su discurso matemático.</td>
</tr>
<tr>
<td>Interpretación</td>
<td>Como estrategia, el estudiante reforzar lo proyectado con la observación del gráfico. Identificar las magnitudes en los ejes de coordenadas para su significación relacionada con la actividad anterior. El estudiante relaciona los</td>
<td>Gráfico 1: La magnitud no crece tan rápido a medida que aumenta la energía, no se percibe un incremento energético abrupto (Logarítmico)
Gráfico 2: La energía crece rápido a medida que aumenta la magnitud, se percibe</td>
<td>El estudiante no significa los sustentos gráficos. No involucra la relación magnitudes físicas y ejes de coordenadas en su discurso. El estudiante no significa los sustentos gráficos. No involucra la relación magnitudes físicas y</td>
<td>El profesor guía la realización en el primer cuadrante para ser coherente con las magnitudes (positivas). Además, impulsa la significación mediante el análisis gráfico para un crecimiento abrupto con la intención de aumentar el marco de</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>ejes de coordenadas con las magnitudes involucradas y las significa como valores directamente proporcionales.</td>
<td>un incremento energético abrupto (exponencial)</td>
<td>ejes de coordenadas en su discurso</td>
<td>referencias que emergen de la experiencia.</td>
</tr>
<tr>
<td>B) Simuladamente, se muestran datos con información del inicio de un terremoto. Accede al siguiente enlace: Ingresa los datos y registra sólo lo que observas.
<table>
<tr><th>Magnitud Richter</th><th>Energía Sísmica (ergios)</th></tr>
<tr><td>0,0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0,0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>23</td></tr>
<tr><td>1,5</td><td>108</td></tr>
<tr><td>2,0</td><td>512</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>2435</td></tr>
<tr><td>3,0</td><td>11585</td></tr>
<tr><td>3,5</td><td>55109</td></tr>
<tr><td>4,0</td><td>262144</td></tr>
<tr><td>4,5</td><td>1246974</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>Magnitud Richter</th><th>Energía Sísmica (ergios)</th></tr>
<tr><td>5,0</td><td>5931642</td></tr>
<tr><td>5,5</td><td>28215802</td></tr>
<tr><td>6,0</td><td>134217728</td></tr>
<tr><td>6,5</td><td>638450708</td></tr>
<tr><td>7,0</td><td>3037000500</td></tr>
<tr><td>7,5</td><td>14446490411</td></tr>
<tr><td>8,0</td><td>68719476736</td></tr>
<tr><td>8,5</td><td>326886762695</td></tr>
<tr><td>9,0</td><td>1554944255988</td></tr>
<tr><td>9,5</td><td>7396603090613</td></tr>
</table>
</td>
<td>Como estrategia se usa la interfaz como medio para la experimentación. La observación forma parte de lo intuitivo para la significancia e interpretación gráfica. Otra estrategia es la utilización de la interfaz para un contraste que se relacione en un discurso que involucre una argumentación gráfica a partir de lo tabular.</td>
<td>


</td>
<td>El estudiante no relaciona los datos tabulados con el fenómeno de crecimiento exponencial. No incluye en su discurso matemático el lenguaje natural como génesis de la naturaleza de la función exponencial.
No posee las competencias para hacer un uso correcto de las TICS (Applet).</td>
<td>El docente propone un espacio para la discusión y lluvia de ideas provenientes de la observación con el fin de aumentar el marco de referencia para la construcción matemática. El docente incita hacia un análisis para reflexión entre la relación de liberación de energía con un sustento gráfico que derive de lo exponencial.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Cuáles son las variables dependientes e independientes?</td>
<td>Como estrategia se usa la interpretación y significación gráfica o la semiótica que hay detrás de la construcción social del conocimiento mediante la experimentación tabular y gráfica.</td>
<td>Gráfica 1: V. dependiente: eje “y”; magnitud. Variable independiente: eje “x”; energía. Gráfica 2: V. independiente: eje “y”; energía
Variable independiente: eje “x”; magnitud.</td>
<td>El estudiante no reconoce y no significa la variable dependiente e independiente. No experimenta u observa a la luz de una cultura sismológica.</td>
<td>Se fomenta la interpretación de las magnitudes físicas mediante el análisis gráfico para significar un crecimiento exponencial. El docente guía la reflexión y análisis desde un estudio de ejes, usando la información dada por la</td>
</tr>
</table>

Interpretación	Se concibe a la observación como medio para recoger información desde la gráfica. El estudiante recurre al análisis de ejes y puntos desde los comandos de la interfaz para enriquecer el discurso matemático.	La diferencia de punto a punto no es tas grande en valor en el gráfico 1 como en el gráfico 2. En relación con el crecimiento exponencial el gráfico 2 es más coherente y devela un comportamiento exponencial. La energía crece en mayor proporción que la magnitud y eso se identifica de los valores por cada eje de coordenadas.	El estudiante no reconoce y no significa la variable dependiente e independiente. No experimenta u observa a la luz de una cultura sismológica. Carece de alfabetización digital y científica para hacer un uso correcto de las TICS (Applet). El estudiante no usa la interpretación geométrica de valores para crear una epistemología de lo exponencial.	interfaz (estudio de los ejes). El docente guía la reflexión y análisis desde un estudio de ejes, usando la información dada por la interfaz. Además, aclara la relación entre la interpretación geométrica del gráfico y la modelación del comportamiento exponencial. También, reafirma la relación entre lo interdisciplinario recalcando el impacto social de la construcción matemática.
III- En la siguiente tabla se muestran los datos de energía y magnitud de un sismo real. A) Ingresa los datos de la energía en el siguiente enlace, observa la gráfica obtenida, obtén la línea de tendencia.	Como estrategia se usa la interfaz como medio para la experimentación. La observación ayuda a interpretar la gráfica. La interfaz ayuda a un contraste para un discurso que involucre una argumentación gráfica a partir de lo tabular. El estudiante mediante un estudio	 Gráfica que modela el crecimiento de energía.	Carece de alfabetización digital y científica para hacer un uso correcto de las TICS (Applet).	El docente guía la reflexión y análisis desde un estudio de ejes, usando la información dada por la interfaz.

Magnitud Richter — Energía Sísmica 6,0 — 6,30957E+20 6,1 — 8,91251E+20 6,2 — 1,25893E+21 6,3 — 1,77828E+21 6,4 — 2,51189E+21 6,5 — 3,54813E+21 6,6 — 5,01187E+21 6,7 — 7,07946E+21 6,8 — 1E+22 6,9 — 1,41254E+22 7,0 — 1,99526E+22	gráfico (en el software) obtiene la línea de tendencia.			
¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia?	El estudiante obtiene línea de tendencia.	La relación es exponencial, dado que la línea de tendencia con mayor precisión es la exponencial.	Carece de alfabetización digital y científica para hacer un uso correcto de las TICS (Applet). El estudiante no interpreta la gráfica desde el fenómeno social sísmico.	El docente guía la reflexión y análisis desde un estudio de ejes, usando la información dada por la interfaz.
¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen? ¿Qué aspectos diferentes aprecias?	El estudiante genera un contraste, primero, visual de su proyección (ítem I) y la gráfica. Estableciendo aspectos y componentes similares y diferentes, antes de interpretar.	Dependerá de la primera proyección de los estudiantes. Se espera que se tengan diferencia o similitudes en el tipo de gráfica o significación que modele coherentemente el crecimiento exponencial con las variables energía y magnitud.	El estudiante no significa, desde la cultura sísmica, los sustentos gráficos. No involucra la relación magnitudes físicas y ejes de coordenadas en su discurso, relacionando todo lo anterior con la noción de función exponencial.	El docente guía la reflexión y análisis desde un estudio de ejes, variables implicadas, tipo de gráfica y análisis de valores, usando la información dada por la interfaz y todas las actividades anteriores.
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía	El estudiante realiza una síntesis de todo lo anterior y lo relaciona con la significación de	Las variaciones en el eje de las "y" son variables y de razón "10" (potencias de 10)	No significa, desde la cultura sísmica, los sustentos gráficos y los valores involucrados. El	El docente, establece una reflexión de todo lo anterior, involucrando a la construcción del

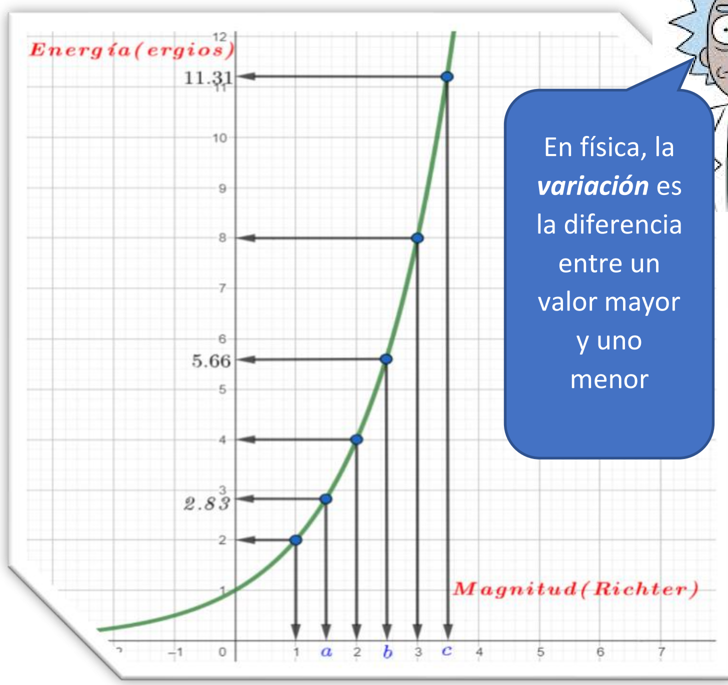
respecto de la variación en la magnitud de un sismo? ¿Es constante o variable?	los ejes y las magnitudes símicas desde los valores absolutos y su vínculo con el discurso construido desde el Ítem I.	y las variaciones en el eje de las “x” son constantes; tienen una diferencia de 0,1.	estudiante no significa la construcción gráfica como una modelación de lo exponencial. No realiza un análisis punto a punto por ejes.	discurso matemático escolar un análisis de puntos o distancias que involucre una variación para una epistemología de lo exponencial.

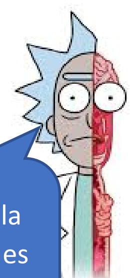
Tabla 5 Análisis a Priori Actividad 1 de la secuencia didáctica.

ACTIVIDAD II: Analizando las variaciones de las variables de la función exponencial como indicador de sismicidad

Nombres	*Curso*
Fecha:	**Equipo**
Objetivo	***Significar el comportamiento de crecimiento exponencial mediante las variaciones asociadas a los ejes de coordenadas "x" e "y".*** ***Modelar el crecimiento exponencial usando como argumento el tratamiento de parámetros en la gráfica de la función.***

En la siguiente gráfica, podrás observar datos de Energía vs Magnitud para el inicio de un terremoto. Dicho comportamiento se mantiene hasta el peak del sismo y luego, la energía liberada comienza a decrecer al igual que la magnitud también. La misión para este apartado será que reflexionemos sobre las variaciones energéticas del sismo y como éstas se relacionan con las variaciones que experimenta la magnitud. Entendiendo que significamos mediante dicha relación mediante la "función exponencial"





I- La escala en el gráfico está definida de 0,2 en 0,2 (cada cuadrito tiene una medida de 0,2 en ambos ejes) $a = 1{,}5;\ b = 2{,}5\ y\ c = 3{,}5$. Algunas ordenadas fueron redondeadas a la centésima. Además, en física, se entiende por variación a la diferencia que existe entre una medida de mayor magnitud y una de menor magnitud (Δ).

A) Con base en lo anterior, responde las siguientes preguntas (puedes dibujar tus ideas):

¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?	**¿Cómo son las variaciones en el eje de las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?**

¿Cómo significarías o interpretarías las variaciones en términos de la energía liberada? (haz un dibujo)	**¿Cómo interpretarías las variaciones en términos del tamaño del sismo o magnitud? (haz un dibujo)**
Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones	
a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimiento ______________, el cual se puede modelar con la ____________________. b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de Δ sísmica es la _______________ y la variable independiente es la ______________. Así, en la modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en el ____________ de la función. c) Las variaciones o valores del eje de las abscisas aumentan con una diferencia de 0,1 mientras que las variaciones del eje de las ordenadas aumentan a razón de 10 . Entonces los valores particulares de la energía pueden ser potencias de base 10. ***"Entonces, mientras la magnitud crece en la misma medida, la energía se libera abruptamente en enormes cantidades, de manera exponencial"***	

B) ***Significando el sustento gráfico desde un análisis numérico:***

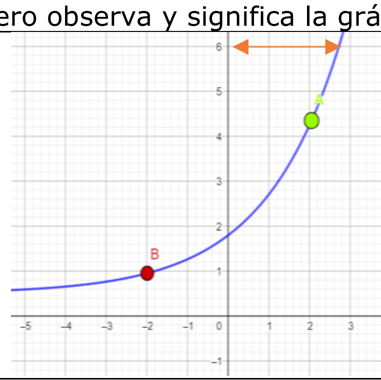
Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas	**Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas**
¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)	***¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?***

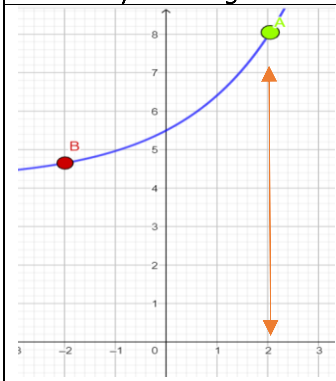
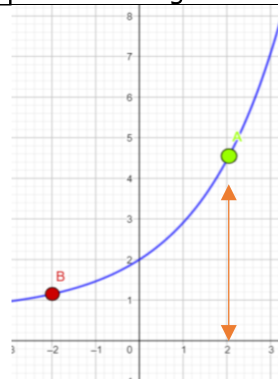
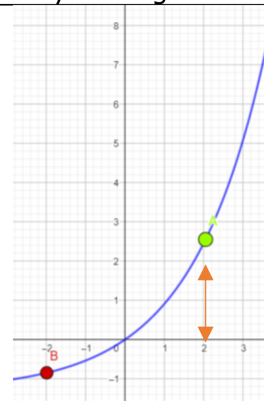
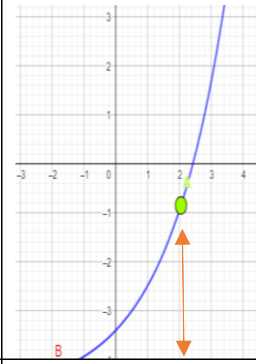
<table>
<tr><th>En términos globales</th></tr>
<tr><td>

Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores.
En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo

</td></tr>
</table>

II- Estudiando los parámetros de la F. Exponencial para significar la liberación energética de un terremoto. Para esto deberás usar el siguiente applet y observar el comportamiento gráfico a medida que mueves los deslizadores.

<table>
<tr><td colspan="3">A) En el applet, mueve los deslizadores e identifica el coeficiente que se debe cambiar para observar los cambios que experimenta esta secuencia gráfica. Ten como referencia el punto verde (pero observa y significa la gráfica, no el punto).</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Con respecto al coeficiente en cuestión ¿Cuál es el parámetro que cambia según la función graficada en el Applet</td><td>¿Cómo cambia a la gráfica cuando aumenta el coeficiente ___?</td><td>¿Cómo cambia a la gráfica cuando disminuye el coeficiente ___?</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué palabra define mejor tus conclusiones?
Dilatación Traslado</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">B) Existe un coeficiente que hace que la gráfica se deslice de esta manera. Mueve los parámetros y observa. Como referencia observa ambos puntos. ¡Encuéntrala y construye un significado para la energía liberada y la magnitud de un sismo!</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>¿Cuál es el coeficiente que al modificar su valor, describe el movimiento de la secuencia gráfica?</td><td>¿Cómo cambia a la gráfica cuando aumenta el coeficiente ___?</td><td>¿Cómo cambia a la gráfica cuando disminuye el coeficiente ___?</td><td>¿Qué palabra definiría mejor tus conclusiones? ¿Dilatación o traslación?</td></tr>
<tr><td colspan="4">¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

Desafío para la casa:¿Cómo se comporta la gráfica al variar los otros coeficientes? Según la información otorgada por la Applet ¿Qué coeficientes se pueden anular sin que la función pierda su naturaleza? Analiza</td></tr>
<tr><td>Significa lo que observaste y construye un discurso matemático.</td><td colspan="3">El parámetro _____ genera una _______________ en el eje ______ en la función exponencial de la forma _________________. De manera que, un ____ < 0 implica una ___________ vertical hacia _____________ y, un ____ >0 implica una ______________ hacia _______________ en la gráfica.</td></tr>
</table>

III-La expresión algebraica que se adapta de mejor manera el comportamiento que abordaste es de la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{cx}} + \boldsymbol{h}$ siendo su expresión más depurada de la forma $y = a \cdot b^{x+c} + h$. Obtengamos la relación para significar el fenómeno y construir un discurso matemático. ***¡Aquí la variable independiente está en el exponente!***

<table>
<tr><th colspan="2">Buscando una forma algebraica para resignificar el crecimiento exponencial: $y = ab^{cx+d} + h$</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">
La expresión de origen parte de lo siguiente:

$$logE_s = (11{,}8 + 11{,}5\ M_S)\ \ (1)$$
Para lo anterior debes recordar dos aspectos importantes:

✓ La función logaritmo es la inversa de la exponencial

✓ La definición de logaritmo en función de las potencias

Realiza el cambio de lo logarítmico a lo exponencial tú mismo:
$El\ \ logaritmo\ se\ define\ como$:

$$\log_a b = c$$
$$sí\ y\ sólo\ sí$$
$$\boldsymbol{a^c = b}\ (2)$$
</td>
<td>
Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda.

$$logE_s = 11{,}8 + 11{,}5\ Ms$$
Identifica los coeficientes

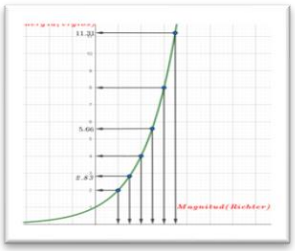
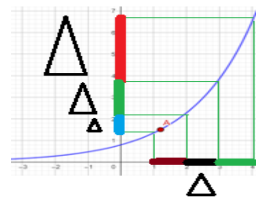
$a =$ _____ $b =$ ____ $c =$ __________
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Ahora démosle la forma de la expresión (2) $\boldsymbol{a^c = b}$ (2). La expresión que muestra la energía liberada sería

$\boxed{\quad}$

¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta
</td>
</tr>
</table>

¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencial? Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 – 8,0 – 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones.
Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo. ¿Podrías decir algo respecto del Dominio de la función?

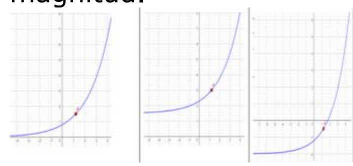
"<u>CULTURA SÍSIMICA</u>: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"

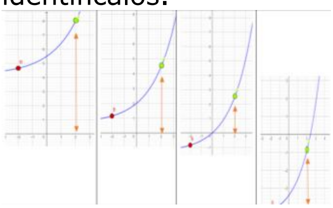
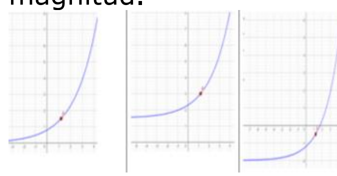
ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 2				
Pregunta	**Estrategia**	**Respuesta esperada**	**Posibles obstáculos**	**Devolución**
I- A) La escala en el gráfico está definida de 0,2 en 0,2. Con $a = 1{,}5;\ b = 2{,}5\ y\ c = 3{,}5$  ¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas/abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?	Como estrategia, el estudiante debe significar la gráfica desde lo visual, interpretando el crecimiento de cada variable como el resultado de diferencias entre puntos. Además, se debe comparar el tamaño o valores de las diferencias por eje y así identificar que en un eje es constante mientras en el otro eje no.	Las variaciones en el eje de las abscisas son constantes, mientras que en el eje de las ordenadas son variables y cada vez crecen más. 	El estudiante no significa las diferencias de valores, en cada eje, con variaciones de energía. Pues, no relaciona ni contempla en su discurso el concepto de magnitud o valor absoluto.	El docente retroalimenta que la variación es una diferencia entre un valor máximo y uno mínimo. Significando estas variaciones como explosiones de energía y, en el eje x, como crecimiento del sismo.
¿Cómo significarías o interpretarías las variaciones en términos de la energía liberada/ magnitud? (haz un dibujo).	El estudiante debe significar la gráfica desde lo visual, interpreta el crecimiento de cada variable como la diferencia entre puntos. Relaciona las variaciones con el crecimiento exponencial. Reflexiona sobre el impacto natural y social.	Mientras mayor es la distancia de punto a punto, mayor es la variación de energía (eje y), así mayor será el impacto. La magnitud crece siempre en la misma medida porque las variaciones o distancias son siempre las mismas. El crecimiento del sismo es con V constante. En un terremoto, a mayor tamaño del sismo, mayor es la energía que se libera	El estudiante no significa las diferencias de valores con variaciones de energía. Pues, no relaciona ni contempla en su discurso el concepto de magnitud o valor absoluto. No interpreta el fenómeno desde su comportamiento exponencial o la gráfica desde su génesis natural.	El docente reafirma la idea de que la energía y magnitud son las variables dependiente e independiente. De esta forma invita al estudiante a sustentar su discurso desde la génesis del fenómeno. Pues, a valores más grandes, mayor es la distancia entre puntos y mayor es la energía que expulsa el sismo.

		por ende es mayor el impacto en la tierra, comunidades y la sociedad.		
¿Cómo significarías o interpretarías las variaciones en términos de la energía *liberada/ magnitud* del sismo? (haz un dibujo).	Como estrategia se espera que el estudiante relacione las variaciones de energía con las distancias entre punto y punto (eje y) y la magnitud con el tamaño del sismo. Incluye en su discurso y argumento el impacto natural de las variaciones.	La energía se libera en grandes cantidades y la magnitud siempre crece en la misma medida.	No interpreta el fenómeno desde su comportamiento exponencial o la gráfica desde su génesis natural. No incluye al lenguaje natural como un marco de referencia para relacionar el crecimiento exponencial.	Se invita al estudiante a sustentar su discurso desde la génesis del fenómeno. Pues, a valores más grandes, mayor es la distancia entre puntos y mayor es la energía que expulsa el sismo.
Completa las afirmaciones: a) …de crecimiento _______________, el cual se puede modelar con la ______________________. b) … de Δ sísmica es la ________________ y la variable independiente es la _______________. c) … con una diferencia de 0,1 **y** las variaciones del eje **"y"** aumentan a	El estudiante se vale de toda la construcción anterior para sintetizar la información (lenguaje, experiencia, tratamiento gráfico). Relaciona las significaciones adquiridas y construye un preconcepto o pre-discurso matemático con un valor social, sustento matemático	a) Abrupto / exponencial … modelar con función exponencial b) Energía / magnitud c) diferencia de 0,1 / razón de 10 / Entonces,	No relaciona las significaciones adquiridas y no construye un preconcepto o pre-discurso matemático con un valor social, sustento matemático y una razón fenomenológica. No significa las diferencias de valores con variaciones de energía. No valida el crecimiento	El docente, en su discurso, sintetiza todo lo anteriormente construido. Aclara cuáles es la variable dependiente, para que el estudiante infiera la independiente. Así, invita a la reflexión de significar la energía como variaciones expulsadas que, matemáticamente, se simboliza con potencias de base 10.

razón de 10. Entonces…pueden ser potencias de base 10.	y una razón fenomenológica.	puede ser potencias de base 10.	exponencial mediante las variaciones entre valores o magnitudes.	Y la magnitud significada como una sucesión de valores formados al sumar 0,1 al primer valor.
B) Significando el sustento gráfico desde un análisis numérico. Obtén valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas	Como estrategia se recurre a la sustracción aritmética, entendiendo la variación como la diferencia entre un valor máximo y uno mínimo.	Eje y: 2,83-2=0,83 5,66-4= 1,06 8-5,66=2,44 11,31-8=3,31 Eje x: 1,5-1=0,5 2,5-2=0,5 / 3,4-3=0,5	El estudiante no realiza operaciones con racionales de forma correcta.	El docente retroalimenta la sustracción con racionales. Además, aclara que se están abordando variaciones locales.
¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)	El estudiante compara los valores numéricos, relaciona las diferencias a la noción de distancia y energía liberada.	$\Delta_1 = 0{,}83$ $\Delta_2 = 4{,}44$ $\Delta_3 = 3{,}31$ Las variaciones son distintas y aumentan. Mientras se sube por el eje y, las distancias entre puntos crecen, crecen las variaciones y, por lo tanto, aumenta la energía liberada.	El estudiante no realiza operaciones con racionales de forma correcta. No valida el crecimiento exponencial mediante las variaciones entre valores o magnitudes físicas.	El docente retroalimenta la sustracción con racionales. El docente invita a significar que las variaciones con mayor valor son aquellas que representan mayor cantidad de energía.
¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?	El estudiante tiende a comparar los valores numéricos, relaciona las variaciones a la noción de distancia y magnitud (tamaño) del sismo.	$\Delta_1 = 0{,}5$ $\Delta_2 = 0{,}5$ $\Delta_3 = 0{,}5$ Las variaciones son iguales en cada variación tienen valor de 0,5. Las variaciones si la distancias entre puntos fueran de 0,1, también serían iguales. La magnitud crece en la misma medida.	El estudiante no realiza operaciones con racionales de forma correcta. No valida el crecimiento exponencial mediante las variaciones entre valores o magnitudes físicas.	El docente aclara la resta con racionales. Invita a significar que las variaciones punto a punto son iguales y, aborda la idea de modelación mediante la comparación de

				variaciones en cada eje.
Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas/abscisas del primer vector y el último. Compara y analiza para valores muchos mayores.	El estudiante recurre a la resta, significando la variación como la diferencia entre un valor máximo y uno mínimo. Además, relaciona las variaciones con la distancia entre puntos; energía liberada y magnitud del sismo.	***Eje y***: $11{,}31 - 2 = \mathbf{9,31}$ ***Eje x:*** $3{,}5 - 1 = \mathbf{2,5}$ La diferencia de valores en el eje y es mucho mayor que en el eje x. La energía liberada se significa con un valor mayor que la magnitud. Para valores más grandes, la diferencia de energía será mucho mayor.	El estudiante no realiza sustracciones de forma correcta. No valida el crecimiento exponencial con las variaciones entre puntos. Además, no incluye la intuición para realizar conjeturas e inferencias para modelar el comportamiento de la gráfica.	El estudiante profundiza la situación de variaciones locales (punto a punto) y guía la reflexión hacia una variación más global que ayude a modelar el comportamiento de exponencial. Mientras aumente la magnitud del sismo mayor será la variación de energía.
¿Qué podrías afirmar de la liberación de energía en virtud de la magnitud del sismo? ¿Cómo serán las variaciones de energía para a medida que crece la magnitud Richter?	Como estrategia, el estudiante debe significar las variaciones como energía liberada y crecimiento del sismo. Otra estrategia consiste en realizar un engranaje con la respuesta anterior como argumento para generalizar el comportamiento a modelar.	Las variaciones de los valores de energía van creciendo y los de la magnitud son constantes en toda la gráfica. Para valores más grandes, la diferencia de energía será mucho mayor que la diferencia de magnitud (eje x). Pero son proporcionales, si aumenta el tamaño del sismo, aumenta la energía liberada.	El estudiante no significa el aumento de energía con el valor absoluto de las variaciones. No relaciona ni modela el crecimiento del sismo y la energía liberada como dos variables que crecen, pero en distinta medida.	El docente define el comportamiento exponencial como el crecimiento abrupto de una variable respecto a otra. Incorporando el argumento de la distancia entre puntos para incluir en el discurso la significación de la modelación del fenómeno desde una comparación de variaciones en cada eje.
II- Estudiando los parámetros de la F.	El estudiante debe manipular el applet	Como respuesta se espera que identifique los	El estudiante no posee la alfabetización digital	El docente decora la observación y

Exponencial. A) En el applet, mueve los deslizadores e identifica el coeficiente que se debe cambiar para observar los cambios que experimenta la gráfica	(GeoGebra) moviendo los deslizadores para observar los cambios gráficos. Esto servirá para recoger información, significarla y hacer conjeturas.	cambios gráficos y los relacione con la energía y magnitud. 	para hacer un uso correcto de las TICS. No relaciona o significa el cambio gráfico con las variables definidas en cada eje.	significados de los estudiantes con la relación que emerge entre la energía y la magnitud cuando el gráfico cambia. Se centra cuadrante I para ser coherente con el fenómeno.
¿Cuál es el parámetro que cambia según la función graficada en el Applet? ¿Cómo cambia a la gráfica cuando aumenta el coeficiente ____? ¿Cómo cambia a la gráfica cuando disminuye el coeficiente ____?	El estudiante debe manipular el applet (GeoGebra) moviendo los deslizadores para observar los cambios gráficos. Esto servirá para recoger información, significarla y hacer conjeturas.	El parámetro que cambia es el "c". Cuando este aumenta la gráfica se contrae y cuando disminuye la gráfica se dilata.	No relaciona o significa el cambio gráfico con el tratamiento de parámetros. El estudiante, en su discurso, carece de palabras para manifestar los cambios gráficos.	El docente encarna el tratamiento de parámetros siempre enfocado a como cambian las variaciones en cada eje. Desarrollando un pensamiento gráfico a partir del comportamiento tendencial de funciones.
¿Qué palabras definiría mejor tus conclusiones? ¿Dilatación o Traslado? ¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud?	El estudiante como estrategia se basa en la observación anterior.	Dilatación. La curva se contrae o dilata en la medida que cambia el parámetro "c". Si aumenta el "c" la curva se contrae entonces las variaciones de magnitud implicarían mayores variaciones de energía porque las imágenes	El estudiante no asocia la dilatación gráfica con el cambio de variación de puntos.	Se incluye en el discurso que, la dilatación de la gráfica se significa como una variación energética de menor valor numérico que una contracción de la gráfica. Si aumenta el "c", se contrae y las

		tomarían valores más grandes.		variaciones de magnitud implican mayores variaciones de energía porque las imágenes tomarían valores más grandes.
B) …la gráfica se deslice de esta manera. Mueve los parámetros e identifícalos. 	El estudiante debe manipular el applet (GeoGebra) moviendo los deslizadores para observar los cambios gráficos. Esto servirá para recoger información, significarla y hacer conjeturas.	Como respuesta se espera que identifique los cambios gráficos y los relacione con la energía y magnitud. 	El estudiante no posee la alfabetización digital para hacer un uso correcto de las TICS. No relaciona o significa el cambio gráfico con las variables definidas en los ejes de las gráficas anteriores.	El docente decora la observación y significados de los estudiantes con la relación que emerge entre la energía y la magnitud cuando el gráfico cambia.
¿Cuál es el coeficiente que al modificar su valor, describe el movimiento de la secuencia gráfica? ¿Cómo cambia a la gráfica cuando aumenta/disminuye el coeficiente ___?	El estudiante debe manipular el applet (GeoGebra) moviendo los deslizadores para observar los cambios gráficos. Esto servirá para recoger información, significarla y hacer conjeturas.	El parámetro que debe cambiar es el "h". Cuando disminuye la gráfica se desliza/traslada hacia abajo por el eje "y". Pero, cuando" h" aumenta, la gráfica se sube por el eje de las "y".	El estudiante no posee la alfabetización digital para hacer un uso correcto de las TICS. El estudiante no incluye en su discurso el concepto de traslación gráfica.	Se incita a la reflexión de que cuando la gráfica de desliza por el eje de las "y", la energía inicial con la que se mide el terremoto cambia. Esta puede aumentar o disminuir.
¿Qué palabra definiría mejor tus conclusiones? ¿Dilatación o traslación?	El estudiante como estrategia se basa en la observación anterior.	Una traslación de la gráfica.	El estudiante no asocia la traslación gráfica con el cambio de parámetros de la función exponencial.	Se establece que al aumente "h" la gráfica se significa como una dilatación del comportamiento

				exponencial y viceversa.
¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?	El estudiante como estrategia se basa en la observación anterior. Construir una epistemología con base en las actividades anteriores.	La curva se traslada en la medida que cambia el parámetro "h". Si aumenta el "h" la curva sube por el eje "y" entonces las variaciones de energía serían mayores. Si el "h" disminuye la curva baja por el eje "y". Las variaciones de energía serían menores.	El estudiante no asocia la dilatación gráfica con el cambio de variación de puntos. El estudiante no relaciona, en su discurso, la traslación de la curva con el aumento en el valor de las variaciones.	Se aclara que la curva se traslada *verticalmente* en la medida que cambia el parámetro "h". Si aumenta el "h" la curva sube por el eje "y" entonces las variaciones de energía serían mayores. *Dado, que la energía inicial del sismo sería mayor*.
El parámetro ______ genera una ________________ en el eje _______ en la función exponencial de la forma __________________. De manera que, un _____ $<$ 0 implica una ____________ vertical hacia ______________ y, un _____ >0 implica una _______________ hacia ________________ en la gráfica.	Como estrategia, se construye un discurso matemático que ayude a la modelación del crecimiento exponencial con una epistemología basada en las variaciones de magnitudes sísmicas. Esto se sustenta en todo la construcción y significaciones anteriores.	El parámetro "h" genera una traslación vertical en el eje y de la función exponencial de la forma $y = ab^{cx} + h$. De manera que, un h $<$ 0 implica una traslación vertical hacia abajo y, un h >0 implica una traslación hacia arriba de la gráfica.	El estudiante no significa el tratamiento de parámetro para interpretar una traslación de la gráfica de la función. El estudiante no construye o modela el crecimiento exponencial desde comportamiento tendencial de funciones. El estudiante no entiende las consecuencias de los signos $<$ ó $>$ para	Robustecer el discurso matemático asociando la traslación de la curva con las variaciones de energía. Si que la curva se traslada *verticalmente* en la medida que cambia el parámetro "h". Si aumenta el "h" la curva sube por el eje "y" entonces las variaciones de energía serían mayores. *Dado, que la energía inicial del sismo sería mayor*.

			establecer desigualdades.	
III-La forma algebraica que se adapta mejor al comportamiento que abordaste es $y = a \cdot b^{cx} + h$. Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. $logE_s = 11{,}8 + 11{,}5\ Ms$ Identifica los coeficientes a, b y c. ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda?	El estudiante debe realizar tratamientos algebraicos para trabajar la ecuación logaritmo y despejar la variable energía. Esto a raíz de la expresión: $\log_a b = c$ $sí\ y\ sólo\ sí$ $\boldsymbol{a^c = b}$ (2) El estudiante realiza análisis y construye significado a raíz de la construcción emergente de la actividad anterior.	La expresión exponencial que define la energía liberada de un terremoto es: $E = 10^{11{,}8+11{,}5\ M}$ La variable independiente quedó en el exponente de la función, siendo E el conjunto de las imágenes. Función Exponencial.	El estudiante no internaliza ni domina el tratamiento algebraico de ecuaciones. El estudiante no significa la función logaritmo como la inversa de la exponencial. El estudiante no identifica que, en la expresión algebraica de la exponencial, la variable independiente se encuentra en el exponente de la expresión.	El docente aclara que la inversa de la exponencial es la función logaritmo, misma que aparece en la actividad I del diseño. Además, define la función exponencial relacionando cada parámetro con las variables implicadas en la energía liberada de un sismo. El docente define formalmente la función exponencial y deja de manifiesto los aspectos no abordados durante la secuencia didáctica.

Tabla 6 Análisis a Priori Actividad 2 de la secuencia didáctica.

CAPÍTULO 4: DESARROLLO DE LA PROPUESTA Y RESULTADOS

4.1 Desarrollo de la Propuesta

El lugar en donde se lleva a cabo el desarrollo de la secuencia es apropiado y, además, cuenta con toda la instrumentación y recursos necesarios para la realización de la secuencia. Específicamente, se hace uso de un laboratorio computacional, perteneciente al Liceo en donde se aborda la propuesta. Todos los equipos cuentan con conectividad y están cien por ciento operativos. Se destaca que cada una de las participantes cuenta con un computador y con las guías en formato físico y digital. También es destacable la presencia de un proyector de manera que los consensos y puestas en común, así también como instancias de discusión sean mayormente aprovechables y enriquecedoras desde las interacciones sociales. Lo anterior, se considera adecuado, dado que parte fundamental de la propuesta es la experimentación gráfica y la reflexión de los argumentos del discurso de manera que se construyen argumentos, conjeturas y predicciones respecto de las experiencias evocadas. Todo esto, guía a las participantes a generar hipótesis, significados y descripciones que expliquen el fenómeno estudiado.

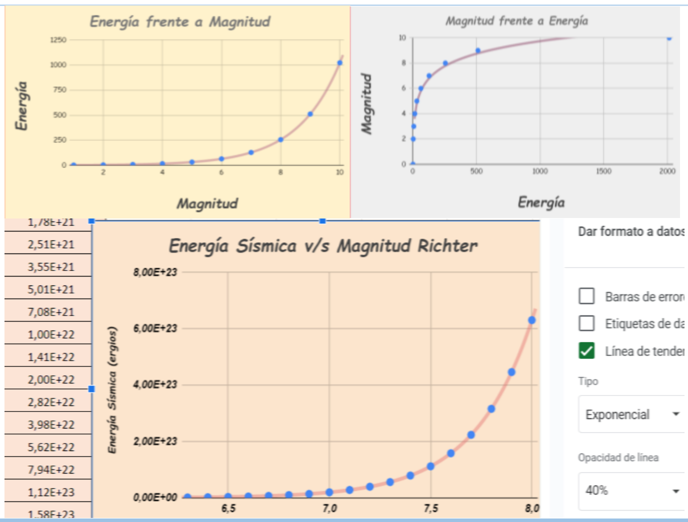
Lo anterior se considera como la base de la propuesta en virtud de que la secuencia didáctica propone una construcción matemática de carácter funcional que se ajusta coherentemente a un fenómeno real y cercano para las estudiantes, esto implica que las participantes deben articular elementos, situaciones y significados que en su engranaje conformen un discurso matemático vinculado al crecimiento exponencial a la luz de la modelación matemática con base en las prácticas sociales o socioepistemología.

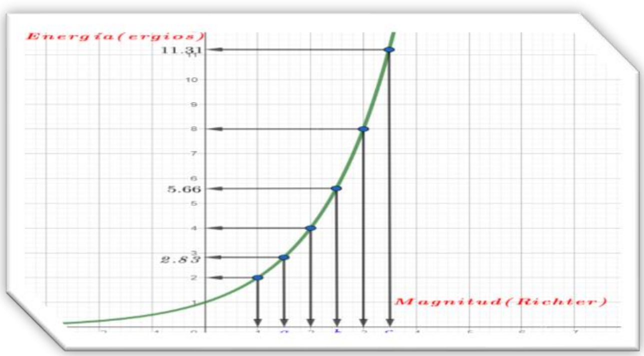
Desarrollo y Evolución de la Propuesta: La gestión del talle se lleva a cabo en dos días, estos fueron los días 13 y 14 de abril del año 2023. Cada día se trabajó durante un período de 2 horas cronológica. Esto debido al chequeo de los dispositivos, instalación de los aparatos y conectividad a internet. Se abordaron dos instrumentos o guías, uno por día, pero dentro de la realización de la secuencia, se distinguen 3 fases o momentos claves, para tener coherencia y correspondencia con la modelación matemática. Estas fueron

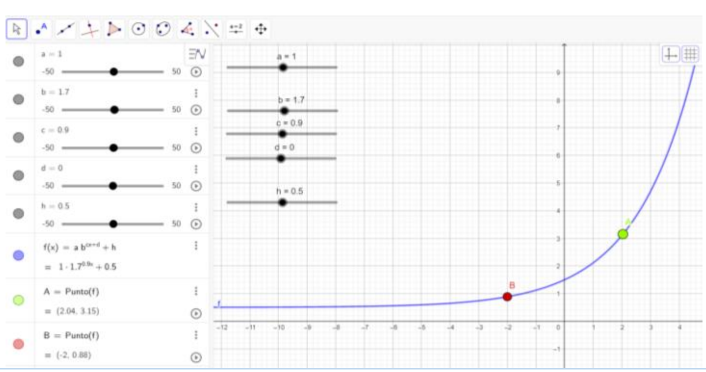
Momento 1	Fase se la experimentación o evocación de la experiencia simulada desde manipulativos virtuales o experimentación gráfica: En esta fase, las participantes realizan conjeturas y proyecciones. Además, identifican las variables involucradas y cuál puede ser la relación o correspondencia entre ellas.	**Instrumento:** **Actividad 1**
Momento 2	En esta fase se realizan reflexiones y se establecen discusiones relacionadas a cómo es la correspondencia entre las variables identificadas, cuáles son su naturaleza y cómo son los significados emergentes y consensuados. En este momento se atañen las variaciones	**Instrumento:** **Actividad 2, primera parte**

	locales y globales para luego realizar los ajustes pertinentes y construir un discurso matemático en conjunto y significativo.	**Ítems I y II**
Momento 3	Se realizan contraste y se discute para lograr un consenso y construir un discurso asociado al crecimiento o función exponenciales resignificada desde las prácticas sociales a la luz de la modelación.	**Instrumento:** **Actividad 2, segunda parte** **Ítem III**

Tabla 7 Momentos de la secuencia didáctica de la propuesta en escena

<table>
<tr><td>Momento 1</td><td>
</td><td>Instrumento:

Actividad 1</td></tr>
<tr><td>Momento 2</td><td>

</td><td>Instrumento:

Actividad 2, primera parte

Ítems I y II</td></tr>
</table>

Momento 3	La expresión de origen parte de lo siguiente: $logE_s = (11,8 + 11,5\, M_S)$ (1) Para lo anterior debes recordar dos aspectos importantes: ✓ La función logaritmo es la inversa de la exponencial ✓ La definición de logaritmo en función de las potencias Realiza el cambio de lo logarítmico a lo exponencial tú mismo: *Si el logaritmo se define como:* $\log_a b = c$ *sí y sólo sí* $\boldsymbol{a^c} = \boldsymbol{b}$ (2)	Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. $logE_s = 11,8 + 11,5\, Ms$ ***Identifica los coeficientes*** $a = 10$ $b = E_S$ $c = 11,8 + 11,5\, M$ Ahora démosle la forma de la expresión (2) $\boldsymbol{a^c} = \boldsymbol{b}$ (2). La expresión que muestra la energía liberada sería $E_S = 10^{11,8+11,5\,M}$ ¿Dónde quedó la variable? ¿En la base, en el resultado o en el exponente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta	**Instrumento:** **Actividad 2, segunda parte Ítem III**

Tabla 8 Momentos en el desarrollo de la propuesta

Algunos registros de los momentos captados en la realización de la propuestas se adjuntan en el siguiente recuadro

Tabla 9 Registros de las participantes en el desarrollo de la propuesta

Algunos indicios de las sensaciones y percepciones del investigador

Primero que todo, las expectativas son favorables, dado a la calidad académicas de las participantes. Pues se deja de manifiesto que las participantes participan en un taller de razonamiento matemático de una entidad universitaria. Ahora bien, dentro de las sensaciones, el investigado experimenta nerviosismo, entusiasmo, una amalgama entre incertidumbre y ansiedad, dada las condiciones de abordar las actividades. Entendiendo que el investigador no puede trastocar el espacio del aula, sino sólo observar.

La actitud del docente, en ciertos momentos tiende a cambiar, pues aún siendo investigador, sigue siendo docente. Pero, se adapta rápidamente a la situación etnográfica en la que está inmerso. Aclarándose, que la intención es sólo registrar y observar, para luego identificar y describir los significados construidos por las participantes. De esta manera, se convence que sus percepciones no pueden alterar ni influir en la construcción matemática ni en los significados de las estudiantes.

Inquietudes

Del investigador: El investigador, sin mayor preámbulo, comienza a reflexionar y experimentar inquietud por la distribución eficaz del tiempo, dado que, en un principio, no todas las estudiantes trabajan de manera armónica con el uso de las TICS. Es por esta razón que un pensamiento emergente y, también significativo, es que resulta necesario que quienes participen de esta secuencia realicen con antelación una alfabetización digital y científica.

Respecto de las participantes: También se relacionan con respecto a la distribución del tiempo, pues las significaciones de las participantes, traducidas en respuestas, se materializan en textos extensos y largos en número de palabras, razón por la cual se desprenden dos sensaciones. La primera es la distribución eficaz del tiempo, pero la segunda es confortable debido a la riqueza de las respuestas.

Observaciones:

Las estudiantes se colocan en una actitud que evidencia cierto nerviosismo, dado que, aunque la actividad no amerita calificación, creen que están frente a una evaluación de tipo real y calificada. En esta misma línea de pensamiento, comienzan a preguntar al investigados si sus significados son correctos o si se ajustan a su trabajo, entres otros cuestionamientos. Bajo esta situación, el investigador reitera en ciertos momentos que no puede influir en la construcción del conocimiento matemático de las participantes trastocando la atmósfera de aula en la realización de las actividades

4.2 Resultados

En este apartado, se muestran los resultados obtenidos en la propuesta de secuencia didáctica a partir de la instrumentación respectiva. De manera que, se exponen los resultados de cada participante, su categorización en relación con la naturaleza o génesis de las respuestas, las significaciones en la construcción de cada discurso y la confrontación de las respuestas, o devoluciones, a la luz de los análisis a priori presentados en el capítulo 3. Se reitera que los resultados a analizar y reflexionar corresponden a datos obtenidos de una muestra de 5 estudiantes, lo que, conlleva a 5 significaciones y, por ende, 5 construcciones de significados para la resignificación de un discurso matemático escolar vinculado al fenómeno de crecimiento exponencial como indicador de variaciones de magnitudes de sismicidad. Estos resultados se muestran en orden, según el instrumento y, también los Ítems de contiene cada cual.

4.2.1 Instrumento asociado a la actividad I

Objetivos del instrumento: Analizar información de un evento sísmico usando la función exponencial como referencia; Obtener registros gráficos a partir de la intuición y tabla de datos respecto de eventos sísmicos, reconociendo las variables dependiente e independiente “x” e “y”.

- Ítem I: Deducción previa de ideas o nociones matemáticas frente al fenómeno de crecimiento exponencial.

Dentro de los resultados obtenidos, se tienen tres categorías diferentes en cuanto a significar concretamente un fenómeno natural, expuesto en un lenguaje natural o relato, mediante un sustento gráfico. Además, cada una de las significaciones se sustenta de diversas justificaciones dentro de la etapa previa a la construcción del discurso vinculado a la función exponencial. Los resultados fueron los siguientes:

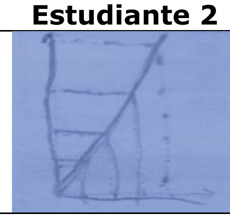
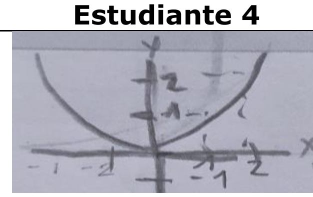
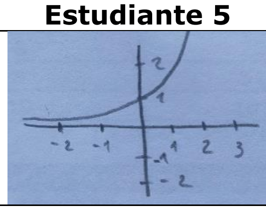
Estudiante 1	**Estudiante 2**
	
Estudiante 3	**Estudiante 4**
	
Estudiante 5	
	

Tabla 10 Significados previos del crecimiento exponencial a partir de un relato.

Descripción, Caracterización y Confrontación

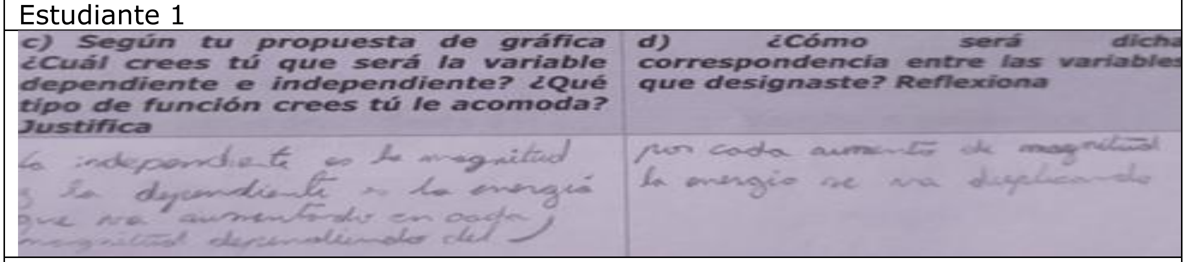
Los resultados muestran semióticas diferentes frente a un mismo fenómeno mostrado en lenguaje natural. Con base en lo anterior es posible afirmar que los sustentos o preconcepciones de los estudiantes divergen en términos matemáticos y, también, en cuanto a la correspondencia de las variables involucradas para modelar la situación gráficamente, sin contar con un sustento algebraico. Los resultados se caracterizan, según su naturaleza, en 3 categorías:

Naturaleza		
Lineal	**Parabólica**	**Exponencial**
- Estudiante 2	- Estudiante 3 - Estudiante 4	- Estudiante 1 - Estudiante 5

En la confrontación con el análisis a priori de la Tabla 6, se aprecia que no todas las estudiantes significan el fenómeno de crecimiento abrupto de una variable respecto de otra con una gráfica exponencial. De las 5 participantes, una significa el fenómeno con un comportamiento lineal, 2 con un comportamiento parabólico y 2 con uno exponencial. Se infiere que sólo dos estudiantes relacionaron la energía y la magnitud como variables relacionadas mediante un crecimiento exponencial, dado que las otras tres estudiantes significaron con otros modelos gráficos el fenómeno de crecimiento abrupto de la energía frente a uno constante de la magnitud.

En la sección que evidencia las significaciones del fenómeno respecto de la gráfica proyectada y las relaciones que establecieron cada una de las estudiantes, se recabó lo siguiente:

Estudiante 1

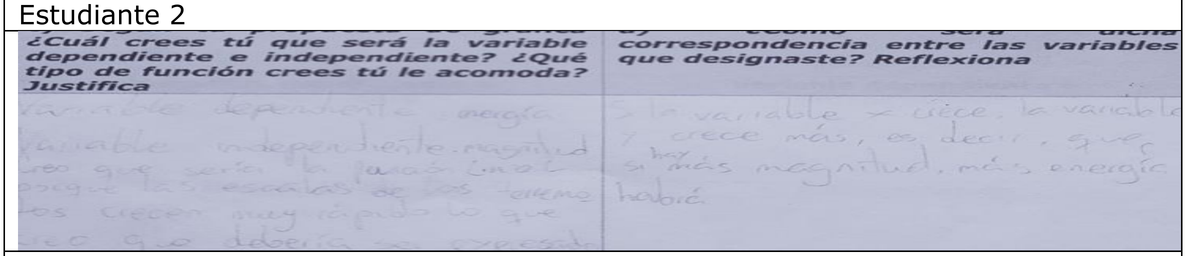

c) Según tu propuesta de gráfica ¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica

d) ¿Cómo será dicha correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona

La independiente es la magnitud y la dependiente es la energía que va aumentando en cada magnitud dependiendo del

por cada aumento de magnitud la energía se va duplicando

Estudiante 2

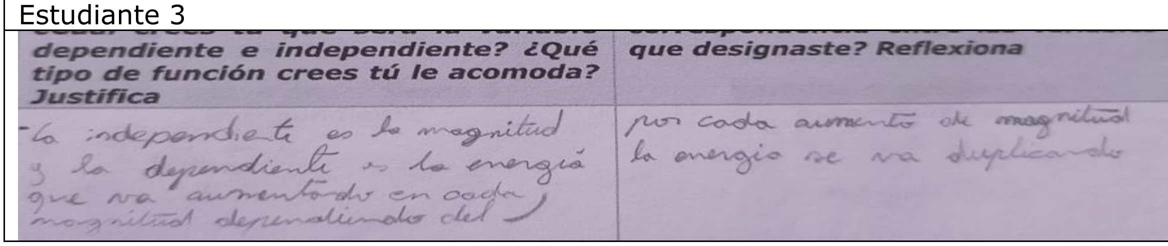

¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica

correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona

variable dependiente energía
variable independiente magnitud
creo que será la función lineal porque las escalas de los extremos crecen muy rápido lo que creo que debería ser expresado

Si la variable x crece, la variable y crece más, es decir, que si hay más magnitud, más energía habrá

Estudiante 3


dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica

que designaste? Reflexiona

La independiente es la magnitud y la dependiente es la energía que va aumentando en cada magnitud dependiendo del

por cada aumento de magnitud la energía se va duplicando

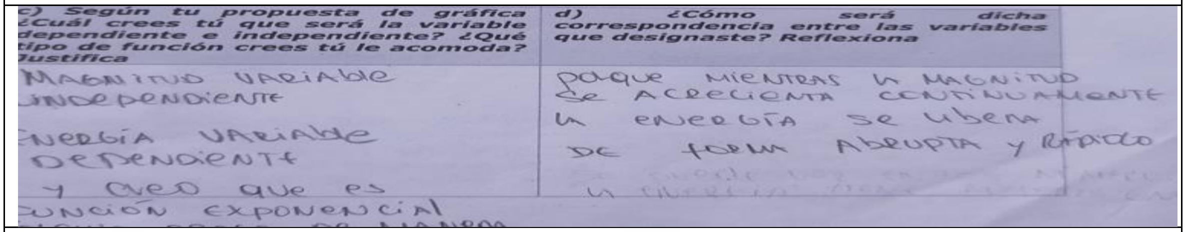
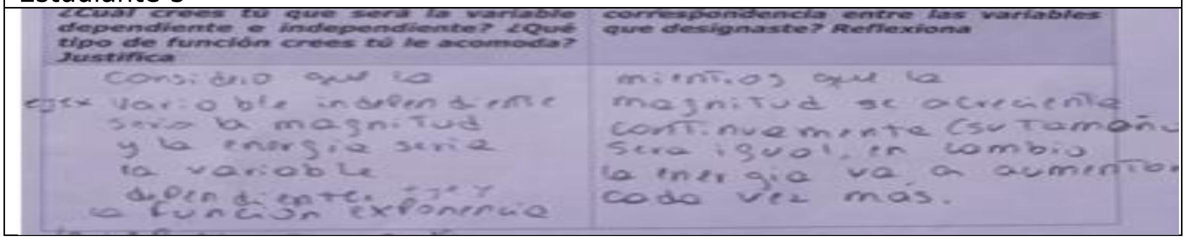
Estudiante 4
 c) Según tu propuesta de gráfica ¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica / d) ¿Cómo será dicha correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona / MAGNITUD VARIABLE INDEPENDIENTE / ENERGÍA VARIABLE DEPENDIENTE / Y CREO QUE ES FUNCIÓN EXPONENCIAL / PORQUE MIENTRAS LA MAGNITUD SE ACRECIENTA CONTINUAMENTE LA ENERGÍA SE LIBERA DE FORMA ABRUPTA Y RÁPIDO
Estudiante 5
 ¿Cuál crees tú que será la variable dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función crees tú le acomoda? Justifica / correspondencia entre las variables que designaste? Reflexiona / considero que la variable independiente sería la magnitud y la energía sería la variable dependiente y la función exponencial / mientras que la magnitud se acreciente continuamente (su tamaño será igual, en cambio la energía va a aumentar cada vez más.

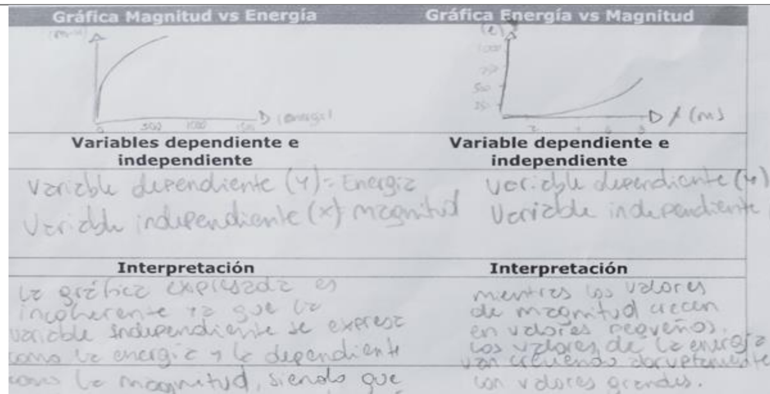
Tabla 11 Interpretación de las significaciones previas de cada estudiante

En la ***confrontación*** con lo expuesto en el análisis a priori de la Tabla 6, esta sección de preguntas resulta interesante, debido a la naturaleza de las significaciones de cada estudiante y los sustentos que hay detrás. Si bien es cierto, que la caracterización de cada argumento se categoriza en lineal, parabólica y exponencial, la totalidad de las estudiantes identifica a la magnitud como la variable independiente y a la energía como la variable dependiente. Pero, una cantidad considerable de la muestra (3 estudiantes) no relaciona o modela las variables *energía* y *magnitud* desde una función exponencial, según el caso expuesto. Esto se evidencia en la medida de que la mayoría de las estudiantes describe que la función que más acomoda es la exponencial, pero sin embargo la significan con una gráfica diferente. Lo anterior, se puede atribuir a que no todas cuentan con nociones significativas previas al concepto matemático. Otro punto que podría resultar útil o lógico para inferir respecto de las significaciones descritas es que en gran parte de la guía dice textualmente la frase "crecimiento exponencial" y, al momento de recibir el instrumento, el estudiante podría considerar dicha información en su hipótesis. Además, se manifiesta el hecho de que todas las estudiantes a lo menos conocen la noción de función.

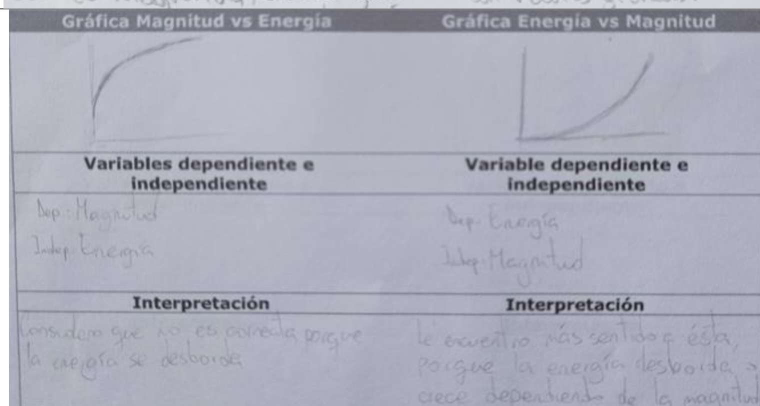
- Ítem II: Evocando la experiencia: Obtener registros gráficos a partir de tablas y significar lo observado.

Los resultados obtenidos el Ítem II, parte A), guardan relación con la experimentación gráfica del fenómeno de crecimiento exponencial. Primeramente, simulado desde una situación idealizada. Algunos resultados son:

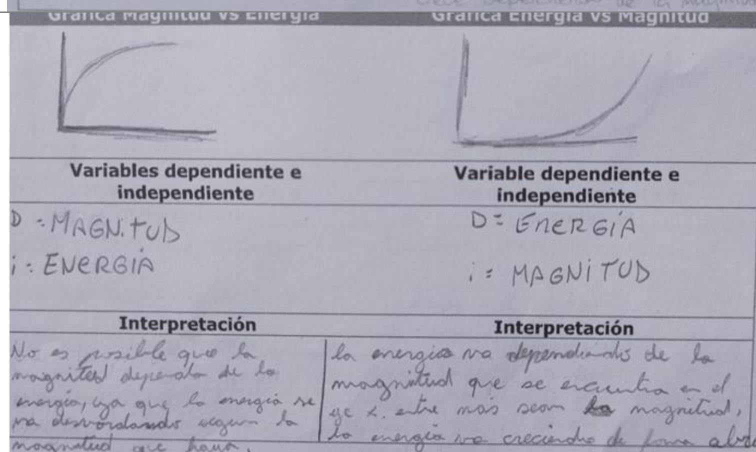
Estudiante 1



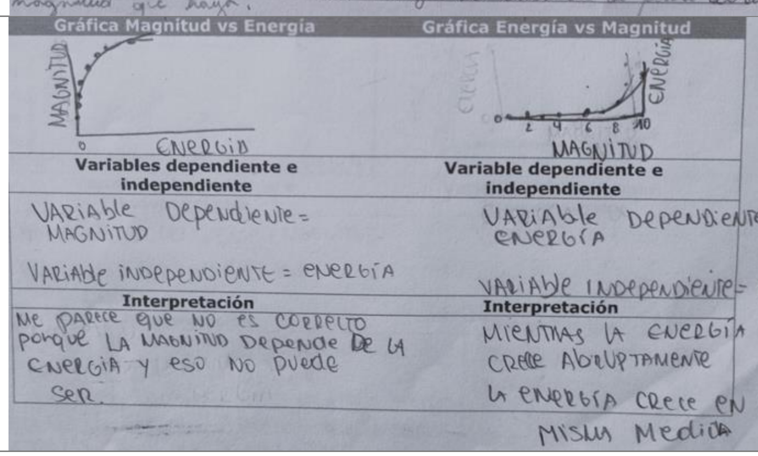
Estudiante 2



Estudiante 3



Estudiante 4



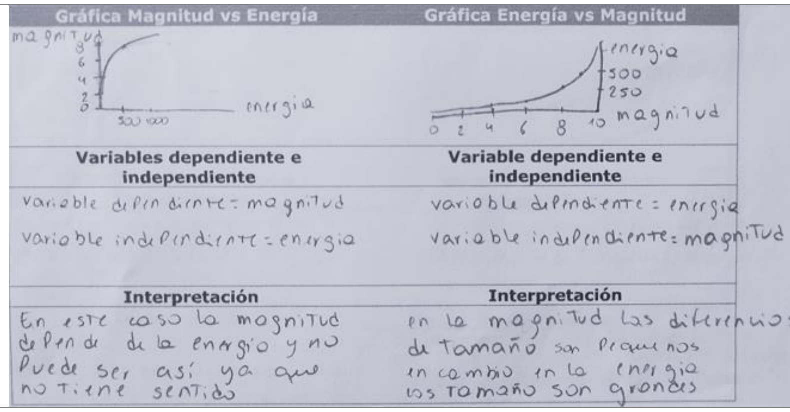
Estudiante 5	

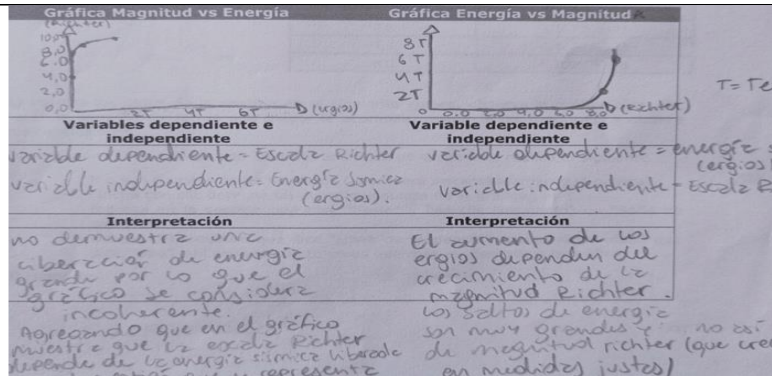
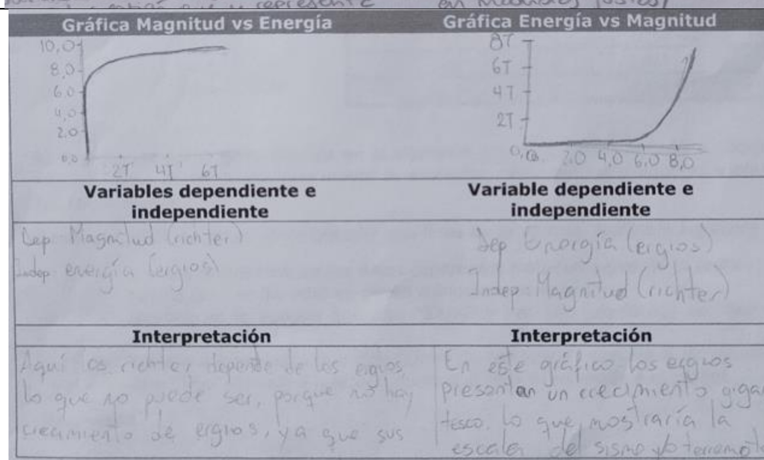
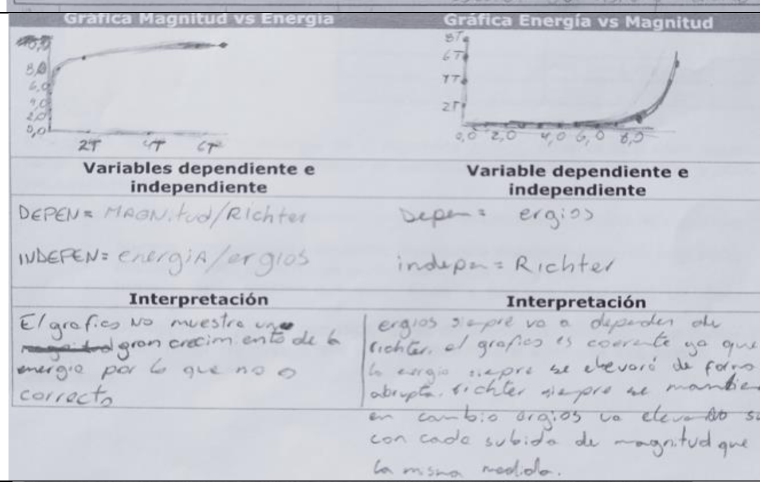
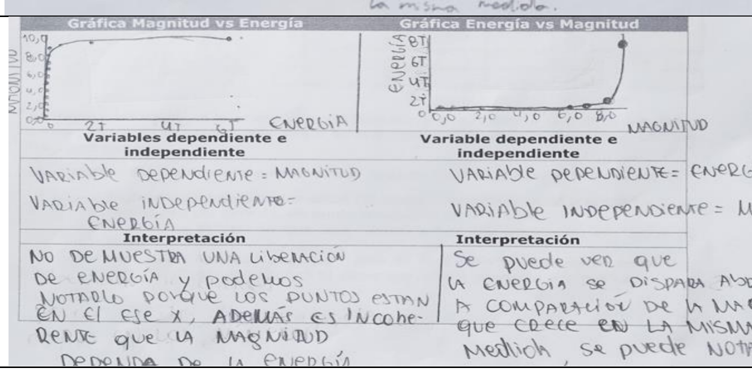
Tabla 12 Interpretaciones o significados derivados de la primera intervención con el Applet virtual abordando un sismo idealizado

En esta sección, se logran identificar significaciones que se sustentan en interpretaciones tanto físicas o meramente del fenómeno, y otra que se sustentan desde una mirada o interpretación analítica del gráfico y sus ejes de coordenadas o ambas. La naturaleza de las argumentaciones se encasilla en categorías que se caracterizan en físicas y, analíticas del gráfico y sus componentes

Físicas o relacionadas al fenómeno	Análisis de la gráfica	Ambas
- Estudiante 2	- Estudiante 4 - Estudiante 5	- Estudiante 1 - Estudiante 3

En la ***confrontación**, de los resultados con el análisis de la Tabla 6,* se puede apreciar que las estudiantes logran obtener ambas gráficas de manera correcta. Esto muestra que cada estudiante hace un uso correcto del Applet e ingresa los datos tabulados de manera correcta. Pero, la diferencia está en la interpretación y significancia que le otorgan a la gráfica emergente, desde la observación. La mayoría de las estudiantes no relaciona los argumentos físicos y gráficos para generar un mismo discurso. Dos estudiantes interpretan desde lo gráfico, aludiendo a que según las variables identificadas en cada eje de coordenadas la ordenada depende de la abscisa, por ende, la energía depende de la magnitud, lo que visualmente se concreta con las imágenes. Una estudiante sustenta su significación sólo interpelando a la coherencia con el enunciado inicial, es decir, una liberación o desborde abrupto de energía. Dos las es 5 estudiantes desarrollan una significación sustentada en una relación entre el análisis del comportamiento gráfico en concordancia con el relato base que da indicios del fenómeno natural y sus variables. La energía se libera abruptamente en porciones más grandes que la magnitud Richter. Dentro de los sustentos, en 3 de 5 resultados se relaciona el crecimiento exponencial de la energía como “saltos” de energéticos. Saltos de energía variables asociados al eje “y” y saltos de magnitudes constantes vinculados al eje “x”.

Los resultados obtenidos el **Ítem II**, parte B), guardan relación con la experimentación gráfica del fenómeno de crecimiento exponencial desde una situación de formación inicial de un terremoto, pero, esta vez, engranado hacia valores más realista desde el punto de vista natural. Sellado al final con una invitación hacia la reflexión del impacto social. Algunos resultados son:

Estudiante 1		 **Gráfica Magnitud vs Energía** | **Gráfica Energía vs Magnitud** **Variables dependiente e independiente**: variable dependiente = Escala Richter; variable independiente = Energía sísmica (ergios). | **Variable dependiente e independiente**: variable dependiente = energía s (ergios); variable independiente = Escala R **Interpretación**: no demuestra una liberación de energía grande por lo que el gráfico se considera incoherente. Agregando que en el gráfico muestra que la escala Richter depende de la energía sísmica liberada | **Interpretación**: El aumento de los ergios dependen del crecimiento de la magnitud Richter. Los saltos de energía son muy grandes y no así de magnitud richter (que crece en medidas justas) T = Te
Estudiante 2		 **Gráfica Magnitud vs Energía** | **Gráfica Energía vs Magnitud** **Variables dependiente e independiente**: Dep. Magnitud (richter); Indep. energía (ergios) | **Variable dependiente e independiente**: Dep. Energía (ergios); Indep. Magnitud (richter) **Interpretación**: Aquí los richter depende de los ergios lo que no puede ser, porque no hay crecimiento de ergios, ya que sus | **Interpretación**: En este gráfico los ergios presentan un crecimiento gigantesco, lo que mostraría la escala del sismo y/o terremoto
Estudiante 3		 **Gráfica Magnitud vs Energía** | **Gráfica Energía vs Magnitud** **Variables dependiente e independiente**: DEPEN = MAGNitud/Richter; INDEPEN = energíA/ergios | **Variable dependiente e independiente**: Depen = ergios; indepen = Richter **Interpretación**: El grafico no muestra un ~~magnitud~~ gran crecimiento de la energía por lo que no es correcto | **Interpretación**: ergios siempre va a depender de richter. el grafico es coerente ya que la energía siempre se elevará de forma abrupta. richter siempre se mantiene en cambio ergios va elevando su con cada subida de magnitud que la misma medida.
Estudiante 4		 **Gráfica Magnitud vs Energía** | **Gráfica Energía vs Magnitud** **Variables dependiente e independiente**: VARIABLE DEPENDIENTE = MAGNITUD; VARIABLE INDEPENDIENTE = ENERGÍA | **Variable dependiente e independiente**: VARIABLE DEPENDIENTE = ENERGÍ; VARIABLE INDEPENDIENTE = M **Interpretación**: NO DEMUESTRA UNA LIBERACIÓN DE ENERGÍA Y PODEMOS NOTARLO PORQUE LOS PUNTOS ESTAN EN EL EJE X, ADEMÁS ES INCOHERENTE QUE LA MAGNITUD DEPENDA DE LA ENERGÍA | **Interpretación**: Se puede ver que LA ENERGIA SE DISPARA ABR A COMPARACIÓN DE LA MAG QUE CRECE EN LA MISMA MEDIDA, SE PUEDE NOTA

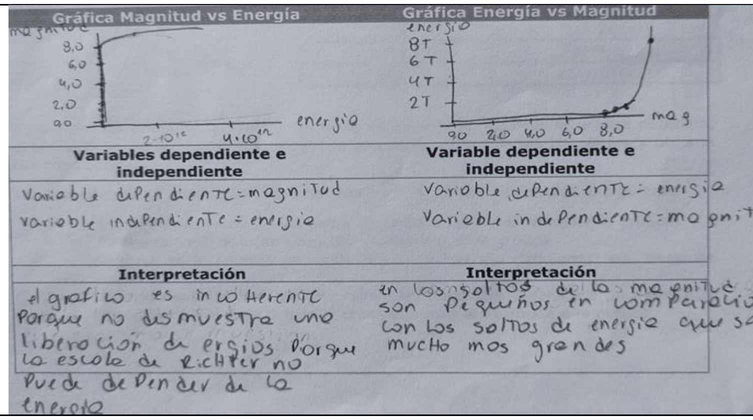
Estudiante 5	

Tabla 13 Interpretaciones o significados derivados de la segunda intervención con el Applet virtual abordando un sismo menos idealizado y más orientado a lo real.

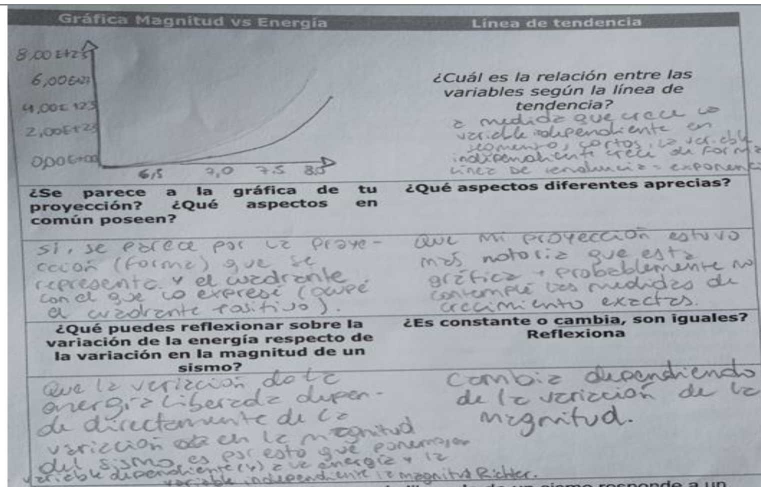
En la ***confrontación*** con el análisis a priori mostrado en la Tabla 6, se presenta lo siguiente:

Los sustentos del discurso se van robusteciendo en términos de significaciones matemáticas, físicas y naturales. El total del estudiantado identifica a la gráfica de “Energía vs Magnitud” como el sustento que da significado al modelo de crecimiento abrupto. Y, además, las inferencias, por parte del estudiantado, se van orientando cada vez más hacia un pensamiento gráfico que modele un crecimiento exponencial o, se hace alusión a una función que involucre expresiones que tienen la incógnita en el exponente. Pero, aun así, una parte considerable de las significaciones construidas no logran establecer una correspondencia coherente y consistente entre las relaciones gráficas y las de dimensión física. Es decir, identificar a cabalidad que la gráfica emergente debe modelar un comportamiento que muestre que una variable crece en grandes proporciones (eje y) mientras otra crece siempre en la misma medida (x). Siendo la magnitud Richter o tamaño del sismo la variable que es independiente y la Energía la variable que depende de ella. Los saltos de energía corresponden a distancias generadas por las imágenes de las magnitudes o “energías liberadas por el sismo” (eje y). Se destaca que 3 de las 5 participantes, construye un discurso que involucra, pero no de forma tan depurada, la relación entre las magnitudes físicas en correspondencia con una interpretación coherente y fundada de los sustentos gráficos incluyendo incluso hasta los tabulares. Pues es interesante que dos estudiantes mencionen explícitamente la correspondencia que existe entre los valores presentados en las tablas, dado que los valores tabulados deben ser los mismos que en la gráfica. Es llamativo que una estudiante, para efectos de simplificación reemplaza los valores en unidad de medida Tera. Eso es interesante, porque deja abierta la posibilidad de que se reflexione o se contemple el hecho de que los saltos en el eje” y” o de energía son de valores numéricos grandes, invitando esto a la acción de meditar sobre el impacto natural y social que los terremotos o eventos similares generan.

- Ítem III: Evocando la experiencia desde lo empírico: Obtener una gráfica que modele el fenómeno real ajustada a una línea de tendencia de funciones.

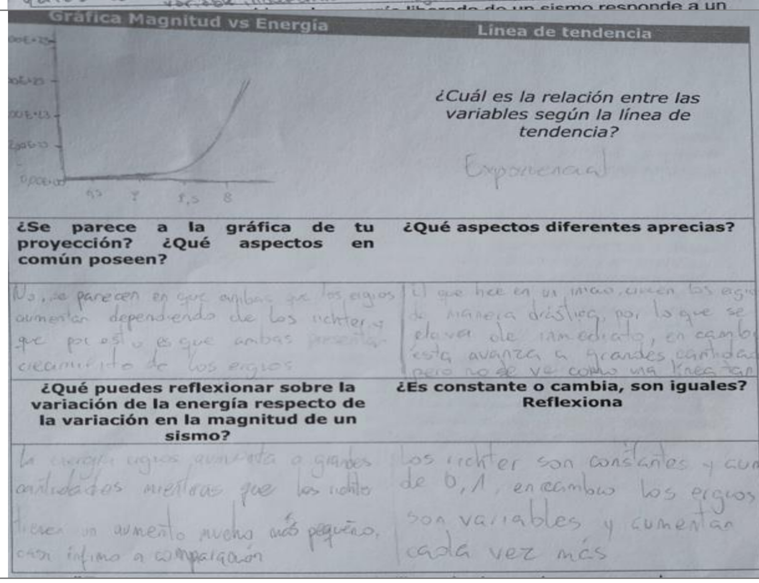
En este apartado se cosechan, detalladamente, sustentos gráficos construidos a partir de un fenómeno natural significado de manera tabular y que está, de alguna manera, en correspondencia con los datos del gráfico y ajustado a la función exponencial.

Estudiante 1



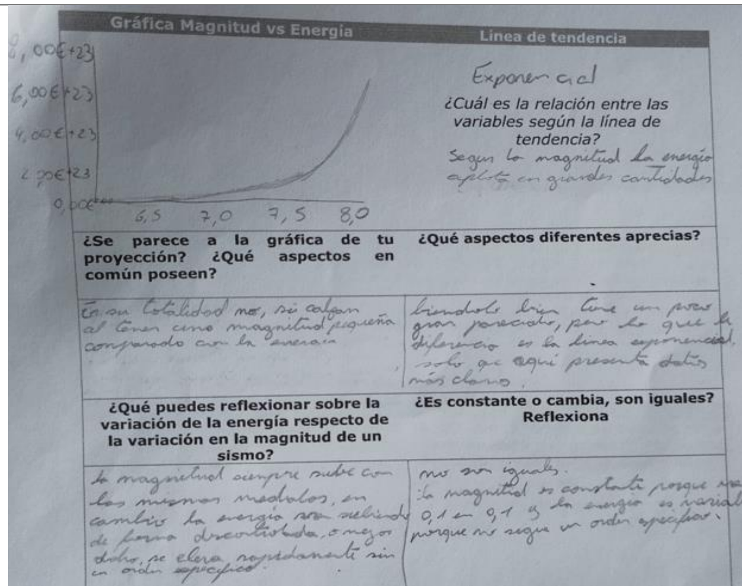
Gráfica Magnitud vs Energía	Línea de tendencia
8,00E+23; 6,00E+23; 4,00E+23; 2,00E+23; 0,00E+00; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0	¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia? a medida que crece la variable independiente en aumentos cortos, la variable independiente crece de forma línea de tendencia exponencial
¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?	¿Qué aspectos diferentes aprecias?
Si, se parece por la proyección (forma) que se representa y el cuadrante con el que lo expresé (ocupé el cuadrante positivo).	Que mi proyección estuvo más notoria que esta gráfica y probablemente no contemplé las medidas de crecimiento exactas.
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?	¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona
Que la variación de la energía liberada depende directamente de la variación en la magnitud del sismo, es por esto que ponemos variable dependiente (y) a la energía y la variable independiente la magnitud Richter.	Cambia dependiendo de la variación de la magnitud.

Estudiante 2



Gráfica Magnitud vs Energía	Línea de tendencia
0,00E+00; 6,5; 7; 7,5; 8	¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia? Exponencial
¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?	¿Qué aspectos diferentes aprecias?
No, se parecen en que ambas que los ergios aumentan dependiendo de los richter, y que por esto es que ambas presentan crecimiento de los ergios	El que hice en un inicio, crecen los ergios de manera drástica, por lo que se eleva de inmediato, en cambio esta avanza a grandes cantidades pero no se ve como una línea tan
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?	¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona
La energía ergios aumenta a grandes cantidades mientras que los richter tienen un aumento mucho más pequeño, casi ínfimo a comparación	Los richter son constantes y suben de 0,1, en cambio los ergios son variables y aumentan cada vez más

Estudiante 3



Gráfica Magnitud vs Energía

Línea de tendencia

Exponencial

¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia?

Segun la magnitud la energía aflota en grandes cantidades

¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?

En su totalidad no, si calzan al tener una magnitud pequeña comparado con la energía

¿Qué aspectos diferentes aprecias?

Viendolo bien tiene un poco gran parecido, por lo que la diferencia es la linea exponencial, solo que aquí presenta datos más claros.

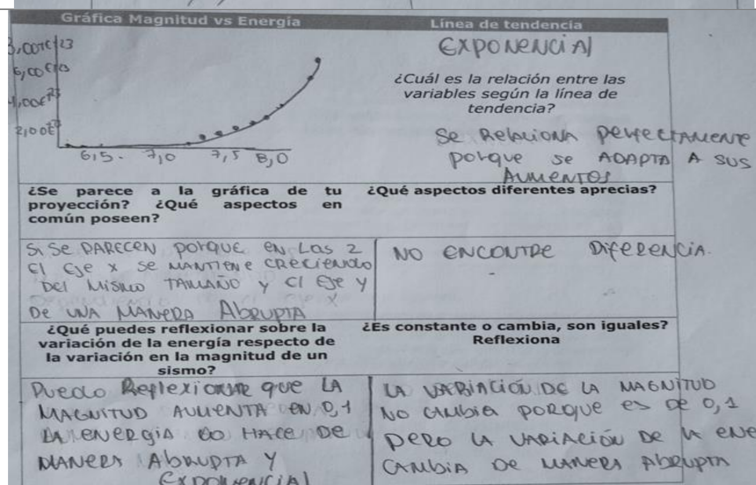
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?

la magnitud siempre sube con los mismos modulos, en cambio la energía iba subiendo de forma descontrolada, o mejor dicho, se eleva rapidamente sin un orden especifico.

¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona

no son iguales.
la magnitud es constante porque va 0,1 en 0,1 y la energía es variable porque no sigue un orden especifico.

Estudiante 4



Gráfica Magnitud vs Energía

Línea de tendencia

EXPONENCIAL

¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia?

Se Relaciona perfectamente porque se ADAPTA A SUS AUMENTOS

¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?

Si Se PARECEN porque en Las 2 el eje x se mantiene creciendo del mismo tamaño y el eje y de una manera Abrupta

¿Qué aspectos diferentes aprecias?

NO ENCONTRE DIFERENCIA.

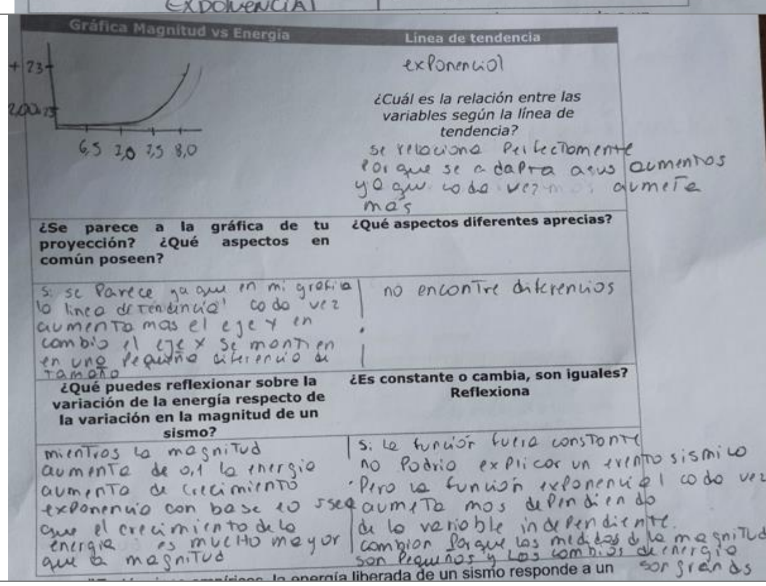
¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?

Puedo Reflexionar que LA MAGNITUD AUMENTA EN 0,1 LA ENERGIA LO HACE DE MANERA ABRUPTA Y EXPONENCIAL

¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona

LA VARIACIÓN DE LA MAGNITUD NO CAMBIA PORQUE ES DE 0,1 PERO LA VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CAMBIA DE MANERA ABRUPTA

Estudiante 5



Gráfica Magnitud vs Energía

Línea de tendencia

exponencial

¿Cuál es la relación entre las variables según la línea de tendencia?

se relaciona perfectamente porque se adapta a sus aumentos ya que cada vez aumenta más

¿Se parece a la gráfica de tu proyección? ¿Qué aspectos en común poseen?

si se parece ya que en mi grafica la linea de tendencia cada vez aumenta mas el eje y en cambio el eje x se mantiene en una pequeña diferencia de tamaño

¿Qué aspectos diferentes aprecias?

no encontre diferencias

¿Qué puedes reflexionar sobre la variación de la energía respecto de la variación en la magnitud de un sismo?

mientras la magnitud aumenta de 0,1 la energía aumenta de crecimiento exponencial con base 10 ya que el crecimiento de la energía es mucho mayor que la magnitud

¿Es constante o cambia, son iguales? Reflexiona

si la función fuera constante no podría explicar un evento sismico. Pero la función exponencial cada vez aumenta mas dependiendo de la variable independiente cambian porque las medidas de la magnitud son pequeños y los cambios de energía son grandes

Tabla 14 Interpretaciones o significados derivados de la tercera intervención con el Applet virtual abordando un sismo real.

Los argumentos gráficos plasmados desde la observación se ven más enriquecidos en virtud de la cantidad de datos identificados y que, por lo mismo, los mismos gráficos presentan. Así, en la misma línea, los sustentos del discurso son más robustos y trabajados entendiéndose la relación, en términos generales, entre la energía liberada de un sismo como variable que depende de la magnitud o tamaño de este. Se destaca que, en esta cosecha de respuestas todas las participantes significan el fenómeno de crecimiento abrupto mediante la función exponencial. Es más, una cantidad considerable de la muestra considera, sin saber cuál es la expresión algebraica involucrada, que la variable o variable independiente de la función debe estar en el exponente. Aludiendo directa e implícitamente a la función exponencial, al cual se condice con la línea de tendencia requerida para este apartado.

En la **confrontación** se sigue evidenciando situaciones de respuestas incompletas, según el análisis a priori de la *Tabla 6*, vinculadas al uso correcto de las TICS o del Applet utilizado, puesto que 2 de los 5 casos, no pudieron llegar, por sí solas, a obtener la línea de tendencia de comportamiento exponencial. Tuvieron colaboración de sus propias compañeras. Lo que denota dos aspectos que difieren del contraste con el análisis a priori, el primero de asimilar el discurso asociado a las normas del proceso de construcción del gráfico en la guía de actividades y, segundo el no congeniar con el Applet de Excel facilitado para significar el crecimiento exponencial de la energía en función de la magnitud Richter. Otro aspecto importante y rescatable de la confrontación es que, en la mayoría de las estudiantes, los modelos gráficos finales construidos durante la experiencia, difieren de los que plantearon en sus proyecciones hipótesis. Salvo dos estudiantes, que no encontraron diferencia alguna, todo el resto tuvo más de alguna característica diferente y otras comunes. Algunas aluden a que su significación de debe a no involucrar los valores numéricos, otra parte importante apunta a la precisión tanto numérica como de esquema del dibujo mismo.

En cuanto a la relación entre la energía que libera un sismo en virtud del crecimiento o magnitud de este, la mayoría de los casos relaciona dicha correspondencia como saltos o variaciones, apareciendo implícitamente la noción de distancia o valores absolutos entre puntos. Aunque todas las estudiantes concuerdan en que el aumento de energía y de magnitud son proporcionales, no todas logran relacionar la noción de variación; significar las explosiones o liberaciones abruptas como saltos o variaciones energéticas y el crecimiento del sismo como saltos o variaciones de magnitudes que son del mismo tamaño dentro de sus discursos matemáticos particulares. Dos estudiantes, sustentan su discurso apuntando la relación magnitud y energía desde la correspondencia inyectiva, es decir, de preimagen a imagen, en efecto, para un valor de magnitud que crece, le corresponde un valor cada vez mayor de energía. Esto difiere en parte de lo proyectado según el análisis a priori de la Tabla5.

4.2.2 Instrumento asociado a la actividad II

Objetivos del instrumento:

-Significar el comportamiento de crecimiento exponencial mediante las variaciones asociadas a los ejes de coordenadas "x" e "y".

-Modelar el crecimiento exponencial usando como argumento el tratamiento de parámetros en la gráfica de la función.

- Ítem I: Estudio de las imágenes desde la distancia entre puntos o variaciones de energía.

El primer barrido en la obtención de respuesta de los estudiantes se obtiene a través de un análisis y reflexión respecto de la información sísmica de un terremoto entregada mediante un sustento gráfico, el cual, desde las prácticas sociales y la discusión, se debe significar a la luz de la observación, intuición e interacción entre pares. Con base en lo anterior, es que, como primera instancia, se invita a las estudiantes a que puedan digerir la información y anotar, describir o comunicar lo que ellas signifiquen de los antecedentes entregados. Esto, para robustecer la construcción del discurso matemático en formación e ir aumentando los marcos de referencia para significar el fenómeno de crecimiento exponencial. Algunas respuestas se plasman a continuación.

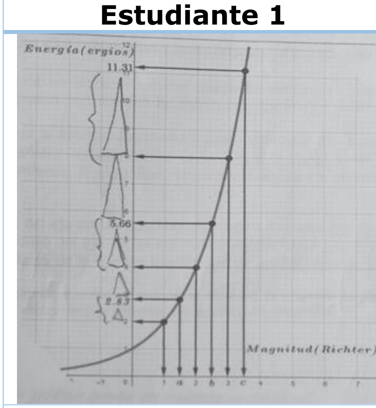
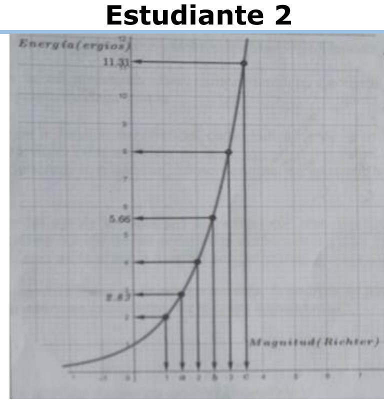
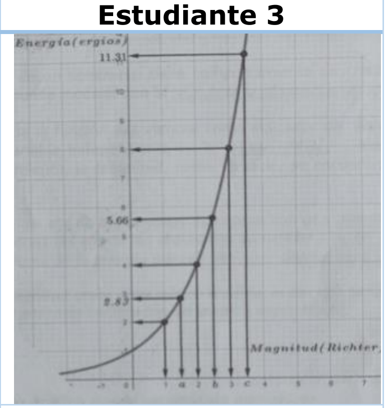
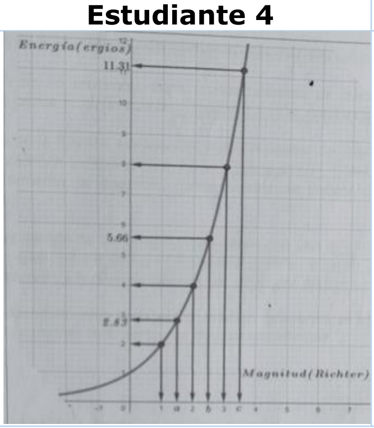
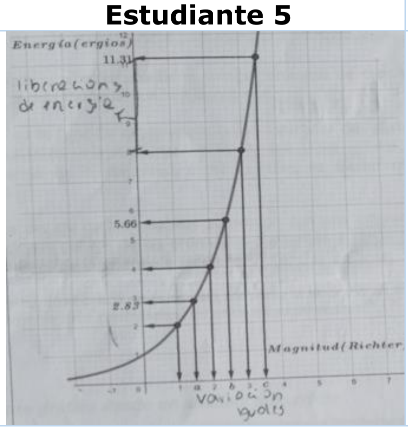
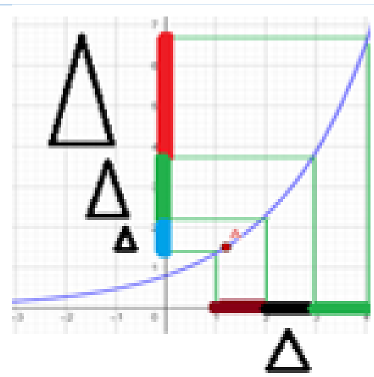
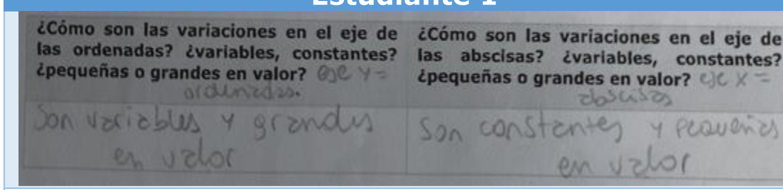
Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
		
Estudiante 4	**Estudiante 5**	**Ideal**
		

Tabla 15 Gráfica previa abordada por cada estudiante actividad 2

En esta primera **confrontación**, y en contraste con el análisis a priori de la tabla 7 del capítulo anterior, se aprecia que la mayoría de las participantes no incluye aspectos intuitivos en la significación de la gráfica propuesta como información que puede compartir para la construcción de un discurso matemático. Además, se evidencia una falta de autonomía en cuanto a depurar la información que se entrega en lenguaje natural, la cual es complementaria a los significados visuales y analíticos incluidos en la gráfica.

Con respecto a las respuestas obtenidas del análisis, interpretación y significación de la gráfica en el inciso A), en términos de las variaciones punto a punto en cada eje, se logran recabar discursos enriquecedores y engranados con las construcciones emergentes de la actividad anterior. Destacando que, la intencionalidad de la actividad 2 radica en significar, primordialmente, el eje de las ordenadas como saltos o variaciones que emergen de variaciones constantes en el eje de las abscisas, más que el mero hecho de ser las imágenes de los valores mostrados en el eje "x". Con base en lo anterior, se muestran los siguientes datos:

Estudiante 1

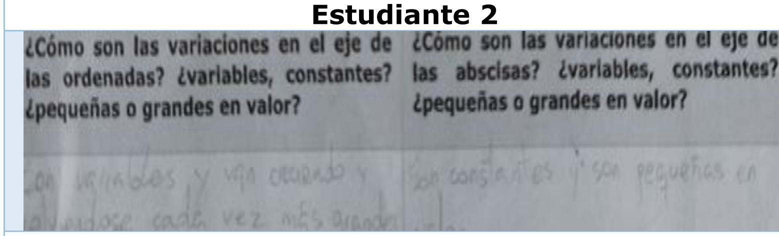

¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor? eje y = ordenadas.

Son variables y grandes en valor

¿Cómo son las variaciones en el eje de las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor? eje x = abscisas

Son constantes y pequeñas en valor

Estudiante 2

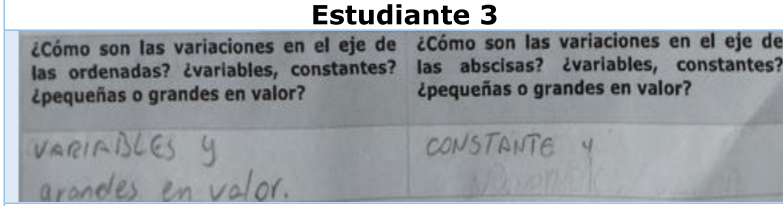

¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

Son variables y van creando y elevándose cada vez más grandes

¿Cómo son las variaciones en el eje de las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

Son constantes y son pequeñas en valor

Estudiante 3

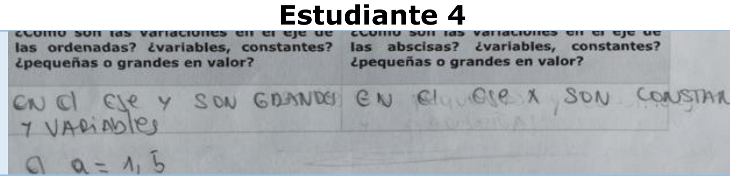

¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

VARIABLES y grandes en valor.

¿Cómo son las variaciones en el eje de las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

CONSTANTE y

Estudiante 4

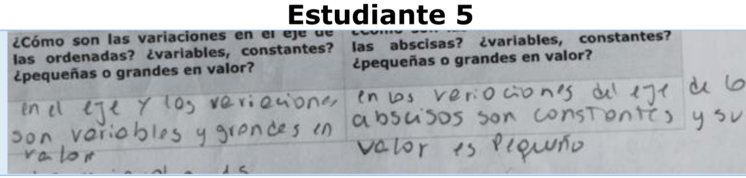

¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

EN el Eje Y SON GRANDES Y VARIABLES el a = 1,5

¿Cómo son las variaciones en el eje de las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

EN el eje X SON CONSTAN

Estudiante 5


¿Cómo son las variaciones en el eje de las ordenadas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

en el eje Y los variaciones son variables y grandes en valor

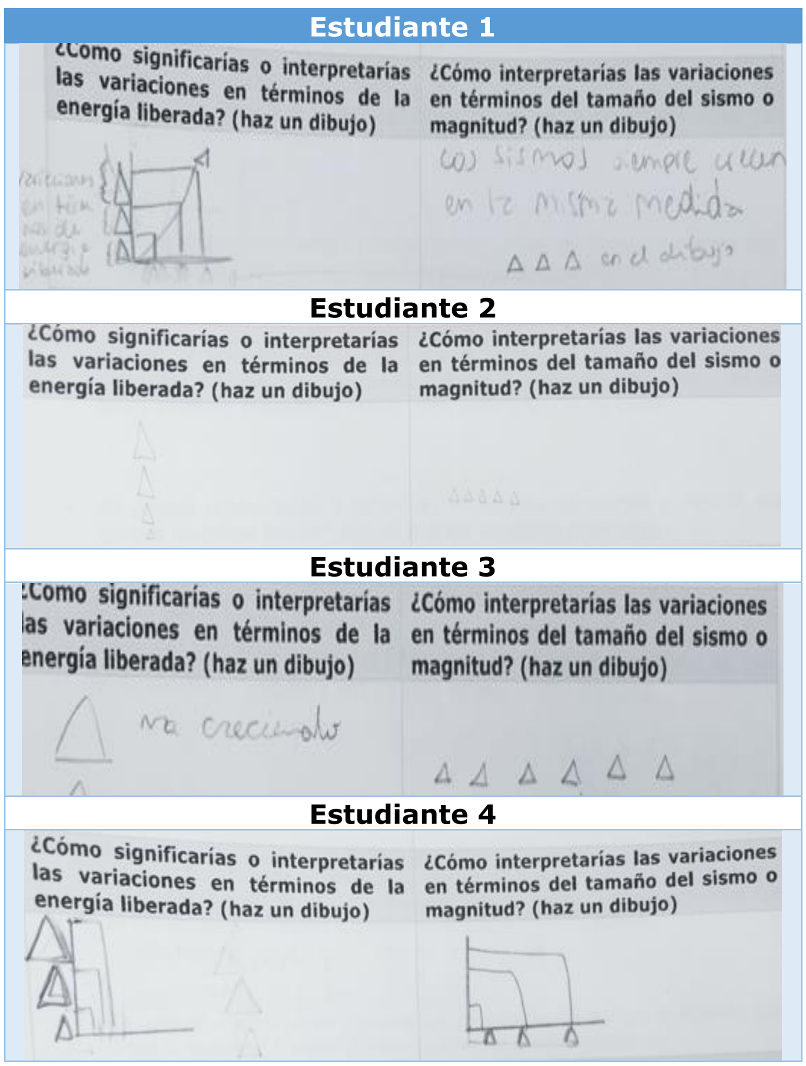
las abscisas? ¿variables, constantes? ¿pequeñas o grandes en valor?

en las variaciones del eje de la abscisas son constantes y su valor es pequeño

Tabla 16 Significación visual de la gráfica y las variaciones por eje sección A)

Confrontación:

Analizando los argumentos presentados por las estudiantes para resignificar el crecimiento exponencial desde su modelación como indicador de variaciones sísmicas, se puede justificar, siempre desde una perspectiva externa, que la totalidad de las estudiantes logra identificar qué diferencia brotan entre las variaciones que se experimentan en el eje las ordenadas y en el eje de las abscisas. En **confrontación** con el análisis a priori de la tabla 6, se evidencia que cada estudiante logra identificar que las variaciones en el eje de las ordenadas son variables, diferentes en tamaño o valor. En la misma línea de reflexión y significación, todas las participantes identifican también que las variaciones en el eje de las abscisas son constantes, es decir, no varían en valor. Como aspecto relevante se tiene que todas las participantes infieren, desde la observación y significación de la gráfica, que a medida que se sube por el eje de las "y", las variaciones son mayores. Pero, aun así, las participantes no engranan o establecen la correspondencia entre la construcción previa y la relación que existe entre las magnitudes físicas involucradas, esto, es que las variaciones de energía dependen de las variaciones de magnitudes.



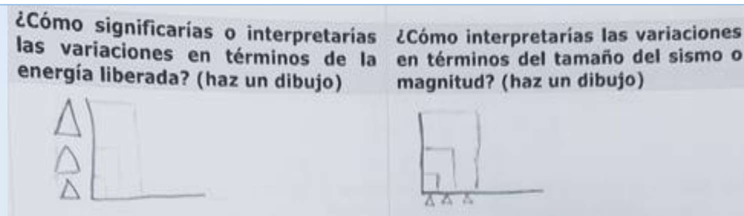
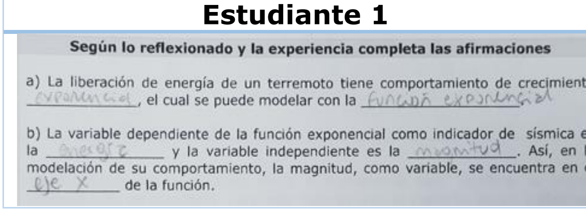
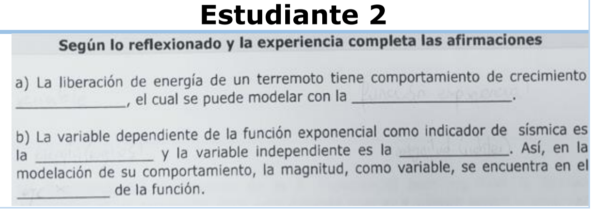
Estudiante 5


Tabla 17 Significación visual de la gráfica y las variaciones por eje sección A)

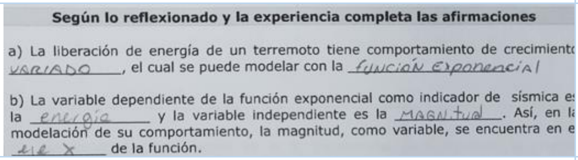
Confrontación:

Según los datos recogidos en este apartado, y contrastados con el análisis dela Tabla 7, se aprecian significaciones concretas genuinas, pero que carecen de algún sustento argumentativo en la reconstrucción del discurso. Realizando el **contraste** con el análisis a priori de la tabla 6, se aprecia que todas las participantes logran identificar que la diferencia entre las variaciones de la energía versus magnitud. Se aprecia claramente que detectan que las variaciones en el eje "y" son variables y crecientes. Y, también, que las variaciones en el eje "x" son constantes y tienen el mismo valor o medida. Pero, dichas significaciones carecen, según la confrontación con el análisis a priori pertinente, de argumentos que sustentan el fenómeno mediante un lenguaje natural, por ejemplo. Las estudiantes presentan argumentos que se perciben no correspondidos con la relación entre magnitud y energía sísmica, desde el punto de vista numérico o considerando la distancia punto a punto. De manera que, si al estudiante no se le indica que debe involucrar los valores y relacionarlos con la imagen y sus variables, pues, simplemente no los incluyen en la construcción del discurso por decoro propio.

En síntesis, las estudiantes interpretan de manera correcta el comportamiento de las variaciones por eje de coordenadas, pero no sustentan las variaciones punto a punto como la distancia o valor absoluto y, tampoco, incluyen un sustento que relacione la correspondencia entre las variaciones de energía como resultado de las variaciones de magnitud descritas en el eje de las abscisas. Todas las respuestas se reducen en una significación con base pictórica, pero no incluyen, según la confrontación con el análisis a priori, que las diferencias de magnitudes que son contantes, a medida que se avanza por la curva, van generando variaciones de energía que van creciendo en el eje "y" o donde se plasman los valores de energía. Las variaciones que se experimentan punto a punto, concibiendo los valores de energía como imágenes de la magnitud, crecen cuando aumenta el tamaño del sismo. Las estudiantes aun no consideran responsablemente el hecho de que se trabaja en el cuadrante I debido para realizar conjeturas respecto de un ajuste en el dominio de la función, dado que las magnitudes implicadas no pueden ser negativas.

Estudiante 1	Estudiante 2
 **Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones** a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimient exponencial, el cual se puede modelar con la función exponencial. b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de sísmica e la energía y la variable independiente es la magnitud. Así, en l modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en e eje x de la función.	 **Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones** a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimiento ____________, el cual se puede modelar con la ____________. b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de sísmica es la ____________ y la variable independiente es la ____________. Así, en la modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en el ____________ de la función.

Estudiante 3

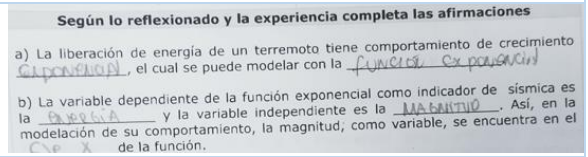


Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones

a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimiento VARIADO, el cual se puede modelar con la función exponencial

b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de sísmica es la energía y la variable independiente es la MAGNtud. Así, en la modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en el eje X de la función.

Estudiante 4

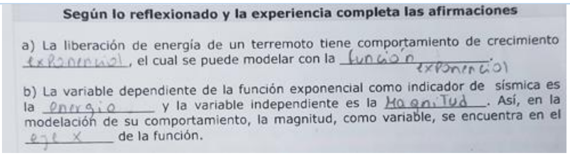


Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones

a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimiento exponencial, el cual se puede modelar con la función exponencial

b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de sísmica es la energía y la variable independiente es la MAGNITUD. Así, en la modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en el eje X de la función.

Estudiante 5



Según lo reflexionado y la experiencia completa las afirmaciones

a) La liberación de energía de un terremoto tiene comportamiento de crecimiento exponencial, el cual se puede modelar con la función exponencial.

b) La variable dependiente de la función exponencial como indicador de sísmica es la energía y la variable independiente es la Magnitud. Así, en la modelación de su comportamiento, la magnitud, como variable, se encuentra en el eje X de la función.

Tabla 18 Párrafo de síntesis de cada estudiante actividad 2, sección A)

Confrontación:

En el **contraste** con el análisis a priori se aprecia que las estudiantes, una vez culminada la actividad de interpretación y significación de las variaciones, logran completar y armar un discurso en común de manera correcta y coherente. Esto, en virtud de lo reiterativo de las actividades, se puede atribuir o inferir que la modelación del crecimiento exponencial a través de una experimentación gráfica adquiere significado en la medida que el estudiante es parte activa de la construcción social del conocimiento matemático, entendiendo y relacionando el fenómeno desde una génesis natural, presente en su cotidianidad y abordada a la luz de una matemática articulada con lo interdisciplinario o ciencias físicas de la tierra. Este inciso es interesante, pues los sustentos discursivos que no aparecen en las confrontaciones anteriores no impiden que las estudiantes identifiquen y signifiquen el fenómeno de manera correcta. Por lo tanto, y en virtud de la veracidad de los datos, por parte de la reconstrucción de las participantes del objeto matemático, la no inclusión de los aspectos físicos y disciplinares de los sismos en el relato anterior no amerita una falta de reflexión o significación del crecimiento exponencial bajo un sustento que engrane todas las construcciones realizadas bajo el lineamiento de la secuencia didáctica propuesta.

Se devela que a partir de la actividad anterior se comienza a cimentar el sendero para el análisis, estudio y resignificación de las variaciones locales que experimenta el comportamiento gráfico con orientación hacia una generalización, posteriormente, concebida como variaciones globales.

Análisis de resultados Actividad 2; **Ítem I, Sección B):** "Significando el gráfico desde un análisis numérico"

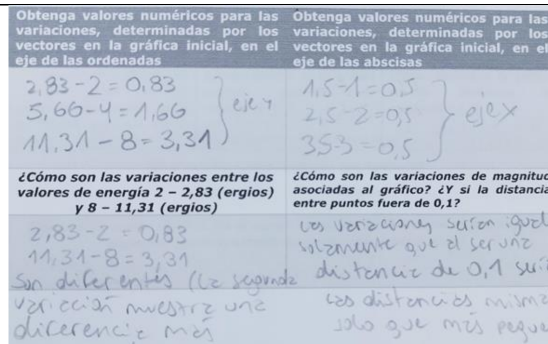
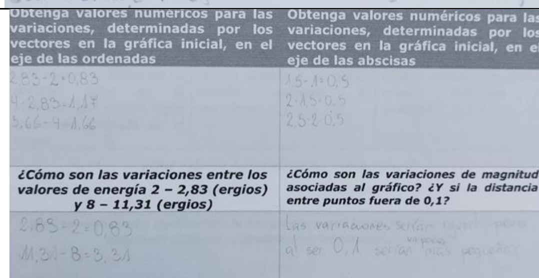
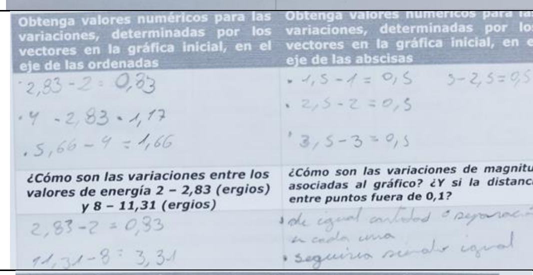
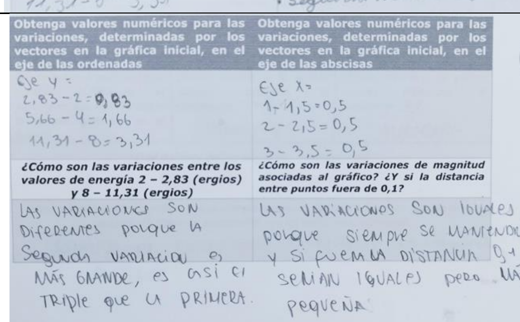
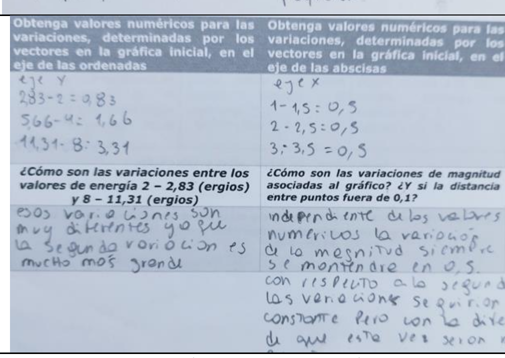
Estudiante 1	 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas:** 2,83 - 2 = 0,83 / 5,66 - 4 = 1,66 / 11,31 - 8 = 3,31 eje y **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas:** 1,5 - 1 = 0,5 / 2,5 - 2 = 0,5 / 3,5 - 3 = 0,5 eje x **¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)** 2,83 - 2 = 0,83 / 11,31 - 8 = 3,31 / Son diferentes (la segunda variación muestra una diferencia más **¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?** Las variaciones serían iguale solamente que al ser una distancia de 0,1 serían las distancias mismas solo que más pequeñ	
Estudiante 2	 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas:** 2,83-2=0,83 / 4-2,83=1,17 / 5,66-4=1,66 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas:** 1,5-1=0,5 / 2-1,5=0,5 / 2,5-2=0,5 **¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)** 2,83-2=0,83 / 11,31-8=3,31 **¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?** Las variaciones serían iguales pero al ser 0,1 serían un poco más pequeñas	
Estudiante 3	 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas:** 2,83 - 2 = 0,83 / 4 - 2,83 = 1,17 / 5,66 - 4 = 1,66 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas:** 1,5 - 1 = 0,5 / 3 - 2,5 = 0,5 / 2,5 - 2 = 0,5 / 3,5 - 3 = 0,5 **¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)** 2,83 - 2 = 0,83 / 11,31 - 8 = 3,31 **¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?** de igual cantidad de separación en cada una / seguiría siendo igual	
Estudiante 4	 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas:** Eje y = 2,83 - 2 = 0,83 / 5,66 - 4 = 1,66 / 11,31 - 8 = 3,31 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas:** Eje x = 1 - 1,5 = 0,5 / 2 - 2,5 = 0,5 / 3 - 3,5 = 0,5 **¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)** LAS VARIACIONES SON DIFERENTES PORQUE LA SEGUNDA VARIACIÓN ES MÁS GRANDE, ES CASI EL TRIPLE QUE LA PRIMERA. **¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?** LAS VARIACIONES SON IGUALES PORQUE SIEMPRE SE MANTENDRÍ Y SI FUERA LA DISTANCIA 0,1 SERÍAN IGUALES PERO MÁS PEQUEÑA	
Estudiante 5	 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las ordenadas:** eje y / 2,83-2 = 0,83 / 5,66-4 = 1,66 / 11,31-8 = 3,31 **Obtenga valores numéricos para las variaciones, determinadas por los vectores en la gráfica inicial, en el eje de las abscisas:** eje x / 1-1,5 = 0,5 / 2-2,5 = 0,5 / 3-3,5 = 0,5 **¿Cómo son las variaciones entre los valores de energía 2 – 2,83 (ergios) y 8 – 11,31 (ergios)** esas variaciones son muy diferentes ya que la segunda variación es mucho más grande **¿Cómo son las variaciones de magnitud asociadas al gráfico? ¿Y si la distancia entre puntos fuera de 0,1?** independiente de los valores numéricos la variación de la magnitud siempre se mantendrá en 0,5. con respecto a lo segundo las variaciones seguirían constante pero con la dife de que esta vez serían m	

Tabla 19 Tratamiento de puntos y significación de las gráficas a partir del análisis de variaciones en cada eje de coordenadas

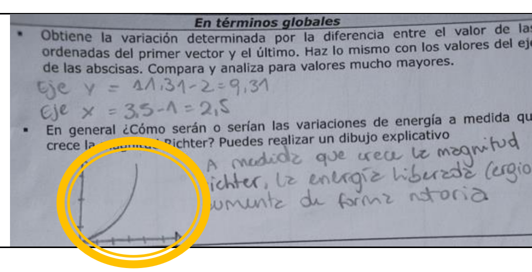
Como punto de categorización, respecto de la naturaleza de las significaciones o sustentos, se develan dos categorías, una meramente **numérica** y otra de carácter interdisciplinar o **física.**

Confrontación:

En la confrontación de los datos obtenidos con el análisis a priori realizado, se aprecian concordancias en cuanto al tratamiento numérico de los valores destacados en la gráfica, tanto de energía como de magnitud. Esto es, las diferencias aritméticas obtenidas por todas las estudiantes son las mismas y, además, son matemáticamente correctas. Es más, todas las participantes, implícitamente, incluyen la noción de variación en la significación del comportamiento exponencial a través de las distancias que sufren tanto el eje de las abscisas (magnitud) como en el de las ordenadas (energía). En contraste con el análisis a priori, y en virtud de los tratamientos aritméticos, no ase aprecian desfaces en los resultados numéricos.

En cuanto a la significación de las variaciones u obtención numérica de las diferencias punto a punto en ambos ejes, se evidencia, según la confrontación con el análisis a priori de la Tabla 7, que la mayoría de las estudiantes en su discurso escrito incluye las relaciones entre las magnitudes físicas engranadas coherentemente con los resultados numéricos. Tres de las cinco participantes entregan un sustento numérico enriquecido con una significación que manifiesta o describe un comportamiento de crecimiento exponencial, desde un aumento de las variaciones de energía en el eje y como un crecimiento de las distancias entre los valores de las imágenes de las magnitudes que están designadas en el eje x, y cuyas distancias o valores absolutos entre punto y punto son constantes, lo que correctamente, interpretan como variaciones constantes (los terremotos siempre crecen en magnitud en la misma medida), lo que resulta coherente desde la fenomenología porque a medida que un sismo crece, pues libera mayor cantidad de energía, entonces las explosiones de energía sería mayores. Dos de las cinco estudiantes sólo incluyen una significación sustentada en lo numérico, es decir, las variaciones crecen porque los resultados, numéricamente, son mayores.

En la siguiente porción de respuestas, se pretende develar las interpretaciones relacionadas al comportamiento de crecimiento exponencial de manera generalizada. Mostrar cómo va el proceso de reconstrucción social del discurso asociado a la modelación de la función exponencial atendiendo las variaciones globales del fenómeno naturalizado en las distintas fases que se fueron, supuesta e idealmente, engranando desde el comienzo de la actividad 1. De manera que se pretende develar e identificar los discursos a la luz de las conjeturas de las estudiantes para identificar su naturaleza, homogeneidad o heterogeneidad. Para posteriormente realizar los ajustes necesarios de manera que se pueda encausar, la reflexión, hacia un éxodo que lleve a una definición más o menos consensuada y emergente de la fenomenología sísmica interpretada desde una matemática funcional vinculada a la función exponencial.

Estudiante 1		

En términos globales

- Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores.

Eje y = 11,31-2=9,31
Eje x = 3,5-1 = 2,5

- En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo

A medida que crece la magnitud
Richter, la energía liberada (ergios)
aumenta de forma notoria

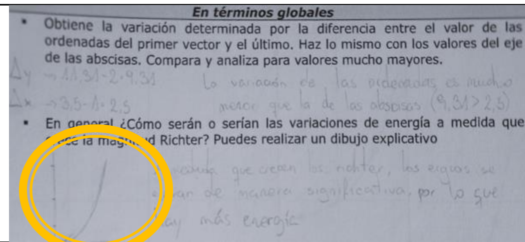
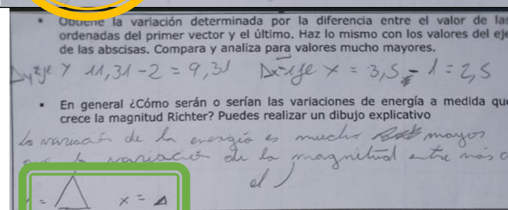
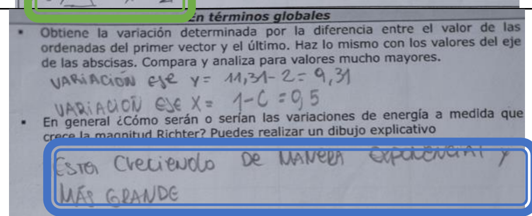
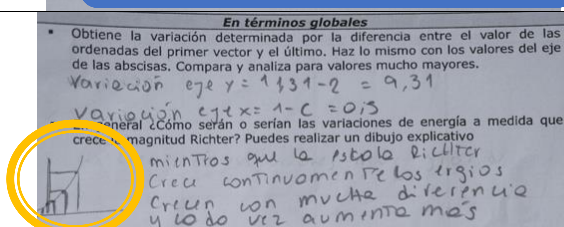
Estudiante 2	 **En términos globales** • Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores. Δy → 11,31-2=9,31 La variación de las ordenadas es mucho Δx → 3,5-1=2,5 menor que la de las abscisas (9,31 > 2,5) • En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo medida que crecen los richter, las ergios se [illegible] de manera significativa, por lo que hay más energía
Estudiante 3	 • Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores. Δy eje Y 11,31 - 2 = 9,31 Δx eje X = 3,5 - 1 = 2,5 • En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo la variación de la energía es mucho mayor que la variación de la magnitud entre más [illegible] el) = △ x = ▵
Estudiante 4	 **En términos globales** • Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores. VARIACIÓN eje y = 11,31 - 2 = 9,31 VARIACIÓN eje X = 1 - C = 0,5 • En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo ESTA CRECIENDO DE MANERA EXPONENCIAL Y MÁS GRANDE
Estudiante 5	 **En términos globales** • Obtiene la variación determinada por la diferencia entre el valor de las ordenadas del primer vector y el último. Haz lo mismo con los valores del eje de las abscisas. Compara y analiza para valores mucho mayores. Variación eje y = 11,31 - 2 = 9,31 Variación eje x = 1 - C = 0,5 • En general ¿Cómo serán o serían las variaciones de energía a medida que crece la magnitud Richter? Puedes realizar un dibujo explicativo mientras que la escala Richter crece continuamente los ergios crecen con mucha diferencia y cada vez aumenta más

Tabla 20 Datos de la significación de variaciones globales o generalizadas del comportamiento exponencial para su modelación desde la socio epistemología.

Confrontación:

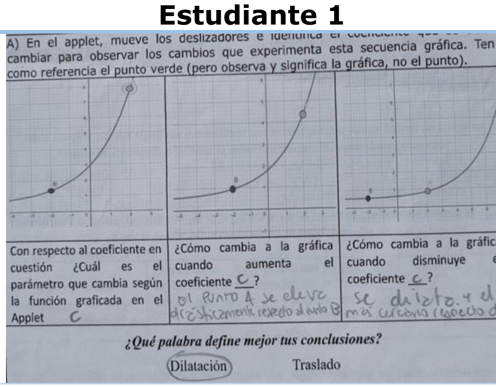
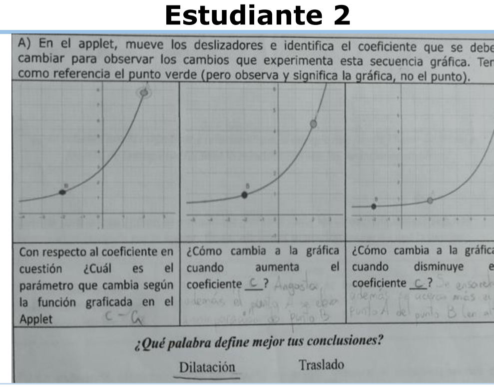
Primero que todo, se identifican tres tipos de sustentos en los discursos construidos por las estudiantes respecto de la interpretación o significación del comportamiento global o general del crecimiento exponencial. Estas categorías tienen su génesis en la ***gráfico***, ***pictórico*** y en ***lenguaje escrito***.

En el **contraste** con el análisis a priori de la tabla 7, se puede patentizar que todas las estudiantes concuerdan con la identificación del carácter de la función involucrada en el crecimiento de las variaciones asociadas en cada eje de coordenadas. Relacionando lo anterior con la liberación de energía en respuesta al crecimiento o magnitud de un evento sísmico y, además, vinculando todo esto a la obtención de valores de energía como imágenes de la magnitud, los que van creciendo hasta valores extremadamente grandes, numéricamente hablando. En esta etapa, de la construcción del discurso matemático, se invita a que puedan conjeturar desde el impacto natural que puede causar dicho fenómenos, pues en esta arista, 3 de las 5 participantes manifiestan, de manera implícita, que mientras se sube por la curva aumenta de manera estridente la energía liberada en un sismo. Esta conjetura es interesante, pues abre la puerta a la reflexión sobre la existencia de terremotos que podrían ser inmedibles, dado los enormes valores de energía que aparecen o pueden aparecer en el eje de las "y". Pues, desde la observación realizada por el investigados, dichas conjeturas se discuten, en el momento de la aplicación de los instrumentos.

Además, y a la luz de la **confrontación** anterior, se muestra que no existe aún un consenso en las significaciones generales de cada estudiante, lo cual resulta lógico, pues cada participante construye significados y, por ende, discursos de manera subjetiva. Dos de las 5 participantes, en engranan de manera coherente el cúmulo de significados asociados a la secuencia didáctica, pero no los muestran o describen de manera explícita. Sólo logran este tres de las 5 participantes. También, se aprecia que una de las 5 participantes sustenta sus interpretación desde la semiótica o significación de signos, pues muestra el carácter de global del comportamiento modelado con “triángulos” de distintos tamaños asociados a cada eje, como símbolo de las variaciones que experimentan tanto la energía en ergios y la magnitud en Richter. En términos generales 2 de las 5 participantes construyen significados incluyendo, de manera coherente y engranada, desde la correspondencia numérica y gráfica. Y, 3 de las 5 estudiantes lo hacen utilizando, de manera coherente y engranada, significados de origen numérico, pictórico y gráfico. Se destaca que las 5 estudiantes no tienen mayores problemas en el tratamiento aritmético de los valores de puntuales, así también, como de las variaciones o distancias. Pues, aritméticamente, todos los resultados son correctos y concuerdan con el análisis a priori de la Tabla 7.

En los resultados obtenidos de la **Actividad 2**, **Ítem II**, inciso A), se muestran los siguientes datos: “Tratamiento de parámetros y comportamiento tendencial de funciones”

Se reitera que en esta sección se pretende sustentar y robustecer los significados relacionados con las variaciones globales que se identifican y abordan en la modelación del crecimiento exponencial en virtud de la construcción de un discurso matemático a la luz de una epistemología fundada en un fenómeno natural sísmico. Pues, según, el desarrollo de la propuesta y el análisis a priori, la intención es depurar el desarrollo de un pensamiento gráfico hilado coherentemente con la fenomenología y lo matemático.

<table>
<tr><th>Estudiante 1</th><th>Estudiante 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Estudiante 3</td><td>Estudiante 4</td></tr>
</table>

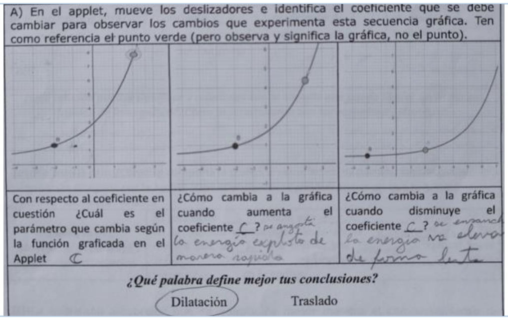
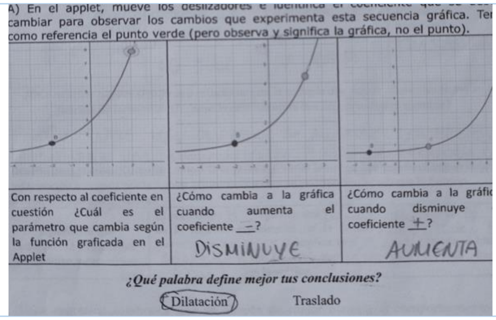
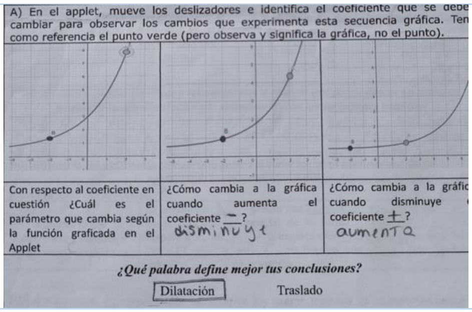
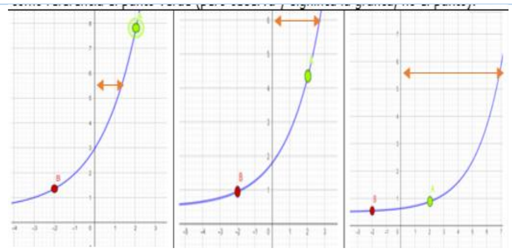
	
Estudiante 5	**Ideal**
	 *Parámetro "c"*

Tabla 21 Significados del crecimiento exponencial desde el tratamiento de parámetros en la gráfica y el comportamiento tendencial de funciones; Identificar coeficiente "c"

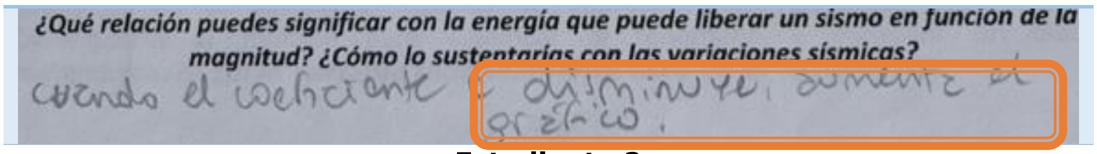
Confrontación:

Realizado el contraste con el análisis a priori de la Tabla 7, y en primera instancia, se devela que la *intuición* es parte fundamental en la construcción de significados de cada una de las estudiantes, pues, dentro de las instancias de discusión en la realización de las actividades de la secuencia, cada una realiza conjeturas respecto de cómo se comporta y cambia la gráfica a medida que juegan o interactúan con los deslizadores o parámetros incluidos el applet o manipulativo virtual. Son sugestivos los significados que emergen dependiendo de las categorías de los argumentos según la naturaleza de las interpretaciones en la reconstrucción del concepto. Estas naturalezas se pueden desprender de los numérico, gráfico y natural, o respecto al carácter físico del fenómeno. Paralelamente se manifiesta que no la totalidad de las estudiantes identifica a cabalidad el coeficiente involucrado en el comportamiento tendencial de la secuencia mostrada según la actividad abordada. Inclusive una estudiante no logra diferenciar entre las consecuencias que generan, en la gráfica asociada a la modelación del fenómeno, el cambio del parámetro "a" y el parámetro "c". El resto de las participantes, en concordancia con el análisis a priori, identifica correctamente el parámetro que de cambio; el coeficiente "c". Todas las estudiantes asocian, de manera correcta según el análisis a priori, el comportamiento gráfico a una dilatación de la curva, lo que implicaría diferencias significativa en la interpretación de la energía o diferencias de energía que libera un terremoto.

Es relevante el hecho de que 3 de las 5 estudiantes, sustenten sus respuestas otorgándole significados al parámetro más allá de lo demandado en el enunciado de la pregunta, es decir, que tres estudiantes profundizan sus respuestas, aunque el enunciado no lo solicite. Sustentos que describen clara y coherentemente el movimiento gráfico y, en uno de los casos (estudiante 1), relaciona dicha descripción con la correspondencia entre energía y magnitud.

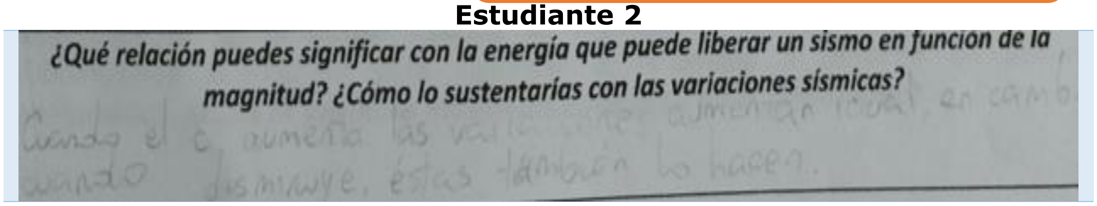
En cuanto a los significados, de cada estudiante, de lo identificado en el inciso anterior, se recaban los siguientes datos y se establecen la siguientes relaciones:

Estudiante 1


¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?

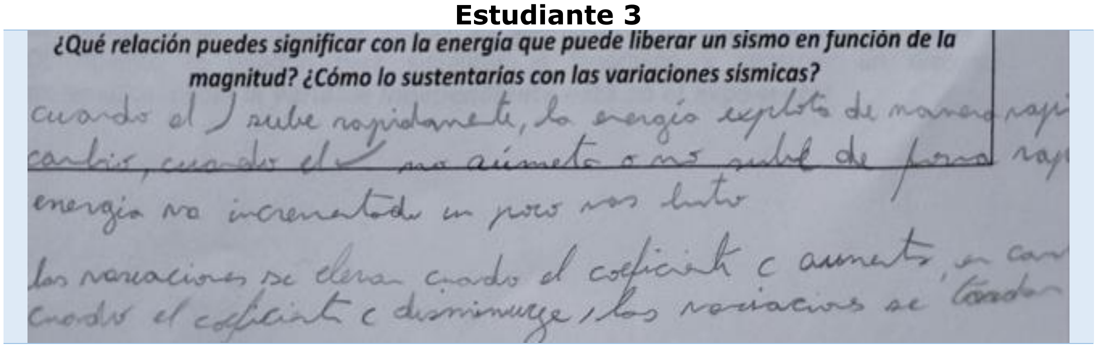
cuando el coeficiente c disminuye, aumenta el gráfico.

Estudiante 2


¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?

Cuando el c aumenta las variaciones aumentan igual, en cambio cuando disminuye, éstas también lo hacen.

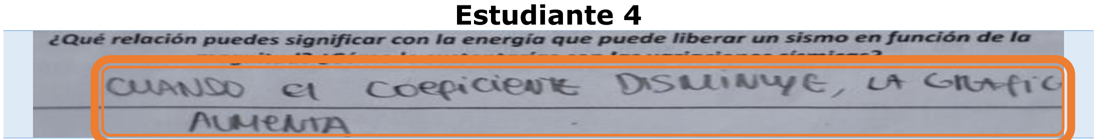
Estudiante 3


¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?

cuando el c sube rapidamente, la energía explota de manera rápida
cambio, cuando el c no aumenta o no sube de forma rápida
energía no incrementada un poco mas lento

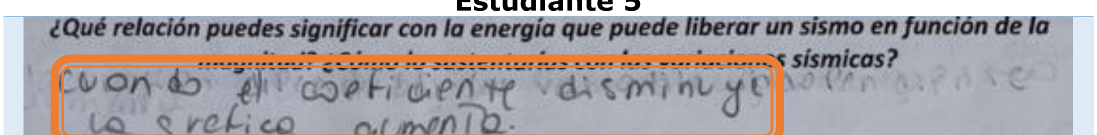
las variaciones se elevan cuando el coeficiente c aumenta, en cambio
cuando el coeficiente c disminuye, las variaciones se [illegible]

Estudiante 4


¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud?

CUANDO EL COEFICIENTE DISMINUYE, LA GRAFIC AUMENTA

Estudiante 5


¿Qué relación puedes significar con la energía que puede liberar un sismo en función de la magnitud? ¿Cómo lo sustentarías con las variaciones sísmicas?

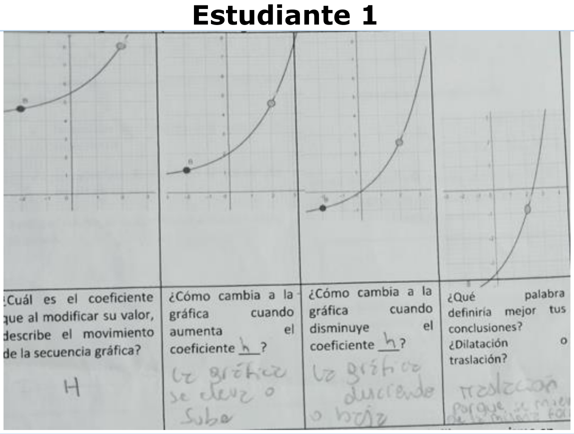
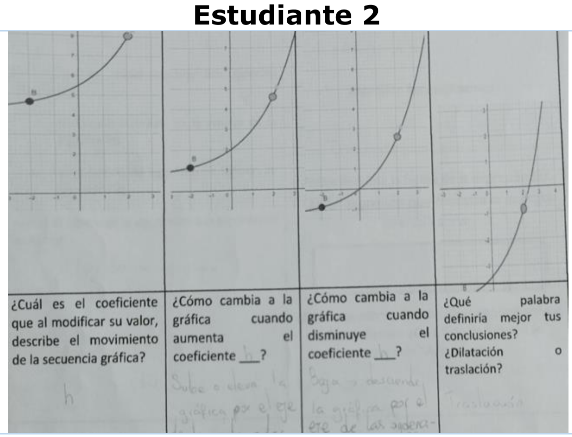
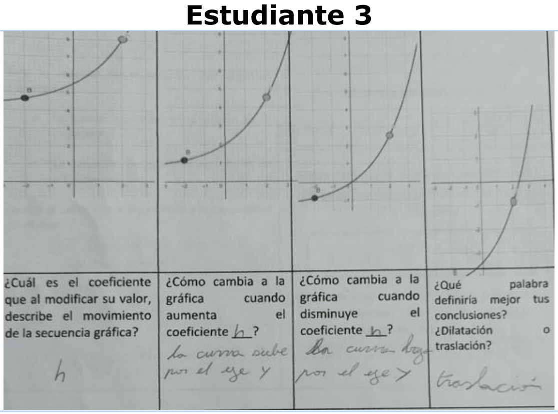
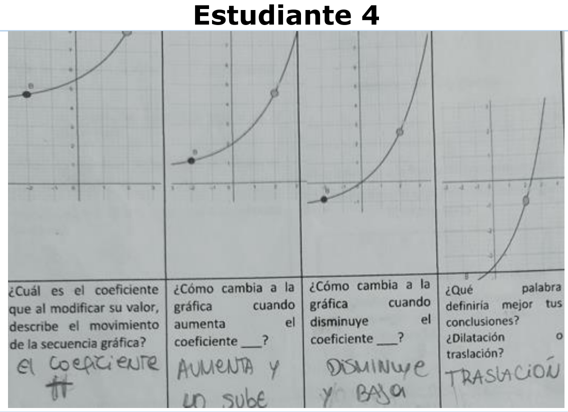
cuando el coeficiente disminuye la grafico aumenta.

Tabla 22 Interpretaciones asociadas a la construcción de significados del tratamiento de parámetros de la función exponencial; parámetro "c"

Confrontación:

En este apartado, y en contraste con el análisis a priori de la Tabla 7, se exponen que los significados de la tendencia de la función (gráfica) modelada desde las variaciones sísmicas son de carácter heterogéneo. En esta recogida de datos, resulta relevante e interesante el hecho identificar una inconsistencia evidente entre dos secciones consecutivas dentro de la secuencia propuesta. En cuanto a la identificación del parámetro asociado al cambio gráfico existe unanimidad en la determinación del coeficiente ("c"), pero en la interpretación del comportamiento gráfico de muestran respuestas contraproducentes y no correspondientes con la relación física-matemática correcta entre la dilatación de la curva y la consecuencia de ésta en el aumento de las variaciones de energía circunscritas en el eje de las ordenadas. Lo que es inconsistente, pues según el análisis a priori pertinente, una dilatación de la gráfica implica un aumento en los valores de las imágenes de las magnitudes, dígase energías, por ende, aumentan o se agrandan las variaciones energéticas o las diferencias punto a punto en el eje de las ordenadas. Tres de las 5 estudiantes, siendo que en el inciso anterior identifica el comportamiento tendencial de la gráfica como una dilatación, significa esta como un "aumento de la gráfica" y no como un aumento de variaciones de energía dado variaciones constantes en las abscisas, es decir, mezclan significaciones de manera confusa y no engranadas a la luz de una correcta modelación. Develándose, además, que la mayoría de las participantes se remite a responder en la misma dimensión del carácter de la actividad realizada.

En los resultados obtenidos de la **Actividad 2**, **Ítem II**, inciso B), que tiene como objeto el "Tratamiento de parámetros y comportamiento tendencial de funciones", se muestran los siguientes datos:

Pregunta	B) Existe un coeficiente que hace que la gráfica se deslice de esta manera. Mueve los parámetros y observa. Como referencia observa ambos puntos. ¡Encuéntrala y construye un significado para la energía liberada y la magnitud de un sismo!
Estudiante 1	**Estudiante 2**
	
Estudiante 3	**Estudiante 4**
	

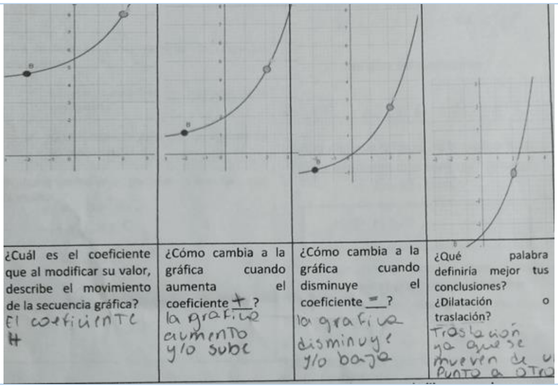
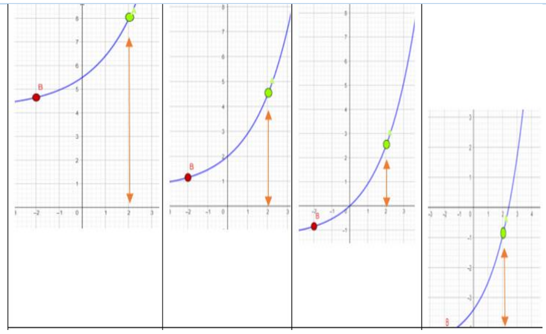
Estudiante 5	**Ideal**
	 *Parámetro "h"*

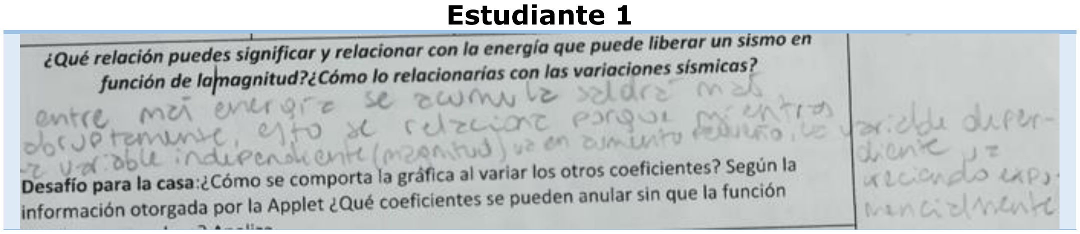
Tabla 23 Significados del crecimiento exponencial desde el tratamiento de parámetros en la gráfica y el comportamiento tendencial de funciones; Identificar coeficiente "h".

Confrontación:

Realizado el contraste con el análisis a priori de la Tabla 7, y al igual que en la sección anterior, se evidencia que la *intuición* es parte fundamental en la construcción de significados de cada una de las estudiantes. Discutiendo los datos, cada participante efectúa conjeturas respecto del comportamiento y cambio gráfica a medida que juegan o interactúan con los deslizadores o parámetros incluidos el applet de GeoGebra incluido para la realización de la actividad. Paralelamente, se reitera que resultan selectos los significados que emergen dependiendo de las categorías de los argumentos según la naturaleza de las interpretaciones en la reconstrucción del concepto, que son las mismas de la sección A). A diferencia de la sección anterior y en confrontación con el análisis a priori pertinente, todas las participantes identifican clara y concretamente el parámetro involucrado en el cambio de comportamiento de la gráfica vinculada al fenómeno. Siendo éste el coeficiente "h". Además, todas las estudiantes asocian de manera correcta el cambio gráfico a una *traslación* de la curva.

En cuanto a los significados, de cada estudiante, de lo identificado en el inciso anterior, se recaban los siguientes datos y se establecen la siguientes relaciones:

Estudiante 1

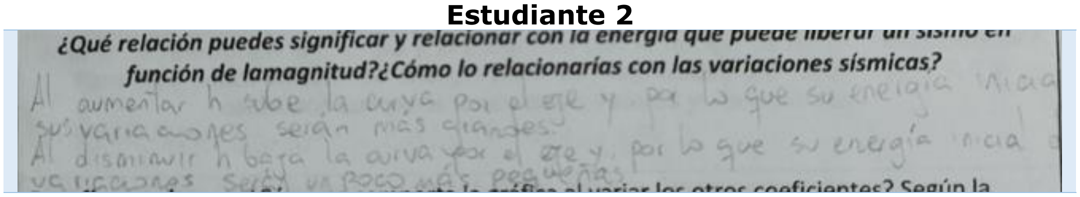


¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

entre más energía se acumula saldrá más abruptamente, esto se relaciona porque mientras la variable independiente (magnitud) va en aumento ... la variable dependiente va creciendo exponencialmente

Desafío para la casa:¿Cómo se comporta la gráfica al variar los otros coeficientes? Según la información otorgada por la Applet ¿Qué coeficientes se pueden anular sin que la función

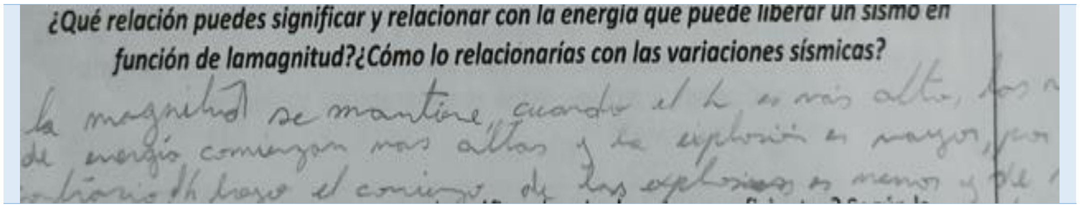
Estudiante 2



¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

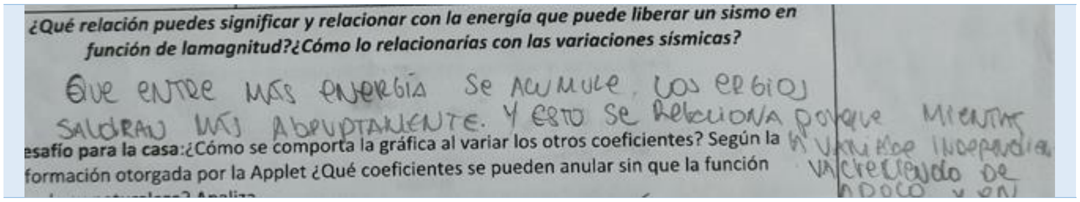
Al aumentar h sube la curva por el eje y por lo que su energía inicial sus variaciones serán más grandes.
Al disminuir h baja la curva por el eje y, por lo que su energía inicial ... variaciones serán un poco más pequeñas

Estudiante 3


¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

la magnitud se mantiene, cuando el h es más alto, las
de energía comienzan mas altas y la explosión es mayor, por
contrario h bajo el comienzo de las explosiones es menor y

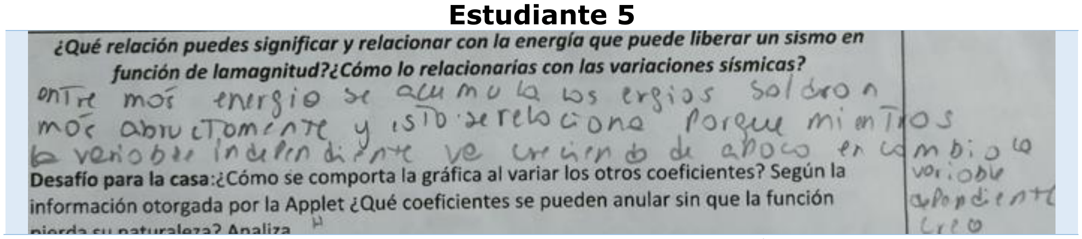
Estudiante 4


¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

Que entre más energía se acumule, los ergios saldrán más abruptamente. Y esto se relaciona porque mientras h variable independiente va creciendo de a poco y en

esafío para la casa:¿Cómo se comporta la gráfica al variar los otros coeficientes? Según la formación otorgada por la Applet ¿Qué coeficientes se pueden anular sin que la función

Estudiante 5


¿Qué relación puedes significar y relacionar con la energía que puede liberar un sismo en función de lamagnitud?¿Cómo lo relacionarías con las variaciones sísmicas?

entre más energía se acumula los ergios saldrán más abruptamente y esto se relaciona porque mientras la variable independiente va creciendo de a poco en cambio la variable dependiente crece

Desafío para la casa:¿Cómo se comporta la gráfica al variar los otros coeficientes? Según la información otorgada por la Applet ¿Qué coeficientes se pueden anular sin que la función pierda su naturaleza? Analiza

Tabla 24 Interpretaciones asociadas a la construcción de significados del tratamiento de parámetros de la función exponencial; parámetro "h"

Confrontación:

Al analizar los datos recabados a la luz del análisis a priori de la Tabla 7 se muestra que 4 de las 5 participantes incluyen en la construcción de su discurso significados del cambio cambios que apelan al cambio de coeficientes relacionados con las variaciones de energía liberada por los sismos. Salvo una estudiante, que interpreta sólo con argumentos relacionados meramente a la gráfica, todas las demás articulan su discurso relacionando lo matemático y lo físico. De ahí que emergen dos categorías en cuanto a la naturaleza de las respuestas o de los significados: una meramente gráfica y otra que involucra lo **interdisciplinar**, es decir, una explicación física en correspondencia con lo analítico. Se reitera que todas las estudiantes interpretan con base en el parámetro encontrado o identificado de forma unánime y cómo éste hace que la curva se traslade sobre el eje de las ordenadas; parámetro "h".

En este caso, es resulta importante mencionar que se materializa mucho más, en comparación con la sección A), la familiarización de las estudiante con el manipulativo virtual de GeoGebra. De manera que 2 de las estudiantes, incluso, logran identificar con antelación la expresión algebraica de la función exponencial observando los comando del software. Además, se destaca el hecho de que en las respuestas acopiadas la mayoría de las estudiantes engrana correcta y coherentemente la traslación de la curva con un cambio, primeramente, en las energías iniciales que pueden registrar los sismos. Situación muy satisfactoria dentro del acopio de los significados recabados. También, los resultados muestran que en los discursos construidos por la mayoría de las estudiantes se incluyen la correspondencia entra las variaciones de energía y el comportamiento gráfico que modela el fenómeno. Inclusive, las estudiantes enriquecen sus argumentos sustentando el análisis de las variaciones con significados que se vinculan a "saltos de energía", "explosiones de energía" o "acumulación de energía". Todos estos significados en concreta concordancia con la noción de variación y el traslado de la gráfica en el plano cartesiano.

Estudiante 1	El parámetro h genera una traslación en el eje y en la función exponencial de la forma $y = ab^{cx} + h$. De manera que, un h < 0 implica una traslación vertical hacia arriba y, un c >0 implica una dilatación hacia abajo en la gráfica.
Estudiante 2	El parámetro h genera una traslación en el eje y en la función exponencial de la forma $y = ab^{cx+d} + h$. De manera que, un h < 0 implica una traslación vertical hacia abajo y, un h >0 implica una traslación hacia arriba en la gráfica.
Estudiante 3	El parámetro h genera una traslación en el eje y en la función exponencial de la forma $f(x) = ab^{cx+d} + h$. De manera que, un h < 0 implica una traslación vertical hacia abajo y, un h >0 implica una traslación hacia arriba en la gráfica.
Estudiante 4	El parámetro H genera una TRASLACION en el eje Y en la función exponencial de la forma $y = Ab^{c \cdot x} = H$. De manera que, un H < 0 implica una TRASLACIÓN vertical hacia ARRIBA y, un C >0 implica una DILATACION hacia ABAJO en la gráfica.
Estudiante 5	El parámetro h genera una Traslación en el eje y en la función exponencial de la forma $y = ab^{cx} = h$. De manera que, un h < 0 implica una Traslación vertical hacia arriba y, un C >0 implica una dilaTación hacia abajo en la gráfica.

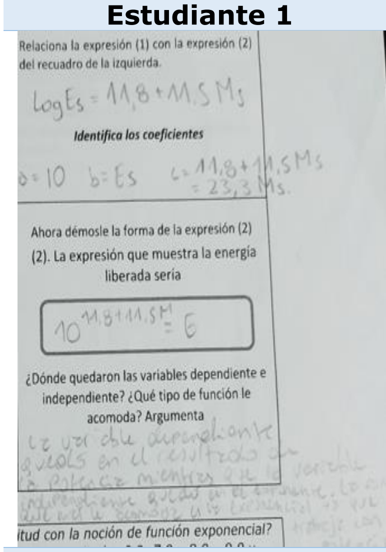
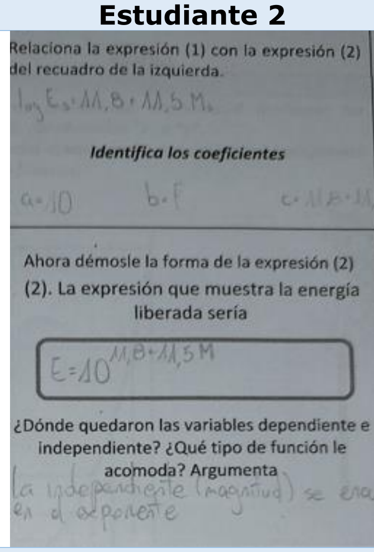
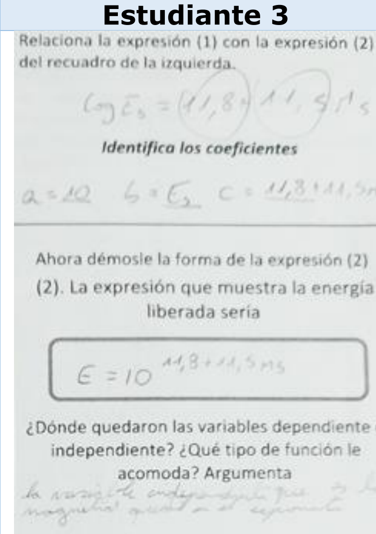
Tabla 25 Síntesis de las estudiantes del significado del comportamiento gráfico según el cambio del coeficiente "h"

Confrontación:

Analizando los datos a la luz del análisis a priori de la Tabla 7, se evidencia que en cuanto a la síntesis de la construcción realizada en el inciso B) de la Actividad 2, todas las participantes, en una primera instancia, logran identificar y significar al parámetro “h” como el generador de la *traslación* de la curva de crecimiento exponencial en coherente correspondencia con la relación que existe en las liberaciones o variaciones de energía dado el crecimiento de un sismo en Richter. Pero, si se profundiza en el contraste que se realiza a la vela del análisis a priori, de muestra que 3 de las 5 estudiantes no fundan un discurso coherente y pertinente a la actividad en cuestión, pues fabrican un párrafo en donde incluyen al coeficiente “c” identificado en el inciso anterior. Además, de evidencia un inconsistente engranaje según la experimentación gráfica manifestada en el manipulativo virtual.

Una situación relevante, y dentro de la misma línea comparativa, dentro de la construcción de significados de este apartado, es que a pesar de entender cómo se modela el fenómeno, los significados que hay detrás y las relaciones que lo sustentan, la mayoría de las estudiantes presentan problemas o inconsistencias para interpretar matemáticamente el signo “<” como “menor que”. Pues, si bien es cierto, en la discusión identifican que si el coeficiente "h" aumenta significa un traslado de la curva hacia arriba, y también aumenta el registro sísmico de la energía inicial de un terremoto, lo materializan en un discurso escrito con la expresión "$h < 0$" y esto difiere o no se corresponde con lo presupuestado en el análisis a priori de la Tabla 7. En términos generales, 2 de las 5 estudiantes concuerdan fielmente con lo proyectado en el análisis a priori, construyendo un discurso coherente significado desde la correspondencia de todos los sustentos que emergen de las actividades anteriores. También, se aprecia que 3 estudiantes presentan la misma respuesta, esto da indicios de la capacidad de consenso que derivan de las instancias de discusión de resultados.

- Ítem III: De los ajustes realizados a encontrar una expresión algebraica para el crecimiento exponencial de la forma $y = a \cdot b^{x+c} + h$ o $y = a \cdot b^{cx} + h$: "De lo gráfico a lo algebraico"

Pregunta	Encuentra una forma algebraica para resignificar el fenómeno de crecimiento exponencial significado desde las variaciones sísmicas a la luz de las prácticas sociales	
Estudiante 1	**Estudiante 2**	**Estudiante 3**
 Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. Identifica los coeficientes Ahora démosle la forma de la expresión (2) (2). La expresión que muestra la energía liberada sería ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta	 Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. Identifica los coeficientes Ahora démosle la forma de la expresión (2) (2). La expresión que muestra la energía liberada sería ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta	 Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. Identifica los coeficientes Ahora démosle la forma de la expresión (2) (2). La expresión que muestra la energía liberada sería ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta
Estudiante 4	**Estudiante 5**	**Ideal**

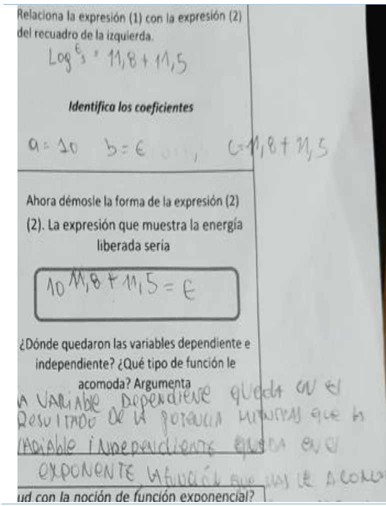
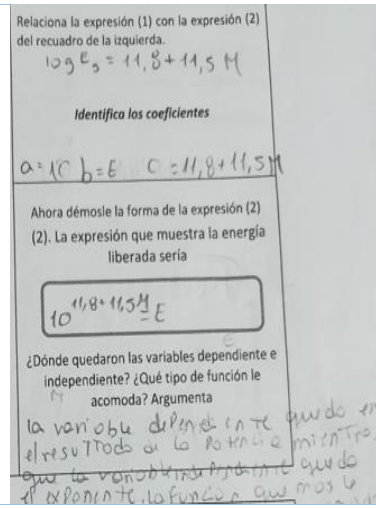
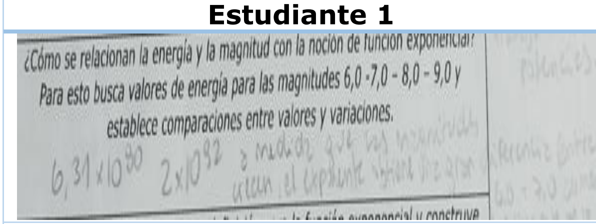
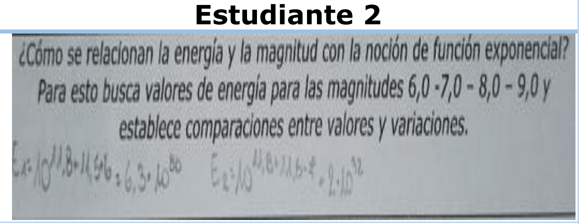
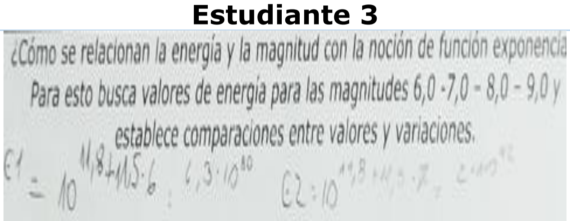
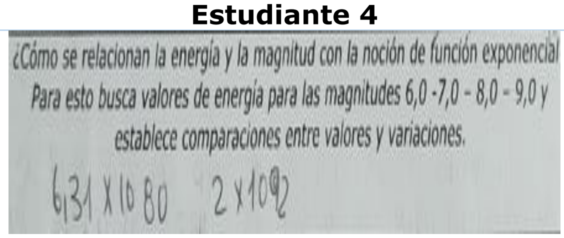
 Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. Identifica los coeficientes Ahora démosle la forma de la expresión (2) (2). La expresión que muestra la energía liberada sería ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta	 Relaciona la expresión (1) con la expresión (2) del recuadro de la izquierda. Identifica los coeficientes Ahora démosle la forma de la expresión (2) (2). La expresión que muestra la energía liberada sería ¿Dónde quedaron las variables dependiente e independiente? ¿Qué tipo de función le acomoda? Argumenta	$\boldsymbol{E = 10^{11,8+11,5\,M}}$ $\boldsymbol{E}$: $Energía\ liberada$ $\boldsymbol{M}$: $Magnitud$

Tabla 26 Expresiones algebraicas construidas para significar el crecimiento exponencial; Ítem III, Actividad 2

Confrontación:

Analizando los datos levantados, bajo el velo del análisis a priori de la Tabla 7 se evidencia que todas las participantes obtienen de manera correcta la expresión algebraica que modela el fenómeno de crecimiento exponencial significados desde las prácticas sociales vinculadas a la liberación de variaciones de energía en respuesta del crecimiento de un terremoto; expresión de la forma $E = 10^{11,8+11,5\,M}$. Realizado el contraste pertinente, se muestra en la tabla que todas las participantes concuerdan en que la variable dependiente es la energía, y ellas la disponen como el resultado de la ecuación. También, identifican la variable independiente como la magnitud Richter, ubicándola, dentro de la expresión algebraica, en el exponente. Lo destacable y en correspondencia según la confrontación con el análisis a priori, se tiene el hecho de que, dentro de los significados en la construcción del discurso, incluyen la noción de potencias, dado que la variable de la función se ubica en el exponente.

En cuanto a la obtención de valores de energía para magnitudes particulares, se obtuvo lo siguiente:

Estudiante 1	**Estudiante 2**
 ¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencial? Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 - 8,0 - 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones. 6,31 x 10⁸⁰ 2x10⁹²	 ¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencial? Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 - 8,0 - 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones.
Estudiante 3	**Estudiante 4**
 ¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencia Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 - 8,0 - 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones.	 ¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencial Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 - 8,0 - 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones. $6{,}31 \times 10^{80}$ 2×10^{92}

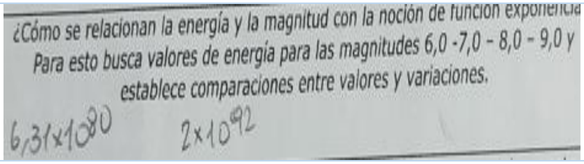
Estudiante 5	Expresión
 ¿Cómo se relacionan la energía y la magnitud con la noción de función exponencial? Para esto busca valores de energía para las magnitudes 6,0 -7,0 - 8,0 - 9,0 y establece comparaciones entre valores y variaciones. 6,31x10^80 2x10^92	$\boldsymbol{E = 10^{11,8+11,5\,M}}$

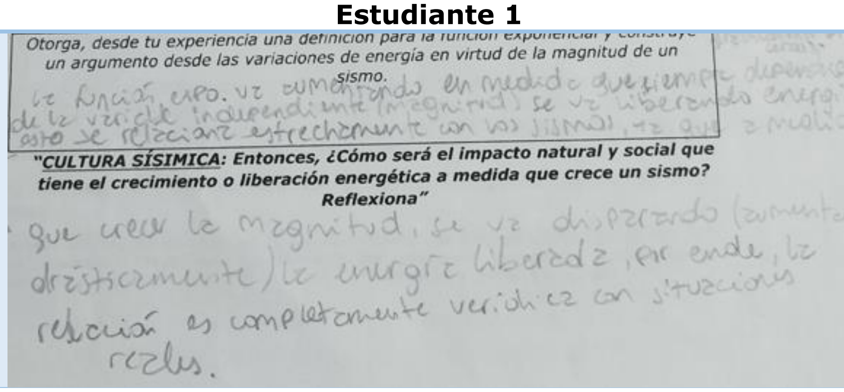
Tabla 27 Determinaciones de energías (ergios) para mediciones de eventos de magnitudes 6,0 y 7,0 Richter

Confrontación:

Analizando los datos levantados, a la luz del análisis a priori de la Tabla 7, se muestra una concordancia con lo proyectado, pues numéricamente hablando, todas las estudiantes obtienen los datos de energía liberada de manera correcta e iguales en valor. La mayoría de las estudiantes sólo se remite a responder desde lo numérico, salvo 1 de las participantes otorga una reflexión o sustento que se enriquece desde una explicación física, mezclando lo numérico y lo interdisciplinario, es decir, significando lo numérico desde un significado científico relacionado a la física. Realizado el contraste, no se encuentran mayores discrepancia, en este apartado, en cuanto a lo proyectado por la investigación.

Con relación a la etapa final de la secuencia, plasmada en la **Actividad 2), Ítem III**, se muestran las siguientes definiciones construidas por cada una de las participantes y que guardan estrecha relación con la construcción de un resignificado del fenómeno de crecimiento exponencial modelado a la luz de las prácticas sociales y sustentado desde los significados que derivan del fenómeno sísmico asociado a la liberación de variaciones de energía en respuesta a las variaciones de magnitud o de crecimiento del evento:

Estudiante 1

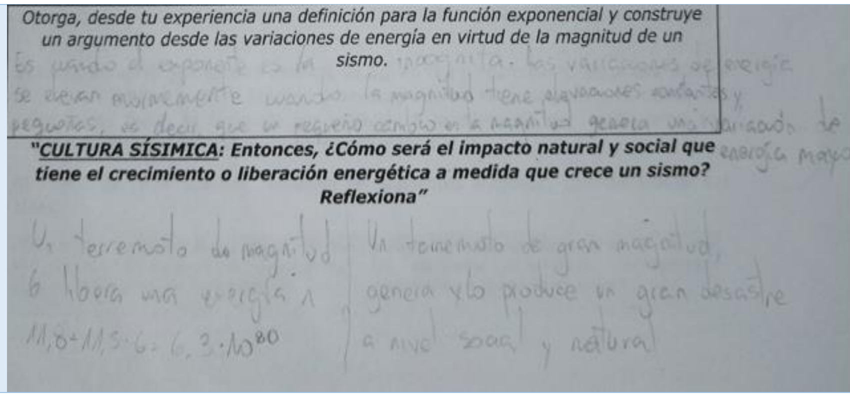

Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo.

la función expo. va aumentando en medida que siempre depende de la variable independiente (magnitud) se va liberando energía esto se relaciona estrechamente con los sismos, ya que a medida

"CULTURA SÍSIMICA: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"

que crece la magnitud, se va disparando (aumentan drásticamente) la energía liberada, por ende, la relación es completamente verídica con situaciones reales.

Estudiante 2



Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo.

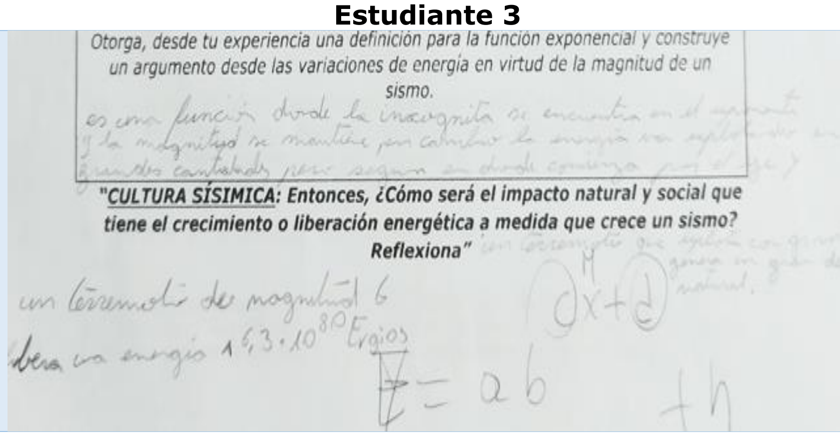
Es cuando el exponente es la incognita. Las variaciones de energía se elevan enormemente cuando la magnitud tiene elevaciones constantes y pequeñas, es decir que un pequeño cambio en la magnitud genera una variación de energía mayor

"***CULTURA SÍSIMICA*: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"**

Un terremoto de magnitud 6 libera una energía a $11{,}8+11{,}5\cdot 6 = 6{,}3\cdot 10^{80}$

Un terremoto de gran magnitud, genera y/o produce un gran desastre a nivel social y natural

Estudiante 3



Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo.

es una función donde la incógnita se encuentra en el exponente y la magnitud se mantiene, por cambiar la energía ... en grandes cantidades ...

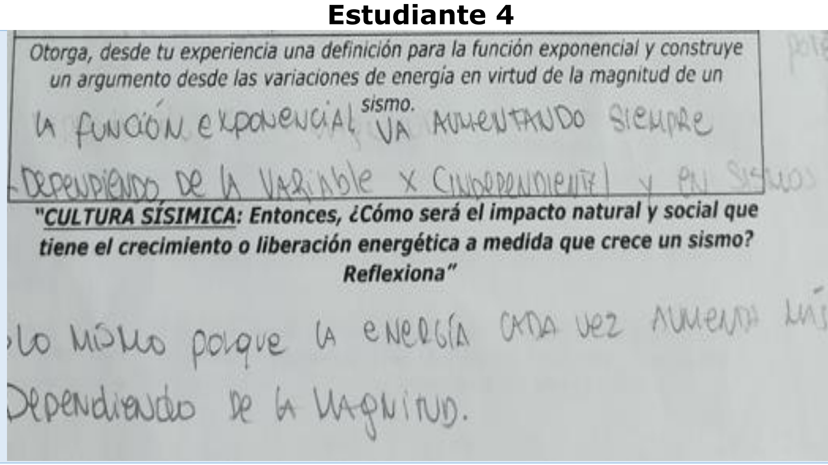
"***CULTURA SÍSIMICA*: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"**

un terremoto de magnitud 6 libera una energía a $6{,}3\cdot 10^{80}$ Ergios

$c^{M}x+d$

$E = ab + h$

Estudiante 4



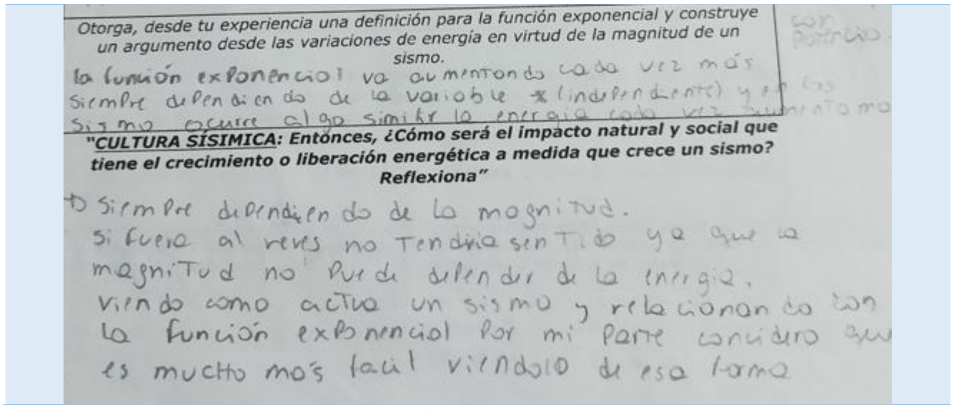
Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL VA AUMENTANDO SIEMPRE DEPENDIENDO DE LA VARIABLE X (INDEPENDIENTE) Y EN SISMOS

"***CULTURA SÍSIMICA*: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"**

LO MISMO PORQUE LA ENERGÍA CADA VEZ AUMENTA MÁS DEPENDIENDO DE LA MAGNITUD.

Estudiante 5



Otorga, desde tu experiencia una definición para la función exponencial y construye un argumento desde las variaciones de energía en virtud de la magnitud de un sismo.

la función exponencial va aumentando cada vez más siempre dependiendo de la variable x (independiente) y en los sismo ocurre algo similar la energía cada vez aumenta mo[illegible]

"CULTURA SÍSIMICA: Entonces, ¿Cómo será el impacto natural y social que tiene el crecimiento o liberación energética a medida que crece un sismo? Reflexiona"

siempre dependiendo de la magnitud. si fuera al reves no tendria sentido ya que la magnitud no puede depender de la energia. viendo como actua un sismo y relacionando con la función exponencial por mi parte considero que es mucho más facil viendolo de esa forma

Tabla 28 Definiciones de la función exponencial de las estudiantes, una vez terminada la secuencia; Significación del fenómeno de crecimiento exponencial plasmado en un discurso matemático escolar modelado a la luz de la socio epistemología.

Reflexión de las definiciones:

Respecto de las definiciones obtenidas, se puede evidenciar que la mayoría de las estudiantes logra encadenar, de manera coherente, elementos y significados, desde las experiencias emuladas, para reconstruir un discurso matemático de la modelación de fenómeno exponencial a la luz de las prácticas sociales. Los resultados muestran que 3 de las 5 participantes resignifican la función exponencial sustentan su discurso mediante la relación que se da entre la energía y la magnitud, es más, entre las variaciones que dichas variables experimental en la modelación del evento sísmico. Además, es evidente, que, dentro de la construcción de las definiciones, la diversidad de los significados identificados cumple un rol fundamental, pues dentro de lo que se considera el impacto social y científico del fenómeno, la mayoría de las estudiante utilizan distintos significados para expresar o explicar una misma definición emergente de una puesta en común. Es destacable que 1 estudiante, involucra esbozos de reflexiones respecto del dominio y comportamiento general de la función exponencial concatenada a la definición funcional que reconstruye en virtud de las experiencias evocadas durante todo el proceso de estudio.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

En esta apartado se presentan las conclusiones y reflexiones finales de la investigación realizada, partiendo por la revisión de los objetivos planteados y la pregunta de investigación. Por consiguiente, se abordan aspectos relevantes dentro de la misma línea investigativa y que guardan relación con las dimensiones, aportaciones, proyecciones y limitaciones del estudio.

5.1 Respecto del objetivo general y la pregunta investigativa

La investigación buscaba responder la siguiente pregunta: **¿Cómo resignifican los estudiantes de tercero medio el concepto de función exponencial al modelar matemáticamente fenómenos de crecimiento y decrecimiento en situaciones de variaciones sísmicas, desde una perspectiva socioepistemológica?** Es así, que para responder esta pregunta investigativa se plantea como objetivo general **proponer una secuencia didáctica que permita resignificar el crecimiento exponencial en estudiantes de tercero medio, utilizando variaciones de magnitudes sísmicas desde una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática.** Esto implica la inclusión de la modelación matemática (Méndez, 2016) para promover el uso y tratamiento de gráficas en situaciones de transformación y, así, favorecer la comprensión del fenómeno de crecimiento exponencial en el rediseño de su discurso matemático escolar.

Para lo anterior, es que la investigación se enmarcó en desarrollar y aplicar una secuencia de situaciones que resaltaron y engranaron sutil y coherentemente los momentos del modelo de Méndez (2016), en la construcción y reconstrucción de significados vinculados a la función exponencial. Estos son la Experimentación evocada, Estudio de variaciones y Ajustes de comportamiento. Así, finalmente, poder rediseñar un discurso matemático que relacione aspectos disciplinarios o teóricos de la matemática con fundamentos sociales que muestren una epistemología basada en la funcionalidad del objeto matemático en virtud de un mejor entendimiento de la realidad cultural sísmica que viven los estudiantes chilenos. Estos momentos, en la resignificación del concepto, resaltaron de la siguiente manera:

Para concretar el primer momento del diseño, dígase experimentación evocada, se devela, en primera instancia, que ésta fue de carácter gráfico. Este primer momento se materializó cuando los estudiantes se enfrentaron por primera vez con la problemática real de los sismos, mediante información previa en formato de lenguaje natural, y comenzaron a interactuar con datos y situaciones simuladas de eventos sísmicos entregadas en formatos gráficos y tabulares. Aquí, el uso de manipulativos virtuales (Applets), gráficos y tablas fue esencial para que los estudiantes pudieran dar sentido a los datos iniciales sobre la energía liberada y la magnitud de un sismo. A través de la confrontación de datos tabulares y representaciones gráficas, los estudiantes comenzaron a identificar relaciones entre las variables involucradas (magnitud y energía) y a reconocer cómo estos fenómenos pueden modelarse matemáticamente, dada la relación que hay entre ellas.

Este momento permitió que los estudiantes iniciaran la construcción de significados desde sus conocimientos previos y establecieran un primer contacto con el fenómeno de crecimiento exponencial, sin aún introducir formalmente la definición de función exponencial. La experimentación evocada facilitó una exploración intuitiva del comportamiento sísmico, sentando las bases para el desarrollo de significados más formales, logrando que las estudiantes identificaran cuáles eran físicamente las variables dependiente e independiente.

Una vez concretado el primer momento del modelo de Méndez, se lleva a cabo un segundo momento, dígase estudio de variaciones. En esta arista, las estudiantes avanzaron en la secuencia didáctica mediante el análisis de las variaciones locales y globales desprendidas de los datos que habían obtenido previamente. Y, contrastando, mediante la discusión, sus análisis y conclusiones los cuales estaban plasmados y significados en distintos formatos. El uso de las gráficas fue crucial en esta fase, ya que permitió a las estudiantes visualizar cómo la energía liberada por un sismo aumenta de forma exponencial o abruptamente en relación con el incremento constante de la magnitud. Durante este proceso, los estudiantes tuvieron que confrontar y comparar diferentes representaciones gráficas (lineales, parabólicas y exponenciales) para seleccionar la línea de tendencia que mejor modelaba el fenómeno.

Así, se devela que el segundo momento fue crucial para que los estudiantes comprendieran el crecimiento exponencial como un modelo que describe las variaciones abruptas en energía frente a cambios constantes de magnitud Richter. La exploración de las variaciones a través de tablas y gráficos ayudó a consolidar la noción de dependencia entre las variables y a identificar cómo se comportan en un contexto real. Y, además, cómo es la tendencia del crecimiento de las variaciones en cada eje (Energía vs Magnitud).

Para concretar los ajustes de comportamiento o tercer momento, las estudiantes realizaron ajustes más formales del fenómeno, utilizando las herramientas algebraicas pertinentes para construir una función exponencial que modelara con precisión el crecimiento observado. Fue aquí donde los estudiantes pasaron de una intuición gráfica a una formulación algebraica concreta y ortodoxa, obteniendo expresiones matemáticas como $\boldsymbol{E = 10^{11{,}8+11{,}5\,M}}$, que describe la relación entre energía y magnitud. Este ajuste final no solo permitió a los estudiantes obtener una representación algebraica del fenómeno, sino también reflexionar sobre el impacto de estos eventos en la sociedad dados los enormes valores de las variaciones de energía.

Así, el ajuste de comportamientos permitió que los estudiantes resignificaran el fenómeno sísmico dentro de un marco matemático formal, conectando los datos observados y significados construidos con la expresión algebraica de la función exponencial y todos sus coeficientes. Este proceso de ajuste fue clave para que los estudiantes lograran construir un discurso matemático que integre la observación de fenómenos naturales con su modelación algebraica.

El modelo de Méndez proporcionó una estructura viable para guiar el proceso de resignificación o reconstrucción de la función exponencial, permitiendo a las estudiantes transitar desde una experimentación intuitiva hasta una modelación formal, y luego ajustar su comprensión mediante el uso de expresiones algebraicas. Cada uno de los tres momentos del modelo permitió que los significados emergieran, se depuraran y se fueran consolidando progresivamente, integrando los aspectos intuitivos, gráficos, numéricos y algebraicos, favoreciendo una comprensión integral de cómo las matemáticas pueden ser utilizadas para modelar fenómenos del mundo real, como los sismos. Este enfoque también permitió que los estudiantes desarrollaran una comprensión interdisciplinar, ya que conectaron las matemáticas con fenómenos físicos naturales de alto impacto social, demostrando que la resignificación de la función exponencial no es solo una cuestión matemática, sino también cultural y social, primordialmente para regiones con altos niveles de sismicidad.

Por lo tanto, el modelo de Méndez fue esencial para guiar la resignificación de la función exponencial en este contexto, al ofrecer una estructura didáctica que permitió a las estudiantes construir un conocimiento matemático profundo, conectado con el mundo real, y favoreciendo la comprensión del fenómeno de los sismos desde una perspectiva tanto matemática como social.

Para lograr este objetivo, se plantearon tres objetivos específicos, todos enmarcados en una perspectiva de modelación matemática basada en las prácticas sociales, los cuales también están mancomunados a la pregunta de investigación.

5.2 Sobre el objetivo específico 1

El primer objetivo específico fue **identificar los significados para el rediseño del discurso matemático escolar para el fenómeno del crecimiento exponencial y las relaciones entre la energía y magnitud de un sismo, mediante la modelación matemática y el uso de gráficas**. Para ello, se inició el proceso de modelación matemática de un sismo, partiendo desde evocar la experiencia del fenómeno para luego analizar las construcción de los significados, en las resignificación de su discurso matemático, desde el tratamiento de gráficas y tendencias de funciones bajo situaciones de variaciones y de transformación.

Para poder cumplir el primer objetivo se propuso una serie de actividades, recursos y situaciones con el fin de relucir una variedad de significados que, de cierta manera, no se visualizan o se usan normalmente en la construcción del discurso matemático escolar del crecimiento exponencial. Así, la resignificación del concepto emerge de la confrontación de significados puestos en discusión para establecer consensos o acuerdos derivados de las prácticas sociales del tratamiento de información sísmica en formato gráfico. Pues, en la medida en cómo las participantes interactúen con las dinámicas de la secuencia, surgen los significados e interpretaciones inherentes a la reconstrucción del dME. Todo lo anterior se logra sin realizar, por parte del investigador, intervención alguna para no trastocar los acuerdos dentro del contrato didáctico en el aula (Brosseau, 2007).

Como actividad previa (incluida en las actividades como momento 0), se realizó un estudio exhaustivo de la presentación histórica asociada a la función exponencial en sus diferentes formas de estudio, para apreciar una gama más amplia en cuanto a las epistemologías o génesis detrás del concepto y su impacto social. De manera que se pudiera contar con mayor cantidad de recursos para la presentación de la secuencia y situaciones para que los estudiantes construyan significados. La intención, primordialmente, subyacía en el aprovechamiento de las diferentes epistemologías para diversificar las situaciones de estudio reconstruyendo el discurso del concepto y las experiencias a modelar dentro de los recursos e instrumentos de la secuencia. Situación que favoreció bastante en términos de significar el crecimiento exponencial en virtud de la modelación matemática de los sismos, las relaciones físicas y su impacto cultural. De lo anterior, se desprendieron nociones tales como diferencias de energía, liberación de energía, aumento energético en grandes cantidades, entre otras.

En el desarrollo de la secuencia, los significados vinculados a la matemática detrás del entendimiento del comportamiento sísmico derivan de las relaciones establecidas entre la liberación abrupta de energía en correspondencia con un aumento constante de la magnitud Richter. Es decir, entenderse que a medida que la magnitud de un sismo crece siempre en la misma medida, éste libera cantidades de energía enormes, cantidades que cada vez van aumentando y, además, develan diferencias numéricas que van creciendo y se reflejan en el eje de las ordenadas. Esto se logra mediante la simulación de un sismo a través del uso de manipulativos virtuales que ayudaron a que los estudiantes evocaran la experiencia realizando una experimentación gráfica. Pudiéndose asociar un tipo de gráfica que sea condescendiente con la idea de cambios de variaciones enormes en el eje "y" (de la energía liberada) versus un crecimiento constante en el eje "x" (magnitud Richter). Para, además, poder establecer claramente cuál era la variable física dependiente e independiente. Estos significados se consolidaron en la medida que después de las experimentaciones gráficas, las estudiantes realizan ajuste con líneas de tendencia, las cuales eran de carácter exponencial (línea de tendencia exponencial del software).

Para engrosar la variedad de argumentos e intencionar la aparición de nuevos significados, se realizan actividades de ajustes de coeficientes y tendencias gráficas. Así, poder identificar significados en el estudio de variaciones a nivel local y global y, asociarle finalmente una significación algebraica de la forma $y = ab^{cx} + h$ a la construcción del discurso matemático del crecimiento exponencial. Para esto, se concatenan las nociones de variaciones con argumentos cuantitativos que se correspondieron con la tendencia de la gráfica exponencial en la medida que se modifican los coeficientes o parámetros de la función. Terminando con un consenso en el que las diferencias constantes de magnitudes generan grandes diferencias de energía, las cuales aumentan enormemente al subir por la gráfica y éstas se relacionan, finalmente, bajo la expresión $E = 10^{11{,}8+11{,}5\,M}$. Lo anterior, adquiere un sentido funcional entendiendo el impacto social que generan los sismos dado las dimensiones de los valores o de las diferencias de energía.

Lo anterior, favorece el aprovechamiento de los momentos finales de la secuencia para lograr identificar la aparición de más significados nuevos en el rediseño del concepto, los cuales no aparecen en el discurso matemático escolar que tradicionalmente se construye en las aulas chilenas. Esto es la idea de covariación entre la energía que los sismos liberan y la magnitud de éstos, la cual se puede significar, matemáticamente con la correspondencia entre una progresión geométrica y una progresión aritmética. Es decir, entender a la liberación energética del sismo como una progresión geométrica de razón 10 y a la magnitud Richter como una progresión aritmética de diferencia 0,1. Por ende, se consolida que la covariación entre la energía y la magnitud se corresponde con una covariación entre una PG y una PA (parte final de la secuencia ANEXO 1).

En conclusión, los significados identificados en el rediseño o resignificación del crecimiento exponencial, modelado a la luz de la sociopestemologia, en la práctica social del tratamiento de gráfica y ajuste de variaciones en situaciones de transformación son las nociones de variación, diferencias gráficas y numéricas, crecimiento abrupto de una variable versus el crecimiento constante de otra, la dependencia de la energía liberada en virtud de la magnitud, la noción de covariación, entre otras. Bajo estas reflexiones se establece que se cumple cabalmente el objetivo específico 1 (OE01).

5.3 Sobre el objetivo específico 2

El segundo objetivo fue **describir los significados que emergen en los estudiantes sobre la función exponencial cuando trabajan en una secuencia didáctica basada en la socioepistemología, utilizando variaciones de magnitudes sísmicas y contrastando gráficas y representaciones algebraicas**, donde la función exponencial se concibe como un indicador de variaciones sísmicas.

Este objetivo se materializó en la medida que se cumplió la descripción de cómo se dan los procesos en donde emergen los significados asociados a la modelación de la exponencial como indicador de variaciones sísmicas cuando las estudiantes abordan la secuencia didáctica. Esto se evidencia en los análisis y descripciones de cómo resultaron las producciones de las participantes, sus prácticas, discusiones y discursos, en términos de qué hicieron, cómo lo plantearon, qué dijeron, es decir, qué sucedió al momento de aplicar la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica se llevó a cabo en tres momentos, cada uno arraigado a un entorno basado en la construcción de significados en derredor a una situación-problema la cual se modeló con la función exponencial. La modelación matemática fundada desde las prácticas sociales permitió, una vez identificado los diversos significados vinculados al crecimiento exponencial, la descripción de cómo se dieron los argumentos en la reconstrucción del dME de la noción, valorando el uso del concepto en el entendimiento de los sismos bajo un fundamento social y científico. Dígase liberación de energía o excedentes de energía en respuesta a la variación de magnitud que experimenta un terremoto y el impacto que éstos pueden causar.

Primeramente, se propone un diseño que resulte atractivo, lúdico y desafiante, desde lo didáctico, que deje inmerso al estudiante en una situación de carácter científico, real y contextualizada. Así, el dME emerge de la confrontación de diversos significados puestos en discusión para establecer consensos que culminen en una redefinición formal de la función exponencial. Pues, en la medida en cómo las participantes interactuaron con las dinámicas de la secuencia, se dieron los significados e interpretaciones inherentes a la reconstrucción del concepto. Las situaciones de aprendizajes vinculadas a cada momento de la secuencia lograron intencionar la construcción de significados hacia las nociones de variaciones, diferencias de energía y de magnitudes, tendencias de gráficas que modelen explosiones energéticas, entre otras. Así, las conclusiones respecto de la primera instancia resultan interesante en la medida de cómo se da la deducción previa de ideas o nociones matemáticas frente al fenómeno de crecimiento exponencial, usando los diversos recursos que propone el diseño.

Inicialmente, durante la secuencia, el hecho de que se mencionara "crecimiento exponencial" en el relato podría haber influido en la forma en que los estudiantes formularon sus hipótesis y sus gráficos. Sin embargo, no todos lograron conectar este término con una representación gráfica precisa, lo que sugiere una falta de comprensión profunda del término en un contexto matemático. La modelación se aprecia como la vía en donde los estudiantes construyen significados en torno una situación real imitando procesos empíricos dados en la naturaleza para entender el mundo real (Tarira et. al, 2020). Así, resulta importante la inclusión de la intuición en la construcción social del conocimiento matemático. Esto se cumple con la inclusión de manipulativos o juegos virtuales concebidos como ecologías de aprendizajes (González-Sanmamed et. al, 2018) que dejan inmerso al estudiante en el proceso de construcción de significados (Cordero et. al, 2014).

Para intencionar la construcción de significados hacia la idea de gradientes o diferencias, se evoca la experiencia de modelar eventos sísmicos en formato digital simulados con manipulativos virtuales. En dicha instancia, los estudiante tuvieron que relacionar datos tabulares con la construcción de gráficas que, de cierta manera, reflejen liberaciones de energía a medida que crece la intensidad de un sismo, dígase aumento de magnitud. Así, dado que la magnitud siempre avanzaba en la misma medida, las imágenes o los valores de energía liberada eran muy elevados y cada vez iban creciendo con enormes diferencias. De aquí, emerge homogéneamente la idea de variación y dependencia entre magnitudes físicas. Un aspecto positivo fue que todos los estudiantes lograron identificar correctamente las variables involucradas (energía y magnitud), reconociendo a la magnitud como la variable independiente y a la energía como la dependiente. Sin embargo, no todos lograron modelar esta relación de manera correcta mediante una función exponencial. Estos significados, se fueron robusteciendo a medida que avanzaba la secuencia, pues posteriormente todas las participantes lograron y consensuaron en atribuirle a cada gráfica líneas de tendencias exponenciales.

Luego, se realizó otra puesta en escena, haciendo tender gráficas, estudiando su comportamiento y sus cambios en el plano mediante la variación de coeficientes. Todo bajo el fundamento del comportamiento tendencial y cambio de parámetros. Ahí, los significados identificados se fueron robusteciendo en la medida que fueron apareciendo sustentos cuantitativos que corroboraban las ideas previas. Esta instancia de la secuencia fue fundamental, dado que las participantes lograron relacionar los significados anteriormente mencionados con las nociones matemáticas de traslado de gráficas, dilatación, contracción, entre otros. Aquí, surgen diversas inconsistencias y errores, pero que sirvieron como paso a instancias de discusión, en la medida de que lo nuevos significados matemáticos emergentes debían ser consistentes con los discursos previos y coherentes con las significaciones construidas en los momentos iniciales de la secuencia. Se aprovecha la aparición de los errores e inconsistencias para abordar analítica y reflexivamente las relaciones físicas y matemática de la modelación de los sismos y sobre la misma arista, otorgarle un rol cultural, debido al impacto de los eventos sísmicos en la sociedad.

Se aprecia, evidentemente, que las estudiantes lograron utilizar la herramienta tecnológica para ingresar los datos correctamente y generar las gráficas adecuadas, lo que sugiere una competencia técnica suficiente. Sin embargo, las interpretaciones de estas gráficas variaron considerablemente entre los estudiantes. Algunos estudiantes enfocaron sus interpretaciones desde una perspectiva más analítica, basándose en los ejes de coordenadas y las relaciones entre las variables. Otros se centraron en la coherencia con el enunciado del problema o el fenómeno físico subyacente. Esto indica una falta de integración entre el análisis gráfico y la comprensión física del fenómeno en algunos casos. A pesar de que el uso de la herramienta permitió generar las gráficas correctas, la mayoría de los estudiantes no conectó plenamente estas representaciones gráficas con los fenómenos físicos que estaban modelando, lo que sugiere una desconexión entre las herramientas tecnológicas y la comprensión conceptual del fenómeno vinculados a un evento científico.

Se concluye, según las apreciaciones anteriores que los resultados de las actividades descritas muestran que, aunque los estudiantes pudieron identificar y manipular correctamente las variables involucradas en el fenómeno sísmico, todavía había una desconexión significativa entre la representación gráfica del crecimiento exponencial y su comprensión conceptual. Esto resalta la necesidad de seguir trabajando en la relación entre la teoría y la práctica, especialmente en lo que respecta a las representaciones semióticas y gráficas en la enseñanza de las matemáticas.

La secuencia en sus momentos culminantes otorgó el espacio para que se puedan concatenar los significados construidos con los diversos argumentos (tabulares, gráficos y algebraicos, finalmente). Finalmente se logra establecer una definición formal y asociar, transversalmente, un significado algebraico a los discursos de las estudiantes de la forma $y = b^{cx+d} + h$ y obtener un símil para la energía de los sismos y la magnitud. Entendiéndose cada uno de los diversos significados y representaciones como complementarias y no dependientes en la construcción del dME asociado al fenómeno de crecimiento exponencial. Esto, permitió profundizar y robustecer más aún los significados identificados y llegar a una dimensión un poco más allá de lo que propone el sistema escolar tradicional, dado que la secuencia y sus momentos permitieron que las estudiantes realizaran ajustes que las direcciones hacia las ideas de covariación entre una PG y un PA y, además, vincularla a magnitudes físicas propias de los sismos, reflexionando sobre su impacto científico.

Por lo tanto, se concluye que la construcción de los significados es un proceso complejo, sutilmente intencionado que requiere de lo intuitivo para poder atañer el uso o funcionalidad el concepto matemático modelado desde la fundamentación socioespistemológica. Así, se puede concluir que se cumple a cabalidad el segundo objetivo específico OE02 dado que la forma en que aparecen los significados en la construcción del discurso matemático escolar de la exponencial es concordante en la manera que se describen los procesos asociados a las construcciones sociales de las participantes.

5.4 Sobre el objetivo específico 3

El tercer objetivo fue **caracterizar los procesos de resignificación de los estudiantes al utilizar la función exponencial como indicador de variaciones sísmicas**, con el fin de construir una definición formal y socialmente relevante del concepto. Este se materializa en los engranajes y reflexiones que se sintetizan en las etapas finales de cada momento y, por ende, en la parte final de la secuencia asociada a los instrumentos abordados.

Para lograr este cometido, fue vital concatenar rigurosamente los dos primeros objetivos y, además, poder realizar una confrontación entre los análisis a priori y a posterior. De manera que, al identificar los diversos significados en la reconstrucción del discurso matemático escolar del fenómeno de crecimiento exponencial, los procesos vinculados a dicho rediseño pudiesen ser descritos y así, poder visualizar cómo emergen los significados y cómo se da el complemento entre cada uno de ellos. También, de esta forma, poder otorgarle una naturaleza matemática a cada significado o a cada discurso realizado por las estudiantes. Pues, de esta forma es que se logra finalmente construir una redefinición formal, matemáticamente hablando, del concepto.

Un punto importante es que la secuencia didáctica permitió a los estudiantes explorar múltiples formas de representación, como relatos, gráficos, símbolos, tablas y fórmulas algebraicas. Este enfoque multidimensional es esencial, ya que la matemática no se debe limitar a una única representación. Bajo este velo, el conocimiento se enriquece cuando los estudiantes pueden alternar entre diferentes modos de representación y entender cómo se complementan entre sí. Esta complementariedad permitió a los estudiantes alcanzar una comprensión más profunda del fenómeno de crecimiento exponencial. Sin embargo, se aclara que no se considera una secuencia ideal a aquella que se modela a partir de resultados perfectos y exento de errores. Sino que, al contrario, la diversidad de las respuestas hace que las significados sean más enriquecedores en la medida que refleja cómo los estudiantes construyen conceptos, nociones y discursos, más allá de lo correcto en términos matemáticos.

La modelación matemática se manifiesta en la construcción de una epistemología que deriva de las prácticas sociales como instancia de discusión y espacio para compartir experiencias (Méndez et. al, 2016). Desde la experimentación, que en este caso fue tabular, gráfica, interpretativa e intuitiva. Si bien es cierto, aparecieron significados tales como "variaciones", "diferencias", "liberaciones abruptas de energía", "covariaciones", entre otras, unos fueron de origen ***pictórico***, otros de *carácter* ***gráfico****, otros* ***algebraicos***, algunos son simbólicos y otros son en formato de ***lenguaje natural*** o ***relato***. Demostrando la complementariedad entre ellos y no la dependencia de unos con otros. Bajo esta arista se concluye que los significados y sus naturalezas son complementarios y no dependientes de lo algebraico. Por consiguiente, también se concluye que la intuición es un argumento válido para construir significados que culminen en la reconstrucción de un discurso matemático asociado a la función exponencial.

Con base en lo anterior, resulta relevante destacar cómo los significados no emergen de manera lineal, sino que se desarrollan a través de un proceso iterativo, donde los estudiantes constantemente revisan y ajustan sus ideas previas. Esto refleja una práctica común en la modelación matemática, donde las hipótesis iniciales son probadas, confrontadas con los resultados y modificadas según sea necesario. Esta iteración es crucial en la formación de una comprensión robusta y flexible de conceptos matemáticos tales como las funciones.

Los significados que aparecieron en el rediseño de la exponencial, sin alguna preconcepción, fueron de génesis diferente para cada estudiante. Estos se lograron identificar y categorizar dependiendo de su naturaleza específica; Simbólica o semiótica, natural, pictórica, gráfica, algebraica, entre otras. Lo relevante, es que los significados surgen dado a cómo las estudiantes enfrentan la experiencia y, cómo ésta es encausada. Así, se puede afirmar que, para identificar mayor cantidad de significados, es necesario cambiar y diversificar la puesta en escena de una secuencia de aprendizaje. Bajo este velo, ningún significado es inválido en la construcción del conocimiento matemático, sino al contrario, todos los argumentos son complementarios, pues, ayudan a comprender mejor el fenómeno que se quiere modelar y su impacto social. Así, se concluye que, si bien es cierto, la diversidad de significados presentó diferentes naturalezas matemáticas, todos y cada uno de ellos fue asociado al mismo concepto. Esto permite aseverar que cada construcción de significado presenta una génesis matemática diferente y que, sin una estructura lineal en el estudio del concepto, cada significados tienen la misma preponderancia en términos de relevancia en la construcción del dME.

Además, resultó importante considerar la forma en que la comprensión del concepto de función exponencial se vinculó con un fenómeno de alta relevancia social y cultural para los estudiantes chilenos: los sismos. El hecho de que el contexto sísmico haya sido central en la secuencia no solo facilitó la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también les permitió, al estudiantado, ver la aplicación práctica y real de esos conceptos en sus vidas diarias, favoreciendo una resignificación que va más allá de lo puramente matemático.

En lo que respecta a la categorización de los significados, la mayoría de las participantes, dentro de sus respuestas arrojaron indicios evidentes que hicieron que la categorización sea de manera más evidente. Pues, en muchas actividades, las participantes entregaban información que la pregunta no demandaba y esto enriquecía la calidad de las respuestas y significados construidos o reconstruidos. Paralelamente, el desarrollo de la secuencia va en directa coherencia con la corriente de pensamiento de educación matemática que sustenta esta investigación tanto en concordancia y correspondencia teórica como en las etapas contempladas tanto en la modelación matemática (Méndez et. al, 2017) como en la construcción social del conocimiento matemático (Cordero et. al, 2014). Todo lo anterior, contribuye ampliamente a la reconstrucción de un discurso matemático escolar asociado a la función exponencial con miramientos hacia la funcionalidad del concepto y cómo éste adquiere sentido en una arista social para el estudiante chileno, la cultura sísmica y su impacto en la sociedad misma y en la vida de las personas.

Finalmente, es relevante el impacto que este enfoque puede tener en la cultura matemática escolar. La integración de prácticas sociales en la enseñanza de la matemática no solo modifica cómo los estudiantes perciben los conceptos, sino también cómo abordan el aprendizaje en general. Este enfoque tiene el potencial de generar un cambio en la manera en que los estudiantes comprenden y usan las matemáticas, promoviendo una visión de estas como una herramienta para analizar y comprender fenómenos de su entorno, y no como un conjunto de reglas abstractas.

Reflexionando un poco más respecto de este último objetivo, este es quien, de cierta manera, da coherencia y sentido a las descripciones realizadas por las estudiantes. Pues, en engranaje con los otros objetivos, permite responder cabalmente y con un bagaje robusto, en todo sentido, la pregunta de investigación **¿Cómo resignifican los estudiantes de tercero de enseñanza media el concepto de función exponencial al modelar fenómenos de crecimiento y decrecimiento en situaciones de variaciones sísmicas, desde una perspectiva socioepistemológica?**

5.5 Reflexiones sobre los objetivos planteados

A través de la realización de la secuencia didáctica de la propuesta se desprende que el presente estudio motivó reflexiones, contrastes y cuestionamientos sobre la modelación matemática, a la luz de las prácticas sociales, como estrategia o metodología de investigación y la modelación matemática como medio en donde se desarrollan procesos de resignificación de un concepto matemático o la construcción social del conocimiento pertinente a una dimensión particular de la matemática escolar. Esto invita a la siguiente reflexión: Por una lado, la implementación, recursos y lúdica asociada a la secuencia así también como el análisis cualitativo de los resultados sugieren una mirada socio constructivista de la modelación matemática concebida como resultado de un proceso que amerita articulaciones de diversos elementos o factores que involucran actitudes, habilidades y conceptos previos asociados a un componente empírico en los participantes y su interacción desde la experimentación.

Por otra parte, y con base en los resultados obtenidos y descritos en el capítulo anterior, es que brota un cuestionamiento respecto de las situaciones de aprendizaje asociadas a la modelación matemática y promover su regularización en la praxis escolar como estrategia para construir matemática bajo un carácter funcional que permita reflexionar más allá de lo numérico o lo algebraicamente ortodoxo. Entendiendo la construcción epistemológica como un sustento complementario de lo meramente algebraico y no ajeno (Cantoral y Soto, 2014). Es decir, incluir las prácticas sociales dentro del estudio de las matemáticas como fuente de recursos para significar contenidos y saberes previos en virtud promover instancias de estudio que la misma entidad normativa de la educación, por ejemplo, demanda en las bases curriculares desde la perspectiva de la innovación y, teniendo un maletín de recursos epistemológicos diversos y ricos en significados desde hace más de un siglo, información que se patenta en el marco epistemológico del Capítulo1 de la presente investigación.

En cuanto a cumplimiento de los objetivos, se comprueba que el objetivo general se materializa cabalmente en la medida que se logra resignificar el fenómeno de crecimiento exponencial o reconstruir un discurso matemático escolar vinculado a la función exponencial a partir de una significación distinta, primeramente, a la tradicionalmente utilizada en exceso en la educación secundaria escolar y promovida de la misma manera, en el currículo y textos escolares, durante un período de mas de 10 años a la actualidad (Huircán y Carmona, 2013). De manera que si es posible resignificar la función exponencial desde una epistemología de variaciones de sismicidad que relacionan los saltos o expulsiones de energía que experimenta un sismo en virtud de la variación de crecimiento de éste. Además, se logra cumplir con los objetivos específicos, teniendo en cuenta que las significaciones y resultados obtenidos fueron necesarios para lograr la reconstrucción de un discurso vinculado a un objeto matemático, a la luz de una metodología no tradicional, que deriva de las prácticas sociales.

Respecto del cumplimiento de los objetivos, se devela que en el orden con que se logra el camino para llegar a la resignificación de un concepto impuesto de manera acabada en el sistema escolar durante mucho tiempo, es posible identificar con claridad los discrepancias existente entre las significaciones y cómo éstas son engranadas por los estudiantes al momento de abordar un constructo matemático o concepto. De manera, que esto resultó aprovechable porque las inconsistencias y errores asociados la construcción del fenómeno de crecimiento exponencial tenían su génesis en aspectos cualitativos y no, en este caso en particular, en lo aritmético o numérico. Pues, la traba para el aprendizaje de una matemática funcional no radicó en los resultados numéricos obtenidos sino en la interpretación y relación de éstos con un fenómeno natural. A raíz de lo anterior, se afirma que para sustentar un discurso que reconstruya la función exponencial es importante partir desde el entendimiento de un fenómeno natural y situado que da vida la expresión matemática que lo modela; esto es modelar desde las prácticas sociales vinculadas un fenómeno sísmico de crecimiento exponencial.

Los errores que se evidencian, en contraste con los análisis a priori, muestran que las inconsistencias se derivan en cómo los estudiantes articulan los significados en correspondencia con lo matemático. Paralelamente, otra de las conclusiones que resulta relevante, en la reconstrucción del concepto de crecimiento exponencial, se desprende de la discordancia entre la secuencia y lo propuesto por la entidad normativa (Mineduc), pues, la secuencia didáctica promovida rompe con una forma unidireccional de abordar un concepto matemático que parte de lo algebraico y culmina en una aplicación, por ejemplo. Esto resulta interesante y abre la puerta a una reflexión más profunda que se plasma en preguntas tales como ¿Es necesario la reconstrucción o resignificación de los conceptos matemáticos abordados en la educación media o escolar secundaria chilena? ¿La modelación matemática, desde las prácticas sociales, resulta un medio eficiente para la reconstrucción de nociones que requieran de una epistemología diferente a la promovida en los textos escolares durante un período extenso? ¿Resulta necesario entender los procesos de significación en la construcción del conocimiento matemático escolar siendo que hoy en día se promueve una matemática funcional u orientada hacia la sociedad y su entendimiento?

Así, se concluye que la secuencia didáctica propuesta sí se concibe como una innovación en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, en la dimensión de una resignificación de la función exponencial como fenómeno de crecimiento modelado desde las prácticas sociales, rediseñando a su vez, un nuevo discurso matemático escolar sustentado desde lo interdisciplinario (Introcaso et. al, 2013).

5.6 Conclusiones respecto de las limitaciones del estudio

Dentro de las limitaciones de la investigación, primero que todo se tiene el factor tiempo, y éste se sustenta en los requerimientos mínimos necesarios para la implementación de la secuencia propuesta en el presente estudio. Pues, en la propuesta, las TICS cumplen un papel fundamental como recursos y un medio en donde se experimenta o emula un fenómeno, y éstos, requieren un cierto formato que exige al estudiante cumplir con una cierta condición o, en otras palabras, requerir de una alfabetización digital previa. Pues, sin dicha condición, se debe invertir mucha más tiempo que el propuesto dado que el estudiante debe interactuar permanentemente con manipulativos virtuales tanto de graficación como de tratamiento de parámetros. Tiempo que el currículo escolar no contempla de manera coherente en la planificación del estudio del fenómeno de crecimiento exponencial.

Desde un desprendimiento de la reflexión del párrafo anterior, se puede afirmar que la limitante mayor, asociada al tiempo, radica en que la modelación matemática desde las prácticas sociales, demanda mucho más tiempo de lo habitual, esto de evidencia desde los diseños de la secuencia hasta el análisis de los resultados. Pues, si bien es cierto, que una de las habilidades a desarrollar, según el ministerio de educación, es modelar, esto se presenta en los textos escolares de una misma manera: Algebra-Tabular-Gráfica-Aplicación, sentido que es contraproducente con la propuesta de secuencia tanto en orden como en tiempo.

Otra limitante de la investigación se da en virtud de los contenidos mínimos, esto es que, si se quiere implementar esta secuencia en un contexto escolar, primero que todo se debe tener en cuenta los niveles de algebrización que tienen asimilado o que traen los estudiantes. Pues, como requerimiento mínimo es que cada participante sepa interactuar con actividades que ameriten, por lo menos en términos generales, el concepto de “función” y sus variables, de lo contrario la secuencia carece de sentido para la resignificación de la función abordada. El aspecto de los tratamientos aritméticos no se considera como una limitante, puesto que la secuencia tratamientos numéricos tan depurados o con una complejidad superior a lo requerido para el nivel de tercero medio.

Otro alcance que se considera una limitante es el carácter interdisciplinario que adquiere la secuencia en términos de su instrumentación y los conceptos o palabras utilizadas. Dado que, al ser una propuesta de secuencia de carácter cualitativo, ésta amerita significados que derivan de aspectos físicos relacionados con el objeto matemático a construir (desde las prácticas sociales siempre). Pues, se pudo evidenciar, que las participantes no conocían el significado de palabras o tecnicismos vinculados tanto a la física de la tierra como a la sismología. Y esto es importante dado que en la media que se conoce algo del mundo natural el estudiante puede otorgar un significado a partir de lo que ya conoce.

Como una última limitante se contempla la inclusión de recursos que promueven lo intuitivo o la significación de conceptos mediante la semiótica o dibujo de signos. Pues, se evidenció que las participantes presentaron problemas para representar o significar nociones mediante dibujos o algún otro tipo de sustento que no sea algebraico. Esto devela el sentido incrustado en la praxis del estudiante de secundaria, dado que, la tendencia para abordar sus respuestas, en la mayoría de los casos se orientaba a los algebraico. Este aspecto más que una limitante muestra los resultados del adiestramiento matemático imperante en un sistema escolar tradicional que privilegia algunas significaciones por sobre otras.

5.7 Reflexiones sobre los alcances y proyecciones de la investigación

En cuanto a los alcances y proyecciones de la investigación se tiene que se ha ampliado la mirada desde donde se atañe la modelación del fenómeno de crecimiento exponencial desde una perspectiva de matemática funcional. Alcance que se ajusta plena y armónicamente tanto en las dimensiones de la investigación matemática como en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Trayendo consigo repercusiones positivas tanto para los educadores, en términos de ampliar marcos de referencias y para los estudiantes en términos de disminuir la distancia de la desmotivación en el estudio de las matemáticas, así como también de la generación de aprendizajes significativos. Por lo demás, un alcance evidente se refleja en el campo de la didáctica matemática articulando corrientes de pensamientos y metodologías que, si bien es cierto, son nuevas, como la socio epistemología aplica en la modelación matemática (Méndez et. al, 2012, 2017) ya no se conciben como ajenas a otras metodologías de investigación matemática rigurosamente patentadas y validadas por la comunidad científica.

En términos científicos, el alcance de la investigación es evidente, significativo y puede considerarse ampliamente aprovechable, pues los objetivos y contenidos abordados se ajustan desde lo interdisciplinar con dimensiones importantes dentro de las ciencias tales como las ciencias de la tierra, la física de partículas, sismología, geología, entre otras, incluso dentro de la matemática misma como en los diferenciados de matemáticas presentes en la educación secundaria. Pues, se adjunta un ANEXO en donde se abordan las variaciones de sismicidad desde la **covariación** que existe entre la magnitud Richter y la energía liberada, de manera que se puede aprovechar para el estudio de la correspondencia entre progresiones aritméticas y geométricas desde la covariación que existe entre una P.A y una P.G (Ferrari, 2004), en la etapa de estudio de tendencia de funciones y sucesiones. Razón que amplía su dimensión de estudio más allá de la matemática general abordada en la enseñanza media. En términos disciplinares, se puede extender la dimensión de estudio también para abordar relaciones emergente de la significación del crecimiento exponencial y que derivan en otros objetos matemáticos tales como la función logaritmo.

Otro alcance, pero que se contempla más como una proyección, es la capacidad de adaptación que tiene la secuencia propuesta, pues, si se complementa y articula de manera correcta y rigurosa con la actividad del ANEXO, la secuencia cumpliría con los requisitos para ser abordada en cursos de bachillerato o en primer año de universidad para carreras de carácter científico, específicamente en los primeros cursos de álgebra, en donde múltiples universidades, dentro de los programas de estudios abordan la construcción matemática pertinentes a las progresiones aritméticas y geométricas, recordando que la energía y la magnitud Richter muestran y evidencia, al pie de la letra, la covariación entre una progresión aritmética (magnitud del sismo) y una progresión geométrica (energía liberada).

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Villa María: Universidad Nacional de Villa María*, pp. 21-31.

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 18, núm. 1*, pp.19-48.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995). *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A.

Astudillo, J., Soto, D., y Bobadilla, G. (2023). La resignificación del discurso matemático escolar. Una mirada al volumen desde la teoría socioepistemológica. *Revista académica UCMaule,* n°64, 39-65.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: didáctico/didactic to algebra study. Vol. 7*. Libros del Zorzal.

Camacho, A., Valenzuela, V., Caldera, M. (2017, septiembre 20). Modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza del concepto de función. *REPOSITORIOS DEL ESTADO DEL CONOCIMIENTO*, Vol. 8 Núm. 15, pp. 57-67.

Campeón, M., Aldana, E., Villa, J. (2018, agosto 28). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *SOPHIA-EDUCACIÓN, Vol.14. NÚM2*, pp.115-126.

Campo, K., García, J. (2021, octubre 28). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las Conexiones Matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas Universidad de Granada, Vol. 16*, núm. 1, pp. 25-56.

Cantoral, R. (2006), La Socioepistemología como una Escuela del Pensamiento en el campo de la matemática educativa, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. EIME**.**

Cantoral, R., Montiel, G., y Cantoral, R. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(1), 5–17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014, octubre 03). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), pp. 91-116.

Cantoral, R. (2013, octubre). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Editorial Gedisa, S.A.

Cen, M., & Zapata, Y. (2018). La reconceptualización en matemáticas. Hacia su importancia en la formación docente. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, Vol. 3*, pp. 160-163.

Cerda, G., Ortega Ruiz, R., Casas, J. A., del Rey, R., & Pérez, C. (2016). Predisposición desfavorable hacia el aprendizaje de las Matemáticas: una propuesta para su medición. *Estudios pedagógicos (Valdivia), Vol. 42, núm. 1*, pp.53-63.

Cisternas, A. y Vera, E. (2008). SISMOS HISTÓRICOS Y RECIENTES EN MAGALLANES. *Magallania (Punta Arenas)*, 36(1), pp. 43-51.

Cordero, F., Morales, A. (2014) La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17*, núm. 3, noviembre, 2014, pp. 319-345

Cordero, F. y Solís, M. (1997a). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. *Serie Cuadernos de Didáctica*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2a. edición, 79 pp.

Cordero, F. y Solís, M. (1997b). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 135). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Cordero, F., Flores, E., Rebeca, B. (2007, marzo 06). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 10*, núm. 1, pp. 7-38.

Cordero, F. y Solís, M. (1995*). Las representaciones gráficas como elementos de didáctica del Cálculo*. En R. Farfán (Ed.), Publicaciones de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., Pérez, R (2014, noviembre 01). Atención a la Diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, vol. 7, núm. 3, pp. 71-90.

Chevallard, Y., Bosh, M., Gascón, J. (1997). *ESTUDIAR MATEMÁTICAS El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Editorial Horsori. Apart. 22.224 (08080) Barcelona.

Cotovanu, A., Vacareanu, R. (2020, abril 01). Modelado de parámetros de liberación de energía en simulación estocástica de movimientos del suelo generados por la fuente sísmica de profundidad intermedia Vrancea. *Boletín de Ingeniería Sísmica, Vol. 18*, núm. 6, pp. 2557-2580.

Di Giacomo, D., Parolai, S., Bormann, P., Grosser, H., Saul, J., Wang, R., y Zschau, J. (2010, enero 01). Suitability of rapid energy magnitude determinations for emergency response purposes. *Geophysical Journal International - GEOPHYS J INT*, Vol. 180, pp.361-374.

Ferrari, Marcela (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En Díaz, Leonora (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 45-50). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8(2)*, pp. 195-218.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME, 8.

González-Sanmamed, M., Souto-Seijo, A., Sangrà, A., Estévez, I. (2018, abril 12). Ecologías de aprendizaje en la Era Digital: desafíos para la Educación Superior. *PUBLICACIONES Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla, Vol.48.*

Núm. 1, pp.25-44.

Hernández, P., y Buendía, G. (2013). *Resignificacion del conocimiento matemático en escenarios de divulgación: el uso de la periodicidad.*

Hernández, P., y Buendía, G. (2013). *Los usos del conocimiento matemático fuera de la escuela.*

Huircán, M., Carmona, K. (2013, noviembre 13). *MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media Educación para Personas Jóvenes y Adultas*. Santiago, Chile: Carla Falcón Simonelli.

Introcaso, B. & Braccialarghe, D & Có, P. (2013). EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR COMO UNA PRÁCTICA SOCIAL. SU REDISEÑO A TRAVÉS DEL TRABAJO INTERDISCIPLINARIO. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/https://www.researchgate.net/publication/262688991_EL_DISCURSO_MATEMATICO_ESCOLAR_COMO_UNA_PRACTICA_SOCIAL_SU_REDISENO_A_TRAVES_DEL_TRABAJO_INTERDISCIPLINARIOKanamori, H. (1977). The energy release in great earthquakes. *Journal of geophysical research, Vol. 82, núm. 20*, pp.2981-2987.

Ledezma, C (2017). *Estudio de la Modelación de la Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio según el Modelo de Blomj∅h y H∅jgaard-Jensen* [Tesis de maestría]. Researchgate.net. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Magalhães, J., y Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval ea teoria dos registros de representação semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 2(3)*, pp. 10-34.

Méndez, M & Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. D´Ambrosio, 2009.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* Tesis inédita de doctorado. Departamento de Matemática Educativadel Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México.

Méndez, M., Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 1603-1610.

Méndez, María Esther Magali; Zúñiga, Karen; Marquina, Nancy (2017). Modelación escolar. Experimentación y análisis de variaciones en las gráficas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, Vol. 2,* pp. 157-167.

Méndez, M., Marquina, N., y Zuñiga, K. (2017). Situaciones de aprendizaje para la modelación escolar. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1046-1056). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mendoza, E., Cordero, F., Solís, M., y Gómez, K. (2018). El uso del conocimiento matemático en las comunidades de ingenieros. Del objeto a la funcionalidad matemática*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Vol. 32*, pp. 1219-1243.

Montiel, G., & Buendía, G. (2011). *Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica.*

Moreno, L., Artigue, M., Gómez, P. y Douady, R. (1998). *Ingeniería didactica en* *educación matemática*. Bogota D.C, Colombia: Universidad De Los Andes.

Moroño, M. V., y Rodríguez, M. (2007). Enseñar matemática a los no matemáticos: propuesta didáctica para el aprendizaje significativo de la matemática en bioanálisis basada en la contextualización de los contenidos. *Enseñanza de la Matemática*, *Vol. 12*, PP. 3-17.

Parra, V. (16-20 de septiembre de 2013) *UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA CONSTRUCCIÓN DE CIUDADANÍA CRÍTICA A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. XVII Jornadas Nacionales De Educación Matemática, Montevideo.*

Ordóñez, J. A. (2005). *Cálculo de la energía liberada por sismos a distancias telesísmicas mediante el método de la integral del espectro de potencia de las ondas de volumen* (Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Física). Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

Picozzi, M., Bindi, D., Spallarossa, D., Oth, A., Di Giacomo, D., y Zollo, A. (2018, noviembre 22). Moment and energy magnitudes: diversity of views on earthquake shaking potential and earthquake statistics. *Geophysical Journal International, Vol. 216*, pp. 1245–1259.

Poupardin, A., Heinrich, P., Hébert, H., Schindelé, F., Jamelot, A., Reymond, D., y Sugioka, H. (2018). Traveltime delay relative to the maximum energy of the wave train for dispersive tsunamis propagating across the Pacific Ocean: the case of 2010 and 2015 Chilean Tsunamis. *Geophysical Journal International*, 214(3), 1538–1555.

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 360–382.

Salle, A., y Krause, C. (2020). *Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten. Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(1), 123–158.

Silva-Crocci, H. (2013). *Matemática Educativa en Latinoamérica: Adherencia e Identidad Disciplinar*. Memoria Pre-Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *Vol. 28*, pp.1525-1544.

Spivak, M. (2014). *CÁLCULUS* (4.ª ed., pp. 39–54). Barcelona, España: Editorial Reverté, S.A.

Sureda, P., & Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. Educacion Matematica, 25(2), pp. 89–118.

Tarira Caice, C. A., Parra-Sandoval, H., & Delgado González, M. (2020). Procesos de enseñanza de la función exponencial. Un acercamiento cualitativo. *Revista Científica UISRAEL*, 7(3), 37–50.

Trujillo, C., Ospina, R., Parra, H (2010, agosto). LOS TERREMOTOS: UNA AMENAZA NATURAL LATENTE *Scientia Et Technica*, *vol. XVI*, núm. 45, pp. 303-308

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, Vol.14, núm.* 1.

Uriza, R. C., Lezama, J., Farfán, R. M., & Sierra, G. M. (2006). *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(1), pp. 83–102.

Vargas, J. (2017). *ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE UNIVERSITARIO DE PRECÁLCULO. ESTUDIO DE CASOS EN LÑA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES*. Salamanca, España: EDICIONES UNIVEERSIDAD DE SALAMANCA.

Vargas, J., González, M., & Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: Mecanismos de construcción. En *XIII CONFERENCIA INTYERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICACIAEM-IACME* (pp. 1-12).

Vanegas, C (2019). ¿Es posible transformar la sala de clase de matemáticas y ciencias? (aún en condiciones poco favorables)? En L. de la Vega (ed.), *Mejorar la educación: aprendizajes desde la investigación educativa* (pp.39-45). RIL editores.

Vidal, F. (1994, enero 01). LOS TERREMOTOS Y SUS CAUSAS. *El estudio de los terremotos en Almería*, ISBN 84-8108-047-0, pp. 17-38.

Vidal, R. (2010). *El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910–2010*.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

ANEXOS

ANEXO 1 Actividad 0: "Para crear una epistemología de la Función Exponencial"

Nombres	Curso
Fecha:	Equipo
Objetivo	
Instrucciones	

"En el reino de Terremolandia, la gente se encuentra desesperada por encontrar cómo se debe actuar frente a estos eventos para el bien de la comunidad y de la naturaleza misma, pero la respuesta a este dilema se encuentra en un código oculto en la historia de los terremotos y cómo las variaciones de energía que liberan éstos ha ayudado a entenderlos y a generar estrategias para sobrevivir…"

Existe una profecía en Terremolandia que ayudará a desarrollar y mejorar estrategias para poder actuar frente a estos eventos. Esta profecía predice que quien ingrese el código sagrado, de manera correcta, en las casillas antiguas del pueblo, será el vencedor y recibirá el lema sagrado que ayudará a entender a los terremotos y su variación energética de mejor manera. Para obtener el código deberás ordenar, de manera correlativa, los recuadros que contienen la historia de los terremotos y formar la palabra que resulta de las primeras dos letras de cada párrafo. ¡Éxito y que la fuerza del Sismologio Ancestral te acompañe!

I- Descubre y relata la historia de la función Exponencial. Ordena, enumerando del 1 al 6 en los recuadros blancos, los sucesos importantes considerados como parte de los orígenes históricos de la función exponencial. Descubre la historia y obtén el código sagrado.

3	Ya en el siglo XVI el matemático alemán Stifel trabaja con exponentes racionales arbitrarios, y Jhon Nepier y J. Bürgi introducen los exponentes reales en general de manera intuitiva. Es decir, se comienza a entender la función exponencial con el impacto que generaban distintos tipos de números como exponentes. Más allá de percibir los resultados como imágenes de una variable en el exponente, lo interesante eran las variaciones generadas en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenas. Esto se conoce como covariación, entre dos progresiones; una aritmética y una geométrica.

1	Las funciones exponenciales, desde sus inicios, primordialmente reflejaban eventos en el que el comportamiento de una variable crecía, cambiaba rápidamente con respecto a otra, o también se concebía como un fenómeno que experimentaba una variación brusca y considerable con respecto a otra variación más pequeña o constante. Algebraicamente hablando, se contemplaban como aquellas que presentaban variables en el exponente de una expresión.

6	Hoy en día se acepta que la función exponencial es aquella en que una de las variables (dependiente) aumenta más rápido que la otra (independiente). Por ejemplo, un comportamiento exponencial sería el crecimiento drástico de contagios de un virus a medida que avanza el tiempo.

2	Desde los tiempos antiguos ya se conocía y estudiaba este tipo de comportamiento. Además, los babilonios y los egipcios dominaban muy bien el concepto de exponente. Entendiendo que los posibles cambios que podían generar éstos, indican el cambio o variación de una cierta cantidad con respecto a otras. Asociando magnitudes físicas tales como las variaciones de los contagios de enfermedades o pestes con respecto al tiempo o magnitudes físicas tales como el movimiento del suelo y su impacto en la medida que el tiempo transcurre de la misma manera.

5	Otras de esas situaciones, para el entendimiento del crecimiento y decrecimiento exponencial, es el interés compuesto de los barcos, por ejemplo, y de hecho, fue esta observación la que llevó a Jacob Bernoulli a estudiar el cálculo de las funciones exponenciales, la propagación de enfermedades, crecimiento de bacterias, entre otras.

4	A finales del siglo XVII, se apreció la relación inversa entre la función exponencial y logarítmicas. La definición de función como la correspondencia arbitraria entre variables, fue atribuida por Dirichlet (1854). Pues la función exponencial se da como una cantidad crece o decae en proporción a su valor original, por ejemplo. Es en esta arista, que comienza a jugar un rol importante lo interdisciplinario, pues en el campo de las ciencias geológicas, se descubre una correspondencia entre la magnitud de un sismo y la energía que libera la sacudida del suelo. Una relación inversa entre la magnitud Richter (logarítmica) y la energía sísmica (exponencial).

Una vez que creaste la historia de la exponencial, escríbela en tu pergamino, identifica el código y encuentra el mensaje que salvará a Terremolandia.

Ingresa Código sagrado

ANEXO 2: TEXTO COMPLEMENTARIO AL ANEXO 1

DE LA INFORMACIÓN SAGRADA DE LA ENERGÍA DE LOS TERREMOTOS Y SU IMPACTO EN TERREMOLANDIA Y EL MUNDO

Escala de Intensidad Mercalli	Magnitud
I	1.0 - 3.0
II - III	3.0 - 3.9
IV - V	4.0 - 4.9
VI - VII	5.0 - 5.9
VII - IX	6.0 - 6.9
VIII o más	7.0 o más

IMPACTO SOCIAL DE LOS TERREMOTOS:

"LA ENERGÍA QUE LIBERA UN TERREMOTO DIRECCIONA EL COMPORTAMIENTO SOCIAL PARA ENFRENTAR UN SISMO"

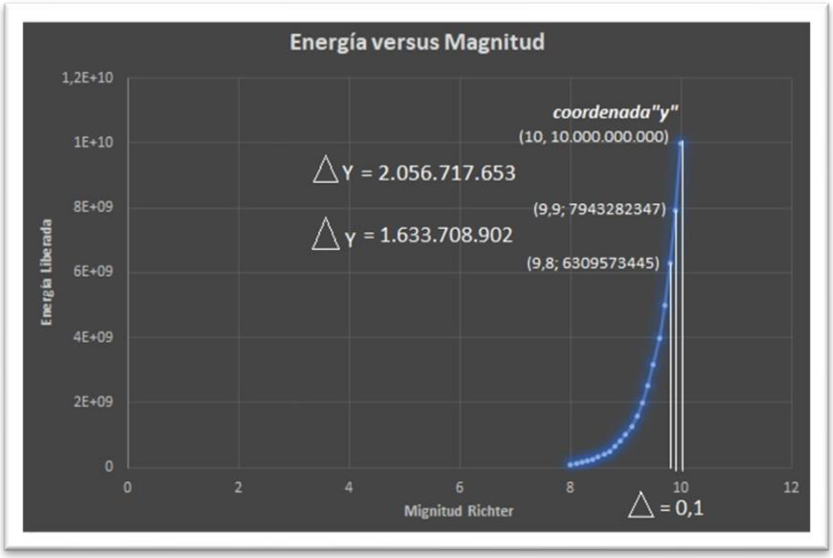
El destrozo desde lo material e impacto social se mide desde lo que se conoce como escala de mercalli. Vale decir que, dicha escala, proporciona una visual mas social respecto de los efectos colaterales que pueden causar los sismos en virtud de lo social, infraestructura, entre otras. En palabras sísmicas esta escala mide la intensidad de los sismos, en palabras amenas para ti, mide el tamaño del evento. Por lo tanto, el tamaño del evento determina cierto grado de destrozo o daño y el tamaño también tiene relación directa con la energía liberada. Pues a mayor Tamaño, mayor energía liberada, mayor remesón y mayor impacto.

La energía de los sismos tienen relación directa con la magnitud de éstos, y en su conjunto categorizan los impactos y/o destrozos que pueden causar en los diferentes lugares en donde ocurren. En terremolandia usan como parámetro de comparación un evento sucedido en Chile cuyos registros son los más grandes, en tperminos cuantitativos, que se han medido a nivel planetario. Este sismo conocido como el "Terremoto de Valdivia" tuvo una magnitud en la escakla de Richter de 9,6; lo que provocó que el movimiento telúrico liberara una cantidad de 56.000.000.000.000 eliminando un aproximado de 2000 vidas y dejando destrozoz de tamaño considerable en una basta región de superficie. Dicha cantidad es la energía máxima medida en todo el planeta incluso más grande de los eventos que han sacudido a Terremolandia.

En este pergamino se te revelará los secretos de los impactos que han hecho de Terremolandia un reino que ha podido sobrevivir a través de la historia. Pues estos secretos te ayudarán a reflexionar y saber cómo poder actuar frente a un eventos de estas características, pues te brindará información respecto de las energías liberadas para distintas magnitudes y su impacto social, esto para aumentar tu conocimiento, pero también para impulsar una cltura sísmica en virtud del comportamiento de crecimiento exponencial que tiene la energía del terremoto versus la magnitud de los mismos. Ebn palabras coloquiales tenemos lo siguiente:

Mientas las variaciones de magnitud de los terremotos ocurren de manera constante – de 0,1 en 0,1 – las variaciones de la energía no lo son y , además, son enormes

cantidades casi incontables las variaciones de energía que lioberan en la medida que de magnitud avanzan con una diuferencia constante de 0,1.



Gráfica 3 Gráfico de Energía vs Magnitud

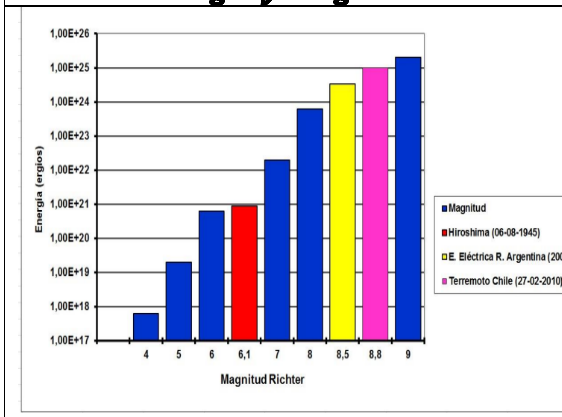
- *Sabías que…si bien es cierto que en el eje "y", que representa la energía liberada del terremoto, cada valor (en cada punto) es una potencia de base 10, mientras que cada valor del eje "x" corresponden a decimales que van de 0,1 en 0,1.*
- *Otro punto de interés es que las variaciones en el eje "x" (magnitud Richter) son constantes y tienen un valor de 0,1, mientras las variaciones en el eje "y" (Δy) no son constantes van aumentando con gran magnitud, numéricamente hablando. Esta es una de las características más importantes del comportamiento de crecimiento exponencial o función exponencial (revisar Gráfica anterior)*
- *Matemáticamente, también podríamos decir que la energía liberada de un sismo (eje y) corresponde a una "Progresión geométrica" de razón 10 y, que la magnitud de los terremotos (eje x) corresponde a una "Progresión aritmética" de diferencia 0,1.*

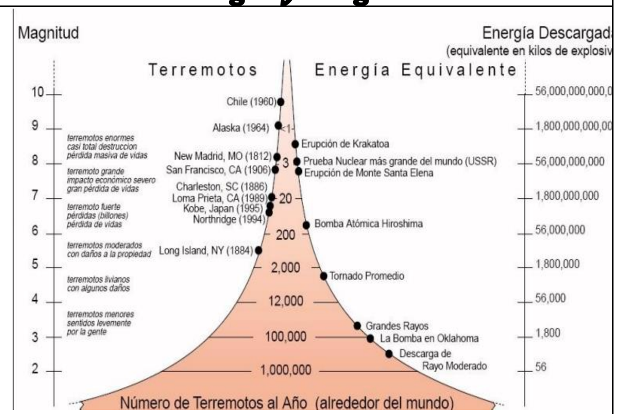
¿Cuáles son algunos parámetro para reflexionar sobre el impacto social que tienen los terremotos?

Relación Energía y Magnitud del sismo	*Unidad de medición de la energía liberada del sismo*
$\log. E_S = 11{,}8 + 1{,}5.M_S$	$1\ Kwh = 3{,}6 \times 10^6\ Joule = 3{,}6 \times 10^{13}\ ergios$

Algunos eventos sísmicos importantes a travpes de la historia y que causaron gran impacto, destrozo e importantes cambios sociales (compara los valores de energía y de magnitud para tu reflexionar)

Energía y Magnitud | ***Energía y Magnitud***





Destrucciones que generan los terremotos: Escala Mercalli y Escala Richter

Escala Marcalli Richter

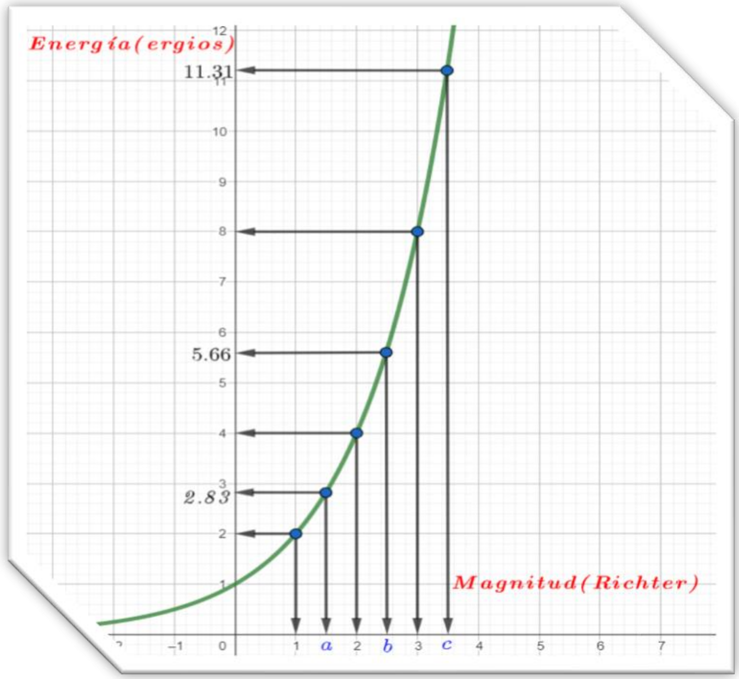
Escala Richter de magnitud	Escala de Intensidad de Mercalli Mod.	N° de sismos por año	Efecto en áreas pobladas
< 3,4	I	800 000	Registrado solo por sismógrafos
3,5 - 4,2	II e III	30 000	Sentido por algunas personas
4,3 - 4,8	IV	4800	Sentido por muchas personas
4,9 - 5,4	V	1400	Sentido por toda la gente
5,5 - 6,1	VI e VII	500	Pequeños daños en edificios
6,2 - 6,95	VIII e IX	100	Muchos daños en edificios
7,0 - 7,3	X	15	Daños profundos. Fracturas en paredes
7,4 - 7,9	XI	4	Grandes daños. Colapso de edificios
> 8	XII	1 entre 5 y 10 años	Destrucción total. Topografía alterada

Escala Richter Mercalli

ANEXO 3 - Actividad para desafío…" Significando la exponencial desde la covariación entre la energía y la magnitud"

I- Observa la siguiente gráfica y trabaja de acuerdo con los valores entregado en por ella.

- La escala en el gráfico está definida de 0,2 en 0,2 (cada cuadrito tiene una medida de 0,2 en ambos ejes) $\boldsymbol{a = 1,5}$; $\boldsymbol{b = 2,5}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c = 3,5}$. *Se destaca que sus correspondientes ordenadas fueron redondeadas a la centésima*



Identifiquemos y enumeremos los valores denotados por los vectores en cada eje de coordenadas.

Magnitud	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Término	$\boldsymbol{M1}$	$\boldsymbol{M2}$	$\boldsymbol{M3}$	$\boldsymbol{M4}$	$\boldsymbol{M5}$	$\boldsymbol{M6}$
Energía	2	2,83	4	5,66	8	11,31
Término	$\boldsymbol{E1}$	$\boldsymbol{E2}$	$\boldsymbol{E3}$	$\boldsymbol{E4}$	$\boldsymbol{E5}$	$\boldsymbol{E6}$

¿Qué podrías decir sobre la diferencia entre los valores de las abscisas?	¿Qué podrías decir sobre la diferencia entre los valores de las ordenadas?
Los valores de la magnitud van resultando de sumarle _____ al término anterior. Entonces, se experimenta una variación, de valor a valor, de 0,5 Richter ***En matemática esto se conoce como una Progresión Aritmética de diferencia d=0,5***	Los valores de la energía van resultan de multiplicar al término anterior por un valor fijo. En este caso los valores de la energía son potencias de ___. ***En matemática esto se conoce como una Progresión Geométrica de razón "2"***

"Términos reales, la energía que libera un sismo corresponde a una P.G de razón 10 mientras que la magnitud Richter corresponde a la P.A de diferencia 0,1"

Identificando una covarianza entre una P.G y una P.A: “Covariación entre la energía y la magnitud Richter”

¿Cómo funciona una covariación? Para esto, obtenga la suma de los siguientes términos en la P.A y analiza los términos que vas encontrando

$\boldsymbol{M1 + M2}$ $\boldsymbol{M2 + M3}$ $\boldsymbol{M3 + M4}$

Ahora, multiplica las imágenes de las magnitudes sumadas anteriormente y reflexiona sobre los términos que aparecen.

$\boldsymbol{E1 \times E2}$ $\boldsymbol{E2 \times E3}$ $\boldsymbol{E3 \times E4}$

Establece una relación significando la liberación de energía y las progresiones involucradas

Entonces, si sumo, en las magnitudes dos términos obtengo un tercer término. De manera que, si multiplico las imágenes de las magnitudes sumadas obtengo ______________________________. Esto es lo que se conoce como covariación entre la ___________________ y la _________________ de un terremoto en términos de su crecimiento exponencial. Este comportamiento se puede evidenciar y apreciar en toda la modelación de la función exponencial tanto a nivel de matemática como también en física (indicador de variaciones sísmicas).

DESAFÍO PARA CASA

En tu casa, utiliza el applet de Excel para obtener valores de energía y magnitud y comprueba lo anteriormente construido, para valores más realistas.