UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Estudio descriptivo sobre los errores y dificultades que presentan los profesores que enseñan los conceptos de límite de una sucesión y límite de una función

MATÍAS ISRAEL ROA BRIONES

PROFESOR GUÍA:

Dr. RAFAEL LABARCA BRIONES

PROFESOR CO GUIA:

Dr. CARLOS VANEGAS ORTEGA

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

SANTIAGO, CHILE

2024

Resumen

A partir del año 2019, y como complemento a la reforma educacional iniciada el año 2009, con la que se pretende tener en Chile un currículo formativo de nivel OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico); se agregaron nuevos cursos electivos al currículo de matemáticas en la enseñanza humanista científica. Entre estos cursos se encuentra el de límites, derivadas e integrales.

Puesto que hay poca historia respecto de este curso, resulta de interés estudiar la manera en que los profesores de matemática enseñan los conceptos de límite de funciones y límte de sucesiones.

Con el propósito de avanzar, en este campo de estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en este nivel escolar, hemos llevado adelante este estudio con el fin de conocer y entender cómo los docentes enfrentan la enseñanza de estos conceptos. Para ello, elaboramos y aplicamos dos instrumentos a 11 profesores delegados del Campeonato Escolar de Matemáticas (CMAT) respecto al dominio y la enseñanza del concepto de límite.

El primero de ellos es un cuestionario que tienen dos partes: la primera para conocer detalles de la experiencia, dificultades y percepciones del profesor para la enseñanza del concepto de límite (de sucesiones y funciones). La segunda parte son preguntas de conocimiento específicos que tienen como finalidad analizar que dificultad(es) puede encontrar el profesor respecto de la enseñanza del concepto de límite.

El segundo cuestionario tiene como finalidad analizar la forma como enseñan los profesores el concepto de límites de sucesiones y de funciones a nivel secundario en el curso electivo de límites, derivadas e integrales.

Respecto a la enseñanza, se analizaron guías y clases de 6 de los 11 profesores que participaron en este estudio. Respecto al dominio, se realizó una evaluación de los contenidos relacionados al concepto de límite. Los resultados permiten identificar que los profesores no utilizan la definición formal de límites de funciones, la principal justificación que utilizan los profesores para argumentar acerca de la existencia de un límite es el teorema de los límites laterales. También, los profesores utilizan incorrectamente el símbolo ∞, considerándolo como un número real cuando es una representación de la idea de que algo crece o decrece (situación que se expresa como $-\infty$), sin límite. Por último, se observa que los profesores no aplican correctamente el álgebra de límites de sucesiones argumentando con casos que no corresponden a cada propiedad.

Palabras Clave: Enseñanza de límite de sucesiones – Enseñanza de límite de funciones – Obstáculos en la enseñanza

Abstract

As of 2019 - and as a complement to the educational reform that started in 2009- with the aim of having an OECD (Organization for Economic Cooperation and Development) level training curriculum in Chile, new elective courses have been added to the mathematics curriculum in humanities and science education. These courses include limits, derivatives and integrals.

Since there is little history about this course it results interesting to study the way mathematics teachers teach the concepts of function limits and sequence.

With the purpose of moving forward in this field's study of teaching and learning mathematics at this scholar level we have carried out this study to know and understand how teachers deal with teaching these concepts. To accomplish this, we developed and applied two questionnaires to 11 teachers delegated by the Campeonato Escolar de Matemáticas (CMAT) regarding the mastery and teaching of the concept of limits. The former is divided in two parts: the first one, to know the details of the experience, difficulties and perception of the teacher to teach the concept of sequence limits and function. The second one contains some questions about the specific knowledge they possess to analyze the challenges that the teacher could face while teaching the concept of limits. The latter has as aim to analyze the way teachers teach the concept of sequence limits and functions at secondary level in the course of limits, derivatives and integrals.

Regarding the teaching, handouts and classes from 6 of the 11 teachers who participated in this study were analyzed. In relation to the domain, an evaluation of the content related to the concept of limits was carried out. The results allow us to identify that teachers do not use the formal definition of function limits, the main justification used by teachers to argue about the existence of a limit is the theorem of lateral limits. Also, teachers incorrectly use the symbol ∞, considering it as a real number when it is a representation of the idea that something grows or decreases (situation expressed as $-\infty$) without limit. Finally, it is observed that teachers do not correctly apply the algebra of sequence limits, arguing with cases that do not correspond to each property.

Keywords: Teaching the sequence limits – Teaching the limit of functions – Obstacles in teaching.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por el apoyo en todo instante, los alientos día a día y los consejos para poder finalizar este programa de Magíster.

Al mismo tiempo, quiero agradecer a mis profesores Dr. Rafael Labarca y Dr. Carlos Vanegas por sus consejos, por su valiosa ayuda y por su paciencia para poder terminar.

Quisiera finalizar agradeciendo a la Facultad de Ciencia y el Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile por otorgarme una beca parcial para finalizar mis estudios del Magíster.

Tabla de contenido

Capítulo 1: Problema de Estudio

1.1 Antecedentes

La reforma curricular, del sistema de educación escolar chileno, se inició el año 2009 con el cambio curricular de la enseñanza preescolar y básica y concluyó, en junio de 2019, con el decreto 0193 del Ministerio de Educación que *aprueba bases curriculares para los cursos de 3° y 4° año de educación media en las asignaturas que indica.* En este decreto, en particular, se establecen las siguientes cuatro asignaturas electivas en el área de matemáticas:

- Geometría 3D
- Límites, derivadas e integrales (LDI)
- Pensamiento computacional y programación
- Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial

Estas asignaturas electivas se cursan durante los últimos dos años de la enseñanza media humanista científica.

Al ser asignaturas nuevas, resulta interesante conocer y estudiar las dificultades y desafíos que presentan -los estudiantes y sus profesores- para comprender los nuevos conceptos propuestos en cada una de estas asignaturas. En particular, en este trabajo, nuestra propuesta es conocer e identificar los errores y dificultades de los profesores de matemáticas que imparten la asignatura de límites, derivadas e integrales con relación a la enseñanza de los conceptos de límite de una sucesión y límite de una función.

Para Radatz (1980), el análisis de los errores nos permite diagnosticar dificultades individuales de los alumnos como punto de partida y como herramienta de investigación de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las investigaciones sobre las dificultades, de los profesores de matemáticas, para la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y límites de funciones, son limitadas. La mayoría de las investigaciones se centran en el estudiante. Es por ello que se requieren investigaciones centradas en el profesor. A continuación, se presentarán algunos de los antecedentes que la literatura reporta en cuanto a lo que ocurre con los docentes.

En la investigación de Mastorides y Zachariades (2004), llegan a la conclusión de que es posible que algunos profesores que enseñan límites de funciones no entiendan el concepto de límite o tienen conceptos erróneos acerca del concepto de límite. En su trabajo indicaron que: *“La mayoría tiene dificultades para comprender enunciados multi cuantificados o no logra comprender la modificación de dichos enunciados provocada por cambios en el orden de los cuantificadores” (p. 481);* refiriéndose al desafío que enfrenta el profesor de matemáticas cuando enseña la definición de límites de funciones con épsilon-delta con respecto al orden de los cuantificadores de “Para todo” y “Existe”.

Otras conclusiones que obtuvieron son que la mayoría de estos profesores tienen dificultades para dar verbalmente, de forma correcta, las definiciones formales de límite y continuidad. Por ejemplo, alguien, intentando verbalmente definir el límite de una secuencia, escribe:

> *“Existe un término de una secuencia después del cual la diferencia entre la secuencia y un número constante se vuelve tan pequeña como queramos”.(p. 485)*

La afirmación anterior se refiere a una parte de la definición formal del concepto de sucesión, esta es, $|a_n - L| < \varepsilon$ sin utilizar o mencionar los cuantificadores.

Otros profesores, dando verbalmente el concepto de continuidad, escribe:

> *"Cuando x se acerca a y tanto como queramos, entonces $f(x)$ se acerca a $f(y)$. Es decir, cuando el intervalo de y se acerque, sucederá lo mismo con el intervalo correspondiente de $f(y)$". (p. 485)*

Se puede observar que la afirmación anterior no establece las relaciones de "Para todo" y "Existe".

Otra conclusión relacionada al gráfico de una sucesión es que algunos de los profesores al momento de representar gráficamente la convergencia de una sucesión, dibuja las gráficas de manera incorrecta, como la siguiente imagen:

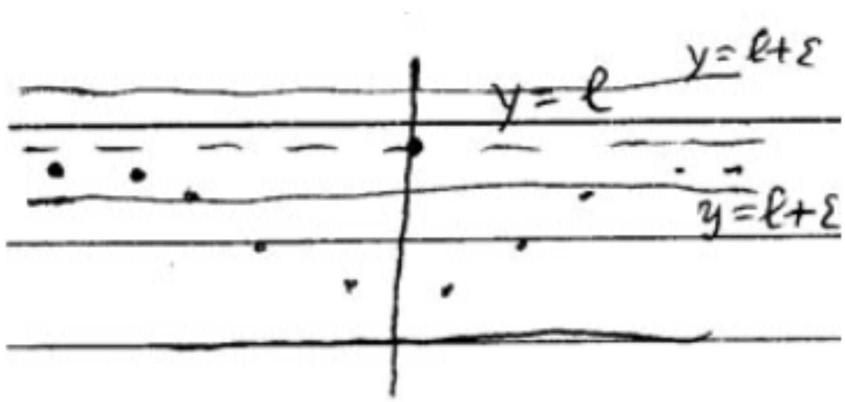


Imagen 1: Representación de profesores para indicar gráficamente convergencia de una sucesión Mastorides y Zachariades (2004, p. 485)

Por otro lado, Cornu (1991), afirma que una de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite es que se concentra en la definición del concepto de límite utilizando los cuantificadores "Para todo", "Existe" a la hora de enseñar el concepto sin concentrarse en el concepto propio de límite. También, Cornu (1994) afirma que se algebrizó la manera en que se enseña el límite de una función en general, se enuncian teoremas, las propiedades de la suma, resta, multiplicación y división de límites, pero no se concentran en general en el concepto de límite.

Otra referencia, centrada en los obstáculos que presentan los profesores al enseñar el concepto de límite es Hitt (1999), el cual llega a la conclusión de que algunos profesores tendían a fijar algunas estrategias centradas en métodos algebraicos para calcular límites, favoreciendo enfoques informales para enseñar el concepto. Una de las afirmaciones que indican los profesores es que "*Siempre puedes calcular un límite, si el resultado es una indeterminación, siempre hay una manera de solucionarlo*" (p. 52)

Con respecto al conocimiento que debe tener un profesor, en el ejercicio de su docencia, se señala, en la literatura, que uno de los precursores fue Lee S. Shulman(1986).

Luego de éste trabajo seminal de Shulman, y en los últimos 30 años, las investigaciones en el campo del conocimiento de los profesores (de matemáticas, en nuestro caso) han ido en aumento, como lo respaldan los numerosos estudios que se han realizado (Badillo et al., 2019; Pino-Fan y Godino, 2015) y los distintos modelos que se han realizado con el fin de profundizar nuestra comprensión del conocimiento de los profesores de matemáticas (Ball et al., 2008; Carrillo-Yáñez et al., 2018; Pino-Fan y Godino, 2015; Rowland et al., 2005).

Es necesario conceptualizar nuevas formas y abordajes en la formación de profesores que permitan desarrollar instrumentos con el objetivo de motivar al conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas. (Ribeiro et al., 2016)

El conocimiento de los docentes, en todos sus aspectos, es un factor crítico para su desempeño y la promoción del aprendizaje de los estudiantes (Zakaryan et al., 2018). Esto permitirá a los profesores decidir qué se debe enseñar y cómo, qué tipo de representación elegir y cómo resolver los problemas que plantea cualquier contenido en particular (Shulman, 1986).

Algunas investigaciones, relacionadas al conocimiento matemático, indican la importancia de que los profesores tengan una óptima preparación matemática, lo que implicará en generar un aprendizaje efectivo al momento de enseñar algún concepto matemático. Por ejemplo, Haciomeroglu (2006) indica que los profesores con un fuerte conocimiento matemático tienen mejor preparación para ayudar a sus estudiantes a comprender los diferentes temas al momento de enseñar.

En ese orden, el objetivo de esta tesis está enfocado en caracterizar las dificultades que presentan los profesores de matemática que realizan el curso de límites, derivadas e integrales, respecto a la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y límite de funciones.

1.2 Pregunta de investigación

¿Cuáles son las dificultades de los profesores de matemática que realizan el curso de Límites, Derivadas e Integrales, respecto de la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y límite de funciones?

1.3 Supuestos

Los supuestos de esta investigación son los siguientes:

1) Los profesores no tienen un adecuado vocabulario matemático para enseñar conceptos de límites de funciones y límites de sucesiones.
2) Los profesores utilizan incorrectamente el símbolo ∞ en la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y límite de funciones.

1.4 Relevancia

Al ser una asignatura (curso electivo) creada recientemente en el currículo chileno, se requiere realizar investigaciones relacionadas al aprendizaje y enseñanza de los contenidos del curso de límites, derivadas e integrales. En particular, respecto de su enseñanza. Esto debido a que las investigaciones centradas en la docencia son limitadas. Se espera que este trabajo sea un aporte para que los docentes dimensionen y tomen en consideración los errores comunes y los pueda corregir en su enseñanza.

1.5 Limitaciones

Al ser una muestra pequeña de profesores, no se puede generalizar lo que les ocurre a los profesores del estudio cuando realizan el curso de límites, derivadas e integrales. Sin embargo, los casos reportados son un aporte al campo de la educación matemática del país puesto que reporta nichos de mejora para la formación inicial y continua de los docentes de matemática.

1.6 Objetivos

1.6.1 Objetivo General

Caracterizar las dificultades de los profesores de matemática que realizan el curso de Límites, Derivadas e Integrales, respecto de la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y límite de funciones.

1.6.2 Objetivo Específicos

OE 1: Identificar las dificultades que presentan los profesores de matemática que realizan el curso de Límites, Derivadas e Integrales respecto de la enseñanza de los conceptos de límite de funciones y límite de sucesiones.

OE 2: Describir las formas de preguntar de los profesores de matemática cuando enseñan los concepto de límite de funciones y límite de sucesiones, en el contexto del curso de Límites, Derivadas e Integrales

Capitulo 2: Marco Teórico

El objetivo de nuestro trabajo es caracterizar las dificultades de los profesores de matemática que realizan el curso de límites, derivadas e integrales respecto a la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y límite de funciones. Es por ello, que se requiere entender la construcción del concepto de límite, a lo largo de la historia. Por otro lado, se requiere conocer los obstáculos que presentan los profesores al enseñar el concepto de límites de funciones.

2.1. Construcción del concepto de límite a lo largo de la historia

La evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en tres etapas, que se diferencian por el grado de comprensión del concepto. En esta larga evolución, se observa la necesidad de explicitar y formalizar la noción de límite que se utiliza, de forma implícita, desde la época del predominio del conocimiento griego y que no llega a la forma actual, sino que hasta el siglo XIX.

2.1.1. La antigüedad

Matemáticos Griegos, tales como Eudoxo de Cnido y Arquímedes hicieron uso informal de los conceptos de límites y convergencia, cuando utilizan el método exhaustivo o de agotamiento para calcular el área y volumen de regiones y solidos (Smith, 1958)

2.1.1.1. Arquímedes (287-212 A.C.)

Arquímedes nació en la ciudad griega de Siracusa, en la isla de Sicilia. Durante su vida, se le atribuye haber escrito 9 tratados que consisten en sus propios descubrimientos. Incluido en estos tratados está su “método” para encontrar superficies y volúmenes. Arquímedes dividió intuitivamente las figuras geométricas en figuras más pequeñas de menor grado.

Arquímedes escribió *Quadrature of the Parabola* (No hay fecha exacta). La cuadratura es el acto de encontrar el área. En este trabajo, Arquímedes calculó el área de la parte de la parábola acotada por una cuerda arbitraria AA’. (Imagen 2)

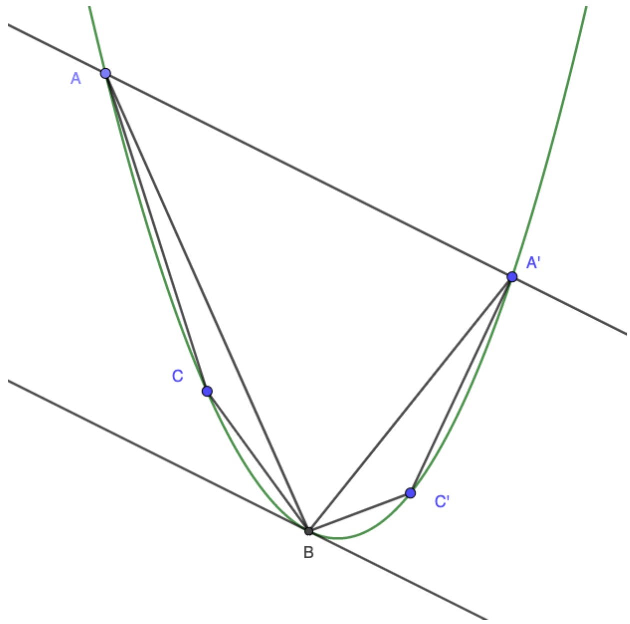


Imagen 2: Primer paso en aplicar la cuadratura de la parábola según Arquímedes

Para calcular el área, Arquímedes sistemáticamente inscribió un número creciente de triángulos, iniciando con ABA', donde B es el punto en que la tangente a la parábola es paralela a AA'. Luego, C y C' se escogen de manera tal que la recta tangente que pasen por C y C' sean paralelas a AB y A'B respectivamente. Este proceso, de escoger puntos y dibujar triángulos, se puede hacer cuantas veces se quiera sumando partes de áreas no consideradas en el cálculo anterior.

Con métodos geométricos conocidos, Arquímedes demostró que la suma de las áreas de los triángulos BCA y BC'A' es igual a 1/4 del área del triángulo ABA'. Al repetir el procedimiento encontrando los puntos D y D' como muestra la figura 7, se demuestra que la suma de las áreas de los triángulos BDC y BD'C' es igual a 1/4 del área de la suma delas áreas de los triángulos BCA y BC'A' o 1/16 del área del triángulo ABA'.

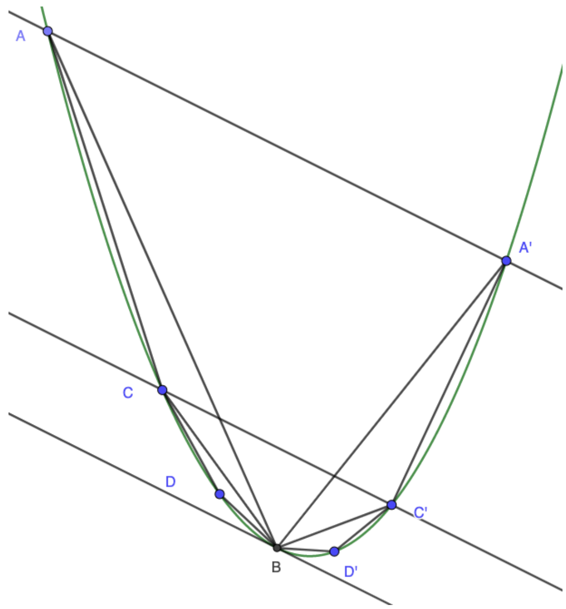


Imagen 3: Segundo paso en aplicar la cuadratura de la parábola según Arquímedes

Luego, repitiendo el procedimiento se obtienen triángulos cuya suma de área es igual a 1/64 del área del triángulo ABA', y así sucesivamente. Sumando las áreas de los respectivos triángulos obtendríamos

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)\cdot \acute{a}rea\ de\ \Delta ABA' = \frac{4}{3}\cdot \acute{a}rea\ de\ \Delta ABA'$$

Arquímedes no dio una definición formal, del concepto de limite, pero demostró que estaba sutilmente consciente del concepto. Es por ideas originales -como ésta- que Arquímedes es considerado uno de los mayores genios del Mundo Antiguo (Burton, 1985)

Establecer definiciones sobre el infinito y sobre números ilimitados eran ideas que la mayoría de los matemáticos evitaban, ya que no tenían una forma de expresar, de manera sucinta, aquello que querían definir. Esta, en definitiva, pareciera ser una de las razones por las que no se hizo ningún progreso significativo relativo al concepto de límite durante más de mil años.

2.1.2. Siglo XVII y XVIII

Este período se caracteriza -mejor- por el uso de infinitesimales o pequeñas cantidades que se consideran más pequeñas que cualquier número real distinto de cero. Los matemáticos de este período se sintieron más cómodos trabajando con el infinito, lo que permitió que se hicieran conexiones. Se realizaron avances en el mundo de las matemáticas, incluido el descubrimiento de la geometría analítica y el cálculo, pero los matemáticos todavía luchaban con el concepto de límite. El tema del cálculo se desarrolló durante este período, pero aún no hay rastro de una definición precisa del concepto de límite.

2.1.2.1. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

En 1635, Cavalieri publicó su obra más famosa, *Geometria indivisibilis continuorum nova.* Este trabajo fue una combinación de los métodos de Arquímedes y las teorías de Kepler para encontrar áreas y volúmenes. En su obra, Cavalieri describió su "Método de los indivisibles", que básicamente consistía en dividir figuras geométricas en partes más pequeñas, aunque no utilizó triángulos como lo habían hecho los matemáticos anteriores.

Gran parte del trabajo de Cavalieri estaba relacionada con geometría analítica y el cálculo, ninguno de los cuales se había desarrollado completamente en ese momento. No tenía un conocimiento formal de los límites, aunque su "Método" mostraba muchos signos de una comprensión funcional. A pesar de evitar el infinito, Cavalieri dejó una huella en el desarrollo de los límites, un tema bastante sinónimo de infinito. (Burton, 1985). En este sentido según Barrios (1995), Cavalieri propone una fundamentación rigurosa del cálculo de área y volumen de figuras mediante infinitos segmentos rectos o infinitas superficies planas que la componen, y que él llama los **indivisibles** de la figura. Sobre esta base afirma que:

> *"Dos superficies planas o dos volúmenes cualquiera (con la misma altura) guardarán entre sí la misma relación que guarden sus indivisibles".* (P. 311)

La afirmación anterior indica que si se comparan sus indivisibles se puede conocer la relación que guardan sus áreas o volúmenes.

Se compara la colección de indivisibles de figuras dependiendo si es una figura geométrica o un cuerpo geométrico (sólido).

Si es una figura plana, dada la figura plana XYZ y una recta XY, los segmentos que se generan al intersectar la figura con rectas paralelas a la dada se constituyen en los indivisibles de la figura.

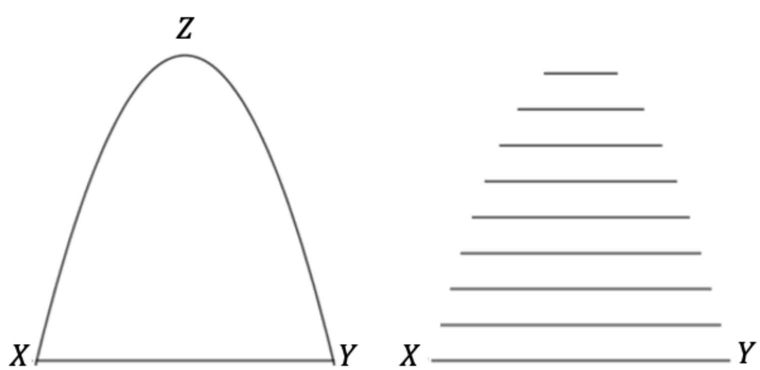


Imagen 4: Segundo paso en aplicar la cuadratura de la parábola según Arquímedes

Si es un cuerpo geométrico (sólido), Cavalieri toma como indivisibles a todas las regiones que se generan por la intersección del sólido con planos paralelos a uno dado inicialmente. Este conjunto de planos constituyen los indivisibles del sólido.

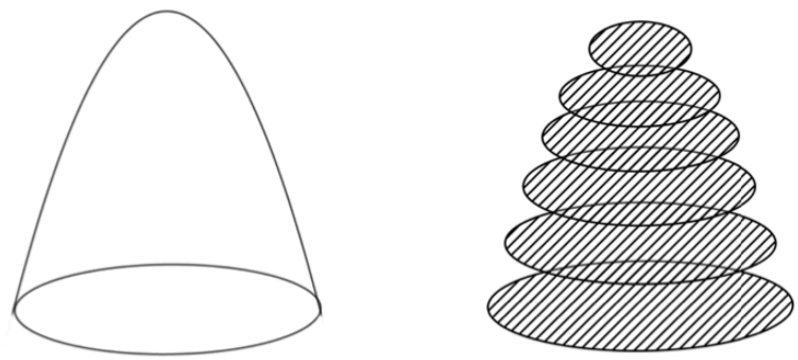


Imagen 5: Todos los planos de un sólido

Se encuentra la relación entre las colecciones indivisibles de dos figuras, haciendo una partición de cada indivisible, analizando las colecciones de los elementos de esta partición y encontrando el resultado final al unir estas colecciones. Según Edwards (2012) este método conduce al cálculo de las “suma de potencias”, que se pueden expresar en lenguaje moderno como:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\cdot b\right)^{p}\cdot\frac{b}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^{p+1}=\int_{0}^{b}x^{p}dx=\frac{b^{p+1}}{p+1}$$

2.1.2.2. Pierre de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat, un matemático francés del siglo XVII, hizo contribuciones significativas al concepto de cálculo de límites, aunque el cálculo y los límites aún no se habían definido.

Al trabajar con curvas, Fermat investigó los puntos de máximo y de mínimo y, al hacerlo, aplicó un proceso de vecindad o entorno. Hoy conocemos este método como el proceso de diferenciación. El acto de diferenciación está fuertemente vinculado con los límites, sin embargo, Fermat no tenía una definición del concepto de límite en el siglo XVII (Boyer, 1989)

Fermat utilizó un "proceso de limitación" de forma regular. Su proceso de vecindad resultaría más tarde muy aplicable al considerar una definición formal de límite, pero no durante cientos de años.

2.1.2.3. Isaac Newton (1642-1727)

Isaac Newton, es conocido como uno de los fundadores del cálculo. Newton básicamente se dio cuenta del concepto de límite, pero al calcular proporciones, dejó que cantidades muy pequeñas "desaparecieran". Simplemente descartó términos muy pequeños. Su concepto informal del proceso del límite se encuentra en una de sus publicaciones *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Newton vinculó sus "flujos y fluxiones" con problemas de series infinitas y, al hacerlo, desarrolló lo que llamó "Mi método", un método que ahora se conoce como el "Método de fluxiones". Usó series infinitas de manera similar a como se usaban los polinomios finitos. Propuso que las series infinitas tenían la misma consistencia que las cantidades finitas y que compartían las mismas leyes.

2.1.2.4. Gottfried Wilhemlm von Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm von Leibniz, fue considerado más un filósofo que un matemático. A él, junto con Newton, se le atribuye el desarrollo del cálculo.

Aunque Newton y Leibniz pelearon, sus ideas eran muy similares. Cada uno construyó su cálculo sobre las razones y productos de cantidades infinitamente pequeñas (infinitesimales); Newton llamó a tales cantidades fluxiones y Leibniz las llamó diferenciales.

Los infinitesimales de Leibniz estaban “ahí, pero no ahí”. Aunque hubo fallas en su método, también hubo muchos conceptos útiles. La belleza del método de Leibniz era que podía usarse con cualquier función; era de forma muy general. Leibniz también es bien conocido por su notación precisa. La notación simple que usó en el desarrollo de sus matemáticas en el siglo XVII es básicamente la misma notación que se usa hoy.

2.1.2.5. Leonhard Paul Euler (1707-1783)

L. Euler rechazó la noción de infinitesimal como cantidad inferior a cualquier cantidad dada y diferente de cero (Kline, 1972); pudo distinguir el diferencial de una función de su incremento, pero rara vez siguió esta distinción. Escribió, en su libro “Calculi Differentialis”:

“Cada cantidad puede reducirse hasta llegar a cero y desaparecer por completo. Pero una cantidad infinitamente pequeña es una cantidad evanescente y por tanto la cosa misma es igual a cero. Además, esto está de acuerdo con la definición de cosas infinitamente pequeñas en la que decimos que son inferiores a cualquier cantidad dada; seguramente sería cero porque, si no es igual a cero, sería posible asignarse a sí mismo una cantidad igual, y esto va en contra de la hipótesis”.

Desafortunadamente Euler no vio la posibilidad de que una cantidad evanescente pueda ser un tipo de cantidad diferente de una constante numérica. Euler era consciente de los problemas con los infinitesimales reales, pero cuando realmente hacía matemáticas, prefería un enfoque diferente

2.1.3. Siglo XIX

Este período es de refinamiento y rigor, ya que el cálculo adquirió una forma más precisa y exacta. El proceso de límite y el concepto de estar "cerca" de un número reemplazó las ideas anteriores de los infinitesimales. Muchos matemáticos contribuyeron añadiendo rigor al cálculo, pero dos matemáticos en particular lideraron a todos los demás en el desarrollo y crítica de ideas.

2.1.3.1. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Augustine-Louis Cauchy, nació en Francia, fue el matemático con más publicaciones del siglo XIX.

Una de las obras más famosas de Cauchy es *Cours d’Analyse de l’Ecole Royale Polytechniques* de 1821. Este trabajo tuvo un gran impacto en la comprensión de la continuidad, los límites, las integrales y la convergencia. A diferencia de Lagrange, Cauchy se dio cuenta de que el cálculo no podía manejarse sin el uso de algún proceso de limite. Los primeros matemáticos consideraban que los infinitesimales eran pequeños números fijos, pero Cauchy redefinió los infinitesimales como límites de variables dependientes.

“Se dice que una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal manera que converge hacia el límite cero”

Cauchy en el libro *Cours d’Analyse* contenía la definición de límite que se usaría hasta 1870 cuando se desarrolló la definición moderna épsilon-delta. Su definición es la siguiente:

“Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar por diferir de él en lo poco que se quiera, se llama a este último el límite de todos los demás”.

Cauchy reformó así el cálculo en términos de límites puntuales en lugar de infinitesimales, que había sido la base del cálculo desde la época de Newton y Leibniz. Cauchy reemplazó la necesidad de pequeñas cantidades con el concepto de “estar cerca”. Redefinió las integrales como el límite de una suma (series), en lugar de la antiderivada, y también usó límites en la diferenciación.

Además de una definición formal de límite, Cauchy abordó los temas de la continuidad y la convergencia.

Cauchy quiso agregar claridad y rigor al cálculo, y se le atribuye ser el primer matemático en hacer precisamente eso. Eliminó los infinitesimales y transformó el cálculo en un sistema de teoremas precisos de convergencia, continuidad, derivadas, integrales y límites.

Sin embargo, según Cornu (1983) aún hacía falta un pequeño componente que sería fundamental en la noción de límite. Este componente era la noción de punto de acumulación. Existía una pequeña confusión entre el concepto de límite y el punto de acumulación, lo que algunas veces las llevaba a ser indistinguibles y no ser utilizadas de manera correcta.

2.1.3.2. Karl Weierstrass (1815-1897)

Aunque Cauchy comenzó el rigor en el cálculo, el maestro y matemático alemán Karl Weierstrass continuó agregando aún más exactitud al tema. Fue extremadamente cuidadoso en su razonamiento y trabajó para eliminar la vaguedad restante en los conceptos básicos del cálculo. Weierstrass es responsable de la definición formal épsilon-delta de un límite. Con respecto a Cauchy y los términos utilizados como "se acerca indefinidamente", "aumento infinitamente pequeño" y "tan poco como uno quiera" todavía carecía de exactitud, y Weierstrass eliminó cualquier uso de términos vagos al tratar con límites y un proceso de vecindad. Weierstrass endureció la definición de límite de Cauchy, escribiendo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \;\; si\; para\; cualquier\; \varepsilon > 0, existe\; un\; \delta > 0$$

$$tal\; que\; |f(x) - L| < \varepsilon, \qquad cuando\;\; |x - c| < \delta$$

Weierstrass pasó luego a definir los límites de manera uniforme (convergencia uniforme), en lugar de puntual (convergencia puntual). Observó sucesiones de funciones que eran continuas pero que la función límite no lo era.

Weierstrass trabajó, como lo hizo Cauchy, para desarrollar un cálculo riguroso y preciso. Su trabajo relacionado a continuidad y límites agregó la claridad necesaria para que los matemáticos lleven el análisis al siguiente nivel. Weierstrass es considerado el mayor autor de análisis del mundo durante la última parte del siglo XIX. Fue el "padre del análisis moderno".

Desde los primeros pensamientos de Arquímedes sobre el infinito hasta las definiciones épsilon-delta de Weierstrass, el cálculo de límites ha evolucionado en los últimos 2500 años. Sin el desarrollo del concepto de límite, no se hubiera desarrollado el campo del análisis tal cual como lo conocemos ahora.

2.2 Dificultades en la enseñanza del concepto de límite

Por la evolución histórica, que hemos señalado, queda claro que el concepto de límite no es de fácil asimilación tanto para docentes cómo para estudiantes. Esto, naturalmente puede conllevar a que el docente se centre en los aspectos algorítmicos del cálculo de límite más que en el aspecto conceptual. Por ejemplo, en los cursos universitarios, y con cierta frecuencia, tanto los estudiantes de pedagogía en matemáticas como los de otras carreras, tienen un curso similar de cálculo con ello, es poco probable que el/la futuro/a profesor/a haya sido expuesto/a a un tratamiento riguroso y detallado del concepto de límite. Asimismo, no es claro que en los cursos de didáctica se revisen las dificultades que el futuro docente puede tener al enseñar el concepto. En relación con los futuros docentes de matemáticas, se encontró la investigación de Herrera et al. (2013) Ellos concluyeron que:

> "*la gran mayoría de los estudiantes recordaban de forma superficial los teoremas relacionados con el concepto de límite, pero no los vincularon adecuadamente con el análisis de la expresión propuesta*" (p. 8)

Refiriéndose a la expresión $Si \; \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \;\; y \;\; \lim_{x \to a} f(x) = L_2\, , entonces\; L_1 = L_2.$

La afirmación anterior indica que los futuros docentes de matemáticas recuerdan afirmaciones de teoremas, pero no son capaces de vincular, realizar análisis para una expresión dada.

Es posible que los profesores que realizan el curso de Cálculo no comprendan adecuadamente el concepto de límite o tengan concepciones erróneas sobre este concepto. Eso se señala en el estudio de Mastorides y Zachariades (2004), quienes indicaron que el conocimiento del contenido de los profesores sobre el concepto de límite era incompleto y que afectaba al conocimiento del contenido pedagógico. Por ejemplo, "la mayoría de ellos tienen dificultades para comprender enunciados multi cuantificados o no comprenden la modificación de dichos enunciados provocada por cambios en el orden de los cuantificadores” (p. 481). Según Liang (2016), es necesario investigar más si esto sucede o no en la enseñanza del cálculo a nivel escolar y universitario. Además, algunos profesores pueden entender muy bien el concepto de límite, pero ellos pueden pensar que es demasiado difícil de aprender para los estudiantes, por lo que no profundizan en este tema y simplemente lo omiten.

Los profesores toman la decisión de presentar o excluir la definición $\varepsilon - \delta$ en sus clases y algunos les dicen a sus estudiantes que memoricen esta definición (Bokhari & Yushau, 2006). Muchos profesores no le otorgan énfasis a su explicación. Esto puede ser una de las razones por las que la definición no tiene una posición unificada en el libro de cálculo básico.

Según Liang (2016), se ha puesto más énfasis en cómo calcular el límite en lugar de comprender su definición. A veces, demostrar la existencia del límite es tan importante como encontrar el límite.

> *“Los profesores de cálculo generalmente se centran en el cálculo del límite, a veces en la representación gráfica del límite, rara vez en el aspecto teórico (o la definición) del límite” (p. 38).*

Por otro lado, el tratamiento que los textos de cálculo, que dan al concepto de límite, tienen influencia en la instrucción de los profesores (Bokhari & Yushau; Cornu, 1992). Algunos textos de cálculo suelen utilizar ejemplos agradables y buenos cuando introducen nuevos conceptos (Gruenwald y Klymchuk, 2003). Esto aplica en particular al concepto de límite.

Capitulo 3: Marco Metodológico

3.1 Aspectos Metodológicos Generales

Este estudio tiene un enfoque cualitativo debido a que "se estudiaron la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema" (Vera, 2008, p.1). Además, es de carácter descriptivo, debido a que se busca recolectar información de acuerdo con el grupo de profesores participantes, para luego poder describir los hallazgos de lo investigado. La investigación descriptiva "tiene como objetivo principal la descripción de algo, generalmente las características o funciones del problema en cuestión" (Malhotra, 1997, p. 90) y "busca especificar las propiedades, características, y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier fenómeno que se someta a un análisis" (Danhke, 1986, p. 58).

3.1.1 Diseño

Se realizaron dos cuestionarios a 11 profesores delegados del Campeonato Escolar de Matemática (CMAT).

Los cuestionarios fueron:

- Cuestionario relativo a la enseñanza del concepto de límite por parte de profesores de enseñanza media.

  Este cuestionario tiene como finalidad observar y describir la forma que presenta el profesor al enseñar los contenidos de límites de funciones y límites de sucesiones. Para ello se le solicita a los profesores compartir clases que hayan realizado por medio de guías de ejercicios o teóricos, presentaciones creadas por ellos mismos.

- Cuestionario y evaluación relativa al dominio del concepto de límite por parte del docente.

  Este cuestionario está compuesto por dos partes, una primera parte tiene como finalidad conocer la **percepción** del profesor respecto al concepto de límite, esto permitirá conocer sus dificultades al enseñar el concepto de límite a sus alumnos. Por otro lado, la segunda parte tiene como finalidad saber el **conocimiento específico** que posee el profesor respecto al concepto de límite, este cuestionario permitirá visualizar las dificultades que presentan los profesores respecto al concepto de límite en todas sus representaciones.

El primer cuestionario permitirá cumplir con el Objetivo Específico 2 (OE 2), el segundo cuestionario permitirá cumplir con el Objetivo Específico (OE 1). Con ambos cuestionarios se espera lograr el objetivo general de este estudio, el cual es, caracterizar las dificultades de los docentes al enseñar conceptos de límites de funciones y sucesiones. Los dos cuestionarios se realizaron de manera online, se utilizó formularios Google para su elaboración. Esto debido a que 9 de los 11 docentes que participaron del estudio no pertenecen a la región Metropolitana. Los cuestionarios fueron compartidos a los correos de los 11 docentes que participaron de manera voluntaria en el estudio.

Al tratarse de un enfoque cualitativo, se desea estudiar la calidad de un material o instrumento. Además, como es de carácter descriptivo, se deben describir los resultados de ambos instrumentos. Luego, se debe realizar un análisis cruzado entre ambos resultados. Finalmente, se analizarán las preguntas abiertas del segundo cuestionario para analizar el dominio del docente acerca de la enseñanza del concepto de límite.

3.1.2 Muestra

La muestra consta de 11 profesores delegados (Profesores de enseñanza media con especialidad en matemática o equivalente) del Campeonato Escolar de Matemática (CMAT). El CMAT es una competencia de resolución de problemas matemáticos, de diversa índole, preparados por equipos académicos dirigidos por profesores universitarios. Está diferenciado por niveles para 7º y 8º básico y de 1º a 4º medio. Los profesores se distribuyen de la siguiente forma: 2 profesores de la región Metropolitana, 3 profesores de la región de Valparaíso, 1 profesor de la región de Los Lagos, 1 profesor de la región del Maule, 1 profesor de la región del Biobío, 1 profesor de la región de Aysén y 1 profesor de la región de Magallanes. El contacto con los profesores se realizó a través del director académico del CMAT.

En promedio, los profesores encuestados egresaron de su institución de educación el año 2002. El 81,8% de los profesores tiene título profesional de Pedagogía en Matemática, mientras que el 18,2% tiene una licenciatura en matemáticas. En promedio los profesores tienen 21 años de experiencias realizando clases a nivel de educación media y/o en educación superior. De los 11 profesores, 6 son mujeres y 5 hombres.

3.2 Elaboración de instrumentos

Se realizaron dos cuestionarios, uno respecto a la enseñanza del concepto de límite y otra respecto al dominio del concepto de límite por parte de los docente que participaron en esta investigación

3.2.1 Cuestionario relativo a la enseñanza del concepto de límite por parte de profesores de enseñanza media

El cuestionario tiene como finalidad analizar la forma como enseñan los profesores el concepto de límite de sucesiones y de funciones a nivel de secundaria en el curso electivo Límites, Derivadas e Integrales. El propósito es analizar el tipo de pregunta que realiza a los estudiantes, y al mismo tiempo cómo introduce los conceptos necesarios enseñar el concepto de límite.

Cuestionario relativo a la enseñanza del concepto de límite por parte de profesores de enseñanza media.

"Agradecemos su participación y su tiempo en contestar el siguiente cuestionario, al mismo tiempo informar que los datos serán absolutamente confidenciales, en particular, el cuestionario será visto solamente por los investigadores. Muchas gracias por su tiempo y su ayuda".

El siguiente cuestionario tiene como finalidad analizar la forma cómo enseñan los profesores el concepto de límite de sucesiones y de funciones a nivel de secundaria en el curso electivo Límites, Derivadas e Integrales. El propósito es analizar el tipo de pregunta que realiza a los estudiantes, y al mismo tiempo cómo introduce los conceptos necesarios enseñar el concepto de límite.

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. Correo *

2. Número de veces que ha impartido la asignatura límites, derivadas e integrales.

3. Institución(es) donde impartió la asignatura: *

Cuestionario

En las siguientes preguntas se solicita a usted poder adjuntar guías, PPT's o cualquier material que usted haya creado para sus alumnos en la enseñanza del concepto de límite.

4. Agradecemos compartir con nosotros un PPT o presentación o guía sobre el concepto de sucesiones y límite de sucesiones que usted haya realizado para enseñar a sus alumnos.

   Archivos enviados:

5. Agradecemos compartir con nosotros un PPT o presentación o guía sobre el concepto de funciones y límites de funciones que usted haya realizado para enseñar a sus alumnos.

   Archivos enviados:

3.2.2 Cuestionario y evaluación relativa al dominio del concepto de límite por parte del docente

El siguiente instrumento consta de 2 partes, un cuestionario y una prueba de conocimiento específico relacionado al concepto de límite. El cuestionario tiene como finalidad conocer su experiencia y percepción en la enseñanza del concepto de límite, además, investigar las dificultades que puede presentar un profesor al momento de introducir el concepto de límite a sus estudiantes.

Cuestionario y evaluación relativa al dominio del concepto de límite por parte del docente

“Agradecemos su participación y su tiempo en contestar el siguiente cuestionario, al mismo tiempo informar que los datos serán absolutamente confidenciales, en particular, el cuestionario será visto solamente por los investigadores. Muchas gracias por su tiempo y su ayuda”.

El siguiente instrumento consta de 2 partes, un cuestionario y una prueba de conocimiento específico relacionado al concepto de límite. El cuestionario tiene como finalidad conocer su experiencia y percepción en la enseñanza del concepto de límite, además, investigar las dificultades que puede presentar un profesor al momento de introducir el concepto de límite a sus estudiantes. Por otro lado, la prueba de conocimiento específico tiene como finalidad analizar qué dificultad(es) puede encontrar el profesorado respecto a la enseñanza del concepto de límite en sus diversas representaciones.

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. Correo *

____

2. Número de veces que ha realizado la asignatura Límites, Derivadas e Integrales *

____

3. Institución(es) donde ha realizado la asignatura *

____

Cuestionario

4. ¿En qué año egresó de la Universidad? *

5. ¿Qué formación universitaria posee? *

Selecciona todos los que correspondan.

- [ ] Pedagogía en Matemáticas
- [ ] Pedagogía en Matemáticas y Física
- [ ] Pedagogía en Matemáticas y Computación
- [ ] Licenciado en Matemáticas
- [ ] Otro:

6. ¿Cuántos años de experiencia tiene realizando clases en la educación media y/o en la educación superior

7. A su parecer, ¿Qué contenidos previos debe saber el alumno para comprender el concepto de límite?

8. ¿Con qué ejemplo usted iniciaría la enseñanza del concepto de límite?, ¿Por qué? *

9. Plantee una tarea o actividad que solicitaría realizar a sus alumnos para introducir el concepto de límite

10. ¿Qué estrategia utilizaría usted para definir a sus alumnos el concepto de límite? *

11. ¿Qué dificultades ha observado en sus alumnos al enseñarles el concepto de límite? *

12. ¿Qué dificultades tuvo usted cómo docente al momento de enseñar a sus alumnos el concepto de límite?

13. ¿Usted realizó algún tipo de curso de perfeccionamiento específico para la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y de límite de funciones?, si la respuesta es afirmativa, ¿Cua fue el énfasis del curso?

Por otro lado, la prueba de conocimiento específico tiene como finalidad analizar qué dificultad(es) puede encontrar el profesorado respecto a la enseñanza del concepto de límite en sus diversas representaciones.

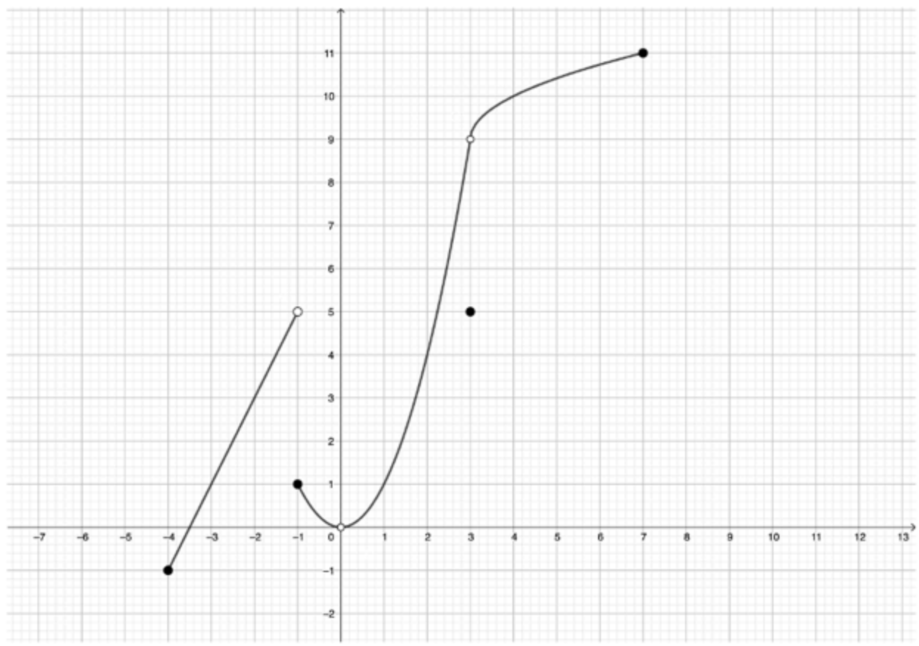
Prueba de conocimiento específico

Para la siguiente prueba, usted debe responder con su propio conocimiento. No utilizar respuestas de textos especializados, si no, aplicar lo que usted como profesor sabe. El objetivo es identificar dificultad(es) que pudiesen presentarse sobre el concepto de límite.

14. Argumente la siguiente afirmación: *

“$0,\bar{9}$ es igual, menor o mayor que 1”

Dada a continuación la siguiente función f representada gráficamente
Responder preguntas 1 al 9



15. 1) ¿Cuál es el dominio de la función f? *

16. 2) ¿Cuál es el recorrido de la función f? *

17. 3) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$$

18. 4) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$$

19. 5) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

20. 6) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

21. 7) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -4} f(x) =$$

22. 8) Argumente la siguiente afirmación *

Argumente que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$

Dada la siguiente función g representada tabularmente en valores cercanos a 2
Responder problemas 9 al 14

x	$g(x)$
1,9	-0,8
1,99	-0,98
1,999	-0,998
1,9999	-0,9998
1,99999	-0,99998
1,999999	-0,999998
2	-1
2,000001	-1,000002
2,00001	-1,00002
2,0001	-1,0002
2,001	-1,002
2,01	-1,02
2,1	-1,2

23. 9) ¿A qué número se aproxima x en la tabla anterior? *

24. 10) ¿A qué número se aproxima la imagen g(x)? *

25. 11) Describa relación entre el comportamiento de las imágenes, g(x), y el comportamiento de l variable x

26. 12) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) =$$

27. 13) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) =$$

28. 14) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -2} g(x) =$$

Dada la siguiente función h
Responder preguntas 15 a 17

$$h(x) = \begin{cases} -3x + 12, & x < -1 \\ 2^x - 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

29. 15) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) =$$

30. 16) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) =$$

31. 17) Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor de límite? *

$$\lim_{x \to -1} h(x) =$$

32. ¿Una función f puede tener dos límites distintos a medida que se tiende a un cierto valor c? *

33. Argumente la siguiente afirmación: *

Un estudiante de pedagogía señalo lo siguiente: *Si me piden que calcule* $\lim_{x\to 7} \frac{x^2-2x-35}{x-7}$*, respondo que el límite finito no existe, o resulta infinito, puesto que* $\lim_{x\to 7} x - 7 = 0$*, y menciono el teorema sobre el límite de un cociente donde el denominador tiende a cero como justificación.* Haga un análisis de la respuesta del estudiante y señale si está de acuerdo con lo que afirma. En caso de que no esté de acuerdo, explique por qué.

3.3 Procesamiento de la información

El análisis de los resultados con los dos instrumentos anteriores se realizó siguiendo la estructura que se observa en la imagen 4. Se realizó un análisis descriptivo de los dos instrumentos utilizados, luego se cruzó la información obtenida entre los dos instrumentos.

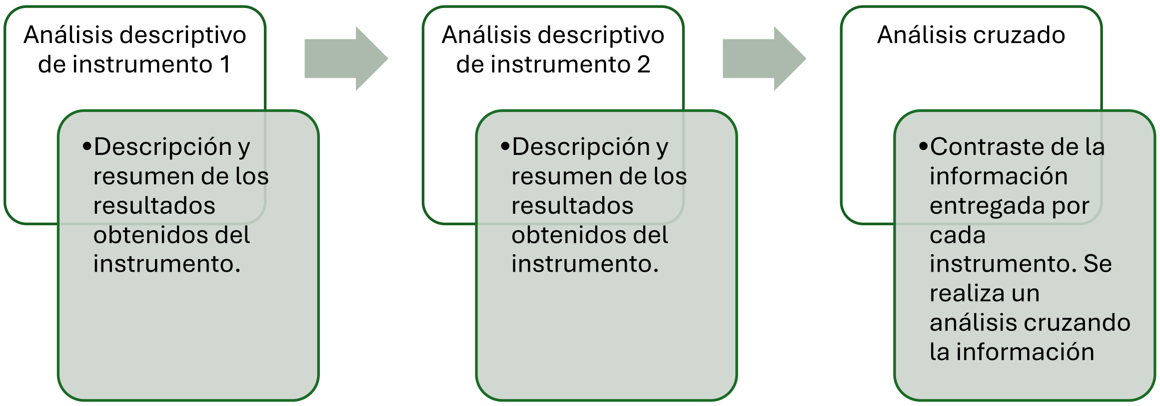


Imagen 6: Proceso de análisis de resultados

Capitulo 4: Resultados y Análisis

A continuación se identificarán las dificultades que presentan los docentes respecto a la enseñanza del concepto de límite de funciones y límite de sucesiones. Además, se describirán las formas de preguntar de las guías, presentaciones para enseñar el concepto de límite de funciones y límite de sucesiones compartidas por los docentes.

4.1 Análisis al cuestionario y evaluación relativa al dominio del concepto de límite por parte del docente

De los 11 profesores que participaron en este estudio, los 11 profesores respondieron este instrumento. En este cuestionario se le solicitó a los profesores responder un cuestionario y una prueba de conocimiento específico relacionado al concepto de límite. El cuestionario tiene como finalidad conocer su experiencia y percepción en la enseñanza del concepto de límite, además, investigar las dificultades que puede presentar un profesor al momento de introducir el concepto de límite a sus estudiantes. Por otro lado, la prueba de conocimiento específico tiene como finalidad analizar qué dificultad(es)puede encontrar el profesorado respecto a la enseñanza del concepto de límite en sus diversas representaciones.

4.1.1 Análisis al cuestionario relativo al dominio del concepto de límite por parte del docente

A continuación, se indicará las respuestas de los diferentes profesores a cada una de las preguntas del cuestionario.

- ¿Qué **contenidos previos** debe saber el alumno para comprender el concepto de límite?

El 81,8% de los profesores indica que el concepto de función debería enseñarse primero para la mejor comprensión del concepto de límite, mientras que el 18,1% de los profesores indica, además, que el concepto de sucesión debe ser un concepto previo.

- ¿Con qué **ejemplo** usted iniciaría la enseñanza del concepto de límite?, ¿Por qué?

El 54,5% de los profesores indica que la mejor forma de iniciar el concepto de límite es con un **análisis gráfico de una función**. Mientras que, el 36,3% indica que se debe iniciar con el concepto de **sucesión**. Sólo el 9% de los profesores habla sobre los **límites laterales**, analizar el comportamiento de una función por la izquierda y la derecha (límites laterales).

- Plantee una **tarea o actividad** que solicitaría realizar a sus alumnos para introducir el concepto de límite

El 36,3% de los profesores indica que una actividad para introducir el concepto de límite sería **valorizando, graficando, indicando una tabla de valores** de una función para valores cercanos al punto en conflicto. Mientras que, el 36,3% de los profesores afirma que una actividad con **calculadoras gráficas** es la mejor forma de introducir el concepto de límite de funciones. Por último, el 27,3% de los profesores indica que para introducir el concepto de límite de funciones es con **sucesiones**.

- ¿Qué **estrategia** utilizaría usted para definir a sus alumnos el concepto de límite?

El 31,8% de los profesores tiene como preferencia utilizar **Geogebra** para definir el concepto de límite de funciones. De igual forma, un 31,8% de los profesores utiliza el **concepto de sucesión** para introducir el concepto de límite. Mientras que el 36,3% utiliza una estrategia con el **concepto de función**, analizando gráficamente el comportamiento al infinito positivo, negativo o punto de acumulación.

- ¿Qué **dificultades** tuvo usted cómo docente al momento de enseñar a sus alumnos el concepto de límite?

El 18,1% de los profesores indican que al enseñar la definición no existe una claridad y que **no entienden la relación entre** $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$. De igual forma, un 18,1% indica que los alumnos no **relacionan el concepto de límite con el mundo real,** no encuentran una conexión o aplicación en la vida diaria, no hay una contextualización, sólo fórmulas. De igual forma, un 18,1% de los profesores indican que los alumnos no entienden **la diferencia entre tender a o aproximar a** y su relación con el concepto de límite.

Por otro lado, un 45,5% indica acerca del **poco dominio** que tienen los alumnos sobre el eje de **álgebra y funciones**. Muchos alumnos siguen avanzando de curso con vacíos que se van generando año a año en el eje de álgebra y funciones de los años anteriores.

- ¿Usted realizó algún tipo de **perfeccionamiento** específico para la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y de límite de funciones?

El **81,8% de los profesores no realizó un curso de perfeccionamiento**, utilizó sus conocimientos obtenidos durante su formación universitaria. Mientras que, un 18,1% realizó un curso de perfeccionamiento acerca del curso Límite, derivada e integrales.

Esto demuestra que los profesores que imparten la asignatura de límites, derivadas e integrales han enseñado los conceptos que implica la asignatura con estudios propios.

4.1.2 Análisis de preguntas de conocimiento específico relacionado al concepto de límite

A continuación se entregarán y analizarán los resultados del cuestionario de conocimiento específico relacionado al concepto de límite de funciones.

- Argumente la siguiente afirmación:

“$0,\overline{9}$ es igual, menor o mayor que 1”

El 81,8% de los profesores afirma que es igual a 1 por medio de argumentos relacionados a sucesiones, tender a, incluso con argumentos de series. Mientras que el 18,1% afirma que es menor sin ningún argumento indicado.

A continuación, se presenta la siguiente respuesta de un profesor:

el número periodico mencionado no alcanza el siguiente valor entero (1), graficamente 0,9 periodico roza la vencidad de 1 pero no lo alcanza. En consecuencia 0.9 periodico es menor que 1. Sin embargo, para efectos de límite, el numero 0,9 periodico se acerca infinitamente a 1, por lo tanto es igual a 1.

Suponemos que el profesor quiere decir, en la última parte, que, si aplicamos límites, es igual a 1. Entretanto, se confunde al afirmar que 0.9 periódico es menor que 1.

El profesor indica el siguiente argumento respecto a “rozar la vecindad de 1, pero no lo alcanza” analizando gráficamente, se puede entender que si se aplica límites se llega a la igualdad de 1.

Por otro lado, la respuesta de otro profesor es la siguiente:

Menor. en el inifinito sigue siendo 0,99999999....99999 , en el limite es 1

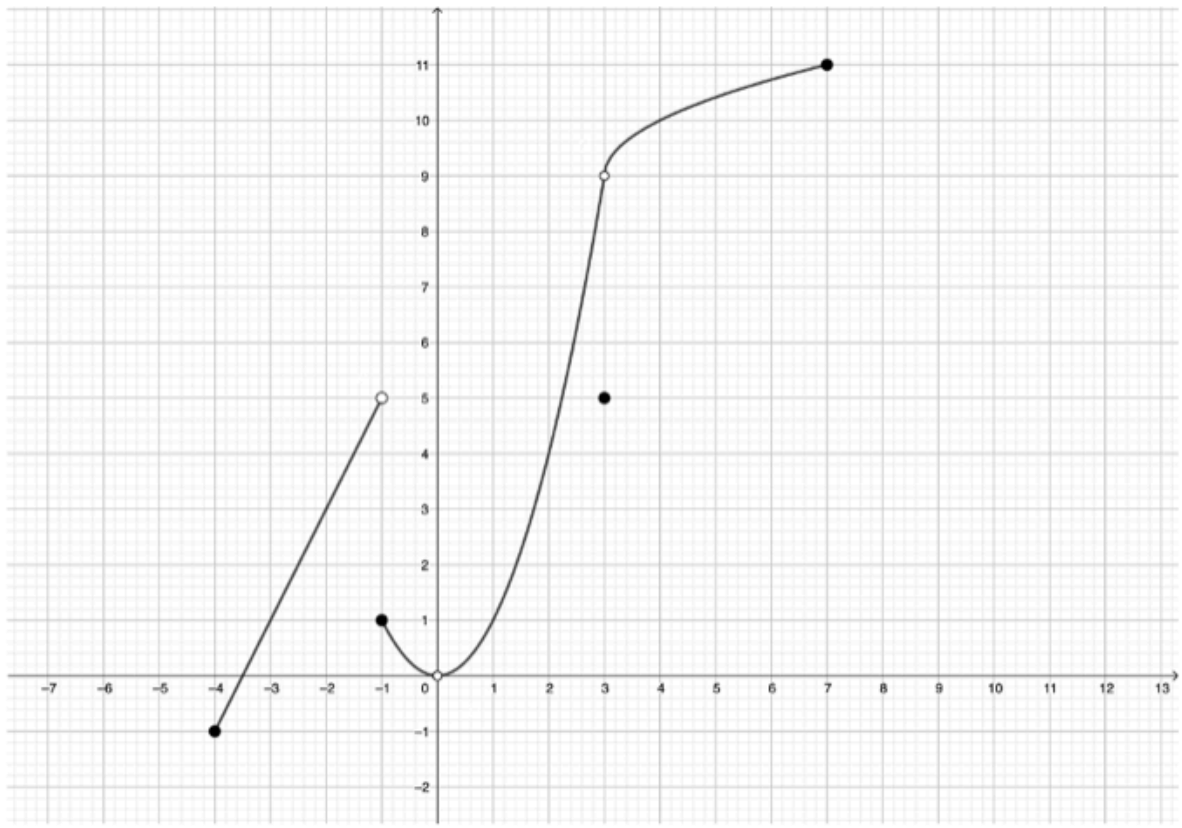
El profesor entiende que $0,\overline{9} \neq 1$, ve ambos números como distintos, incluso comparándolos, sólo si se aplica límite, ambos son iguales.

Ambas afirmaciones son incorrectas, pues $0,\overline{9} = 1$. Se presenta a continuación una demostración de la igualdad, que es clásica y básica y que suponemos que se hace en cualquier programa de formación de profesores.

$$0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9}{10} - \frac{9}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Dada la siguiente función



- ¿Cuál es el dominio de la función?

El 63,6% de los profesores afirma correctamente que el dominio de la función es

$dom(f) = [-4,0[\cup]0,7]$. Por otro lado, un 18,1% indica que el dominio de la función es $[-4,7]$. Por último, el 18,1% de los profesores afirma que el dominio de la función es $[-3,-1[\cup]-1,0[\cup]0,3[\cup]3,7]$

Los resultados anteriores demuestran que hay una dificultad para encontrar dominio de funciones definidas a trazos observando la función de manera gráfica.

- ¿Cuál es el recorrido de la función?

El 45,5% de los profesores afirma correctamente que el recorrido de la función es

$rec(f) = [-1,9[\cup]9,11]$. Por otro lado, un 36,3% indica que el recorrido de la función es $[-1,11]$. Por último, el 18,1% de los profesores afirma que el recorrido de la función es $[-1,0[\cup]0,11[$

Los resultados anteriores demuestran que hay dificultad para encontrar recorrido de funciones definidas a trazos observando la función de manera gráfica.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$$

El 81,8% de los profesores afirma que el límite existe y es igual a 1. Por otro lado, el 18,1% de los profesores afirma por alguna razón que el límite es igual a -1.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$$

El 81,8% de los profesores afirma que el límite existe y es igual a 5. Por otro lado, el 18,1% de los profesores afirma que el límite no existe, el profesor no entiende la diferencia entre límites y límites laterales.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

Todos los profesores contestan correctamente que el límite no existe, debido a que los límites laterales no coinciden.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

Todos los profesores contestan correctamente que el límite es igual a 4.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -4} f(x) =$$

El 81,8% de los profesores afirma correctamente que límite es igual a -1. Por otro lado, el 18,1% de los profesores afirma que el límite no existe, porque no existe el límite lateral por la izquierda cuando x tiende a -4 por la izquierda.

Se observa una dificultad cuando se solicita a los profesores encontrar el límite de una función en uno de los extremos de su dominio, los profesores tienen en mente el teorema de la existencia de un límite si y solo si sus límites laterales son iguales. Pero en este caso, la función está definida por la derecha y no por la izquierda, por el cual, este teorema no se puede aplicar.

- Argumente la siguiente afirmación:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

Nueve profesores afirman que el límite existe y es igual a 9, también indican que la función es discontinua en $x = 3$. Por otro lado, 2 profesores indican que la afirmación es falsa, uno de ellos indica que es igual a 5 según la gráfica y otro profesor indica que:

> *"La afirmación es falsa, ya que cuando x tiende a 3, su resultado tiende a 9, pero no es equivalente a 9"*

Se puede interpretar que el profesor tiene en mente que la función no está definida en $x = 3$, y por tanto $3 \notin dom(f)$. Pero, aun así, el límite existe.

Las siguientes preguntas se relacionan respecto a valores de la función g para valores cercanos a 2.

x	$g(x)$
1,9	-0,8
1,99	-0,98
1,999	-0,998
1,9999	-0,9998
1,99999	-0,99998
1,999999	-0,999998
2	-1
2,000001	-1,000002
2,00001	-1,00002
2,0001	-1,0002
2,001	-1,002
2,01	-1,02
2,1	-1,2

- ¿A qué número se aproxima x en la tabla anterior?

El 90,9% de los profesores contesta correctamente que x se aproxima a 2.

Mientras que el 9% afirma que se aproxima a -1. Esto muestra un error conceptual. El profesor, confunde x con la imagen de x respecto a la función g

- ¿A qué número se aproxima la imagen $g(x)$?

Todos los profesores contestan correctamente que $g(x)$ se aproxima a -1.

- Describir la relación entre el comportamiento de las imágenes, $g(x)$, y el comportamiento de la variable x

El 90,9% de los profesores afirma que $\lim_{x \to 2} g(x) = -1$ por medio de argumentos de límites laterales acercándose por la izquierda y derecha. Mientras que el 9% solo indica que la función es $g(x) = -2x + 3$ sin otro argumento.

Dada la función h

$$h(x) = \begin{cases} -3x + 12, & x < -1 \\ 2^x - 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) =$$

10 de 11 profesores afirma que el límite lateral por la derecha es igual -1/2, mientras que 1 profesor afirma que el límite es igual 1 sin argumentos.

El siguiente profesor indica la siguiente respuesta:

Seria -1/2 porque se evalua con la funcion exponencial

Suponemos que el profesor entiende que como la función $f_1(x) = 2^x - 1$ es continua en el dominio $[-1, \infty[$, entonces $\lim_{x \to -1^+} f_1(x) = f_1(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Otro profesor indica lo siguiente:

El límite si existe ya que la función 2^x-1 es continua y el límite es -1/2

Al igual que el profesor anterior, el profesor entiende que, al ser una función continua, se puede evaluar para encontrar el límite.

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) =$$

Nueve de 11 profesores afirman que el límite lateral por la izquierda es igual a 15, mientras que 2 profesores afirman que el límite lateral por la izquierda es igual a 9 sin argumentos.

A continuación, se presentan argumentos que indican los profesores:

El límite si existe ya que la función -3x+12 es continua y el límite es 15

si existe, se evalúa y la respuesta es 15

Seria 15, pues evaluo con la funcion afin en x=-1

Al igual que el caso anterior, los profesores, asumen que, al ser continua, se puede evaluar y encontrar el límite. Pero se debe cumplir lo siguiente: Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Si a es un punto de acumulación de A, f es en continua en a si y solo si existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

- Argumentar si el siguiente límite existe o no. Si existe, ¿Cuál es el valor del límite?

$$\lim_{x \to -1} h(x) =$$

Todos los profesores confirman correctamente que el límite no existe.

- ¿Una función f puede tener dos límites distintos a medida que se tiende a un cierto valor c?

Siete profesores afirman que no, lo que implica que la existencia de un límite es única. Mientras que 4 profesores afirman que sí, con argumentos tales como la discontinuidad de funciones en $x = c$.

Las siguientes respuestas de profesores son las siguientes

Si, como la anterior, pero es una función discontinua para x = c

Si, una función discontinua-

Suponemos que el profesor entendió acerca de límites laterales, en cual, pueden tener límites distintos por la izquierda y por la derecha, así concluir que el límite no existe.

Lo correcto es si $\lim_{x \to c} f(x) = a$; $\lim_{x \to c} f(x) = b$, entonces $a = b$

- Argumente la siguiente afirmación:

Un estudiante de pedagogía señalo lo siguiente: *Si me piden que calcule $\lim_{x \to 7} \frac{x^2-2x-35}{x-7}$, respondo que el límite finito no existe, o resulta infinito, puesto que $\lim_{x \to 7} x - 7 = 0$, y menciono el teorema sobre el límite de un cociente donde el denominador tiende a cero como justificación.* Haga un análisis de la respuesta del estudiante y señale si está de acuerdo con lo que afirma. En caso de que no esté de acuerdo, explique por qué.

Todos los profesores afirman que el alumno tuvo un análisis incorrecto y que el límite correcto es 12. Los argumentos varían, tales como: Uso de factorización, arreglos algebraicos cuando es de la forma $0/0$.

Respecto a uno de los comentarios de los profesores a continuación:

No estoy de acuerdo ya que la idea es que puedan determinar una función equivalente dónde la función se pudiera evaluar

El profesor debe pensar que la función $g(x) = \frac{x^2-2x-35}{x-7}$ se puede reescribir de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 12\ , & si\ x = 7 \\ x+5\ , & si\ x \neq 7 \end{cases}$$

Es de notar que las funciones f y g son distintas, la función g no está definido en $x = 7$. En cambio, la función f está definida para todos los números reales.

Se observa que los docentes creen que pueden redefinir una función, al redefinirla, los docentes creen que son la misma función, son equivalentes, pero sabe que son distintas, debido a que tienen diferente dominio.

4.2 Resultados del cuestionario relativo a la enseñanza del concepto de límite por parte de profesores de enseñanza media.

De los 11 profesores que participaron en este estudio, solo 5 profesores respondieron este instrumento. En este cuestionario se le solicitó a los profesores entregar una guía o presentación que hubieran realizado para la enseñanza del concepto de sucesión. También, se le solicitó una guía o presentación que hubieran realizado sobre la enseñanza del concepto de límite de funciones.

A seguir, analizaremos las guías entregadas por los profesores respecto a la enseñanza de los conceptos de sucesión y límite de funciones.

4.2.1 Análisis de guías respecto a la enseñanza del concepto de sucesión

Se analizarán 5 guías que fueron compartidas por los diferentes profesores respecto a la enseñanza del concepto de límite de sucesiones.

<u>Profesor 1 realizó la siguiente guía</u>

LICEO SAN FELIPE BENICIO

DPTO DE MATEMTICA GUIA CALCULO DE LIMITES

NOMBRE:……………………………………………………………… CURSO:………..

OBJETIVO: Calcular el límite de una sucesión polinomial y con e
CONTENIDO: Sucesiones polinómicas y sucesiones con limite e
Actividad: Calcula los siguientes limites

TEREMA (1): $Si\ \ n \in \mathbb{R} \ \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

TEOREMA (2): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \qquad cuando\ se\ llega\ \ a\ \ 1^{\infty}$

Calcula el valor de los siguientes limites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2-4n+10}{2n^2+5n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^5+n^2-4n+10}{7n^2+5n+8}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^5-8n^4-4n+5}{12n^5-13n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-4n+10}{3n^5+5n+8}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n-4}\right)^{15n-12}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{0{,}2n-8}\right)^{8-0{,}2n}$

Se declara que la guía tiene como objetivo calcular límites de una sucesión polinomial y usando el número e. Se inicia la guía indicando los siguientes teoremas:

TEREMA (1): $Si\ \ n \in \mathbb{R} \ \ \Longrightarrow \ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

TEOREMA (2): $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad cuando\ se\ llega\ \ a\ \ 1^{\infty}$

Una vez presentados los teoremas, se les solicita a los estudiantes realizar cálculo de límites de sucesiones aplicando los teoremas enunciados. Se observa, en la imagen anterior, que **la presentación del teorema es informal**, la forma adecuada debería ser la siguiente:

Dada la sucesión $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *entonces se cumple que:* $\underset{n\to\infty}{lim}\ a_n = 0$

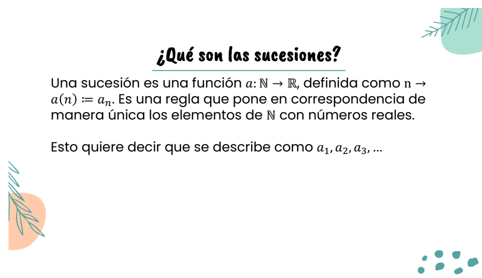
Por otro lado, el símbolo ∞ no es un número real y, por lo tanto, **la expresión 1^{∞} carece de sentido y no está definida** (a menos que se haya asumido cierta convención que no sería la norma). La expresión mencionada anteriormente está asociado a ciertos límites y aparece al realizar un cálculo directo, en este caso, “evaluar” $n = \infty$ en teorema 2.

Interpretamos que lo que quiere decir, el profesor, es que como: $\lim\limits_{n \to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, entonces el límite $\lim\limits_{n \to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ es como si fuera 1^{∞}, cosa que no es correcta pues $1^n = 1, \forall\, n \ \in \mathbb{N}$.

Lo anterior, debido a que lo que tiende al límite es solamente el exponente, y la base es constante e igual a 1, porque si la base fuese un número real mayor que 1, el límite no converge. Utilizando lenguaje algebraico, podemos enunciar, lo que se pretende decir con la expresión 1^{∞} es lo siguiente:

Sean a_n, b_n dos sucesiones, $Si\ a_n = 1 \ \wedge \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \ \ entonces \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1$

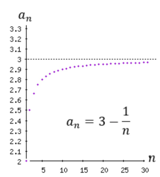
Profesor 2 entregó el siguiente material:

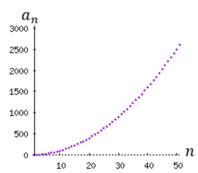


1	a_1
2	a_2
3	a_3
4	a_4
...	$a_{...}$
n	a_n: Término general

Lo que se hace es una correspondencia entre los números naturales y los reales correspondientes

Fíjate que no termina jamás, entonces ¿Dónde para?





GeoGebra

Inténtalo

¿Cómo se define una sucesión?

Sea $a_n = \frac{1}{n}$

Esta es una de las sucesiones más famosas, y ya sabremos por qué

1. De partida, tenemos que poner el "sea" porque ahí estamos a punto de definir algo.
2. Luego, la sucesión a_n se entiende que tendrá valores desde $n = 1$ y tendrá infinitos términos .
3. Es importante que al definir la sucesión con "n" implicará la correspondencia entre el número natural y su real.
4. Hay algunas sucesiones que no tendrán ese "n" y ya veremos cómo resolverla

Pero, ¿cómo se resuelven?

n	$a_n = \frac{1}{n}$
1	$a_1 = \frac{1}{1} = 1$
2	$a_2 = \frac{1}{2}$
3	$a_3 = \frac{1}{3}$
25	$a_{25} = \frac{1}{25}$
100	$a_{100} = \frac{1}{100}$

¿Cuáles son los 5 primeros términos de la siguiente sucesión?

Sea $(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$

1	
2	
3	
4	
5	

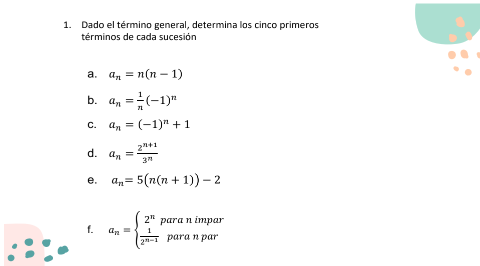
Ejemplos de sucesiones

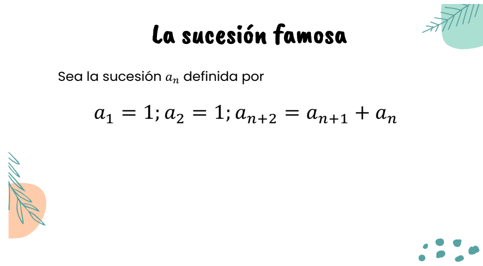
$$a_n = \{2,4,6,8,10,12,\dots\} = 2n$$

$$b_n = \{5,8,11,14,17,\dots\} = 3n + 2$$

$$c_n = \{1,3,5,7,9,11,\dots\} = 2n - 1$$

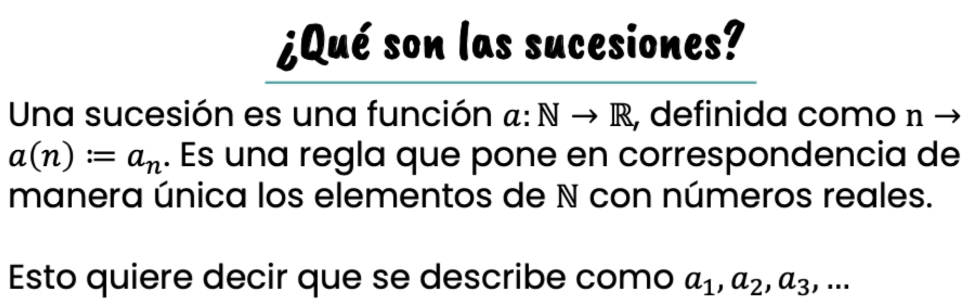
$$d_n = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right\} = \frac{1}{n^2}$$





Se declara que la guía tiene como objetivo definir el concepto de sucesión numérica por medio de términos generales. Se define lo que es una sucesión como una función, *una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos del conjunto de los números naturales con números reales*. También, indica las diferentes representaciones que puede tener una sucesión. Finalmente, indica como encontrar los primeros elementos de una sucesión.

Analizaremos la definición que entrega el profesor 2 respecto a lo que es una sucesión.



Observamos que la afirmación: "Es una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos del conjunto de los números naturales con el conjunto de números reales"; **no es correcta**. Debería decir *que asocia a cada número natural un número real.*

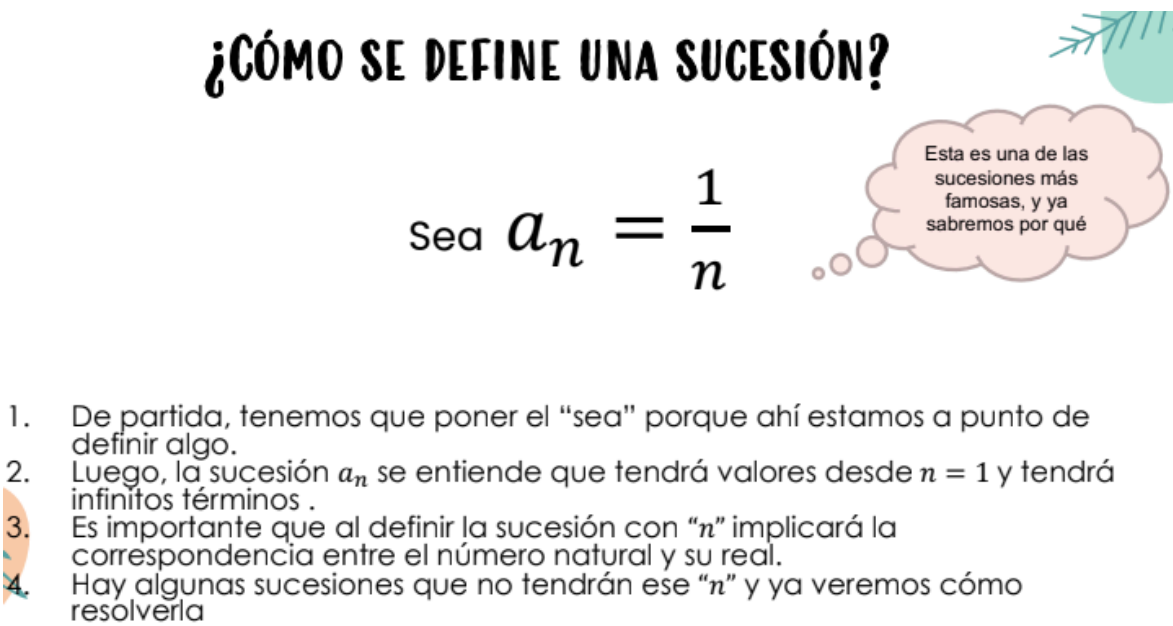
Se propone las siguientes definiciones:

Definición 1: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío de los números reales. Una sucesión de elementos de A es el recorrido de una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y cuyo recorrido o imagen está contenida en A. En particular, una sucesión de números reales es una función del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 2: Una sucesión de elementos de A es una relación entre los números naturales y el conjunto A cualquiera, no vacío, con la siguiente condición: A cada natural le corresponde un único elemento del conjunto A. Si a esta relación la llamamos S, puede expresarse como $S: \mathbb{N} \to A$, y sus elementos son: $S(1) = a_1$, S(2) $= a_2$, $S(3) = a_3$ y, en general $S(n) = a_n$, donde $a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n$ son elementos del conjunto A.

Notamos además que, al colocar ejemplo de sucesiones, usa, por ejemplo, las expresiones: $a_n = \{ 2,4,6,8,10,12, \ldots . \} = 2n$; que son **una forma errónea de expresar la sucesión definida** como $a_n = 2n$. Entendemos que quiere expresar lo siguiente: $\{ a_n = 2n; n \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6,8,10,12, \ldots . .\}$.

En la siguiente imagen, el profesor intenta definir qué es una sucesión



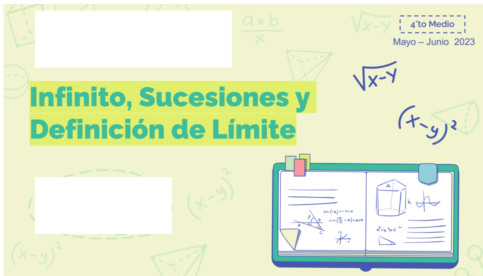
En el punto 2, el profesor indica que una sucesión siempre tendrá valores desde $n = 1$ y tendrá infinitos términos. **Esta afirmación no siempre es correcta**. Existen sucesiones que son finitas y se puede construir sucesiones que no necesariamente inicien desde $n = 1$.

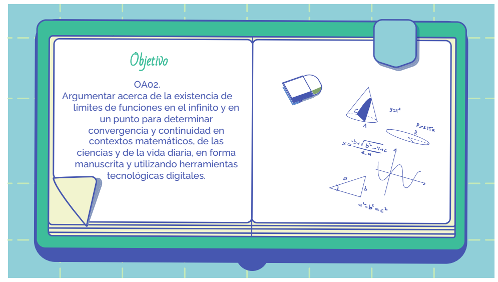
A veces las sucesiones pueden comenzar desde $n = 0$, por lo que el primer término es a_0. Entonces, el segundo término sería a_1 o incluso la sucesión puede comenzar con un índice mayor que 1. Por ejemplo:

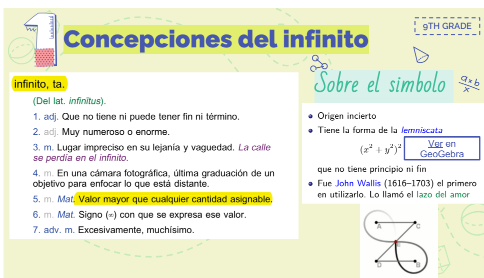
$$\{a_n\}_3^{\infty} = \{a_n = \frac{4}{(n-1) \cdot (n-2)}, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3\}$$

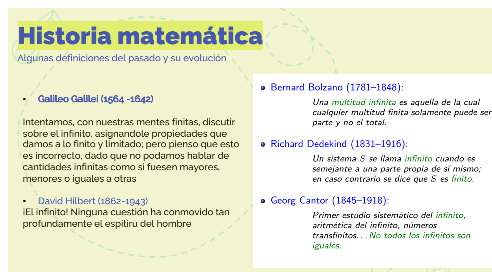
En el punto 3, el profesor indica que hay una correspondencia entre el número natural y su real, como se indicó anteriormente, las dos definiciones propuestas indican que la correspondencia debe ser de los naturales a un subconjunto no vacío de los reales. En el punto 4 el profesor intenta introducir un tipo especial de sucesiones, estás son, las sucesiones definidas por recurrencia, en el cual menciona la sucesión de Fibonacci en las siguientes páginas.

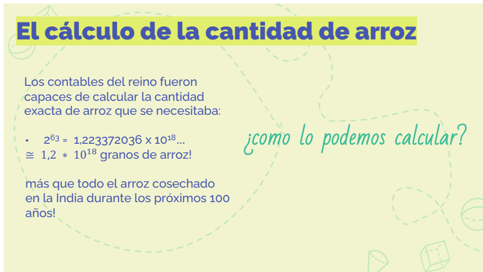
Profesor 3 entregó el siguiente material:

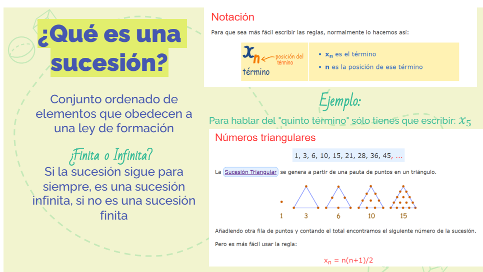


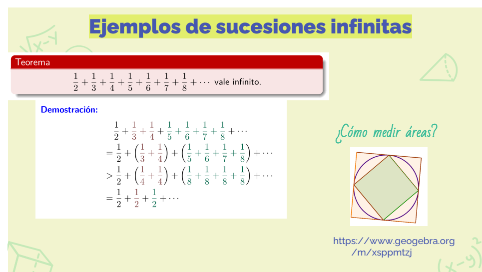


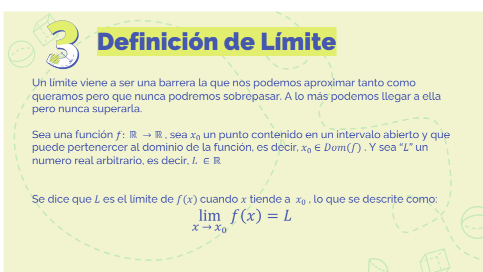


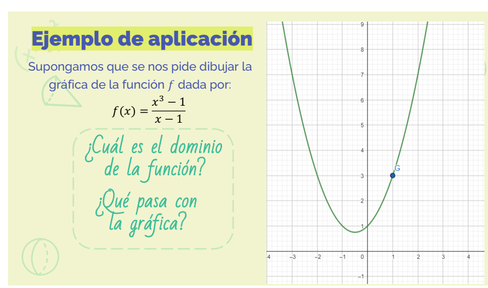












A partir de la lámina 11, deja de ver el concepto de sucesión para pasar al concepto de límite de una función en un punto. En esta sección estamos interesados en el material hasta la lámina 10. Es por ello, que se analizarán las primeras 10 páginas del material entregado por el docente.

En la tercera lámina, de este material, se entregan las diferentes acepciones del vocablo *infinito* y se entrega, en la lámina 9 la siguiente **idea coloquial sobre lo que es una sucesión**: "*Conjunto ordenado de elementos que obedecen a una ley de formación*".

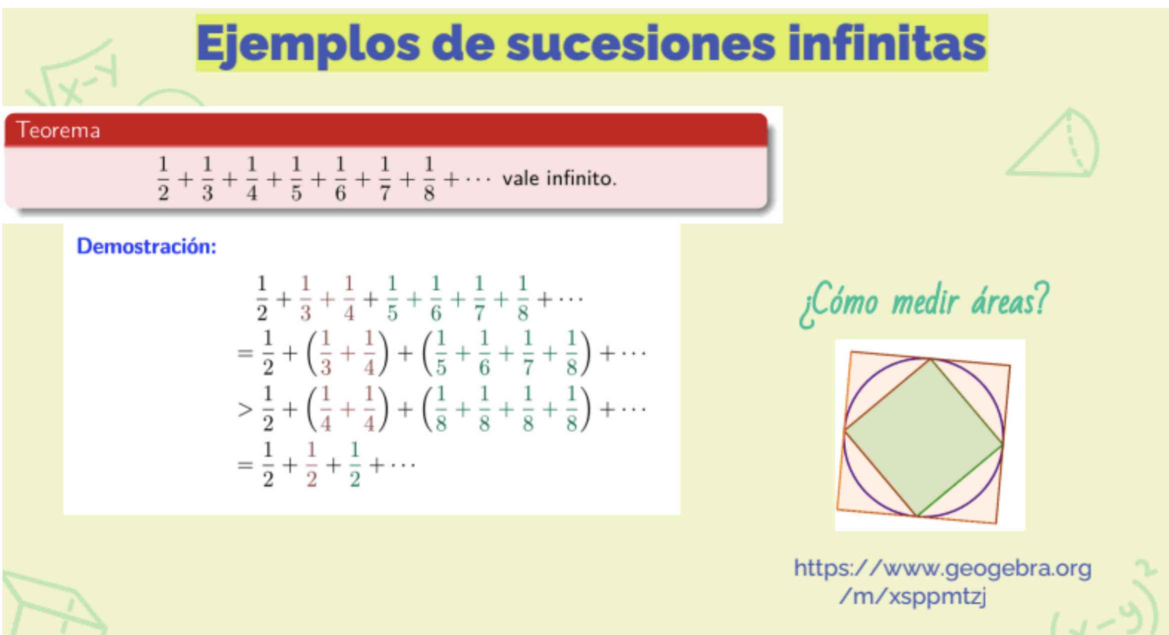
Esta idea no es correcta, por ejemplo, basta considerar la sucesión: $\{\, a_n = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}\,\}$, y tenemos una sucesión correctamente definida que no es un *conjunto ordenado*.

Respecto de la segunda parte de la lámina 9, donde se quiere diferenciar entre sucesiones finitas e infinitas se expresa, de manera coloquial que: "*la sucesión es infinita si sigue para siempre, sino es una sucesión finita".* Entendemos que quiere referirse a la idea de que una sucesión tiene una cantidad infinita de términos distintos y que se puede expresar de la siguiente forma:

> *La sucesión $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ se dirá infinita si cumple que para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que existe un índice $p(N) \in \mathbb{N}$ tal que el elemento de la sucesión $a_{p(N)}$ no pertenece al conjunto* $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \dots a_{N-1}, a_N\}$.

También, se puede dar el concepto de sucesión finita diciendo: *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que* $a_p \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \dots a_{N-1}, a_N\}$.

Asimismo, y cómo ejemplo de *sucesiones infinitas se presenta la siguiente lámina:*



Se observa, en la imagen anterior, que **la presentación del teorema no es correcta**. La afirmación *ejemplo de sucesión infinita* lo que realmente quiere decir ejemplo de una sucesión que diverge hacia infinito. Luego, se afirma que una suma de fracciones *vale infinito* cuando lo que se debería expresar es que la sucesión

$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 3$ diverge a infinito.

Una forma menos precisa de enunciar el resultado puede ser:

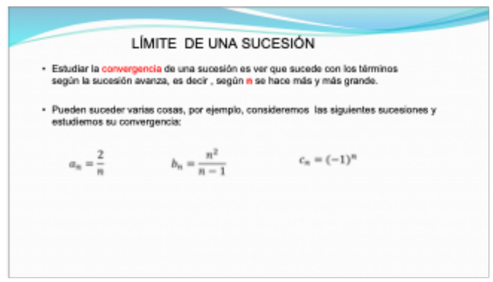
La sucesión $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 3$ no converge a ningún número real.

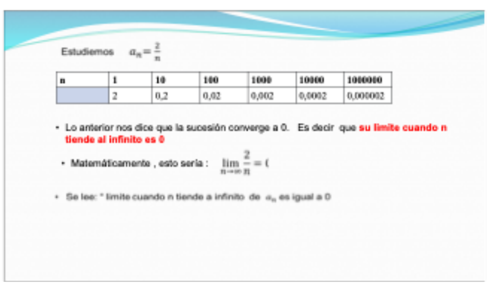
Una forma precisa de enunciar el resultado sería: Dado cualquier número positivo $K \in \mathbb{R}$ existe un índice $n(K) \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} > K, \forall\, n \geq n(K)$

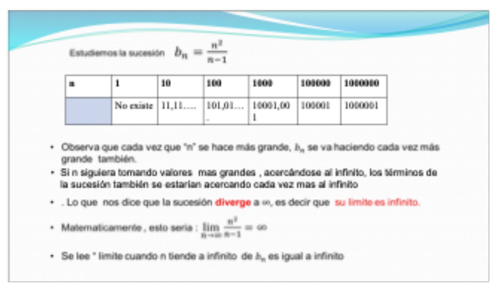
Observamos, respecto de la lámina 7, que se cuenta la cantidad de los granos de arroz que lo que se quiere señalar es que la cantidad de granos de arroz que se quiere señalar es: $1+2+2^2+\ 2^4+\ \cdots+\ 2^{63} =\ 2^{64}-1$.

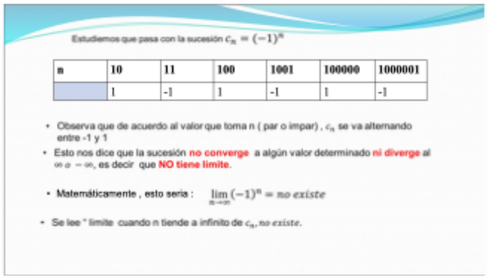
Otra observación es que parte de este material es copia textual del material de *A vueltas con el infinito* de Miguel Martín de la Universidad de Granada. En el que el cálculo de la cantidad de granos de arroz está correcto.

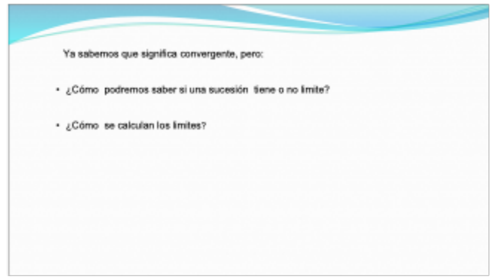
<u>Profesor 4 presenta el siguiente material</u>:

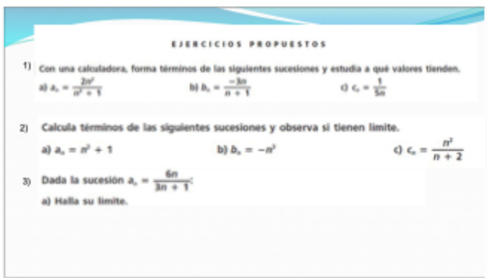












El material entrega ideas intuitivas respecto de lo que quiere decir con:

- Una sucesión tiene un límite;
- Una sucesión crece hacia infinito o diverge hacia infinito o
- Que una sucesión no converge.

Explica la diferencia entre que una sucesión diverja hacia infinito y que no converge.

Luego, se solicita a los estudiantes que encuentren a qué valores tienden las 3 sucesiones propuestas construyendo tabla de valores.

Analizaremos el siguiente ejemplo propuesto por el profesor 4, Estudiemos la sucesión $b_n = \frac{n^2}{n-1}$

n	1	10	100	1000	100000	1000000
	No existe	11,11….	101,01….	10001,001	100001	1000001

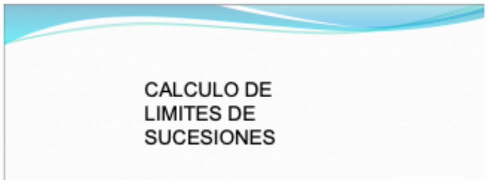
- Observa que cada vez que "n" se hace más grande, b_n se va haciendo cada vez más grande también.
- Si n siguiera tomando valores mas grandes , acercándose al infinito, los términos de la sucesión también se estarían acercando cada vez mas al infinito
- . Lo que nos dice que la sucesión **diverge** a ∞, es decir que su limite es infinito.
- Matematicamente , esto seria : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n-1} = \infty$
- Se lee " limite cuando n tiende a infinito de b_n es igual a infinito

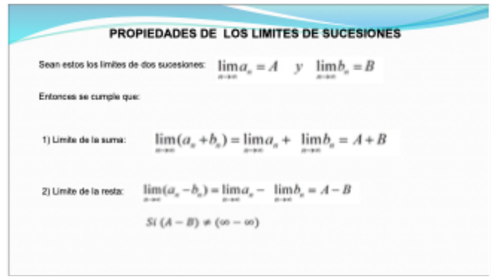
Se entiende que una sucesión b_n es convergente cuando tiene limite finito. El límite L de una sucesión es el número al que la sucesión se aproxima cada vez más.

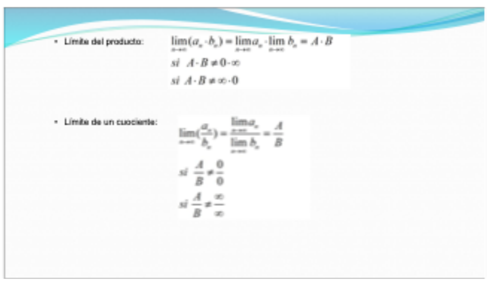
Se dice que la sucesión b_n converge a su límite L y se expresa por $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

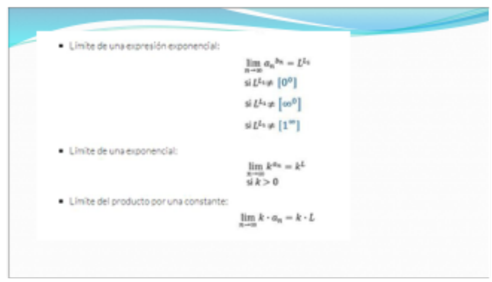
Una sucesión es no convergente cuando no tiene límite. Hay diversas formas en la que una sucesión puede ser no convergente. Una, es que la sucesión cumpla que la sucesión de valores absolutos $|a_n|$ sea acotada y que esta sucesión de valores acotados se aproxime de dos o más valores. Otra forma es que la sucesión de valores absolutos $|a_n|$, no sea acotada y cumpla la siguiente propiedad: $\forall K \in \mathbb{R}, K > 0,\ existe\ n(K) \in \mathbb{N}\ tal\ que\ |a_n| > \mathrm{K}$. En este caso, si la sucesión es de términos positivos, se dice que diverge hacia infinito, si la sucesión es de términos negativos se dice que diverge hacia menos infinito. Y en el caso que la sucesión alterne números negativos y positivos cuyos valores absolutos divergen hacia infinito, se dice que la sucesión diverge hacia infinito de manera alternada, por ejemplo: para la sucesión: $a_n = (-1)^n \cdot n. tenemos: a_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$

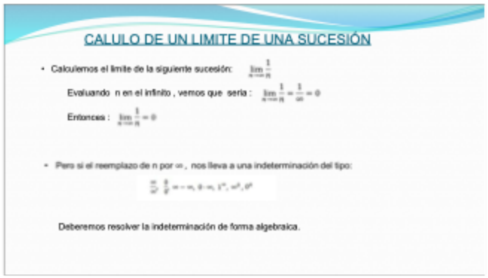
<u>Profesor 5 entrega el siguiente material</u>

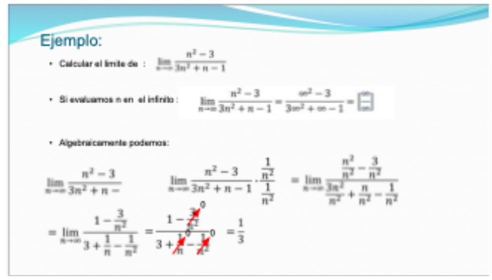


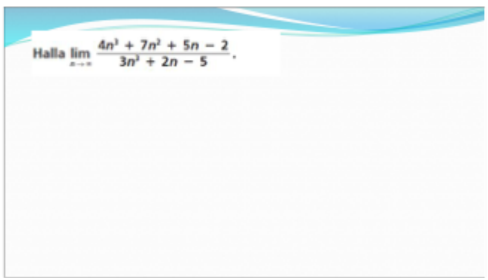




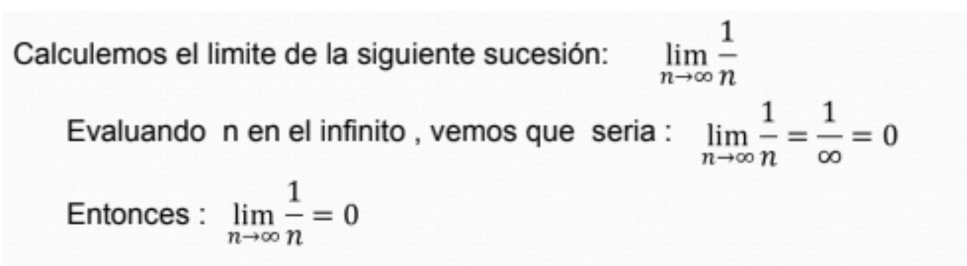








Este material tiene como objetivo presentar a los estudiantes propiedades del cálculo de límites de sucesiones. Presentamos a continuación un extracto de la guía propuesta por el docente:



Calculemos el limite de la siguiente sucesión: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Evaluando n en el infinito , vemos que seria : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Entonces : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Se observa un error algebraico al indicar “Evaluando n en el infinito”, la idea es que los estudiantes entiendan lo que es converger y tender a partir de una sucesión dada. Lo más adecuado sería indicar alguna tabla de valores, para que los estudiantes entiendan que a medida que n es muy grande, la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ tiende a cercarse a 0. Además, **usa una expresión que no tiene sentido**: $\frac{1}{\infty} = 0$.

Por otro lado, en la página 2 y 3 indican propiedades de límites de sucesiones.

Sean estos los limites de dos sucesiones: $\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$

Entonces se cumple que:

1) Limite de la suma: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$

2) Limite de la resta: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$

$$Si\ (A - B) \neq (\infty - \infty)$$

En la imagen anterior, se indica que el límite de la resta existe si $A - B \neq (\infty - \infty)$.

Para aplicar correctamente las propiedades de los límites de sucesiones, siempre se debe asumir que, si las sucesiones convergen a un cierto valor real, entonces puedes aplicar las propiedades. Lo correcto sería:

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones convergentes, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, (Esto quiere decir que A, B son números reales). Entonces se cumple que: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ y que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

Se debe descartar el caso $\infty - \infty$, porque la propiedad solo se puede utilizar si ambas sucesiones son convergentes.

- **Límite del producto:** $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$ $$si \quad A \cdot B \neq 0 \cdot \infty$$ $$si \quad A \cdot B \neq \infty \cdot 0$$

- **Límite de un cuociente:** $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$ $$si \quad \frac{A}{B} \neq \frac{0}{0}$$ $$si \quad \frac{A}{B} \neq \frac{\infty}{\infty}$$

Por el mismo argumento anterior, se debe descartar los casos que incluyan el símbolo infinito, debido a que no es un número real. Lo correcto sería: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones convergentes, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, (Esto quiere decir que A, B son números reales). Entonces se cumple que: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}, \qquad si\ B \neq 0$$

Sólo hay que descartar el caso en que $B = 0$ en el límite de un cociente de sucesiones convergentes.

Se puede ver el siguiente ejemplo: Dada la siguiente sucesión $c_n = \frac{n^2+7n}{5n^3+n^2-1}$

Se puede definir $a_n = n^2 + 7n$, $b_n = 5n^3 + n^2 - 1$, luego se tiene que $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Si nos preguntamos acerca de la convergencia de a_n y b_n, ambas sucesiones son divergentes, luego no se pueden aplicar las propiedades de límites de sucesiones. El problema se puede resolver con diferentes métodos o estrategias para el cálculo de límites de sucesiones. Un procedimiento correcto sería reformular el cociente dividiendo tanto el numerador como el denominador por la mayor potencia de n (eso equivale a multiplicar la fracción por uno):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n}{5n^3+n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+7n}{n^3}}{\frac{5n^3+n^2-1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{5} = 0$$

Notamos que el profesor usa este procedimiento en la lámina 6, para calcular el límite.

4.2.2 Análisis de guías respecto a la enseñanza del concepto de límite de funciones

Se analizaron las 5 guías compartidas por los diferentes profesores que enviaron material confeccionados por ellos mismos para la enseñanza del concepto de límite de funciones.

Profesor 1 entrega guía 1

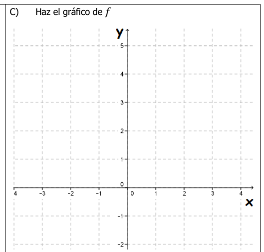
TALLER INTRODUCCIÓN
LÍMITES DE FUNCIONES

1. Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
   A) Determina el dominio de f

B) Completa la siguiente tabla de valores

X	$f(x)$
0	
1	
1,5	
1,9	
1,99	
1,999	
1,9999	
1,99999	
2	
2,00001	
2,0001	
2,001	
2,01	
2,1	
3	
4	

C) Haz el gráfico de f



D) ¿Qué sucede cuando x se va acercando a 2?

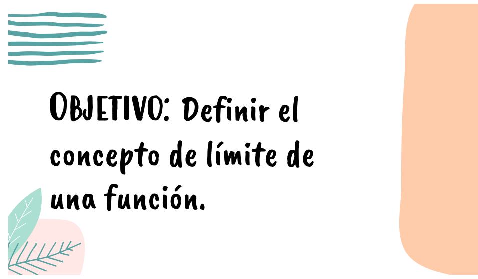
2. Considera la función $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
   A) Determina del dominio de g.
   B) Completa la tabla de valores

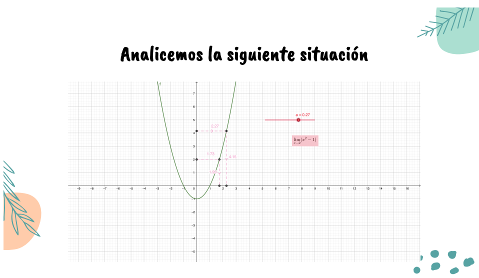
X	$f(x)$
3	
3,5	
3,9	
3,99	
3,999	
3,9999	
4	
4,0001	
4,001	
4,01	
4,1	
4,5	
5	

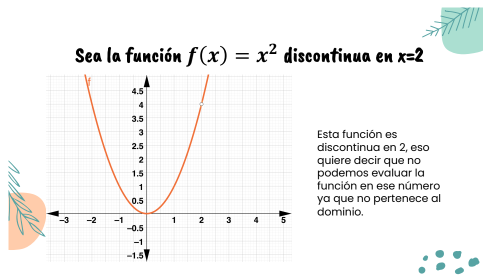
   C) ¿Qué sucede cuando x se va acercando a 4?

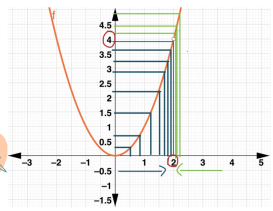
En la guía Nº1 se presenta una función racional, en la cual se pide a los estudiantes encontrar el dominio de la función y completar una tabla de valores para valores cercanos al punto en el cual la función no está definida. Al mismo tiempo, se pide a los estudiantes graficar los puntos solicitados. La idea es establecer la relación entre los límites laterales y el límite puntual de una función. El profesor **define**, en ambos casos, **la función por una fórmula**. Suponemos que entiende que $x = 2$ no pertenece al dominio de $f(x)$ y que $x = 4$, no pertenece al dominio de $g(x)$.

Profesor 2 entrega guía 2









Sin embargo, podemos aproximarnos tanto por la izquierda (azul) como por la derecha (verde) al 2 de tal manera que las imágenes de esos valores se aproximan también a su "posible valor", que en este caso es 4.

Tabla de valores

x	$f(x)$
1	
1,5	
1,75	
1,9	
1,95	
1,99	
1,999	

x	$f(x)$
3	
2,5	
2,25	
2,1	
2,05	
2,01	
2,0001	

De esta manera estamos calculando el límite de la función cuando el x tiende a 2, es decir, jamás es 2 pero se acerca, por la izquierda y por la derecha. Escrito matemáticamente tendremos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

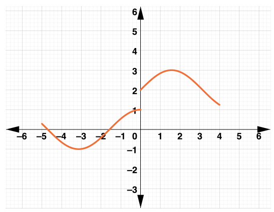
De la misma manera podemos decir que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Donde al escribir $x \to 2^-$ y $x \to 2^+$ quiere decir que tiende a 2 por la izquierda y por la derecha respectivamente.

CUANDO PASA ESO, QUE LOS LÍMITES LATERALES SON IGUALES, ENTONCES DECIMOS QUE EL LÍMITE EXISTE

¿Qué pasa con esta función?



¿EXISTE EL LÍMITE?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

Considere la gráfica de la función f, de la *figura 1*:

Figura 1

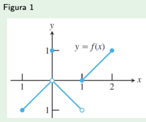
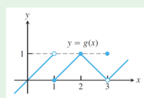


Figura 2



Ejercicio

De la gráfica de la función g, de la *figura 2*, calcular:

a) $\lim_{x\to 0} g(x)$ b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ c) $\lim_{x\to 3} g(x)$

Pero si no tenemos la gráfica, ¿cómo podemos determinar su límite?

El primer tipo límite que calcularemos es el límite en un punto, este se describirá de la siguiente forma:

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in dom\, f$ se define el límite de la función cuando tiende a a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, que debemos evaluar la función en ese punto para saber a donde tiende la función.

Por ejemplo, sea la función $f(x) = 3x + 1$, calculemos $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$\lim_{x \to 2} 3x + 1 = 7$$

¿Qué pasará con esta función?

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \;\; x \geq 2 \\ 2x - 1 \;\; si \; x < 2 \end{cases}$$

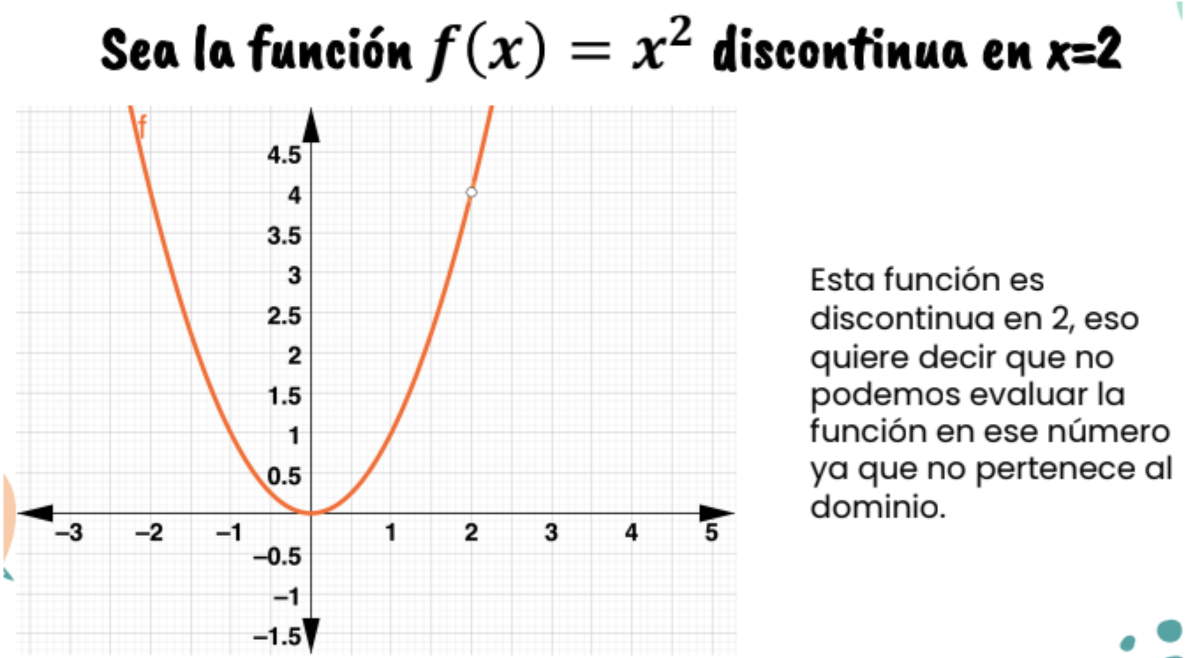
$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2, & x < 2 \\ 2x^2 - x - 3, & x > 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

Ejercicios

1. $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$
2. $\lim_{x \to -1} (2x^2 - 5x + 3) = 10$
3. $\lim_{x \to 3} (3x^3 - 5x)(2x^2 - 3) = 990$
4. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 3$
5. $\lim_{x \to -2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq -2 \\ -6x - 8, & x < -2 \end{cases}$
6. $\lim_{x \to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

En la guía Nº2 se presenta una función con tabla de valores cercanos a un punto donde la función pareciera no estar definida, se observa que **el profesor trata de utilizar las diferentes representaciones para el cálculo de límites**, diferenciando los casos cuando tenemos el gráfico de la función o no. Establece como método general que el límite en un determinado punto existe si y sólo si los límites laterales son iguales en dicho punto.

Se presenta a continuación un extracto de la guía:



En este ejemplo, dice que la función $f(x) = x^2$ es discontinua en $x = 2$. En el gráfico el profesor ha colocado un punto en blanco en la parábola en el lugar que correspondería a $x = 2$. Al parecer quiere, con eso, significar que el punto $x = 2$ no está en el dominio de la función $f(x)$. **Utiliza, erróneamente, el concepto de discontinuidad en un punto**. Esto pues, para que haya discontinuidad, la función debe estar definida en el punto y ese valor no debe coincidir con uno de los límites laterales.

Por ejemplo, tenemos la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 2x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

En este caso, $g(2)$ existe y es igual a 4, y la función $g(x)$ es discontinua en $x = 2$ ya que el límite por la derecha, cuando x tiende a 2, es 4 y el límite por la izquierda, cuando x tiende a 2, es 3. Así, sus límites laterales no coinciden y la función es discontinua pues hay un límite lateral cuyo valor no es $g(2) = 4$.

El profesor también señala lo siguiente: *Donde al escribir $x \to 2^-$ y $x \to 2^+$ quiere decir que tiende a 2 por la izquierda y por la derecha respectivamente.*

Esta manera de expresar que las expresiones: $x \to 2^-$ *y* $x \to 2^+$ *, quieren significar que la variable x tiende a 2 por la izquierda y que la variable x tiende a 2 por la derecha, respectivamente*; introduce una **informalidad** que **resta precisión a lo que se quiere señalar**.

Finalmente, presentamos a continuación el último extracto de la guía a observar:

> El primer tipo límite que calcularemos es el límite en un punto, este se describirá de la siguiente forma:
>
> Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in dom\, f$ se define el límite de la función cuando tiende a a
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
>
> Es decir, que debemos evaluar la función en ese punto para saber a donde tiende la función.

Se puede observar que lo afirmado no es correcto ya que se cumple sólo cuándo la función es continua. **El profesor no distingue la existencia del límite cuando x tiende al valor a, con que el valor de dicho límite sea igual a f(a)**. Esto es un error conceptual.

Profesor 3 entrega guía 3

Limites y continuidad

Definición formal de Limite

Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la diferencia entre $f(x)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña si x está lo suficientemente cerca de a, $x \neq a$.

Por ejemplo, en la función $f(x) = 3x - 2$, el límite de $f(x)$ se aproxima a 7, cuando x se aproxima a 3. Así,

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	6,7	6,97	6,997	7	7,003	7,03	7,3

Se puede establecer una correspondencia entre los valores de x que equidistan de $x = 3$. Así, si

$2{,}9 < x < 3{,}1$ entonces $6{,}7 < f(x) < 7{,}3$

$2{,}99 < x < 3{,}01$ entonces $6{,}97 < f(x) < 7{,}03$

$2{,}999 < x < 3{,}001$ entonces $6{,}997 < f(x) < 7{,}003$

Las expresiones anteriores se pueden escribir así:

$-0{,}1 < x - 3 < 0;1$ entonces $-0{,}3 < f(x) - 7 < 0{,}3$

$-0{,}01 < x - 3 < 0{,}01$ entonces $-0{,}03 < f(x) - 7 < 0{,}03$

$-0{,}001 < x - 3 < 0{,}001$ entonces $-0{,}003 < f(x) - 7 < 0{,}003$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

La expresión $-0{,}1 < x < 0{,}1$ es equivalente a la expresión $|x - 3| < 0{,}1$ y la expresión $-0{,}3 < f(x) - 7 < 0{,}3$ es equivalente a la expresión $|f(x) - 7| < 0{,}3$ por lo tanto, las desigualdades anteriores se pueden plantear así:

$|x - 3| < 0{,}1$ entonces $|f(x) - 7| < 0{,}3$

Como los valores 0,1; 0,01; ... y 0,3; 0,03 han sido generados en forma arbitraria, las desigualdades anteriores quedan representadas por:

$|x - 3| < \delta$, entonces, $|f(x) - 7| < \epsilon$, donde δ y ϵ son valores arbitrarios y ϵ depende de δ.

Esta expresión es una forma precisa de indicar que $f(x)$ se aproxima a 7 cuando x se aproxima a 3, ya que afirma que se puede hacer que los valores de $f(x)$ difieran de 7 en menos de una distancia arbitraria ϵ tomando los valores de x a una distancia de 3 menor que δ (figura 1).

Gráficamente

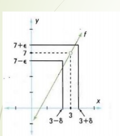


Figura 1

La afirmación, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x, *si* $|x - a| < \delta$, *entonces,* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Limites Laterales

Las aproximaciones realizadas, en la sección anterior, para determinar el límite de una función se relacionan con el concepto de **límite lateral**.

Existe una simbología especial para representar los acercamientos de x a a por la izquierda y por la derecha. Así,

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se lee límite cuando x tiende a ***a por la izquierda*** de $f(x)$ es L.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se lee límite cuando x tiende a ***a por la derecha*** de $f(x)$ es L.

Para hallar los límites por la derecha o por la izquierda de una función, se pueden usar las mismas técnicas utilizadas para obtener los límites comunes.

Así, en estos casos se examina el comportamiento de la función a medida que x se aproxime por la derecha o por la izquierda a a.

Ejemplo 1

Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$, representada en el gráfico de la figura 2, muestra que si x tiende a 1 por la izquierda, entonces, $f(x)$ tiende a cero.

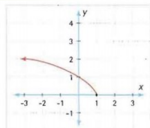


Figura 2

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

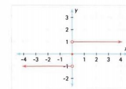
y hallar los límites laterales cuando x tiende a 0.

Solución

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ ya que si $x < 0$, entonces, $f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ ya que si $x > 0$, entonces, $f(x) = 1$

La gráfica muestra la función $f(x)$ y los límites laterales respectivos.



Definición

El concepto de la existencia o no existencia de un límite de una función depende de los límites laterales. Si los límites laterales son iguales, entonces el límite de la función existe. Si los límites laterales son diferentes, entonces, el límite de la función no existe.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \textit{ si y sólo si } \lim_{x \to a^+} f(x) = L \textit{ y } \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Ejemplo

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 4 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ y hallar:

a. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Solución

La gráfica de la función se muestra en la figura 3.

a. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{x} = 2$, pues al acercarse a 4 por la izquierda, la función $f(x)$ tiende a 2.

b. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x} - 1 = 1$, pues al acercarse a 4 por la derecha, la función $f(x)$ tiende a 1.

c. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe pues los límites laterales son diferentes.

En símbolos, como $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1$; entonces $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe.

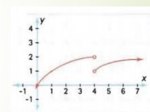
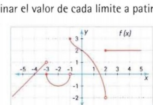


Figura 3

Resumen Grafico

Determinar el valor de cada límite a patir de la gráfica de $f(x)$.



a. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

e. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

g. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

h. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

i. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

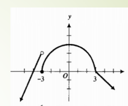
j. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

Resumen Analítico

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de f. (**b**) Determine cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Propiedades de los Limites

Si c es una constante y los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$. En palabras, el límite de una constante es igual a la constante.
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$. En palabras, el límite de una variable que tiende a a es a.
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$. En palabras, el límite de una suma es igual a la suma de los límites.
4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$. En palabras, el límite de una resta es igual a la resta de los límites.
5. $\lim\limits_{x \to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$. En palabras, el límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.
6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$. En palabras, el límite de un producto es igual al producto de los límites.
7. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$. En palabras, el límite de un cocien-

Principio de Sustitución: Polinómicas y racionales

Principio de sustitución

Se sabe que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no depende de f. Para algunas funciones este límite es precisamente $f(a)$.

Esta afirmación permite concluir que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ para algunas funciones.}$$

Este método para calcular el límite de una función es llamado método de **sustitución directa**.

Ejemplos

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 4} \left(x^2 - \sqrt{x + 5}\right)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 11}{2x + 1}$$

Ejercicios

Usar el principio de sustitución directa para calcular los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

d. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$

a. $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 5)$

b. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} (5x^2 + 2x + 9)$

c. $\lim\limits_{x \to 3} (4x^2 - 3x + 2)$

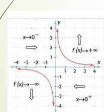
d. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^2 - 5x - 3}$

Limites de funciones indeterminadas

En algunas ocasiones, al efectuar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser una indeterminación.

Cuando el resultado es $\frac{L}{0}$, entonces se calcula el límite a partir de los límites laterales. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$.

Como el resultado después de la sustitución es una indeterminación, entonces, para calcular el valor del límite, se calculan los límites laterales. Así,



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Como los límites laterales son distintos, entonces, el límite no existe. A

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se muestra en la figura 4.

Limites de Funciones racionales

Si P(x) *y* Q(x) *son polinomios de grado* n y m, *respectivamente, y* $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, *la indeterminación se evita factorizando el numerador* P(x) *o el denominador* Q(x), *de modo que el binomio* (x − a) *se simplifique así:* $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(x - a)\, P_1(x)}{(x - a)\, Q_1(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

Practica

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2}}{x}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x - 2)}{(x-1)(x-1)}$$

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}}$$

$= x - 2$

$= 1 - 2$

$= -1$

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \\ 1 & -4 & 5 & -2 & 2 \\ \hline \downarrow & 2 & -4 & 2 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x^2 - 2x + 1)(x - 2)$

$$\begin{array}{cccc|c} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & x^0 & (x-a) \\ \hline & & & & a \end{array}$$

Calcula los siguientes Limites

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{4}}{x}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

g. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$

h. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$

Practica

Calcular, si existe, el valor de cada límite.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

c. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - 16}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{5}}{x}$

h. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}}$

i. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

j. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^5}{x^5 - 1}$

k. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

---

e. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$

f. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

g. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

l. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2}$

m. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{2x - 1}$

n. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a + x)^4 - a^4}{x}$

Método de división sintética o Ruffini

Un *polinomio* es la suma algebraica de dos o más monomios. Si está en términos de la variable independiente x, se denota como una función $P(x)$ y en su forma general es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + a_{n-4} x^{n-4} \cdots + a_1 x + a_0$$

El primer término del polinomio $a_n x^n$ se conoce como el término dominante y al término a_0 se conoce como término independiente.

Una *raíz* es un valor que satisface la ecuación $P(x) = 0$. Por su parte se llama *conjunto solución* de una ecuación algebraica al conjunto de todas las raíces de una ecuación.

La regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el residuo de la división de un polinomio por un binomio de la forma $(x - a)$.

e. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$

l. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2}$

f. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

m. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{2x - 1}$

g. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

n. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a + x)^4 - a^4}{x}$

Método de división sintética o Ruffini

Un *polinomio* es la suma algebraica de dos o más monomios. Si está en términos de la variable independiente x, se denota como una función $P(x)$ y en su forma general es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + a_{n-4} x^{n-4} \cdots + a_1 x + a_0$$

El primer término del polinomio $a_n x^n$ se conoce como el término dominante y al término a_0 se conoce como término independiente.

Una *raíz* es un valor que satisface la ecuación $P(x) = 0$. Por su parte se llama *conjunto solución* de una ecuación algebraica al conjunto de todas las raíces de una ecuación.

La regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el residuo de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$.

¿Cuándo puedo usar la Regla de Ruffini?

Divisor es $(x \pm a)$

$(3x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

$(3x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 1)$

Ejemplo 1

Sean $P(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 5$ y $Q(x) = (x - 1)$ dos polinomios, para calcular la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ consideramos la raíz del polinomio $Q(x)$, es decir, $r = 1$ y de separados por una línea, consideramos también **los coeficientes del polinomio** $P(x)$ y los disponemos así:

Ejemplo 2

Obtener las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ y $Q(x) = x + 3$.

Calcula los siguientes limites

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 4x + 3}$

Desafío Calificación parcial
Plazo entrega 22/09. Antes clase

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

$\dfrac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x-2)}$

$x-2$ $\quad x-1$

$x+2$ $\quad x+1$

1	-4	+5	-2	2
↓	2	-4	2	
1	-2	1	0	

$(x^2 - 2x + 1)(x-2)$

$(x-1)(x-1)(x-2)$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
2	-6	1	0	3	1
↓	2	-4	-3	-3	
2	-4	-3	-3	0	

$(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)(x-1) + 0$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3) \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$

$2(1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) - 3$

$2 - 4 - 3 - 3$

$2 - 10$

$\lim\limits_{x \to 1} = -8$

Limites de funciones radicales

Si f(x) *y* g(x) *son funciones radicales y* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, *entonces, la indeterminación se elimina racionalizando el numerador, racionalizando el denominador o racionalizándolos ambos.*

$\dfrac{8}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$n! = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1$ $\qquad$ $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Hallar el límite de cada función, racionalizando el denominador o el numerador según corresponda.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 - x}}{x}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ f. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2-\sqrt{4}}{3-\sqrt{2\cdot 4+1}} = \dfrac{2-2}{3-3} = \dfrac{0}{0}$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(2-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{2x+1})} \cdot \left(\dfrac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}\right)$

$9-2x-1$

$8-2x$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4-x)\cdot(3+\sqrt{2x+1})}{(2+\sqrt{x})\cdot(9-1(2x+1))}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(2+\sqrt{x})\cdot(8-2x)}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(4-x)}\cdot(3+\sqrt{2x+1})}{(2+\sqrt{x})\cdot 2\cdot\cancel{(4-x)}} = \dfrac{3+\sqrt{2x+1}}{(2+\sqrt{x})\cdot 2} = \dfrac{3+\sqrt{2\cdot 4+1}}{(2+\sqrt{4})\cdot 2} = \dfrac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{8}} = \dfrac{3}{4}$ //

Desafio

Racionalizar!! $2\sqrt{2}+2$ $2\cdot(\sqrt{2}+1)$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{(\sqrt{1+2x}+3)}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(1+2x)-(9)\cdot(\sqrt{x-2}+2)}{(x-2)-2\cdot(\sqrt{1+2x}+3)}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \dfrac{2\cdot\cancel{(x-4)}\cdot(\sqrt{x-2}+2)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{1+2x}+3)}$

$= \dfrac{2\cdot(\sqrt{x-2}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \dfrac{(2\cdot\sqrt{2}+2)}{6} = \dfrac{\cancel{2}\cdot(\sqrt{2}+1)}{\cancel{6}\,3}$

Indicar si existe error en el proceso

a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x} \cdot \dfrac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(4-x)}}{\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{0}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{0}{2+\sqrt{4}} = \dfrac{0}{2+2} = \dfrac{0}{4} = 0$ X

tips 1 $= \dfrac{a}{a} = 1$ $\dfrac{a}{a} \neq 0.$

$\dfrac{2-x}{x-2} = \dfrac{-1\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = -1$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1-\sqrt{x-1})}{x-2} \cdot \dfrac{(1+\sqrt{x-1})}{(1+\sqrt{x-1})} = (1)^2-(\sqrt{x-1})^2$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-(x-1)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$ tips $\dfrac{-a}{a} = -1$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(2-x)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}$ $-\dfrac{1\cdot a}{a} = -1$ ✓

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{2-1}} = \dfrac{-1}{1+1} = \dfrac{-1}{2}$

Limites a infinito

Cota: *un número que es mayor o menor que todos los elementos de un conjunto dado.*

Límites infinitos

Si una función $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a un valor a, entonces, se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

Para notar que el límite de una función $f(x)$ crece sin cota, cuando x tiende a a, se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

De igual manera, si el límite de una función $f(x)$ decrece sin cota, cuando x tiende a a, se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Límites en el infinito

En los límites infinitos se presenta un caso especial, en el cual la función $f(x)$ crece o decrece sin cota.

Otro caso especial en el estudio de los límites se presenta cuando la variable x crece o decrece sin cota. Teniendo en cuenta estas variaciones, se pueden plantear los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Estos límites se llaman *límites en el infinito*.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a infinito.

De la misma manera, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a menos infinito.

Cuando se calculan límites en el infinito se presentan dos casos:

Limites a infinito

Cota: *un número que es mayor o menor que todos los elementos de un conjunto dado.*

Límites infinitos

Si una función $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a un valor a, entonces, se dice que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Para notar que el límite de una función $f(x)$ crece sin cota, cuando x tiende a a, se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

De igual manera, si el límite de una función $f(x)$ decrece sin cota, cuando x tiende a a, se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Límites en el infinito

En los límites infinitos se presenta un caso especial, en el cual la función $f(x)$ crece o decrece sin cota.

Otro caso especial en el estudio de los límites se presenta cuando la variable x crece o decrece sin cota. Teniendo en cuenta estas variaciones, se pueden plantear los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Estos límites se llaman *límites en el infinito*.

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, entonces se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a infinito.

De la misma manera, si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, entonces, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a menos infinito.

Cuando se calculan límites en el infinito se presentan dos casos:

$f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)$

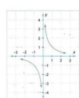


Figura 7

- **Caso 1.** Límites de la forma $\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ siempre y cuando x^n esté definido.

  Estos límites pueden comprobarse asignando a x valores numéricos cada vez mayores y, calculando el cociente respectivo.

  Por ejemplo, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

  Cuando x toma valores cada vez mayores, la función $f(x)$ se aproxima cada vez más a 0 por la derecha.

  Cuando x toma valores cada vez menores, la función $f(x)$ se aproxima también a 0, por la izquierda.

  La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se puede apreciar en la figura 7.

- **Caso 2.** Límites en el infinito de una función racional.

  Los límites de funciones racionales para los cuales se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ reciben el nombre de *límites en el infinito*.

Para calcular el límite de estas funciones, se divide el numerador y el denominador de la función entre la potencia de mayor grado.

A partir de este proceso se presentan tres casos:

- $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$ si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{m}{n}$ si el grado de $P(x)$ es igual al grado de $Q(x)$, siendo m y n los coeficientes de los términos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.

Practica

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{2 \cdot x+3}\right) = \dfrac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-8}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{\frac{3x}{x^2}} - \cancel{\frac{8}{x^2}}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$

Ejemplo

Calcular el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{2x+3}$

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x-8}{x^2-1}$

c. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^5-4x^3+1}{-3x^2+4x^5}$

d. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-3x^2+5x-8}{x^4-1}$

e. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

$\frac{4x^3}{x^5} = \frac{4}{x^2}$

$\frac{4x}{x^3} = \frac{4 \cdot \cancel{x}}{x \cdot x \cdot \cancel{x}} = \frac{4}{x^2}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{5x^5}{x^5} - \frac{4x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{-\frac{3x^2}{x^5} + \frac{4x^5}{x^5}} = \frac{5-0+0}{0+4} = \frac{5}{4}$

Ejemplos
Evaluacion

$\frac{4}{1} \to \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{4}{100}$

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x+5}{2x^2+1}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{4x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} \to \frac{0+0}{2+0} = \frac{0}{2} = 0$

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4x+5}{2x-1}$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+4x^2+4x+5}{3x^3+2x+1} = \dfrac{\frac{9x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3+5}{3x+1}$

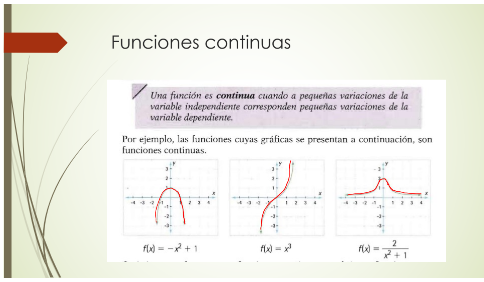
5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5}{x^2-1}$

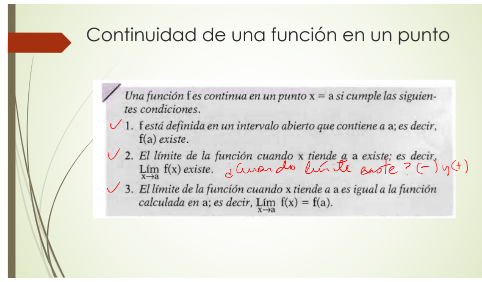
6) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4+5}{x^5+2}$

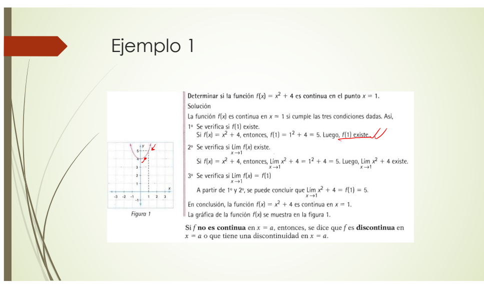
$\frac{4 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{4}{x}$

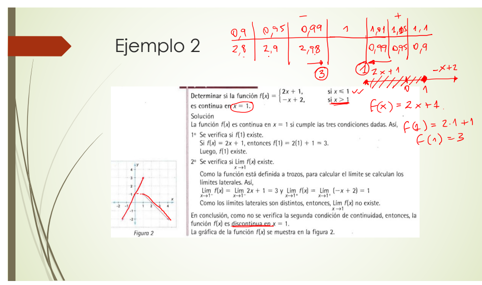
$\frac{2 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{2}{x^2}$

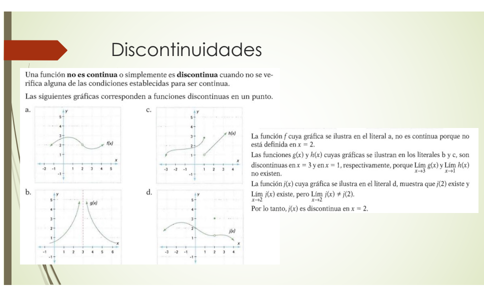
$\lim_{x \to \infty} = \dfrac{9 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{9+0+0+0}{3+0+0} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}} = 3$

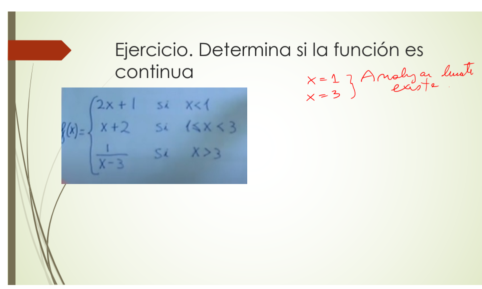












En la guía Nº3, al igual que en el caso de la guía Nº2 se establece la importancia de que la existencia de un límite en un punto depende de que los límites laterales sean iguales. **Se trabaja con funciones definidas por partes, de manera gráfica y de manera tabular**. También, se indica que existen límites donde se puede evaluar, **no se le indica un nombre específico a este tipo de funciones**, que son las funciones continuas en el punto.

En las primeras 4 laminas, el profesor intenta introducir el concepto de límite de una función con la definición $\varepsilon - \delta$. Hubiera sido útil utilizar algún ejemplo para entender cómo se utiliza adecuadamente la definición. Luego, las siguientes láminas introduce los límites laterales e indica que la existencia de un límite depende de la igualdad de los límites laterales, como se aprecia a continuación:

El concepto de la existencia o no existencia de un límite de una función depende de los límites laterales. Si los límites laterales son iguales, entonces el límite de la función existe. Si los límites laterales son diferentes, entonces, el límite de la función no existe.

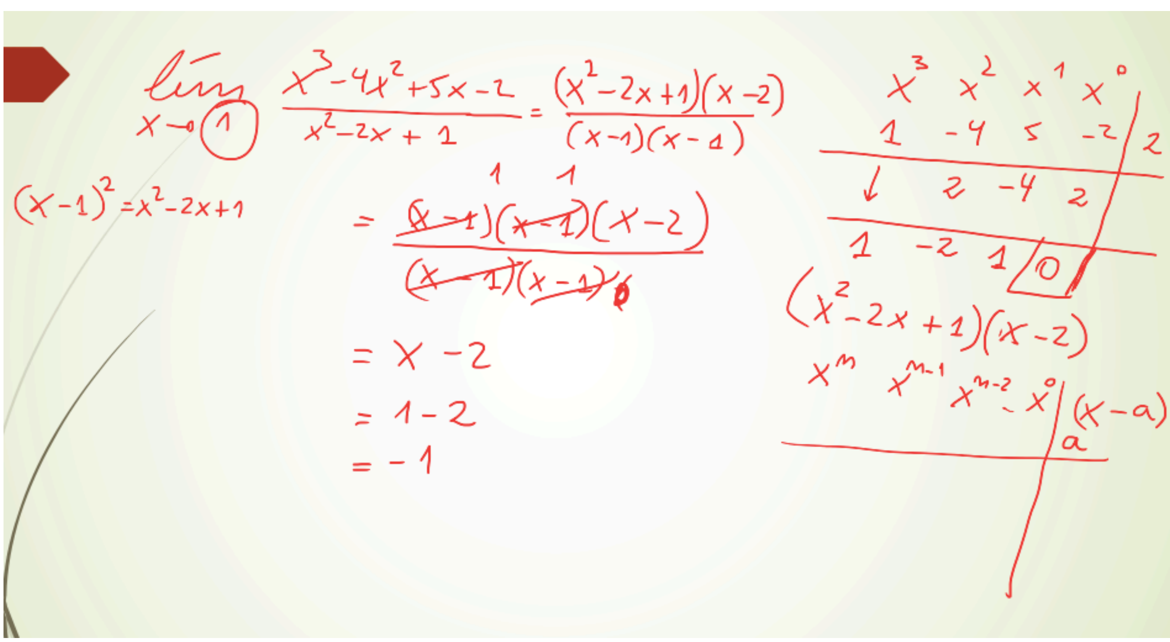
$$\text{Lím}_{x\to a} f(x) = L \textit{ si y sólo si } \text{Lím}_{x\to a^+} f(x) = L \textit{ y } \text{Lím}_{x\to a^-} f(x) = L$$

A continuación, se solicita a los estudiantes encontrar límites de funciones de manera gráfica, aquí hubiera sido útil agregar otro tipo de representación, cálculo de límites de funciones por tablas de valores. Es importante que el estudiante conozca todas las representaciones posibles para encontrar límites de funciones.

En las siguientes laminas, el profesor desarrolla el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Su desarrollo a continuación:



Es menester indicar **la importancia de una correcta notación**, en el cálculo de límites de funciones. En este caso, lo correcto, sería observar que para todo $x \neq 1$ se cumple que

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 2)}{x^2 - 2x + 1} = (x - 2)$$

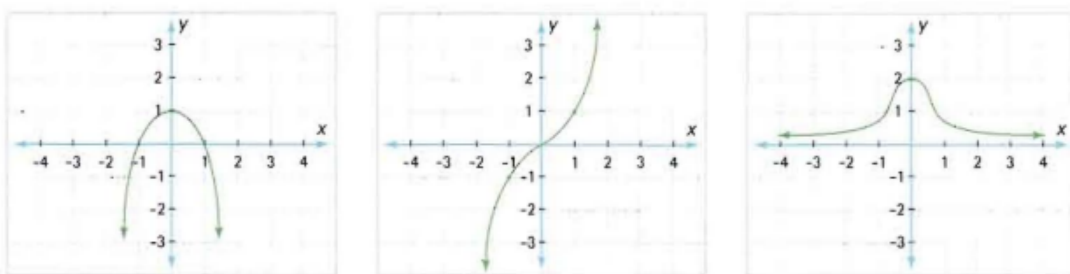
Y entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

En las últimas laminas, el profesor establece lo que es una función continua y una función que no es continua (discontinua) por medio de las siguientes definiciones:

*Una función es **continua** cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente.*

Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se presentan a continuación, son funciones continuas.



$f(x) = -x^2 + 1$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

En la definición señalada, el profesor trata de caracterizar la continuidad de una función por medio de una **indicación intuitiva de la definición $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$**. La definición que trata de ejemplificar es:

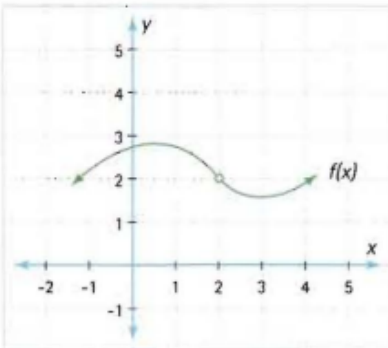
Sea $f: A \to \mathbb{R}$, donde $A \subset \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in A$. Se dirá que f es continua en x_0 sí, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, implicará que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Luego el profesor indica una definición de discontinuidad en un punto

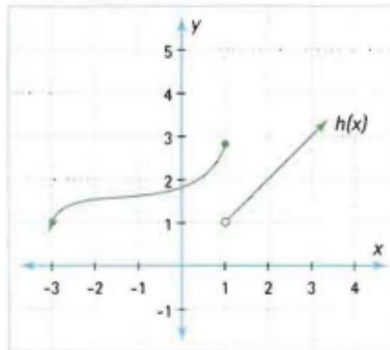
Una función **no es continua** o simplemente es **discontinua** cuando no se verifica alguna de las condiciones establecidas para ser continua.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones discontinuas en un punto.

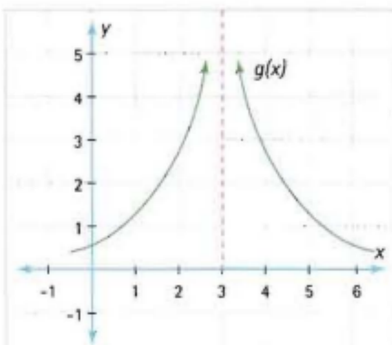
a.



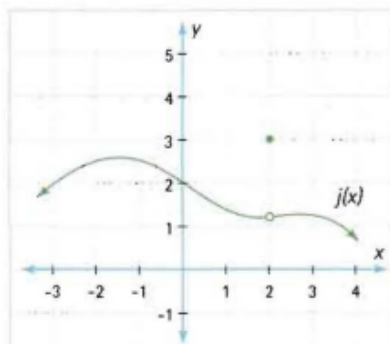
c.



b.



d.



Es importante indicar que existen diferentes tipos de discontinuidades, sería útil indicar su clasificación con sus respectivos ejemplos. También, al no ser precisa la definición de continuidad, pierde sentido señalar que *la función es discontinua cuando no se verifica alguna de las condiciones de las condiciones establecidas para ser continua.*

Notamos que el ejemplo a. no es correcto para el concepto de discontinuidad. **El docente presenta un punto en blanco en el gráfico queriendo señalarlo como de discontinuidad**. Este error ya fue observado en otro docente.

Profesor 4 entrega guía 4

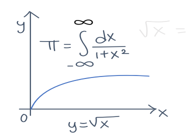
Electivo Límite, Derivadas e Integrales
TALLER N°4: Límite de Funciones

Objetivo

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

Descripción

Aplicaremos la herramienta límite a funciones ya conocidas, con tal de analizar su comportamiento gráfico y algebraico. Es necesario considerar las técnicas de racionalización y factorización para lograr aplicar el límite a funciones racionales complejas.

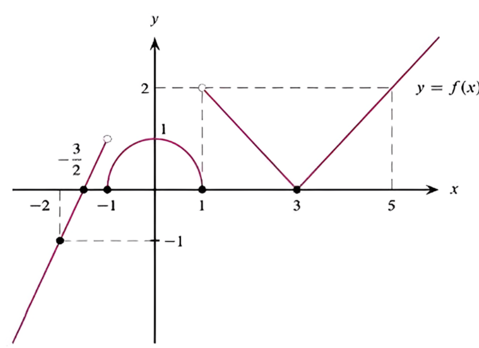


Actividad 1

Justifique detalladamente el desarrollo de sus respuestas

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, *la función y su gráfica es*:

1. A partir de la gráfica de f calcular los siguientes límites:

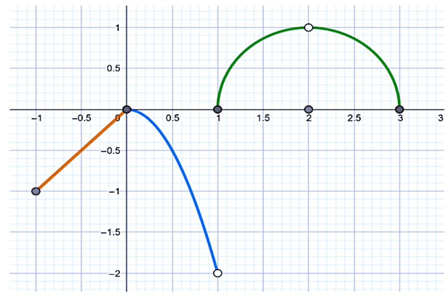


- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$=
- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$=
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$=
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$=
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$=

2. A partir de la gráfica de f calcular los siguientes límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

3. ¿ Cuáles de los siguientes enunciados, con respecto a la función $y = f(x)$ graficada aquí, son verdaderos y cuales son falsos? Justifique su respuesta.



$a)$ $\lim_{x\to 2} f(x) =$ no existe

$b)$ $\lim_{x\to 1} f(x) =$ no existe

$c)$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

$d)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ existe para todo punto x_0 en $]-1, 1[$

$e)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ existe para todo punto x_0 en $]1, 3[$

Actividad 2

1. Calcule los siguientes límites de funciones polinómicas

   - $\lim_{x\to 3} x^2 - 2x + 1$
   - $\lim_{x\to 0} x^4 + x - 3$

2. Calcule los siguientes límites de funciones racionales

   - $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x-1}$
   - $\lim_{x\to -1} \frac{x^4-x^3+3x}{x^2-x}$

3. Calcula los **límites laterales** de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿existe el límite de la función en esos puntos?

   - $f(x) = \frac{3}{x-2}$
   - $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$

4. Determine los siguientes límites de funciones irracionales

   - $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$
   - $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-2}$

5. Determine los siguientes límites

   - $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$
   - $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$

El profesor 4 entrega cuatro talleres que realizó con sus estudiantes. En los talleres 1,2 y 3 el profesor realiza una introducción relacionada a funciones, la cual no se considerará en nuestro análisis. El taller 4 contiene material relacionado con el concepto de límite de función a partir de su gráfica y el cálculo de límites laterales.

En las preguntas 1 y 2 de la actividad 1 el docente solicita al estudiante encontrar límites de funciones utilizando la representación gráfica de f. Dadas las características de la función f, hubiera sido interesante preguntar acerca de la existencia de límites al infinito cuando la variable decrece o cuando la variable crece, sin límite en ambos casos. Una pregunta podría ser:

¿Existen los siguientes límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

En la pregunta 3 de la actividad 1 se solicita al estudiante argumentar verdadero y falso acerca de las afirmaciones de la representación gráfica de la función $y = f(x)$.

Dentro de la pregunta 3, hay dos afirmaciones que requieren un análisis más profundo.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \text{ existe para todo punto } x_0 \text{ en }]-1,1[$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \text{ existe para todo punto } x_0 \text{ en }]1,3[$$

Hubiera sido útil incluir las mismas preguntas incluyendo los extremos, la idea es que los estudiantes comprendan si existe una diferencia o no.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = existe\ para\ todo\ x_0\ en\ [-1,1]$$

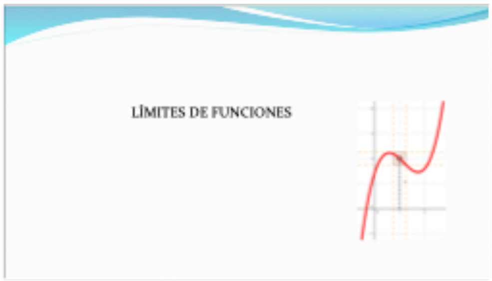
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = existe\ para\ todo\ x_0\ en\ [1,3]$$

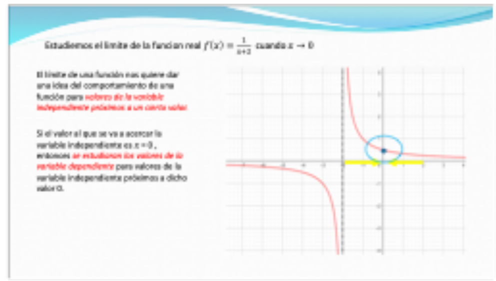
En la actividad 2, los alumnos deben encontrar diferentes límites por medio de las diferentes estrategias que existen. En la pregunta 4 de la actividad 2, se solicita encontrar el siguiente límite:

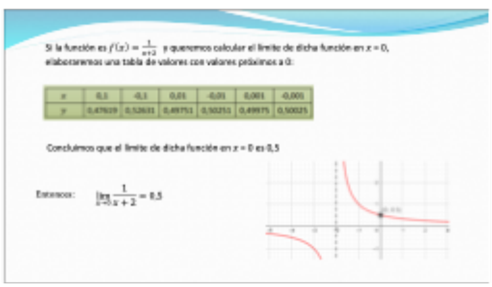
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-2}$$

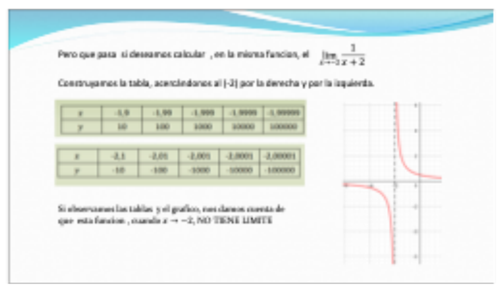
Es de notar que la función $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-2}$ tiene como dominio $]2,\infty[$, por lo tanto, no tiene sentido dicho límite. De la pregunta anterior, se esperarían resultados tales como: “El límite no existe” o “El límite no está definido para $x = 1$”

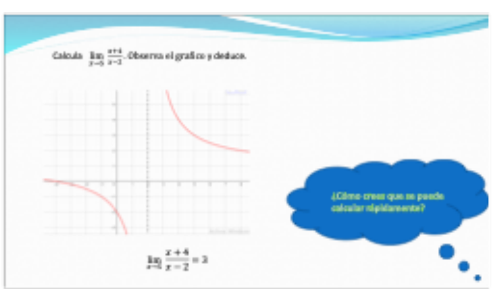
Profesor 5 entrega guía 5

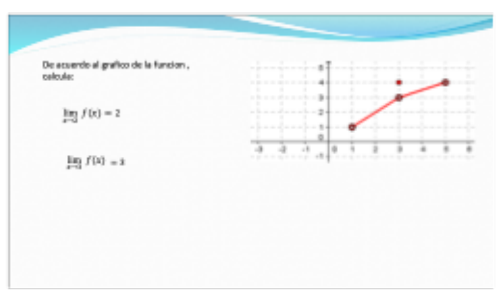


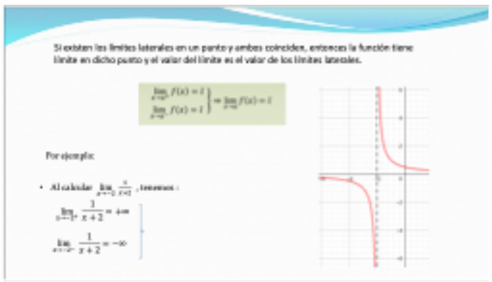


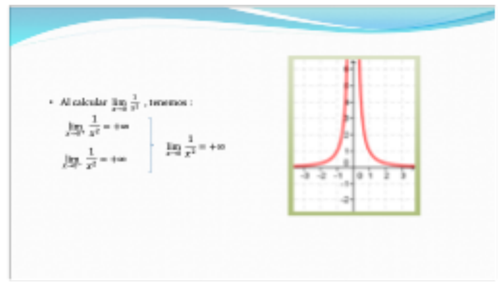


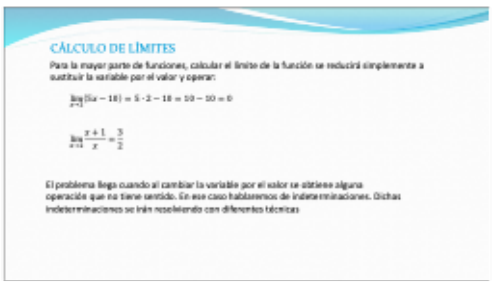


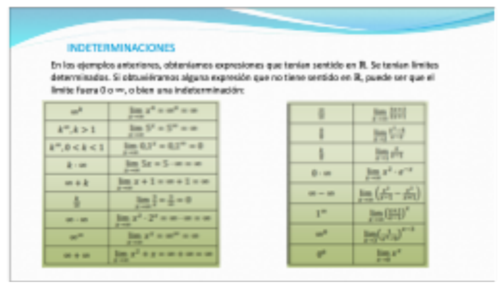


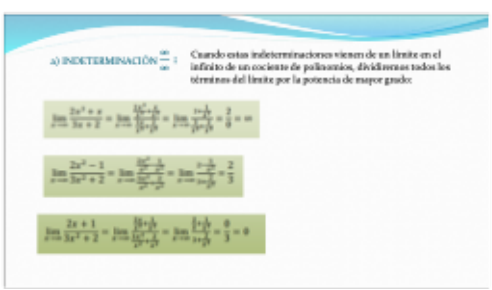


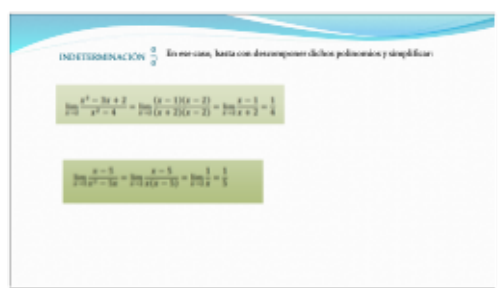

Si existen los límites laterales en un punto y ambos coinciden, entonces la función tiene límite en dicho punto y el valor del límite es el valor de los límites laterales.
Por ejemplo:
Al calcular
, tenemos :

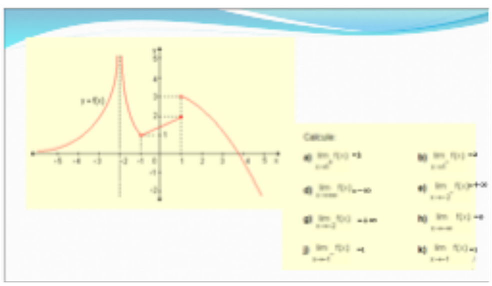

Al calcular
, tenemos :

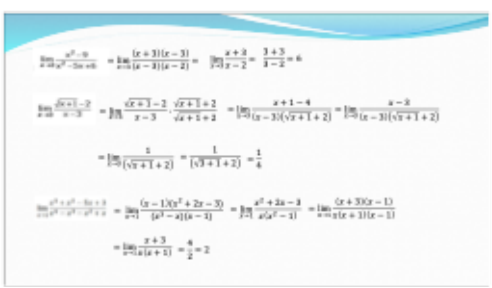

CÁLCULO DE LÍMITES
Para la mayor parte de funciones, calcular el límite de la función se reducirá simplemente a sustituir la variable por el valor y operar:
El problema llega cuando al cambiar la variable por el valor se obtiene alguna operación que no tiene sentido. En ese caso hablaremos de indeterminaciones. Dichas indeterminaciones se irán resolviendo con diferentes técnicas

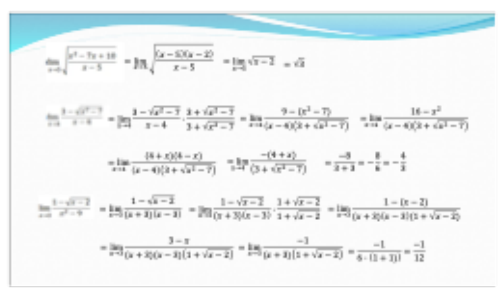

INDETERMINACIONES
En los ejemplos anteriores, obteníamos expresiones que tenían sentido en ℝ. Se tenían límites determinados. Si obtuviéramos alguna expresión que no tiene sentido en ℝ, puede ser que el límite fuera 0 o ∞, o bien una indeterminación:


a) INDETERMINACIÓN
Cuando estas indeterminaciones vienen de un límite en el infinito de un cociente de polinomios, dividiremos todos los términos del límite por la potencia de mayor grado:


INDETERMINACIÓN
En ese caso, basta con descomponer dichos polinomios y simplificar:







En la guía Nº5 se trabaja con el cálculo de límites por medio de su gráfica y cálculo de límites laterales. Se establece la relación de la existencia del límite de una función a partir de la igualdad de los límites laterales en el punto.

En las primeras 6 laminas, el profesor establece cómo encontrar límites de funciones utilizando la representación gráfica de la función. En la siguiente lamina, establece el teorema de los límites laterales:

Si existen los límites laterales en un punto y ambos coinciden, entonces la función tiene límite en dicho punto y el valor del límite es el valor de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$$

En la siguiente lamina, el profesor intenta indicar cuando existen diferentes indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones, **el uso del símbolo de ∞ no es el apropiado**. Todas las **notaciones intuitivas utilizadas**, para “operar” con el símbolo ∞ no son correctas, por ejemplo: reemplazar la variable x por ∞ en la expresión $\lim\limits_{x\to\infty} x^4$.

INDETERMINACIONES

En los ejemplos anteriores, obteníamos expresiones que tenían sentido en $\mathbb{R}$. Se tenían límites determinados. Si obtuviéramos alguna expresión que no tiene sentido en $\mathbb{R}$, puede ser que el límite fuera 0 o ∞, o bien una indeterminación:

∞^k	$\lim\limits_{x\to\infty} x^4 = \infty^4 = \infty$
$k^\infty, k > 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} 5^x = 5^\infty = \infty$
$k^\infty, 0 < k < 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} 0{,}1^x = 0{,}1^\infty = 0$
$k \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} 5x = 5 \cdot \infty = \infty$
$\infty + k$	$\lim\limits_{x\to\infty} x + 1 = \infty + 1 = \infty$
$\frac{k}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$
$\infty \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^x = \infty \cdot \infty = \infty$
∞^∞	$\lim\limits_{x\to\infty} x^x = \infty^\infty = \infty$
$\infty + \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + x = \infty + \infty = \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{2x+1}$
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2}$
$\frac{k}{0}$	$\lim\limits_{x\to1} \frac{x}{x-1}$
$0 \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x}$
$\infty - \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right)$
1^∞	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$
∞^0	$\lim\limits_{x\to3} \left(\frac{1}{x^2-9}\right)^{x-3}$
0^0	$\lim\limits_{x\to0} x^x$

En la siguiente imagen, se observa nuevamente un **inadecuado uso del símbolo** ∞ y se divide por cero.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{2}{0} = \infty$$

En la siguiente imagen, se observa otra vez un inadecuado uso del símbolo ∞

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{4}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

En general, se puede observar que todos los profesores utilizan como base en el cálculo de límites de funciones el teorema de la igualdad de límites laterales, la mayoría utiliza la representación gráfica para el cálculo de límites en un punto. Un porcentaje menor de profesores realizan ejercicios analizando tabla de valores para conjeturar acerca de la existencia del límite. Respecto a lo algebraico, todos los profesores solicitan el cálculo de límites cuando son de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Un porcentaje menor de profesores realiza ejercicios acerca de la existencia de asíntotas horizontales, verticales u oblicuas con ayuda del cálculo de límites. Solo un profesor indica la definición de límite por medio de $\varepsilon-\delta$. En todos los casos se nota un trato informal del concepto lo que, necesariamente, implicará que los alumnos pudieran formarse una idea equivocada o parcialmente intuitiva de lo que es el límite de una función cuando la variable tiende a un valor dado.

Capítulo 5: Conclusiones

Se puede concluir con respecto a la muestra de los docentes que participaron en este estudio, que dos de los once profesores realizaron un curso de perfeccionamiento para poder realizar el curso diferencial límites, derivadas e integrales. Esto explica los resultados obtenidos en la prueba de conocimiento, por sus diferentes justificaciones y la forma de abordar los diferentes problemas propuestos. Los dos profesores que realizaron el curso de perfeccionamiento entregan resultados más completos con justificaciones y vocabulario matemático en el cuestionario de conocimiento. Esto indicaría la importancia de que los profesores deban realizar un curso o participar en instancias de actualización disciplinar antes de impartir la asignatura, esto conllevará una mejor enseñanza del concepto de límite y, por tanto, un mejor aprendizaje para los estudiantes. También, los resultados expuestos cuestionan el nivel de formación inicial, respecto de estos contenidos.

Respecto a las dificultades que presentan los docentes al enseñar límites de funciones y límites de sucesiones, se observa que algunos profesores (Alrededor del 50%) tienen dificultad para saber dónde la función está definida, esto se detecta al momento de solicitar que encuentren dominio y recorrido de una función definida a trozos. Fallan al momento de definir correctamente los intervalos donde la función se encuentra definida.

Además, los profesores no definen correctamente qué es una sucesión, todos los profesores afirman que es una correspondencia del conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) a los números reales ($\mathbb{R}$).

Además, ningún profesor menciona la definición formal de límite de sucesión usando la notación ($\varepsilon - \delta$). Esto puede indicar un bajo dominio del concepto formal de límite de una sucesión.

También, en el límite de sucesiones, los profesores tienen errores algebraicos al momento de encontrar límites que sean de la forma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. No utilizan correctamente las propiedades del cálculo de límites de sucesiones.

En comparación a los diferentes estudios encontrados, los docentes al no utilizar la definición formal para demostrar la existencia de un límite de función o un límite de sucesión, no se puede comprobar los que afirma Mastorides y Zachariades (2004), si los docentes presentan dificultades respecto al uso adecuado de los cuantificadores “Para todo” y “Existe”.

Respecto a lo anterior, se da cumplimiento al **OE 1**, que es, identificar las dificultades que presentan los profesores de matemática que realizan curso de Límites, Derivadas e

Integrales respecto de la enseñanza de los conceptos de límite de funciones y límite de sucesiones.

Respecto a la descripción de la forma de preguntar los contenidos de límites de funciones y límites de sucesiones, se evidencia que los profesores utilizan como argumento principal para la existencia de un límite, el teorema de los límites laterales. Ningún profesor utilizó la definición de límite (definición $\varepsilon - \delta$) para demostrar la existencia de un límite. Tampoco relacionan límites de sucesiones con límites de funciones.

Asimismo, los profesores, utilizan en general, las igualdades $\frac{a}{\infty} = 0, a \neq 0$; $\frac{a}{0} = \infty, a \neq 0$,lo que no es formalmente correcto, por, al menos, dos razones: la primera es que el símbolo ∞ no representa un número real y carece de sentido en cada una de las igualdades; la segunda es que en la operatoria con números reales no está definida la división por cero. Esto se repite en límite de funciones y límite de sucesiones.

Además, de todas las representaciones que puede tener el concepto de límite de funciones, la representación gráfica es la más utilizada por los profesores. Esto puede ser debido a que, al ser observado por el estudiante, puede resultar fácil a la hora de solicitar que encuentren límites de una función. Respecto a la representación algebraica, todos los profesores en general realizan preguntas de cálculo de límites cuando son de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y mencionan los procedimientos para poder encontrar cada uno de ellos.

Con respecto a límite de sucesiones, se observa que los profesores utilizan mayoritariamente la representación algebraica cuando se habla de sucesiones, sólo un profesor muestra una representación gráfica de una sucesión sin explicaciones. Es importante considerar que en la enseñanza de un contenido, se tiene que considerar todas sus representaciones (verbal, gráfica, tabular y analítica u algebraica). Por otro lado, hay que considerar que la representación algebraica puede ser efectiva para algunos alumnos, pero no para todos, hay alumnos que aprenden mejor a través de lo visual u otro tipo de representación.

Por otro lado, se confirma lo que afirma Liang (2016), los profesores tienen preferencia a la representación gráfica para poder enseñar conceptos de límites de funciones.

También, se confirma lo que afirma Cornu (1994), el cual indica que se algebrizó la manera en que se enseña el límite de una función en general, se enuncian teoremas, las propiedades de la suma, resta, multiplicación y división de límites, pero no se concentran en general en el concepto de límite.

Respecto a lo anterior, se da cumplimiento al **OE2**, que es, describir las formas de preguntar de los profesores de matemática cuando enseñan los concepto de límite de funciones y límite de sucesiones, en el contexto del curso diferencial Límites, Derivadas e Integrales

Respecto a los supuestos, se confirma el punto 1, que es, los profesores no tienen un adecuado vocabulario matemático para enseñar conceptos de límites de funciones y límites de sucesiones. También, se confirma el punto 2, que es, los profesores utilizan incorrectamente el símbolo ∞ en la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y límite de funciones.

Como recomendación, se sugiere incluir en los planes y programas de las carreras de pedagogía en educación matemática cursos de didáctica en el análisis o el cálculo, esto debido a que los futuros docentes deben enseñar los contenidos básicos del cálculo infinitesimal en el curso electivo límites, derivadas e integrales.

Por último, estimamos que los resultados encontrados de este estudio deberían ser de utilidad para la formación inicial y continua de profesores de matemática, esto debido a que detectamos algunas dificultades que pueden presentar algunos docentes para la enseñanza del concepto de límite de funciones y límites de sucesiones. En la formación de los futuros profesores, los respectivos docentes, pueden tomar en consideración los errores comunes, señalados, para que no los repliquen en su enseñanza.

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Barrios García, J. (1995). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri. En *De Arquímedes a Leibniz. Tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico* (pp. 305-326). Las Palmas de Gran Canaria: Gobierno de Canarias. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bokhari, M. A., & Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: An alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 37*(5), 515–526. https://doi.org/10.1080/00207390500503079

Boyer, C. B. (1989). *A history of mathematics* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Burton, D. M. (1985). *The history of mathematics: An introduction*. Allyn and Bacon, Inc.

Bustos Tiemann, C., & Ramos Rodríguez, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. *Innovaciones Educativas, 24*(36), 84–100. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Politechnyque (Premier Partie. Analyse Algébrique)*. SAEM Thales. (Edición facsímil).

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles* [Tesis doctoral, Université I de Grenoble].

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). Kluwer Academic Press.

Danhke, L. (1989). *Metodología de la investigación*. UEFA.

Edwards, C. (2012). *The historical development of the calculus*. Springer Science & Business Media.

Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using counterexamples in teaching calculus: Students' attitudes. *The New Zealand Mathematics Magazine, 40*(2), 33–41.

Haciomeroglu, G. (2006). *Prospective secondary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of the concept of function* [Tesis doctoral, The Florida State University College of Education].

Herrera Armendia, F. G., Salazar Peña, E., Hernández Escobar, M., & Trejo Reséndiz, R. (2013). Noción de límite basada en la tipología de Brousseau. *Revista CEMACYC*, 1(1), 45-58. Recuperado de http://i.cemacyc.org

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.

Hitt, F., & Lara, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: That of the teacher and that of the student. *British Society for Research into Learning Mathematics, 19*(2), 49–54. Lancaster, U.K.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35–48.

Mastorides, E., & Zachariades, T. (2004). Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. Paper presented at the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2021). *Matemática. Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales para Formación Diferenciada 3º y 4º Medio*. Ministerio de Educación.

Pino-Fan, L., & Godino, J. (2015). Perspectivas ampliadas del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87–109. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015. p87-109.id552

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematics learning process*:* A survey*. For the Learning of Mathematics.* 1,16-20

Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: Insights for mathematics teacher education practices. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), 8-13.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 4 – 14

Smith, S. (1996). *Agnesi to Zeno: Over 100 vignettes from the history of math*. Key Curriculum Press.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: Caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*, 105–123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260