

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Computación



**FORTALECIENDO LA MODELACIÓN DE SITUACIONES DE CAMBIO LINEAL:
UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE MEDIANTE EL
ESTIRAMIENTO DE UN RESORTE**

Autora:

María Cecilia Bularz Concha

Profesor Guía:

Héctor Silva Crocci

**Tesis para optar al grado de Magíster en
Educación Matemática**

Santiago – Chile

2024

Resumen

Este trabajo de titulación propone un rediseño de enseñanza-aprendizaje para fortalecer la comprensión de situaciones de cambio lineal, tomando como contexto el estiramiento de un resorte. La propuesta se apoya en el simulador *PhET Interactive Simulations* y responde a una problemática identificada por la Teoría Socioepistemológica, la cual señala que el discurso matemático escolar (dME) tiende a centrarse excesivamente en objetos matemáticos abstractos, excluyendo los argumentos de variación presentes en fenómenos experimentales (Méndez y Zúñiga, 2017).

El rediseño se realiza una usanza de la categoría de modelación escolar Desarrollo de Redes de Usos del Conocimiento Matemático (DRUCM) propuesto por Méndez (2013), que promueve la modelación en tres momentos: observación e identificación de variables, análisis local y global mediante tablas y gráficas, y ajuste de los parámetros del fenómeno.

El objetivo general de este trabajo es formular un rediseño de actividades basadas en la modelación del estiramiento de un resorte mediante el uso de tecnología, con el fin de fortalecer los argumentos de variación en el estudio de cambios lineales.

La ingeniería didáctica fue utilizada como metodología para vigilar los aspectos epistemológicos de la propuesta de enseñanza-aprendizaje. A través del proceso de descripción epistemológica del diseño y el análisis de las respuestas obtenidas durante su implementación, se destacan dos resultados clave.

En primer lugar, la propuesta de modelación de situaciones de cambio lineal comienza con la experimentación del fenómeno, permitiendo el estudio de las variaciones locales y globales para formular una expresión algebraica que capture de manera adecuada el fenómeno. Este enfoque contrasta con los textos escolares tradicionales, que suelen dar prioridad a la expresión algebraica como base para la aplicación de modelos matemáticos.

Por otro lado, se observa una tendencia en el discurso matemático escolar que tiende a excluir los argumentos relacionados con las variaciones en el estudio de las funciones de cambio lineal, limitando así una comprensión más profunda y contextualizada de los fenómenos estudiados.

Palabras clave: variación lineal, modelación escolar, socioepistemología

Tabla de Contenido

ÍNDICE DE TABLAS	6
ÍNDICE DE GRÁFICOS	7
ÍNDICE DE FIGURAS	8
INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO I.....	12
Problemática y Antecedentes Históricos de Modelación	12
1.- Antecedentes Históricos	13
1.1.- Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas	13
1.2.- Obstáculos o Dificultades en Modelación	15
1.3.- Problemática	18
1.4.- Pregunta de Investigación	20
1.5.- Objetivos	20
CAPÍTULO II.....	21
Marco Teórico	21
2.- Marco Teórico	22
2.1.- El discurso matemático escolar: fuente de sentido del programa socioepistemológico	22
2.2.- Categoría de Modelación escolar: Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático (DRUCM)	23
2.3.- Categoría de Modelación Escolar propuesta por Méndez (2022)	26
CAPÍTULO III.....	28
Marco Metodológico	28
3. Marco Metodológico	29
3.1.- Ingeniería Didáctica	29
3.2.- Muestra	30
3.3.- Estudio de Casos	31
3.4.- Diseño Metodológico	32
CAPÍTULO IV	33
Diseño de la Propuesta Didáctica	33
4.- Momentos del Diseño de las Actividades y su Justificación Teórica	34
4.1.- Rediseño de la Propuesta de Modelación	34
4.2.- Habilidades del Currículo Ligadas al Rediseño	36
4.3.- Matemática Ligada al Rediseño del Modelo Matemático	37

4.4.- Condiciones del Modelo:	46
4.5.- Estructura del Rediseño	47
4.6.- Análisis a Priori	49
CAPÍTULO V	66
Análisis de Resultados.....	66
5.- Análisis de Resultados	67
5.1.- Análisis de respuestas de los participantes.	67
CAPÍTULO VI	78
Conclusiones	78
6.- Conclusiones	79
6.1.- Conclusiones Actividad 1	80
6.2.- Conclusiones Actividad 2	80
6.3.- Conclusiones Actividad 3	81
6.4.- Conclusión General:	81
6.5.- Propuestas de mejora:	82
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS	83
ANEXO: PROPUESTA	86
Actividad 1	86
Actividad 2:	88
Actividad 3:	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.....	39
Tabla 2.....	40
Tabla 3.....	41
Tabla 4.....	42
Tabla 5.....	51
Tabla 6.....	53
Tabla 7.....	56
Tabla 8.....	57
Tabla 9.....	59
Tabla 10.....	60
Tabla 11.....	62
Tabla 12.....	63
Tabla 13.....	68
Tabla 14.....	71
Tabla 15.....	73
Tabla 16.....	76

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1.....	42
Gráfico 2.....	43
Gráfico 3.....	45
Gráfico 4.....	56
Gráfico 5.....	57
Gráfico 6.....	59
Gráfico 7.....	60
Gráfico 8.....	62
Gráfico 9.....	63
Gráfico 10.....	64
Gráfico 11.....	64

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.a.....	19
Figura 1.b.....	19
Figura 2.....	24
Figura 3.....	25
Figura 4.....	25
Figura 5.....	26
Figura 6.....	32
Figura 7.....	41
Figura 8.....	44
Figura 9.....	48
Figura 10.....	49
Figura 11.....	58
Figura 12.....	58
Figura 13.....	69
Figura 14.....	69
Figura 15.....	72
Figura 16.....	72
Figura 17.....	72
Figura 18.....	74
Figura 19.....	74
Figura 20.....	74
Figura 21.....	76
Figura 22.....	76
Figura 23.....	77
Figura 24.....	77

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, la integración de herramientas tecnológicas ha abierto nuevas oportunidades para mejorar la comprensión y aplicación de conceptos fundamentales, como el cambio lineal. Este trabajo propone una propuesta de enseñanza-aprendizaje basado en el uso del simulador interactivo PhET, con el objetivo de abordar la modelación del estiramiento de un resorte.

La problemática que se aborda surge de una tendencia en el discurso matemático escolar (dME) a centrarse en los objetos matemáticos de manera aislada, excluyendo los argumentos de variación y dejando de lado la comprensión funcional y contextual del conocimiento matemático. La Teoría Socioepistemológica señala que este enfoque tradicional limita la capacidad de los estudiantes para aplicar el conocimiento matemático en situaciones reales de cambio y variación, lo que resulta en un aprendizaje poco significativo.

Para contrarrestar esta problemática, el presente trabajo se realiza una usanza del modelo de Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático (DRUCM) propuesto por Méndez (2022), el cual promueve la modelación matemática como un proceso de construcción del conocimiento en un contexto social y experimental. Este enfoque permite que los estudiantes comprendan y apliquen conceptos de cambio lineal en un entorno experimental, como el que se plantea a través de la simulación del estiramiento de un resorte. La propuesta fomenta la exploración de la variación tanto local como global de este fenómeno, apoyándose en una metodología que articula lo tabular, gráfico y algebraico.

El objetivo general de este trabajo es diseñar una propuesta de modelación que utilice la tecnología para fortalecer los argumentos de variación en situaciones de cambio lineal. Para ello, se desarrollan actividades de aprendizaje estructuradas en tres momentos: observación y selección de variables, análisis de las variaciones mediante tablas y gráficas, y ajuste de las tendencias del fenómeno, concluyendo con la formulación de una expresión algebraica que

modele la situación del estiramiento del resorte. Esta expresión corresponde al modelo lineal $f(x) = ax + b$, promoviendo una articulación entre los diferentes enfoques de la modelación.

La vigilancia epistemológica del rediseño se lleva a cabo mediante la metodología de Ingeniería Didáctica de Artigue, la cual permite una evaluación cualitativa de las actividades propuestas en cuanto a la comprensión y aplicación de conceptos de cambio lineal. Con ello, se responde a la pregunta de investigación: ¿Cómo fortalecer los argumentos variacionales en situaciones de modelación que involucran la función lineal?

Los resultados obtenidos permiten concluir que, con el rediseño de la situación de modelación, se facilita la identificación de patrones de variación del cambio lineal y se fortalece el uso del conocimiento matemático en contextos de modelación.

En función de lo expuesto, este trabajo de titulación está estructurado en seis capítulos. El primer capítulo presenta los antecedentes históricos de la modelación matemática en la historia de las matemáticas, las dificultades y obstáculos comunes en la resolución de tareas de modelación, y la problemática que se aborda, que revela la exclusión de los argumentos de variación en el discurso matemático escolar. Además, se presentan la pregunta de investigación y los objetivos de este estudio.

El segundo capítulo describe el marco teórico y la categoría de modelación escolar que se utilizará para configurar la propuesta de enseñanza-aprendizaje, centrada en el estudio del estiramiento de un resorte, con el objetivo de fortalecer la modelación de situaciones de cambio lineal.

El tercer capítulo expone los aspectos metodológicos, detallando el enfoque de la investigación y la ingeniería didáctica como metodología para vigilar epistemológicamente la propuesta de enseñanza-aprendizaje, orientada a fortalecer la modelación de situaciones de cambio lineal.

En el cuarto capítulo se presenta la configuración de la propuesta didáctica, detallando las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica: el análisis preliminar y el análisis a priori. En la primera

fase, se describen los aspectos matemáticos, curriculares y didácticos del diseño, y en la segunda fase, se detallan las actividades, su propósito y las posibles respuestas que se esperan obtener durante la implementación del rediseño.

El quinto capítulo presenta los resultados obtenidos, confrontándolos con los resultados esperados para cada una de las tres actividades. Los resultados se organizan en tablas, donde se identifican los logros y dificultades presentados, y se ofrecen conclusiones generales y propuestas de mejora.

Finalmente, el sexto capítulo expone las conclusiones generales, relacionadas con el rediseño propuesto sobre el estudio de la variación en situaciones de cambio lineal.

CAPÍTULO I

Problemática y Antecedentes Históricos de Modelación

1.- Antecedentes Históricos

1.1.- Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas

El concepto de función ha estado ligado a la modelación de procesos de variación y que, por tal razón investigadores como Carlson, et al. (2003), Dolores & Cuevas (2007), Posada & Villa-Ochoa (2006) y Sierpinska (1992) han centrado su atención en la forma en que la variación puede convertirse en un eje fundamental para una didáctica de este concepto.

A lo largo de la historia, se reconoce al periodo que se ubica entre los siglos XVI y XVII, como uno de los más fecundos de las matemáticas, periodo en el que las matemáticas se traducen a la naturaleza, y ésta, obedece a reglas o leyes matemáticas.

Conocer o comprender la naturaleza, el universo, dinámicas sociales, entre otros, ha sido una característica en diferentes periodos históricos, es así como el uso de modelos matemáticos para describir al mundo se divide en cuatro etapas, que según el historiador Israeli, G. (1996) son las siguientes:

1°.- La época pitagórica en la antigua Grecia, en la que el mundo podía describirse aplicando relaciones entre números, en esta época, el uso de las matemáticas estaba ligado a una visión religiosa.

2°.- La revolución científica de Galileo que impone una visión en la que las leyes que rigen la naturaleza están escritas en lenguaje matemático.

3°.- La visión mecanicista del universo, influenciada por la mecánica de Newton en la que 'predomina el pensamiento científico, momento en el que todos los fenómenos del universo resultan del movimiento de los cuerpos y están regidos por la mecánica de Newton.

4°.- Modelos matemáticos o matemática aplicada, que inicia a principios del siglo XX y se opone a la idea mecanicista.

Esta idea de modelación ligada a la visión de la actualidad es considerada fundamental en la enseñanza de las matemáticas, la que se divide en dos grupos según sus perspectivas u

objetivos comunes en “modelación en el aula e investigación acerca de su uso”, compartiendo ambas la importancia que tiene la modelación en la enseñanza de la matemática.

Freudenthal (1968) introduce una teoría en la que se considera a la matemática como una actividad humana, la que se desarrolla a partir de modelos de situaciones en contexto real, la que reconoce dos tipos de matematización: una horizontal, que implica el proceso desde la situación real hacia los símbolos, y otra vertical, que describe los cambios que sufre la expresión del modelo dentro del propio mundo de los símbolos (Freudenthal, 1991).

Bienbengut y Hein (2007, p.12) conciben a la modelación matemática como un proceso a través del cual se obtiene un modelo, Bassanezi (2002) afirma que es un proceso dinámico y que no solo se usa para la obtención de un modelo sino para su validación, esto es, la modelación es una abstracción de la realidad que permite generalizar, predecir y validar los saberes sobre ella misma por medio de situaciones reales.

Villa- Ochoa et al. (2009), afirma que la modelación matemática posibilita espacios propios de la actividad científica en el aula escolar, y su mayor riqueza a nivel didáctico se genera en contextos científicos, en los que se experimenta, observa, cuestiona, conjetura, generaliza, valida, entre otros.

Esta necesidad que ha manifestado el hombre, a lo largo de la historia del universo o comprender su comportamiento, junto con el desarrollo de la habilidad de modelar, establecida en las bases curriculares chilenas y de otros países de Latinoamérica, justifica esta propuesta de un diseño de modelación, utilizando el modelo DRUCM.

1.2.- Obstáculos o Dificultades en Modelación

Un obstáculo epistemológico, concepto planteado por Gastón Bachelard, en el libro “La formación del espíritu científico”, (vigésimo tercera edición, 2000) , corresponde a lo que hay entre el deseo de conocimiento científico y el objeto que estudia, es decir, los obstáculos epistemológicos se caracterizan por la tendencia a confiar en experiencias intuitivas engañosas, por pretender generalizar siempre desconociendo que hay situaciones particulares que no se ajustan a dicha generalización y por el lenguaje natural.

Para Brousseau (1983, pág. 19) un obstáculo se hace evidente al presentarse errores que se reproducen y son persistentes, por lo tanto, hay que diferenciar entre obstáculos, dificultades y errores, que son conceptos diferentes. Las dificultades y errores se han de convertir en obstáculos cuando no son superados.

Bachelard y Brousseau caracterizan un obstáculo como un conocimiento que el individuo posee, que ha funcionado para resolver ciertos problemas y lo utiliza en nuevos contextos sin éxito.

De igual forma, para Astolfi (1994, 2003) el obstáculo epistemológico es un tipo de conocimiento ya disponible, a menudo instalado desde hace mucho tiempo en la mente de los sujetos, lo representa un modo de pensar económico, cómodo y funcional para el sujeto. Se pueden caracterizar los obstáculos epistemológicos como modos de razonar que cumplen con tres características (González Galli y Meinardi, 2011, 2015, 2016):

1. Transversalidad: Tienen cierto grado de generalidad en cuanto a los fenómenos que permiten explicar. De esta manera subyacen a concepciones de diferentes dominios del conocimiento.
2. Funcionalidad: Tienen una función explicativa para el sujeto. Generan un entramado entre los conceptos con el cual los sujetos describen, explican y predicen el mundo en el que viven.
3. Conflictividad: Dificultan el aprendizaje y/o aceptación del modelo científico que se quiere enseñar, en tanto que explican el mismo fenómeno que explica el modelo científico de referencia.

Socas (1997) indica que los obstáculos se pueden minimizar al superar las dificultades, por lo tanto, es relevante poder identificar dichas dificultades al momento de planificar actividades didácticas en torno a un objeto matemático.

De acuerdo con estudios realizados por Plaza (2016), al momento de llevar a cabo procesos de modelación matemática, los obstáculos que se presentan tienen relación con lo conceptual, cognitivo y didáctico. Según estudios realizados por Guerrero (2016) y Socas et al. (2016) estas dificultades tienen relación con contenido matemático y con las fases de la modelación matemática (descripción, manipulación, predicción, validación).

Socas (2007) identificó los orígenes de algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas:

1. En el orden y disposición de elementos sugeridos por el docente, como es el caso de libros de texto inadecuados o la propuesta de experiencias y conceptos inadecuados de la actividad propia de la modelación matemática.
2. Complejidad de los objetos matemáticos. Especialmente cuando en estos se presentan conflictos en los procesos de comprensión y comunicación.
3. Especificidades en los procesos de pensamiento matemático. Se halla presente en la interpretación y comprensión para seguir un argumento lógico en las demostraciones formales.
4. Procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas. Ello involucra la institución, el currículo y los métodos de enseñanza.
5. Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Se presentan en los diferentes estados del desarrollo intelectual de cada estudiante, fundamentalmente con respecto a la matematización y solución de un problema por medio de modelación matemática.
6. Otros aspectos sociales, económicos y culturales.

Hein (2007), Lingefjärd (2007). Aparisi y Pochulu (2013) y Bisognin (2012) identifican obstáculos a los que se enfrentan los docentes, en actividades de modelación matemática:

1. **Tiempo de clase:** Los docentes no disponen del tiempo de clase necesario y suficiente para poder abordar problemas a ser resueltos por modelación matemática.
2. **Acceso a tecnología:** Algunas veces, los salones de clase y/o los alumnos no cuentan con dotación de equipos tecnológicos adecuados y/o a programas especializados.
3. **Método de enseñanza:** Las tareas de modelación matemática traen consigo desafíos en las maneras de enseñar; algunas de ellas tienen que ver con las orientaciones para resolver la tarea, la producción y validación de modelos y la interacción con conocimientos de otras disciplinas.
4. **Alto número de estudiantes:** Inciden directamente en el logro de objetivos, por la forma en que puedan interactuar. La participación del estudiante juega un papel muy importante a lo largo del proceso de modelación.
5. **Necesidad de formación en los docentes:** Frente a ello, se deben promover experiencias que les permitan aprender sobre modelación y sobre la enseñanza de las matemáticas a través de este proceso.
6. **Ausencia de libros especializados:** El desconocimiento de estos por parte de los docentes se ha convertido en una barrera para la enseñanza-aprendizaje de la modelación matemática.
7. **Detección de inseguridad** en los estudiantes frente a los nuevos conocimientos.
8. **Las creencias de los profesores** sobre la modelación, la enseñanza y los intereses en los estudiantes juegan un papel que condiciona la manera en que el profesor hace lo que hace sobre modelación en sus aulas (Villa-Ochoa, 2015).

Otros tipos de obstáculos presentes en la modelación matemática, que reconocen los trabajos de Borromeo-Ferri (2011), Biembengut y Hein (2013) corresponden a:

1. Obstáculos sociológicos, principalmente con respecto a la identificación del entorno del problema, sus aspectos cognitivos y restricciones.

2. Muchos de los obstáculos surgen tanto de la transición entre los problemas y la representación matemática, como también en la interpretación de la solución.
3. A menudo se presentan bloqueos en la matematización, la simplificación de fórmulas simbólicas que producen las funciones más sofisticadas.
4. Falta de integración en el plan de estudios. Ausencia de acciones que articulen el ciclo básico y el ciclo profesional y que permitan un trabajo conjunto y continuo.
5. Falta de fuentes curriculares, ya que son rígidas frente a la organización, por contenidos.

1.3.- Problemática

La problemática que se pretende abordar con la propuesta de este rediseño y que devela la teoría Socioepistemológica, corresponde a la centralización en los objetos matemáticos del dME, en la que se excluyen argumentos de variación en el estudio de funciones, en particular la función lineal.

Esta exclusión es evidenciada por investigaciones realizadas por Buendía (2001), Cantoral et al. (2006), Cordero (2008), Soto (2010), entre otras, estos estudios revelan características de esta centralización del dME en los objetos matemáticos, como lo son: la atomización en los conceptos (no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales); el carácter hegemónico (supremacía de argumentaciones y significados frente a otras); la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo; el carácter utilitario y no funcional del conocimiento; la falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar, que como consecuencia generan un fenómeno de exclusión, no permitiendo una construcción del conocimiento matemático por parte de los actores: profesores, estudiantes (Soto y Cantoral, 2014).

Este discurso matemático escolar (dME) se apoya de una epistemología que apunta principalmente a los objetos matemáticos y no a su funcionalidad, como los problemas

propuestos en los textos escolares, situación que está presente en problemas como los siguientes, en los que la actividad está centrada en los objetos matemáticos:

1. En epidemiología se utilizan diversos modelos matemáticos para representar el número de personas contagiadas por una enfermedad. Por ejemplo, el número de personas contagiadas por un virus esta dado por la función:

$$f(t) = \frac{10\,000 \cdot (2,72)^t}{(2,72)^t + 9000}, \text{ donde } t \text{ es la cantidad de días.}$$

- ¿Cuántos contagiados se espera que habrá luego de 1, 4 y 10 días?
- Grafica la función en GeoGebra. ¿Qué ocurre al cabo de mucho tiempo?
- ¿Es una función creciente o decreciente?

Figura 1.a: Texto Matemática IV año medio (MINEDUC, 2019, pp.39)

- La temperatura de un lugar es de 5 °C al mediodía y después desciende 4 °C cada hora. ¿Cuál es la función afín que modela esta situación y cuál será la temperatura a las 20:00 horas?
- El nivel del agua de un estanque era inicialmente de 240 cm y su contenido desciende a razón de 6 cm por minuto. ¿Cuál es la función afín que modela esta situación y cuál será el nivel del agua luego de 40 min?

Figura 1.b: Texto Matemática 8º año básico (MINEDUC, 2020, pp.107)

De acuerdo con Méndez y Zúñiga (2017), este dME excluye argumentos variacionales en el estudio de la función lineal, situación que evidencia una de las principales dificultades de la modelación matemática, ya que es considerada como una herramienta que permite utilizar el conocimiento matemático aprendido, dejando fuera la construcción del conocimiento matemático, que para el análisis de lo lineal es necesario estudiar variaciones, tanto local como global del cambio lineal y por lo tanto desarrollar la capacidad de producir una matemática contextualizada y funcional. Para contrapesar esta problemática, con el rediseño se experimentará la simulación del estiramiento del resorte con el propósito de identificar las variables involucradas en la situación. En ese sentido, con las actividades del rediseño se promueve el estudio de las variaciones locales de la situación a través de datos tabulares, así

como las variaciones globales de la situación a través de gráficas, para posteriormente formular un modelo que retrate el estiramiento del resorte.

Para atender esta problemática se plantea la siguiente pregunta de investigación y objetivos.

1.4.- Pregunta de Investigación

¿Cómo fortalecer los argumentos variacionales en situaciones de modelación que involucran la función lineal?

1.5.- Objetivos

1.5.1.- Objetivo General

Proponer un rediseño de modelación basado en la situación del estiramiento de un resorte, utilizando tecnología, con el propósito de fortalecer los argumentos de variación en la descripción de situaciones de cambio lineal

1.5.2.- Objetivos Específicos

1. Describir los elementos epistemológicos del rediseño de modelación del estiramiento de un resorte que favorezcan el uso del conocimiento matemático en la descripción de situaciones de cambio lineal.
2. Analizar las evidencias obtenidas a partir de la experimentación del rediseño de la modelación del estiramiento de un resorte, aplicadas a la descripción de situaciones de cambio lineal.

En los siguientes capítulos se presentará el marco teórico, se detallarán los aspectos metodológicos y se describirá el proceso de rediseño, con el objetivo de responder a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos planteados.

CAPÍTULO II

Marco Teórico

2.- Marco Teórico

2.1.- El discurso matemático escolar: fuente de sentido del programa socioepistemológico

La Matemática Educativa se ocupa de los fenómenos didácticos ligados a la construcción y difusión del saber matemático (Cantoral y Farfán, 2003) en pos de atender la formación intelectual de los ciudadanos ante dicho saber. En el seno de esta disciplina se han constituido teorías específicas del contenido que explican el funcionamiento del sistema didáctico, en las cuales subyace una postura epistemológica ante la construcción del conocimiento matemático.

En este sentido, en el seno del *programa de investigación* socioepistemológico se ha formulado el *discurso Matemático Escolar* como un constructo que expresa la génesis de la problemática que busca solventar con sus líneas de investigación (Cordero, Cen y Suarez, 2010; Cantoral, 2013). En general, se señala que el *discurso Matemático Escolar* consensua la construcción y difusión de la matemática escolar a través de las estructuras y los conceptos matemáticos. Esto en desmedro de la funcionalidad que juega la matemática escolar en la vida cotidiana de los ciudadanos (Mendoza y Cordero, 2018).

Es decir, con las investigaciones que se cultivan en este programa se establece que las causas que suscitan los obstáculos que se generan en los procesos de aprendizaje de la matemática escolar no son exclusivas de cómo la transmitimos, sino que también están normadas por la manera en que se ha constituido el cuerpo epistemológico que sustenta al saber matemático escolar que se difunde (Cantoral, 1995).

El programa socioepistemológico reconoce al *discurso Matemático Escolar* como el elemento que define la problemática fundamental de la enseñanza de las matemáticas. A modo de contrapeso, propone su rediseño con base en la construcción social del conocimiento matemático (Gómez, Silva-Crocci, Cordero y Soto, 2015).

Es por ello que el programa de investigación socioepistemológico busca ofrecer un rediseño de ese discurso Matemático Escolar a través de categorías del conocimiento matemático y así, en

consecuencia, se pueda construir otro discurso que ofrezca marcos de referencia donde se resignifique su construcción.

2.2.- Categoría de Modelación escolar: Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático (DRUCM)

El rediseño de modelación propuesto se basa en el modelo de **Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático (DRUCM)**, propuesto por Méndez (2013) y fundamentado en la Teoría Socioepistemológica. Este modelo promueve la modelación como una categoría clave para resignificar el **discurso Matemático Escolar (dME)**, fortaleciendo así el uso del conocimiento matemático.

El modelo DRUCM nace de la teoría socioepistemológica, que no ignora la epistemología del conocimiento matemático, sino que amplía su enfoque al estudiar las interacciones que originan la construcción del conocimiento en los contextos sociales en los que se lleva a cabo.

Este modelo postula una categoría de conocimiento matemático que articula saberes sobre lo lineal, mediante la identificación de tipos de variación. Se basa en las categorías propuestas por Arrieta (2003), Cordero (1998, 2003), y Suárez (2008), quienes han estudiado por separado la construcción del conocimiento matemático y su uso en situaciones de transformación y predicción en el estudio de variaciones.

La socioepistemología concibe la modelación como una construcción de conocimiento en sí misma, que se desarrolla al enfrentarse a situaciones en las que se ponen en juego los conocimientos de quien modela (Suárez, 2014; Arrieta, 2003). Esta actividad no solo transforma al objeto matemático, sino que también se resignifica, privilegiando las herramientas sobre el lenguaje de los objetos. Así, no se trata solo de enseñar el proceso de modelación, sino de construirlo en el contexto del cual emerge, y de desarrollarlo en situaciones subsiguientes. En este sentido, se logra el desarrollo del uso del conocimiento matemático.

Los estudios realizados por Cordero y Suárez destacan la función de la gráfica como herramienta para caracterizar variaciones globales. Esta función surge de la necesidad de observar

comportamientos de variación en gráficos para determinar tendencias y comportamientos. De aquí surge la **Categoría de Cordero (1998): "Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF)"**, que propone diseños de situaciones para observar comportamientos gráficos y analizar patrones gráficos y analíticos en su variación global. Esta categoría reconoce la graficación como una forma de modelación que permite interpretar y predecir comportamientos gráficos mediante la comparación con otros.

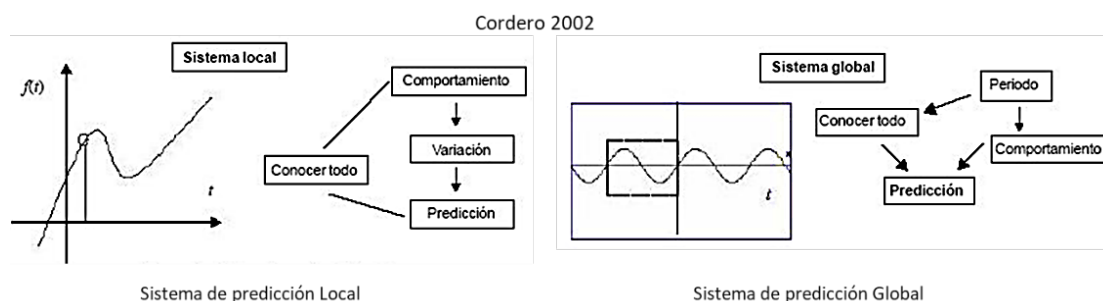


Figura 2: Modelo de predicción de funciones periódicas (Buendía, 2006, pp.239)

La **Categoría de Suárez (2008), Modelación – Graficación (M-G)**, representa un eje para desarrollar acciones dentro de un sistema didáctico, mediante el diseño de situaciones de modelación del movimiento. La hipótesis fundamental de esta categoría es que la variación se resignifica a través de la modelación-graficación.

Estas categorías permiten identificar los usos de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento y caracterizar comportamientos a través de variaciones globales y locales.

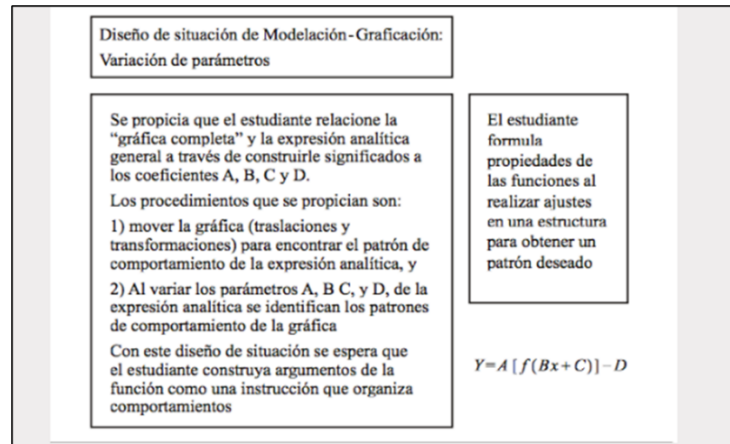


Figura 3: Diseño de situación de modelación graficación (Suárez y Cordero 2008, p.53)

La **Categoría de Arrieta (2003), Numerización de los Fenómenos**, se refiere a las construcciones generadas en situaciones de experimentación, donde se identifican variables y patrones de variación en los datos obtenidos del fenómeno o situación experimentada. Estos datos permiten predecir comportamientos de variación, lo que da lugar al uso de tablas y expresiones algebraicas como herramientas para organizar y predecir los resultados experimentales. Las prácticas de modelación comienzan con la recolección de datos numéricos de un fenómeno y la construcción de modelos numéricos a partir de las variaciones locales.

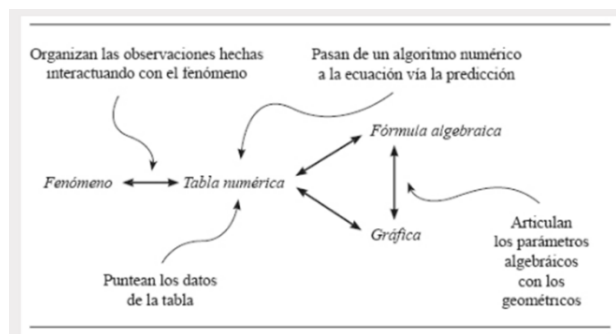


Figura 4: Numeración de los fenómenos (Arrieta, 2015, pp. 37)

2.3.- Categoría de Modelación Escolar propuesta por Méndez (2022)

Desde la Teoría Socioepistemológica, la **categoría de modelación escolar (CME)** está formulada a partir del estudio de la experimentación o experiencia evocada, las variaciones locales y globales, y el ajuste y tendencia de los comportamientos de variación. Con esto, surgen los usos de conocimiento para lo gráfico, lo numérico y lo analítico, articulados a través de prácticas visibilizadas en la argumentación de los participantes (Méndez, 2022). Las acciones del proceso de modelación matemática se describen en el siguiente esquema, adaptado de Méndez y Cordero (2014).



Figura 5: Acciones y prácticas de proceso de modelación matemática, esquema adaptado de Méndez y Cordero (2014).

A partir de la articulación de estas categorías, todas ellas generadoras de desarrollos en el uso del conocimiento matemático, se presenta la categoría de modelación propuesta por Méndez (2013): **DRUCM**, el Modelo de Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático. Este modelo tiene como objetivo promover el desarrollo del uso del conocimiento matemático y caracterizar comportamientos de variación en el estudio de situaciones experimentales. El modelo está estructurado en tres momentos:

1. Experimentación u observación del fenómeno de variación e identificación de las variables involucradas.

2. Estudio de las variaciones locales y globales del fenómeno a través de tablas y gráficas.
3. Ajustes y tendencias del fenómeno.

Estos momentos se utilizarán para configurar la propuesta de enseñanza-aprendizaje, centrada en el estiramiento de un resorte, con el objetivo de fortalecer la modelación de situaciones de cambio lineal.

CAPÍTULO III

Marco Metodológico

3. Marco Metodológico

Para la vigilancia epistemológica del rediseño se utiliza como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1995), la que se caracteriza por ser cualitativa con alcance descriptivo, método que permite estudiar el rediseño de modelación de la longitud del estiramiento de un resorte desde la concepción, la observación y el análisis de la secuencia de la situación de aprendizaje. Esta metodología cualitativa, permite la validación interna de diseños a través de estudios de caso, que, para la recolección de información y posterior contrastación del análisis a priori y a posteriori, considera a estudiantes del Magister en Educación Matemática, de la Universidad de Santiago de Chile.

3.1.- Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica, como modelo de investigación, surge en los años 80 para dar respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas. Su importancia se evidencia por el impacto de los trabajos realizados en Francia por investigadores como Brousseau (1998, 2004) y Douady (1984). Como metodología de investigación se caracteriza por:

- Ser una investigación basada en intervenciones didácticas.
- La validación es interna y se fundamenta en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Según Artigue (1995), en la metodología de investigación, basada en la ingeniería didáctica, se distinguen cuatro fases:

3.1.1.- El análisis preliminar, que considera tres dimensiones fundamentales dentro de la ingeniería didáctica, que corresponden a:

- La dimensión epistemológica asociada a las características del saber matemático en juego.

- La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

3.1.2.- El análisis a priori, donde se analiza que podría aprender un estudiante, en función de sus posibilidades de acción, decisión, control y validación, una vez puesta en práctica una situación de aprendizaje. Además, se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje (Villa Ochoa et al. 2018)

3.1.3.- La experimentación, en la que se ejecutan los diseños y se recogen los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori.

3.1.4.- Análisis a posteriori y conclusión, éste se basa en el análisis de los datos recogidos en la experimentación, para la confrontación con el análisis a priori.

En esta última fase, además, se realiza el proceso de validación interna mediante la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, y se realizan los ajustes necesarios del rediseño y conclusiones.

3.2.- Muestra

Para el estudio de caso el rediseño de modelación del estiramiento de un resorte será aplicado a seis estudiantes de posgrado, del Magister en Educación Matemática, impartido por la Universidad de Santiago de Chile, que se encuentren cursando el segundo semestre, que además de validar y vigilar epistemológicamente el diseño, dotará a los estudiantes del Magister de herramientas socio epistemológicas, con el modelo de Magaly Méndez (DRUCM), para la construcción social del conocimiento matemático.

Por otra parte, la elección de la muestra pretende contribuir con el perfil de egreso de los estudiantes, que en uno de sus puntos declara que, “El egresado del Magister en Educación Matemática de la USACH, debe ser capaz de: Diseñar y evaluar propuestas didácticas para el fortalecimiento de la enseñanza, el aprendizaje y desarrollo de habilidades de pensamiento matemático...”,

3.3.- Estudio de Casos

En la investigación cualitativa, el estudio de caso es una estrategia para la investigación profunda de un fenómeno en su contexto real. Los estudios de caso pueden estar compuestos por una persona o un grupo de personas (simple o compuesto), dependiendo de la unidad de análisis puede ser: holístico o detallado, dependiendo del objetivo: descriptiva, demostrativa, generativa, y según su temporalidad, puede ser diacrónica o sincrónica.

Las investigaciones realizadas por el método de estudio de casos pueden ser, según lo señala Sarabia (1999):

- Exploratorios: si el objetivo de la investigación es definir nuevas preguntas investigación o descubrir nuevos fenómenos.
- Descriptivos: si el objetivo es describir un fenómeno dentro de su contexto en forma detallada.
- Explicativos: si el objetivo es comprender relaciones específicas dentro del contexto estudiado.

Los métodos para la recopilación de datos, en la investigación de estudio de casos, se pueden obtener a través de entrevistas, las que pueden ser estructuradas, semi estructuradas o no estructuradas, a través de observaciones, en las que el investigador observa el caso en sus artefactos, en los que la fuente de información lo constituyen documentos y registros de archivo, por su parte, los artefactos se refieren a cualquier prueba física obtenida en el estudio.

Por lo tanto, los argumentos anteriores justifican la metodología de investigación elegida: “Ingeniería didáctica como metodología de investigación, a través del estudio de casos con alcance descriptivo”.

3.4.- Diseño Metodológico

El diseño de este trabajo cuenta con dos fases, las que se condicen con los objetivos específicos y que conducen al objetivo general, que corresponde a: Formular un rediseño de modelación con la situación del estiramiento de un resorte, con uso de tecnología, para fortalecer argumentos de variación en la descripción de situaciones de cambio lineal.

En la primera fase, relacionada con el primer objetivo específico, y atendiendo la problemática y la metodología de la ingeniería didáctica, se realiza el análisis preliminar, el diseño de las actividades, que corresponden a tres actividades, que están en directa relación con cada uno de los tres momentos de Méndez y el análisis a priori.

En la segunda fase, la que atiende al segundo objetivo específico, se realiza el análisis a posteriori, la contrastación con el análisis a priori, las conclusiones y ajustes del rediseño.

La figura (3) muestra un esquema del diseño, en la que se indica cada una de las fases del trabajo junto con los objetivos.

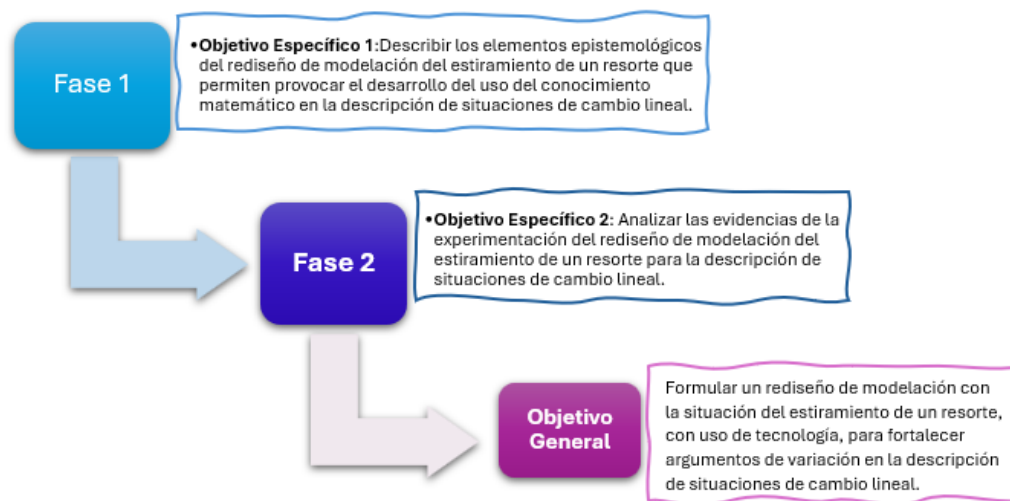


Figura 6. Diseño Metodológico

En el siguiente capítulo se detallará el proceso de rediseño, que incluye un análisis preliminar y un análisis a priori, con el objetivo de fortalecer la modelación de situaciones de cambio lineal, a través de una propuesta de enseñanza-aprendizaje basada en el estiramiento de un resorte.

CAPÍTULO IV

Diseño de la Propuesta Didáctica

4.- Momentos del Diseño de las Actividades y su Justificación Teórica.

A continuación, se presenta la configuración del rediseño de modelación de la situación del estiramiento de un resorte, el que se compone de un análisis preliminar, en el que se destacan las contribuciones a lo curricular, así como la vigilancia epistemológica del modelo. Además, este apartado contiene el análisis a priori del diseño, en el que se describe cada una de las actividades de la propuesta.

4.1.- Rediseño de la Propuesta de Modelación

El rediseño, basado en el modelo DRUCM, consiste en modelar linealmente el estiramiento de un resorte, el cual se realiza en un ambiente virtual, con uso de tecnologías, simulador *Phet Interactive Simulations*, con el que se podrá interactuar con el fenómeno “*Estiramiento de un Resorte*”, reconociendo variables, dominio y recorrido, analizar variaciones tanto locales como globales para concluir en el modelo analítico, que para esta experiencia corresponde a un modelo lineal, $f(x) = mx + n$.

Las etapas del diseño están en concordancia con los momentos que propone Méndez (2013) en el modelo DRUCM:

4.1.1.- Momento 1: Experimentación.

De acuerdo con Méndez (2022), a partir de la experimentación realizada, estiramiento del resorte, se analiza la experiencia generando así una situación de aprendizaje. Desde la observación se analiza ¿qué sucede y por qué sucede el fenómeno de la situación que se genera en la experimentación?, identificando y organizando los diferentes elementos que están presentes en la experimentación y producen o provocan el fenómeno, estos elementos corresponden a las variables y parámetros que cobran sentido en las condiciones iniciales de la situación de aprendizaje. Para la elección de las variables, en este primer momento, se realizan las siguientes preguntas: ¿Cuáles se pueden medir? y ¿Cómo se relacionan entre ellas?, esto con la intencionalidad de que se describa e interprete lo que se observa durante la experimentación, para luego tomar decisiones referentes a la dependencia o independencia de las variables,

proceso que será fundamental para el posterior análisis de las variaciones, tanto locales como globales de su comportamiento del fenómeno y el modelo lineal evocado.

4.1.2.- Momento 2: Variaciones locales y globales.

Según Méndez (2022), Este momento implica estudiar y cuantificar la variación de cada variable y la variación conjunta de ellas, lo que promueve generar usos que permita responder cómo está variando cada una, lo que permitirá identificar si la variación es creciente o decreciente y si las variables toman valores naturales, enteros o reales (esta última permite identificar dominio y recorrido)

Otros usos responderán a la pregunta: ¿Cómo cambian las variables? Es decir, referido a la cuantificación de los cambios, a la generación de patrones de la variación, y a la interpretación de razones constantes; en este caso en relación con la situación de aprendizaje “estiramiento del resorte”.

Este momento permitirá, además, identificar el uso de tablas de datos, gráficas o expresiones algebraicas, al analizar las variaciones locales (tabla) o globales (gráficos), predecir (expresión algebraica) sobre los comportamientos mediante el cálculo de variaciones en intervalos conocidos y comparar estas variaciones mediante la razón de sus incrementos.

4.1.3.- Momento 3: Ajustes.

Este momento, según lo señalado por Méndez (2022), se guía por los usos que conllevan al ajuste de la variación o a la identificación de las tendencias en la variación, provocando una aproximación a valores específicos para predecir cambios puntuales, lo que implica resignificar los usos y motivar su articulación entre lo tabular, lo gráfico y lo algebraico, para valorar su funcionalidad ante la situación de aprendizaje, es este caso particular, el estiramiento del resorte.

En este momento también se genera una adaptación de los usos, los que han sido promovidos por el cambio en las condiciones de la situación de aprendizaje, esto puede ser:

- Al modificar las condiciones de la situación.

- Al cambiar la situación misma.

Lo anterior implicará formular redes de usos, generando un consenso sobre lo que caracteriza un comportamiento, en el caso de la situación de aprendizaje del estiramiento del resorte, comportamiento lineal, que nace a través de las redes de usos que se gestaron en la modelación del fenómeno estudiado.

4.2.- Habilidades del Currículo Ligadas al Rediseño

El currículum escolar (MINEDUC, 2019), indica que se deben desarrollar, a lo largo de la educación en la escuela, las habilidades de: argumentar, comunicar, modelar, representar y resolver problemas. Con respecto a la modelación, se espera que el estudiante use modelos, entienda y aplique correctamente las reglas que los definen, seleccionando modelos y comparándolos con fenómenos de la realidad y ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado. En cuanto a la habilidad de representar, ésta le permite al estudiante transitar fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica para luego avanzar hacia un lenguaje simbólico.

En este rediseño, la representación concreta se traduce en el fenómeno del estiramiento de un resorte; la representación pictórica se traduce como las representaciones gráficas del fenómeno y el lenguaje simbólico se traduce como la expresión algebraica del cambio lineal, que corresponde a la expresión: $L = m \cdot M + L_0$, donde L representa la longitud del estiramiento del resorte, L_0 la longitud inicial, M la masa a la que será sometido el resorte y m la razón de cambio en el estiramiento.

En este sentido, este rediseño pretende fortalecer el desarrollo de estas habilidades y atender, además, la nueva propuesta curricular, que:

“...considera la construcción social del conocimiento matemático, el cual comprende que éste es transformado en conocimiento funcional mediante el desarrollo de significados matemáticos compartidos mediante de procesos comunicativos. Esto implica que la esencia de la actividad

matemática debe realizarse de manera colaborativa considerando contextos intramatemáticos, cotidianos y sociales, que doten de significados al conocimiento. De esta forma se espera que las niñas, niños y estudiantes sean capaces de expresar estrategias y formas de pensar mediante la comunicación y argumentación matemática, dado que todo proceso de aprendizaje está mediado por el lenguaje, promoviendo su construcción.”

En esta propuesta curricular, se da importancia al uso del conocimiento matemático escolar, desde lo cotidiano y social, planteado desde el Modelo de Competencia Matemática, a través del cual se articulan contenidos y habilidades matemáticas adquiridas en su trayectoria escolar, con prácticas en contextos socioculturales, escolares y extraescolares, que favorezcan el uso del conocimiento matemático (Bases Curriculares de 1° Básico a 2° Medio. Propuesta de Actualización para Consulta Pública 2024, PP. 55).

Esta nueva propuesta planteada, interpretada desde la teoría socioepistemológica, permite fortalecer las habilidades, hasta ahora declaradas por el Mineduc, en la que la construcción social y uso del conocimiento matemático adquiere un rol relevante, enfocándose en una matemática funcional, no en el objeto matemático en sí mismo.

4.3.- Matemática Ligada al Rediseño del Modelo Matemático

El modelo matemático que se promueve en este rediseño es la función lineal, lo que se concluirá a través de la experimentación del estiramiento de un resorte, cuando al ir agregándole masas, éste aumente su longitud, este cambio en la longitud del resorte es constante por cada gramo que aumente la masa, lo que responde a un modelo lineal.

La función lineal se expresa algebraicamente de la siguiente forma: $y = m \cdot x + n$

En donde y es la variable dependiente y x la variable independiente, cuyas características se detallarán más adelante al especificar las condiciones de la experimentación, m representa la pendiente de la recta y n es el coeficiente de posición (intersección de la recta con el eje y). Se espera que en las actividades propuestas se pueda determinar el valor de la pendiente (m) e

interpretar su valor en el contexto del estiramiento del resorte, y el valor del coeficiente de posición (n) para plantear la expresión algebraica de la forma de (1). Además, se estimulará a la observación de las condiciones iniciales del experimento con el fin de concluir acerca de los factores que generan la variación de m y n .

La situación del estiramiento del resorte también puede ser abordada al considerar la fuerza de restauración, $F = M \cdot g$, aplicada al resorte, donde g es la aceleración de gravedad y M la masa, modelando así la Ley de Hooke, $F = k \cdot \Delta x + x_0$, en que k corresponde a la constante de elasticidad del resorte, Δx longitud del estiramiento, x_0 es la longitud inicial del resorte. Situación que no será abordada en las actividades planteadas, ya que para el rediseño planteado, la constante de elasticidad será considerada una variable control con el fin de neutralizar los efectos de la variable dependiente durante la experimentación, es decir, será un valor conocido establecido en las condiciones específicas de la experimentación, en que el objetivo de las actividades planteadas es analizar el cambio lineal en el estiramiento de resortes, los que tendrán diferentes características físicas.

4.3.1.- Definición de Variables:

Para la definición de las variables, se espera que sea el participante de la experiencia quien determine las variables dependiente e independiente, definiendo la longitud del estiramiento como la variable dependiente y la masa como la variable independiente, ya que con ellas podrá observar y cuantificar las variaciones locales de cada variable y su variación conjunta, además, al fijar características físicas diferentes para dos resortes, esto con distintas constantes de elasticidad, se pueden observar variaciones en las variables que generan funciones lineales con diferentes pendientes.

4.3.2.- Variación Local

Las variaciones locales se analizan a través de datos tabulares, en la siguiente tabla (1) se presentan datos recogidos de la experimentación, en el caso de un resorte (R1):

Masa (grs.)	Long. del estiramiento del resorte R1 (cm)
0	0
50	0,8
70	1,2
90	1,5
110	1,8
130	2,2

Tabla 1

Al aumentar la masa de 0 a 50 grs. se observa una variación de 0 a 0.8 cm, luego al aumentar la masa en 20 grs. cada vez, se observa una variación constante de 0.3 cm aproximadamente, esto es, la longitud del estiramiento del resorte aumenta 0,3 cm por cada 20 grs. que aumenta la masa. A partir de estos resultados se puede predecir la longitud del estiramiento del resorte al aumentar la masa.

Por ejemplo, si la masa es de 210 grs., la longitud del estiramiento del resorte será aproximadamente de 3,1 cm.

Para determinar la longitud del estiramiento del resorte por cada gramo que aumenta la masa, se procede dividiendo la longitud del estiramiento, por cada 20 gramos, entre 20, así se obtiene la razón de cambio constante:

$$\text{Longitud del estiramiento del resorte por cada gramo que aumenta la masa: } \frac{0,3}{20} = \frac{1,5 - 1,2}{90 - 70}$$
$$= 0,015$$

Con lo que se obtiene la pendiente* o razón de cambio del modelo lineal.

(* Pendiente o razón de cambio: se usan ambas en un mismo sentido, para referirse al cambio de la situación de aprendizaje)

Al generalizar el procedimiento, se obtiene:

$$0,015 \cdot (m_2 - m_1) = l_2 - l_1 = \text{longitud del estiramiento del resorte por cada gramo}$$

que aumenta la masa, que corresponde a la pendiente, y también se puede expresar como:

$$\frac{l_2 - l_1}{m_2 - m_1} = 0,015, \text{ expresión con la que se obtiene la pendiente de una recta, conociendo dos}$$

puntos de sus puntos.

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos será:

$$m = : \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se debe tener en cuenta que al variar las condiciones físicas del resorte se obtendrá una razón de cambio o pendiente diferente.

Luego, con esta información, es posible determinar la longitud del estiramiento del resorte para masas que no están disponibles en el simulador, por ejemplo, si la masa aumenta de 0 a 20 grs. se puede inferir que la longitud del estiramiento del resorte es 0,3 cm; si aumenta de 0 a 5 grs, entonces la longitud del estiramiento del resorte será de $0,015 \cdot 5 = 0,075$ cm.

En la siguiente tabla (2) se muestran datos obtenidos al experimentar con un resorte R2, en que se han modificado sus condiciones físicas, en particular la constante de elasticidad de éste.

Masa (grs.)	Long. del estiramiento del resorte R2 (cm)
0	0
50	0,5
70	0,7
90	0,9
110	1,1
130	1,3

Tabla 2.

En esta situación, se observa que por cada 20 gramos que aumenta la masa, la longitud del estiramiento del resorte aumenta 0,2 cm de manera constante, por lo tanto, utilizando el

razonamiento anterior, se obtiene que por cada gramo que aumenta la masa, la longitud del estiramiento aumenta 0,01 cm.

Esto es: $\frac{0,9-0,7}{90-70} = 0,01$ la razón de cambio.

Con esta información, al igual que en ejemplo anterior, se podrá predecir la longitud del estiramiento de resorte para cualquier masa a la que sea sometido el resorte.

En la siguiente tabla (3), se presentan las variaciones de los dos resortes R1 y R2 que han sido sometidos a las mismas masas, en los que al cambiar las condiciones físicas de cada resorte también cambia la longitud de su estiramiento, en este caso se ha modificado la constante de elasticidad del resorte R2, considerándola mayor que la constante de elasticidad de R1.

Masa (grs.)	Long. del estiramiento del resorte R1 (cm)	Long. del estiramiento del resorte R2 (cm)
0	0	0
50	0,8	0,5
70	1,2	0,7
90	1,5	0,9
110	1,8	1,1
130	2,2	1,3

Tabla 3.

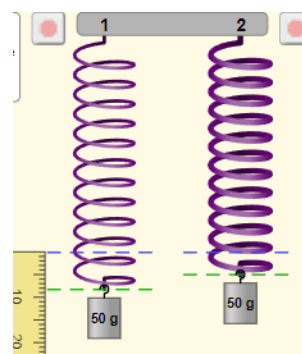


Figura 7.

En esta tabla (3) se observa que al ser mayor la constante de elasticidad del resorte R2, la longitud de su estiramiento es menor, concluyendo que, a menor constante de elasticidad del resorte, la longitud del estiramiento crece más rápido (es mayor) que en el caso de que el resorte tenga mayor constante de elasticidad.

Al analizar el comportamiento de la diferencia del estiramiento de ambos resortes, se obtienen diferencias aproximadamente constantes, y en consecuencia se observa un comportamiento que se aproxima a lo lineal, tal como se muestra en la tabla 4 y gráfico 1.

Masa (grs.)	Diferencia en la long. Estiramiento de ambos resortes R1 y R2
0	0
50	0,3
70	0,5
90	0,6
110	0,7
130	0,9

Tabla 4.

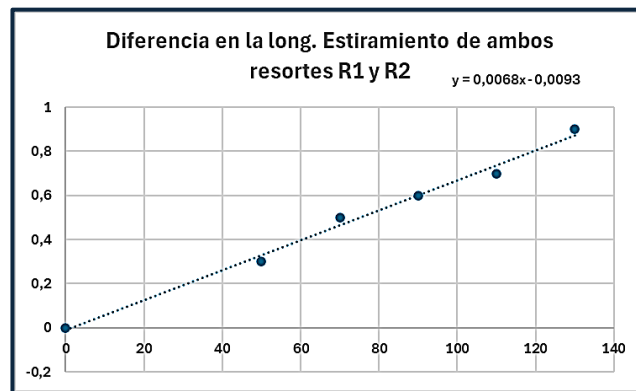


Gráfico 1.

4.3.3.- Variación Global

Se presentan a continuación las gráficas del comportamiento de dos resortes, con las mismas características físicas, considerando las variables antes definidas, longitud del estiramiento y masa. Para realizar las gráficas se considera, para el primer resorte (R1) la longitud total del resorte, incluida la longitud natural de éste, esto es, para $M_0 = 0$ grs. la longitud del resorte es $L_0 = 4,7$ cm (la longitud natural), que corresponde a la longitud del estiramiento para una masa de 0 grs., para el segundo resorte (R2) , para $M_0 = 0$ grs., no se considera su longitud natural, solo la longitud del estiramiento, que en este caso será $L_0 = 0$ cm. Para observar el comportamiento de los resortes de los resortes, análisis global, los resortes R1 y R2 se someterán, ambos, a una masa de 100 grs. y se trazarán las rectas que modelan cada fenómeno en un mismo gráfico, destacando en color rojo el comportamiento de el resorte 1 (R1) y en verde el del resorte 2 (R2).

Gráficas Longitud del estiramiento del resorte – Masa: Con igual constante de elasticidad y longitud natural del resorte.

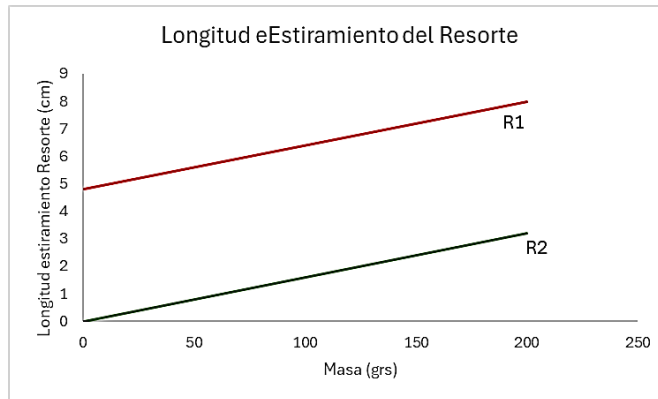


Gráfico 2.

Gráfica 2: Masa – Longitud del estiramiento, en que ambos resortes tienen las mismas características (igual longitud natural y constante de elasticidad) y se someten a masas iguales (100 grs.).

Como se puede observar en la gráfica (2), las gráficas de ambos resortes representan rectas crecientes, además al analizar sus pendientes, las rectas R1 y R2 resultan ser paralelas, es decir la longitud del estiramiento, en ambos resortes, aumenta a la misma razón por cada gramo que aumenta la masa.

Para determinar la pendiente de ambas rectas se recurre al cálculo de la tangente, una de las razones trigonométricas definidas en triángulos rectángulos, como:

"Tangente del ángulo se define por el cociente entre el cateto opuesto (CO) y el cateto adyacente (CA)"

En este caso, al considerar el ángulo agudo formado entre el eje x (o su paralela, en la recta $y=4.8$) y la recta correspondiente al resorte R2, destacada en color verde (o la recta correspondiente al resorte R1 destacada en color rojo), en que:

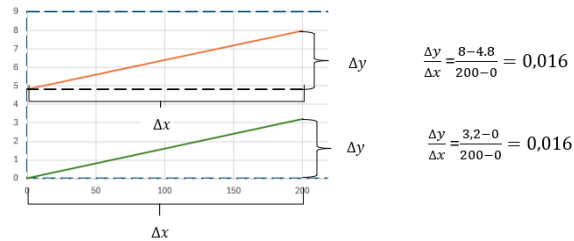


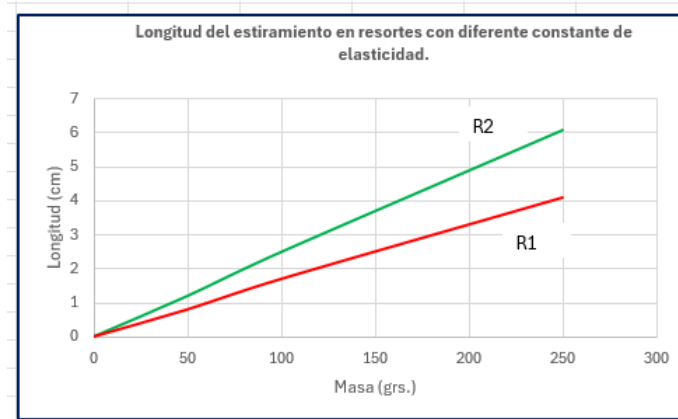
Figura 8.

Como ambas tangentes tienen el mismo valor numérico (figura 8), correspondiente a la pendiente, se concluye que las rectas son paralelas.

Otra forma de concluir que las rectas son paralelas es analizar las propiedades de los ángulos entre paralelas, análisis que no nos entregaría el valor numérico de la pendiente, sin embargo, nos entrega información respecto a la posición relativa de las rectas en el plano.

En consecuencia, las ecuaciones algebraicas que representan las rectas R1 y R2 son respectivamente R1: $y = 0,025x + 4.7$; R2: $y = 0,025x$, en las que se observa la misma pendiente, es decir, en ambas la longitud del estiramiento aumenta 0,025 cm. por cada gramo que aumenta la masa, razón por la cual, lo único común entre ellas es que la razón de sus incrementos es constante, bajo estas condiciones, no se puede propiciar que existan cambios en la expresión algebraica, además de una traslación en el eje y.

Gráficas Longitud del estiramiento del resorte – Masa: Con diferente constante de elasticidad (se considera la constante del resorte de R1 igual a 3 veces la constante del resorte R2) e igual longitud natural del resorte. (para efectos prácticos se considera la misma longitud natural del resorte, sin embargo, no es relevante para los resultados que se quiere obtener si solo se mide la longitud del estiramiento y no la longitud total de éste), además consideramos someter ambos resortes a masas iguales.



Gráfica 3: Masa – Longitud del estiramiento en resortes con diferente constante de elasticidad.

Al analizar la gráfica N° 3, se puede observar que, a masas iguales, en los resortes R1 y R2 la longitud del estiramiento es diferente, esto debido a la constante de elasticidad de cada uno, en consecuencia, se puede observar diferencias en las pendientes de las rectas R1 y R2.

Al calcular las pendientes de ambas rectas (utilizando 2 puntos conocidos de cada una) se puede visualizar esta diferencia.

Para la recta R1 la pendiente será, al considerar los puntos (0,0) y (100,1.7), la siguiente:

$$m_{R1} = \frac{0 - 1.7}{0 - 100} = 0,017 \frac{cm}{grs}$$

Para la recta R2 la pendiente, al considerar los puntos (0,0) y (100, 2.5), corresponde a:

$$m_{R2} = \frac{0 - 2.5}{0 - 100} = 0,025 \frac{cm}{grs}$$

De esta forma se evidencia que la mayor o menor longitud del estiramiento del resorte depende de sus características físicas, en particular de la constante de elasticidad que cada uno posea, la pendiente de la recta R1, con mayor constante del resorte, indica que la longitud del estiramiento aumenta 0.017 cm por cada gramo que aumenta la masa, en cambio la pendiente de la recta R2, con menor constante del resorte, indica que la longitud del estiramiento aumenta 0.025 cm por cada gramo que aumenta la masa, por lo que a mayor constante de elasticidad menor es la pendiente de la recta. (recordemos que la constante del resorte o constante de elasticidad del

resorte es una variable control, la que se define previamente a la experimentación, en este caso particular, la constante del resorte R1 (K_{R1}) es el triple de la constante del resorte de R2 (K_{R2}), es decir. $K_{R1} > K_{R2}$, y experimentalmente se prueba que la longitud del estiramiento del resorte R1 es menor que la longitud del estiramiento del resorte R2.

4.4.- Condiciones del Modelo:

Según lo mencionado anteriormente, se utiliza la función lineal para explicar el fenómeno del estiramiento de un resorte, considerando las variables: dependiente, longitud del estiramiento (L) en centímetros, variable independiente, la masa (M) en gramos, el cambio (l) en la longitud del estiramiento por cada gramo que aumenta la masa y L_0 , longitud inicial del resorte o longitud natural, que para las primeras actividades se considerará nula, por lo que la expresión algebraica del modelo sería la siguiente:

$$L = l \cdot M + L_0 = f(M)$$

4.4.1.- Dominio del fenómeno de experimentación:

Para definir el dominio de la función que modela el fenómeno de experimentación, se debe observar la variable independiente, que corresponde a la masa (medida en gramos), la cual inicia en cero y puede tomar solo valores positivos, además corresponde a una variable continua, es decir, en este caso, puede tomar cualquier valor real positivo además del cero. Por tanto, el dominio del fenómeno de experimentación corresponde a un subconjunto de los números reales, que matemáticamente se expresa por: $Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

4.4.2.- Recorrido del fenómeno de experimentación:

Para definir el recorrido de la función que modela el fenómeno de experimentación, se debe analizar la variable dependiente, que en este caso corresponde a la longitud del estiramiento del resorte (medida en centímetros), al igual que la variable independiente, inicia en cero y puede tomar solo valores reales positivos, correspondiendo, al igual que el dominio a:

$$Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

La experimentación del fenómeno del estiramiento del resorte se realizará en un ambiente virtual, utilizando simulador Phet Interactive Simulations, en el que las unidades de medida de las masas están en gramos y para medir la longitud del estiramiento del resorte este simulador cuenta con una regla que entrega las medidas en milímetros, las que deberán ser transformadas a centímetros según sea conveniente, por lo que los datos que sean registrados se presentarán como números decimales finitos.

Con respecto a la pendiente, ésta representa la variación o cambio en la longitud del estiramiento del resorte por unidad de masa (1 gramo), por tanto, en esta experimentación, solo podrá tomar valores reales positivos, ya que la longitud del resorte va aumentando, según se aumenten las masas a las que se somete. Si la experimentación consistiera en ir quitando masas del resorte, su longitud disminuiría, por lo que la pendiente de la recta que modela el fenómeno tomaría valores negativos (situación que en esta oportunidad no será abordada). En consecuencia, la pendiente $l \in \mathbb{R}$.

Según lo descrito anteriormente, para los valores de la pendiente (l), se desprende el siguiente análisis:

- a) Si $l < 0$ (negativa) la longitud inicial resorte L_0 , debe ser mayor que su longitud natural, la que irá disminuyendo en la medida que se le quitan masas al resorte, hasta alcanzar el valor de su longitud natural.
- b) Si $l > 0$, la longitud inicial del resorte, L_0 puede ser cero o puede considerarse como la longitud natural de éste.

4.5.- Estructura del Rediseño

En la siguiente figura (6) se observa un esquema que resume las actividades ligadas a cada momento del modelo DRUCM, propuesto por Méndez (2013), y que se incentivará a realizar a los participantes de la experiencia.

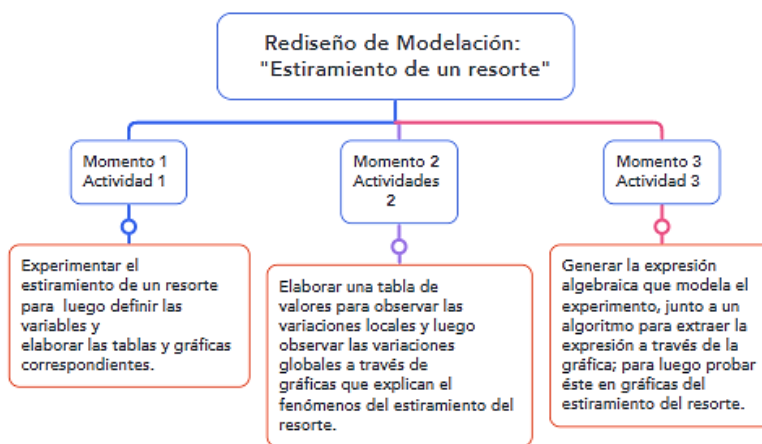


Figura 9.

Con las 3 actividades (o diseños de aprendizaje) señaladas en el esquema se pretende, responder a la pregunta de investigación y objetivos general y específicos, atendiendo lo siguiente:

- Desarrollar los usos que caractericen a la función lineal, los cuales se evidencian desde la toma de decisiones sobre la elección de las variables, el estudio de variación conjunta de las variables y la cuantificación de sus variaciones, tanto individuales como conjuntas.
- Ratificar las características de la función lineal, que a partir de la gráfica se podrá evidenciar la funcionalidad del conocimiento para el cálculo de la pendiente de una recta o generar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente. Los usos surgirán del análisis del comportamiento global y la vinculación con la situación concreta, en el que el énfasis está en la relación de las herramientas de variación con la situación en estudio.
- Diferenciar la función lineal y afín, reconociendo que lo común entre ambas es que la razón de sus incrementos es constante.

Para las actividades, se provee a los participantes de un escenario virtual, simulador Phet Interactive Simulations, para que puedan concebir la modelación de situaciones en un contexto real con funciones, en particular la función lineal, con base en la teoría Socioepistemológica y sustentado por la categoría de modelación de Méndez, con el modelo de desarrollo de redes de

uso de conocimiento matemático (DRUCM). Cada una de las tres actividades se asocia a uno de los momentos de Méndez, y tienen como finalidad vigilar epistemológicamente el uso de este conocimiento.

4.6.- Análisis a Priori

“Modelando el Estiramiento de un Resorte”

4.6.1.- Momento 1: Actividad 1

Para la experimentación se cuenta con un simulador, al cual se accede desde un PC, en él se visualizará un sistema Masa-Resorte, en este momento 1 los usos que caracterizan a la función lineal se evidencian desde la toma de decisión respecto de las variables involucradas en la experimentación y que contribuyen con la situación planteada.

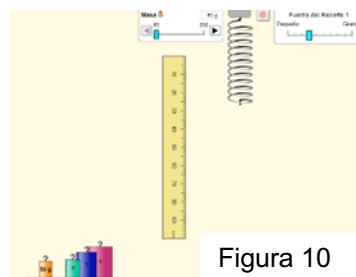


Figura 10

Para el análisis de este momento, se presenta la actividad 1, para estudiar las respuestas de cada una de las preguntas propuestas y que se quiere promover.

1. Ingresar al link: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_all.html?locale=es

1.1 Identifique los elementos presentes en el simulador y manipúlelos para familiarizarse con su funcionamiento, detalle a continuación estos elementos y de una descripción de lo sucedido.

En este punto, se reconocen los elementos involucrados en la experimentación y se relaciona la situación con alguna experiencia real. Se identifica y detalla los elementos de este sistema Masa-Resorte, como las masas, cuya unidad de medida es gramos, el resorte y su longitud, la que puede medir con la regla dispuesta en el simulador, que está graduada en milímetros, observa que se pueden cambiar las características del resorte y los manipula.

1.2 ¿Qué sucederá si se agregan masas al resorte?

Se puede observar que, al poner diferentes masas al resorte, éste se estira, y que, al agregar mayores masas, el resorte se estira una mayor longitud. Con esta pregunta se está incentivando

la toma de decisiones respecto a las variables que se ponen en juego en la experimentación y que revisten mayor importancia en el sistema Masa- Resorte.

1.3 Agregando diferentes pesas (masas) al resorte, detalle las variables que intervienen en la experimentación “Estiramiento del resorte” y que podrían considerarse para graficar este fenómeno.

En este momento de la experimentación, se reconocen las siguientes variables: masa, fuerza peso, fuerza de restauración (fuerza peso: $F = M \cdot g$, igual a la fuerza de restauración del resorte, esto es: $F = k \cdot \Delta L$), longitud total del resorte, longitud del estiramiento del resorte. Al analizar estas variables, se podrá observar que, para la fuerza de restauración, la constante elástica o constante del resorte es una variable control, ya que es posible fijar su valor antes de experimentar, por lo que las variables que se debe considerar corresponden a la masa y longitud del resorte y/o la longitud del estiramiento de éste (ΔL).

1.4 Durante la experimentación es posible observar: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia?

En este punto ya ha identificado las variables, por lo que en la descripción de este fenómeno se reconoce que cambian la masa y la longitud del resorte o la longitud de su estiramiento, ya que a medida que agrega masas diferentes al resorte, la longitud de éste cambia, y, por tanto, a mayor masa, la longitud del estiramiento aumenta.

1.5 ¿cuál de las variables identificadas corresponde a la variable independiente y dependiente?

Con la pregunta anterior, se ha podido identificar que, al agregar masas al resorte, este cambia su longitud, por lo que se define la variable independiente como la masa y la variable dependiente será la longitud del resorte y/o su estiramiento.

La elección de las variables dependiente e independiente resulta relevante para concluir, posteriormente, en el modelo lineal que se quiere evocar, que algebraicamente corresponde a:

$$y = mx + n$$

1.6 ¿Qué valores pueden tomar las variables dependientes e independientes? ¿A qué conjunto de números corresponde?

Al analizar las características de las variables, se concluye que, si la masa es cero, la longitud del resorte se mantiene, en este caso la longitud del estiramiento del resorte será considerada cero, y que, al ir aumentando la magnitud de la masa, ésta puede tomar tanto valores enteros como decimales, lo mismo ocurre con la longitud del resorte y/o su estiramiento, por lo que el conjunto que representa estas magnitudes corresponde a los reales positivos y el cero, lo que se traduce en: $M \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, correspondiendo al dominio y recorrido de las variables independiente y dependiente respectivamente.

1.7 Se han tomado algunos datos para averiguar cómo cambia la longitud del estiramiento del resorte, en la tabla 1 se presenta parte de la información.

¿Qué representan los valores colocados en la tabla 5? Pon el nombre a cada columna, según la variable que cada una representa e indique la unidad de medida en cada caso.

Longitud del Estiramiento del Resorte

0	0
50	13
110	18
190	31

Tabla 5.

Para esta pregunta, se reconoce la variable que representa cada columna, correspondiendo la primera a la variable independiente, masa (gramos.), y la segunda a la variable dependiente, longitud del resorte y/o la longitud de su estiramiento (milímetros). La identificación puede hacerse a través de la experimentación con el simulador.

Es necesario aclarar que esta pregunta pretende que se tenga claridad respecto a las variables involucradas en la experimentación y el rol que cada una representa, para posteriormente hacer el análisis de las variaciones locales de cada una de ellas y su variación conjunta.

4.6.2.- Momento 2: Actividad 2

En esta actividad, se estudian las variaciones conjuntas de las variables y se cuantifican sus variaciones individuales y conjuntas, esto a través de tablas y gráficos, para lo que se trastocan saberes del cálculo y geometría analítica, donde la funcionalidad del conocimiento surge a través del cálculo de la pendiente o razón de cambio, para posteriormente determinar la ecuación de la recta, develando de manera explícita la expresión algebraica o analítica de la función lineal, estos saberes del cálculo y geometría analítica son utilizadas como herramientas para el análisis de las variaciones. Los usos surgen desde el análisis del comportamiento local y global y su relación con la situación o fenómeno de estudio.

Para el análisis de este momento, se presenta el estudio de las respuestas de las preguntas de la segunda actividad que se quiere propiciar en los participantes.

1. En esta actividad, se fijan las características del muestra en la figura:



resorte, como se

A continuación, se debe agregar masas al resorte y construir una tabla con los datos obtenidos, partiendo de los 50 grs., ir aumentando de 20 en 20 los gramos de las pesas hasta llegar a los 200 grs.

Para registrar los datos en la tabla, se debe asegurar que el resorte se haya detenido y medir las longitudes del estiramiento del resorte con la regla dispuesta en el simulador y registre los datos en la tabla siguiente tabla.

Se debe tener en consideración que: La tabla (6) de valores debe responder a un modelo lineal, sin embargo, debido a errores de precisión en la toma de datos, éste se ajusta o aproxima al modelo.

Los errores en la precisión de la medición pueden ser ocasionados por el uso de la regla dispuesta en el simulador y la detención completa del resorte, sin embargo, se espera que esta variación no sea significativa.

En este punto, se debe construir una tabla de valores registrando información correspondiente a las mediciones realizados, como la siguientes:

Masa (grs.)	Longitud del estiramiento (cm)
0	0
50	1
70	1,4
90	1,8
110	2,2
130	2,6
150	2,95
170	3,4
190	3,75
210	4,1

Tabla 6.

1.1 ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte cuando no se le agregan masas? ¿Cuál es la variación en la longitud del estiramiento del resorte, cuando la masa aumenta de 20 en 20 gramos? Explica el procedimiento utilizado.

La longitud del estiramiento, al no agregar masas, es cero.

Al poner una masa de 50 grs. la longitud del estiramiento aumenta de 0 a 1 cm, luego al ir aumentando las masas en 20 en 20 grs. la longitud del estiramiento del resorte aumenta, aproximadamente, 0,4 cm por cada 20 gramos que aumenta la masa. Este valor se obtiene al realizar las diferencias generadas en cada paso.

Por ejemplo, al considerar dos pasos consecutivos se obtiene la diferencia constante en el aumento de la longitud del estiramiento del resorte, para una diferencia constante en el aumento de la masa, esto es:

$$90-70=20 \text{ grs.} \longrightarrow 1,8-1,4=0,4 \text{ cm}$$

$$110-90=20 \text{ grs.} \longrightarrow 2,2-1,8=0,4 \text{ cm}$$

Se observa, por lo tanto, un aumento constante en la longitud del estiramiento del resorte.

1.2 ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte al poner en el resorte una masa de 10 grs.; 30 grs. y 40 grs? Explica el procedimiento utilizado.

Para responder esta pregunta, se debe tener en consideración que el simulador no cuenta con estas masas, por lo que, a partir del análisis realizado en la pregunta anterior, se debe inferir la respuesta.

Se ha obtenido un aumento de 0,4 cm. en la longitud del estiramiento del resorte, por cada 20 grs. que aumenta la masa, luego, para determinar la longitud cuando la masa aumenta de cero a 10 grs. se debe dividir 0,4 entre 2, obteniendo un incremento en la longitud del estiramiento de 0,2 cm por cada 10 grs. que aumenta la masa.

Una vez obtenido este incremento en la longitud del estiramiento del resorte, es posible determinar la longitud para una masa de 30 grs. sumando la longitud del estiramiento por cada 20 grs. con la obtenida por cada 10 grs., resultando: $0,4 + 0,2 = 0,6 \text{ cm}$.

De igual forma se puede obtener la longitud del estiramiento del resorte al someter el resorte a una masa de 40 grs., $0,4+0,4=0,8 \text{ cm}$.

1.3 ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte si la masa es de 5 grs., 4grs y 1 grs? Explica el procedimiento utilizado.

Para determinar la longitud del estiramiento del resorte para una masa de 5 grs. bastará con dividir entre dos la longitud obtenida para una masa de 10 grs., la que corresponde a: $0,2:2=0,1 \text{ cm}$.

Si el resorte es sometido a una masa de 4 grs. es necesario conocer la longitud del estiramiento del resorte por cada gramo que aumenta la masa, de esta manera se obtendrá la razón de cambio, aumento constante en la longitud del estiramiento del resorte, por cada gramo que aumenta la masa.

Se analiza la siguiente situación:

Un aumento de 0 a 5 gramos de masa genera un cambio de 0 a 0,1 cm, en la longitud del estiramiento del resorte, por tanto, la longitud del estiramiento del resorte se obtiene dividiendo la longitud que aumenta entre la masa que aumenta, esto es: $\frac{0,1-0}{5-0} = 0,02$, lo que se interpreta de la siguiente forma: por cada gramo que aumenta la masa la longitud del estiramiento del resorte aumenta en 0,02 cm.

En consecuencia, con este resultado es posible determinar la longitud del estiramiento del resorte para cualquier masa a la que sea sometido el resorte con la expresión:

$$m \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$$

1.4 ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte para una masa de 452 grs.? Explica el procedimiento utilizado.

Como el aumento en la longitud del estiramiento del resorte es constante por cada gramo que aumenta la masa, se puede entonces de hablar de un crecimiento proporcional, lo que se puede representar como sigue:

$$L = l \cdot M$$

Donde L representa la longitud del estiramiento del resorte, M la masa y l la razón de cambio o pendiente, con esta expresión, entonces, es posible determinar L para una masa de 452 grs, es decir, para una masa de 452 grs el resorte se estira: $0,02 \cdot 452 = 9,04$ cm.

1.5 En un sistema de ejes coordenados (plano cartesiano) realizar la gráfica de la situación experimentada con los datos obtenidos, ubicando el nombre de cada variable en el eje coordenado respectivo.

Masa (grs.)	Longitud del estiramiento (cm)
0	0
50	1
70	1,4
90	1,8
110	2,2
130	2,6
150	2,95
170	3,4
190	3,75
210	4,1

Tabla 7.

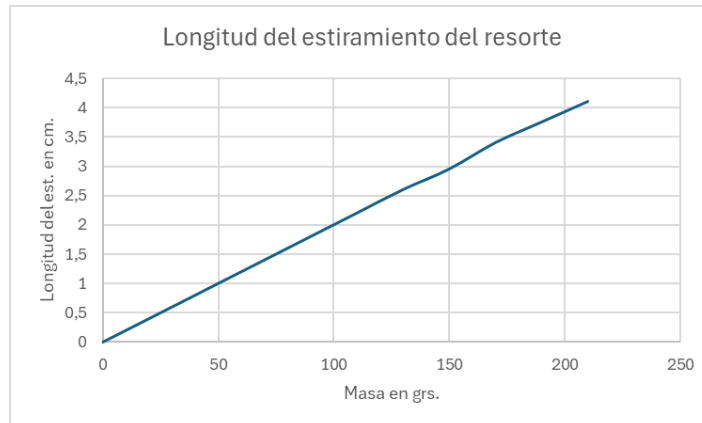


Gráfico 4.

1.6 ¿Qué representa la gráfica realizada? Y ¿qué características puede señalar de acuerdo con su comportamiento?

La gráfica representa una recta creciente que pasa por el origen del sistema de coordenadas, es creciente, es decir, al aumentar la masa, aumenta la longitud del estiramiento, se reconoce como una función lineal de la forma: $L = lM$.

1.7 La tabla (7) y gráfica (4) ¿modelan la situación del estiramiento del resorte? Argumenta.

El crecimiento o aumento en la longitud del estiramiento del resorte es proporcional al incremento en la masa, por lo que se relaciona con una proporción directa, en que la pendiente corresponde a la constante de proporcionalidad, cuya representación, tanto tabular como gráfico, corresponde a una función lineal, la que modela la situación planteada.

La pendiente de la recta será: $\frac{1,4-1}{70-20} 0,02 = l$

Y su expresión algebraica: $L = 0,02 \cdot M$

2. Variación Conjunta.

2.1 Considerar un resorte y construir una tabla de datos que contenga la siguiente información: masa, longitud del estiramiento y longitud total del resorte.

En este momento se debe construir una tabla como la siguiente:

Masa(gms)	Long. Estiramiento (cm)	Long. Total (cm)
0	0	4,8
50	0,8	5,6
100	1,6	6,4
150	2,4	7,2
200	3,2	8

Tabla 8.

2.2 Realizar la gráfica de la situación experimentada, en un mismo sistema de ejes coordenados, luego analizar el comportamiento de las gráficas en conjunto. Argumentar.

La gráfica a construir debe ser como la que se muestra:

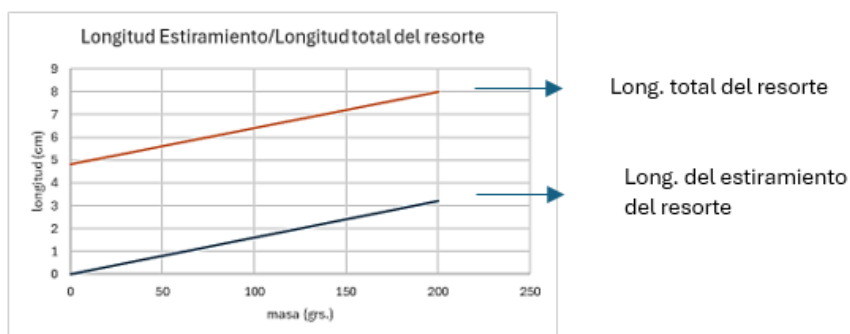


Gráfico 5.

Para el análisis, se puede considerar tanto la tabla de datos como la gráfica de la situación planteada, concluyendo que ambas rectas son paralelas.

Tanto con los datos tabulares como la gráfica se debe calcular la razón de cambio (o pendiente) de ambas rectas y concluir que, dado que son iguales, las rectas son paralelas.

Al analizar los datos tabulares se tiene lo siguiente:

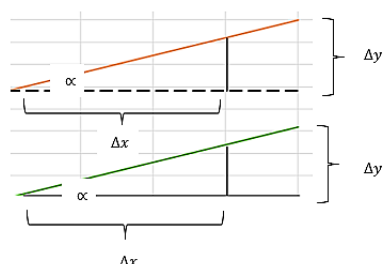
- a) Al considerar la longitud total del resorte, se tiene que la pendiente de la recta corresponde a:

$$Pendiente\ l = \frac{7.2 - 5.6}{150 - 100} = \frac{6.4 - 5.6}{100 - 50} = 0.016$$

b) De manera similar, al considerar la longitud del estiramiento del resorte, se obtiene la pendiente:

$$\text{Pendiente } l = \frac{1.6 - 0.8}{100 - 50} = \frac{2.4 - 1.6}{150 - 100} = 0.016$$

Al analizar la gráfica, se calcula la tangente de los triángulos respectivos, que se forman (1) entre el eje x y la recta y (2) una recta paralela al eje x, imaginaria, y la otra recta, tal como muestra a continuación:



$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.016$ es igual para ambas rectas, luego al tener la misma pendiente se concluye que las rectas son paralelas.

Figura 11.

Ambas rectas paralelas son representadas por funciones lineales, la recta que representa la longitud total del resorte representa una traslación de la recta que representa la longitud del estiramiento, por tanto, la primera recta se modela por una función afín y la otra por una función lineal.

2.3. Para la siguiente situación, ingresar a: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_all.html?locale=es_PE. Considerar dos resortes con diferentes características físicas, ajustando las fuerzas de los resortes uno y dos como se muestra en la figura:

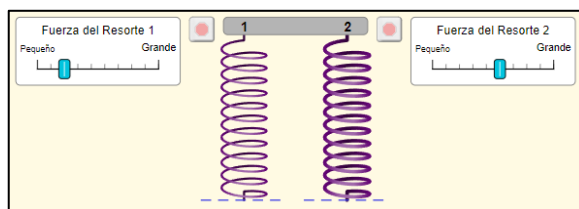


Figura 12.

2.4. Agregando masas iguales en ambos resortes, construir la tabla de valores y las gráficas respectivas en un mismo sistema de ejes coordenados.

Tanto la tabla (9) de datos como la gráfica (6) debería ser como se muestra a continuación:

Masa (grs)	Long. est. R1	Long. Est. R2
0	0	0
50	1	0,6
100	2	1,2
250	4,9	3,1

Tabla 9.

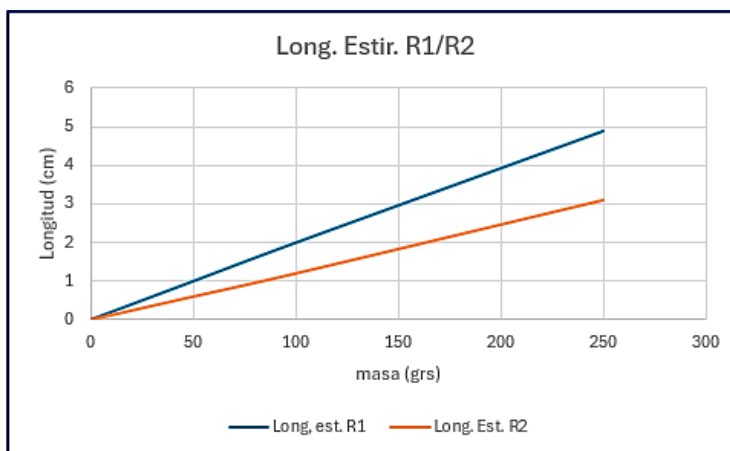


Gráfico 6.

2.5. Argumentar el comportamiento de cada resorte, según lo observado tanto en la tabla como en la gráfica.

Al ser sometidos, ambos resortes, a las mismas masas, se presentan rectas con diferentes pendientes, esto debido a las características que cada uno posee.

La recta correspondiente al resorte R1, donde se ha fijado una menor fuerza del resorte (menor constante de elasticidad), presenta un mayor incremento en la longitud del estiramiento con respecto al resorte R2 (mayor constante de elasticidad).

Al realizar el cálculo de las pendientes, se puede concluir que la recta R1 posee mayor pendiente que la recta R2, en conclusión, a menor constante de elasticidad del resorte mayor pendiente, o a mayor constante de elasticidad menor es la pendiente de la recta.

$$l_1 = \frac{2 - 1}{100 - 50} = 0.02 \quad l_2 = \frac{1.2 - 0.6}{100 - 50} = 0.012$$

Siendo l_1 la pendiente de la recta R1 y l_2 la pendiente de la recta R2

En consecuencia, en cada resorte la longitud de su estiramiento es modelada por una función lineal diferente, la que dependerá de las características físicas de cada uno.

2.6. Considerar las diferencias en las longitudes de ambos resortes. ¿Es posible afirmar que estas diferencias se modelen por una función lineal? Argumentar.

Para argumentar la respuesta a esta pregunta se debe construir una tabla de valores que incluya información correspondiente a la masa y la diferencia de longitudes y realizar la gráfica de esta situación, como sigue:

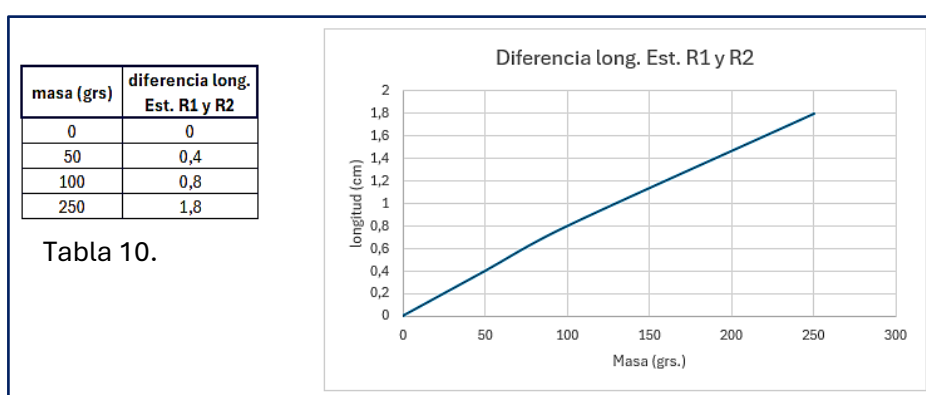


Gráfico 7.

Al observar, tanto la tabla (10) como la gráfica (7), se puede concluir que las diferencias en la longitud de ambos resortes, presenta un comportamiento aproximadamente lineal. Cabe señalar que se puede presentar errores, los que se consideran despreciables, en la precisión de las mediciones.

Por lo tanto, se presenta un aumento constante en las diferencias de las longitudes, correspondiendo éste a la pendiente (o razón de cambio) de la recta:

$$l = \frac{0,4 - 0}{50 - 0} = \frac{0,8 - 0,4}{100 - 50} = 0,008 \quad ; l \text{ corresponde a la pendiente de la recta o razón de cambio}$$

Esto es, entonces: “la diferencia en la longitud del estiramiento de ambos resortes aumenta 0.008 cm por cada gramo que aumenta la masa”.

4.6.3.- Momento 3: Actividad 3

Para esta actividad se considera la expresión: $f(x) = ax + b$, en que a representa la pendiente de la recta y b el coeficiente de posición, para describir el modelo algebraico al que responde la situación del estiramiento del resorte.

Esta actividad pretende que, a partir de las tablas y gráfica, que modela la longitud del estiramiento del resorte, se plantee la expresión algebraica que lo describe, logrando así la articulación entre lo numérico, lo gráfico y lo algebraico, para aproximarse a valores puntuales y predecir cualquier otro valor.

Para lograr esta articulación, se debe lograr plantear lo siguiente:

$$\text{Long. del estiramiento del resorte} = \text{cambio en la long. por unidad de masa} \cdot \text{masa} + \text{longitud natural del resorte}$$

Que corresponde a una función lineal, el modelo que se quiere establecer, dicho de otra forma:

$$L = l \cdot M + L_0 = f(M)$$

Para lograr la articulación con la expresión algebraica, se plantean las siguientes preguntas:

Considerando la expresión: $L = l \cdot M + L_0 = f(M)$ ó $f(x) = ax + b$

L: longitud total o longitud del estiramiento del resorte

M: masa

l: pendiente o razón de cambio.

L_0 : longitud inicial

1.1 ¿Qué término de la expresión representa la longitud natural o inicial del resorte?

La longitud inicial corresponde a b , que corresponde al coeficiente de posición de la expresión.

1.2 ¿Qué término de la expresión representa el cambio de longitud por unidad de masa?

La razón de cambio por unidad de masa corresponde al valor de a , la pendiente de la ecuación algebraica.

1.3 ¿Qué diferencia existe en la expresión al considerar o no la longitud natural del resorte?

En este caso, resultaría la expresión en que L_0 sería cero o correspondería a la longitud natural de éste. Representando en este caso una función lineal o afín, según L_0 sea cero o distinto de cero respectivamente.

1.4 ¿Qué ocurriría si la razón de cambio por unidad de masa fuera negativa?

Esta situación requiere de experimentar, según lo establecido en actividades anteriores, en que la longitud del estiramiento se determinaba multiplicando la razón de cambio o pendiente por la masa (o el incremento de ésta), concluyendo que la longitud del estiramiento, en lugar de aumentar, disminuye.

1.5 Una vez relacionado los términos de la expresión $f(x) = ax + b$ ó $L = l \cdot M + l_0$ con los de la experimentación, se debe realizar lo siguiente:

Plantear la expresión algebraica que corresponde cada tabla y gráfica que se muestra. Detallar paso a paso el procedimiento seguido y compruebe que la expresión obtenida corresponde a la función que modela cada situación, para esto considere algunos de los valores que toma la masa para verificar el valor de la longitud del estiramiento del resorte.

a)

masa (grs)	long. estiramiento (cm)
0	0,0
20	0,8
25	1,0
35	1,4
55	2,2

Tabla 11.

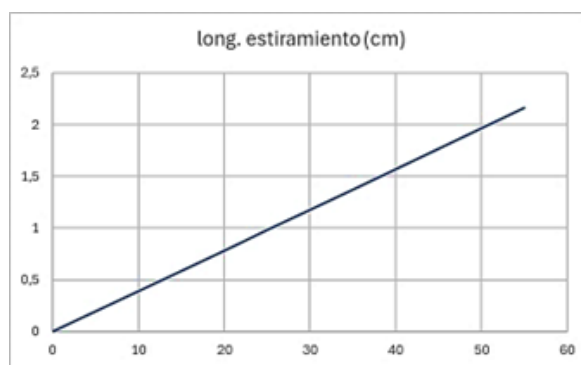


Gráfico 8.

b)

masa (grs)	Long. Total del resorte
0	5,0
20	5,8
25	6,0
35	6,4
55	7,2

Tabla 12

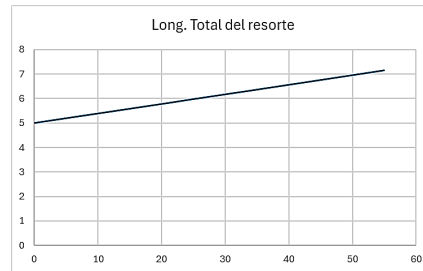


Gráfico 9.

Se busca que se plantee el siguiente paso a paso, considerando la expresión $L = l \cdot M + l_0$:

a) Para la propuesta del punto a:

- Se identifica la intersección con el eje y (eje vertical), obteniendo el valor de la ordenada, en este caso $l_0 = 0$

- En la gráfica o tabla, se consideran dos puntos, con el fin de determinar el cambio en la longitud del estiramiento por unidad de masa, lo que corresponde al valor de l en la expresión $L = l \cdot M + l_0$

Obteniendo $l = \frac{0.98 - 0.78}{25 - 20} = 0.04$ razón de cambio o pendiente.

- Se plantea la expresión algebraica:

$L(M) = 0.04M + 0$, que corresponde a la función lineal que modela lo planteado en el punto (a)

Para verificar que esta expresión modela la situación planteada se consideran las siguientes masas, 25 y 55 grs., dispuestas en la tabla y se comprueba que el valor obtenido en la longitud del estiramiento del resorte corresponde al declarado en ella.

$$f(x) = L = 0.04 \cdot 25 = 1$$

$$f(x) = L = 0.04 \cdot 55 = 2.2$$

Además, con este modelo lineal será posible predecir el comportamiento de la longitud del estiramiento del resorte para otros valores de las masas, aunque éstas no estén en la tabla o no sean observados en la gráfica.

b) Se procede de manera análoga a la del punto (a) para obtener la expresión algebraica que modela la situación planteada, en este caso corresponde a: $L = 0.04 \cdot M + 5$.

1.6 Determinar la expresión algebraica correspondiente a cada gráfica. Para esto, considere los pasos seguidos en el punto 1.5 de esta actividad.

a)

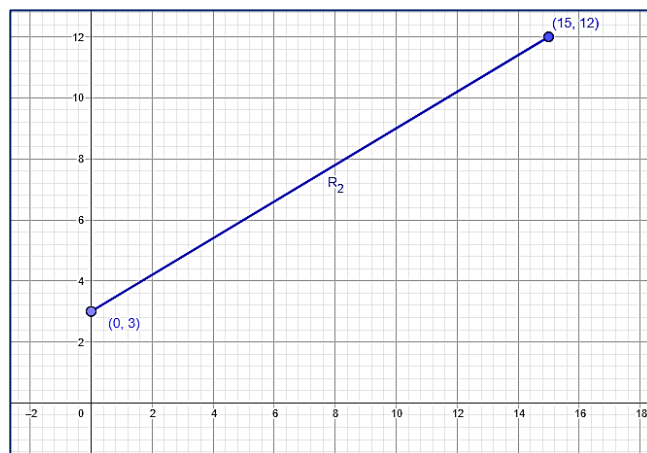


Gráfico10.

b)

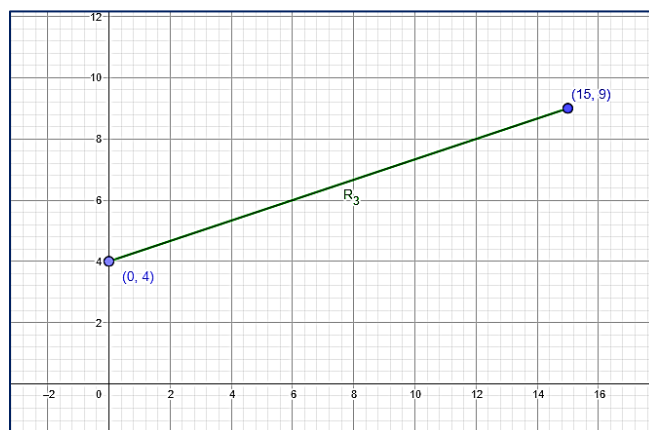


Gráfico11.

Para esta actividad no se cuenta con una tabla de valores, sin embargo, se cuenta con información de dos puntos de la recta, los que permitirán obtener tanto la pendiente como la intersección con eje de las y.

Para los gráficos 10 y 11 la expresión algebraica debe corresponder:

a) $L = \frac{3}{5}M + 3$

b) $L = \frac{1}{3}M + 4$

En esta actividad no sólo se estará modelando la situación de la longitud del estiramiento del resorte, sino también, cualquier situación que se modele gráficamente por una recta en el plano.

CAPÍTULO V

Análisis de Resultados

5.- Análisis de Resultados

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos de la implementación de las actividades propuestas, para el rediseño de modelación, de la situación del estiramiento del resorte, con uso de tecnología, simulador “*Phet Interactive Simulations*”, sustentado por la categoría de Méndez, Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático (DRUCM).

La Implementación del rediseño se realiza con 6 estudiantes del Magister en Educación Matemática, de la Universidad de Santiago de Chile, que cursa segundo semestre, distribuidos en tres grupos, G1, G2 y G3, cada uno con dos participantes, con la finalidad de validar el instrumento y vigilar epistemológicamente los argumentos de variación en situaciones de cambio lineal, realizar el análisis a posteriori y la confrontación de los resultados con el análisis a priori. El rediseño de modelación, de la situación del estiramiento del resorte, se compone de tres actividades aplicadas en dos sesiones de 90 minutos cada una.

Para el análisis, se organizan las respuestas en una tabla, asignando L (Logrado), si la respuesta entregada está en concordancia con el análisis a priori, y NL (No Logrado) en caso contrario, lo que permitirá identificar los ajustes necesarios que se deben realizar en el rediseño.

5.1.- Análisis de respuestas de los participantes.

5.1.1.- Actividad 1: Momento 1 “Experimentación y Observación del Fenómeno”

Para este momento, se busca que los participantes identifiquen las variables y parámetros que están presentes en la experimentación, y que, a partir de éstos, se definan la variable independiente y dependiente, identificándolas como aquellas que generan variaciones en situación experimentada.

Al hacer el análisis de las respuestas entregadas por los participantes, se espera se identifique y defina la masa como la variable independiente y la longitud del estiramiento del resorte como la variable dependiente. La elección de estas variables es fundamental para el posterior análisis

de variaciones tanto locales como globales, respecto al comportamiento del fenómeno de experimentación y el modelo lineal que se está evocando: $f(x) = ax + b$

Se debe aclarar que la pregunta 1.1 tiene relación con la interacción y familiarización con el funcionamiento del simulador.

Los resultados de la primera actividad se presentan en la tabla N°13:

Pregunta	G1	G2	G3	ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ENTREGADAS POR LOS PARTICIPANTES.
1.2	L	L	L	Los tres grupos identifican los elementos presentes en el simulador
1.3	L	L	L	Reconocen las variaciones en la longitud del resorte al variar las masas
1.4	L	L	NL	Dos de los tres grupos detallan las variables que pueden considerarse para graficar fenómeno del estiramiento del resorte, considerando éstas como la masa y la longitud del resorte. Las variables que considera G3, declaradas como variable independiente y dependiente son respectivamente longitud del resorte y fuerza.
1.5	L	L	L	Identifican que al cambiar la masa cambia la longitud del resorte, aumentando al aumentar la masa.
1.6	L	L	NL	Dos de los tres grupos identifican la masa como la variable dependiente y la longitud del resorte como la variable Independiente. G3 presenta error al identificar variable Independiente, declarándola como la longitud del resorte y la variable dependiente como la fuerza.
1.7	L	L	L	Reconocen el conjunto de los números reales como dominio y recorrido de la variable dependiente e independiente.
1.8	L	L	NL	Dos de los tres grupos asigna nombre a la variable que representa cada columna de la tabla de datos. G3 presenta error, este se atribuye al no identificar de manera correcta la variable dependiente e independiente en pregunta 1.6.

Tabla N°13

Los resultados expuestos en la tabla N°13 muestran que el G3 no logra identificar las variables dependiente e independiente, este resultado se observa en las respuestas de las preguntas 1.4, 1.6 (la que indican se respondió en la pregunta 1.4). Cabe señalar que este grupo reconoce el cambio en la longitud del estiramiento del resorte al cambiar la masa, lo que se evidencia en la pregunta 1.3 de la tabla, sin embargo, no definen estas variables según lo esperado en la situación de experimentación.

A continuación, se muestra, en la figura N°4, las respuestas del G3 de las preguntas 1.3 y 1.4.

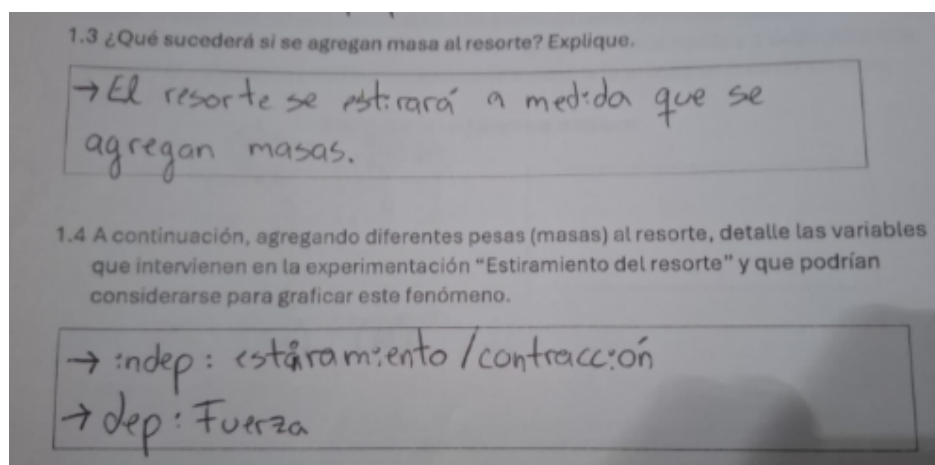


Figura N°13

Al analizar las respuestas entregadas en la pregunta 1.8, en la que se entrega una tabla con datos recogidos de la experimentación y se debe identificar lo que representa cada una de las columnas, asignando el nombre de la variable que corresponde a cada una de ellas, G3 nuevamente muestra confusión, en ella identifican la primera columna como la longitud del estiramiento del resorte, correspondiendo a la variable independiente, y la segunda columna como la fuerza, la que correspondería a la variable dependiente, situación que se muestra en la figura N°14.

1.8 Se han tomado algunos datos para averiguar cómo cambia la longitud del estiramiento del resorte, en la tabla 1 se presenta parte de la información. ¿Qué representan los valores colocados en la tabla? Pon el nombre a cada columna según la variable que cada una representa e indique la unidad de medida en cada caso.

Tabla 1. Longitud del Estiramiento del Resorte

Estiram.	Fuerza
ΔX	F
0	0
50	13
110	18
190	31
(cm)	(N)

Figura N°14

La dificultad presentada en la identificación de las variables dependiente e independiente se presenta al relacionar la actividad propuesta con actividades similares, en las que se quiere

modelar la Ley de Hooke, $F = k \cdot \Delta x$, en este modelo lineal la longitud del estiramiento es la variable independiente y la fuerza la variable dependiente.

Para ajustar el rediseño, en cuanto a las actividades, en particular en la pregunta 1.2, de la actividad 1, se debe reformular la “identificación de los elementos que están presentes en el simulador y descripción de cada uno de ellos”, como sigue: “considere los siguientes elementos (detallando aquellos que sean de interés en la experimentación e intenciones de la actividad) de la situación de experimentación con el simulador y describa lo que sucede al manipularlos”, con la finalidad de evitar confusiones al momento de identificar las variables dependientes e independientes de la situación de la experimentación y lo que se quiere fomentar, en este caso, modelar la longitud del estiramiento del resorte, a través de la función lineal.

5.1.2.- Actividad 2: Momento 2 “Variaciones locales y globales”

En este momento se estudia y cuantifica la variación de cada variable y la variación conjunta de ellas, lo que promueve generar usos que permiten identificar cómo está variando cada variable y si la variación es creciente o decreciente. En este momento, además, se debe cuantificar los cambios generando patrones de variación e interpretación de razones constantes.

Para la generación de patrones de variación, se analizan las variaciones locales, a través de datos tabulares, en las que, para diferencias de masas constantes, las diferencias en la longitud del estiramiento del resorte también son constantes, con lo que se podrá predecir comportamientos de variación para masas que no estarán disponibles en el simulador.

Para el análisis global de la situación experimentada, se realiza la gráfica en un sistema de ejes coordenados, esta gráfica es identificada como una recta, es decir, la longitud del estiramiento del resorte tiene un comportamiento lineal, por lo que es identificado este cambio constante, en la masa y longitud del estiramiento del resorte, como la pendiente de la recta, con la expresión:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, la que en este contexto, se interpreta como la razón de cambio en la longitud del estiramiento del resorte por cada gramo de masa.

Esta segunda actividad se divide en dos partes, la primera en la que se analiza el comportamiento de un resorte al ser sometido a diferentes masas, y la segunda parte, que presenta dos situaciones, un resorte en la que se considerando su longitud total y solo la longitud de su estiramiento, pudiendo identificar la función lineal y afín, y otra situación en la que se analiza el comportamiento de dos resortes de diferentes características físicas, para analizar su variación conjunta.

Los resultados de la primera parte de la segunda actividad se muestran en la tabla N°14

Pregunta	G1	G2	G3	ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ENTREGADAS POR LOS PARTICIPANTES.
1	L	L	L	Variación constante en la longitud del resorte por cada 20 grs. que aumenta la masa.
2	L	L	L	La variación en la longitud del resorte, al ser sometido a una masa de 10 grs., se obtiene al dividir entre 2 la longitud obtenida cuando es sometido a una masa de 20 grs., para determinar el estiramiento del resorte al someterla a 30 grs. suman la longitud obtenida al someterlo a la masa de 20 grs. y la obtenida por 10 grs., lo que es posible ya que en la observación se determina variación constante.
3	L	L	L	Siguen procedimiento anterior para determinar la longitud del estiramiento al someter el resorte a una masa de cinco grs., al dividir por dos la long. del estiramiento obtenido al someter el resorte una masa de 10grs., luego dividen por cinco este resultado obteniendo la longitud del estiramiento del resorte por cada gramo que aumenta la masa.
4	L	L	L	Al conocer la longitud del estiramiento por cada gramo que aumenta la masa, solo multiplican este valor por la masa total, que en este caso es de 452 grs. Por cada gramo la longitud del resorte aumenta $\frac{1}{5}$ cm, luego $\frac{1}{5} \cdot 452$ corresponde a la longitud del estiramiento del resorte si la masa a la que es sometido es 452 grs.
5	L	L	L	Realizan la gráfica de la situación según lo esperado.
6	L	L	L	Las características identificadas en la gráfica corresponden a: comportamiento lineal, ya que la gráfica representa una recta, es creciente, pues al aumenta la masa, aumenta la longitud del estiramiento del resorte, la longitud del resorte crece a razón constante.
7	L	L	L	La longitud del estiramiento del resorte es directamente proporcional al incremento de la masa, por lo tanto, comportamiento lineal.

Tabla N°14

Como se puede observar, los resultados expuestos en la tabla N°14, los tres grupos logran identificar las variaciones locales y globales al experimentar con un resorte, identificando patrones de variación en el análisis de las tablas de datos y gráficos, calculando la pendiente de la recta para determinar la razón constante y logrando predecir comportamientos.

Para evidenciar la información expuesta en la tabla N°1, se muestran a continuación las respuestas entregadas por el grupo G1 en las imágenes N°6, 7 y 8.

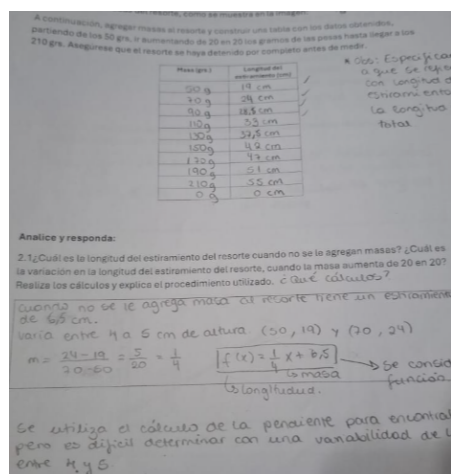


Figura N°15

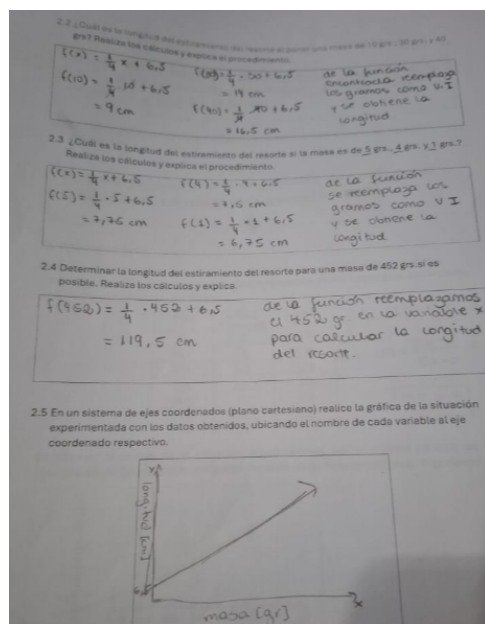


Figura N°16

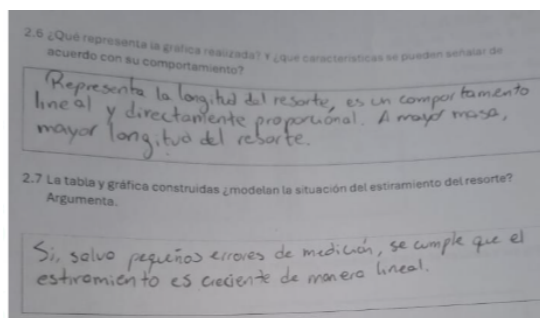


Figura N°17

En este segundo momento, segunda parte de la actividad dos, según el modelo o categoría de Méndez, se analiza la variación conjunta de las variables, reconociendo la función lineal y afín, al considerar la gráfica de la situación del estiramiento del resorte, en que se compara la longitud total que alcanza el resorte, al ser sometido a diferentes masas, y solo la longitud del

estiramiento, al observar las gráficas, en su comportamiento global, se debe concluir que la razón de cambio en ambas situaciones es constante e igual, variación constante, y representan dos rectas paralelas, una que pasa por el origen del sistema de coordenadas y otra que corta al eje y en el punto $(0, y_0)$, donde y_0 representa la longitud natural del resorte. Los resultados muestran que solo uno de los grupos logra graficar ambas rectas y concluir que la razón de cambio constante es la misma para ambas situaciones.

Los resultados de la segunda parte de la segunda actividad se muestran en la tabla N°15.

Pregunta	G1	G2	G3	ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ENTREGADAS POR LOS PARTICIPANTES.
1	L	L	L	Tabla realizada de manera correcta por los tres grupos
2	NL	NL	L	Solo uno de los grupos realiza la gráfica según lo esperado, presentando ambas rectas, longitud total y longitud del estiramiento del resorte, concluyendo que la variación por unidad de masa es constante e igual para ambas rectas, con diferentes coeficientes de posición, concluyendo que las rectas son paralelas.
3	----	----	----	Ingreso al simulador donde se experimenta con dos resortes los cuales tienen diferentes características físicas. https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_all.html?locale=es_PE
4	L	L	L	Completan tabla y realizan gráfica conjunta de ambos resortes.
5	L	L	L	Concluyen a mayor resistencia del resorte, menor es el estiramiento del resorte, lo que se ve reflejado en la pendiente de la recta, en este caso, menor pendiente
6	NL	L	NL	Solo uno de los grupos G2, Al analizar las diferencias en las longitudes de alcanzadas por ambos resortes concluyen que las diferencias tienen un comportamiento lineal con razón constante. Comportamiento proporcional, por cada 50 grs. que aumenta la masa la diferencia en las longitudes de los resortes aumenta 2 unidades cada vez. G 1 y 3 no realizan análisis.

Tabla N°15

A continuación, se muestra en la figura N°9 la respuesta entregada por G3, que logra lo esperado en el análisis a priori para la pregunta 2, en la figura N°10, se muestra las respuestas del G1 correspondiente a las preguntas 4 y 5 y en la figura N°11 las respuestas entregadas por G2, quienes logran lo esperado para la pregunta 6.

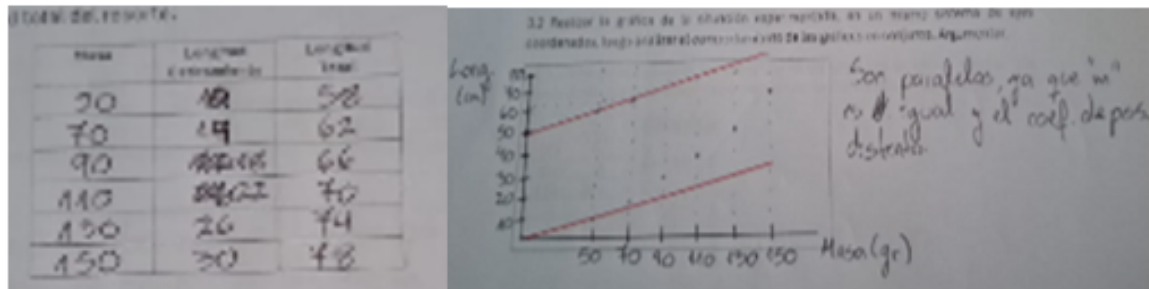


Figura N°18

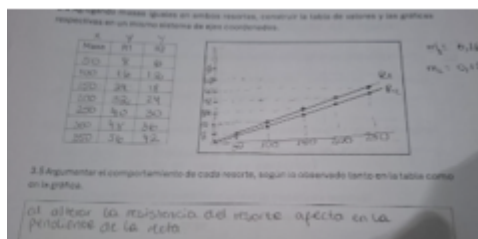


Figura N°19

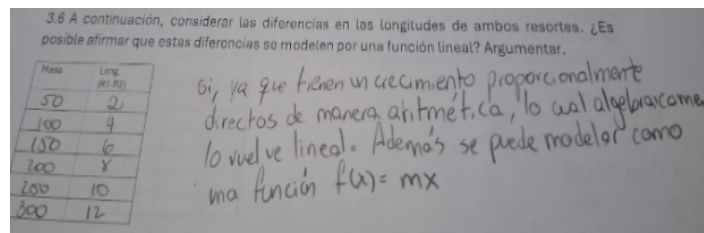


Figura N°20

Para ajustar el rediseño, en lo referente a la actividad dos, en su segunda parte, se debe explicitar de manera más precisa lo solicitado en la pregunta N°2, indicando: “Graficar en un mismo sistema de ejes coordenados lo que ocurre al considerar estiramiento del resorte y lo que ocurre al considerar la longitud total del resorte, argumentando matemáticamente o con palabras lo observado”, situación similar para la pregunta 6, se debe explicitar que se debe argumentar, este caso, con la gráfica y con palabras el comportamiento de las diferencias en la longitud del estiramiento del resorte, cuando dos resortes de características físicas diferentes son sometidos a masas iguales, con la finalidad de mejorar la comprensión en qué y cómo actuar frente a estas preguntas, para así lograr analizar las variaciones que presentan las variables en esta experimentación, en la que se debe analizar la variación conjunta.

5.1.3.- Actividad 3: Momento 3 “Ajustes y Tendencias”

Este momento se guía por los usos que conllevan al ajuste de la variación o a la identificación de las tendencias en la variación, provocando una aproximación a valores específicos para predecir cambios puntuales, lo que implica resignificar los usos y motivar su articulación entre lo tabular,

lo gráfico y lo algebraico, para valorar su funcionalidad ante la situación de aprendizaje y concluir en el modelo lineal: $f(x) = ax + b$

En esta actividad se espera que cada grupo describa el modelo funcional para el comportamiento de la longitud del estiramiento del resorte, haciendo una correspondencia entre los elementos estudiados como: pendiente o razón de cambio, longitud inicial del resorte o longitud inicial del estiramiento del resorte (al no ser sometido a diferentes masas) y longitud final (cuando es sometido a diferentes masas) con los diferentes elementos que definen la función lineal en la expresión $f(x) = ax + b$, y finalmente concluir en la expresión algebraica del modelo. La correspondencia que se hace entre los elementos implica realizar la articulación entre lo tabular, gráfico y algebraico.

En esta última actividad, se debe señalar que el G3 tiene una participación parcial, en la que solo responde cuatro de las 5 preguntas, debiendo retirarse del lugar de manera anticipada.

Respecto a los resultados obtenidos, se debe indicar que los grupos G1 y G2, logran la articulación entre lo tabular, gráfico y algebraico, en la situación de modelación de la longitud del estiramiento del resorte, los resultados de la actividad 3 se presentan en la tabla N°16, en que para las preguntas 1, 2 y 3 se hace una correspondencia al considerar la expresión $L = l \cdot M + L_0$ con la identificación de la longitud del estiramiento del resorte, la masa y la longitud inicial del resorte, según lo que se ha trabajado en las actividades 1 y 2, la pregunta 4 se refiere a lo que ocurre si la razón de cambio es negativa y la pregunta 5 presenta situaciones en las que (parte (a)) a partir de tablas y gráficos determinen el modelo algebraico de la situación, y luego (parte (b)) a partir de la gráfica obtener el modelo algebraico de la situación.

Pregunta	G1	G2	G3	ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ENTREGADAS POR LOS PARTICIPANTES.
1	L	L	L	Los tres grupos identifican, en la expresión algebraica que L_0 representa la longitud natural del resorte.
2	L	L	L	Los tres grupos reconocen "l" como la pendiente, es decir como el cambio por unidad de masa.
3	L	L	L	Los tres grupos asocian L_0 al coeficiente de posición de la recta, indican que si es cero la recta pasa por el origen, de lo contrario la recta se traslada verticalmente L_0 unidades, en este caso longitud natural del resorte.
4	L	NL	L	Grupo G2 no responde, y los grupos G1 y G3 identifican la situación con la compresión del resorte.
5	L	L	---	Los grupos G1 y G2 obtienen la expresión algebraica que modela la situación planteada por tablas y gráficos de manera correcta.
6	L	L	---	Los grupos G1 y G2 obtiene la expresión algebraica que modela la situación planteada a partir de la gráfica.

Tabla N°16

Para justificar el análisis realizado de la actividad 3, se muestran a continuación imágenes de lo realizado por el grupo G1.

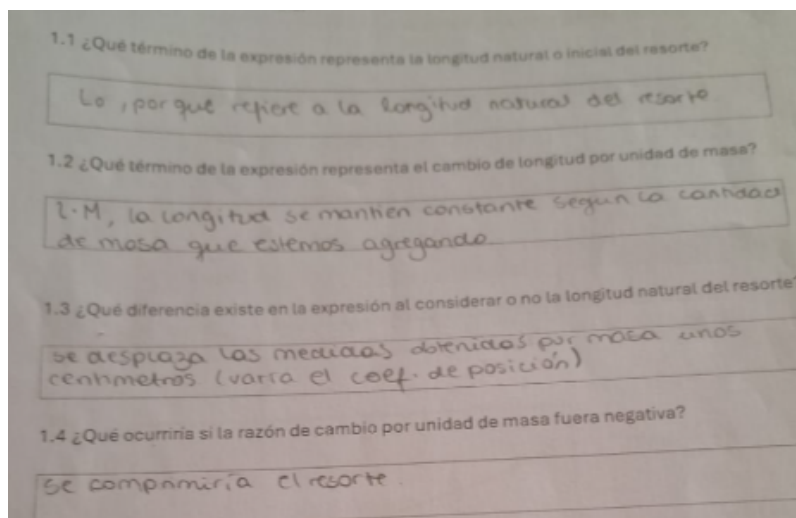


Figura N°21

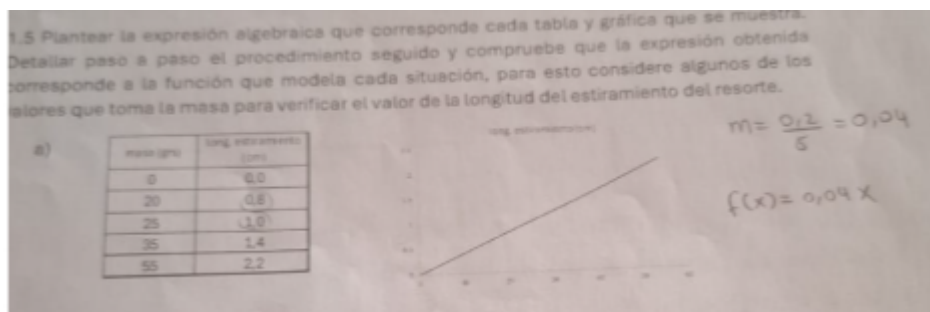


Figura N°22

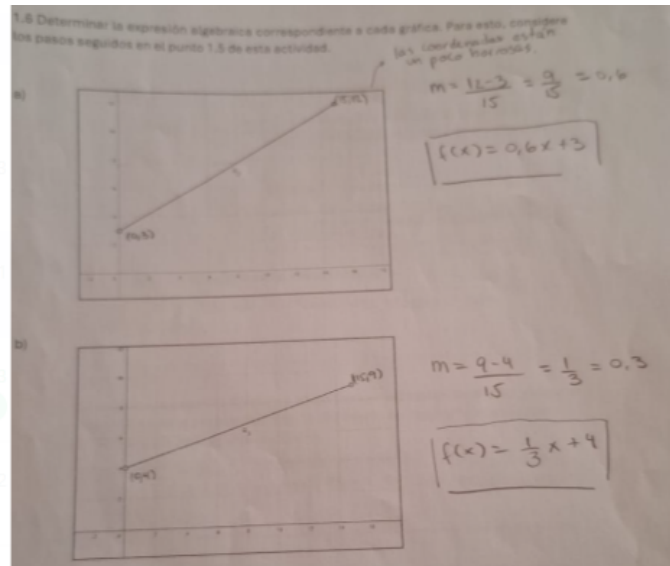


Figura N°23

Comentarios de los participantes: Actividades cumplen con el objetivo de analizar las variaciones del comportamiento de variables en situaciones como la expuesta “Longitud del estiramiento del resorte”, sin usar la Ley de Hooke, indican que la actividad es didáctica y sirve para plantear diferentes posturas respecto a la enseñanza y aprendizaje en situaciones de modelación. En la figura N°24 se muestra comentario de uno de los grupos participantes de la actividad.

Obs gral: Se cumple el objetivo de interiorizar la variación de resortes sin pasar por conceptos de ley de Hooke. La actividad es didáctica y sirve para adquirir distintas posturas respecto a la enseñanza y aprendizaje de resortes.

Figura N°24

CAPÍTULO VI

Conclusiones

6.- Conclusiones

Atendiendo la problemática develada por la Socioepistemología, en la que el dME excluye argumentos de variación en el estudio de la función lineal y considerando el modelo o categoría de Méndez (2013) DRUCM, que promueve la modelación como una categoría que permite resignificar el dME, fortaleciendo el uso del conocimiento matemático, se formula un rediseño de modelación con la situación del estiramiento de un resorte con uso de tecnología, con la finalidad de lograr el objetivo general de este estudio, que corresponde a: “Formular un rediseño de modelación con la situación del estiramiento de un resorte, con uso de tecnología, para fortalecer argumentos de variación en la descripción de situaciones de cambio lineal”.

El rediseño de modelación, basado en el modelo DRUCM, considera tres actividades, cada una de ellas en correspondencia con los momentos de Méndez (2013), la primera actividad (momento 1) considera experimentación y observación de fenómeno, para la identificación de las variables dependiente e independiente, fundamental para el análisis de las variaciones locales, a través de datos tabulares o numéricos y variaciones globales, a través de la gráfica, situación que es planteada en la segunda actividad (momento 2).

El análisis de variaciones locales, a través de tablas, permite identificar como está variando cada una de las variables y cuantificar esta variación o cambio.

El análisis global se realiza a través de las gráficas, en la que se identifica el comportamiento de la situación experimentada como lineal, donde se identifica la gráfica de la situación experimentada como una recta en el plano, en la que se puede diferenciar la función lineal de la función afín.

La tercera actividad, relacionada con el tercer momento de Méndez, es donde se genera el modelo algebraico, con la expresión $f(x) = ax + b$, donde se articula lo tabular, gráfico y algebraico. En esta articulación se hace la correspondencia con los resultados obtenidos en las actividades dos primeras actividades (momento 1 y momento 2), en que se reconoce $f(x)$ como la longitud del estiramiento del resorte o su longitud total; " a " con la pendiente o razón de cambio,

al analizar los datos tabulares y " b " con la longitud natural del resorte , para la función afin, $b \neq 0$, o con la longitud del estiramiento del resorte, para la función lineal, $b = 0$.

6.1.- Conclusiones Actividad 1

En la implementación de la primera actividad del rediseño de modelación permitió evidenciar los siguientes aspectos:

Dos de los tres grupos identificaron correctamente las variables dependiente e independiente durante la experimentación. Proceso fundamental para describir su comportamiento, en las posteriores actividades.

Un grupo mostró confusión en la identificación de las variables debido a sus experiencias previas en contextos similares (Ley de Hooke).

En este momento (M1), la identificación de las variables es clave para observar el fenómeno de cambio y organizar sus elementos e identificar dominios y recorridos de las variables, tal como propone Méndez.

6.2.- Conclusiones Actividad 2

Estudio de variaciones locales y globales, en el desarrollo de la segunda actividad, se observa que:

Los grupos lograron cuantificar variaciones locales (mediante tablas) y globales (mediante gráficas), lo que reforzó el uso de herramientas matemáticas como el cálculo de pendientes y la identificación de patrones lineales, sin embargo, uno de los grupos presentó problemas, al inicio de esta segunda actividad, para argumentar matemáticamente la relación entre las representaciones gráficas y tabulares, por la confusión en la identificación de las variables al relacionar el problema con otros similares de la Ley de Hooke, de todas formas logra analizar los cambios para cada una de las variables.

Esta segunda actividad (M2), promovió el análisis y uso de gráficas y tablas para interpretar patrones y prever comportamientos, articulando las categorías de variación local y global planteadas por Méndez.

6.3.- Conclusiones Actividad 3

Ajustes y tendencias, en esta tercera actividad, en la que participan 2 de los tres grupos en su totalidad, ya que uno de los grupos debió ausentarse durante la parte final de la implementación, se puede concluir que:

Dos grupos lograron articular representaciones tabulares, gráficas y algebraicas, obteniendo la función $f(x) = ax + b$ como el modelo lineal del fenómeno experimentado, provocado por el desarrollo de usos de conocimiento matemático, generado con las dos primeras actividades, lo que permitió caracterizar comportamientos de variación en el estudio de la situación del estiramiento de un resorte, modelo algebraico que permite predecir el comportamiento para cualquier masa a la que sea sometido.

Uno de los grupos tuvo dificultades para integrar la representación algebraica, en un principio, para describir el modelo algebraico, al no considerar la longitud natural del resorte correcta, información que modificó el modelo que representa la función afín.

Este momento (M3) fortaleció los usos del conocimiento matemático al generar redes que conectan distintas representaciones (tabular, gráfica y algebraica), ajustando modelos según las características del fenómeno.

6.4.- Conclusión General:

- La implementación del modelo DRUCM, en el rediseño de modelación, con la situación del estiramiento del resorte, permitió articular lo tabular, lo gráfico y lo algebraico promoviendo un aprendizaje contextualizado y funcional de la modelación matemática, con el estudio de variaciones en la descripción de situaciones de cambio lineal.

- Este rediseño, además, contribuye en parte al perfil de egreso de los estudiantes del MEM, de la Universidad de Santiago de Chile, que consiste en: Diseñar y evaluar propuestas didácticas para el fortalecimiento de la enseñanza, el aprendizaje y desarrollo de habilidades de pensamiento matemático..., (<https://www.mem.dmcc.usach.cl/perfil-de-egreso/>), y atiende la nueva propuesta curricular que: "...considera la construcción social del conocimiento matemático, el cual comprende que éste es transformado en conocimiento funcional mediante el desarrollo de significados matemáticos compartidos mediante de procesos comunicativos...", incorporando al dME situaciones de experimentación en contextos reales, para fortalecer argumentos de variación en situaciones de cambio lineal que contribuyan al la construcción social del conocimiento matemático.
- El diseño de actividades cumplió en gran medida con los objetivos planteados, facilitando la identificación de patrones de variación y fortaleciendo el uso del conocimiento matemático en contextos de modelación.

6.5.- Propuestas de mejora:

- Las dificultades observadas reflejan la necesidad de realizar ajustes en las instrucciones para mejorar la claridad y precisión de las tareas propuestas, en la identificación de las variables dependiente e independiente y la realización del o las gráficas.
- La Incorporación de discusiones grupales pueden fortalecer la construcción social del conocimiento matemático, mejorando la argumentación matemática en torno a gráficas y ajustes algebraicos.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica como metodología de investigación en didáctica*. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Recherches en didactique des mathématiques: Le domaine des fonctions*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Fondo de Cultura Económica.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Modelagem Matemática: Conceitos e aplicações*. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática: Competências e estratégias pedagógicas*. São Paulo: Editora Contexto.
- Ávila Alvarado, A. L., Londoño Millán, N., & Zaldívar Rojas, J. D. (2017). Noción de razón de cambio explorada a través de fenómenos físicos que modelan una función lineal. *Revista de Matemática Educativa*, 24(3), 45-62.
- Borromeo-Ferri, R. (2011). *Mathematical modelling in school education: Opportunities and obstacles*. Springer.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, matemáticas y realidad*. México: Cinvestav.
- Cantoral, R., Soto, D., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2006). Discursos matemáticos escolares y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Revista Mexicana de Educación Matemática*, 22(2), 33-48.
- Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Secretaría Educación Pública. D.F., México: ISBN: 978-607-9362-03-4
- Calderón, D. I., & León, O. L. C. (2015). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(4), 78-96.
- Cordero, F. (1998). La graficación como construcción del conocimiento matemático. *Educación Matemática*, 10(3), 21-42.
- Cordero, F. Cen, C. y Suárez, L (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 13 (2), 187-214.
- Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). El discurso Matemático Escolar: La adherencia, la exclusión y la opacidad. Editorial Gedisa.
- Méndez, M. E. M., & Zúñiga, C. (2017). El discurso matemático escolar y la modelación: Una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 22(74), 111-138.
- Méndez, M. E. M. (2013). *Desarrollo de Redes de Uso de Conocimiento Matemático: Una propuesta socioepistemológica*. México: Cinvestav.

- Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.
- Pantoja Rangel, R., Guerrero Magaña, M. de L., Ulloa Azpeitia, R., & Valdivia Bautista, S. M. (2016). La modelación matemática en situaciones problema de la vida cotidiana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18(2), 23-40.
- Riquelme Vásquez, D. J. (2023). Diseño de modelación del plano inclinado con uso de tecnologías para la descripción de situaciones de cambio cuadrático. *Educación Matemática y Tecnología*, 15(1), 47-60.
- Villa-Ochoa, J., & Posada, M. (2009). La modelación matemática en la enseñanza: Reflexiones y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 12(1), 5-24.
- Villa-Ochoa, J., & Plaza Gálvez, L. F. (2019). Obstáculos detectados en la formación matemática de ingenieros: Una revisión de literatura. *Revista Colombiana de Educación Matemática*, 29(3), 19-33.
- Zúñiga González, K., & Méndez Guevara, M. E. M. (2016). El uso de las gráficas por estudiantes de bachillerato: La modelación del llenado de recipientes. *Educación Matemática Contemporánea*, 13(3), 29-50.
- Arrieta Vera, J., & Díaz Moreno, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista de Enseñanza Matemática*, 19(2), 13-30.
- Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 14(1), 33-49.
- Suárez, R. (2008). Modelación-graficación como eje didáctico. *Revista de Educación Matemática*, 14(2), 25-43.

ANEXO: PROPUESTA

“Modelando el Estiramiento de un Resorte”

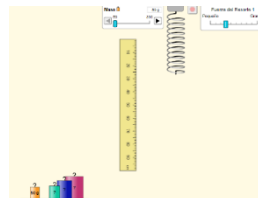
Actividad 1

Situación de aprendizaje en un ambiente virtual, con la utilización de simulador “*Phet Interactive Simulations*”.

Objetivo: *Identificar las variables que intervienen en la experimentación y definir cuáles de ellas corresponden a las variables dependientes e independientes que se relacionan con el estiramiento de un resorte y dominio y recorrido respectivamente.*

Instrucciones:

Ingresar al link: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_all.html?locale=es



and-

- 1.1. Identifique los elementos presentes en el simulador y manipúlelos para familiarizarse con su funcionamiento, detalle a continuación estos elementos y de una descripción de lo sucedido:

- 1.2. ¿Qué sucederá si se agregan masa al resorte? Explique.

- 1.3. A continuación, agregando diferentes pesas (masas) al resorte, detalle las variables que intervienen en la experimentación “Estiramiento del resorte” y que podrían considerarse para graficar este fenómeno.

- 1.4. Durante la experimentación es posible observar: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia?

- 1.5. De las variables identificadas, ¿cuál de ellas corresponde a la variable independiente y dependiente?

- 1.6. ¿Qué valores pueden tomar las variables dependientes e independientes? ¿A qué conjunto de números corresponde?

- 1.7. Se han tomado algunos datos para averiguar cómo cambia la longitud del estiramiento del resorte, en la tabla 1 se presenta parte de la información.
¿Qué representan los valores colocados en la tabla? Pon el nombre a cada columna, según la variable que cada una representa e indique la unidad de medida en cada caso.

Tabla 1 . Longitud del Estiramiento del Resorte

0	0
50	13
110	18
190	31

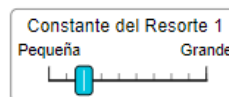
Actividad 2:

Situación de aprendizaje en un ambiente virtual, con la utilización de simulador “*Phet Interactive Simulations*”.

Objetivo: *Determinar que el aumento en la longitud del estiramiento del resorte es constante por unidad de masa (variación constante) y que la representación gráfica es una recta en el Sistema Cartesiano.*

Indicaciones para el trabajo

1. Fijar las características del resorte, como se muestra en la figura:



A continuación, agregar masas al resorte y construir una tabla con los datos obtenidos, partiendo de los 50 grs, ir aumentando de 20 en 20 los gramos de las pesas hasta llegar a los 210 grs. Asegúrese que el resorte se haya detenido por completo antes de medir.

Masa (grs.)	Longitud del estiramiento (cm)

Analice y responda:

1.1. ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte cuando no se le agregan masas? ¿Cuál es la variación en la longitud del estiramiento del resorte, cuando la masa aumenta de 20 en 20? Realiza los cálculos y explica el procedimiento utilizado.

--

- 1.2. ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte al poner una masa de 10 grs.; 30 grs. y 40 grs? Realiza los cálculos y explica el procedimiento.

- 1.3. ¿Cuál es la longitud del estiramiento del resorte si la masa es de 5 grs., 4 grs. y 1 grs.? Realiza los cálculos y explica el procedimiento.

- 1.4. Determinar la longitud del estiramiento del resorte para una masa de 452 grs.si es posible. Realiza los cálculos y explica.

- 1.5. En un sistema de ejes coordenados (plano cartesiano) realice la gráfica de la situación experimentada con los datos obtenidos, ubicando el nombre de cada variable al eje coordenado respectivo.

- 1.6. ¿Qué representa la gráfica realizada? Y ¿qué características se pueden señalar de acuerdo con su comportamiento?

- 1.7. La tabla y gráfica construidas ¿modelan la situación del estiramiento del resorte? Argumenta.

2. Variación conjunta.

- 2.1. Considerar un resorte, al que se le irán agregando masas de diferente magnitud, y construir una tabla que contenga la siguiente información: masa, longitud del estiramiento del resorte y longitud total del resorte.

Masa	Longitud Estiramiento	Longitud Total

- 2.2. Realizar la gráfica de la situación experimentada, en un mismo sistema de ejes coordenados, luego analizar el comportamiento de las gráficas en conjunto. Argumentar.

2.3. Para la siguiente situación, ingresar a: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_all.html?locale=es_PE. Considerar dos resortes con diferentes características físicas, ajustando las fuerzas de los resortes uno y dos como se muestra en la figura:

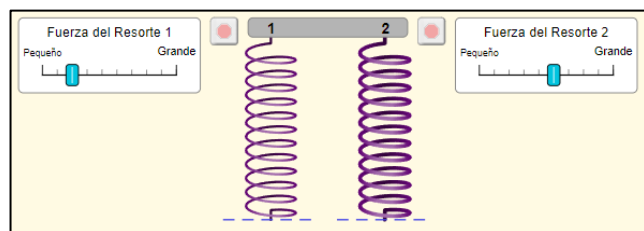
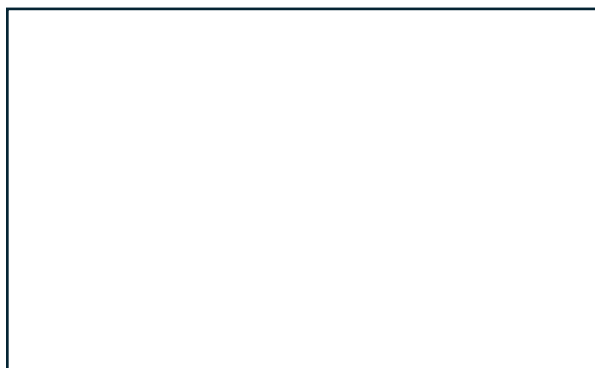


Figura 7.

2.4. Agregando masas iguales en ambos resortes, construir la tabla de valores y las gráficas respectivas en un mismo sistema de ejes coordenados.

Masa	R1	R2



2.5. Argumentar el comportamiento de cada resorte, según lo observado tanto en la tabla como en la gráfica.

2.6.
A

continuación, considerar las diferencias en las longitudes de ambos resortes. ¿Es posible afirmar que estas diferencias se modelen por una función lineal? Argumentar.

Masa	Long. (R1-R2)

Actividad 3:

Objetivo: Describir el modelo funcional algebraico del comportamiento del estiramiento de un resorte, articulando lo numérico (tablas) con lo gráfico y con lo algebraico, concluyendo así, en el modelo lineal.

Considerando la expresión: $L = l \cdot M + L_0 = f(M)$ ó $f(x) = ax + b$

L: longitud o longitud del estiramiento del resorte

M: masa

l: pendiente o razón de cambio.

1.1. ¿Qué término de la expresión representa la longitud natural o inicial del resorte?

1.2. ¿Qué término de la expresión representa el cambio de longitud por unidad de masa?

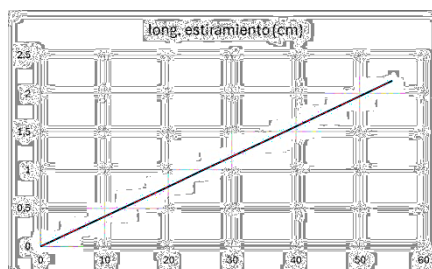
1.3. ¿Qué diferencia existe en la expresión al considerar o no la longitud natural del resorte?

1.4. ¿Qué ocurriría si la razón de cambio por unidad de masa fuera negativa?

1.5. Plantear la expresión algebraica que corresponde cada tabla y gráfica que se muestra. Detallar paso a paso el procedimiento seguido y compruebe que la expresión obtenida corresponde a la función que modela cada situación, para esto considere algunos de los valores que toma la masa para verificar el valor de la longitud del estiramiento del resorte.

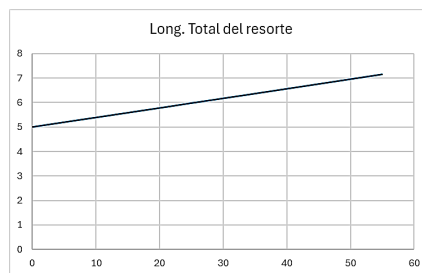
c)

masa (grs)	long. estiramiento (cm)
0	0,0
20	0,8
25	1,0
35	1,4
55	2,2



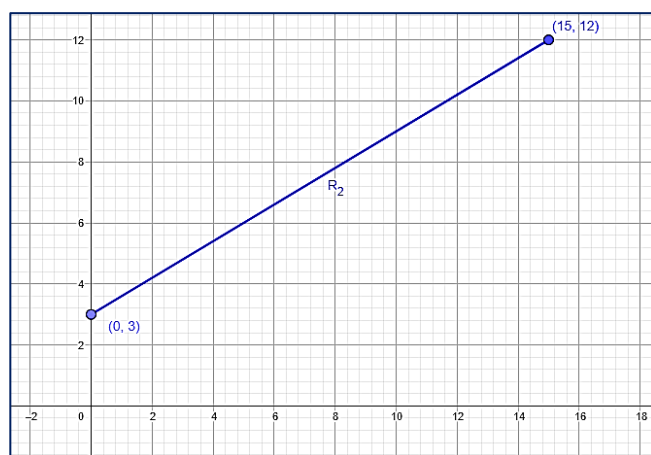
b)

masa (grs)	Long. Total del resorte
0	5,0
20	5,8
25	6,0
35	6,4
55	7,2



1.6. Determinar la expresión algebraica correspondiente a cada gráfica. Para esto, considere los pasos seguidos en el punto 1.5 de esta actividad.

a)



b)

