UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Desarrollo de la creatividad en la clase de matemática: estudio clínico en tercer año de enseñanza media en torno a la probabilidad condicional basada en apoe/apos

Estudio clínico

Claudio Rodrigo Quiroz Troncoso

Profesora guía: Dra. Lorena Espinoza Salfate

Tesis para optar al grado de Magister en Educación Matemática

Santiago – Chile

2022

RESUMEN:

El desarrollo de la creatividad (pensamiento creativo) en el currículum escolar chileno posee una data superior a 10 años. Lo anterior, ha provocado la necesidad de generar estrategias relativas a las prácticas de enseñanza en aula de profesores en el país. Este trabajo presenta los resultados de una investigación que utiliza el marco de desarrollo del pensamiento creativo de Torrance, conocido como TTCT, a partir de su sigla en inglés *Torrance Test Of Creative Thinkingi*. Por un lado, este analiza el desarrollo del pensamiento creativo/divergente y, por otro lado, el desarrollo de competencias matemáticas según el marco de Mogens Niss: modelar, representar, resolver problemas y argumentar y comunicar. Para el estudio, se analizaron los contenidos de enseñanza media respecto a la probabilidad condicional a través de una descomposición genética, basada en la corriente didáctica APOE/APOS.

El estudio, de carácter clínico, recaba información ofrecida por estudiantes de tercer año de enseñanza media del Colegio Sara Blinder. Esta fue recogida durante el ciclo de un año, a través de dos muestras obtenidas en sesiones de 50 minutos, respectivamente. Las respuestas muestran un éxito en el desarrollo de los problemas propuestos, dado que se logra obtener resultados sin necesidad de utilizar la fórmula de probabilidad condicional. En su lugar, se aplican diversas estrategias para la resolución de los problemas presentados, lo que evidencia la utilización del conocimiento matemático y pedagógico del contenido.

Este trabajo discute posibles maneras de establecer modelos de desarrollo de la creatividad, a través del desarrollo de las habilidades matemáticas en el contexto de una clase diseñada bajo el modelo APOE/APOS, así como también de acuerdo con la descomposición genética, establecida en el marco de la probabilidad condicional.

Palabras clave: APOE, APOS, Didáctica, Matemática, Probabilidad

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La presente investigación pretende caracterizar el desarrollo del pensamiento creativo (creatividad) en la enseñanza de la matemática, a partir de la probabilidad condicional. En relación con este planteamiento, la competencia humana de la creatividad, entendida como un atributo universal de todos los seres humanos, se convierte en un elemento relevante dentro del diseño de los procesos de enseñanza de la matemática. En consonancia con lo anterior, a partir de un estudio cualitativo, descriptivo y no experimental, se propuso el diseño y aplicación de una clase de probabilidad condicional –en formato extraescolar– a un subgrupo de niñas de tercer año de enseñanza media, perteneciednte a un colegio técnico profesional.

En este estudio se hizo evidente cómo el hecho trabajar con un problema atípico produce reacciones, estrategias y soluciones atípicas, desarrolladas sobre la base de capacidades creadoras que, además, ponen en juego las competencias matemáticas sugeridas por el Ministerio de Educación de Chile. Asimismo, y debido a los hallazgos recabados durante su primera implementación, el estudio se repitió un año más tarde, con un grupo de estudiantes del mismo establecimiento y nivel.

En este trabajo, se exponen antecedentes respecto al concepto de creatividad y el desarrollo del pensamiento creativo, que son fundamentales para el planteamiento de la hipótesis y los objetivos de este estudio. En el marco teórico, se realiza una revisión histórica respecto a la vinculación entre la creatividad y la matemática, como forma de caracterizar su relación con el desarrollo del pensamiento creativo. Lo anterior, además, conduce a una exploración en torno a la importancia de la creatividad en Chile y de cómo, paulatinamente, se adoptó su integración en el currículum nacional basado en el desarrollo por competencias.

Según consta en el currículum escolar chileno, este instrumento promueve el desarrollo de habilidades/competencias matemáticas en los estudiantes de enseñanza media, tales como: “Resolver Problemas, Modelar, Representar y Argumentar y Comunicar”. Para orientar el trabajo, se creó un Marco Epistémico de Referencia (MER), en el que se establece una triangulación entre el desarrollo de competencias, la puesta en práctica de la probabilidad condicional y la generación de una propuesta de clase en torno a la probabilidad condicional, basada en la didáctica APOS/APOE de Ed Dubinsky. A través de lo anterior, se espera fomentar el desarrollo del pensamiento creativo y, con ello, las competencias matemáticas asociadas.

En el marco metodológico, se discute el abordaje que se le dio a los objetivos inicialmente planteados, así como también las técnicas utilizadas para establecer las respectivas conclusiones. En la parte final de este trabajo, se analizan cada uno de los ítemes diseñados para la propuesta didáctica aplicada en dos ocasiones y, al mismo tiempo, se discuten aspectos relativos a su implementación. Finalmente, a partir de las conclusiones arrojadas, se indican sugerencias y proyecciones en torno a la propuesta diseñada.

ANTECEDENTES

Un asunto de especial relevancia dentro de la sociedad es la educación, en conjunto con sus respectivos modelos formales y no formales de procesos de enseñanza y aprendizaje. Dentro de este ámbito, la enseñanza de la matemática es un área prioritaria, mundialmente trabajada de forma ardua y colaborativa a través de sistemáticas propuestas que construyen y fortalecen las distintas corrientes didácticas existentes. Lo anterior, con el fin de aportar a una sociedad en la que las personas desarrollen más y mejores habilidades y competencias, enfocadas principalmente en las áreas cognitivas, intrapersonales e interpersonales, de acuerdo con lo informado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, 2019).

Según la OECD, el informe del *Programme for International Student Assessment*, más conocido como PISA, consideró a la matemática como el dominio principal de evaluación durante los años 2003 y 2012 (PISA, 2018). A pesar de los escasos informes o investigaciones existentes, dichos instrumentos evidencian precisamente el desarrollo del pensamiento creativo en los estudiantes de educación media, además de definir formalmente aquello que se entiende por competencia matemática en el informe de 2013 (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2013). Específicamente, dicho informe define a la competencia matemática como "…la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, lo cual se complementa a la necesidad del ser humano de validar y significar lo que aprende dándole una finalidad y sentido en el entorno cercano, común y diario" (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2013).

En este ámbito, también cabe mencionar que, en 2019, la OECD estableció en su página web que en el año 2021 se espera innovar en la evaluación del pensamiento creativo en los 38 países que se adscriben a dicha entidad. Además, dicha organización proyecta implementar sistemáticamente el mismo modelo en un total de 50 países (OECD - Organización para la cooperación y el desarrollo económicos, 2019).

Sumado a lo anterior, los ejes curriculares matemáticos propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) determinan que el trabajo de Estadística, específicamente el de Probabilidad, ofrece la posibilidad de desarrollar actividades basadas en la resolución de problemas. Sin embargo, un foco de dificultad es el hecho de que los docentes en ejercicio, generalmente, evitan abordar dicho eje, a pesar de su evidente transversalidad en el currículum escolar chileno (primero básico a cuarto medio). De hecho, según el sitio oficial de la Agencia de la Calidad de la Educación de Chile, el desarrollo del pensamiento creativo representa un elemento primordial en la formación de futuros ciudadanos (Agencia de Calidad de Educación, 2019). No obtante, tanto el informe del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) como el informe PISA, demuestran que los estudiantes chilenos se encuentran en un nivel por debajo de la media respecto a este dominio (PISA, 2018).

Por estas razones, es importante considerar la necesidad de fortalecer el eje de estadística (probabilidad y/o datos y azar), al tiempo de extender su relevancia al desarrollo del eje de probabilidad condicional. Ambos temas son intrínsecamente prácticos, moldeables, manejables y tangibles, así como también de fácil adaptación al trabajo con material concreto y el uso de distintos tipos de registros, tales como gráficos, imágenes, tablas, diagramas, entre otros. La posibilidad de experimentación que ofrece la estadística posiciona a este eje curricular como un recurso óptimo para el desarrollo de la creatividad, pues a través de este se generan estrategias, formulan hipótesis y concretan experimentos relacionados con los principales elementos que sustentan la idea de pensamiento creativo.

Finalmente, la neurociencia aplicada a la educación ha consolidado su injerencia en lo relativo al desarrollo del pensamiento creativo durante los últimos 10 años. Particularmente, esta corriente define el desarrollo de competencias como un factor crucial en el proceso de acoplamiento o matematización del estudiante. El vínculo que favorece el aprendizaje y comprensión del concepto matemático se concreta a través del proceso de resolución de problemas, debido a que moviliza dicho saber desde un estado de matemática no utilitaria a uno de carácter puramente funcional (Fernández Bravo, 2010).

En consecuencia, a partir de esos datos preliminares es posible trazar antecedentes claves que evidencian la relevancia, vigencia y proyección del vínculo entre pensamiento creativo y matemática, principales ejes de esta investigación. Tanto a nivel nacional como internacional, el desarrollo del pensamiento creativo es un factor relevante, que debe ser potenciado a través de los procesos formativos de los estudiantes.

PROBLEMÁTICA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En el último tiempo, los constantes cambios generados en la sociedad han repercutido en distintas aristas y focos de preocupación a nivel global. El dinamismo con el que la sociedad cambia, ha provocado brechas considerables respecto a lo que se considera importante y necesario enseñar. Entre estos desafíos, se encuentra el desarrollo de la creatividad en los estudiantes, cuya ejecución conlleva a la implementación de innovaciones relativas a la forma y el fondo (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2019). Otro aspecto, relativamente reciente, se relaciona con el desarrollo de competencias y habilidades en los estudiantes. En lo referido al ámbito de la matemática, un efectivo abordaje de dichos elementos permitiría, potencialmente, enfrentar la vida de forma óptima y exitosa, así como también movilizar la idea de que los talentos están igualmente distribuidos en la sociedad, sin discriminación por concepto de etnia, género, clase social u otros sesgos (Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura, 2015).

Según mediciones internacionales, la educación no ha logrado el desarrollo efectivo del pensamiento creativo en los jóvenes (PISA, 2018), por lo que aún se plantea como una problemática en vías de resolución. Un posible camino para lograr lo anterior es el fortalecimiento y potenciación de las habilidades/competencias que conciernen a la disciplina matemática. Su desarrollo estimula el pensamiento creativo, pues las estrategias, métodos o vinculaciones utilizadas para resolver las problemáticas planteadas verifican y garantizan la capacidad de enfrentarse a escenarios de diversa índole, que surgen en el contexto de la sociedad actual y futura.

Un factor que afecta a la persistencia de esta problemática es el predominio de una enseñanza tradicional, cimentada en el monumentalismo. Esto es, una presentación acabada de ciertas obras y a la entrega de conceptos, estrategias y ejemplos inamovibles; de objetos matemáticos que obstaculizan, o directamente impiden, que el estudiante descubra y genere procesos de desarrollo de su pensamiento creativo. En consecuencia, se menoscaba la posibilidad de desarrollar genuinamente la competencia de la creatividad, debido a que los métodos utilizados estimulan el olvido inmediato de los contenidos revisados una vez obtenida la calificación (Chevallard, 2013).

Cuando se analizó el currículum de enseñanza media, en particular el de tercero medio (MINEDUC, 2019), se observó la presencia de temáticas en torno a límites, derivadas, integrales y probabilidad condicional. Para efectos de este estudio, se eligió el eje referido a la probabilidad condicional, ya que este posee un potencial lúdico y experimental, que derroca la eventual creencia de que la disciplina de la matemática es tediosa. En la medida que se elabore una propuesta didáctica desde lo empírico, la indagación y lo manipulable, dicho eje logra promover la indagación autónoma y, con ello, la posibilidad de proporcionar un instante en el que se fomente directamente la creatividad en los estudiantes.

En esta propuesta, la creatividad se considera como la *"capacidad y actitud para formar combinaciones, para relacionar o reestructurar elementos conocidos, con el fin de alcanzar resultados, ideas o productos, a la vez originales y relevantes [...] equivale a una cierta manera de utilizar lo que está disponible, a hacer un uso infinito de recursos necesariamente finitos"* (López Pérez, 2009). Si asociamos esta definición al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, entonces, el fomento de la creatividad que se fortalece es la capacidad de autonomía de los estudiantes. Además, si se intenciona un trabajo de carácter colaborativo, se enriquece la diversidad de razonamientos y de caminos/soluciones construidos para la resolución del problema. De esta forma, la respuesta grupal pasa a estar conformada por los medios y recursos indagados de manera personal y conjunta.

Para efectos de este estudio, dada las numerosas aristas que convergen en torno a esta problemática, se decidió abordar el desarrollo o fortalecimiento del pensamiento creativo en estudiantes de tercero medio, a quienes se les aplicó una medición de carácter cualitativa, descriptiva y no experimental. Se decidió trabajar el eje de Estadística (probabilidad), específicamente el ámbito referido a probabilidad condicional y cuyas directrices generaron las siguientes preguntas:

- ¿Qué entendemos por pensamiento creativo?
- ¿Qué se entiende por habilidades/competencias matemáticas?
- ¿Existe una relación entre las competencias matemáticas y el pensamiento creativo?
- ¿Qué relación (si es que existe) se puede establecer entre pensamiento creativo y las habilidades/competencias matemáticas?
- ¿Son los estudiantes capaces de poner en práctica sus conocimientos para resolver problemas de probabilidad condicional de forma grupal?
- ¿Cómo lograr que los conocimientos y competencias matemáticos, desarrolladas en niveles anteriores al de tercero medio, se articulen y tomen sentido para dar respuesta a los problemas de probabilidad condicional que se les presenten a los estudiantes?

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN Y PROPÓSITO

Objetivo General

- Generar una propuesta de enseñanza basada en el marco didáctico APOE, que promueva el desarrollo del pensamiento creativo en estudiantes de tercer año de enseñanza media en el ámbito de la probabilidad condicional.

Objetivos Específicos

1. Medir el nivel de desarrollo de las habilidades creativas de los estudiantes de tercero año de enseñanza media de un liceo de la Región Metropolitana.
2. Determinar una descomposición genética basada en APOE/APOS, respecto a la probabilidad condicional para estudiantes de tercero año de enseñanza media.
3. Elaborar una propuesta didáctica de enseñanza basada en la descomposición genética según APOE.
4. Determinar el desarrollo del pensamiento creativo de los estudiantes de tercero medio, tras la implementación de la propuesta didáctica de probabilidad condicional basada en APOE.
5. Sugerir una propuesta en torno a cómo desarrollar la creatividad desde el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática, en base a la experiencia vivida y analizada.

Hipótesis

Hipótesis H_0

La implementación de una clase basada en APOS, que movilice el uso de las competencias matemáticas, evidencia un aumento del desarrollo del pensamiento creativo en los estudiantes.

Hipótesis H_1

La implementación de una clase basada en APOS, que movilice el uso de las competencias matemáticas, no evidencia un aumento del desarrollo del pensamiento creativo en los estudiantes.

Hipótesis H_{01}

Si el problema es enunciado ante la clase de una manera a-típica, los estudiantes recurrirán a herramientas no estandarizadas para estudiar y responderlo.

Hipótesis H_{11}

Si el problema es enunciado ante la clase de una manera a-típica, los estudiantes no recurrirán a herramientas no estandarizadas para estudiar y responderlo.

Propósito

El propósito de esta investigación es poner en relación la vinculación entre las competencias/habilidades matemáticas y el desarrollo del pensamiento creativo, a través de un análisis teórico, complementado con la presentación de una actividad diseñada para un tercer año de enseñanza media que se basa en la teoría didáctica de Ed. Dubinsky APOS/APOE. Para ello, se selecciona el contenido "Probabilidad Condicional", de tercer año de enseñanza media, según los programas de estudio del MINEDUC –presente tanto en las antiguas bases curriculares, como en las nuevas (MINEDUC, 2019).

Un segundo propósito radica en la necesidad de motivar los procesos creativos desde la matemática, con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo y participativo, centrado en la potenciación de habilidades de todos los actores involucrados. Se asume que lo anterior conlleva a la necesidad de activar la inteligencia emocional y a una eficiente gestión del conocimiento por parte de estudiantes y profesores. Asimismo, se espera estimular las habilidades necesarias para fortalecer o movilizar competencias genéricas y matemáticas, que fomenten competencias ligadas a la disciplina y a su respectiva aplicación al desarrollo de personas más íntegras.

Capítulo I: MARCO TEÓRICO

I.I Contextualización

Según los programas de estudio de tercero y cuarto año de enseñanza media, aprobados por el Consejo Nacional de Educación (CNED), se plantea como fin de la educación el desarrollo de competencias en los jóvenes que resulten necesarias para su desenvolvimiento en el mundo actual. Para concretar su logro, dichos documentos definen la necesidad de movilizar cuatro habilidades centrales, las cuales permiten el cumplimiento de los objetivos de integralidad; una estas, es la habilidad creativa (Ministerio de Educación de Chile, 2019).

El fin de la educación en Chile es el desarrollo de herramientas, habilidades y competencias a través de las cuales las y los jóvenes puedan desenvolverse en el mundo. Esta mirada resulta particularmente interesante en relación con la educación matemática, debido a que esta última pone énfasis en la construcción social del conocimiento. Con ello, dicha disciplina trasciende más allá del desarrollo de sus propias competencias, al estimular un desarrollo significativo de macro competencias, que fomentan la colaboración como un eje central en la formación de las personas.

Al igual que en Chile, el desarrollo de personas integrales es una tendencia que se visualiza a nivel mundial. En esta línea, se han realizado análisis en torno a la presencia de dichas habilidades en las competencias descritas en el currículum oficial, tales como el informe del Consejo Nacional de Investigación de Estados Unidos (Pellegrino & Hillton, 2012). Las llamadas "Competencias para el Siglo XXI" abren la posibilidad de sustentar una taxonomía en torno a estas habilidades. Concretamente, dentro de este diseño, se encuentran las competencias cognitivas ligadas a los procesos y estrategias del conocimiento, y las cuales advierten la necesidad de poner atención al desarrollo de la creatividad como un elemento indispensable para el logro, generación y fomento de dichas competencias (Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura, 2015).

En marzo del 2011, el Centro Interuniversitario de Desarrollo (CINDA) publicó un estudio en el cual se detectó que un número importante de estudiantes de primer año de educación superior no poseían las habilidades que permiten desplegar, con mayor solidez, las competencias necesarias para dicho nivel. Entre estas, se destacan particularmente el pensamiento crítico y el pensamiento creativo. Más aún, en dicho estudio se puntualiza que, dentro de los componentes críticos del área matemática, el desarrollo de la creatividad no es uno de los elementos consolidados (Centro Interuniversitario de Desarrollo, 2011).

I.II Historia y evolución de la creatividad y la matemática

La creatividad y la matemática han estado ligadas de forma natural, al ser esta última una ciencia que busca dar respuesta a sucesos o situaciones que requieren crear y recrear sistemáticamente. La noción y relación de la matemática con la creatividad se ha encontrado presente desde el primer cuarto del pasado siglo, desde que Henri Poincaré, en 1929, definió la creatividad como: "la combinación de los elementos existentes con nuevas conexiones, que sean útiles". De esta manera, sentó un precedente utilizado tanto por otros matemáticos como por filósofos de la época.

Posterior a ello, al finalizar la Segunda Guerra Mundial, un grupo de investigadores y docentes crearon la Comisión Internacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (CIEAEM - 1950). Desde sus primeros trabajos, se manifestó la necesidad social de desarrollar la actividad cognoscitiva, a través del fomento de una creatividad que cuestionara el dogmatismo (conductista) predominante de la época. En conexión con este enfoque, se encuentran los estudios de Puig Adam, quien centró su atención en el desarrollo de la creatividad para estimular y favorecer el aprendizaje de la matemática. Según este autor, la "enseñanza creativa" se produce cuando el estudiante es el encargado de constuir y descubrir su propio conocimiento, al emprender una búsqueda constante de algo nuevo.

Por un lado, George Polya, en la década de los 60's, describió el *Know – How* en la matemática como la integración de información y conocimiento. Dicho proceso necesariamente requiere de pensamientos independientes, originales y creativos. Una vez que se logra integrar de forma sistemática y eficiente dichos pensamientos, es posible movilizar la capacidad para desarrollar problemas, encontrar pruebas y criticar argumentos de forma fluida, por lo que es factible el reconocimiento de conceptos matemáticos en situaciones concretas (Polya, 1963).

Por otro lado, a comienzos de los 90's, Luis Rico trabajó en torno al concepto de pensamiento matemático y constató que se requiere de una alta dosis de creatividad para poder abordar los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática. El hecho de resolver un problema –o de encontrar una posible solución a un problema, tarea o desafío– provoca que las estructuras cognoscitivas y operacionales del pensamiento del individuo, tras no encontrar métodos ni conceptos idóneos, se vean exigidas a innovar o crear caminos de resolución (Rico-Romero, 1990).

Asimismo, Irene Entrena Martínez enfatiza la importancia de una educación basada en el desarrollo de competencias. Dentro de las fundamentales se encuentra, precisamente, la competencia matemática, pues es una habilidad funcional que es potencialmente aplicable en distintos contextos de la vida. En consideración de lo anterior, la propuesta de Entrena propone la implementación de proyectos fuera del aula, que permitan interpretar situaciones próximas a la vida cotidiana y cuyas estrategias sirvan para una posterior aplicación en el aula a través de la formalización de los contenidos. Cabe señalar que esta modalidad de trabajo, además, fortalece otras competencias de carácter transversal en la formación de estudiantes (Entrena Martínez, 2015).

I.III Puesta en relación de las Habilidades Matemáticas y el Desarrollo del Pensamiento Creativo

Según Aguilera Luque (2017), existen dos formas de pensamiento, el convergente y el divergente. El primero, también conocido como producción convergente, es utilizado para solucionar problemas mediante procedimientos convencionales y predeterminados. Matemáticamente hablando, corresponde a un tipo de razonamiento condicionado por la implementación de algoritmos preestablecidos y que son aplicados de manera rígida y estructurada por parte los estudiantes. Esta forma de pensamiento es conocida como matemática moderna. En cambio, el segundo tipo de operación –de producción divergente– implica la búsqueda de distintas respuestas o soluciones para un determinado problema, a través de un proceso en el que predomina la libertad exploratoria, la representación en contexto y la utilización de un lenguaje matemático propio. De este modo, se descarta la aplicación de un algoritmo específico para resolver los problemas planteados y, con ello, se desestima la existencia de una única forma de representar las respuestas o soluciones.

Este último tipo de pensamiento se encuentra estrictamente relacionado con el concepto de creatividad, pues apela a la generación del conocimiento y no a su mera reproducción. Por lo demás, la producción divergente incluye los cuatro factores fundamentales de la creatividad propuestos por Guilford (1950 en adelante): fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración. Estos permiten desarrollar lo que dicho autor concibe como la capacidad mental que interviene en la realización creativa; además del establecimiento de asociaciones lejanas, la sensibilidad ante los problemas y la posibilidad de redefinir las cuestiones. Este autor es quien establece, por primera vez, la división entre

pensamiento convergente –o lógico– y el de carácter divergente, entendido como la búsqueda de soluciones más abiertas, diferentes e inusuales, fundadas en la idea de innovación (Guilford, 1950).
Es importante desatacar que los componentes anteriores sentaron la base para los posteriores estudios de Torrance (1974) en torno pensamiento divergente. Este autor define la creatividad como el proceso de descubrir problemas o lagunas de información, mediante la formación de ideas no necesariamente argumentadas o hipótesis, que son modificadas y comunicadas antes de ser probadas y analizadas en base a los resultados. Asimismo, Torrance precisa que dichos pasos difieren del método científico, puesto que obedecen a procesos particulares, fundados en un estilo de vida de orden creativo que se encuentra mediado por los rasgos de personalidad, las formas de interacción con los demás, los modos de vida y el crecimiento de cada persona. En la medida que se aplican dichos procesos, se permite desarrollar talentos, aprovechar potenciales no utilizados y formar un sujeto en base al autodescubrimiento y la autodisciplina, debido a que este se enfrenta al mundo a partir de las herramientas existentes y las dispone para enfrentar con éxito un ciclo de vida continuo (Millar, 1995).

En el mismo ámbito, de acuerdo con la definición de Mogens Niss, la competencia matemática es la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticos. Además, dicho autor propone ocho competencias que sientan la base para las competencias matemáticas abordadas en el currículum escolar chileno (Niss & Hojgaard, 2011). Por esta razón es posible intuir una directa relación con respecto a las habilidades matemáticas desarrolladas durante la enseñanza media, es decir, Resolver Problemas, Representar, Modelar y Argumentar y Comunicar.

Actualmente, las Bases Curriculares se encuentran actualizadas en el área de desarrollo de habilidades hasta 2do año de enseñanza media. Con el ánimo de dar continuidad a las habilidades propuesta entre 7mo y 2do medio[i] ponerlas en relación con los aspectos descritos en torno a la creatividad, se utilizarán las definiciones de Habilidades Matemáticas presentes en dichos documentos, en conjunto con las directrices de baremación del Test de Pensamiento Creativo Torrance de Canarias (Artiles Hernández, Jiménez González, Rodríguez Rodríguez, & García Miranda, 2007). El objetivo es poner en relación las cuatro habilidades matemáticas propuestas por el MINEDUC –resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar–, con las cuatro dimensiones para medir el pensamiento creativo de Torrance, es decir, fluidez, flexibilidad, elaboración y originalidad. Esta propuesta es potencialmente productiva para caracterizar el marco de la educación Matemática, puesto que no se detectaron precedentes en torno a esta conexión tras la revisión en revistas especializadas.

Por una parte, el MINEDUC plantea el proceso de aprendizaje de la matemática como un camino que aporta al desarrollo de habilidades y competencias de las personas en formación escolar. A su vez, se entiende que este genera una proposición estética y autónoma con respecto a la persona. Por otra parte, el Test de Pensamiento Creativo de Torrance requiere de una evidencia concreta y medible en torno a la expresión figurada y los diferentes productos generados. Esto es, la necesidad de resultados empíricos que demuestren la transposición de directrices normativas, validadas por el pensamiento lógico, pero a través del pensamiento creativo. De este modo, es posible plantear la enseñanza de la matemática en el currículum chileno como parte constituyente del desarrollo de la creatividad, debido a que las bases curriculares de 7mo a 2do medio persiguen objetivos consecuentes con los propuestos por Torrance en torno al concepto de creatividad.

En suma, la puesta en relación entre las competencias matemáticas y la creatividad de la presente propuesta se constituye de la siguiente forma:

Habilidades Matemáticas a desarrollar[1]	Factores de Creatividad
Resolver Problemas Se entiende por resolver problemas cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, sea esta contextualizada o no. Es pertinente especificar que al estudiante no se le debe indicar un procedimiento a seguir, dado que, a lo largo del proceso y ante la necesidad de resolver, deberá experimentar, seleccionar, inventar y aplicar diferentes estrategias; comparando vías de resolución y evaluando las respuestas obtenidas, así como su pertinencia para posteriormente comunicar los avances y/o resultados Al guiar esta práctica, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. El aporte al aprendizaje de los estudiantes no es tan solo la solución de un problema matemático, sino	Originalidad Está referida a la habilidad para producir o generar ideas o respuestas novedosas, poco convencionales, lejos de lo establecido y usual en un campo o ámbito determinado, tanto de forma verbal (oral o escrita) como mediante la expresión plástica. Es la característica que define a la idea, proceso o producto como algo único o diferente.

<table>
<tr><td>también el proceso de búsqueda creativa de soluciones, en el que además se ponen en juego habilidades intra e interpersonales. Lo anterior permite comprender la clase como un lugar en el que se entrelazan la creatividad y la curiosidad, debido a que es posible formular nuevas preguntas y generar situaciones de interés personal.</td><td>Se mide por las respuestas novedosas, no familiares, inusuales y no convencionales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuando se considera fomentar y desarrollar una habilidad como la de resolver problemas, explícitamente se contempla un escenario en el que no se indique un procedimiento establecido, puesto que necesariamente el estudiante debe generar o producir las ideas. Al situarse en el escenario “aula” y comprender la inexistencia de una metodología de resolución inducida por el docente, entonces, la variedad de respuestas que entregue el estudiante podrá satisfacer la novedad u originalidad de los procesos que lleven a la respuesta. De este modo, tanto el estudiante como sus compañeros establecerán conexiones con la dimensión del pensamiento creativo de originalidad.
Para orientar el proceso al docente, el Dr. Horacio Solar define como importante dentro de esta habilidad:
• simplificar el problema y estimar el resultado;
• descomponer el problema en subproblemas más sencillos;
• buscar patrones, evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático; además de utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.</td></tr>
<tr><td>Representar
Para trabajar en matemática de manera precisa –y en el contexto de tercero medio–, se requiere que los estudiantes transiten de forma aleatoria entre distintas representaciones matemáticas; desde formas concretas y pictóricas, hasta progresivamente avanzar a un lenguaje simbólico (COPISI).
Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso de aprendizaje, pues ofrecen al estudiante la posibilidad de construir sus propios conceptos matemáticos.</td><td>Fluidez
Es la facilidad para generar un número elevado de ideas, respuestas o soluciones en un campo o ámbito determinado, tanto de forma verbal (oral o escrita) como mediante la expresión plástica.

Se trata de una habilidad que consiste en producir un número</td></tr>
</table>

Representar tiene grandes aportes para el aprendizaje, entre los cuales se encuentra la posibilidad de relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones; así como también establecer conexiones entre diferentes niveles de representación, fomentados desde desde la enseñanza básica, como el concreto, pictórico y simbólico. Todo lo anterior, permite que la matemática sea algo cercano a la vida y a la experiencia de los estudiantes, debido que estos adquieren conocimientos por medio del “aprender haciendo” en situaciones concretas y en base a la traducción desde un nivel gráfico a uno simbólico, en el que se utilizan conceptos matemáticos. Mediante este proceso, se logra un aprendizaje significativo y se desarrolla la capacidad de pensar matemáticamente. En otras palabras, se espera que los estudiantes extraigan información desde su propio entorno y elijan distintas formas de expresar los datos (tablas, gráficos, diagramas, símbolos matemáticos, etc.), en consideración de las necesidades relativas a la actividad o la situación. Al mismo tiempo, se fomenta el uso e interpretación de representaciones concretas, pictóricas y/o simbólicas que resuelvan problemas; además de identificar su validez y limitaciones.	elevado de respuestas en un campo determinado, a partir de estímulos verbales o figurativos.
El representar es una forma que permite desarrollar la comprensión conceptual a través de los diferentes estilos de aprendizaje de la matemática. Por ello, la fluidez en este proceso resulta trascendental para lograr una adecuada interpretación, resolución y apropiación de la matemática. En este sentido, la habilidad matemática de “representar” se encuentra en directa relación con la dimensión del pensamiento creativo, pues a través de este el estudiante es capaz de adoptar enfoques o perspectivas diferentes, a la hora de buscar soluciones a un problema o tarea.	

Modelar	**Flexibilidad**
Modelar es un proceso que realiza la persona al plantearse un problema (en algún tipo de registro) e interiorizarlo. Puede considerarse una construcción/representación o modelo orientado a buscar soluciones prácticas y cercanas, de acuerdo con lo que sabe, respecto a sus pensamientos y creencias; para posteriormente simplificarla e idealizarla, hasta construir un modelo real que pueda aplicarse a otras situaciones (objetos, fenómenos, etc.) (Borromeo, 2010). El MINEDUC establece que es una habilidad que permite resolver problemas reales, mediante la construcción de modelos físicos, computacionales o simbólicos, que sirven para poner a prueba el objeto real y ver cómo responde frente a diferentes factores o variantes (Ministerio de Educación, 2016). En otras palabras, el objetivo de la modelación en la matemática es la comprensión matemática de una situación problemática real y cercana, de acuerdo con factores externos, internos y respecto a su entorno. Al construir modelos (varios), los estudiantes descubren, por ejemplo, regularidades o patrones, que les permiten ser capaces de expresar características de forma fluida, ya sea a través de sus palabras o de un lenguaje matemático formal. Además, se desarrolla la creatividad, la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, puesto que se encuentran soluciones potencialmente transferibles a otros contextos. Usualmente deben: • seleccionar modelos y comparar según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad; • usar modelos, entender y aplicar sus propiedades; • ajustar modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado.	Es la característica de la creatividad mediante la cual se transforma el proceso que permite alcanzar la solución del problema o el planteamiento de éste. Comprende una transformación, un cambio, un replanteamiento o una reinterpretación. Es la capacidad para adoptar enfoques o perspectivas diferentes a la hora de buscar soluciones a un problema o tarea en un campo o ámbito determinado, tanto de forma verbal (oral o escrita) como mediante la expresión plástica. También consiste en producir diferentes ideas para cambiar de un enfoque de pensamiento a otro, que permita utilizar diferentes estrategias de resolución de problemas. Se obtiene en relación con la variedad de respuestas que el estudiante es capaz de generar.

<table>
<tr><td colspan="2">El modelar comprende la creación de modelos diversos para caracterizar al objeto matemático. El generar patrones es, en esencia, una característica de la dimensión fluidez del pensamiento creativo. Dicha habilidad tiene como finalidad proyectar el dominio del concepto matemático, a través de la jerarquización de distintos modelos respecto a su grado de pertinencia y acertabilidad.</td></tr>
<tr><td>Argumentar y Comunicar
La habilidad de argumentar se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. Es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir colectivamente sus soluciones y las inferencias realizadas en torno a diversos problemas. Al escucharse y corregirse mutuamente aprenderán a generalizar conceptos y a utilizar un amplio abanico de formas para comunicar sus ideas.
Se apunta a que los estudiantes establezcan la diferencia entre una argumentación intuitiva y una argumentación formal matemática, de modo que sean capaces de interpretar y comprender cadenas de implicaciones lógicas.
Lo anterior permite establecer predicciones eficaces, en variadas situaciones, además de plantear conjeturas, hipótesis, ejemplos y afirmaciones condicionadas.
Se espera que desarrollen la capacidad de verbalizar sus intuiciones, así como aprender a detectar afirmaciones erróneas, absurdas o generalizaciones abusivas. De esta manera, serán capaces de realizar demostraciones matemáticas de proposiciones, apoyadas por diferentes representaciones pictóricas o a través de un lenguaje natural, por ejemplo, el que eventualmente se transformarán en un lenguaje formal matemático. En esta habilidad es importante:
• describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático algebraico, esquemas y gráficos;</td><td>Elaboración
Es el nivel de detalle, desarrollo o complejidad de las ideas creativas. Se trata de una capacidad para desarrollar, completar o embellecer una respuesta determinada.

El nivel de detalle otorgado por el estudiante corresponde al embellecimiento o adorno que es aportado, con el fin de mejorar la producción creativa de la persona en un campo o ámbito determinado, tanto de forma verbal (oral o escrita) como mediante la expresión plástica. Lo anterior permite que la creación sea más comprensible para el otro, al ser adaptada en consonancia con la comprensión propia y para ofrecer soluciones/ respuestas que aborden temáticas más grandes o generalizables a través de macro-conceptos.</td></tr>
</table>

• explicar soluciones propias y los procedimientos utilizados, para demostrar resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas, o bien, a través de generalizaciones con conectores lógicos y cuantificadores apropiados; • fundamentar conjeturas, usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados; • realizar demostraciones simples de resultados e identificar, en una demostración, si hay saltos o errores.	
La habilidad de argumentar y comunicar se pone en relación con la dimensión del pensamiento creativo de elaborar, pues el relato construido trasciende desde lo meramente intuitivo hasta el ámbito formal matemático. El uso de distintas formas para comunicar ideas, que son complementadas colaborativamente para ser entendidas, implica a su vez la utilización de distintos recursos, instrumentos y representaciones.	

En consecuencia, si bien se considera que la relación entre habilidades creativas y competencias matemáticas es complementaria, un modelo adecuado para representarla sería el siguiente:

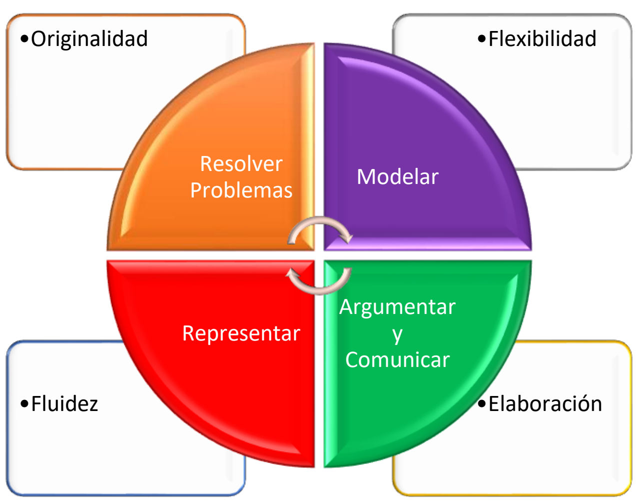


Imagen 1. Relación entre las habilidades y los factores de creatividad (elaboración propia).

Tras analizar las habilidades definidas en las Bases Curriculares del MINEDUC, se puede establecer que estas poseen una interrelación directa con otras habilidades que permiten afianzar una íntima e integral relación. Es decir, es posible rastrear con facilidad que el desarrollo de distintas habilidades refuerza la concreción de otras, y así sucesivamente. Por ejemplo:

- El desarrollo de la habilidad "Resolver Problemas (RP)" se encuentra ligado al desarrollo de las habilidades de "Modelar (M)" y "Argumentar y Comunicar (AC)".
- El desarrollo de la habilidad "Representar (R)" se encuentra ligado al desarrollo de las habilidades de "Resolver Problemas (RP)" y "Argumentar y Comunicar (AC)".
- El desarrollo de la habilidad "Modelar (M)" se encuentra ligado al desarrollo de las habilidades de "Resolver Problemas (RP)" y "Representar (R)".
- El desarrollo de la habilidad "Argumentar y Comunicar (AC)" se encuentra ligado al desarrollo de las habilidades de "Representar (R)" y "Modelar (M)".

Las interrelaciones previas no son opositivas a la eventual injerencia de una tercera habilidad en cada uno de dichos procesos. Por el contrario, demuestra que las habilidades son desarrolladas de manera ampliamente colaborativa. En este sentido, en cada caso se genera una relación bidireccional, cuyo resultado es precisamente la movilización de una tercera habilidad. Lo anterior queda mejor detallado a través de la *Imagen 2*.

A. Es "Resolver Problemas", o bien, "RP".
B. Es "Representar", o bien, "R".
C. Es "Modelar", o bien, "M".
D. Es "Argumentar y Comunicar", o bien, "AC".

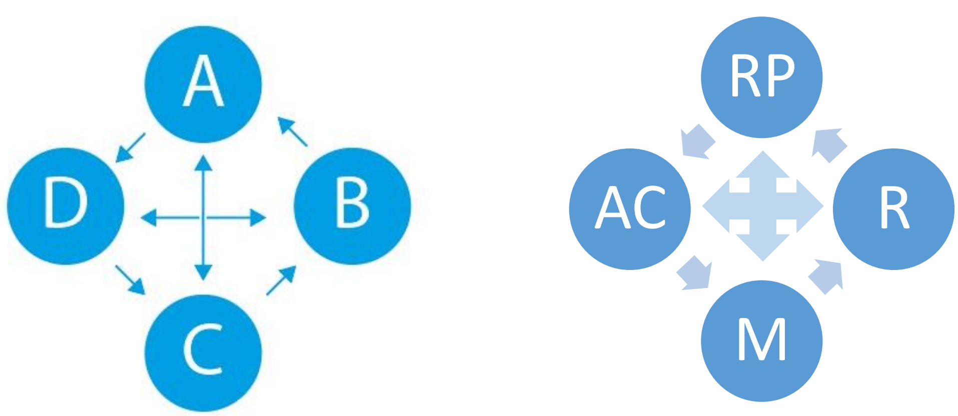


Imagen 2. Propuesta uno (*izquierda*) y propuesta dos (*derecha*) (elaboración propia).

I.IV Importancia de la Creatividad

La presente propuesta no pretende demostrar si es importante el desarrollo de las habilidades matemáticas en las personas, sino que más bien se centra en la importancia del fomento de la creatividad y en cómo ésta se fortalece al potenciar el desarrollo de las habilidades matemáticas. Por lo anterior, el sustento teórico aborda: (a) la importancia de la creatividad en el aprendizaje desde la neurociencia; (b) la educación técnico profesional y el modelo basado en competencias de Chile; (c) el marco epistemológico de referencia y la propuesta enmarcada en la teoría APOS (APOE).

a) Importancia de la creatividad en el aprendizaje desde la neurociencia

Los estudios sobre la neurociencia y la educación han logrado determinar que, durante los procesos educativos, existen importantes variables a considerar y que no necesariamente se encuentran en el lóbulo frontal o los hemisferios derecho e izquierdo del cerebro. Por el contrario, dichas variables están relacionadas con el sistema límbico e incluso con el cerebro de reptil, lo cual reviste de importancia el desarrollo emocional y de la creatividad en las personas (Fernández Bravo, 2010).

La neurociencia ha permitido establecer importantes relaciones y lecturas en torno a trabajos neuronales en los procesos de enseñanza aprendizaje. Estos han permitido comprender de mejor manera situaciones actualmente triviales, como el hecho de que para saber el modo de enseñar es necesario entender cómo se aprende. Así, por ejemplo, se ha registrado que el cerebro humano recibe cerca de 400.000 bits de información por segundo, de los cuales sólo un 10% es retenido en nuestra memoria. Adicionalmente, se ha demostrado que una clase en la solo se escucha provoca una pasiva actividad cerebral en el estudiante, lo que desencadena desmotivación, desgano y una considerable disminución en las relaciones afectivo-sociales. No obstante, la actividad cerebral aumenta cuando se desafía a los estudiantes y se intenciona la participación, a través de la formulación de preguntas, diálogos o debates, pues la cantidad de conexiones neuronales se incrementa. Asimismo, lo anterior determina un crecimiento significativo en la motivación, la reflexión y la autoestima de los estudiantes, lo cual se ve fortalecido si agregamos la oportunidad de manipular materiales concretos y si creamos actividades de carácter lúdico que permitan interactuar directamente con la mente del individuo.

Tal como lo indica el neurofisiólogo Rodolfo Llinás Riascos, en su libro "El cerebro y el mito del yo: papel de las neuronas en el pensamiento y comportamiento humanos", las emociones traen consigo una tremenda importancia en el proceso de aprender algo, dado que tanto la vida como el aprendizaje requieren de la toma de decisiones en un entorno social (Llinás Riascos, 2003). Por lo tanto, las condiciones emocionales con las que nos enfrentamos a los procesos determinan respuestas diametralmente opuestas. De este modo, la articulación de enunciados que ofrezcan emociones negativas trae consigo fracasos en los procesos de aprendizaje, pues la neurofisiología ha comprobado que, en este tipo de situaciones, el organismo genera químicos que bloquean las conexiones entre los neurotransmisores. Por el contrario, en los momentos en que se evidencia una emocionalidad positiva por parte del o de los actores, se facilitan los procesos intelectuales creativos y, neurofisiológicamente hablando, se generan químicos que facilitan la transmisión de los impulsos.

La neurociencia también ha logrado evidenciar y establecer la importancia del córtex prefrontal. Esta estructura cerebral es la última en desarrollarse en los seres humanos, en términos filogenéticos y ontogénicos, pues un apropiado grado de madurez recién se alcanza alrededor de los veinte años. No obstante, el cortex prefrontal no es el único actor responsable del proceso creativo. Estudios como el de Flaherty (2005) muestran una importante conexión entre los lóbulos frontales, temporales y la generación de dopamina durante el desarrollo de la capacidad creativa.

Rodríguez Muñoz (2011) explica que los índices de creatividad se encuentran en sintonía con un mayor flujo cerebral en las áreas relativas al procesamiento multimodal y de emociones. Además, concluye que la creatividad es un acontecimiento dinámico que implica la integración y distribución compleja de diferentes procesos en el cerebro. Este hecho es de extrema relevancia, pues permite establecer, desde finales de la primera década del presente siglo, que la creatividad no depende sólo del hemisferio derecho o "creativo". En su lugar, la creatividad tiene lugar tras la compleja y completa interrelación entre los lóbulos frontales y temporales, además del imput del sistema límbico, el cual inicia las respuestas de los estímulos emocionales.

En otro ámbito, las recientes investigaciones de la neurociencia en la matemática han logrado establecer que, comúnmente, al matemático se le puede definir como una persona que trabaja a partir de definiciones y axiomas; en efecto, este sujeto llega a verdades a través de una actividad cognoscitiva en la que los procesos mentales se producen de forma independiente a la experiencia. No obstante, es la actividad matemática de lo cotidiano, en interacción con la realidad, lo que genera un conocimiento matemático que se significa y resignifica; que se articula y complementa desde la actividad (acción) matemática misma. Así, desde la Neurociencia, Fernández Bravo (2010) postula que la matematización se puede producir mediante los siguientes acoplamientos:

- Adaptación: el conocimiento matemático que se posee se aplica a la realidad objeto de estudio o contribuye a su desarrollo.
- Modelización: la matemática estudia la realidad, creando modelos a partir del conocimiento matemático que se posee.
- Resurgimiento: el conocimiento matemático se reconoce en el comportamiento de realidades.

Desde la matemática, lo anterior nos plantea un escenario en el cual el aprendizaje del estudiante va más allá de los factores cognoscitivos o ejecutorios de algoritmos iterantes y cíclicos. Esta aproximación nos plantea la importancia de una matemática que sea capaz de emocionar, de movilizar al estudiante; una matemática funcional en la cual la matematización sea un medio y no el fin de la enseñanza (Entrena Martínez, 2015). De esta manera, la matemática es capaz de utilizar el lenguaje y los objetos matemáticos para la resolución de problemas y situaciones, al posicionar dichos objetos ante los problemas en los cuales cobran sentido y vida. En este sentido, es posible presenciar un acto en el que el estudiante ponga su creatividad al servicio de su vida y por medio de la matemática.
En este ámbito, Freudenthal (2009) es quien señala que "…las matemáticas –si han de tener valor humano– deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad…" (Heuvel-Panhuizen, 2009). Por lo tanto, desde la perspectiva de los procesos creativos, se considera a estos como procesos personales que, en el algún momento, el individuo hace públicos, al transmitir lo que yace dentro de él a los demás. A su vez, lo anterior produce nuevas percepciones en los otros individuos, de modo que se crea un espacio para la reflexión y retroalimentación en el que los receptores se transforman en creadores, producto de la interacción previamente establecida (Rodríguez Muñoz, 2011).

b) La educación técnico profesional y el modelo basado en competencias en Chile.

La educación Técnico Profesional (TP) en Chile es una de las posibles elecciones que tienen las familias para enfrentar el periodo de educación media. En algunos casos, esta opción se visualiza como una forma de proyectarse al futuro, una vez que los jóvenes terminan el proceso de educación secundaria. La educación media Técnico Profesional se imparte durante los dos últimos años de estudio (tercero y cuarto año medio), una vez aprobados los 8 años de educación básica y los 2 años de educación media general. En el año 2016, del total de estudiantes en los dos últimos años de educación media, un 40% cursaba estudios bajo esta modalidad.

Según el informe SIMCE 2015, el promedio de los puntajes en matemática de la educación Técnico Profesional se posicionó 50 puntos por debajo del promedio de la formación Científico Humanista (CH), tal como muestra la *Imagen 3* (Agencia de Calidad de la Educación, 2016):

Variable	Obs.	Media	Desv. Est.	Mín.	Máx.
HC					
Lectura	103.525	260,589	53,75	125,26	403,43
Matemática	105.570	284,90	64,38	84,51	422,09
Sociales	105.312	266,06	50,68	147,65	411,07
TP					
Lectura	36.655	230,59	45,23	125,26	403,43
Matemática	37.451	233,65	53,96	85,28	422,09
Sociales	37.389	229,81	40,48	147,65	394,45
PV					
Lectura	52.460	231,53	47,01	126,46	403,43
Matemática	53.729	236,75	57,91	85,88	422,09
Sociales	53.647	232,44	43,20	147,68	411,07

Fuente: elaboración propia en base a Matrícula Mineduc 2015.

Imagen 3. Resultado SIMCE, según modalidad del establecimiento

Al analizar esta desagregación respecto a las modalidades HC y TP, se observan diferencias significativas en los promedios de los puntajes SIMCE de segundo medio, particularmente en el área de matemática. Si se considera que la diferenciación de currículos entre la educación HC y TP en Chile comienza en 3° medio, se puede concluir que los más bajos resultados de los estudiantes de 2° medio (SIMCE de 2° medio) de establecimientos bajo la modalidad Técnico Profesional (y polivalentes) no pueden deberse únicamente a diferencias curriculares. No obstante, dicha variable se convierte en un elemento necesario de considerar al momento de trabajar con el nivel de tercero medio.

Según el informe de 2013 realizado por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), un 55% de los estudiantes de los quintiles 1 y 2 –en base a los resultados SIMCE de octavo básico– se matricula en liceos Técnico Profesionales. Por lo anterior, el rendimiento escolar de la enseñanza básica se considera como uno los elementos determinantes al momento de decidir entre proseguir una educación media de carácter Técnico Profesional o Científico Humanista (Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo - Chile, 2013).

Tras el ingreso de un currículum basado en competencias en Chile, los intentos por acomodar los contenidos matemáticos han estado en constante cambio. En muchos casos, para lograr lo que comúnmente se denomina como “bajada de contenidos”, las adecuaciones realizadas se estructuran en torno al contenido, pero no con respecto a quién aprende y cómo aprende. El currículum por competencias registra un inicio de segunda fase durante el año 2013, tras la aprobación del Decreto N° 452, relativo a las modificaciones a las bases en la formación diferenciada Técnico Profesional (Ministerio de Educación, 2013).

Actualmente, modificaciones mayores –aún en discusión– buscan modernizar y mejorar la formación de los estudiantes respecto al desarrollo de competencias. Un ejemplo de estos intentos son las llamadas bases del futuro de tercero y cuarto medio, presentadas por el MINEDUC en julio de 2017 y rechazadas por el Consejo Nacional de Educación (CNED) (Consejo Nacional de Educación, 2017). Pese a lo anterior, recientemente, en junio de 2019, fueron aceptadas nuevas bases curriculares, cuyo foco se encuentra en el desarrollo del pensamiento creativo y en sus formas de representarción: fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración (Ministerio de Educación de Chile, 2019).

El Ministerio de Educación de Chile plantea como fin de la educación el desarrollo de competencias que resulten necesarias para que los jóvenes se desenvuelvan apropiadamente en el mundo actual. Para concretar el logro de dichas competencias, se define como necesario el desarrollo de cuatro habilidades centrales que favorecen y hacen factible el cumplimiento de los objetivos de integralidad; una de estas es la habilidad creativa. Por lo demás, en Chile, al igual que en otros seis países, la presencia de habilidades para el desarrollo de competencias se encuentra descrita en el currículum.

De acuerdo con el informe del Consejo Nacional de Investigación de Estados Unidos –o *National Research Council* (NRC)–, el desarrollo de las llamadas Competencias para el Siglo XXI permite la generación de una taxonomía que estructure dichas habilidades (Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura, 2015). En este ámbito, la importancia de desarrollar la creatividad en los estudiantes es sustentada por los lineamientos de Hilton, quien describe los procesos y estrategias del conocimiento a través de los cuales se generan y fomentan competencias cognocitivas, tales como la creatividad (Piaget & Beth, 1980).

Desde otra perspectiva, el Centro Interuniversitario de Desarrollo (CINDA) publicó, en marzo de 2011, un estudio en el que se detectó que un número importante de estudiantes que ingresaron a primer año de la educación superior no poseía desarrolladas las habilidades necesarias para expandir, con mayor solidez, competencias apropiadas para dicho nivel. Entre dichas carencias, destacaban un menor desarrollo del pensamiento crítico y del pensamiento creativo, especialmente en lo referido al área de la matemática.

El desarrollo de las habilidades creativas en los estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media –y, consecuentemente, el desarrollo de competencias en los estudiantes– requiere de un avance en la creación de nuevas propuestas de enseñanza-aprendizaje en la asignatura en cuestión. De este modo, será posible fortalecer las competencias que ya se encuentran en desarrollo, así como también profundizar en el aporte de la disciplina a la preparación de estudiantes que continúen estudios superiores.

Desde el currículum basado en competencias, el componente social fundado en la idea de contextualización marca la necesidad de proporcionar mejores condiciones para que los estudiantes se apropien de la matemática. Lo anterior sustenta, precisamente, la problemática o indagación científica de esta propuesta. En consecuencia, para que exista una una reflexión-discursiva que fomente la construcción de argumentaciones es necesario entender las prácticas sociales como actividades normativas de la actividad humana, en cuanto a su función identitaria cultural, que dota al individuo o al grupo social.

En consideración de este enfoque, y bajo la teoría de APOE descrita por Dubinsky, resulta relevante plantear la reflexión y discusión a partir de distintos enfoques, métodos, algoritmos y formas de resolver un problema. Sólo así es posible generar una interacción que movilice en las personas procesos de interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación; los cuales determinan, respectivamente, un avance en los niveles de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, según sea el caso.

Al momento de establecer el discurso matemático escolar (dME) imperante es relevante decidir la corriente o estrategia didáctica que guiará su estructura. Para abordarlo, es determinante comprender la concepción de la Matemática que predomina en un sistema educativo, de modo que es fundamental caracterizar un paradigma curricular de racionalidad técnica (Pascual Kelly, 1998). Esto es, un sistema de verdades independiente a la actividad humana, que ofrece ejemplos "cotidianos" que no resultan excluyentes. De esta manera, la Matemática puede ser considerada como un elemento preexistente a la actividad humana, lo que posiciona a los actores del sistema educativo al margen de la construcción del conocimiento matemático, dado que los estudiantes aportan tanto como los docentes a lo largo de este proceso.

La construcción de la matemática escolar se realiza observando, analizando, haciendo, retroalimentando, reflexionando y aportando desde la clase. A la vez, se suele intencionar el uso de material concreto, pictórico y simbólico, el cual fomenta el trabajo colaborativo y la puesta en práctica de las habilidades matemáticas descritas con anterioridad. La presente propuesta busca innovar en la forma o el lugar en los que se llevan a cabo acciones coherentes con estas prácticas, con la finalidad de que los objetos matemáticos indicados en los planes de estudio emerjan al momento de abordar la probabilidad condicional.

En la actualidad, para lograr conducir este proceso, es importante comprender que, desde la matemática moderna, se hereda una educación en la que los docentes conciben al objeto matemático como algo acabado y preexistente al individuo (estudiante). A la vez, dichas suposiciones se encuentran acompañadas de definiciones, métodos, ejemplos, algoritmos y procedimientos que, en su rol de objeto matemático, son aquellos que se entregan a los estudiantes.

Desde la didáctica de la matemática se busca presentar alternativas a través de las cuales los estudiantes sean protagonistas y constructores de su propio conocimiento. Es así como se espera promover la idea de formular escenarios que vayan en contra de lo comúnmente observado en nuestros liceos. Es decir, la expectativa se encuentra en cambiar la lógica que asume una cadena inamovible entre la socialización de una definición formal del objeto matemático, la entrega de algunos ejemplos que demuestren cómo opera y procede en base a normas o algoritmos, y el paso final de ejercitación en torno a lo revisado previamente.

El Pensamiento Creativo y no la Creatividad

El pensamiento creativo es medible, pero no la creatividad. Para muchos autores, incluso, es indefinible. Es tarea de la Educación Matemática fomentar el desarrollo de la creatividad y, particularmente, el pensamiento matemático creativo. No obstante, dicho proceso implica un desafío para el propio docente, pues requiere de una alta capacidad para generar problemas matemáticos que varíen según distintos criterios de dificultad y que interpongan un compromiso cognitivo mayor en los estudiantes. Dado que en este tipo de situaciones no necesariamente se implementan algoritmos conocidos de forma inmediata, es preciso analizar la pertinencia de distintos métodos que den solución al problema planteado. Además de lo anterior, se genera la necesidad de reflexionar en torno a esa búsqueda de soluciones, lo que plantea un desafío para los estudiantes, pues deben enfrentarse a la posibilidad de errar, equivocarse y/o acertar.

El proces descrito previamente moviliza varias de las características del pensamiento creativo, así como también diversas habilidades matemáticas a las que se adscribe el currículum escolar chileno. La educación que pierde este enfoque resulta ser privativa y se orienta solo a un grupo de estudiantes: los que replican los modelos previamente aprendidos. Por ende, el minoritario grupo de estudiantes que es capaz de generar un proceso de metacognición queda relegado. Por lo tanto, es importante tener siempre en consideración de que las potencialidades creativas se encuentran presentes en todos los estudiantes. Sin embargo, para lograr el desarrollo de esta habilidad específica en el contexto del espacio-sociocultural de los estudiantes, es preciso que el docente también ponga en marcha su actuar creativo.

c) Marco Epistémico de Referencia – MER

En la presente investigación, se ha elegido trabajar en torno al objeto matemático probabilidad condicional, dado que el eje de estadística generalmente obtiene bajos resultados en la formación de estudiantes de educación media. Además, potenciar su desarrollo es relevante, pues el eje de probabilidad y estadística es fundamental en los estudios postsecundarios de diferentes áreas, tales como carreras ligadas a los ámbitos de salud, ingeniería, matemática, humanidades, entre otras.

La probabilidad condicional elegida es parte de lo que declara el programa de estudio de tercer año de enseñanza media diseñado por el Ministerio de Educación de Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2019) –y el cual es abordado desde y mediante la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas). En este punto es importante resaltar que el diseño matemático presentado es solo una de las partes de un MER mucho más amplio en el marco del proceso de transición entre la enseñanza media y la educación superior. Específicamente, las construcciones mentales de probabilidad condicional de esta propuesta fueron desarrolladas por estudiantes de tercero medio del Liceo Sara Blinder Dargoltz de la comuna de Santiago, Región Metropolitana de Chile. Debido a que se trabajo con APOE, la descomposición genética que se propone en la aplicación de este estudio está fundada epistemológicamente en los conceptos previos de los estudiantes y en relación con lo aprendido a través del currículum escolar chileno.

Particularmente, esta investigación se sitúa en el instante en que los estudiantes disponen del concepto de probabilidad simple en el campo de construcción mental proceso; es decir, como plena herramienta de trabajo. Con ello se espera presentar una progresiva construcción y desarrollo de la matemática, en la medida que se movilizan aprendizajes previos aplicados a diferentes niveles de modelación y con el fin de resolver problemas de probabilidad condicional (Trigueros, 2005). En suma, el problema subyacente se formula de la siguiente forma en esta propuesta: *¿Cómo lograr que los conocimientos matemáticos revisados y las competencias matemáticas desarrolladas anterior al tercero medio, se articulen y tomen sentido para dar respuesta a problemas de probabilidad condicional presentados a los estudiantes?*

Para dar marco al concepto de probabilidad, se tomará en consideración a la Dra. Batanero, quien considera las cuatro concepciones de probabilidad que predominan tanto en las escuelas como en la literatura oficial: (1) frecuencial, que plantea una repetición indefinida de un experimento, bajo las mismas condiciones y sin que haya interacción entre las distintas repeticiones, de modo que la probabilidad de un suceso es el límite al que tiende la proporción de repeticiones en las que el suceso tiene lugar; (2) clásico laplaciano, entendido como el cociente entre casos favorables y posibles, siempre y cuando los casos sean igualmente posibles; (3) subjetivo, tiene lugar cuando el individuo asigna *a priori* la probabilidad en base a su experiencia; (4) axiomático, el más habitual en los cursos de matemática estándar de la actualidad.

Cabe mencionar que, tanto para el docente como para el estudiante, lo anterior se plantea como el primer obstáculo en la búsqueda por enseñar/aprender probabilidad. Son ellos quienes deben pasar por este proceso gradual, en el que se enfrentan “a lo largo de su aprendizaje con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades” (Batanero, 2005). Asimismo, es relevante considerar que la teoría APOE establecida Ed Dubinsky en 1996 tomó como referencia la epistemología genética de Piaget, de manera que su concepto central se funda en la abstracción reflexiva; esto es, la “abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos” (Piaget & Beth, 1980). Por lo tanto, la abstracción reflexiva se entiende como el conjunto de acciones y operaciones realizadas por la persona, y a las cuales se suman los esquemas que le permiten construirlas. Lo descrito previamente es, en esencia, un proceso interno al sujeto, pues se comprende y/o visualiza como un mecanismo mental que no extrae o separa una característica a partir de los objetos, sino sobre los objetos (Parraguez & Vázquez, 2014).

En consideración de estos pilares fundamentales, es que se plantea una propuesta en torno al desarrollo del pensamiento lógico en jóvenes respecto a los conocimientos matemáticos relativos a la probabilidad. Para lograr dicho cometido, se plantea el realizar una descomposición genética del objeto probabilidad condicional basado en APOE. Dicha teoría es, principalmente, un modelo a través del cual se conduce una descomposición genética del concepto en estudio, es decir, la ejecución de una primera aproximación que modela el aprendizaje del concepto matemático en cuestión (Ku, Trigueros, & Oktac, 2008). En otras palabras, ejemplifica el modo en que los estudiantes construyen mentalmente los conceptos matemáticos a partir de sus redes y estructuras matemáticas previas, las cuales eventualmente sustentan otros saberes necesarios para generar dicho proceso de aprendizaje.

La teoría APOE entonces, según Dubinsky, hace referencia a las construcciones mentales que un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación y la inversión (Dubinsky, De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, 2000). Todo lo anterior se genera mediante construcciones mentales en diferentes etapas del aprendizaje de conceptos matemáticos, que implican acciones, procesos y objetos:

- Acción: se produce en base a estímulos externos, o bien, a indicaciones externas. El estudiante realiza transformaciones sobre un objeto, aunque son percibidas por este como externas. La Construcción Mental Acción marca el principio de la comprensión de un concepto matemático, pero no deja de ser un estado de construcción limitado. No obstante, al ocurrir en una etapa inicial se transforma en un aspecto crucial dentro de la construcción del conocimiento matemático.
- Proceso: es la construcción interna en la que se realizó la reflexión en torno a la acción realizada. No es necesariamente dirigida por un estímulo externo y se provoca cuando un estudiante realiza una acción de manera repetida, tras reflecionar en torno a ella e interiorizarla como proceso. Un estudiante mostrará una Construcción Mental Proceso de un determinado concepto matemático cuando sea capaz de reflexionar sobre el concepto y realice transformaciones, aunque sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él. El estudiante será capaz, incluso, de volver sobre sus pasos y analizar las construcciones realizadas previamente.
- Objeto: es la encapsulación del proceso, mejor evidenciado cuando el producto de la reflexión respecto a las operaciones aplicadas es visualizado como un todo, tras realizar la Construcción Mental Objeto (objeto cognitivo). Adicionalmente, el estudiante logra desarrollar una capacidad para desencapsular el proceso, lo cual le permite regresar al objeto procesado, con la finalidad de usar sus propiedades al momento de manipularlo (Dubinsky, Aplicación de la perspectiva Piagetana a la educación matemática universitaria, 1996).

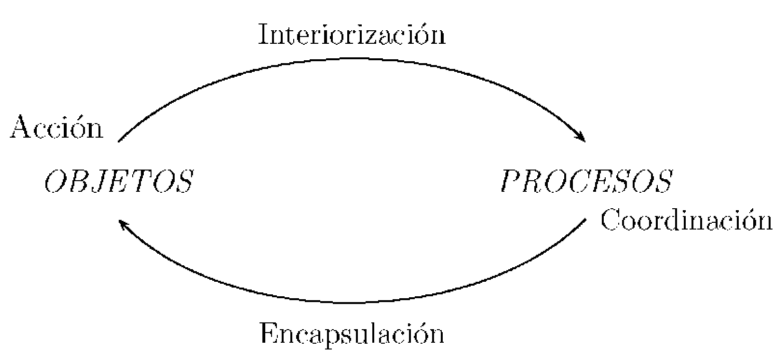
Uno de los mecanismos principales para poder transitar de un estado de construcción mental a otro es el de la reflexión; específicamente, el estado de abstracción reflexiva. Esta herramienta permite al estudiante organizar sus conocimientos, al establecer nuevas construcciones mentales que le permitan avanzar hacia la construcción de un conocimiento matemático. Desde APOE, la iteración de estos procesos mentales son la Interiorización, Coordinación, Encapsulación y Desencapsulación. A partir de estos, se logra construir un conjunto de acciones, procesos y objetos que dan forma al esquema referente al objeto matemático tratado.

En el mismo ámbito, Dubinsky considera cinco tipos de abstracciones reflexivas; cuatro de ellas determinadas por Piaget. A continuación, presentamos la descripción de dichos mecanismos (Dubinsky, Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, 1991):

- **Interiorización:** Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubisnky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso.
- **Coordinación:** este mecanismo fue descrito por Piaget como la sistematización general de acciones, que refieren a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo, dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.
- **Encapsulación:** este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática).
- **Generalización:** este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en contextos diversos, lo que determina su capacidad para establecer los alcances de sus construcciones. En este mecanismo, los esquemas no cambian; sin embargo, los otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.
- **Reversión:** este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Consiste en desencapsular un objeto o revertir el mecanismo que lo generó. De esta manera, un individuo puede regresar sobre el proceso siempre que lo requiera.

La siguiente imagen muestra el proceso dinámico de Dubinsky, a través del cual un individuo construye sus estructuras matemáticas:

Imagen 4



Construcciones y Mecanismos (Dubinsky, 1991)

I.V Currículum escolar chileno: la probabilidad

El estudio de objetos matemáticos asociados a estadística se puede posicionar en los niveles de prebásica, si consideramos, por ejemplo, las técnicas de conteo, la selección y diferenciación de objetos, el reconocimiento de características específicas y la separación por grupos según condiciones estipuladas. Si realizamos un análisis de la presencia formal de la probabilidad dentro del curículum escolar chileno, es pertinente mencionar el documento titulado "Progresión de Objetivos de Aprendizaje – Habilidades", elaborado por el MINEDUC (Ministerio de Educación de Chile, 2019) y presente en la web oficial del currículum nacional. En este documento, se explicita el eje de "Datos y probabilidad" desde primero básico hasta segundo medio. Las imágenes 4 a 7 muestran los dos documentos en los que se observa dicha progresión:

	1° Básico	2° Básico	3° Básico	4° Básico	5° Básico	6° Básico
DATOS Y PROBABILIDAD	OA19 Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	OA20 Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.	OA23 Realizar encuestas y clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra.	OA25 Realizar encuestas, analizar los datos, comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.		OA22 Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas.
	OA20 Construir, leer e interpretar pictogramas.	OA21 Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	OA24 Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	OA26 Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones.	OA26 Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones.	OA23 Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones

Imagen 5

	1° Básico	2° Básico	3° Básico	4° Básico	5° Básico	6° Básico
DATOS Y PROBABILIDAD					OA23 Calcular el promedio de datos e interpretarlo en su contexto.	
		OA22 Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.	OA25 Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada.	OA27 Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	OA24 Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento, empleando los términos seguro – posible - poco posible- imposible	OA24 Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.
					OA25 Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	
			OA26 Representar datos usando diagramas de puntos.		OA27 Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias	

Imagen 6

	7° básico	8° básico	1° medio	2° medio
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	OA15 Estimar **el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.** OA16 Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo OA17 Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango: • determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población • determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado • utilizándolos para comparar dos poblaciones • determinando el efecto de un dato que es **muy** diferente a los otros.	OA15 Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: • identificando la población que está sobre o bajo el percentil • representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con software educativo • utilizándolas para comparar poblaciones OA16 Evaluar la forma en que los datos están presentados: • comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno • justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos • detectando manipulaciones de gráficos para representar datos	OA12 Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos. OA13 Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos "xy" para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica: • utilizando nubes de puntos en dos colores • separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva OA14 Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.	OA10 Mostrar que comprenden las variables aleatorias discretas: • definiendo la variable • determinando los posibles valores de la incógnita • calculando su probabilidad • graficando sus distribuciones OA11 Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas. OA12 Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: • revisando informaciones de los medios de comunicación • identificando suposiciones basadas en probabilidades • explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas • explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades

Imagen 7

	7° básico	8° básico	1° medio	2° medio
PROBALIDAD Y ESTADÍSTICA	OA18 Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: • estimándolas de manera intuitiva • utilizando frecuencias relativas • relacionándolas **con razones, fracciones o porcentaje** OA19 Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.	OA17 Explicar el principio combinatorio multiplicativo: • a partir de situaciones concretas • representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo • utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto	OA15 Mostrar que comprenden el concepto de azar: • experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo • realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas • utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso • resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas	

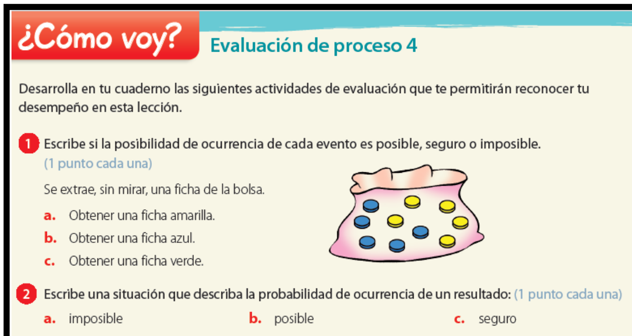
Imagen 8

Como es posible apreciar en las imágenes anteriores, el eje de probabilidades es considerado desde el nivel de primero básico; específicamente, a través de conceptualizaciones de eventos, sucesos y recolección de datos, así como también en relación con el uso de conteos y a la identificación de variables (también es complementario al eje de números). Tras un análisis de los OA de este eje curricular, no se declara concretamente bajo el nombre de "probabilidad" sino hasta quinto básico, a través del OA25. Por lo demás, en la misma ruta de progresión de habilidades, es posible encontrar la probabilidad bajo la acción modelar en los puntos "i" de quinto y sexto básico. Luego, en séptimo básico, se da continuidad a la probabilidad con los OA18 y OA19, además de relacionarlos con razones, fracciones y porcentajes. Más adelante, se encuentra el OA17 de octavo, asociado al principio combinatorio. Sin embargo, recién en primero medio se retoma la probabilidad simple, mediante los OA14 y OA15, que a su vez encuentran su continuidad en los OA10, OA11 y OA12 de segundo medio y se suman a la variable aleatoria discreta.

5to	6to	7mo	8vo	1ro M	2do M	
OA25 Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.		OA18 Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: • estimándolas de manera intuitiva • utilizando frecuencias relativas • relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje OA19 Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.	OA17 Explicar el principio combinatorio multiplicativo: • a partir de situaciones concretas • representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo • utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto	OA14 Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas. OA15 Mostrar que comprenden el concepto de azar: • experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo • realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas • utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso • resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas	OA10 Mostrar que comprenden las variables aleatorias discretas: • definiendo la variable • determinando los posibles valores de la incógnita • calculando su probabilidad • graficando sus distribuciones OA12 Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: • revisando informaciones de los medios de comunicación • identificando suposiciones basadas en probabilidades • explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas • explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades	OA11 Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Tabla 1

La enseñanza de la estadística y, específicamente, de la probabilidad se pueden ejemplificar a partir de los textos de estudio facilitados por el MINEDUC –y de amplio uso en el contexto del aula de clases. En los textos oficiales del año 2018 –año que se realizaron las mediciones– se aborda el objeto matemático de la probabilidad, tendiente al cálculo y a la decisión directa. Por ejemplo, en quinto básico encontramos:


¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4

Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer tu desempeño en esta lección.

1. Escribe si la posibilidad de ocurrencia de cada evento es posible, seguro o imposible. (1 punto cada una)

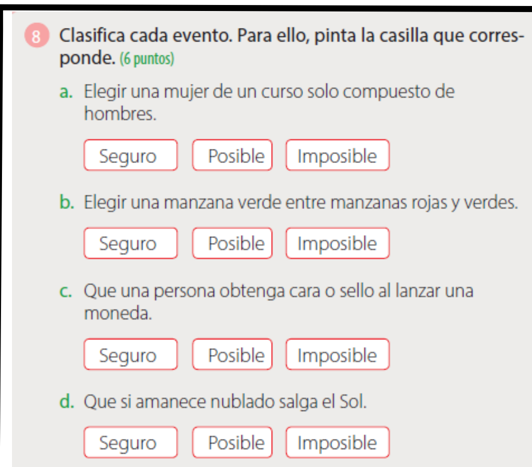
Se extrae, sin mirar, una ficha de la bolsa.

a. Obtener una ficha amarilla.
b. Obtener una ficha azul.
c. Obtener una ficha verde.

2. Escribe una situación que describa la probabilidad de ocurrencia de un resultado: (1 punto cada una)

a. imposible b. posible c. seguro

Quinto básico (Ho Kheong, Kee Soon, & Ramakrishnan, 2018)


8. Clasifica cada evento. Para ello, pinta la casilla que corresponde. (6 puntos)

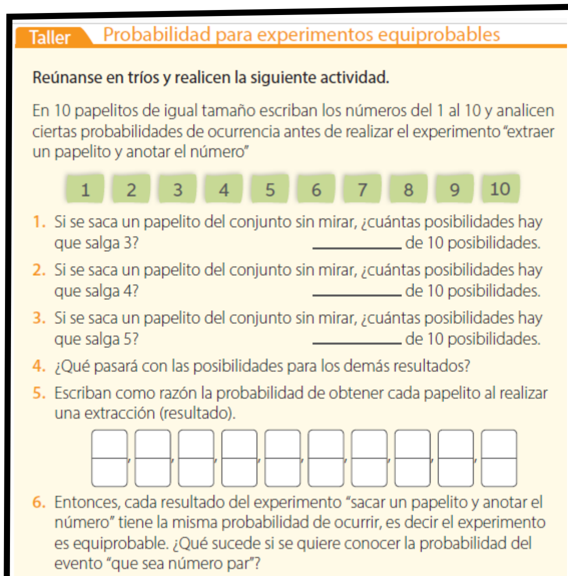
a. Elegir una mujer de un curso solo compuesto de hombres.
Seguro Posible Imposible

b. Elegir una manzana verde entre manzanas rojas y verdes.
Seguro Posible Imposible

c. Que una persona obtenga cara o sello al lanzar una moneda.
Seguro Posible Imposible

d. Que si amanece nublado salga el Sol.
Seguro Posible Imposible

Séptimo Básico - (Merino Leyton, Muñoz Correa, Pérez Ureta, & Rupin Gutiérrez, 2018)

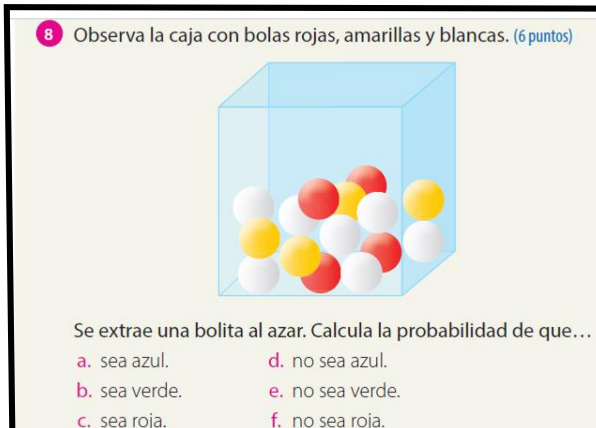

Taller Probabilidad para experimentos equiprobables

Reúnanse en tríos y realicen la siguiente actividad.

En 10 papelitos de igual tamaño escriban los números del 1 al 10 y analicen ciertas probabilidades de ocurrencia antes de realizar el experimento "extraer un papelito y anotar el número"

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 3? ________ de 10 posibilidades.
2. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 4? ________ de 10 posibilidades.
3. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 5? ________ de 10 posibilidades.
4. ¿Qué pasará con las posibilidades para los demás resultados?
5. Escriban como razón la probabilidad de obtener cada papelito al realizar una extracción (resultado).
6. Entonces, cada resultado del experimento "sacar un papelito y anotar el número" tiene la misma probabilidad de ocurrir, es decir el experimento es equiprobable. ¿Qué sucede si se quiere conocer la probabilidad del evento "que sea número par"?


8. Observa la caja con bolas rojas, amarillas y blancas. (6 puntos)

Se extrae una bolita al azar. Calcula la probabilidad de que…

a. sea azul.
b. sea verde.
c. sea roja.
d. no sea azul.
e. no sea verde.
f. no sea roja.

Octavo básico - (Catalán Navarrete, Pérez Ureta, Prieto Córdoba, & Rupin Gutiérrez, 2018)

Séptimo Básico - (Merino Leyton, Muñoz Correa, Pérez Ureta, & Rupin Gutiérrez, 2018)

Ejemplo 3

Considera el experimento de lanzar dos veces un dado honesto de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 y que en el primer lanzamiento se obtenga mayor puntaje que en el segundo?

Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Identificas el espacio muestral. Lo puedes representar por un conjunto de pares ordenados, donde la primera coordenada representa el puntaje del primer lanzamiento y la segunda, la del segundo.

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

El espacio muestral tiene 36 posibles resultados, es decir, $\#\Omega = 36$.

2. Describes los eventos involucrados en el problema.
El evento E_1 está formado por todos aquellos resultados en los cuales la suma de los puntos en los dados es 6.

$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

El evento E_2 considera los pares en que la primera coordenada es mayor que la segunda.

$E_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

Primero medio - (Galasso Díaz, Maldonado Rodríguez, & Marambio Fuentes, Matemáticas 1ro medio, 2018)

Tema 2: ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?

¿Qué aprenderé?

A calcular la probabilidad de la variable aleatoria asociada a un experimento.

¿Para qué?

Para calcular la función de probabilidad correspondiente al experimento aleatorio.

Actividad en pareja

Taller

Los jugadores de un equipo de básquetbol han decidido practicar con dedicación los tiros libres, ya que han errado muchos en los últimos partidos. Para esto, realizarán una competencia que consiste en que cada jugador podrá lanzar a la canasta hasta que logre convertir, con un máximo de 4 tiros.

Tiro en que logró convertir	Puntaje
Primero	3
Segundo	2
Tercero	1
Cuarto	0
Ninguno	–2

1. Utilizando un diagrama de árbol, representa el posible desarrollo de la competencia para un jugador.

¿Hay alguna otra manera de que lo puedas hacer? Explica.

Segundo medio - (Chacón Aguirre, García Castillo, Rupin Gutiérrez, Setz Mena, & Villena Ramírez, 2018)

1 En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres, 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?

Si hacemos un diagrama, tendremos que:

Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo rubio y son hombres es 8, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\ \%$$

Lo anterior se puede entender también como:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$$

Ahora bien, esto: $P(\text{rubio si es hombre}) = \dfrac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$, es exactamente lo que la teoría de las probabilidades (rama de la matemática que estudia todo lo relacionado con probabilidades) nos dice.

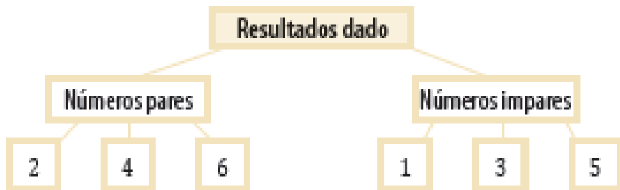
Tercero medio - (Saiz Maregatti & Blumenthal Gottlieb, 2018)

En el texto escolar de tercero medio del año 2018, se aprecia como primer acercamiento a la probabilidad condicional un ejemplo para el estudiante con la situación descrita a la izquierda.

Al margen de los errores de tipografía, en relación con la cantidad de mujeres, desde un comienzo se presenta la probabilidad condicional como un elemento acabado. Lo anteior evidencia el monumentalismo con que se aborda el objeto matemático “probabilidad condicional”, pues se presenta directamente a través de una fórmula o algoritmo matemático.

2 Se lanza un dado y se sabe que la probabilidad de que salga un 3 es $\frac{1}{6}$. Si ahora se incorpora nueva información, como por ejemplo, que alguien nos ha dicho que el resultado es número impar, entonces la probabilidad de que el resultado sea 3 ya no es $\frac{1}{6}$.

Hagamos un esquema de la situación:



Como vemos, ahora nuestro espacio muestral se restringe a solo 3 posibilidades dado que el resultado lo debemos obtener entre los números impares 1, 3 y 5, es decir nuestro espacio muestral es ahora 3 y queremos determinar la probabilidad de obtener el número 3, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

Pero lo que necesitamos es calcular la probabilidad de obtener el número 3 de entre seis posibilidades, pero sabiendo que el resultado es impar. Lo anterior lo calculamos determinando el cociente entre la probabilidad de obtener el número 3 en un dado y la probabilidad de obtener un número impar en un dado, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(\text{número 3 entre resultados posibles en un dado})}{P(\text{números impares en un dado})}$$

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

Podemos anotar, en general, que:

Si se tienen dos sucesos, A y B, donde $P(B) \neq 0$, entonces la probabilidad condicional de que A suceda dado que B ha ocurrido, se puede calcular por la siguiente fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

A continuación, en el mismo libro, se redunda en la aplicación de una estructura rígida para abordar objetos matemáticos nuevos –a pesar de que estos han sido estudiados desde los primeros años de enseñanza básica y revisados de forma ininterrumpida desde séptimo básico.

Con lo anterior, se evidencia la nula disposición a elaborar, investigar y crear, estrategias de resolución de problemas frente a una situación atípica relativa a la probabilidad condicional. Es más, se sugiere directamente abordar este objeto matemático como un algoritmo ya aplicado, pues los ejemplos se orientan hacia la instrumentalización de éste, en lugar de fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas.

Por lo tanto, el libro se nos presenta como una propuesta estéril que no fotalece el desarrollo de la creatividad o del pensamiento creativo. El texto no permite elucubrar estrategias variadas, a través de las cuales se incorporen, de manera natural y autónoma, los conocimientos previos de los estudiantes; tampoco se generan espacios para la interacción entre estudiantes y la creación de estrategias matemática fundadas en el error. En suma, dicha propuesta no conduce a probar diferentes caminos ni a generar representaciones pictóricas, iconográficas o conjuntista. En consecuencia, a través de ésta no es posible desarrollar la modelación matemática.

Capítulo II: METODOLOGÍA DE TRABAJO

INVESTIGACIÓN E INTERVENCIONES DE DISEÑO

El tipo de investigación realizada es del tipo descriptivo transversal y sobre un muestreo no probabilístico intencional, en base a dos grupos distintos a quienes se les aplicó el estudio en noviembre de 2018 y en abril de 2019. Esta investigación se implementa como un estudio clínico en el nivel de tercero medio del liceo técnico profesional de niñas Liceo Politécnico Sara Blinder Dargoltz, de carácter particular subvencionado, adscrito a la gratuidad, ubicado en la comuna de Santiago Centro de Chile y perteneciente a una congregación católica. Las muestras analizadas corresponden a las mejores 7 estudiantes de los terceros medios correspondientes a los años 2018 y 2019. Es prudente mencionar que la jefa de UTP seleccionó, en ambas ocasiones, a las 7 estudiantes que participaron de la investigación. El criterio principal aplicado fue su histórico y destacado rendimiento académico en matemática, en base a los promedios más altos entre pares.

La caracterización de las estudiantes de la implementación del año 2018 es la siguiente:

Alumna 1	Alumna 2	Alumna 3	Alumna 4	Alumna 5	Alumna 6	Alumna 7
Enfermería	Enfermería	Enfermería	Párvulo	Párvulo	Contador Auditor	Contador Auditor
PPA. 6,6	PPA. 6,4	PPA. 6,4	PPA. 6,8	PPA. 6,2	PPA. 6,3	PPA. 6,3

G1 - Detalle de las estudiantes de estudio clínico 2018-02 – PPA es Promedio Ponderado acumulado a 3ro medio. Enfermería – Párvulo – Contador Auditor corresponde a su mención en el liceo.

En la segunda intervención realizada en abril de 2019, en el mismo establecimiento, las estudiantes de tercero medio presentaron similares características:

Alumna 1	Alumna 2	Alumna 3	Alumna 4	Alumna 5	Alumna 6	Alumna 7
Enfermería	Enfermería	Enfermería	Enfermería	Párvulo	Contador Auditor	Contador Auditor
PPA. 6,5	PPA. 6,6	PPA. 6,3	PPA. 6,6	PPA. 6,2	PPA. 6,3	PPA. 6,2

G2 - Detalle de las estudiantes de estudio clínico 2019-01 – PPA es Promedio Ponderado acumulado a 3ro medio. Enfermería – Párvulo – Contador Auditor corresponde a su mención en el liceo. PPA = Promedio ponderado acumulado a tercero medio

Como se mencionó, para abordar la investigación se realizó un estudio clínico en el que se implementaron dos instrumentos: (1) el Test de Pensamiento Creativo de Torrance (Artiles Hernández, Jiménez González, Rodríguez Rodríguez, & García Miranda, 2007) y (2) un instrumento de autoría propia, diseñado bajo la teoría APOE y, particularmente, centrado en el proceso de descomposición genética que propone Roa (Roa-Fuentes & Oktac, 2010). Tanto el test como la propuesta fueron implementados como actividades extraescolares, en una sala de lectura aislada del resto de sus compañeras.

Para medir el nivel de desarrollo de habilidades creativas en las estudiantes, el instrumento estandarizado –Test de Desarrollo del Pensamiento Creativo de Torrance– se aplicó de forma individual en mesones colaborativos. Para construir la propuesta, se realizó un análisis del currículum escolar chileno, así como de los textos de enseñanza de la probabilidad. Luego, se procedió a construir una descomposición genética basada en la teoría didáctica APOS/APOE de Ed Dubinsky y en relación con la probabilidad condicional relativa al nivel de tercer año de enseñanza media. Lo anterior, con la finalidad de elaborar una propuesta didáctica que fuera implementada al mismo grupo de estudiantes a quienes se aplicó el Test de Torrance para validar o rechazar la descomposición genética creada.

La implementación de la propuesta didáctica se planificó como una actividad extraprogramática a cargo del investigador, quien comienza un análisis simultáneo a la implementación, a través de la observación del desempeño de las estudiantes y su comportamiento ante la propuesta didáctica (observación del proceso). Dicha acción se realiza tras identificar los momentos del proceso en los que las estudiantes, de forma individual y/o colectiva, desarrollan habilidades creativas y el respectivo nivel en que lo ejecutan. Cabe mencionar que se analizarán las producciones con mayor detalle de manera posterior a la implementación y con una rúbrica especialmente creada para dicho proceso. En el presente caso, este diseño se denomina como Dg_2, con el fin de establecer el dominio de los objetos matemáticos propuestos y su nivel de concepción (Acción – Proceso – Objeto), a través de una secuencia de actividades conducentes a promover el desarrollo de la probabilidad condicional a nivel de acción.

Para analizar los niveles de logro de habilidades matemáticas y habilidades creativas en estudiantes de 3ro medio, evidenciadas en el desarrollo de la propuesta didáctica de probabilidad condicional basada en APOE, se usará la siguiente rúbrica:

Etapa 1				
Objeto Mate	**Acción**	**En vías de Proceso**	**Proceso**	
Espacio Muestral	Identifica el espacio muestral analizando las características de la población/muestra			

Pregunta 1				
Objeto Mate	**Acción**	**Proceso**	**Objeto**	**Esquema**
Espacio Muestral	Usa sólo el universo	Identifica espacio muestral y crea categorías	X	X
Suceso	Calcula de forma directa	Identifica espacio muestral, crea categorías, selecciona información	X	X
Probabilidad Simple	Calcula directamente	Declara los CF y los CT de forma numérica y posteriormente calcula	X	X
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza sólo en su grupo para resolver el problema, calculando la probabilidad	Se focaliza en el Esp. Muestral completo, pero se equivoca en la identificación de casos favorables o totales; o bien, erra en el procedimiento	Resuelve el problema sin errores contemplando bien los CF v/s CT
Representar	En blanco o fuera de contexto; o bien, representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en contexto del problema, pero con errores; o bien, la representación	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, mediante lenguaje alfanumérico o algebraico con éxito	Realiza dos o más diagramas o representaciones de forma pictórica, mediante lenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico con éxito

	Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	realizada no la/o conduce a resolver el problema		
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación, o bien, una respuesta correcta, pero con una vaga justificación	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta	

Pregunta 2				
Objeto Matemático	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Espacio Muestral	Usa sólo el universo	Identifica espacio muestral y crea categorías	Trabaja con el complemento	X
Suceso	Explicita el suceso al redactar su respuesta	Identifica espacio muestral, crea categorías, selecciona información	X	X
Probabilidad Simple	Calcula de forma directa	Identifica y define las variables, las categoriza y las usa según la solicitud del enunciado	X	X
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza sólo en su grupo para resolver el problema calculando la probabilidad	Se focaliza en el Esp. Muestral completo, pero equivoca la identificación de casos favorables o totales o erra en procedimiento	Resuelve el problema sin errores contemplando bien los CF v/s CT
Representar	En blanco o fuera de contexto o representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema. Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en el contexto del problema, pero con errores; o bien, la representación realizada no la/o conduce a resolver el problema	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, mediante lenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico con éxito	Realiza dos o más diagramas o representaciones de forma pictórica, mediante lenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico con éxito
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación, o bien, una respuesta correcta, pero con una vaga justificación	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta	
Modelar	En blanco, fuera de contexto	Realiza un modelo matemático errado, o bien, si	Realiza un modelo matemático, lo implementa,	Realiza un modelo matemático lo aplica,

		se evidencia, está incompleto o fuera de contexto	pero no valida, no interpreta y/o no hay evidencia de hacer lo anterior	interpreta y valida su respuesta

Pregunta 3				
Objeto Matemático	**Vías Proceso**	**Proceso**	**Objeto**	**Esquema**
Suceso	Identifica los acontecimientos			
Suceso Independiente	Calcula directamente o crea categorías sin entregar mayor detalle	Clasifican a las personas según su categoría, así como la intersección de éstas, sin evidenciar de usar esta información de la intersección	Clasifican a las personas según su categoría, así como la intersección de éstas, pudiendo extraer información y sacar conclusiones de esta representación	X
Probabilidad Simple	No se evidencia la identificación de independencia o forma de selección. Calcula de forma directa	Identifica los sucesos como independientes. Identifica los CF y CT y realiza su calculo	Identifica y expone claramente los sucesos como dependientes. Identifica y declara los CF y CT	X
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza sólo en su grupo para resolver el problema, calculando o no la probabilidad	Se focaliza en el Esp. Muestral completo, pero equivoca la identificación de la intersección o erra en el procedimiento	Resuelve el problema sin errores identificando de forma correcta la intersección
Representar	En blanco o fuera de contexto o representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema. Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en contexto del problema, pero con errores; o bien, la representación realizada no la/o conduce a resolver el problema	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, mediante lenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico con éxito	Realiza dos o más diagramas o representaciones de forma pictórica, mediantelenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico con éxito

Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación, o bien, una respuesta correcta, pero con una vaga justificación	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta	

Pregunta 4				
Objeto Matemático	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Sucesos dependientes	No se evidencia el camino o estrategia para determinar la independencia, pero la reconoce o utiliza	Identifica claramente los sucesos como independientes, pero previamente los relaciona	Identifica claramente los sucesos como independientes, sin evidencia de intentar relacionarlos	X
Probabilidad Simple	No se evidencia la identificación de independencia o forma de selección. Calcula de forma directa	Identifica claramente los sucesos como independientes, pero Identifica y declara los CF y CT de todos los sucesos	Identifica claramente los sucesos como independientes. Identifica y declara los CF y CT y realiza su cálculo	X
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza en lanzar el dado y relaciona esto con la probabilidad solicitada	Resuelve la probabilidad del dado y la probabilidad de salir alguien a la pizarra de forma independiente, pero erra en el procedimiento	Resuelve o no la probabilidad del dado; al margen de lo anterior, sí resuelve la probabilidad de salir alguien a la pizarra (ambos eventos de forma independiente), luego concluye la respuesta de forma correcta
Representar	En blanco o fuera de contexto o representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema. Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en el contexto del problema, pero con errores; o bien, la representación realizada no la/o conduce a resolver el problema	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, relacionando ambos sucesos (dependencia)	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, no relacionando ambos sucesos o demostrando su independencia
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación, o bien, una respuesta correcta,	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta respecto a la independencia de los sucesos	

		pero con una vaga justificación		

Pregunta 5				
Objeto Mate	Acción	Proceso	Objeto	
Suceso Dependiente	Identifica y argumenta porque no son dependientes los sucesos			
Suceso Independiente	Identifica los sucesos como independientes con evidencia de intentar relacionarlos	Identifica claramente los sucesos como independientes sin evidencia de intentar relacionarlos		
Probabilidad Simple	Calcula la probabilidad de forma directa	Calcula la probabilidad con más de una estrategia		
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza en lanzar la moneda y los éxitos que conlleva y relaciona esto con la probabilidad solicitada.	Resuelve la probabilidad del lanzamiento de moneda y la probabilidad de salir alguien a la pizarra de forma independiente, pero erra en procedimiento o identificación de CF y CT	Resuelve o no la probabilidad del lanzar la moneda, al margen de lo anterior, resuelve la probabilidad de salir alguien a la pizarra (ambos eventos de forma independiente) luego concluye la respuesta de forma correcta
Representar	En blanco o fuera de contexto o representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema. Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en contexto del problema, pero con errores o la representación realizada no la/o conduce a resolver el problema	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, relacionando ambos sucesos con dependencia	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o lenguaje algebraico, evidenciando no relacionar ambos sucesos o demostrando su independencia
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación o una	Comunica una respuesta con una justificación de forma	

		respuesta correcta, pero con una vaga justificación	correcta respecto a la independencia de los sucesos	
Modelar	No se evidencia en la respuesta una presentación de uno o más modelos, o bien, si se evidencia, está fuera de contexto	Evidencia a través de ensayo y error, u otro camino, un modelo matemático, interpretando los resultados y no validando	Evidencia a través de ensayo y error un modelo matemático, lo interpreta y valida	

Pregunta 6				
Objeto Matemático	Acción	Proceso	Objeto	
Suceso Dependiente	Declara la muestra completa y luego determina los que cumplen la condición	Identifica claramente los sucesos como dependientes, relacionándolos correctamente y sacando conclusiones respecto a su dependencia		
Probabilidad Condicional	Identifica CF y CT dada la condición	X	X	X
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Se focaliza en identificar el espacio muestral, pero erra en su desarrollo	Identifica el espacio muestral y realiza la intersección de forma correcta, pero erra en su conclusión o respuesta	Identifica el espacio muestral, realiza la intersección de forma correcta y concluye la respuesta de forma correcta
Representar	En blanco o fuera de contexto, o bien, representa los datos sin tomar en cuenta las condiciones del problema. Transcribe el enunciado sin evidenciar comprensión de lo que se pregunta o solicita	Realiza diagrama/s, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o algebraico en el contexto del problema, pero con errores; o bien, la representación realizada no la/o conduce a resolver el problema	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, no relacionando ambos sucesos o demostrando su independencia	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, relacionando ambos sucesos como dependientes
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta respecto a la dependencia de los sucesos	

Pregunta 7				
Objeto Mate	Acción	Proceso	Objeto	
Suceso Dependiente	Identifica claramente los sucesos como dependientes, relacionándolos correctamente y sacando conclusiones respecto a su dependencia			
Probabilidad Condicional	Calcula la probabilidad condicional			
	0	1	2	3
Resolver Problema	En blanco o fuera de contexto	Identifica el espacio muestral, pero erra en su desarrollo	Identifica el espacio muestral y realiza la intersección de forma correcta, pero erra en su conclusión o respuesta	Identifica el espacio muestral, realiza la intersección de forma correcta y concluye la respuesta de forma correcta
Representar	En blanco o fuera de contexto	Realiza uno o más diagramas, representaciones pictóricas, lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, pero con errores	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, no relacionando ambos sucesos (independencia)	Realiza un diagrama o representación de forma pictórica, con lenguaje alfanumérico o con lenguaje algebraico, relacionando ambos sucesos o demostrando su dependencia
Argumentar y Comunicar	En blanco, fuera de contexto o errada y sin justificación	Comunica una respuesta errada con justificación	Comunica una respuesta con una justificación de forma correcta respecto a la dependencia de los sucesos	
Modelar	No se evidencia en la respuesta una presentación de uno o más modelos; o	Evidencia a través de ensayo y error, u otro camino, un modelo matemático,	Evidencia a través de ensayo y error un modelo matemático para el cálculo	

	bien, si se evidencia, está fuera de contexto	interpretando los resultados no validando	de probabilidad condicional lo interpreta y valida	

Tras los análisis de producciones de los estudiantes y la observación realizada durante la implementación de la propuesta, se procederá a realizar sugerencias de mejora. Estas se centrarán en determinar los aspectos que facilitan el desarrollo de la creatividad, a partir del proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática y a través de la puesta en acción de las habilidades matemáticas.

Cabe destacar que, en el marco de esta implementación, *a priori* se contemplan condiciones y restricciones, tanto institucionales como pedagógicas y didácticas. Dentro de estas, se encuentra el hecho de que el establecimiento educacional en el que se aplican los instrumentos, liceo Politécnico Sara Blinder Dargoltz, posee un plan de enseñanza exclusivamente técnico profesional para los niveles de tercero y cuarto medio. Lo anterior implica que sólo se destinan 3 horas pedagógicas a la semana para la enseñanza de la matemática. Además, dentro de los elementos pedagógicos, es relevante precisar que la jefa de la Unidad Técnico-Pedagógica (UTP) determinó que las participantes debían ser las 7 mejores estudiantes de los respectivos cursos de 3 terceros medios del establecimiento. Adicionalmente, se debe considerar también dentro de estas limitaciones pedagógicas la decisión de que la aplicación de la propuesta se haya realizado como una actividad extraescolar. Dentro de los aspectos didácticos, es pertinente considerar que los docentes necesitan herramientas para la implementación de la estrategia según APOE, lo cual precisamente se resuelve a través de la aplicación de la propuesta planteada por esta investigación.

Para poder hacer uso de la Teoría APOE es necesario respetar su estructura general metodológica de investigación; esto es:

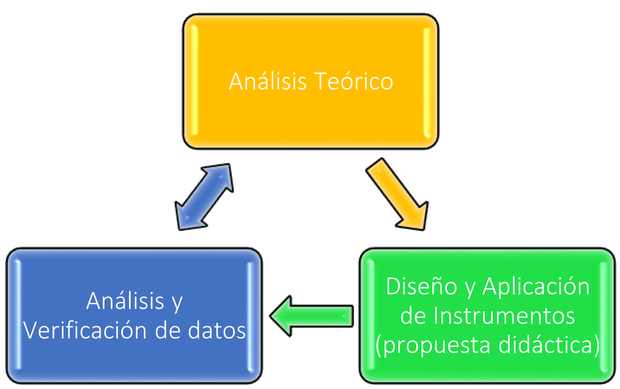


Imagen 9

En consideración del ciclo que estructura la metodología APOE y el tipo de construcción que implica una descomposición genética (dg), en primera instancia, se realiza un análisis bibliográfico teórico. Para ello, se debate en torno al concepto de probabilidad, al levantar información respecto a las construcciones mentales (teóricas) necesarias para diseñar una descomposición genética (dg) del concepto de probabilidad. Lo anterior, aporta a la comprensión de un camino factible relativo a su aprendizaje, en relación con los términos de construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes deben estructurar e interrelacionar con otros conceptos relevantes. En este caso, los conceptos claves serán: suceso, experimento, espacio muestral, métodos de conteo, axiomas de probabilidad y sucesos independientes. Así, a partir de la descomposición genética del concepto de probabilidad condicional, fundamentamos el diseño y la construcción de una propuesta didáctica que permite evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto de probabilidad. Finalmente, cabe reforzar que dicha propuesta didáctica (anexo) fue diseñada tras la puesta en relación con respecto a los componentes del pensamiento creativo de Torrance.

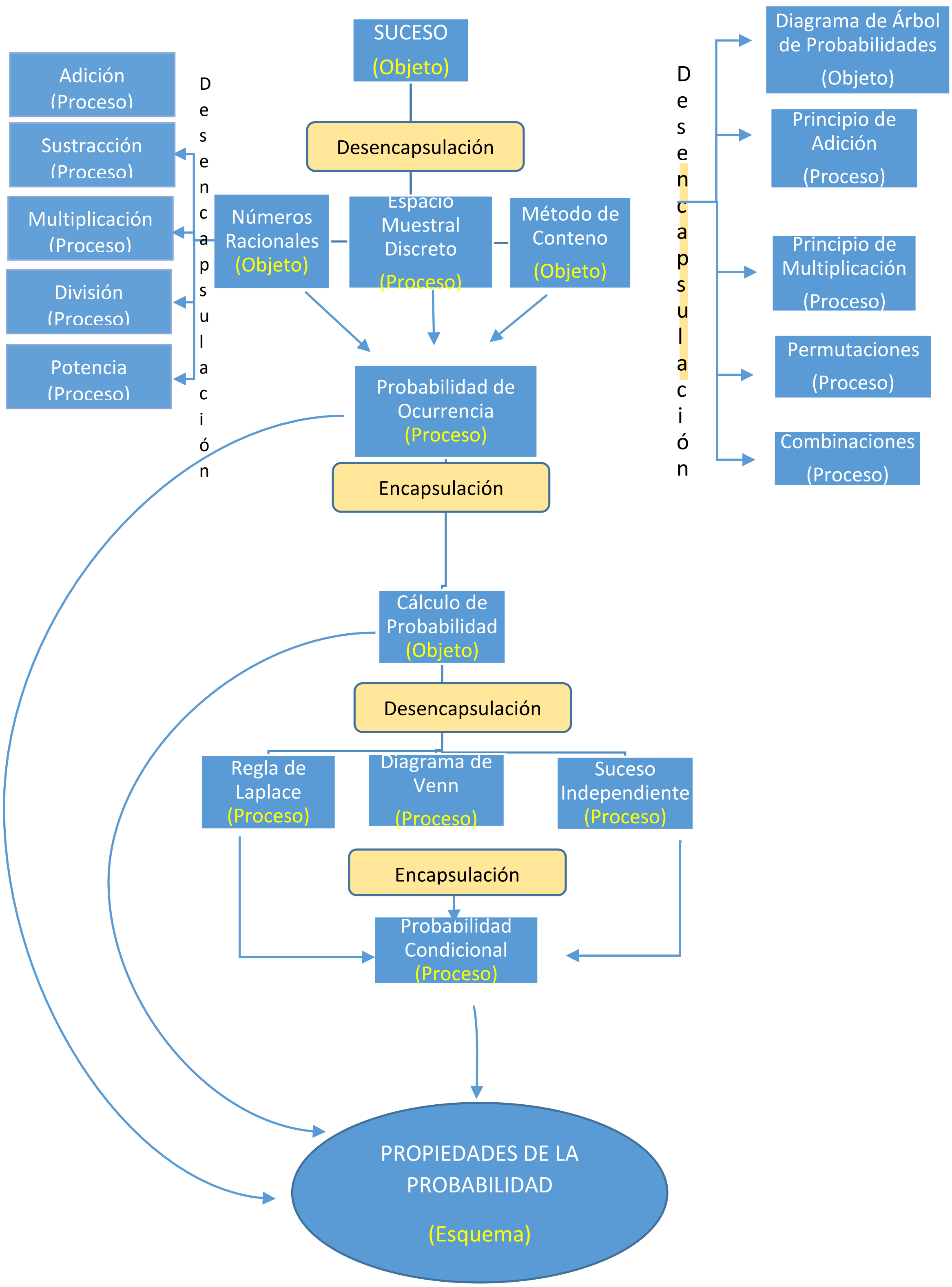
Capítulo III: RESULTADOS

III.I Descomposición genética hipotética en torno a la probabilidad condicional

Tras el análisis de los conceptos claves matemáticos para la concepción de la probabilidad condicional, se desarrolló una dg hipotética (dgh), la cual tiene por finalidad trazar un camino por el cual los estudiantes comenten y enlacen mecanismos mentales al constuir el concepto de probabilidad condicional. La dgh presentada, se genera tras la depuración de una dg creada previamente, a través de la implementación del ciclo metodológico de la teoría APOE, en el cual se muestra cómo los estudiantes construyen el concepto de probabilidad. De esta forma, la dgh de esta propuesta se encuentra fundamentada en las construcciones y mecanismos mentales utilizados para una confección del concepto probabilidad simple, paso fundamental para la diferenciación con respecto a la probabilidad condicional.

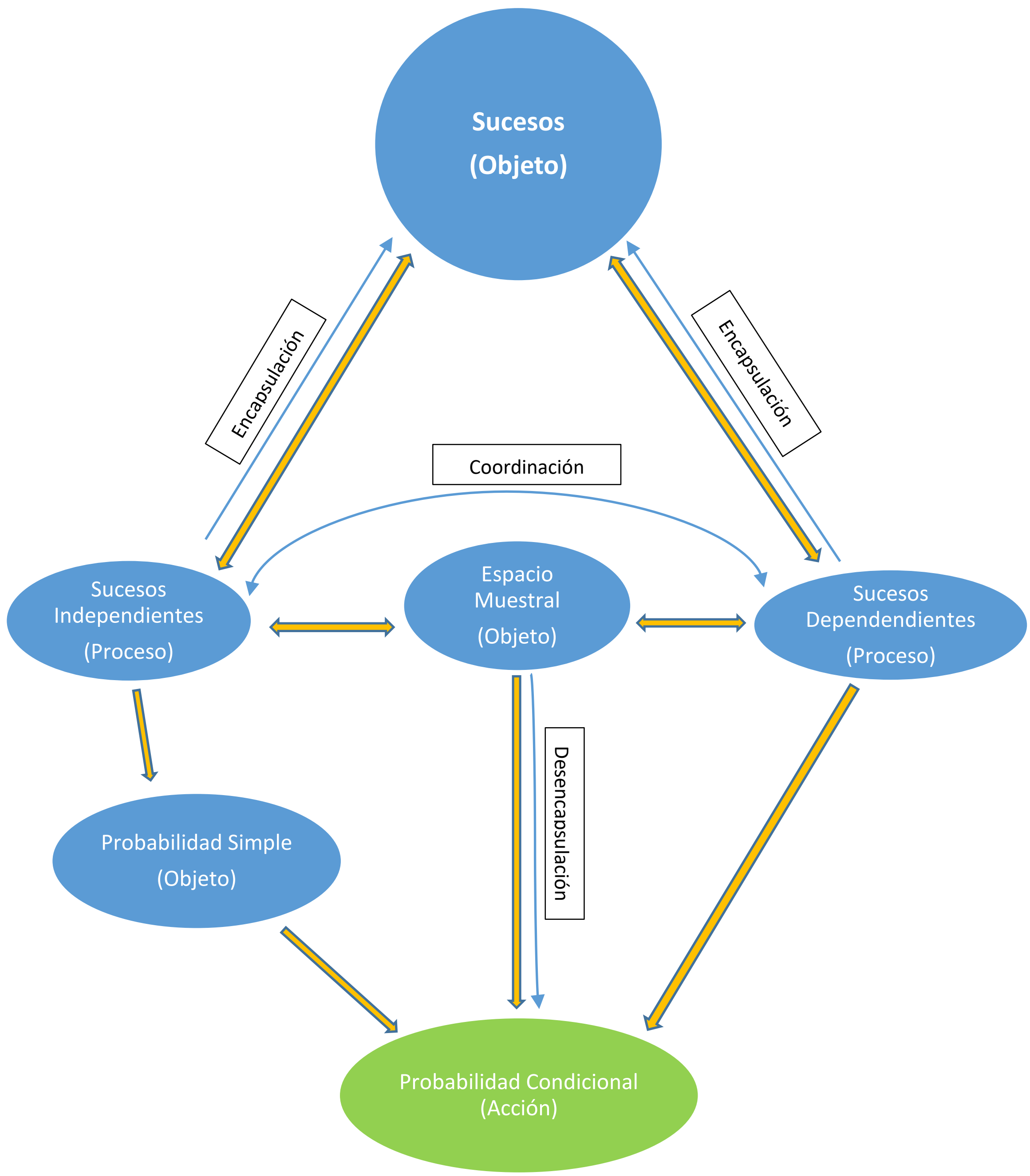
En base a la experiencia en aula de enseñanza media, se considera necesario para la construcción del concepto de probabilidad que los estudiantes de tercer año medio sean capaces de realizar acciones en torno a una conceptualización objeto de conjunto, números y funciones. Lo anterior es relevante porque el concepto de probabilidad será construido a partir de la concepción objeto de suceso, entendida como un conjunto de resultados posibles que genera un subconjunto del espacio muestral. A su vez, este úlitmo se perfila como el conjunto de todos los resultados posibles a raíz de un experimento. Además, tales sucesos pueden combinarse para formar sucesos nuevos, al utilizar las operaciones de conjuntos y para lo cual es fundamental la concepción del objeto fracciones. Al mismo tiempo, dicho subconjunto de los reales es entendido como el cociente entre dos números y bajo condiciones triviales para su existencia.

En consecuencia, según lo reflexionado junto a docentes de aula de enseñanza media y respecto a la bibliografía consultada, es relevente comprender la probabilidad como la función que relaciona cada elemento del espacio muestral con la posibilidad de que un fenómeno ocurra. En este sentido, y según la Dgh propuesta (*Dg. Hipotética*$_1$), se describe un modelo para construir el concepto de probabilidad a partir de cuatro construcciones fundamentales: objeto de suceso, proceso de probabilidad de ocurrencia, esquema de axiomas de probabilidad y objeto de cálculo de probabilidad. No obstante, debido a que el tema en cuestión es la probabilidad condicional, resulta pertinente complementar esta dg de acuerdo con los fines de aprendizaje específicos de los estudiantes. Así, tenemos:



Dg. Hipotética$_1$ (DgH$_1$)

Según la *DgH₁*, el estudiante de tercero medio, en primera instancia, moviliza sus construcciones mentales vinculadas al objeto suceso. Tras ponerlas en práctica, es capaz de visualizar todos los eventos o resultados posibles de manera conjuntista. Lo anterior, se traduce en una Dgh_1 que aborda el eje de estadística (datos y azar) de forma amplia y, dado que se aplica al eje de "*probabilidad condicional*", es posible simplicar el proceso de una *Dg Hipotética₂* (DgH_2) acotada al desarrollo de la construcción probabilidad condicional a nivel de acción (noción) cuyo diseño sería:



Dg. Hipotética₂ (DgH₂)

Según esta última descomposición genética (*Dgh*$_2$), para construir la noción de probabilidad condicional –en Construcción Mental Acción– un estudiante cualquiera debiese ser capaz de activar las construcciones Sucesos y Espacio Muestral.

III.II Análisis de conocimientos previos según Dg. Hipotética$_2$

a) Concepción Proceso: en una primera fase de la propuesta, los conceptos Sucesos Independientes y Sucesos Dependientes es factible que se generen durante la construcción proceso. Esto ocurre cuando los estudiantes son capaces de plantear e identificar el momento en el que los sucesos son de igual o distinta naturaleza, de acuerdo con el análisis de las situaciones planteadas. La construcción sólo estará en acción cuando sean capaces, parcialmente, de establecer la dependencia de las acciones.

b) Concepción Objeto: Espacio Muestral, Sucesos y Probabilidad Simple es posible que se den durante la construcción objeto. Esto ocurre cuando:

- **Espacio Muestral:** existe una construcción mental Objeto, es decir, los estudiantes son capaces de identificar los ejercicios particulares y específicos, según su naturaleza, ya sea continua o discreta. Además, estos logran encapsularlos en el concepto espacio muestral, pues incluso pueden restringirlo de acuerdo con cada caso. Es posible rastrear que un estudiante muestre una construcción proceso de un espacio muestral, asociado a una situación planteada, cuando lo identifica según el observador y el factor que desea observar. Esto quiere decir que comprende que éste no es único, sino que es algo sujeto a modificaciones que no conlleven un cambio en el planteamiento de la situación dada. Así, por ejemplo, si se considera el experimento aleatorio de lanzar un dado, se sabe que existen 6 posibles resultados. Por ende, si uno de los estudiantes elije un número y lanza un dado, la pregunta a responder sería: ¿cuál es un posible espacio muestral para este experimento? Entonces, si al jugador le interesa conocer la probabilidad que tiene de ganar en este lanzamiento, puede proponer comoes pacio muestral el conjunto "W = {Ganar, Perder}". Ahora bien, el espacio muestral específico de aquel conjunto que contiene todos los posibles números resultantes del lanzamiento es: "W = {1,2,3, 4, 5, 6}".
- **Sucesos:** es una consecuencia natural de realizar el proceso de encapsulación de dos construcciones proceso, tales como Suceso Independiente y Suceso Dependiente. La

encapsulación de estos –previa interiorización de ambos procesos– determina el surgimiento de la construcción mental objeto del suceso.

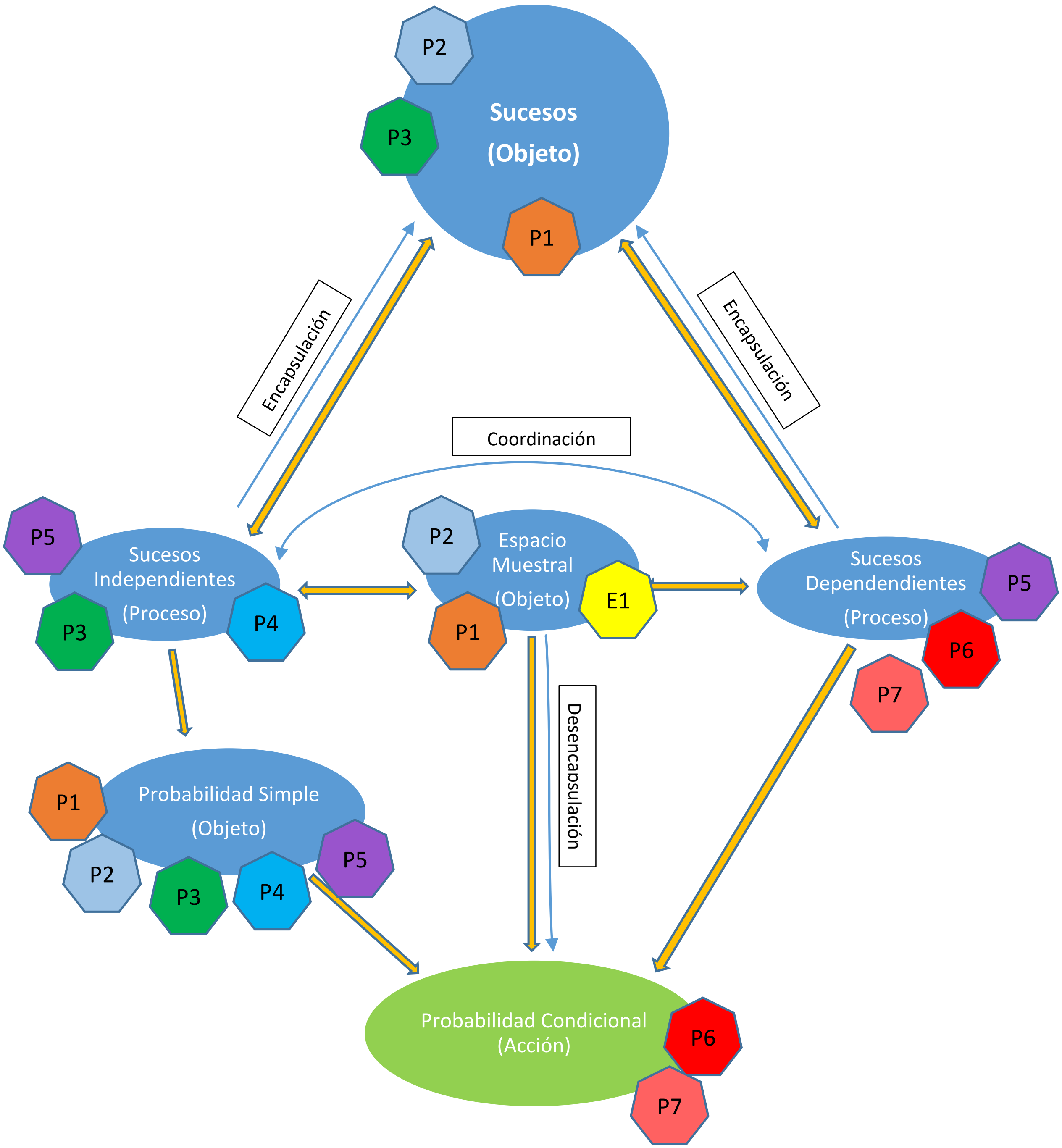
- **Probabilidad Simple:** debiera ocurrir en el marco de una construcción mental Objeto; esto es, cuando los estudiantes son capaces de calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento, además de trabajar con una concepción objeto del cálculo de probabilidad, para la cual deben desencapsular los procesos según la regla de Laplace. También es posible observarlo cuando se aplican estrategias para determinar el número de posibilidades diferentes que existen al realizar un experimento; por ende, las distintas formas en que lo anterior puede ocurrir, se desencapsulan mediante los subsequentes procesos, en los que se usan propiedades numéricas: diagrama de árbol, principio aditivo, principio multiplicativo, permutaciones y combinaciones. Se determina la concepción objeto de este concepto si el estudiante es capaz de discriminar, en relación con el contexto, la posibilidad real de numerar o listar los casos posibles de una situación dada. Ahora bien, el estudiante tendrá una construcción mental proceso de probabilidad solo en la medida que pueda distinguir entre sucesos posibles, inciertos e imposibles, además de atribuirles un cierto grado de certeza. Se considera que este proceso ha sido encapsulado cuando se da lugar a un nuevo objeto, es decir, al cálculo de probabilidad. Este último es obtenido por medio de la asimilación del esquema axiomas de probabilidad, lo cual permite la formalización de la probabilidad y la encapsulación del objeto probabilidad de ocurrencia. Tales axiomas son válidos tanto para la interpretación frecuentista como bayesiana del concepto de probabilidad.

Por un lado, los estudiantes debieran ser capaces de coordinar los procesos probabilidad simple y los sucesos dependientes mencionados, con la finalidad de construir el concepto de probabilidad condicional. Asimismo, este debiera posicionarse en su construcción mental acción, debido a que lo anterior sucede únicamente cuando los estudiantes reconocen la necesidad de restringir el espacio muestral, tras calcular una probabilidad simple.

Por otro lado, es necesario que los estudiantes activen su construcción objeto, así como los mecanismos de encapsulación y reversión (desencapsulación) de los elementos y propiedades de los Sucesos, Espacio Muestral y Probabilidad Simple. De la misma forma, no solo debe ser una acción o proceso, pues necesitamos el trabajo relativo a la construcción y descomposición de un espacio muestral, además de los respectivos cálculos de probabilidades para sucesos independientes.

En consecuencia, el nuevo mapa de la Dg_2, que pone en relación las preguntas del instrumento creado a partir de la Dg_2 y las concernientes habilidades matemáticas, se estructura de la siguiente manera:

RELACIÓN DE Dg_2 CON LOS PROBLEMAS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA



Dg. Hipotética₂ (Dgh₂)

En definitiva, E1 guarda relación con la etapa 1; mientras que P1, establece una correspondencia con P7 que, a su vez, se conecta con las 7 preguntas que se ponen a prueba en la Dg_2. Así, la puesta en relación respecto al instrumento sería la siguiente:

Etapa o pregunta	Lugar o correspondencia con Dg_2
ETAPA I *(Instrucciones para el profesor: Para el siguiente ejercicio se trabajará colaborativamente en equipo. Por ende, armar grupos de 3 o 4 estudiantes y que comiencen con las instrucciones)* Elige una o un líder de equipo, una o un vocera/o y uno o dos editor/a de soluciones. ¡Anótalos con nombre y apellido en la guía y en la cartulina con letra grande! Luego entrégala al profesor ¡Rápido! *(Instrucciones para el profesor: 1) el profesor pega en la pizarra o lugares visibles las cartulinas con los nombres de los integrantes, se explica que este será el espacio muestral para trabajar las actividades (3 minutos). 2) El profesor crea en una cartulina un grupo extra ficticio con 4 integrantes con a lo menos un integrante que su nombre empiece con vocal y apellido con consonante. Lo pega junto a las demás cartulinas)*	Espacio Muestral Identificación y caracterización Objetivo/Intención. Crear un espacio muestral propio y cercano al estudiante para luego ponerlo en común. *(Instrucciones para el profesor: se dará 20 minutos para las actividades uno, dos y tres)*
Pregunta 1 Si realizamos un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar en el curso un líder cuyo nombre empiece con vocal? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	Identificación del Espacio Muestral Identificación del suceso Cálculo de probabilidad simple *Intención: calcular la probabilidad simple de un evento. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.*
Pregunta 2 Si realizamos un sorteo.	Identificación del Espacio Muestral Identificación del suceso

¿Cuál es la probabilidad, al azar, de no sacar un estudiante del curso cuyo apellido empiece con consonante? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	Cálculo de probabilidad simple *Intención: calcular la probabilidad simple del complemento de un evento. Se espera activar las propiedades del espacio muestral y del cálculo de probabilidades. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Es posible que puedan incluso evidenciar en sus respuestas el manejo a nivel de construcción mental objeto de espacio muestral. Podrían existir, en esta pregunta, otras dificultades como el trabajo con números decimales, pero esto se evidenciará en las respuestas que se den.*
Pregunta 3 Si creáramos dos grupos: A:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer nombre empieza con consonante} B:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer apellido empieza con consonante} i. ¿Existe una intersección entre ambos conjuntos? Si lo deseas, argumenta tu respuesta verificando, por ejemplo, con una representación gráfica como dibujo, esquema, bosquejo u otra. ii. ¿Será lo mismo si el grupo "A" fueran los estudiantes cuyo primer nombre empiezan con vocal y el "B" los	Identificación del suceso Identificación de sucesos Independientes Cálculo de probabilidad simple *Intención: esta pregunta evalúa las construcciones de los estudiantes en el contenido de espacios muestrales, así como el acto de representar los conjuntos e identificar la intersección de ellos y su cardinalidad. Según como respondan, debieran estar en construcción mental proceso u objeto,*

estudiantes cuyo primer apellido empieza con consonante? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	*o bien, en vías de objeto de espacio muestral.*
Pregunta 4 El profesor lanza un dado. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno de su grupo cuyo primer nombre comience con vocal dado que al lanzar el dado salga: a. Un número mayor que 4 b. Un número impar Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.	Identificación del suceso Identificación de sucesos Independientes Cálculo de probabilidad simple *Intención: reconocer sucesos dependientes e independientes, plantear el problema y modelar el desarrollo. Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.*
Pregunta 5 Los estudiantes, por grupo, lanzan una moneda, si no sale sello vuelven a lanzar hasta obtener dos sellos consecutivos. Tras obtener los dos sellos consecutivos: a. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno cuyo primer apellido comience con consonante. Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	Identificación y diferenciación de sucesos Dependientes e Independientes Cálculo de probabilidad simple *Intención: reconocer y resolver problemas, así como identificar que lanzar la moneda y la probabilidad de salir a la pizarra son sucesos independientes, por ende, no es una condición (modelar el desarrollo). Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.*

b. ¿Influye el resultado del lanzamiento del dado o el del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de las preguntas 4 y 5?	*Adicionalmente, el estudiante deberá argumentar y comunicar su/s conclusión/es.*
Pregunta 6 Determine el espacio muestral de todos los estudiantes del curso cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con vocal. Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	Identificación de sucesos Dependientes Identificación de probabilidad Condicional *Intención: se pretende determinar la construcción y restricción de espacios muestrales, además de determinar las intersecciones de acuerdo con la condición dada. Según lo que respondan, su construcción será una acción o un proceso.*
Pregunta 7 Determine la probabilidad de que sea seleccionado un estudiante cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante. Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan tus estrategias.	Identificación de sucesos Dependientes Identificación y cálculo de la Probabilidad Condicional *Intención: se pretende que identifiquen sucesos dependientes, al tener la construcción proceso de sucesos dependientes e independientes. Estos se coordinan para dar una resolución al problema. Es posible calcular la probabilidad condicional solicitada, si el estudiante determina que la probabilidad corresponde a sucesos dependientes identificables con una intersección de*

	conjuntos, además de identificar y justificar la respuesta, tras realizar una reversión de espacio muestral (restringiéndolo) y explicar la restricción del espacio muestral a los individuos que cumplen con ambas condiciones. *Asimismo, será evidenciable si se mide la interiorización de la acción de cálculo de probabilidad condicional con el proceso suceso dependiente, de modo que se visualiza la necesidad de contar con dicha condición para la probabilidad condicional.* *Finalmente, se espera que el estudiante analice la coordinación de los elementos, producto de la reversión (desencapsulación) de sucesos. Esto ocurre solo si los alumnos lo representan, por ejemplo, en un diagrama de Venn y comprueban la intersección vacía o no vacía de los sucesos.*

Tal como se especificó previamente, el diseño de este instrumento (anexo 1) se realizó considerando la $Dg_{2,}$ así como también la descripción de estudios en torno a competencias relativas a la Dg_2, realizada por la Dra. Elena Cano (Cano, Barrios, Cabrera, & Et All, 2010). Para su análisis, resulta esencial apreciar los resultados del diseño propuesto, pues las respuestas de los estudiantes son el principal resultado que determinará la interpretación relativa al uso y construcción de los objetos matemáticos estipulados. De esta forma, dichas respuestas permiten debatir los resultados de la investigación, tras comparar el desarrollo del pensamiento matemático y de las habilidades matemáticas detectadas en el marco del juego.

Este proceso se centra en una praxis de investigación inspirada en Nelson & Stolterman (2012), por lo que es factible orientar una reflexión sistemática de las mediciones implementadas y resaltar aspectos como: las soluciones creativas, la resolución o implementación de experimentos y soluciones lúdicas, así como también la construcción de bocetos, bosquejos y prototipos que promuevan la ejecución de diferentes ideas y conceptos, que fluyan y nazcan en el momento mismo de la aplicación.

Finalmente, de acuerdo con la teoría APOE, se justifica el trabajo en grupos y no el de carácter individual. Ed Dubinsky describe la implementación del aprendizaje como una acción cooperativa, tanto para las tareas y ejercicios como para los exámenes y cualquier instancia de aprendizaje entre estudiantes (Dubinsky, De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, 2000).

III.III Intención de la propuesta didáctica: análisis *a priori*

Respecto a la propuesta didáctica, se consideró presentar a los estudiantes una actividad basada en la resolución de problemas y situada en el contexto del aula. El promover la resolución de estos opera como base para que el estudiante ponga en práctica, principalmente, la mayor cantidad de objetos matemáticos descritos y necesarios a nivel de Acción y Proceso. Asimismo, en algunos casos, también pueden realizarse a nivel objeto, lo que demuestra un desempeño de logro o no logro, al tiempo de constatar los problemas que surgen y las posibilidades para que se generen distintas estrategias (caminos de planteamiento y resolución). Estas últimas serán las que activen las habilidades y competencias matemáticas, tales como representar, resolver problemas, modelar y argumentar; las cuales llevarán a constatar el desarrollo de la creatividad durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Así, la propuesta resulta ser un desafío para los profesores, dado su formato y debido a que no posee una respuesta preestablecida o conocida. Del mismo modo, esta se estructura de forma íntegra en base a los conocimientos matemáticos de los estudiantes que permiten la reflexión por parte de ellos y del docente. Este último podrá relacionar e integrar los distintos conceptos matemáticos ofrecidos, con la finalidad de extender opciones que puedan ser utilizadas conjuntamente para llegar a la solución de los problemas propuestos.

La teoría APOE proporciona un marco teórico que describe el desarrollo gatillado en la mente del estudiante al momento de enfrentarse a la comprensión de un concepto matemático. Esta moviliza el manejo o la implementación de conceptos matemáticos que permiten identificar con claridad y distinguir los diferentes niveles de comprensión que implican las distintas estrategias aplicadas para resolver los problemas o situaciones desafiantes abordados por cada estudiante o de manera colectiva.

Dentro de las expectativas que se proponen, se espera la constatación de una variedad de representaciones dentro de los grupos y entre los grupos, pues el trabajo colaborativo promueve espacios de contrastación de ideas y estrategias. De acuerdo con la estructuración del currículum escolar chileno, se espera que sean capaces de identificar los sucesos independientes sin dificultad y que los contrasten con los sucesos dependientes.

III.IV ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS.

En este capítulo se analizan los datos obtenidos tras la implementación del test Torrance en torno a la creatividad y de la propuesta didáctica descrita en el anexo. Estos fueron aplicados como parte de una actividad extraescolar en una sala de lectura, en la que se encontraban las 7 mejores estudiantes de los terceros medios correspondientes a los años 2018 y 2019. Este proceso es un estudio clínico fue aplicado en el nivel de tercero medio del Liceo Politécnico Sara Blinder Dargoltz, ubicado en la comuna de Santiago de Chile. Dicho liceo posee una enseñanza de carácter técnico profesional para niñas, es de tipo particular subvencionado, se encuentra adscrito a gratuidad y pertenece a una congregación católica. Es prudente mencionar que la jefa de UTP seleccionó a las 7 estudiantes en consideración de su destacado e histórico rendimiento académico en el área de matemática (promedios más altos entre pares de tercero medio).

El Test Torrance se implementó durante la primera semana de noviembre de 2018 y los resultados fueron los siguientes:

2018	**juego 1**		**juego 2**				**juego 3**				**total, creatividad figurativa**				
Noviembre	**Ori**	**Elab**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Total**
A1	4	3	34	7	17	7	0	4	2	0	38	11	22	7	78
A2	4	2	26	10	27	0	0	9	2	1	30	19	31	1	81
A3	0	3	35	8	9	0	1	6	1	1	36	14	13	1	64
A4	5	4	25	8	9	0	0	5	2	0	30	13	15	0	58
A5	0	4	37	8	26	0	2	8	0	1	39	16	30	1	86
A6	4	2	13	5	12	0	1	1	1	1	18	6	15	1	40
A7	2	4	24	9	30	0	2	3	2	1	28	12	36	1	77
	3	3	28	8	19	1	1	5	1	1	31	13	23	2	69
	Ori = Originalidad				**Elab = Elaboración**				**Flui = Fluidez**				**Flex = Flexibilidad**		

Tabla 3

La segunda ronda del test Torrance se implementó durante la segunda semana de abril de 2019 y los resultados fueron los siguientes:

2019	**juego 1**		**juego 2**				**juego 3**				**total, creatividad figurativa**				
Abril	**Ori**	**Elab**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Ori**	**Flui**	**Elab**	**Flex**	**Total**
A1	4	4	34	8	22	0	0	6	1	0	38	14	27	0	79
A2	4	3	28	10	21	0	2	7	3	1	34	17	27	1	79
A3	4	3	33	8	18	0	3	9	2	1	40	17	23	1	81
A4	4	3	36	9	17	0	2	8	2	1	42	17	22	1	82
A5	5	1	25	8	23	0	0	4	3	0	30	12	27	0	69
A6	2	3	38	9	17	0	0	5	0	0	40	14	20	0	74
A7	4	4	22	7	22	0	0	7	3	1	26	14	29	1	70
	4	3	31	8	20	0	1	7	2	1	36	15	25	1	76
	Ori = Originalidad				**Elab = Elaboración**				**Flui = Fluidez**				**Flex = Flexibilidad**		

Tabla 4

Para realizar la interpretación del test Torrance, se considerará la relación explicada en el apartado V.III y la tabla de “total, creatividad figurativa”.

total, creatividad figurativa - 2018 Nov				
Ori	Flui	Elab	Flex	Total
38	11	22	7	78
30	19	31	1	81
36	14	13	1	64
30	13	15	0	58
39	16	30	1	86
18	6	15	1	40
28	12	36	1	77
31	13	23	2	69

total, creatividad figurativa - 2019 abril				
Ori	Flui	Elab	Flex	Total
38	14	27	0	79
34	17	27	1	79
40	17	23	1	81
42	17	22	1	82
30	12	27	0	69
40	14	20	0	74
26	14	29	1	70
36	15	25	1	76

Tabla 5

En esta, el estudiante ideal es:

Ptje Máximo	juego 1		juego 2				juego 3			
A-ideal	5	5	50	10	50	10	5	30	5	10

total, creatividad figurativa				
60	40	60	20	180

Tabla 5

Para conducir un análisis comparativo de los promedios obtenidos por G1 y G2, se considera el puntaje máximo teórico del Test Torrance y los promedios de puntajes obtenidos en investigaciones similares (a estudiantes de similares edades). Estos últimos corresponden a investigaciones realizadas por María Cristina García (García, 2002), Henry Castro *et al* (Castro, Ortega, Villarroel, & Contreras, 2019) y un estudio realizado por el Consejo Nacional de la Cultura y las Artes (Consejo Nacional de la Cultura y las Artes, 2011). Tras realizar las comparaciones, los resultados fueron los siguientes:

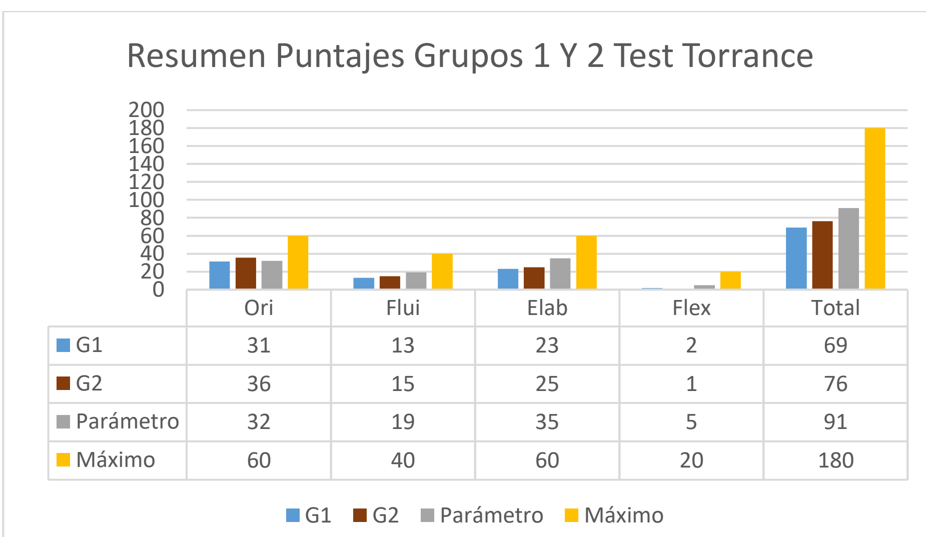


Gráfico 1 – Elaboración propia – Parámetro corresponde a los promedios de los datos obtenidos en las 3 investigaciones descritas.

A partir de los anteriores, es posible apreciar que el nivel de creatividad de las estudiantes es similar al de otros estudios, lo cual visibiliza desde la primera intancia que no existe una merma o situación desfavorable para las estudiantes de acuerdo con sus talentos y capacidades; en particular, respecto a su capacidad de pensamiento creativo. Asimismo, si consideramos los niveles de desarrollo de las habilidades creativas en los estudiantes, es factible establecer que el elemento que evidencia un menor desarrollo es la flexibilidad, seguido por la elaboración y la fluidez. No obstante, la mejor desarrollada es la originalidad:

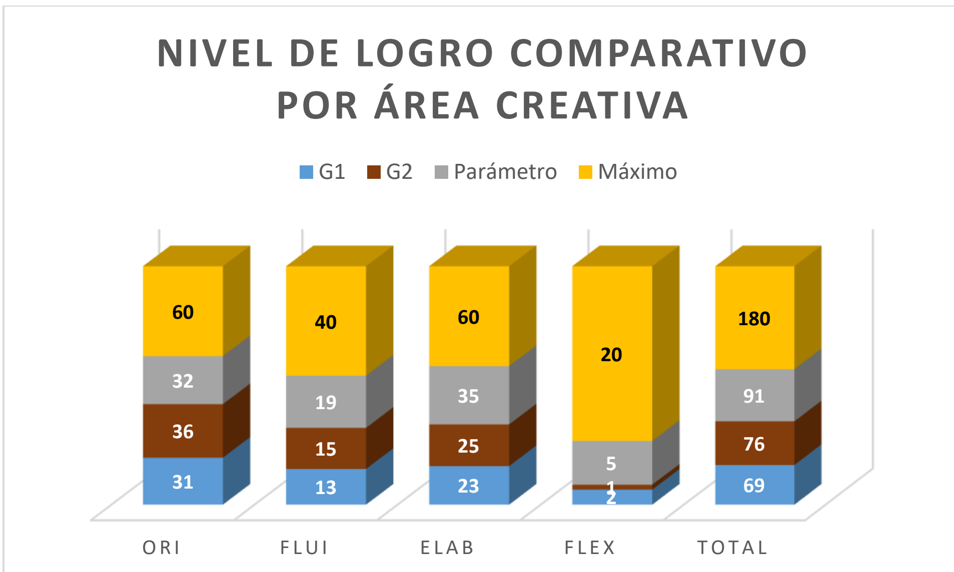


Gráfico 2 – Elaboración Propia

Cabe recordar que la presente propuesta establece la relación de habilidades matemáticas y la creatividad de la siguiente forma:

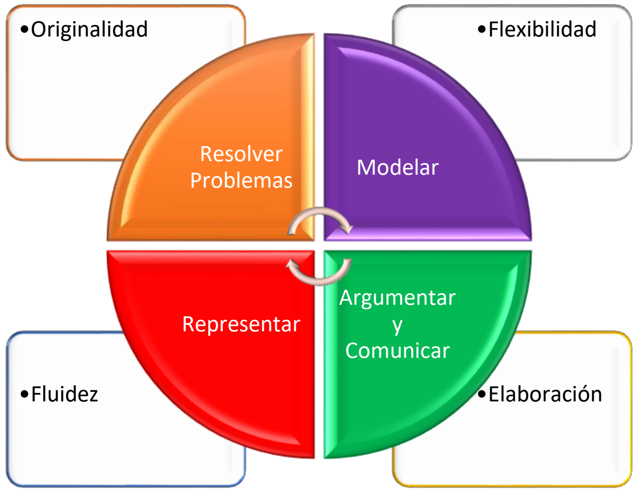


Imagen 1 - Propuesta de elaboración propia

Al integrar el gráfico 2 con la imagen 5, se puede concluir que la competencia Argumentar y Comunicar es la menos fortalecida en el marco de este estudio. En una escala ascendente de desarrollo, a la anterior le siguen modelar y representar; finalmente, se encuentra la competencia mejor desarrollada, la de resolver problemas:

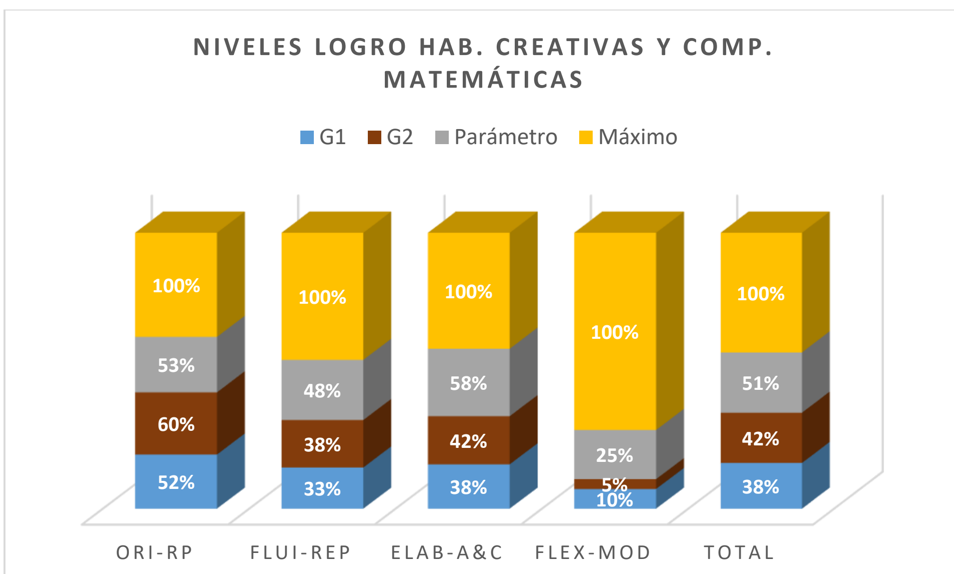


Gráfico 3 – comparativo – Elaboración propia

Si los anteriores datos se posicionan en el plano de nivel de logro de las habilidades creativas/habilidades matemáticas, los comportamientos de G1 y G2 quedarían evidenciados según la tabla 4:

Habilidad Creativa / Competencia Matemática	Inicial Ptje < 30%	En Proceso Ptje entre 30% y 60%	Avanzado Ptje > 60%

Resolver Problemas (Originalidad)		G1 = 52% G2 = 60%		
Argumentar y Comunicar (Elaboración)		G1 = 38% G2 = 42%		
Representar (Fluidez)		G1 = 33% G2 = 38%		
Modelar (Flexibilidad)	G1 = 10% G2 = 5%			

Tabla 4 – Elaboración propia

Al analizar los porcentajes de logro, se aprecia que Representar y Modelar se encuentran en la parte baja de su respectivo nivel de logro. Por su parte, Argumentar y Comunicar se posiciona como la más débil en cuanto a desarrollo. En relación con esto último, se puede argüir que el desarrollo de dichas habilidades representa una dificultad mayor cuando no se tiene claridad de las estrategias de resolución del problema ni de las formas de representación a través de las cuales se llega a la respuesta. En otras palabras, al no conocer formalmente los insumos que les permitan elaborar una propuesta concreta es difícil transmitir y defender las eventuales soluciones.

La implementación de la propuesta didáctica se realizó, por primera vez, un jueves de noviembre de 2018 a las 11:00 a.m., en sala de estudios en la que se crearon, de forma libre, dos grupos que dividieron a las 7 asistentes previamente seleccionadas. Los tiempos de desarrollo de la propuesta didáctica fueron 17 minutos para la etapa I y 32 minutos para la etapa II, de modo que se cumplieron exitosamente los tiempos establecidos en la propuesta: 20 y 40 minutos, respectivamente.

El tipo de investigación es de tipo descriptivo transversal, aplicada sobre un muestreo no probabilístico intencional a dos grupos de 3 y 4 estudiantes, respectivamente. La caracterización de las estudiantes que participaron del estudio se detalla en el siguiente cuadro:

Alumna 1	Alumna 2	Alumna 3	Alumna 4	Alumna 5	Alumna 6	Alumna 7
Enfermería	Enfermería	Párvulo	Párvulo	Contador Auditor	Contador Auditor	Enfermería
Grupo 1	Grupo 1	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 2	Grupo 2	Grupo 2
PPA. 6,6	PPA. 6,4	PPA. 6,2	PPA. 6,8	PPA. 6,3	PPA. 6,3	PPA. 6,4

G1 - Detalle de las estudiantes de estudio clínico 2018-02 – PPA es Promedio Ponderado acumulado a 3ro medio

Una segunda intervención se realizó en abril de 2019, en el mismo establecimiento y con estudiantes del mismo nivel de tercero medio. Además, dichas estudiantes contaban con similares características que se explicitan en el siguiente detalle:

Alumna 1	Alumna 2	Alumna 3	Alumna 4	Alumna 5	Alumna 6	Alumna 7

Enfermería	Enfermería	Contador Auditor	Párvulo	Contador Auditor	Enfermería	Enfermería
Grupo 1	Grupo 1	Grupo 1	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 2	Grupo 2
PPA. 6,5	PPA. 6,6	PPA. 6,2	PPA. 6,2	PPA. 6,3	PPA. 6,6	PPA. 6,3

G2 - Detalle de las estudiantes de estudio clínico 2019-01 – PPA es Promedio Ponderado acumulado a 3ro medio

La propuesta didáctica se implementó de manera grupal en un tiempo total de 60 minutos, 20 minutos para la primera fase y 40 para la segunda –dichos tiempos fueron utilizados de manera íntegra. Adicionalmente, se estableció desde el primer momento un tercer grupo ficticio, con la finalidad de anteponerse a lo ocurrido durante la primera implementación, en la que se generó una respuesta cuya solución fue el conjunto vacío (se describe en “dificultades en la implementación” pregunta 7).

Dificultades en la implementación

En la primera propuesta didáctica, la pregunta 7 planteaba:

“Determine la probabilidad de que sea seleccionado un estudiante cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante.”

Este problema se crea para ser resuelto con probabilidad condicional y, para ello, es fundamental que la solución no sea vacía. Dicho de otra forma, la necesidad de existir una persona cuyo apellido empezara con vocal. Lamentablemente, durante la aplicación se detectó que dentro del grupo no existían estudiantes con un apellido con vocal; lo mismo ocurrió en el tercer grupo “ficticio”, en el que tampoco había integrantes cuyo apellido comenzara con vocal. Lo anterior, provocó que la respuesta fuera inmediata y admitera el simple descarte. Debido a esta dificultad derivada de la implementación, en el mismo momento se agregó un cuarto integrante al Grupo 3 (ficticio), con la finalidad de que la probabilidad no quedara como nula. Una vez explicada y solucionada la dificultad, se prosiguió con la implementación planificada.

III.V Análisis por pregunta (primera implementación 2018-02)

De la rúbrica:

G1	Esp. Muestral	Suceso	Suceso Independient e	Suceso Dependiente	Probabilid ad Simple	Probabilidad Condicional	Resolver Problema	Representar	Argumentar y Comunicar	Modelar
E1	A	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P1	P	P	-	-	P	-	3	2	2	-
P2	O	A	-	-	P	-	3	2	2	2
P3	-	A	O	-	O	-	3	3	2	-

P4	-	-	-	P	P	-	3	2	1	-
P5	-	-	A	A	A	-	3	2	2	2
P6	-	-	-	A	-	A	3	3	3	-
P7	-	-	-	A	-	A	2	3	2	2

G2	Esp. Muestral	Suceso	Suceso Independiente	Suceso Dependiente	Probabilidad Simple	Probabilidad Condicional	Resolver Problema	Representar	Argumentar y Comunicar	Modelar
E1	Acción	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P1	P	P	-	-	P	-	3	2	1	-
P2	A	A	-	-	A	-	3	2	2	2
P3	-	A	O	-	A	-	3	2	2	-
P4	-	-	-	P	A	-	3	2	1	-
P5	-	-	A	A	A	-	3	3	2	2
P6	-	-	-	A	-	A	3	3	2	-
P7	-	-	-	A	-	A	3	3	2	2

A continuación, se analizan los datos obtenidos a partir de cada una de las respuestas brindadas por las estudiantes.

Pregunta 1 Si realizamos un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar en el curso un líder cuyo nombre empiece con vocal? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan. ***Intención: calcular la probabilidad simple de un evento. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.***

En la pregunta 1, ambos grupos de estudiantes dan una respuesta casi sin dificultades. La excepción fue la intervención de una estudiante que preguntó en qué medida "al azar" afecta en "algo". Tras plantear esta inquietud, rápidamente el grupo inicia una conversación en la que argumentan y dan ejemplos concretos acerca del azar. Una vez finalizada esta discusión, las estudiantes resuelven la situación de forma correcta.

Se esperaba que las estudiantes respondieran esta pregunta al evidenciar una construcción acción o proceso, de acuerdo con la forma en que se diera la respuesta. Ambos grupos muestran una construcción mental proceso de espacio muestral y suceso. Ahora bien, el grupo que está en construcción proceso resuelve el ejercicio tras plantear el espacio muestral, seguido por la proporción de casos favorables respecto a los casos totales y, finalmente, la determinación de una resolución correcta.

Cabe mencionar que uno de los grupos resolvió la pregunta de diferentes formas: a través de la utilización de una tabla para ordenar los datos y mediante el uso de un diagrama de casos. El otro grupo fue capaz de identificar el espacio muestral y de utilizar un algoritmo algebraico para determinar los casos favorables divididos en los casos totales (única forma de resolución algebraica). Con lo anterior, y según la puesta en relación de las estudiantes, queda evidenciado que se movilizan la fluidez y la elaboración del proceso de pensamiento creativo, de modo es posible determinar que, mediante este ejercicio, se promueve el desarrollo de la creatividad.

Pregunta 2

Si realizamos un sorteo.

¿Cuál es la probabilidad, al azar, de no sacar un estudiante del curso cuyo apellido empiece con consonante?

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: calcular la probabilidad simple del complemento de un evento. Se espera activar las propiedades del espacio muestral y del cálculo de probabilidades. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Es posible que puedan incluso evidenciar en sus respuestas el manejo a nivel de construcción mental objeto de espacio muestral. Podrían existir, en esta pregunta, otras dificultades como el trabajo con números decimales, pero esto se evidenciará en las respuestas que se den.

En esta ocasión, ambos grupos de estudiantes resuelven sin dificultad lo solicitado, tras utilizar el descarte y aplicar la fórmula "casos favorables partido por casos totales" –sin distinguirlo como regla de Laplace–, al calcular una división de enteros. Una estudiante presenta dificultades al trabajar con números decimales (por el resultado) y se observa que sólo una estudiante no fue capaz de realizar la división con autonomía. Pese a que la dificultad que presentan los ejercicios con decimales es un aspecto relevante de discutir, no se abordará en este análisis debido a que no se relaciona directamente con el foco de la presente investigación. En consideración de todo lo anterior, la conclusión es que los dos grupos de estudiantes poseen, por lo menos, la construcción acción de probabilidad simple.

La pregunta, además, verifica que las estudiantes poseen el concepto de "complemento" en su construcción acción, puesto que sus respuestas son esquivas en relación con la posibilidad de desarrollar una construcción mental del complemento. Si bien dos estudiantes usan el complemento y, por ello, es posible posicionarlas en una construcción proceso que se evidencia en los bocetos y esquemas/diagramas de los conjuntos contruidos (espacio muestral), éstas no lograron convencer a sus compañeras ni explicar de forma clara el origen de sus respuestas.

En síntesis, y según la puesta en relación de las estudiantes, queda demostrado que se moviliza la elaboración y la flexibilidad del proceso de pensamiento creativo, por lo que este ejercicio también promueve el desarrollo de la creatividad.

Pregunta 3

Si creáramos dos grupos:

A:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer nombre empieza con consonante}

B:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer apellido empieza con consonante}

iii. ¿Existe una intersección entre ambos conjuntos? Si lo deseas, argumenta tu respuesta verificando con una representación gráfica como dibujo, esquema, bosquejo u otra.
iv. ¿Será lo mismo si el grupo "A" fueran los estudiantes cuyo primer nombre empiezan con vocal y el "B" los estudiantes cuyo primer apellido empieza con consonante?

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: esta pregunta evalúa las construcciones de los estudiantes en el contenido de espacios muestrales, así como el acto de representar los conjuntos e identificar la intersección de ellos y su cardinalidad. Según como respondan, debieran estar en construcción mental proceso u objeto, o bien, en vías de objeto de espacio muestral.

En esta pregunta, las estudiantes respondieron de forma grupal y la manera de resolución fue de ensayo y error. A partir de sus respuestas se evidencia que algunas estudiantes desconocían la confección de diagramas, así como también el establecimiento de conjuntos y subconjuntos. No obstante, la actividad resultó de utilidad para observar la capacidad que poseían para trabajar en equipo, argumentar y comunicar sus ideas, al tiempo de complementar las respuestas personales con las de sus compañeras. Para los propóstios de esta investigación, lo anterior resulta significativo, pues se evidencia el desarrollo de las competencias matemáticas y su relación con la creatividad, en conjunto con la puesta en práctica de la originalidad y la elaboración. Debido a esto, el análisis de los resultados permite establecer que poseen una construcción mental objeto.

Es relevante, además, comentar que las estudiantes tuvieron siempre la intención de verbalizar lo que requerían para interceptar los respectivos datos. Las intersecciones, en este ejercicio, son los casos válidos y, al tener esta idea en mente, se visibiliza la puesta en marcha de la fase exploratoria.

Pregunta 4

El profesor lanza un dado. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno de su grupo cuyo primer nombre comience con vocal dado que al lanzar el dado salga:

c. Un número mayor que 4
d. Un número impar

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: reconocer sucesos dependientes e independientes, plantear el problema y modelar el desarrollo. Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.

El grupo dos reconoció el suceso de lanzar el dado como una condición que depende de su resultado. Lo anterior influyó para determinar aquello que incide en la probabilidad de que salga un estudiante cuyo primer nombre comience con vocal. El grupo uno, por su parte, identificó que la probabilidad de que salga una estudiante cuyo primer nombre comience con vocal era indistinta al número que indica el dado. Pese a lo anterior, los datos no fueron suficientes para convencer al grupo de la independencia de los sucesos y decidieron responder ante ambas probabilidades: al hecho de lanzar el dado que, eventualmente, determinaría la selección de alguien.

El grupo dos, tras escuchar la respuesta y conversación del grupo uno, reconsideró su respuesta y evaluó la independencia entre los hechos, concluyendo finalmente que son sucesos independientes. Las reflexiones que se llevan a cabo en ambos grupos permiten situar que su construcción mental se encuentra más avanzada que la acción. Por ende, es factible determinar que la construcción del grupo uno ocurre en términos de proceso, mientras que la del grupo dos se posiciona desde una construcción mental ya en acción y en proceso. Finalmente, el análisis de distintos casos o formas de respuesta, como las ofrecidas, demuestra que las estudiantes movilizaron su pensamiento creativo en el marco de la fluidez.

Pregunta 5

Los estudiantes, por grupo, lanzan una moneda, si no sale sello vuelven a lanzar hasta obtener dos sellos consecutivos. Tras obtener los dos sellos consecutivos:

c. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno cuyo primer apellido comience con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

d. ¿Influye el resultado del lanzamiento del dado o el del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de las preguntas 4 y 5?

Intención: reconocer y resolver problemas, así como identificar que lanzar la moneda y la probabilidad de salir a la pizarra son sucesos independientes, por ende, no es una condición (modelar el desarrollo). Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Adicionalmente, el estudiante deberá argumentar y comunicar su/s conclusión/es.

Ambos grupos se percataron de que el hecho de lanzar la moneda no influye en el cálculo de la probabilidad de la pregunta “a”. El grupo uno lo descubrió de inmediato, mientras que el grupo dos decidió realizar el experimento de todas formas. De acuerdo con lo observado, se generó un momento de dispersión a la hora de saber a quién del grupo le saldrían más rápido dos sellos consecutivos. Posterior a esto, procedieron a calcular la *“probabilidad de que salga a la pizarra un alumno cuyo primer apellido comience con consonante”*, y cuyo resultado fue siempre el mismo.

Para llegar a estas conclusiones, los grupos pudieran haber optado por la construcción mental proceso. Sin embargo, a pesar de que identificaron la independencia de sucesos de manera inmediata, ninguno de los dos grupos desarrolló más estrategias para el cálculo de la probabilidad. Es más, se limitaron a responder de forma directa, sin explorar otras opciones. Por lo tanto, aún cuando las estudiantes entendieron la independencia, decidieron igualmente comprobar su respuesta. Finalmente, es preciso destacar que la exploración de casos relativa a esta pregunta evidencia el desarrollo del pensamiento creativo en su dimensión de fluidez y de elaboración.

Pregunta 6

Determine el espacio muestral de todos los estudiantes del curso cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con vocal.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: se pretende determinar la construcción y restricción de espacios muestrales, además de determinar las intersecciones de acuerdo con la condición dada. Según lo que respondan, su construcción será una acción o un proceso.

Ambos grupos de estudiantes realizaron con bastante más rapidez esta pregunta y, al igual que en los ejercicios anteriores, se llevó a cabo una discusión matemática en torno al problema. No obstante, no se logró percibir que comprendieran que las acciones realizadas en torno a este ejercicio se enmarcan en el eje de la probabilidad condicional. Asimismo, se observa que la construcción del espacio muestral ocurre tras la validación del enunciado, es decir, tras comprender las instrucciones y ejecutarlas. En consecuencia, lo anterior permite posicionar a ambos grupos de estudiantes en la construcción mental acción de espacio muestral de probabilidad condicional.

Ahora bien, cabe precisar que este ejercicio presentó resultados más escuetos en lo que concierne al desarrollo de la creatividad. Sin embargo, la construcción de distintas formas gráficas para resolver el ejercicio establece una relación directa con la originalidad, así como también el esfuerzo de grupo visibiliza la capacidad para desarrollar y potenciar el pensamiento creativo.

Pregunta 7

Determine la probabilidad de que sea seleccionado un estudiante cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: se pretende que identifiquen sucesos dependientes, al tener la construcción proceso de sucesos dependientes e independientes. Estos se coordinan para dar una resolución al problema. Es posible calcular la probabilidad condicional solicitada, si el estudiante determina que la probabilidad corresponde a sucesos dependientes identificables con una intersección de conjuntos, además de identificar y justificar la respuesta, tras realizar una reversión de espacio muestral (restringiéndolo) y explicar la restricción del espacio muestral a los individuos que cumplen con ambas condiciones.

Asimismo, será evidenciable si se mide la interiorización de la acción de cálculo de probabilidad condicional con el proceso suceso dependiente, de modo que se visualiza la necesidad de contar con dicha condición para la probabilidad condicional.

Finalmente, se espera que el estudiante analice la coordinación de los elementos, producto de la reversión (desencapsulación) de sucesos. Esto ocurre solo si los alumnos lo representan, por ejemplo, en un diagrama de Venn y comprueban la intersección vacía o no vacía de los sucesos.

Esta pregunta presentó un problema al momento de abordarlo por las estudiantes. Ninguna de las participantes –incluyendo los integrantes del grupo 3, compuesto por el nombre de los docentes de matemática del establecimiento– cumplía con la condición solicitada en la pregunta, vale decir, “apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante”. Por lo tanto, la solución cero o vacía se concluyó por descarte y sin la necesidad de hacer ningún cálculo. Producto de lo anterior, se decidió agregar a un cuarto integrante al grupo de docentes, con la finalidad de que ahora se cumpliera la condición y que las estudiantes pudieran realizar el respectivo cálculo de la probabilidad condicional.

En esta pregunta, el grupo uno resolvió el ejercicio con el apoyo del enunciado del problema, por lo que su construcción de probabilidad condicional se produjo a nivel de acción. En cuanto al concepto suceso dependiente, las estudiantes utilizaron de forma correcta las propiedades o restricciones, al tiempo de que fueron capaces de identificar la condición. Además, utilizaron el diagrama de Venn para la representación de espacio muestral, posterior a la visualización de intersección vacía o no vacía. Todo lo anterior posiciona los pasos realizados por este grupo en la construcción mental acción. El grupo dos, en esta misma pregunta, demostró similares comportamientos a los descritos previamente, salvo por un error en el cálculo de la solución, producto del aumento del espacio muestral. Se asume que, al haber realizado los otros 6 ejercicios con una muestra de “10” elementos, el cambio a 11 elementos en este ejercicio no fue considerado oportunamente.

Si bien el concepto de probabilidad condicional asociado a una fórmula algebraica no existe en la cognición de las estudiantes, éstas fueron capaces de desarrollar y poner en marcha mecanismos mentales, que implican la coordinación de concepciones, creencias y conocimientos previos que resultan pertinentes tras la validación de pares permitida en el marco del desarrollo de este ejercicio. Por lo demás, es importante precisar que esta pregunta atañe exclusivamente a la probabilidad condicional, lo que representa un desafío mayor para las estudiantes.

Si bien a partir del grupo 1 es posible recoger amplia evidencia respecto al desarrollo del pensamiento creativo en las estudiantes, la correcta pero escueta solución del grupo dos impide extender dicha conclusión de manera generalizada. Por lo tanto, y lamentablemente, no se lograron cumplir del todo las expectativas planteadas a partir del diseño de esta propuesta. Si bien se logró evidenciar que un grupo se preocupaba extensivamente por el desarrollo, el grupo 2 tendió a resolverlo, también de forma correcta, pero en una sola línea y sin entregar mayor evidencia. Lo anterior enciende una alerta relativa a lo que se puede y debe observar en términos de construcción mental acción y la subsequente pregunta en torno a si los respectivos desarrollos permiten determinar un resultado satisfactorio.

III.VI Análisis por pregunta (segunda implementación 2019-01)

De la rúbrica:

G3	Esp. Muestral	Suceso	Suceso Independiente	Suceso Dependiente	Probabilidad Simple	Probabilidad Condicional	Resolver Problema	Representar	Argumentar y Comunicar	Modelar
E1	Acción	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P1	A	A	-	-	A	-	3	2	2	-
P2	P	A	-	-	A	-	3	2	2	2
P3	-	A	P	-	P	-	3	2	1	-
P4	-	-	-	A	P	-	2	2	1	-
P5	-	-	S/E	A	S/E	-	1	1	1	0
P6	-	-	-	P	-	A	3	3	2	-
P7	-	-	-	A	-	A	3	3	2	1

G4	Esp. Muestral	Suceso	Suceso Independiente	Suceso Dependiente	Probabilidad Simple	Probabilidad Condicional	Resolver Problema	Representar	Argumentar y Comunicar	Modelar
E1	Acción	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P1	P	P	-	-	P	-	3	2	1	-
P2	A	A	-	-	A	-	3	2	1	1
P3	-	A	O	-	P	-	3	2	2	-
P4	-	-	-	A	A	-	3	3	2	-
P5	-	-	A	A	A	-	3	3	1	1
P6	-	-	-	A	-	S/E	1	0	0	-
P7	-	-	-	S/E	-	S/E	1	1	1	1

A continuación, se analizan los datos obtenidos a partir de las respuestas de las estudiantes:

Pregunta 1

Si realizamos un sorteo.

¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar en el curso un líder cuyo nombre empiece con vocal?

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: calcular la probabilidad simple de un evento. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.

En la pregunta 1, ambos grupos de estudiantes respondieron de forma correcta. El grupo 1 no presentó mayores dificultades al implementar dos estrategias, una pictórica y otra numérica. No obstante, su trabajo se llevó a cabo a través de subgrupos independientes que, posteriormente, compartieron las soluciones, por lo que no se evidencia una socialización de las estrategias utilizadas. Por su parte, el grupo dos primero discutió grupalmente las estrategias antes de aplicarlas y determinó en conjunto la respuesta que más les satisfizo.

Se esperaba que las estudiantes respondieran esta pregunta al evidenciar una construcción acción o proceso, de acuerdo con la forma de sus respuestas. Sin embargo, sólo el grupo dos alcanzó el nivel proceso. Si bien el grupo 1 resolvió el ejercicio, al plantear el espacio muestral de manera pictórica y algebraica, no ofreció una explicación de las estrategias utilizadas, por lo que no es posible determinar la existencia de una diversificación de respuestas que dominen todas las integrantes. En el caso del grupo 2 es factible identificar el espacio muestral, pero este sólo fue utilizado en el desarrollo pictórico conjuntista que se llevó a cabo para construir la respuesta (única forma de resolución algebraica).

De acuerdo con lo anterior, y según la puesta en relación de esta propuesta, las estudiantes son capaces de movilizar la fluidez y la elaboración del proceso del pensamiento creativo. Por lo tanto, es posible afirmar que el presente ejercicio promueve el desarrollo de la creatividad.

Pregunta 2
Si realizamos un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad, al azar, de no sacar un estudiante del curso cuyo apellido empiece con consonante? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan. ***Intención: calcular la probabilidad simple del complemento de un evento. Se espera activar las propiedades del espacio muestral y del cálculo de probabilidades. Según cómo respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Es posible que puedan incluso evidenciar en sus respuestas el manejo a nivel de construcción mental objeto de espacio muestral. Podrían existir, en esta pregunta, otras dificultades como el trabajo con números decimales, pero esto se evidenciará en las respuestas que se den.***

En esta pregunta, ambos grupos de estudiantes resolvieron sin dificultad lo solicitado. Plantearon una estrategia de "casos favorables partido por casos totales" –aunque sin distinguirla como regla de Laplace–, tras calcular una división de enteros. El trabajo con números decimales no fue una dificultad para ninguno de los grupos y el uso de calculadora se volvió un instrumento útil y creíble en ambos casos. No obstante, debido a que uno de los grupos (G2) manifestó que "las calculadoras no se equivocan", no queda del todo claro si son capaces de comprender realmente lo que calcularon. En este ejercicio, es viable posicionar a las estudiantes, por lo menos, en la construcción acción de probabilidad simple.

El concepto de "complemento", como tal, no fue algo que emergiera de trabajo colaborativo, por lo que no se evidenció mediante este problema una concepción en torno a la acción del concepto. Por ende, las estudiantes movilizan la elaboración del proceso de pensamiento creativo y se promueve el desarrollo de la creatividad, pero sólo el grupo 1 permite evidenciar el nivel proceso en espacio muestral.

Pregunta 3

Si creáramos dos grupos:

A:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer nombre empieza con consonante}

B:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer apellido empieza con consonante}

v. ¿Existe una intersección entre ambos conjuntos? Si lo deseas, argumenta tu respuesta verificando con una representación gráfica como dibujo, esquema, bosquejo u otra.
vi. ¿Será lo mismo si el grupo "A" fueran los estudiantes cuyo primer nombre empiezan con vocal y el "B" los estudiantes cuyo primer apellido empieza con consonante?

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: esta pregunta evalúa las construcciones de los estudiantes en el contenido de espacios muestrales, así como el acto de representar los conjuntos e identificar la intersección de ellos y su cardinalidad. Según como respondan, debieran estar en construcción mental proceso u objeto, o bien, en vías de objeto de espacio muestral.

Ambos grupos hicieron diagramas de conjuntos, de acuerdo con lo indicado en el enunciado. Por lo tanto, la representación gráfica fue un punto de partida para el planteamiento de una solución en torno al problema. En esta pregunta, se visualizó que las estudiantes supieron confeccionar diagramas de conjuntos y que la actividad promovió el trabajo colaborativo, dado que se registró una mayor participación en ambos grupos. Si bien no se dieron instancias de argumentación formal entre pares, las participantes fueron capaces de socializar sus aportes personales para el desarrollo del ejercicio. Se evidenció también la promoción de la competencia matemática de comunicar y, por consiguiente, la originalidad colectiva en la formulación de la respuesta. En consecuencia, es posible posicionar a ambos grupos en una construcción mental en proceso respecto al espacio muestral.

A pesar de lo anterior, se observó en menor grado que las estudiantes consideraran importante la intersección de datos para el desarrollo de esta pregunta. Sólo se consideraron los casos válidos para generar la sucesiva consiguiente respuesta, pero no se exploraron otras estrategias que les permitieran solucionar el problema.

Pregunta 4

El profesor lanza un dado. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno de su grupo cuyo primer nombre comience con vocal dado que al lanzar el dado salga:

a. Un número mayor que 4
b. Un número impar

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: reconocer sucesos dependientes e independientes, plantear el problema y modelar el desarrollo. Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.

Tras leer con detención el problema, ambos grupos determinaron que lanzar los dados no influye en la respuesta. Es importante destacar esta conclusión, dado que se produjo una pausa en ambos grupos, en la que intentaron comprender bien el problema antes de resolverlo. En dicha instancia, además, las estudiantes fueron capaces de explicar y argumentar en torno a distintas posibilidades, hasta convencerse mutuamente de la no dependencia del resultado del dado.

Las reflexiones que demostraron ambos grupos permiten situar su construcción mental en proceso. No obstante, al momento de escribir la respuesta, dudaron respecto a lo previamente acordado y decidieron indicar las probabilidades asociadas al lanzamiento del dado. Referente a lo anterior, existe la posibilidad que esto sea una consecuencia directa del modelo educativo imperante en su trayectoria escolar, el cual las dirige constantemente a indicar de forma expresa todos los cálculos “por si acaso”. En consideración de lo anterior, es pertinente entonces posicionar su desempeño en términos de acción. Asimismo, debido a que las estudiantes resolvieron con éxito el ejercicio, y a través de distintas formas o representaciones, es posible constatar la fluidez y su respectiva puesta en relación con la creatividad.

Pregunta 5

Los estudiantes, por grupo, lanzan una moneda, si no sale sello vuelven a lanzar hasta obtener dos sellos consecutivos. Tras obtener los dos sellos consecutivos:

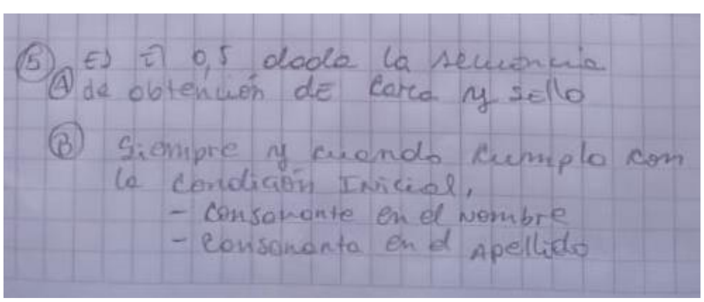
e. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno cuyo primer apellido comience con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

f. ¿Influye el resultado del lanzamiento del dado o el del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de las preguntas 4 y 5?

Intención: reconocer y resolver problemas, así como identificar que lanzar la moneda y la probabilidad de salir a la pizarra son sucesos independientes, por ende, no es una condición (modelar el desarrollo). Según como respondan, estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Adicionalmente, el estudiante deberá argumentar y comunicar su/s conclusión/es.

El grupo dos se percató de que el hecho de lanzar la moneda no influye en el cálculo de la probabilidad de la pregunta "a". Al mismo tiempo, se evidenció una predisposición a pensar más allá, en consideración de lo ocurrido en el problema anterior. Después de los últimos problemas y las conexiones realizadas, a pesar de que el cálculo ocurre de forma directa, sólo se registra una respuesta concreta de manera posterior a la discusión entre pares. El instrumento refleja que las estudiantes poseen la construcción mental acción, pero también que no desarrollaron un abanico de estrategias para el cálculo de la probabilidad.



Cabe mencionar que el grupo uno sorprendió con una respuesta difícil de comprender, en relación con lo que se había trabajado. Dicho grupo calculó la probabilidad de lanzar la moneda y, posteriormente, condicionó el lanzamiento de ésta. Por esta razón, ni siquiera fue posible catalogar esta respuesta en términos de construcción mental acción.

Pregunta 6 Determine el espacio muestral de todos los estudiantes del curso cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con vocal. Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan. ***Intención: se pretende determinar la construcción y restricción de espacios muestrales, además de determinar las intersecciones de acuerdo con la condición dada. Según lo que respondan, su construcción será una acción o un proceso.***

Ambos grupos de estudiantes abordaron con fluidez el problema. No obstante, se llevó a cabo una discusión matemática relativa a otras formas o representaciones posibles, que fue más allá de una gráfica (conjuntos). Se evidenciaron intentos de encontrar otra manera de modelar un camino para hallar la solución en consideración de los “casos favorables/casos totales”. La construcción del espacio muestral se llevó a cabo tras seguir las instrucciones del enunciado, por lo que dicho proceso se dio de manera automática. Por lo tanto, es posible enmarcar a ambos grupos de estudiantes en la construcción mental acción de espacio muestral de probabilidad condicional. Ahora bien, cabe precisar que el grupo 2 equivocó en la condición.

Las respuestas obtenidas en este ejercicio son las más escuetas en términos de desarrollo de habilidades matemáticas y creatividad. A diferencia de la primera vez que se implementó la respectiva pregunta número 6 de la presente propuesta didáctica, ahora no se logró apreciar la utilización de distintas formas gráficas para resolver el problema con éxito. Pese a lo anterior, el intento grupal por buscar otras representaciones se pudo relacionar con el pensamiento creativo de originalidad.

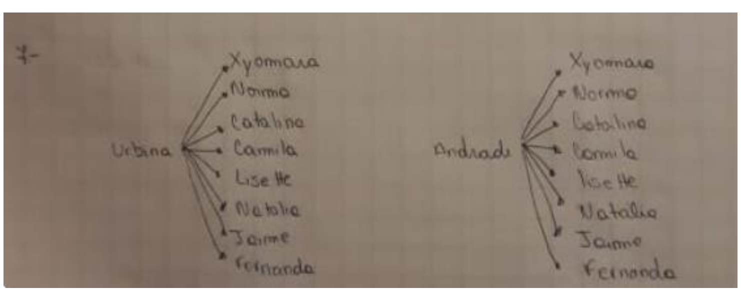
Pregunta 7

Determine la probabilidad de que sea seleccionado un estudiante cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intención: se pretende que identifiquen sucesos dependientes, al tener la construcción proceso de sucesos dependientes e independientes. Estos se coordinan para dar una resolución al problema. Es posible calcular la probabilidad condicional solicitada, si el estudiante determina que la probabilidad corresponde a sucesos dependientes identificables con una intersección de conjuntos, además de identificar y justificar la respuesta, tras realizar una reversión de espacio muestral (restringiéndolo) y explicar la restricción del espacio muestral a los individuos que cumplen con ambas condiciones.
Asimismo, será evidenciable si se mide la interiorización de la acción de cálculo de probabilidad condicional con el proceso suceso dependiente, de modo que se visualiza la necesidad de contar con dicha condición para la probabilidad condicional.
Finalmente, se espera que el estudiante analice la coordinación de los elementos, producto de la reversión (desencapsulación) de sucesos. Esto ocurre solo si los alumnos lo representan, por ejemplo, en un diagrama de Venn y comprueban la intersección vacía o no vacía de los sucesos.

En esta pregunta, el grupo uno identificó y manifestó los casos en los que se cumplía la condición del problema sin la necesidad de utilizar una fórmula algebraica. Por consiguiente, su construcción mental de probabilidad condicional se encuentra en términos de acción. Contrario al caso anterior, el grupo dos no logró desarrollar el problema y planteó una relación difícil de comprender, que no permite posicionarlas en el nivel acción.



Este problema de probabilidad condicional fue, sin duda, el que deafió en mayor medida a las estudiantes. A diferencia de la primera vez en que se implementó, no se evidenció en las respuestas de las estudiantes un desarrollo del pensamiento creativo. Sin embargo, la conversación entre pares establecida para su resolución dista bastante de la aplicación anterior. A través de las notas de campo, registradas de forma simultánea al trabajo de las estudiantes, se registró una enriquecida visión y un amplio uso de lenguaje matemático al momento de comunicar las ideas y resultados con el grupo.

Finalmente, tras lo observado durante la implementación y en atención al desempeño de las estudiantes descrito en el análisis por pregunta de ambas implementaciones de la propuesta didáctica, es posible establecer que:

- Las estudiantes fueron capaces de resolver los problemas propuestos de manera satisfactoria. En pocas ocasiones estos fueron resueltos de dos formas distintas, por lo que no es posible establecer de manera generalizada esta observación para todos los desafíos propuestos. En las respuestas, y específicamente en el trabajo colaborativo registrado durante la implementación, las estudiantes mostraron dos a tres ideas claras para resolver los problemas, por lo que es factible asociar esta tendencia con la habilidad creativa de originalidad. Por lo demás, se observó que tras la socialización entre pares se tomaron acuerdos para intentar uno o dos de los caminos discutidos como estrategias de resolución, pero que las estudiantes siempre registraron "la mejor respuesta" y no "las mejores respuestas" o "los diferentes caminos".
- Las estudiantes fueron capaces de argumentar y comunicar sus respuestas cuando el implementador se acercaba y realizaba consultas para verificar la consolidación de sus resultados. Tanto en la forma de compartir sus resultados entre ellas como al momento de socializarlos con el implementador, se logró detectar un desarrollo de la habilidad de elaboración, identificable por la forma en cómo las integrantes del grupo complementaban la información entregada, con la finalidad de ofrecer una mejor explicación de su trabajo. No obstante, en las preguntas 6 y 7 lo anterior se registró con un menor grado de consistencia y seguridad.
- La competencia representar fue ampliamente lograda por las estudiantes. Ellas usaron distintos tipos de registros, tanto para las estrategias utilizadas para llegar a una respuesta como para consolidar la respuesta en sí misma. Con ello, la habilidad fluidez quedó evidenciada en la facilidad con la que expusieron sus respuestas, puesto que usaron diversas herramientas, tales como registros gráficos, lenguaje matemático formal (algebraico) y coloquial.

- La competencia matemática modelar fue escuetamente abordada por las estudiantes. La interiorización fue poco profunda y respondió más bien a intentos de representar diversas formas para comprender el problema. Asimismo, cuando sí se detectó la existencia de una interiorización, ésta no se materializó en un modelo que efectivamente se usara para los problemas o desafíos siguientes.

Habilidad Creativa / Competencia Matemática	Inicial	En Proceso	Avanzado
Resolver Problemas (Originalidad)	Se aprecia gran dificultad para entender el problema, así como para solucionarlo; o bien, no logra hacerlo	Comprende lo que se le pregunta y esboza una estrategia para solucionarlo	**Comprende y resuelve lo solicitado por medio de dos o más estrategias**
Argumentar y Comunicar (Elaboración)	Justifica débilmente sus avances, o bien, no es capaz de justificar su trabajo	**Comunica su respuesta, pero presenta dificultades para argumentar justificadamente sus procedimientos**	Comunica y argumenta con lenguaje propio sus estrategias y resultados
Representar (Fluidez)	No es capaz de representar lo que se solicita, o bien, lo logra representar de forma errada	Logra realizar una transición entre representaciones. Eventualmente, logra realizarlo bidireccionalmente	**Logra realizar dos o más representaciones de lo solicitado, transitando incluso bidireccionalmente**
Modelar (Flexibilidad)	No es capaz de interiorizar el problema, en consecuencia, no simplifica la idea central para lograr una generalización	**Es capaz de realizar un proceso de interiorización en el que esboza una estrategia con dificultades en la materialización para su uso en otras instancias**	Interioriza la estrategia de resolución al problema y realiza un modelo o estrategia, poniéndola a prueba en otras circunstancias y viendo cómo responde ante diferentes factores

Al comparar este cuadro con el obtenido tras el test Torrance, se logra visualizar una movilización de las habilidades creativas y del uso de éstas para lograr abordar los problemas con éxito. En consecuencia, existe una movilización del uso de las competencias matemáticas, lo que conlleva un aprendizaje más significativo y enriquecedor para el estudiante.

Pre

Habilidad Creativa / Competencia Matemática	Inicial	En Proceso	Avanzado
Resolver Problemas (Originalidad)		**G1 G2**	
Argumentar y Comunicar (Elaboración)		**G1 G2**	
Representar (Fluidez)		**G1 G2**	
Modelar (Flexibilidad)	**G1 G2**		

Post

Habilidad Creativa / Competencia Matemática	Inicial	En Proceso	Avanzado
Resolver Problemas (Originalidad)			**G1 G2**
Argumentar y Comunicar (Elaboración)		**G1 G2**	
Representar (Fluidez)			**G1 G2**
Modelar (Flexibilidad)		**G1 G2**	

Capítulo IV: DISCUSIÓN Y SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA

El trabajo realizado se centra en dos focos. Por un lado, la puesta en relación entre las habilidades matemáticas y el pensamiento creativo. Por otro, validar la descomposición genética a través de una propuesta didáctica que estudia el nivel de conocimiento, cognición y actitudes de los estudiantes de la muestra, bajo el contenido probabilidad condicional y enmarcado en la teoría didáctica APOE/APOS. Mediante la investigación realizada, la propuesta didáctica planteada y el análisis de los resultados es posible apreciar un desarrollo de los focos planteados.

El abordar la creatividad en la clase de matemática a través del plantemiento de escenarios concretos, es un foco de discusión para el cual resulta necesario un marco de referencia o la delimitación de elementos que tributen y esclarezcan su relación intrínseca. Lo abordado en este trabajo apunta a poner en relación las variables de logro y desarrollo de la creatividad según Torrance, con las habilidades matemáticas, que son la columna vertebral de los planes y programas curriculares nacionales.

Desde que se inició esta tesis a la actualidad, ha crecido notablemente el interés del desarrollo del pensamiento creativo en los estudiantes (PISA, 2018) a nivel nacional e internacional, por lo que al ser un tema absolutamente vigente no se descarta que existan otras propuestas que también aborden de forma eficaz la interrogante de esta investigación. Pese al creciente interés internacional en torno a cómo desarrollar el pensamiento creativo en la enseñanza de la matemática, en las universidades chilenas recién se está registrando un potente esfuerzo para promover cambios curriculares orientados al desarrollo de habilidades y competencias –ya sea en términos de formación inicial o a nivel de prosecusión de estudios universitarios (posgrados y postítulos).

Respecto al segundo foco, el de la descomposición genética, se considera que, si el estudiante sólo maneja el concepto de espacio muestral, se encontrará a nivel de acción (N1). Si el estudiante, además, interpreta datos y el concepto de probabilidad simple –(N2) y (N3), respectivamente– se encuentra a nivel de proceso o en vías de proceso. Consecuentemente, el cálculo de la probabilidad condicional de una situación dada será el indicador (N4) y, si su manejo se efectúa de manera cabal, entonces se asocia a un nivel de objeto o en vías de objeto. Ahora bien, el nivel de manejo del objeto matemático en cuestión se medirá como logro, sólo cuando este se encuentre en su construcción mental y esté a nivel acción. La interpretación y lectura de un gráfico o boceto relacionado con una interpretación de probabilidad condicional (N5) se establece como nivel proceso. Por lo tanto, si bien lo anterior no se procesa en esta propuesta, es plosible establecer que el estudiante posee un nivel esquema de la probabilidad, siempre y cuando comprenda su aplicación a situaciones cotidianas.

Tras la revisión de la primera parte de la propuesta didáctica, es posible apreciar una correcta resolución de los ejercicios de probabilidad simple y una confección de diagrama de Venn, lo que demuestra un nivel de logro importante en cuanto al manejo a nivel objeto de *suceso* y *espacio muestral*. En relación con el concepto de *suceso independiente*, se registra un manejo a nivel proceso, el cual además se confirma más adelante a partir de la utilización de herramientas presentes en la pregunta relativa a este tema y también en ítemes posteriores. No obstante, el no evidenciar más de una forma de resolución permite concluir que las informantes no poseen un manejo objeto del concepto matemático. Un hecho importante relativo a esta consideración es que en el ejercicio 7, un problema de probabilidad condicional pura, los resultados registrados en la primera muestra arrojaron un conjunto vacío. Si bien es cierto que ésta es una posible solución para el caso, en el momento de la aplicación se consideró un resultado poco práctico para la verificación empírica de la probabilidad condicional. Producto de lo anterior, se decidió manipular la situación y se creó el grupo tres (el de los profesores), al que además se le agregó una persona ficticia, lo cual implicó que el espacio muestral de N = 10 cambiara a N = 11.

La relación de la visión de APOE de las matemáticas con respecto al desarrollo de la creatividad no se encuentra documenta. Sin embargo, sabemos que al momento de iniciar la "enseñanza" de las matemáticas se debe ser conscientes de la curiosidad natural de los jóvenes y, por ello, es necesario otorgar espacios e instancias en las que descubran la matemática. Más aún, este estudio demostró que las informantes fueron capaces de generar un trabajo colaborativo, al describir, ordenar o clasificar sus observaciones, sus actividades, sus preguntas y sus resultados; también al discutir, argumentar y tomar decisiones respecto a los modos de llegar a los respectivos resultados.

El docente es el guía de la enseñanza de las matemáticas, por lo que al momento de crear una actividad basada en APOE, que se encuentre enmarcada en dar cumplimiento a los campos de interés de los jóvenes y entrelaza al un contenido matemático relevante, nace la posibilidad de desafiar a los jóvenes y direccionar soluciones creativas individuales y grupales. Esto es precisamente lo que se logra con la propuesta planteada, guiar los enfoques intuitivos, inconscientes, globales, espontáneos y visuales en las discusiones de trabajo en equipo, con la finalidad de seguir discutiendo y desarrollando el pensamiento matemático.

A continuación, se caracteriza el aspecto general de las y los profesores de enseñanza media (1ro a 3ro medio) que realizaron o realizan clases de matemática a las estudiantes que participaron del presente estudio (tabla 1):

	Edad	Sexo	Haces clases en 3ro medio (2018)	Hizo clases el 2017 a los actuales 3° medios	Antigüedad en el liceo
Docente 1	28	F	Sí	Sí	4 años
Docente 2	36	M	No	Sí	3 años
Docente 3	30	M	Sí	Sí	3 años

Tabla 1 – Elaboración propia

La caracterización anterior fue complentada con una escala de apreciación aplicada a los mismos docentes en torno a las creencias de las estudiantes del Liceo Politécnico Sara Blinder Dargoltz. Los docentes respondieron a cada una de las aseveraciones planteadas en el marco de una entrevista realizada en diciembre del 2018. Los respectivos números registrados corresponden a la frecuencia de la respuesta de los 3 docentes consultados y se sintetizan en la siguiente tabla:

ESCALA DE APRECIACIÓN (en relación con sus mejores estudiantes)				
Preguntas	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Completamente de acuerdo
Las estudiantes manejan conceptos estadísticos de tendencia central		2	1	
Las estudiantes trabajan colaborativamente			2	1
Las estudiantes ponen en práctica un uso de lenguaje matemático de forma	2	1		
Las estudiantes manejan el concepto de probabilidad	1	2		
Las estudiantes reconocen una probabilidad condicional	3			
Las estudiantes discuten problemas matemáticos en clases		3		
Las estudiantes tienen una activa participación en la construcción de definiciones de objetos matemático de forma	3			
Las capacidades para argumentar las soluciones a las actividades matemáticas que realizan sus estudiantes son	2	1		
Las estudiantes son capaces de encontrar múltiples estrategias para resolver las tareas asignadas	2	1		
Las estudiantes son capaces de usar distintos registros o representaciones para comunicar sus respuestas (Probabilidad)	1	1	1	

Tabla 2 - Fuente: desarrollado por el autor

Tras la entrevista semiestructurada realizada a los docentes que hicieron clases de matemática durante la enseñanza media de las participantes del presente estudio, se observa que sus apreciaciones o creencias apuntaban a un escaso desarrollo de habilidades creativas, así como también a un bajo dominio de los conceptos matemáticos y, específicamente, respecto al de probabilidad. Los docentes manifestaron dudas en torno a la capacidad de las estudiantes para construir de estrategias frente a determinados problemas, al tiempo de cuestionar su capacidad para establecer colaborativamente definiciones de objetos matemáticos. Respecto al desarrollo de las habilidades matemáticas, los profesores indicaron que poseían una baja confianza en torno a la idea de que éstas se encontraran desarrolladas en sus estudiantes. Por consiguiente, existía una duda generalizada relativa a la capacidad de poner en práctica dichas habilidades matemáticas. En resumen, es posible detectar una escasa confianza por parte del cuerpo académico respecto al dominio de conceptos u objetos matemáticos por parte de las estudiantes, así como también bajas expectativas relativas al desarrollo de habilidades y el dominio disciplinar.

La propuesta didáctica construida basada en el modelo APOE (APOS) ha permitido evidenciar las etapas logradas por cada grupo de estudiantes, tanto en términos de representación como en relación con la argumentación y la resolución de problemas. No obstante, la modelación es, para este estudio, una competencia matemática no lograda del todo. Sin embargo, y dada la puesta en relación de las competencias matemáticas con las áreas del pensamiento creativo (fluidez, elaboración, flexibilidad y originalidad), es posible concluir de manera satisfactoria que sí existió una estimulación de la creatividad. Además, las actividades propuestas cumplieron distintas funciones, según las habilidades personales y experiencias previas de las estudiantes.

IV.I LIMITACIONES

A partir de los datos obtenidos y el análisis realizado es factible concluir que la propuesta didáctica permitió evaluar la viabilidad de la descomposición genética. No obstante, también es preciso mencionar las limitaciones que la presente propuesta demostró:

- La primera es que, al implementar por primera vez la propuesta didáctica, se detectó la necesidad de aplicar ajustes al instrumento (propuesta didáctica). Específicamente, se modificó la pregunta 3, dado que se detectó que ésta intervenía (intenciona) en la estrategia que pudiera ser utilizada para dar respuesta a la pregunta 7. Por su parte, esta última pregunta, también durante la primera implementación, presentó problemas de resolución: la concepción de "no hay casos que cumplan" se impuso en el aula, dado que la respuesta era conjunto vacío. Si bien es cierto el ítem 6 permite vislumbrar un desarrollo cognitivo nivel acción según la Dg_2, al realizar cambios en la propuesta didáctica e implementarla por segunda vez, se observa que sí se dio una mejor respuesta a dicha descomposición genética, lo que permite validarla con mayor solidez.
- Una segunda limitación es la dificultad para generalizar los resultados, dado que la Dg_2 depende de la muestra y, por ende, responde a sólo el grupo de estudiantes participantes del estudio clínico. Es un buen comienzo, pero se deja para una futura investigación la posibilidad de validarla con todos los cursos del mismo liceo.
- Una tercera limitación es que dicho liceo, al ser técnico profesional, posee escasos espacios para realizar una actividad matemática enriquecedora y productiva para las estudiantes. Los sistemas didácticos deben trascender a las acciones netamente formativas y dar acceso a los estudiantes a instancia productivas. Lo anterior se encuentra fuertemente mermado por las escasas 3 horas pedagógicas a la semana que se disponen para los procesos didácticos de aprendizaje de la matemática; horas que, por cierto, son sugeridas desde el MINEDUC.
- Una cuarta limitación es que los docentes poseen bajas expectativas sobre el desempeño de sus estudiantes. Si bien en esta investigación no se analiza en profundidad lo recopilado a través del cuestionario de creencias, este sentir es consecuente con las investigaciones de Bernardo Lara (Lara, Mizala, & Repetto, 2010), quien relaciona las bajas expectativas con la obtención de peores desempeños en los estudiantes a lo largo de todo el proceso de enseñanza aprendizaje. Esto último se ve reflejado también en las actividades didácticas que los docentes planifican y realizan, así como en la gestión de aula que finalmente ejecutan.

- Una quinta limitación concierne al tipo de currículum y las estrategias de enseñanza dominantes/imperantes en Chile, cuyas limitaciones fueron inicialmente difundidas por Pascual Kelly (Pascual Kelly, Racionalidades en la producción curricular, 1998) y confirmadas por las recientes investigaciones de Carlos Ruz Fuenzalida (Ruz Fuenzalida, 2019). A partir de estas pesquisas, se evidencia que la frontalidad de las clases –mayoritariamente expositivas– y la entrega del conocimiento acabado, no genera/abre espacios para la discusión, el debate y la producción autónoma por parte de los estudiantes.

Si bien es cierto que la Dg_2 se puede validar con la propuesta didáctica 2, se reconoce la necesidad de aplicar mejoras y generar una eventual propuesta didáctica 3. Un posible cambio es incorporar en la pregunta 7 la solicitud de que *"especifiquen por qué se puede resolver de la forma en que lo hacen"*. En otras palabras, solicitar de forma más directa que argumenten matemáticamente su respuesta y, principalmente, que utilicen un registro concreto. Esta acción fue realizada por el investigador/implementador con la finalidad de validar las respuestas y movilizar la argumentación y comunicación de las soluciones de las estudiantes. Particularmente, hacia el final de la implementación se conversó con las informantes y se detectó una debilidad al momento de verbalizar argumentativamente la estrategia elegida para la resolución del problema –hecho preocupante si consideramos que ésta había conducido a un resultado correcto. Lo anterior se encuentra alineado con la Dg_2, dado que entrega la evidencia necesaria para posicionar la construcción acción del concepto probabilidad condicional, pero a la vez limita la posibilidad de detectar una construcción mental distinta, ya sea en los ámbitos de proceso y objeto, o bien, en vías de proceso o en vías de objeto.

Capítulo V: CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

En primer lugar, es prudente destacar el clima de aula que se dio durante las implementaciones: motivador y dinámico, con poca o nula distracción, una sala con espacios adecuados para el trabajo. Algo importante fue que los grupos de estudiantes mostraron gran interés y desarrollaron un constante trabajo colaborativo durante el tiempo de la implementación. Se destaca especialmente el trabajo argumentativo, la discusión de los ejercicios y sus formas de resolución, así como la refutación de las respuestas que se proponían entre las estudiantes y el hecho de que estuvieran constantemente hablando de matemática y utilizando un lenguaje matemático.

Como conclusión fuerza (general) se encuentra la validación de la descomposición genética Dg_2 basada en APOE, dado que se lograron evidenciar desempeños de logro en estudiantes de un colegio técnico profesional con una débil formación en la disciplina y con intereses marcadamente no matemáticos. Es decir, la Dg se valida en un ambiente no favorable y logra poner en movimiento los conocimientos previos de las estudiantes para que sean capaces de realizar el cálculo a nivel acción de la probabilidad condicional. Se logra mostrar que es posible movilizar las habilidades creativas de los estudiantes con una propuesta basada en APOS/APOE y gestionada según la propuesta didáctica durante el proceso. Esto es, proporcionar espacios para el trabajo colaborativo, la gestión de tiempos para promover el trabajo autónomo (al no dar las respuestas de manera inmediata), fomentar los espacios dialógicos entre estudiantes y estimular la interacción entre pares.

No obstante, cabe precisar que siempre será favorable retestear el instrumento o realizar una validación en un grupo más grande, pero esta acción se deja abierta para quien desee continuar esta investigación.

Respecto a las conclusiones de las implementaciones de la propuesta didáctica, ambos grupos llegaron en la etapa II y entregaron respuestas para las 7 preguntas planteadas. El análisis de los resultados permite indicar de forma concluyente que las informates lograron un dominio en torno la probabilidad condicional en un nivel más allá de Acción.

Dentro de los sesgos detectados, se encuentra el hecho de haber solicitado, en la primera muestra (2018-02), un diagrama de Venn en la pregunta 3. Este requerimiento pudiera haber influido en que, finalmente, la pregunta de probabilidad condicional pura (número 7) interfiriera con las respuestas otorgradas por las estudiantes; se observó que las informates tendieron a utilizar el mismo camino “sugerido en la pregunta predecesora”, lo que determinó una posible inducción a la respuesta brindada para la pregunta 7.

La etapa II, realizada en abril de 2019, incluye algunas adecuaciones a las preguntas planteadas, tales como no intencionar la realización de un diagrama de VENN y la estructuración del grupo control (ficticio de 4 profesores) para evitar resultados con conjunto vacío como solución. Al implementar la propuesta, se detectaron claros espacios en los que las estudiantes mostraron su capacidad de argumentar y comunicar respecto a su trabajo, creencias y por sobre todo aprendizajes. No obstante, la mayor riqueza se obtiene al presenciar lo ocurrido, pues se detecta la necesidad de trabajar, a lo menos, con grabadora de audio en esta etapa. Es más, se intuye que la forma óptima sería grabar la sesión con video, con el objetivo de posteriormente realizar un análisis directo de lo vivenciado.

Dichas estrategias habrían aportado al análisis de lo que se presenció durante la segunda etapa, en la que se registró un aumento de la discusión matemática. Este hecho, además, permitió detectar y evaluar su área actitudinal valórica de forma más empírica, principalmente respecto al estado y sentimiento de pertenencia de equipo, las estrategias de resolución de los problemas, así como la argumentación ofrecida para determinar las respectivas estrategias y acuerdos.

En la implementación de esta propuesta, ambos grupos finalizaron dentro de los plazos establecidos, dado que pudieron entregar respuestas para todos los ejercicios. En el análisis de los resultados, se observó un manejo de la probabilidad condicional en un nivel Acción en tres de los cuatro grupos, pues estos manejaron la información de manera adecuada y determinaron la probabilidad condicional solicitada. Al haberse mejorado la propuesta didáctica, se pulieron los sesgos de la primera implementación y, por lo tanto, es posible considerarla como una actividad exitosa.

Una conclusión importante respecto a APOE es que, el pensar en situaciones o problemas enfocados en el nivel acción, se dificulta o no se permite el desarrollo de la creatividad en algunos casos. El nivel acción se relaciona con perseguir más bien una conceptualización automatizada y de baja evidencia en su desarrollo. Además, el uso de estrategias y representaciones refieren más a un dominio que no es evidente ni se muestra necesariamente enriquecido. No ocurre lo mismo con problemas enfocados a niveles proceso u objeto, los cuales sí permiten relacionar contenidos, presentar diversidad de estrategias y, con ello, desarrollar la creatividad.

Una conclusión global relativa al uso de este modelo es que, a pesar de las dificultades de comprensión de algunos conceptos básicos y teóricos, definidos a nivel de acción, los estudiantes alcanzaron aprendizajes de nivel superior, debido a que relacionaron e integraron conceptos en torno a la probabilidad condicional –lo anterior, cabe destacar, sin la utilización de una forma algebraica tradicional para su cálculo. Esta conclusión, sobre la capacidad innata de los estudiantes de relacionar contenidos matemáticos en una instancia en la que son conducidos de forma adecuada, coincide con la de propuesta de Artigue, presentada en su estudio sobre del cálculo (integral) (Artigue, 1995).

Se percibe, al igual que en el estudio de Vásquez & Parraguez (2009), la característica de no linealidad del aprendizaje. Los estudiantes poseen conceptos matemáticos en diferentes construcciones mentales, por lo que la abstracción reflexiva grupal que se generó y observó es uno de los pilares para la deconstrucción y reconstrucción del concepto matemático probabilidad condicional (procesos de encapsulación y desencapsulación) (Parraguez & Vázquez, 2014). Se observó también que la concepción de conceptos matemáticos como la probabilidad, puede mostrar una idea específica para explicarse y, si se agregan otros elementos como los espacios muestrales, relacionados con la forma gráfica de una función probabilidad, se percibe que estos son combinados e integrados por parte de los estudiantes al nivel de una concepción de probabilidad.

El desear desarrollar la creatividad, de la mano con evidenciar el fortalecimiento de las competencias matemáticas, hace que el trabajo colaborativo sea enriquecedor en el marco de una propuesta didáctica construida en base a APOE. A través de esto, se logra evidenciar la comprensión y desarrollo de los conceptos matemáticos y su construcción mental; los jóvenes saben, aprenden, discuten, argumentar, calculan y trabajan en grupo, para construir nuevos conocimientos. Es así como las preguntas, además de estar relacionadas unas con otras, presentan una fortaleza derivda de la intencional relación entre los niveles cognitivos, las actividades conectadas con las emociones y el trabajo colaborativo.

Además de la validación de la descomposición genética, el trabajo muestra que, con una determinada organización de la actividad matemática y una determinada gestión de aula en el proceso, los estudiantes pueden movilizar sus habilidades creativas a través del fortalecimiento de las competencias. En este mismo ámbito, es posible dentro del proceso educativo el desarrollo de las construcciones mentales necesarias para generar la concepción probabilidad condicional a nivel de acción –con la opción de también alcanzar un dominio en el nivel vías de proceso o proceso. Ahora bien, es necesario que los profesores se enfoquen en el desarrollo de la creatividad en los estudiantes, a través de la resolución de problemas y la estimulación del desarrollo de las habilidades/competencias matemáticas, ya presentes en todo estudiante de tercer año de enseñanza media.

Asimismo, se evidencia que los estudiantes desarrollan la capacidad de resolver los problemas de probabilidad condicional, sin contar con herramientas algebraicas estructuradas como la regla de Laplace. Si bien es probable que no aprendieran algoritmos de probabilidad condicional desde una perspectiva de función probabilidad ni desde su algoritmo algebraico, la finalidad del estudio es medir el conocimiento de estructuras algebraicas para la resolución de los problemas propuestos y no su conocimiento formal matemático. Así, las estudiantes son capaces de identificar la probabilidad simple y la condicional, además de realizar el cálculo diferenciando entre ambos tipos de probabilidades. Por ende, es factible determinar que pueden identificar la existencia de una condición y restringir el respectivo espacio muestral.

Siguiendo el caso del teorema de Bayes, es necesario asegurarse de que las estudiantes conozcan la razón de las funciones de probabilidad que nos plantean. De lo contrario, la justificación otorgada es vaga y, probablemente, de trabajar individualmente, habría estudiantes que ni siquiera intentarían resolver los ejercicios. Esto se explica porque los estudiantes, pese a tener una concepción acción o acción en vías de proceso del teorema de Bayes, realmente no saben lo que saben; lo manejan y operan de forma intuitiva, pero solo al momento de socializar sus ideas son capaces de afirmarlas y confirmarlas. Es más, incluso mediante ejemplos sencillos, como el lanzamiento de una moneda o de un dado, es posible visualizar ante los estudiantes que efectivamente poseen conocimientos formales, los cuales han sido aprendido a lo largo de los años.

Un aporte de los profesores a la enseñanza de la matemática o matemática educativa es fomentar que los estudiantes cuestionen aquello que, muchas veces, se cristaliza de forma memorística, lo que impide analizar en detalle y/o continuar la resolución. Una técnica de trabajo establecida en esta investigación, y que logró superar eso, fue el trabajo colaborativo.

Dentro de las posibles proyecciones, se deja como tarea validar de manera más amplia la descomposición genética, con la finalidad de evaluarla y compararla con la estudiada en el presente trabajo. Probablemente, al complementarla en base a los datos que se puedan obtener, se genere una descomposición genética mejorada que aporte con mayor ímpetu a la enseñanza de la probabilidad condicional. Así también, pese al alto porcentaje de viabilidad en términos de descomposición genética inicial, los resultados obtenidos resultan incompletos, debido a que algunas preguntas de la propuesta intencionaban la resolución de otras, o bien, algunas no poseían una orientación absolutamente clara. Si bien estos aspectos se corrigieron en la segunda implementación, una tercera versión de la propuesta didáctica es necesaria para avanzar en la validación del instrumento.

Con lo anterior, podemos concluir que, en primera instancia, las construcciones y mecanismos necesarios en los estudiantes para aprender probabilidad condicional se encuentran relacionados con las propuestas de descomposición genética. Así, los conocimientos y estructuras previas resultan fundamentales para generar el objeto de probabilidad condicional. Tras ello, se pudo comprobar que las actividades, efectivamente desarrolladas, evidencian la utilización de competencias matemáticas, como argumentar y comunicar, resolver problemas y representar. Ahora bien, en términos objetivos, la competencia que menos se evidencia en las estudiantes es la de modelar, aunque ésta se encuentre presente en ambos grupos al momento de desarrollar problemas específicos. De esta manera, y tras la puesta en relación de las formas de medición del pensamiento creativo según Torrance, efectivamente podemos asegurar que las estudiantes del estudio clínico desarrollaron áreas de pensamiento creativo como la flexibilidad, fluidez, originalidad y elaboración.

Finalmente, se espera que esta investigación sea un aporte al campo, al presentar un modelo de estrategia que potencie la creatividad en los estudiantes, a través de la enseñanza de la matemática y, específicamente, del aprendizaje de probabilidad condicional. El componente propositivo de esta investigación surge a partir de la creencia de que profesores e investigadores nos apoyemos al difundir lo investigado y mejoremos con las experiencias de otros profesionales.

BIBLIOGRAFÍA

Artiles Hernández, C., Jiménez González, J., Rodríguez Rodríguez, C., & García Miranda, E. (2007). *Adaptación y baremación del test de pensamiento creativo de Torrance: expresión figurada. Educación Primaria y Secundaria.* Gobierno de Canarias: Producciones Gráficas S. L.

Agencia de Calidad de Educación. (abril de 2019). *Agencia de Educacion*. Obtenido de https://www.agenciaeducacion.cl/practicas_educativas/estrategias-innovadoras-desarrollo-del-pensamiento/

Agencia de Calidad de la Educación. (2016). *Panorama de la educación media técnico profesionalen Chile.* Santiago de Chile: Agencia de Calidad de la Educación.

Aguilera Luque, A. M. (Junio de 2017). *Researchgate.* Obtenido de El pensamiento El pensamiento divergente: ¿Qué papel juega creatividad?: https://www.researchgate.net/publication/318458216_El_pensamiento_El_pensamiento_divergente_Que_papel_juega_creatividad

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 97-140). México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime Vol.8*, 247-263.

Borromeo, F. R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik JMD*, 99-118.

Cano, E., Barrios, R., Cabrera, N., & Et All. (2010). *Buenas Prácticas en la Evaluación por Competencias.* Barcelona: Laertes Educación.

Castro, H., Ortega, J., Villarroel, J., & Contreras , C. (2019). Determinación de pensamiento creativo en estudiantes de medicina de una universidad chilena. *Revista médica de Chile147(3)*, 372 - 377.

Catalán Navarrete, D., Pérez Ureta, B., Prieto Córdoba, C., & Rupin Gutiérrez, P. (2018). *Matemática 8vo .* Santiago: SM.

Centro Interuniversitario de Desarrollo. (2011). *CINDA.* Santiago de Chile: Grupo Operativo de Universidades Chilenas Fondo de Desarrollo Institucional – MINEDUC – Chile. Obtenido de El Proceso de Transición Entre Educación Media y Superior Experiencias Universitarias. Santiago.

Chacón Aguirre, A., García Castillo, G., Rupin Gutiérrez, P., Setz Mena, J., & Villena Ramírez, M. (2018). *Matemáticas 2do medio.* Santiago: SM.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education Vol. 2 No. 2 - REDIMAT*, 161 - 182.

Consejo Nacional de Educación. (23 de 11 de 2017). *CNED.* Obtenido de Actas de sesiones: https://www.cned.cl/actas-de-sesiones

Consejo Nacional de la Cultura y las Artes. (2011). *Estudio Piloto Medición de Impacto programa Fomento de la Creatividad.* Santiago de Chile: Centro de Micro Datos Universidad de Chile.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking*, 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva Piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, Vol 8*, 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 47-70.

Entrena Martínez, I. (2015). Aprender a Matematizar Matematización como medio y no como fin. AIRES: Avances en Innovación e Investigación. *Revista de Educación Secundaria, Volumen 5.*

Fernández Bravo, J. (2010). Neurociencia y Enseñanza de la Matemática - Prólogos de algunos retos educativos. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-12.

Flaherty, A. (2005). Frontotemporal and dopaminergic control of idea generation and creative drive. *The Jpurnal of Comparative Neurology*, 147-153.

Galasso Díaz, B., Maldonado Rodríguez, L., & Marambio Fuentes, V. (2018). *Matemáticas 1ro medio.* Santiago: Santillana.

Galasso Díaz, B., Maldonado Rodríguez, L., & Marambio Fuentes, V. (2018). *Matemáticas 1ro medio.* Santiago: Santillana.

Galtung, J. (1999). *Tras la violencia, 3R: reconstrucción, reconciliación, resolución : afrontando los efectos visibles e invisibles de la guerra y la violencia.* Bilbao: Gernika Gogoratuz.

García, M. C. (2002). Estudio de Validez del Test de Apropiación para la Creatividad (T.A.C.), Dentro del Contexto de una Enseñanza Orientada al Logro de un Aprendizaje en Profundidad para Crear. *Psykhe*, 69 - 85.

Guilford, J. (1950). *Creativity.* New York: The American Psychologist.

Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una Trayectoria Longitudinal Sobre Porcentaje. *Certidumbres e Incertidumbres*, 36-44.

Ho Kheong, D., Kee Soon, G., & Ramakrishnan, C. (2018). *Matemática 5to .* Santiago: MC - Marshall Cavendish.

Krumm, G. (2014). Factor Structure of the Torrance Tests of Creative Thinking Verbal Form B in a Spanish-speaking Population. *Journal of Creative Behavior*, 150 - 164.

Ku, D., Trigueros, M., & Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, Vol.20*, 68-89.

Lara, B., Mizala, A., & Repetto, A. (2010). Una Mirada a la Efectividad de los Profesores en Chile. *Centro de Estudios Públicos (CEP)*, 147-182.

Llinás Riascos, R. (2003). *EL CEREBRO Y EL MITO DEL YO: PAPEL DE LAS NEURONAS EN EL PENSAMIENTO Y COMPORTAMIENTO HUMANOS.* Barcelona: Belacqua.

López Pérez, R. (2009). *Prontuario de la creatividad.* Santiago, Chile: Bravo y Allende Editores.

Merino Leyton, R., Muñoz Correa, V., Pérez Ureta, B., & Rupin Gutiérrez, P. (2018). *Matemática 7mo (Texto del estudiante).* Santiago: SM.
Millar, G. W. (1995). *E. Paul Torrance, "the Creativity Man": An Authorized Biography.* Norwood: ISBN 1-56750-165-6.
MINEDUC - Ministerio de Educación de Chile. (17 de Junio de 2019). *Currículum Nacional - Bases Curriculares Generales.* Obtenido de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-134121_bases.pdf
MINEDUC. (Noviembre de 2019). *Curriculum Nacional.* Obtenido de Bases Curriculares 3° y 4° medio: https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-91414_bases.pdf
Ministerio de Educación. (21 de 11 de 2013). *MINEDUC.* Obtenido de Biblioteca del Congreso Nacional . Obtenido de Comunidad Escolar: http://www.comunidadescolar.cl/marco_legal/Decretos/Decreto%20452-2013%20(establece%20Bases%20TP).pdf
Ministerio de Educación. (2016). *MINEDUC Mineduc (2016). Santiago de Chile.* Obtenido de Matemática. Programa de Estudio de Octavo Básico.: www.curriculumnacional.cl
Ministerio de Educación de Chile. (Junio de 2019). *Currículum Nacional.* Obtenido de Bases Curriculares: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-89597_recurso_10.pdf
Nelson, H., & Stolterman, E. (2012). *The Design Way, Second Edition.* Massachusetts - Pittsburgh: MIT Press.
Niss, M., & Hojgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde: Roskilde University.
OECD - Organización para la cooperación y el desarrollo económicos. (abril de 2019). *OECD*. Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/
Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura. (2015). *UNESCO - Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura.* Obtenido de El Futuro del aprendizaje 2 ¿Qué tipo de aprendizaje se necesita en el siglo XXI?: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000242996_spa
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2013). *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.* Obtenido de OCDE: https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (03 de 2019). *OECD.* Obtenido de PISA - Preparing Our Youth for an Inclusive and Sustainable World: http://www.oecd.org/pisa/Preparing-youth-inclusive-sustainable-world.pdf
Parraguez, M., & Vázquez, C. (2014). Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: un estudio de caso. *Educación Matemática, Vol 16*, 37-74.
Pascual Kelly, E. (1998). Racionalidades en la Produccion Curricular y el Proyecto Curricular. *Pensamiento Educativo V23*, 13-72.
Pascual Kelly, E. (1998). Racionalidades en la producción curricular. *Pensamiento Educativo*, 13 - 72.

Pellegrino, J., & Hillton, M. (2012). *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century.* Washington, DC: National Research Council. The National Academies Press.
Piaget, J., & Beth, E. W. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.* Barcelona: Grijalbo.
PISA. (2018). *PISA 2018 Draft Analytical Frameworks.* OECD.
Polya, G. (1963). On Learning, Teaching, and Learning Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 605-619.
Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo - Chile. (Junio de 2013). *United Nations Development Programme.* Obtenido de www.cl.undp.org: https://www.cl.undp.org/content/chile/es/home/library/poverty/documentos_de_trabajo/informe-completo-del-estudio-de-la-educacion-tecnico-profesional.html
Rico-Romero, L. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. L. García, Teoría y Práctica en Educación Matemática.* España:: Ediciones Alfar. (págs. 17-62).
Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2010). CONSTRUCCIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA: ANÁLISIS TEÓRICO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 89-112.
Rodriguez Muñoz, F. (2011). Contribuciones de la Neurociencia al Entendimiento de la Creatividad Humana. *Arte, individuo y sociedad*, 45-54.
Ruz Fuenzalida, C. (2019). Construcción y trayectoria del curriculum en Chile: Una perspectivadesde las nuevas bases curriculares para tercer y cuarto año de enseñanza media. *Saberes Educativos*, 22 - 36.
Saiz Maregatti, O., & Blumenthal Gottlieb, V. (2018). *Matemáticas 3ro medio.* Santiago: Ediciones Cal y Canto.
Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17*, 5-31.
Unidad de Currículum y Evaluación - Ministerio de Educación. (Junio de 2019). *Curriculum Nacional.* Obtenido de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

La violencia en el cotidiano, una violencia que si la consideramos desde lo que nos describe Galtung existe en la sociedad misma y vulnera el sistema escolar, sus profesores y en particular a sus estudiantes. No obstante, la posibilidad que nos da un sistema educativo basado en competencias es que se puede potenciar mediante el desarrollo de habilidades las competencias de las personas, tanto de estudiantes (que es nuestro foco principal) como la de los profesionales (Galtung, 1999).

ANEXO 1: Propuesta didáctica de trabajo para estudiantes

ETAPA I *(Instrucciones para el profesor: Para el siguiente ejercicio se trabajará colaborativamente en equipo. Por ende, armar grupos de 3 o 4 estudiantes y que comiencen con las instrucciones)*

Elige una o un líder de equipo, una o un vocera/o y uno o dos editor/a de soluciones. ¡Anótalos con nombre y apellido en la guía y en la cartulina con letra grande! Luego entrégala al profesor ¡Rápido! *(Instrucciones para el profesor: 1) el profesor pega en la pizarra o lugares visibles las cartulinas con los nombres de los integrantes, se explica que este será el espacio muestral para trabajar las actividades (3 minutos). 2) El profesor crea en una cartulina un grupo extra ficticio con 4 integrantes con a lo menos un integrante que su nombre empiece con vocal y apellido con consonante. Lo pega junto a las demás cartulinas)*

Objetivo/Intensión. Crear un espacio muestral propio y cercano al estudiante y ponerlo en común.

(Instrucciones para el profesor: Se dará 20 minutos para las actividades uno, dos y tres)

Pregunta 1 Si realizamos un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar en el curso un líder cuyo nombre empiece con vocal? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Calcular la probabilidad simple de un evento. Según como respondan estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.

Pregunta 2 Si realizamos un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad, al azar, de no sacar un estudiante del curso cuyo apellido empiece con consonante? Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Calcular la probabilidad simple del complemento de un evento, se espera activar las propiedades del espacio muestral y del cálculo de probabilidades, según como respondan estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso, pudiendo incluso evidenciar en sus respuestas el manejo a nivel de construcción mental objeto de espacio muestral. Podrían existir en esta pregunta otras dificultades como el trabajo con números decimales, pero esto se evidenciará en las respuestas que se den.

Pregunta 3

Si creáramos dos grupos:

A:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer nombre empieza con consonante}

B:= {Todos los estudiantes del curso cuyo primer apellido empieza con consonante}

vii. ¿Existe una intersección entre ambos conjuntos? Si lo deseas, argumenta tu respuesta verificando con una representación gráfica como dibujo, esquema, bosquejo u otra.

viii. ¿Será lo mismo si el grupo "A" fueran los estudiantes cuyo primer nombre empiezan con vocal y el "B" los estudiantes cuyo primer apellido empieza con consonante?

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Esta pregunta evalúa las construcciones de los estudiantes en el contenido de espacios muestrales, así como el representar los conjuntos e identificar la intersección de ellos y su cardinalidad. Según lo que respondan su respuesta debería estar en construcción mental proceso u objeto o en vías de objeto de espacio muestral

ETAPA II *(Instrucciones para el profesor: Se dará 30 minutos para las actividades cuatro, cinco, seis y siete)*

Pregunta 4

El profesor lanza un dado. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno de su grupo cuyo primer nombre comience con vocal dado que al lanzar el dado salga:

c. Un número mayor que 4

d. Un número impar

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Reconocer sucesos dependientes e independientes, que plantear el problema y modelar el desarrollo. Según como respondan estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso.

Pregunta 5

Los estudiantes, por grupo, lanzan una moneda, si no sale sello vuelven a lanzar hasta obtener dos sellos consecutivos. Tras obtener los dos sellos consecutivos:

g. Cuál es la probabilidad de que salga a la pizarra un alumno cuyo primer apellido comience con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

h. ¿Influye el resultado del lanzamiento del dado o el del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de las preguntas 4 y 5?

Intensión: Reconocer y resolver problemas e identificar que lanzar la moneda con la probabilidad de salir a la pizarra son sucesos independientes por ende no es una condición (Modelar el desarrollo) Según como respondan estarán en una construcción acción, proceso o acción en vías de proceso. Adicionalmente el estudiante deberá argumentar y comunicar su/s conclusión/es.

Pregunta 6

Determine el espacio muestral de todos los estudiantes del curso cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con vocal.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Se pretende determinar la construcción y restricción de espacios muestrales, y determinar las intersecciones de acuerdo con la condición dada. Según lo que los estudiantes respondan en lo que escriban su construcción será una acción o un proceso.

Pregunta 7

Determine la probabilidad de que sea seleccionado un estudiante cuyo apellido comience con vocal, dado que su nombre empieza con consonante.

Si se te ocurre resolverlo de más de una forma, escríbelas y explica cómo las usas y por qué funcionan.

Intensión: Se pretende identifique sucesos dependientes, al tener la construcción proceso de sucesos dependientes e independientes, estos se coordinan para dar una resolución al problema, esto se evidenciará en el caso que el estudiante determine que la probabilidad corresponde a sucesos dependientes identificables con una intersección de conjuntos y justifique esta respuesta realizando además una reversión de espacio muestral (restringiéndolo) explicando que al restringir el espacio muestral a los individuos que cumplen ambas condiciones es posible calcular la probabilidad condicional solicitada.

También mide la interiorización de la acción de cálculo de probabilidad condicional con el proceso suceso dependiente, formalizando el proceso de que es necesaria esta condición para la probabilidad condicional.

Y finalmente también analiza la coordinación de los elementos producto de la reversión (desencapsulación) de sucesos esto si los alumnos representan por ejemplo en un diagrama de Venn y comprueban la intersección vacía o no vacía de los sucesos.

ANEXO 2

Test Torrance

Adaptación y baremación del test de pensamiento creativo de Torrance:

Expresión figurada.

Educación Primaria y Secundaria

Juan E. Jiménez González

Ceferino Artiles Hernández

Cristina Rodríguez

Eduardo García Miranda

CUADERNILLO DE APLICACIÓN TORRANCE DE “EXPRESIÓN FIGURADA”. EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Juego 1

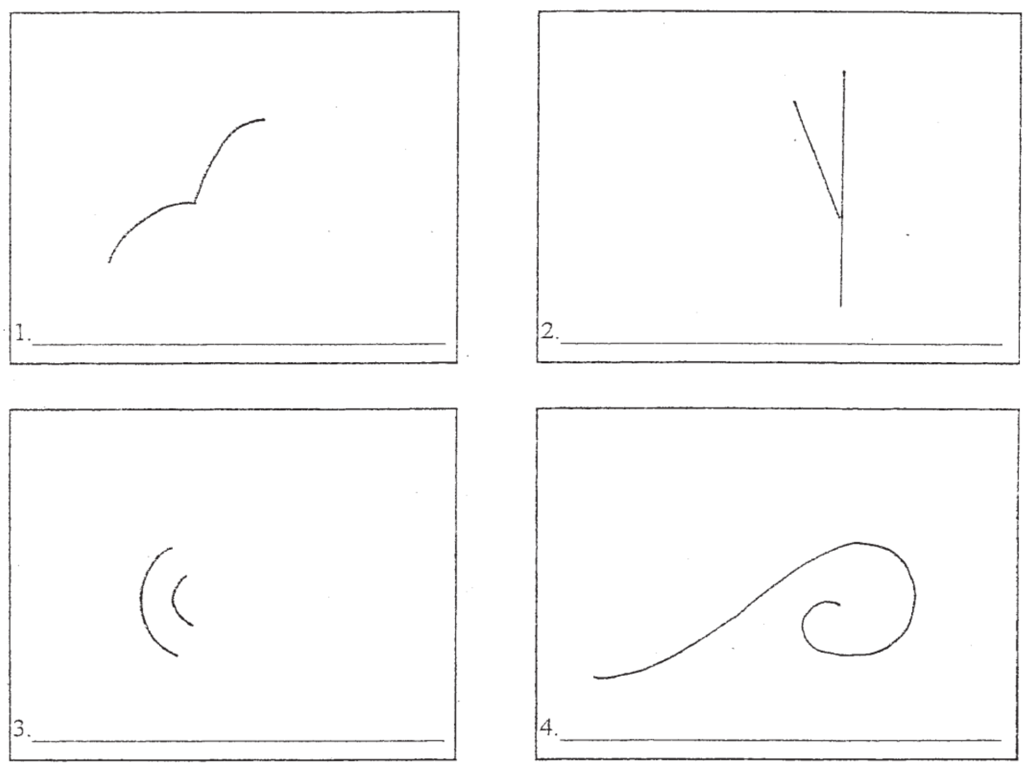
Componemos un dibujo

“Mira este trozo de papel verde, de forma redondeada. Vas a imaginar algo que puedas dibujar y del que va a formar parte este trozo de papel. Coge el trozo de papel verde y pégalo sobre esta página en el lugar que desees hacer tu dibujo. Ahora, con tu lápiz añade todos los elementos que quieras para hacer tu dibujo. Desarrolla tu primera idea con el fin de ilustrar lo mejor posible una historia interesante. Intenta hacer algo original en lo que nadie haya pensado hacer antes. Cuando hayas acabado tu dibujo, ponle un título y escríbelo en la parte de abajo. Es preciso que ese título sea original e ingenioso puesto que debe contribuir a explicar tu historia”.

Juego 2

Acabamos un dibujo.

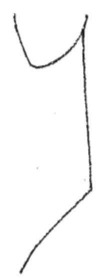
“Sobre esta página y la siguiente encontrarás dibujos incompletos, añadiendo elementos; puedes representar cosas interesantes: objetos, imagenes, lo que tú quieras. Desarrolla tu primera ideaconelfindeilustrarunahistorialomáscompletaeinteresanteposible. Intenta encontrar ideas en las que nadie haya pensado antes. Recuerda escribir, debajo de cada dibujo, el título que le hayas dado”.



5.____________________________

6.____________________________

7.____________________________



8.____________________________

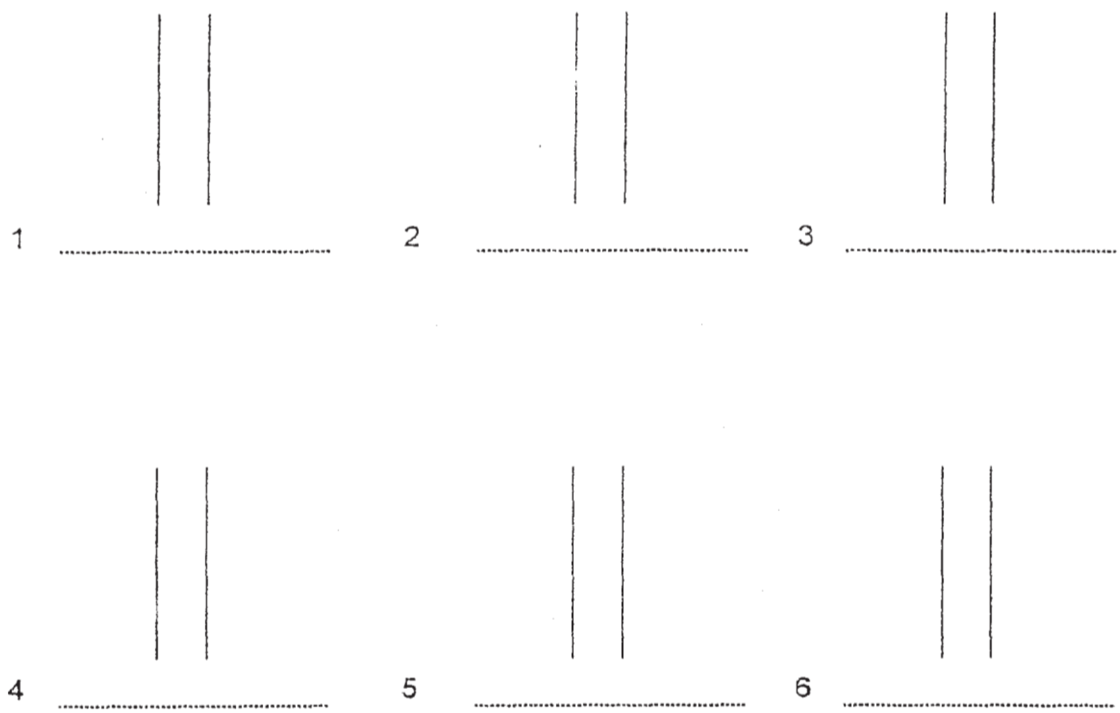
9.____________________________

10.____________________________

Juego 3

Las líneas.

"En esta página y en las siguientes hay una serie de líneas paralelas. Vamos a ver cuántos dibujos puedes hacer en 10 minutos a partir de esas líneas. Puedes añadir todos los detalles que quieras: en el interior, en el exterior, arriba, debajo, pero es preciso que esas dos líneas paralelas sean la parte más importante de tu dibujo. Haz dibujos lo más ricos y diferentes posibles e intenta que ilustren una historia. Esfuérzate una vez más por encontrar ideas originales. Después escribe debajo de cada dibujo el título que le hayas dado".



7 .... 8 .... 9 ....

10 .... 11 .... 12 ....

13 .... 14 .... 15 ....

16 .... 17 .... 18 ....

19 .... 20 .... 21 ....

22 .... 23 .... 24 ....

25 .... 26 .... 27 ....

28 .... 29 .... 30 ....