UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

El álgebra escolar con sentido y significado para los estudiantes:

Construcción e implementación de una propuesta didáctica para mejorar los niveles de aprendizaje y habilidades matemáticas.

Autora:
Camila Fernanda Acevedo Huerta

Profesora Guía:

Dra. Lorena Espinoza

Propósito de titulación: Para obtener el grado de Magíster en Educación Matemática

Santiago – Chile

2020

Introducción

El proceso de Enseñanza-Aprendizaje del álgebra ha sido motivo de estudio para grandes autores de nuestra época actual, siendo primordial dentro del trabajo matemático vigente. No se trata únicamente de un área de la matemática con teoremas, reglas y técnicas impuestas arbitrariamente ni de una mera herramienta para generalizar la aritmética ni de convertir el lenguaje natural a lenguaje matemático, sino más bien se trata de la necesidad de crear matemática en su más pura esencia, la matemática al servicio del hombre para modelizar un problema y para resolver un problema. Además constituye una herramienta muy poderosa para la creación de conocimiento, la que en definitiva nos ayuda a producir una manera de pensar, de razonar y de construir el álgebra con un sentido.

Si bien esta rama de la matemática aparece tempranamente en nuestro currículum nacional y suele ocupar un lugar destacado dentro del estudio de alumnos de Educación Superior que cursan carreras del ámbito de las ciencias exactas. Pero, ¿Qué ocurre en la Enseñanza Media? ¿El Álgebra escolar es utilizada como una generalización de la Aritmética o como un instrumento que nos permite modelar y resolver problemas? ¿El proceso de Enseñanza – Aprendizaje del Álgebra en edad escolar es suficiente para comprender el Álgebra como una herramienta en sí misma? ¿Es que acaso en nuestro sistema de enseñanza hay una predominancia del trabajo algebraico (manipulación de expresiones algebraicas) muy por sobre el entendimiento y la resolución de problemas algebraicos?, si bien es cierto que el álgebra tiene un nivel de abstracción distinto al de la Geometría, la aritmética (números) y probabilidad, ¿es posible catalogarlo como un eje más complejo y difícil de abordar desde su comprensión y por esto es que se enseña de manera descontextualizada, atomizada y carente de sentido?. Estas son algunas de las interrogantes que surgen y que se espera que este trabajo pueda transparentar.

Para comenzar a entender la situación actual del Álgebra y su proceso de Enseñanza – Aprendizaje en el mundo escolar, se visitaron varias investigaciones didácticas sobre el Álgebra Elemental, éstas se centran en estudiar las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje y cómo actúa el profesor para mitigarlas, en la investigación educativa, es poco común encontrar trabajos que examinen qué es lo que se enseña bajo el apelativo de álgebra elemental y, en consecuencia, qué se entiende por “álgebra elemental” en la clase de matemáticas, en la escuela y, más ampliamente, en la sociedad. Esta pregunta inicial –

qué actividades y conocimientos constituyen el álgebra elemental en cuanto saber enseñado – y su versión complementaria – qué actividades y conocimientos relativos al álgebra no se enseñan en la escuela – constituyen sin embargo un cuestionamiento esencial para indagar las condiciones de posibilidad de un cambio educativo que no se reduzca a una mera innovación local (Chevallard y Bosch, 2012).

Lo anterior implica una revisión en profundidad del currículum escolar, ¿Qué se entiende por Álgebra? ¿Cómo enseñaremos el Álgebra en el mundo escolar? ¿Cuál es la importancia de la enseñanza del Álgebra? Y ¿Qué entendemos por álgebra en nuestro contexto y currículum nacional? ¿Se puede enseñar el álgebra con sentido para nuestros estudiantes?

Como se ha mencionado con anterioridad, el proceso de Enseñanza – Aprendizaje del álgebra ha sido y es motivo de estudio de muchos investigadores, esto se comprobó por medio de la revisión de una gran cantidad de trabajos relacionados con este tema, con una simple exploración de lo que pasa en el aula cuando enseñamos Álgebra y por medio de un cuestionario que se implementó en un octavo básico de un colegio de Santiago en la Región Metropolitana, donde es posible observar la carencia que los estudiantes tienen en cuanto al entendimiento del Álgebra, no así la manipulación de esta herramienta.

He aquí la importancia de estudiar sistemáticamente esta problemática a través de una investigación que se fundamenta en un marco teórico basado en grandes investigaciones internacionales, fundamentalmente España, a quien seguimos en modelo educacional. Que permite argumentar con hechos e investigaciones la situación escolar y no quedar únicamente sujetos a juicios valorativos que carecen de validez científica.

Esta investigación es realizada en un momento de especial importancia para nuestro país. En efecto, desde hace 30 años se está tratando de cambiar la educación, hemos vivido reformas educacionales (LOCE, LGE) en donde se incluyen contenidos y habilidades necesarias para un ciudadano, pero que no necesariamente estamos desarrollando en nuestros estudiantes a través del contenido y en la forma en la que lo estamos planteando. Surge de forma natural preguntarse cómo el currículum actual propone trabajar este objeto de saber en la Enseñanza Media y qué lugar le asigna a este tipo de actividad matemática.

Una de las motivaciones mas importantes que impulsaron la realización de este trabajo se encuentra en la gran necesidad, ampliamente compartida en ambiente de la enseñanza, de que un estudiante pueda egresar de la enseñanza media con las herramientas necesarias no solo para aplicar y manipular expresiones algebraicas, si no que a su vez sea capaz de modelar y resolver problemas mediante esta herramienta.

Para abordar esta problemática se recorre un extenso camino de investigación y análisis que a partir de un diagnóstico de la actividad matemática escolar centrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, que sirve como un modelo de referencia, nos permite describir y analizar la actividad matemática oficializada en la Enseñanza Media en torno al álgebra, particularmente en el contenido de Sistemas de Ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas, y describir distintos fenómenos didácticos vinculados al estudio de esta actividad.

Para describir este proceso, la tesis se encuentra organizada en nueve capítulos que dan forma a este trabajo y permite obtener conclusiones y proyecciones.

En el primer capítulo se realiza una indagación detallada sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del álgebra, que nos permite elaborar el modelo que será utilizado como referencia en el desarrollo del trabajo. Aparece aquí la relación entre el profesor, el estudiante y el conocimiento a desarrollar, documentando progresión del rol docente y cómo éste ha cambiado durante las últimas décadas.

En el segundo capítulo se plantea el propósito de la investigación, los distintos objetivos y las hipótesis a desarrollar en este trabajo.

En el tercer capítulo se expone el marco teórico, que acompaña, sustenta y fundamenta la investigación. Se describen las nociones precisas para comprender las bases en las que se sustenta el trabajo, que incluye teorías dentro del amplio campo de la Didáctica de las Matemáticas, donde se citan algunas investigaciones de autores y autoras cuyas investigaciones sirven como antecedentes para el trabajo.

El cuarto capítulo trata el Problema Didáctico del Álgebra Elemental, donde se describen y comentan sustentos teóricos que apoyan esta investigación en torno al Álgebra escolar.

El capítulo cinco describe la metodología de investigación, donde por medio del análisis de las Bases curriculares, el Programa de Estudio y del libro de Texto oficial se hace una descripción de la actividad matemática que se realiza en torno al Álgebra y con precisión en Primer Año de Enseñanza Media. Este proceso permite que surjan hipótesis sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Para verificar o contrarrestar estas hipótesis se hace una propuesta de enseñanza (Situación experimental), que se logra implementar en un colegio de la región Metropolitana.

El sexto capítulo trata el Problema Didáctico del Álgebra Elemental en Chile, aquí se describe la Organización Curricular, la progresión y análisis de los Objetivos de Aprendizaje, la clasificación de los tipos de Tarea y las técnicas sugeridas en los libros de texto oficiales.

En el séptimo capítulo se detalla en profundidad la creación de la propuesta didáctica, cómo se construye, cuáles son los hitos más relevantes de la propuesta y la estrategia didáctica.

El octavo capítulo describe la implementación de la propuesta didáctica y el análisis de resultados, en particular, se describe la experimentación para contrastar las hipótesis formuladas en el capítulo tres.

Finalmente en las conclusiones y proyecciones, aparece una síntesis de los principales resultados obtenidos, y se establece una relación entre ellos. Además en este capítulo se hace referencia a las principales contribuciones que realiza esta investigación, las principales limitaciones y las proyecciones de este trabajo.

Para terminar la exposición del presente trabajo de titulación, en los anexos se muestra un conjunto representativo de todos los documentos, informaciones, la guía de trabajo que se utilizó, pre y post test y los resultados que se recogieron en el desarrollo de la investigación.

Los invito entonces a profundizar en el desarrollo de este trabajo que pretende dar importancia y proponer algunas respuestas al problema de la enseñanza y el escaso aprendizaje del Álgebra en la Enseñanza Media de nuestro país.

Capítulo 1. La problemática de investigación

1.1. Problematización

En la enseñanza de la matemática se establecen variados criterios metodológicos dependiendo de los contextos históricos, sociológicos, económicos y hasta sicológicos, que orienten este proceso. Es por esto que habitualmente se realizan encuentros, conferencias, talleres, investigaciones y congresos relacionados con el problema del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En nuestro sistema escolar se evidencia una actitud de desmotivación, apatía y hasta un dejo de abandono por parte de nuestros estudiantes en cuanto a su relación con el aprendizaje matemático. El álgebra es uno de los ejes de la matemática escolar que presenta el mayor índice de rechazo y desaprobación, dado su nivel de abstracción, la falta de aplicabilidad en la vida real y cotidiana, pero más aún, la carencia de sentido.

Se presentan a continuación algunas investigaciones que abordan el problema de la enseñanza de la matemática, con el fin de explicitar la necesidad de seguir proponiendo y creando nuevas estrategias para el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina.

En el contexto escolar, es necesario que los educadores organicen y desarrollen las actividades de enseñanza para sus alumnos. Este proceso se inicia planificando la actividad académica que tiene como finalidad que el docente anticipe, pueda predecir y elaborar una descripción del aprendizaje matemático, en donde la relación de la clase con los objetivos, el contexto del estudiante y el resto de las competencias que se estipulan en los Planes y Programas de Estudios formen un proceso articulado para la adquisición de este conocimiento. (Costa & Garmston, 1999).

Por otra parte, se plantea que los procesos de enseñanza están a cargo del profesor, quien es el facilitador en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática escolar, cuyo objetivo principal es propiciar, favorecer y promover el aprendizaje de la disciplina. Así las concepciones epistemológicas sobre la matemática y la forma en que se transmitirá este conocimiento serán primordiales al momento de incentivar y aprehender la atención de los estudiantes, los cuales utilizan todo tipo de experiencias para ir comprendiendo lo que aprenden gradualmente y que el proceso no es lineal, sino que en él se avanza y se retrocede permanentemente (Carrillo J., 2000).

En el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática, la responsabilidad no sólo recae en el profesor como el encargado de “entregar” los conocimientos necesarios, sino que es indispensable la labor de los estudiantes como participantes activos de su propio aprendizaje, es así como se visibiliza que la enseñanza de la matemática es un proceso cognitivo influido por el tipo de actividad que el sujeto desarrolle, ya sea formal o informal. En este contexto la enseñanza de la matemática tiene una fuerte tendencia lógico-deductiva (Kline, 1978), la cual ha permeado al conocimiento matemático de una serie de características, como el conocimiento formalizado, de naturaleza netamente abstracta, vinculado a un lenguaje muy específico y con propiedades que lo separan estructuralmente de los enfoques naturales, lo cual no necesariamente responde al carácter dinámico y evolutivo que la perspectiva histórica señala. Por lo tanto, para poder enseñar matemática no basta solamente con realizar un trabajo de mecanización, memorización y descontextualizado, muy por el contrario, se debe destacar el proceso histórico y epistemológico como la base del conocimiento matemático, que da importancia, sentido y enriquecimiento a los contenidos que se desea enseñar (González T., 2000).

Por lo tanto se necesita que el docente cree estrategias metodológicas en las que no solo logre estimular a los estudiantes, sino que consiga integrar en ellos la capacidad de análisis, observación, formulación de hipótesis y de solucionar problemas, descubriendo el conocimiento por sí mismos, por consiguiente, los estudiantes deben ser capaces de observar, analizar, controlar sus propios procesos de aprendizaje y autoevaluarse en cuanto a éstos, generando entre ambos una interdependencia positiva que favorezca el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Las actividades lúdicas, el modelaje y la resolución de problemas son algunas de las metodologías y habilidades que cumplen con estos objetivos, motivar a los estudiantes provocando una actitud activa, fomentando una actitud activa, que tomen la iniciativa en el cuestionamiento o en la investigación de un tema o contenido por aprender y lograr la curiosidad del estudiante.

Es parte muy importante del rol docente, además de fomentar la capacidad de razonamiento, estimular constantemente la reflexión y habilidad de resolución de problemas, monitorear en forma continua las preguntas y procedimientos de los estudiantes dando paso al error, previamente dilucidado por el docente, para trabajarlo y enfrentarlo como una oportunidad de aprendizaje para construir el conocimiento.

Para fomentar las habilidades mencionadas con anterioridad se deben fortalecer ciertas características propias de cada estudiante, por medio de distintas estrategias y metodologías de la enseñanza de la matemática, tales como generar analogías, conectar los nuevos contenidos con los conocimientos previos, generar situaciones cotidianas o crear distintas situaciones para un mismo tipo de problema, analizar estos problemas y dar los tiempos necesarios para lograr el aprendizaje.

En la práctica docente, sin embargo, se privilegia la enseñanza de los contenidos por sobre el desarrollo de las habilidades y cualidades de nuestros alumnos, donde se prioriza el aprendizaje memorístico y mecánico de los contenidos, de forma parcelada, disgregada y descontextualizada, para abarcar una gran cantidad de currículum en un espacio acotado de tiempo.

El foco de esta práctica debe cambiar, el enfoque de la enseñanza de la matemática debe ser centrada en que el estudiante comprenda el verdadero sentido que tiene la matemática y así poder justificar y apoyar sus ideas a partir de su experiencia e incluso de su vida cotidiana. Es así como el proceso de enseñanza de la matemática debería estar orientado a desarrollar habilidades de nuestros estudiantes.

1.2. El problema y su importancia.

1.2.1. Justificación del problema.

Al igual que en otros países, en Chile existen pruebas estandarizadas, tanto a nivel nacional como internacional, con las cuales se espera evaluar las habilidades y el manejo de contenidos de los estudiantes frente a los diversos temas que debiesen manejar en las distintas áreas del conocimiento.

El TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias) es uno de estos estudios internacionales, el cual es realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA), que busca entregar la información de calidad sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes de educación básica y los contextos educacionales en los que aprenden. Se aplica desde 1995, cada cuatro años, a estudiantes de 4° y 8° Básico en las áreas de Matemática y Ciencias Naturales (Educación, 2011).

Chile ha participado en TIMSS en los años 1999, 2003, 2011 y 2015, lo que permite comparar las variaciones por año. En la evaluación del 2011 el promedio internacional en Matemáticas del octavo año básico presentó un puntaje de 467 puntos mientras que en Ciencias se obtuvo un promedio de 474 puntos. En el año 2015 el promedio en Matemáticas fue de 427, esto sigue estando bajo el centro de la escala TIMSS (500 puntos), obteniendo en ciencias 454 puntos, en ambos subsectores se ha bajado el puntaje obtenido en comparación con los resultados del 2011.

El Ministerio de Educación plantea que los estudiantes tienen un rendimiento más bajo que el promedio internacional, exponen que son muchos los que no consiguen rendir lo mínimo descrito por TIMSS. Al ver los resultados, se tiene que en Ciencias solo un 1% de los estudiantes de Chile logra el nivel avanzado, mientras que el 25% obtiene menos de 400 puntos. Además uno de cada tres estudiantes en Chile no alcanza los 400 puntos en Matemática, así mismo, se desprende que un 26% de los estudiantes chilenos se ubica en el nivel de logro bajo en Matemática, se interpreta como que manejan sólo algunos conocimientos matemáticos básicos, especialmente relacionados con el eje de números.

En cuanto a la relación con todos los países participantes, en el área de matemática, los estudiantes chilenos tienen un rendimiento más bajo que los casi cuarenta países que participan en esta medición.

PISA (Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes), es otra evaluación internacional estandarizada que se realiza por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Esta evaluación se aplica cada tres años (desde 2000) a estudiantes de 15 años con evaluaciones que miden las áreas de Lectura, Ciencias Naturales y Matemática.

Por su parte, Chile ha participado en PISA en los años 2001, 2006, 2009 y 2012, aplicando pruebas en papel y el 2015 fue usando computador. Como complemento a la prueba realizada a los estudiantes, el estudio recoge información individual, familiar y relativa al contexto educativo en que los estudiantes aprenden. Para ello se usan cuestionarios de estudiantes, de padres, de directores de establecimiento y a partir de 2015, cuestionarios a profesores.

Si bien Chile es el representante latinoamericano más destacado, se posicionó en el puesto 44 a nivel intercontinental con 49 unidades abajo del registro OCDE de 492 puntos y a 50 de la Unión Europea. En las asignaturas analizadas, nuestro país se encuentra bajo el índice de la OCDE y de Europa en cada una de ellas, pero superior en las tres áreas a los países latinoamericanos analizados. Los estudiantes chilenos tuvieron su mejor desempeño en comprensión lectora, con 459 unidades, mientras registraron 447 puntos en ciencias y 423 en matemáticas.

En cuanto a los resultados de la prueba PISA del 2012, Chile mejoró en 17 puntos en lectura, sin embargo, Carlos Henríquez, Secretario Ejecutivo de la Agencia de Calidad de la Educación destaca que el país no ha avanzado en las otras dos áreas en casi una década. “Es preocupante que entre el 35% (en ciencias) y 49% (en matemáticas) de nuestros estudiantes obtenga resultados que los posicionan bajo el Nivel 2 de PISA. Es decir, que no logran las competencias básicas que les permitirían seguir aprendiendo e integrarse a la comunidad, con capacidad para participar y colaborar”.

Además sólo 3,3% de nuestros estudiantes presentaron un nivel de excelencia en al menos una asignatura y 23,3% se mostraron como estudiantes de bajo rendimiento en todas ellas.

En Chile, actualmente los resultados de evaluaciones estandarizadas como el Sistema de Medición de la Calidad de la Enseñanza (SIMCE) manifiesta una realidad preocupante en el sistema educativo con respecto a la asignatura de Matemática. Esta evaluación pone en evidencia que los estudiantes de contextos socioeconómicos vulnerables tienen un desempeño significativamente más deficientes en matemática que los estudiantes de sectores no vulnerables. Esta relación se sustenta comúnmente asumiendo que en sectores de pobreza económica se presentan carencias de carácter cultural, las cuales impiden desarrollar en los estudiantes habilidades relacionadas con el aprendizaje de la matemática, esto finalmente se traduce en logros de aprendizaje deficitarios. (Castro, Eduardo, Ortiz, & Quiroga, 2012).

Por lo anterior, al analizar y comparar los resultados obtenidos en nuestro país, con el resto de los países participantes, en las evaluaciones internacionales de los últimos años, es imposible no notar los bajos niveles de los estudiantes chilenos, en la asignatura de Matemática que es lo que nos compete, es así como surgen algunas preguntas ¿Por qué se obtienen estos resultados tan deficientes? ¿Los estudiantes chilenos entienden o saben matemáticas? ¿Cómo alcanzar los niveles nacionales e internacionales esperados? ¿Cómo hacer para que el proceso de enseñanza – aprendizaje sea efectivo y nuestros estudiantes realmente aprendan Matemáticas?

Para intentar responder estas preguntas, es importante la realización de esta investigación, evidenciar el problema de la enseñanza de las matemáticas, desde los Planes y programas dados por el Ministerio de Educación, seguido del Libro de Texto oficial que entrega el Ministerio de Educación para apoyar a los docentes y estudiantes y finalmente los procesos que se dan en el aula, son estos elementos los que nos dan ciertas directrices para indagar en el cómo nuestros estudiantes aprenden matemáticas, para analizar las características de los contextos escolares y del alumnado en sí y para contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación en esta área del conocimiento, es así como se pretende que el proceso se vea reflejado en un mejor desempeño matemático en pruebas estandarizadas, nacionales o internacionales.

Para esto se propone una metodología no usual para la enseñanza de la matemática, específicamente en el eje de Álgebra que según la prueba SIMCE, es el eje más deficiente dentro de la asignatura.

Entre las investigaciones en didáctica del Álgebra escolar se destaca Noemí Ruíz Munzón, quien describe en su tesis cómo puede utilizarse el *instrumento algebraico* para llevar a cabo un proceso de algebrización progresivo partiendo del sistema de los problemas aritméticos. Entendiendo como problemas una situación problemática en la que el estudiante entra en conflicto y debe buscar estrategias nuevas para resolverlos.

En los libros de texto, como veremos en el capítulo seis, los problemas de enunciado verbal no son más que una tarea que se desarrolla con la misma técnica que otros tipos de tarea sin enunciado verbal, por lo que entenderemos como un problema matemático una tarea cuya técnica para resolverlo no sea usual para el estudiante. Para familiarizarnos con estos conceptos, Ruíz propone en su tesis distintas etapas del proceso de algebrización.

En la primera etapa considera que es necesario trabajar las técnicas o procesos de resolución de los problemas aritméticos como objetos de estudio por separado. Se observa que el álgebra y la manipulación de ésta aparecen a muy temprana edad en el Currículum Nacional, específicamente en Tercer año Básico comienza la noción de ecuación como una igualdad entre dos cantidades, por lo que los estudiantes tienen noción de estos objetos matemáticos y en general logran manipularlos, es decir utilizan las técnicas, pero no necesariamente requieren justificaciones para utilizarlas.

Por otra parte las técnicas son enseñadas atomizadas y para resolver cierto tipo rutinario de problemas, por lo que si no desafiamos a nuestros estudiantes con un tipo de problema real en el que tengan que generar la necesidad de construir nuevas técnicas para resolverlo, no estarán utilizando el álgebra como una herramienta en sí misma.

1.2.2. Formulación del problema

En base al estudio anterior, se da paso a la formulación de la interrogante de investigación:

"¿Existe un problema en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Álgebra en cuanto al método tradicional de enseñanza? ¿Se puede enseñar el Álgebra con sentido para nuestros estudiantes, de manera que aparezca el Álgebra como una necesidad y no como una imposición de técnicas?"

Capítulo 2. Objetivos e hipótesis

2.1. Objetivo General y Objetivos específicos

Objetivo general:

Diseñar e implementar una propuesta que contribuya a elevar los niveles de aprendizaje del álgebra en primero año de enseñanza media.

Objetivos específicos:

1. Analizar bases curriculares en torno al álgebra
2. Analizar la manera en que se presenta el álgebra en libros de texto escolares.
3. Identificar fenómenos didácticos (anomalías didácticas) vinculadas a la enseñanza del álgebra.
4. Construir una propuesta a partir de un fenómeno didáctico identificado, que contribuya a que los estudiantes puedan superarlos.
5. Implementar la propuesta didáctica y analizar sus resultados, identificando logros y obstáculos.
6. Ajustar la propuesta y concluir resultados.

2.2. Hipótesis.

El Álgebra aparece en el sistema escolar de una manera arbitraria e impuesta, desvinculada de su realidad, necesidad y por lo tanto de su real sentido.

En el sistema escolar se impone el Álgebra a temprana edad por lo que los estudiantes son capaces de manipular expresiones algebraicas pero muchas veces no logran modelar situaciones ni resolver problemas por medio del Álgebra.

Los estudiantes aprenden el álgebra como una generalización de la aritmética que sigue ciertas reglas, por lo que se aprende de manera atomizada e impuesta, no por una necesidad.

Una gran parte de los ejercicios que les proponemos a nuestros estudiantes no necesitan el uso del álgebra, por lo que utilizan la aritmética o la completación para encontrar la solución, sin embargo esto falla cuando les presentamos cierto tipo de tareas donde necesariamente deben encontrar otra estrategia ya que la aritmética falla y se hace necesario el uso o aparición del álgebra.

Capítulo 3. Marco teórico

3.1. Teoría de las Situaciones Didácticas.

El Aprendizaje Matemático está enmarcado por diversas corrientes, didácticas, epistemológicas y hasta psicológicas, las cuales permiten observar el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la matemática de distintos puntos de vista.

Es así como surgen algunos representantes de la Escuela Francesa que desarrollaron otro enfoque en la didáctica de la Educación Matemática, desde donde se conjeturan teorías que tienen como finalidad explicar el proceso de Aprendizaje de la matemática escolar (Godino J., 1991).

Una de las corrientes didácticas más destacada que se relaciona con el Aprendizaje Matemático es la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, quien plantea:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.” (Guzmán, 2005).

La teoría de situaciones didácticas estudia y describe situaciones particulares de los diversos conocimientos matemáticos que se enseñan en la escuela. Los estudios y publicaciones son un gran aporte para el conocimiento y la idea que se tiene de la matemática hoy en día.

Brousseau postula que para que se efectúe el proceso Enseñanza-Aprendizaje desde el punto de vista de la Teoría de Situaciones Didácticas, se debe considerar un Sistema Didáctico, formado esencialmente por tres agentes: profesor, alumno y saber, en donde la situación didáctica es un conjunto de relaciones explícitas y/o explícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno, que puede incluir instrumentos o materiales y el profesor, con un fin de permitir a los alumnos aprender, es decir, reconstruir algún conocimiento.

La teoría de Brousseau plantea un tipo característico de situaciones didácticas debido a la particularidad del conocimiento matemático. Cada una de estas situaciones debería converger en una situación a-didáctica, es decir, en un proceso de confrontación del alumno ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento.

La Teoría de Situaciones Didácticas diferencia cuatro etapas o situaciones claves y fundamentales, estas son:

- ⇨ Situación de Acción: El alumno trabaja de manera individual con un problema, aplicando sus conocimientos previos y desarrollando un determinado saber, es decir, sin la intervención del profesor, interactúa individualmente con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimiento.
- ⇨ Situación de Formulación: Se potencia el trabajo grupal, donde se requiere la comunicación de los alumnos, compartir experiencias en la construcción del conocimiento.
- ⇨ Situación de Validación: Consiste en discutir con el profesor acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.
- ⇨ Situación de Institucionalización: Se intensiona el cierre de una situación didáctica, tiene como finalidad establecer y formalizar el conocimiento aparecido durante la actividad de la clase.

3.2. Transposición Didáctica.

Para Chevallard, "un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre (…) un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica" (Chevallard, 1991). Es decir, la responsabilidad del profesor es transformar el saber sabio, es decir, el saber científico o artístico, en un saber enseñado, con el fin de que los estudiantes puedan comprender ese lenguaje y puedan apropiarse de este conocimiento (Grisales-Fuentes & González-Agudelo, 2009).

Chevallard postula que el saber que se va a enseñar es el "saber inicialmente designado como el que debe ser enseñado" (Chevallard, 1991), el cual al momento de enseñarse sufre un conjunto de cambios didácticos para hacerlo apto para ser enseñado. El saber tal como es enseñado corresponde al saber enseñado (Chevallard, 1991) y es, por necesidad, distinto del saber sabio y del saber que se ha de enseñar.

Chevallard (1991), plantea que la educación del elemento particular del conocimiento sólo es posible si este elemento se somete a ciertas "distorsiones" que es capaz de enseñar, exterioriza los elementos que caracterizan la operación de la enseñanza basada en el concepto de *transposición* didáctica, y el conocimiento asume ciertos procesos:

• Descontemporalización: el conocimiento enseñado está separado de su producción histórica.

• Naturalización: el conocimiento ha enseñado el poder indiscutible de "cosas naturales" en el sentido de una naturaleza particular.

• Descontextualización: el elemento del conocimiento enseñado debe descontextualizar su significado, seguido de una recontextualización en una dirección diferente. Al descontextualizar un elemento, cambia su significado original.

• Despersonalización: conocimiento considerado en *statu nascendi* está vinculado a su productor y se encarna en él. Este proceso es mucho más complejo a la hora de enseñar, para cumplir una función de representación del conocimiento sin estar sujetos a los mismos requisitos de productividad.

La Transposición Didáctica traslada el saber de la comunidad erudita a la comunidad escolar, por lo cual tenemos distintas formas del saber. Dadas las transformaciones a las que es sometido el saber para transmitirlo en las distintas realidades, se tienen diversos géneros o modos del saber. En este proceso, el saber ocupa distintos espacios y cumple diferentes funciones. El primer modo del saber corresponde al Saber Sabio. Éste se refiere al saber que es generado por el matemático, el investigador en matemática. Este saber es desarrollado en los centros o institutos de investigación, laboratorios, Universidades, etc. No está necesariamente vinculado con la enseñanza escolar. Es un saber especializado; logrado a partir de un conjunto o procedimientos que se llevaron a cabo en algún lugar, espacio, tiempo y contexto.

El saber no puede ser enseñado con el lenguaje y la teoría científica en la que se encuentra redactado en los textos matemáticos y esto crea un obstáculo en el proceso de aprendizaje. Por lo que debe ser transformado en un Saber a Enseñar, el cual se hace visible en los programas de estudio (currículo). Este saber se conecta con la didáctica y sirve como un medio para presentar el saber al estudiante. Mientras el saber científico se presenta en textos técnicos - matemáticos, el saber a enseñar se encuentra en publicaciones, estudios, artículos, libros especializados en didáctica, programas y otros materiales de apoyo. En el transcurso del saber científico al saber enseñado, ocurre una transición, la creación de un modelo teórico que traspasa y supera los límites del saber matemático.

3.3. Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Esta investigación se enmarca en la corriente del enfoque epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, iniciado por Guy Brousseau, como se mencionó anteriormente. Esta orientación considera la didáctica de las matemáticas como la "ciencia de las condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones" (Brousseau, 1994). Postula que la investigación de cualquier problemática didáctica debe incorporar el análisis de los conocimientos matemáticos tal cual son reconstruidos en las instituciones de enseñanza, y su correspondiente proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1985). Este proceso consiste en las sucesivas y constantes adaptaciones que deben experimentar los conocimientos matemáticos para ser enseñados. Se sostiene que aprender matemáticas consiste esencialmente en hacer matemáticas y, por lo tanto, en la realización de una práctica.

Según la Teoría Antropológica de lo Didáctico este proceso de estudio está constituido por distintas dimensiones o momentos del trabajo que realizan profesor y alumnos, que van desde la exploración auténtica de problemas, a la justificación y sistematización de lo matemáticamente construido, pretendiendo convertir las tareas problemáticas iniciales en tareas rutinarias que permite a los estudiantes no solo resolverlas, sino que plantear nuevos problemas.

Un criterio central para elaborar situaciones de aprendizaje, consiste en elegir aquellas situaciones que establezcan condiciones problemáticas a las que el estudiante se enfrente, es así como se construirá conocimiento matemático significativo.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico adopta un punto de vista institucional de la problemática didáctica, situándola dentro del marco más general de las prácticas humanas. Para modelizar el conocimiento matemático utiliza la noción de organización o praxeología matemática, entendiéndola como una consecuencia de una actividad de estudio (sistemática

e intencionada) de una problemática determinada en una comunidad, sociedad y momento histórico específico (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009; Gellert, Espinoza y Barbé, 2013).
Una organización matemática describe una actividad matemática, regularmente realizada, con un modelo único y está compuesta por cuatro categorías de elementos que se describen a continuación:

- *Tipo de tarea,* se describe como la acción que se realiza sobre un objeto matemático.
- *Técnica matemática,* corresponde a una praxeología (consecuencia de una actividad de estudio sistemática y dirigida) que está relacionada a un tipo de tarea con una determinada manera de realizarse.
- *Tecnología,* es el discurso racional, el conocimiento y los conceptos que justifican la técnica para asegurar que se permita realizar lo que se pretende.
- *Teoría,* responde a un nivel superior y formal de justificación que sustenta la explicación y producción de una técnica.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas surgen como medios para la construcción de las organizaciones matemáticas en la escuela; ambos procesos están incluidos dentro de un proyecto común que esta teoría denomina el proceso de estudio de las matemáticas (Chevallard, 1997; Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

Este proceso es modelizado a través de la *Teoría de los Momentos Didácticos,* que hace referencia al aspecto dinámico de la actividad matemática y que puede ser descrita a través de seis momentos. Los momentos se distribuyen de forma dispersa a lo largo del proceso de estudio, pueden aparecer más de una vez e incluso logran presentarse simultáneamente y coexistir entre sí. Ellos son:

- *Momento del primer encuentro,* es cuando se le presenta al estudiante un nuevo tipo de problema u organización matemática (O.M) para ser estudiado.

- *Momento exploratorio,* el estudiante indaga un tipo de tarea específica que se le presenta. Elabora una técnica relativa al estudio del problema. El momento finaliza cuando la técnica está clara, puede ser presentada por el docente o surgir de los estudiantes.

- *Momento trabajo de la técnica,* el estudiante mejora la técnica elaborada previamente. Se busca que el estudiante haga propias estas técnicas, de ésta manera se harán naturales para él.

- *Momento tecnológico-teórico,* surge la necesidad de explicar y justificar la actividad, por lo que se presentan explícitamente los elementos tecnológicos y teóricos necesarios para el estudio del objeto matemático.

- *Momento institucionalización,* es cuando se formaliza la actividad desarrollada. En este momento es de gran importancia hacer visible y oficializar el objeto matemático, con el fin de que sea institucionalizado y conservado por el estudiante.

- *Momento evaluación,* es cuando se mide el grado de dominio que tiene el estudiante acerca de la organización matemática estudiada.

A pesar de la relación que existe entre lo matemático y lo didáctico, parece razonable que el análisis de la actividad matemática comience por el análisis de las organizaciones matemáticas que emergen de esta actividad (Chevallard, 2004).

3.4. Fenómenos Didácticos.

La escuela inhibe de manera no intencionada algunas potencialidades matemáticas que tienen los estudiantes a medida que van avanzando en su escolaridad (Espinoza , 2009). Dada la imposición o falta de argumentación al proponer la utilización de los distintos objetos matemáticos y en la forma disociada que se les van presentando a los estudiantes produce que éstos sean excluidos en la construcción del conocimiento matemático.

Esto da paso al concepto de *fenómeno didáctico*, la explicación sólida dada para un conjunto de hechos didácticos que se repiten sistemáticamente frente a algunas variaciones de la situación (Espinoza, 1998).

Algunos de estos elementos que se repiten en forma sistemática son:

- *La gestión de una enseñanza alejada de sus sentidos y significados originarios.* Este factor señala que los conocimientos matemáticos no se presentan como una respuesta a una necesidad del estudiante.

- *La imposición de un único procedimiento para resolver un problema, sin una justificación que permita valorar otras técnicas ni descartarlas.* Se explicita en este punto la ausencia del momento exploratorio en los procesos de estudio. El docente no da espacio a la inspección de técnicas que puedan resultar efectivas para resolver las tareas asignadas y considera los métodos descubiertos como no matemáticos, sólo impone una única técnica.

- *La atomización de temas que no se articulan.* Los nuevos temas que se proponen no se introducen en base a una problemática inicial, como una consecuencia ni como una secuencia, que permita dar sentido a los problemas y contextualizarlos.

- *Una enseñanza que no incorpora suficientemente los conocimientos previos de los alumnos y tampoco se les otorga un rol activo dentro del proceso de construcción de los mismos.* Este punto evidencia que no hay un espacio para preguntas ni discusión de los procesos que se les presentan a los estudiantes.

3.5. Etapas del proceso de Algebrización.

Se describe en la tesis de Noemi Ruiz (2010) cómo puede utilizarse el *instrumento algebraico* para llevar a cabo un proceso de algebrización progresivo partiendo del sistema de los problemas aritméticos.

Identificando la *primera etapa del proceso de algebrización* con el momento en que es *necesario considerar y tratar las técnicas* o *procesos de resolución* de los problemas aritméticos como *objetos* de estudio en sí mismos, es decir, traducir la *formulación retórica* del PCA (programa de cálculo aritmético) a una *formulación escrita en línea* (simbólica). Esta necesidad surge en particular con la aparición de un cuestionamiento tecnológico sobre las técnicas aritméticas. En la enseñanza Secundaria actual en España, debido en particular a la carencia del citado cuestionamiento tecnológico (se "hacen" cosas pero no se requieren justificaciones), para introducir el cálculo algebraico se plantean habitualmente situaciones cuya problemática es meramente formal y cuyo objetivo se agota en la propia traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

En esta primera etapa de nuestro modelo del proceso de algebrización aparece la *necesidad de construir nuevas técnicas*, esencialmente de "simplificación", para trabajar sobre las expresiones algebraicas. Aparecen asimismo nuevos tipos de tareas cuyos datos y cuya respuesta pueden ser *relaciones entre variables* (no tiene por qué ser necesariamente cantidades de magnitud).

En esta etapa se produce también un cambio de las valencias de los ostensivos, en especial del signo "+", "–" e "=". En el nivel de justificación de la actividad se moviliza la jerarquía de las operaciones, las reglas de uso de paréntesis y las propiedades de las operaciones aritméticas. Recordemos que en esta primera etapa de algebrización podemos situar, en particular, aquellos problemas cuya resolución requiere resolver una ecuación de primer grado donde la variable aparece únicamente en uno de los miembros.

En esta primera etapa del proceso se pone de manifiesto de manera incipiente uno de los rasgos característicos y diferenciadores del álgebra respecto a la aritmética: el álgebra permite realizar un *estudio de ciertas relaciones universales independientemente de la naturaleza de los objetos relacionados*. Como consecuencia, se obtienen resoluciones "generalizadas", es decir de todo un *tipo de problemas*, no únicamente la respuesta asociada a un problema aislado como ocurre en aritmética. Por tanto, postulamos que una *primera razón de ser* del álgebra (que ya se pone de manifiesto en la primera etapa del proceso de algebrización) es la de agrupar las tareas e introducir la idea de generalización del proceso de resolución. Este planteamiento rompe con la idea dominante en el actual sistema de enseñanza secundaria, y un tanto simplista, según la cual la principal razón de ser del álgebra escolar consistiría sólo en *simplificar* la solución aritmética "pura" (discursiva) de los problemas mediante el cálculo algebraico.

Hemos identificado la *segunda etapa del proceso de algebrización* con el momento en que para responder a las nuevas cuestiones que aparecen se requiere la igualación de dos expresiones algebraicas o programas de cálculo aritméticos. Se introduce un nuevo objeto matemático, la *ecuación* (en principio con dos incógnitas) y una nueva técnica, la *cancelación* que transforma ecuaciones en ecuaciones equivalentes en un cierto dominio. La tecnología que justifica esta nueva técnica de transformaciones de ecuaciones tiene un origen funcional. Una condición suficiente para que una transformación de una ecuación deje invariante el conjunto de soluciones es que sea una aplicación inyectiva.

Como fue constatado por Bolea (2003) la ausencia de una manipulación sistemática de la estructura global de los problemas en Secundaria se ve reflejada en el hecho de que las "letras" que forman parte de una expresión algebraica juegan únicamente el papel de incógnitas (en las ecuaciones) o únicamente el papel de variables (en el lenguaje funcional), pero los parámetros están prácticamente ausentes. En cualquier caso, el juego sistemático entre las diferentes funciones de los símbolos literales es ignorado completamente. Es en este aspecto que afirmamos que el álgebra escolar tal como se presenta en la ESO española (cuyo objetivo final consiste esencialmente en la traducción de un enunciado del lenguaje natural al lenguaje algebraico y la resolución de problemas con ecuaciones con una incógnita, como expresan explícitamente los libros de texto) se ubica completamente en un trabajo en el modelo que hemos caracterizado como **M2'**. Por tanto, no es de extrañar que en la Secundaria actual no encontremos tareas situadas en el complementario **M2\M2'** y, en consecuencia, una de las principales razones de ser del álgebra (la manipulación de la estructura global) es olvidada y, en su lugar, se toma como razón de ser del álgebra elemental el aprendizaje de la sintaxis, es decir, del conjunto de reglas del lenguaje algebraico.

Hemos identificado la *tercera etapa del proceso de algebrización* con el momento en que se requiere una fuerte *generalización* del tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo debido a la necesidad de responder a cuestiones que requieren no limitar el número de variables y no hacer ningún tipo de distinción entre incógnitas y parámetros. Es también en esta tercera etapa, donde aparece plenamente el trabajo con las *fórmulas algebraicas* y donde consideramos que culmina el proceso de algebrización elemental. Es en esta etapa en la que se hace patente la *razón de ser* del álgebra y en la que surge claramente la necesidad de articular el trabajo algebraico con las técnicas del cálculo diferencial e integral.

Llegados a este punto, el proceso de estudio que estamos describiendo puede tomar diferentes rumbos, en cualquier caso, el paso a la *tercera etapa de algebrización* (que puede hacerse por múltiples caminos) supone un cambio radical de la actividad matemática y la puerta de entrada a la modelización algebraico-funcional debido a que las técnicas algebraicas disponibles son bastantes "limitadas" para responder cuestiones en torno a las fórmulas y las desigualdades. Aparece así la necesidad de introducir nuevas técnicas, en particular funcionales, lo que consideramos como el paso hacia la *modelización algebraico-funcional*.

Capítulo 4: El problema didáctico del álgebra elemental

4.1. El problema didáctico del álgebra elemental

Las diversas investigaciones que se desarrollan en torno al *álgebra elemental* han estado siempre presentes en las publicaciones y trabajos de Yves Chevallard sobre la transposición didáctica, en el desarrollo de la TAD, por lo que se han mencionado con anterioridad estas corrientes, sin embargo a continuación se utilizaran algunas de las principales investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra que se han desarrollado en otros enfoques, dentro de una problemática esencialmente "cognitiva" (siguiendo la terminología propuesta por Gascón (1998)). Donde se plantea que el enfoque cognitivo al problema del álgebra se concentran especialmente en las cuestiones en torno a la relación del álgebra con la aritmética.

4.1.1. La relación del álgebra con la aritmética.

La vinculación del álgebra con lo numérico está condicionada por considerar que el estudio de la aritmética debe situarse en el currículo escolar antes que el estudio del álgebra. Uno de los argumentos sobre los que se sustenta esta decisión es la consideración de la aritmética como "más concreta" y, por lo tanto, más fácil que el álgebra, siendo ésta segunda más "abstracta". Los defensores de ésta cronología temporal entre las dos áreas de la matemática argumentan que el estudio del álgebra requiere un pensamiento formal y que este tipo de pensamiento se desarrolla en etapas avanzadas de evolución del alumno, justificando así el estudio del álgebra después de la aritmética (Lins & Kaput, 2004).

Es Chevallard quien muestra que la función principal del *álgebra* no es la de generalizar la aritmética, sino la de modelizar sistemas intramatemáticos o extra-matemáticos, y por tanto, quien establece el camino a seguir para responder a este cuestionamiento.

Afirma que la enseñanza del álgebra debe promover una dialéctica entre el manejo formal del cálculo algebraico y el contenido de los sistemas numéricos. Este objetivo se deriva en una doble consideración: no podemos tener un dominio del cálculo algebraico, de una forma *funcional*, sin ponerlo en funcionamiento como una *herramienta útil*; y no podemos poner en funcionamiento esta herramienta sin instaurar una verdadera *dialéctica entre lo numérico y lo algebraico*.

Es importante destacar que esta función modelizadora no niega la relación fundamental que existe entre el álgebra y la aritmética, pero sí la jerarquía unidireccional preestablecida entre estos dos ámbitos matemáticos. Desde esta nueva interpretación, la aritmética, o al menos parte de ella, constituye un sistema intra-matemático, entre otros, que el instrumento algebraico puede modelizar.

Diversas investigaciones en el marco de la TAD (Chevallard, 1990; Bolea, Bosch, & Gascón, 1998) han cuestionado explícitamente el modelo epistemológico-didáctico del álgebra dominante en las instituciones escolares. En su tesis, Pilar Bolea (2003), caracteriza la interpretación epistemológica del álgebra escolar con una *aritmética generalizada*. Ésta consiste en la identificación del álgebra elemental con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), frente a un supuesto "lenguaje aritmético". En el mismo trabajo se destacan algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra que recordamos concisamente a continuación:

a) El álgebra escolar se construye en un contexto exclusivamente numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales. Se la considera como un mero *epifenómeno de la aritmética*.

b) Se considera, de manera simplista, que las *expresiones algebraicas* surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos, se supone que ésta es su razón de ser.

c) Las tareas específicamente "algebraicas" se reducen a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números (lo que se suele denominar "cálculo algebraico") y a la resolución de ecuaciones.

d) En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre los *datos* conocidos (valores numéricos) por un lado y las *incógnitas* por otro.

e) Una ecuación se interpreta como una *igualdad numérica* que se cumple para algunos valores concretos de las incógnitas.

Encontramos un gran número de investigaciones en didáctica que asumen esta visión del álgebra como aritmética generalizada, toman como objeto de estudio los obstáculos que surgen en el paso de la aritmética al álgebra. Por ejemplo, las perspectivas psicolingüísticas, que adoptan como modelo de referencia la lingüística general, estudian el paso del "lenguaje aritmético" al "lenguaje algebraico" así como la influencia del "lenguaje natural" en dicho tránsito, siempre enmarcado en una actividad conceptual (Clement, 1982; Cooper, 1984) o bien, el problema de la traducción al lenguaje algebraico de proposiciones numéricas enunciadas en lenguaje natural (Bell & Malone, 1993; Burton, 1988; Kaput, 1983). Los trabajos de Carpenter & Franke (2001) y los de Warren (2001, 2004) indican que muchos alumnos experimentan dificultades al pasar de la aritmética al álgebra debido a la falta de una base aritmética adecuada y a la *desconexión* entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos.

Para salvar las dificultades surgidas en el paso entre estas dos áreas de la matemática enseñada algunos investigadores proponen llevar a cabo una *algebrización de la aritmética*, es decir, introducir progresivamente (y de manera formal) en el cálculo con números la sintaxis propia del cálculo algebraico (Kaput, 2000). Estudios recientes en esta misma línea postulan que la adquisición en edad temprana del pensamiento algebraico evitaría muchas de las dificultades que muestran los alumnos en Secundaria.

4.1.2. El problema de la Ecología del Álgebra Elemental.

La Ecología es un concepto que se extrae de las Ciencias Naturales, específicamente es una rama de la Biología que estudia las relaciones de los seres vivos entre sí y con el medio en el que viven.

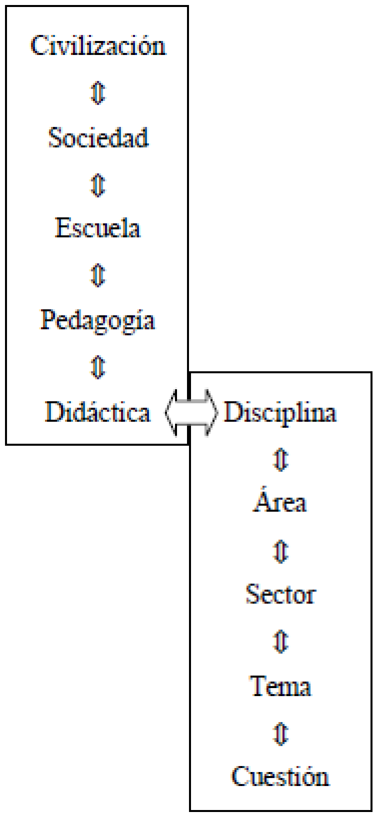
El Problema Ecológico es una idea desarrollada por Ives Chevallard, donde explicita que las cosas, objetos, seres no pueden vivir aislados y en sí mismos, si no que muy por el contrario, las cosas siempre existen porque están conectadas unas con otras, la vida es un sistema, una cadena de eventos y relaciones. Puntualmente habla de la Problemática Ecológica de las Obras Matemáticas en el Curriculum donde plantea que para que se pueda enseñar el álgebra con sentido y con significado tiene que haber un trabajo distinto al que hay hoy en día con el aritmética, con los números y con tantas otras áreas de la matemática, se entiende que para que algo ocurra tienen que haber condiciones en el entorno para que eso pueda pasar, si esas condiciones varían y definitivamente cambian, eso tiene impacto y cambia todo el sistema.

Actualmente al observar el currículum de los contenidos se forma por temas, bastante independientes entre sí, centrados en: la noción de ecuación de primer y segundo grado; el cálculo con expresiones algebraicas (factorización, simplificación, "productos notables"); los polinomios y algunas inecuaciones. La relación con las magnitudes y con la construcción de los sistemas de números es prácticamente inexistente, la relación entre el cálculo de ecuaciones y el cálculo funcional bastante limitada y generalmente unidireccional.

La originalidad del enfoque antropológico, frente a la mayoría de investigaciones didácticas basadas en otras perspectivas, es la de tomar como objeto de estudio todo el proceso de transposición didáctica, sin dar por sentado qué es el álgebra, qué se enseña, cuál es su origen y razón de ser, y poniendo de manifiesto las condiciones ecológicas que permiten que algunos objetos del saber se mantengan en la escuela según unos modos particulares de funcionamiento, otros desaparezcan en algunos momentos y reaparezcan después bajo otros nombres o en otras configuraciones, algunos no consigan establecerse nunca en la enseñanza y otros no se puedan erradicar.

Para analizar las condiciones ecológicas que permiten que determinados objetos y actividades puedan existir en la escuela, Yves Chevallard introdujo la noción de escala de niveles de codeterminación didáctica que amplía y al mismo tiempo estructura el ámbito empírico que el investigador en didáctica debe examinar. La manera de organizar los contenidos matemáticos (organizaciones matemáticas) y los dispositivos y gestos que se necesitan para su enseñanza (las organizaciones didácticas) se requiere que éstos cumplan una serie de condiciones muy específicas sobre estos contenidos. Por ejemplo que exista un tema dentro de un sector y un área de las matemáticas enseñadas donde se puedan ubicar los objetos matemáticos que se quieren enseñar y también las condiciones genéricas sobre la manera de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje en la escuela, los roles que se asigna a la escuela en la sociedad, etc.

Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica según muestra el esquema de la figura.



En cada uno de los niveles se introducen condiciones particulares donde se pone de manifiesto la determinación recíproca entre las organizaciones matemáticas y las didácticas: la forma de estructurar las organizaciones matemáticas en los “subniveles” de la jerarquía (área, sector, tema y cuestión) condiciona las diversas formas de organizar el estudio, pero recíprocamente, los dispositivos didácticos en cada nivel (el social, escolar o pedagógico) determinan a la vez, en gran medida, el tipo de actividades matemáticas que será posible construir en el aula. Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles.

Muchos de los trabajos sobre la enseñanza del álgebra elemental realizados en la TAD han permitido identificar importantes restricciones en casi todos los diferentes niveles de la jerarquía de codeterminación, incluyendo los niveles superiores, de la civilización y la sociedad. En cambio, la mayoría de las demás perspectivas en investigación didáctica parten siempre de una delimitación empírica de los fenómenos didácticos que se circunscribe al ámbito del tema o incluso de ciertas cuestiones más o menos articuladas entre ellas, asumiendo las imposiciones que generan los demás niveles de codeterminación como algo “natural”, transparente e inamovible, peor aún, es incuestionable.

4.2. El álgebra como instrumento de modelización, habilidades y competencias.

Dado el carácter totalmente algebrizado de la matemática superior, el álgebra no aparece como un contenido más de la enseñanza obligatoria al mismo nivel de las demás organizaciones matemática (OM) que se estudian en la escuela (como la geometría o la aritmética), y de las cuales podemos describir sus componentes, sino que la consideraremos, siguiendo a Bolea, Bosch & Gascón (1998) como un *instrumento genérico de modelización* de *todas* las OM escolares, es decir, como una herramienta para modelizar sistemas previamente matematizados dando lugar a lo que los autores anteriores han denominado un *proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas*.

Como hemos dicho, asumiremos la interpretación del álgebra como un instrumento de modelización y para ello es necesario explicitar que se entiende por *modelización* y, en particular por *modelización algebraica* dentro de la TAD.

Es nuevamente en el trabajo de Pilar Bolea donde veremos que esta modelización global permite, en muchos casos, considerar que el *modelo algebraico*, como nueva organización matemática, *constituye una extensión de la organización–sistema* inicial.

Para caracterizar el álgebra escolar como *instrumento de modelización*, propone que la modelización algebraica debería conducir a una ampliación y transformación progresiva del sistema inicial que se estudia, con la incorporación de nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas de resolución, nuevas interpretaciones y nuevos vínculos con otros sistemas (Bolea, 2003).

En el marco del proyecto FONIDE DED0706 (Espinoza L., 2009) se elaboró un modelo que, además de estructurar las competencias en términos de procesos, caracteriza la actividad matemática escolar por medio de cuatro competencias articuladoras del currículo.

El Modelo de Competencia Matemática (MCM) postula que las competencias orientan el diseño y selección de nuevas tareas, dado que expresan prioridades y expectativas de aprendizaje para las matemáticas.

El modelo de competencias matemáticas abarca la resolución de problemas; la representación; razonamiento y argumentación; y manipulación de expresiones matemáticas.

El desarrollo de competencias como Argumentar y Representar necesitan de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo, poner en práctica las herramientas matemáticas, usarlas en variedad de contextos y situaciones reales, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones.

Capítulo 5. Metodología de trabajo

Para abordar la Problemática de Investigación de este trabajo, la Metodología de investigación es de carácter descriptiva-interpretativa y cuasi-experimental. Se compone de cinco fases detalladas a continuación.

Fase 1: Análisis de la Actividad Matemática Escolar en torno al Álgebra

En esta primera instancia se analizará la Actividad Matemática Escolar en torno al Álgebra. Se analizan las Bases curriculares, haciendo una correlación en el Eje de Álgebra en el tercer ciclo de enseñanza, donde se observan los contenidos a trabajar en este eje desde séptimo año de Enseñanza Básica hasta Segundo ano de Enseñanza media. Se focaliza más aún en el Programa de estudio del Primer Año de Enseñanza Media en torno al Eje de Álgebra, clasificando los tipos de tareas y los ejemplos de actividades sugeridas para estos tipos de tareas.

Así también se clasifican y analizan los Objetivos de Aprendizaje según el Texto de Estudio oficial entregado por el Ministerio de Educación. Se clasifican los tipos de tareas que se piden a los estudiantes en el capítulo de álgebra del texto, esto se acompaña de ejemplos concretos de los tipos de tareas que se les pide realizar además de una exhaustiva clasificación de las técnicas que se proponen para cada tipo de tarea.

Se esquematizan los tipos de tareas que se presentan en el texto de estudio, acompañado de un sencillo gráfico donde se puede observar de mejor manera el contenido del texto de estudio en cuanto a la OM que presenta. Además se puede dar cuenta haciendo este análisis documental que hay ciertos Fenómenos Didácticos que se presentan y son motivo de observación y análisis.

Fase 2: Diseño y desarrollo de Propuesta Didáctica

Dado el estudio bibliográfico realizado en base a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y retomando las hipótesis descritas en el capítulo tres junto con la investigación de la problemática descrita en el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra en nuestro país, se construye una Propuesta Didáctica que pretende impactar de buena manera en los estudiantes que se aplica.

Fase 3: Implementación de la Propuesta Didáctica en el colegio

La experimentación se realiza en; una muestra de estudiantes de Primer año medio de un colegio particular de la zona oriente de la Región Metropolitana que constituirá el grupo tratamiento para este trabajo. Estudiantes de este mismo nivel, pero de curso paralelo constituirán el grupo control, esto es alumnos que estudiarán el álgebra sin el apoyo de la propuesta didáctica. En el primer acercamiento se aplica a la muestra un pre test, que cuenta con preguntas de álgebra que incorpora particularmente Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Se implementa la Propuesta Didáctica, donde los estudiantes se enfrentan a problemas que les exige utilizar álgebra y logran experimentar la necesidad de encontrar nuevas técnicas para resolverlo. Una descripción detallada se realiza en el capítulo siete.

Finalmente se construye y aplica un post test tanto al grupo tratamiento como al grupo control y así posteriormente estudiar si muestran diferencias.

Fase 4: Análisis de resultados

Se analizan las producciones y los resultados de los estudiantes del grupo tratamiento frente a la propuesta didáctica. Posteriormente, se realiza un contraste de la información obtenida entre el pre test y el post test por grupo, además se hace el cruce de información entre el grupo con tratamiento y el grupo control, en el pre test y el post test de ambos grupos.

Fase 5: Conclusiones del estudio

Derivado del análisis de los resultados se elaboran las conclusiones de la situación experimental, estas se detallan en el capítulo nueve.

Capítulo 6

Fase 1. Análisis de la Actividad Matemática Escolar en torno al Álgebra: el problema de Enseñanza Aprendizaje del álgebra elemental en Chile

6.1. Curriculum Nacional

En Chile, la actual normativa de establecida por el Ministerio de Educación descrita en las Bases Curriculares señala como uno de los propósitos formativos de la Educación Matemática comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales laborales, sociales y científicos, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

Estas Bases proponen formar un alumno que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él. Se espera que los estudiantes adquieran la capacidad de emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos. Esto implica que deben aprender a aplicar el razonamiento matemático y a utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas para entender, describir, explicar, predecir fenómenos, formular juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias y constructivas.

Se pretende que los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico, que implica seleccionar, ordenar y clasificar consistentemente de acuerdo a criterios bien definidos, así como seguir reglas e inferir resultados. En este ciclo, se pretende además que avancen progresivamente hacia el trabajo deductivo y el pensamiento abstracto, dándole sentido a sus experiencias a partir de premisas o símbolos matemáticos.

La asignatura se focaliza en tres áreas muy marcadas, la resolución de problemas, con esto se busca, por un lado, que los alumnos descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas.

Otro de los énfasis del curriculum de Matemática consiste en que los estudiantes sean capaces de transitar entre los distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Con esto se logra que las expresiones matemáticas tengan un sentido próximo para los estudiantes.

Finalmente las Bases Curriculares dan relevancia al modelamiento matemático. El objetivo de desarrollar esta habilidad es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capture los patrones clave y los exprese mediante símbolos matemáticos.

Asimismo, las habilidades comunicativas y argumentativas son centrales en este escenario. Las primeras se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido. Las segundas permiten a los estudiantes desarrollar una actitud reflexiva y abierta al debate de sus fundamentos.

Por otro lado, las bases de la asignatura promueven el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) fundamentalmente como un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático, para manipular representaciones de funciones y de objetos geométricos, o bien para organizar la información y comunicar resultados. La asignatura se orienta a que los estudiantes comprendan las distintas operaciones matemáticas, por lo tanto el uso de TIC como herramienta de cálculo debe reservarse para las comprobaciones rápidas de cálculos, y para efectuar una gran cantidad de operaciones u operaciones con números muy grandes.

6.2. Organización Curricular

6.2.1. Habilidades

Se desarrollan cuatro habilidades (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos.

Resolver problemas*; s*e habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que

se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución, y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Cabe destacar que la importancia de la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente en problemas tanto rutinarios como no rutinarios. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de los estudiantes no es la solución de un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones.
También es importante que los alumnos desarrollen la capacidad de plantearse problemas y de hacer preguntas. Específicamente, se espera que el alumno logre plantearse nuevos problemas y resolverlos, utilizando conocimientos previos e investigando sobre lo que desconoce, pero que es necesario para llegar a la resolución.

Representar, *p*ara trabajar con matemática de manera precisa, se requiere conocer un lenguaje simbólico (abstracto). Por lo que se propone que los alumnos transiten fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para avanzar progresivamente hacia un lenguaje simbólico. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso de aprendizaje, y dan al alumno la posibilidad de construir sus propios conceptos matemáticos. Representar tiene grandes ventajas para el aprendizaje, entre ellas, permite relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, ligando diferentes niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico); potenciar la comprensión, memorización y explicación de las operaciones relaciones y conceptos matemáticos; y brindarle a las expresiones matemáticas un significado cercano. De esta manera, la matemática se vuelve accesible para todos, se hace cercana a la vida y a la experiencia de todos, y así se amplía el número de estudiantes que aprenden matemática y lo hacen con una adecuada profundidad.
El alumno de este ciclo adquiere conocimientos por medio del “aprender haciendo” en situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos; de esa manera, logra un aprendizaje significativo y desarrolla su capacidad de pensar

matemáticamente. Específicamente, se espera que extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación; que usen e interpreten representaciones concretas, pictóricas y/ o simbólicas para resolver problemas; y que identifiquen la validez y las limitaciones de esas representaciones según el contexto.

Modelar, se considera que modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones.

Así, los alumnos aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. De este modo, las ecuaciones, las funciones y la geometría cobran un sentido significativo para ellos.

Al construir modelos, los alumnos descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente, sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal; además, desarrollan la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, y encuentran soluciones que pueden transferir a otros contextos. Se espera que el estudiante:

• use modelos y entienda y aplique correctamente las reglas que los definen seleccione modelos, comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad.

• ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado

La capacidad de modelar se puede aplicar en diversos ámbitos y contextos que involucren operaciones matemáticas con números reales y/o con expresiones algebraicas, análisis de datos, probabilidad de ocurrencia de eventos y sistemas geométricos.

Por otro lado, usar metáforas de experiencias cercanas ayuda a los estudiantes a comprender conocimientos matemáticos; en el uso de metáforas se reconocen tres ventajas para el aprendizaje: relacionar experiencias personales con el conocimiento formal, potenciar la comprensión, memorización y explicación de conceptos matemáticos, y brindar a las expresiones matemáticas un significado cercano.

Argumentar y comunicar, esta habilidad de argumentar se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. Es importante que los alumnos tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir colectivamente sus soluciones y sus inferencias a diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. Así aprenderán a generalizar conceptos, a utilizar un amplio abanico de formas para comunicar sus ideas, utilizando metáforas y representaciones.

En la Educación Media se apunta principalmente a que los alumnos establezcan la diferencia entre una argumentación intuitiva y una argumentación matemática, y que sean capaces de interpretar y comprender cadenas de implicaciones lógicas; así podrán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones y plantear conjeturas, hipótesis, ejemplos y afirmaciones condicionadas. Se espera que desarrollen su capacidad de verbalizar sus intuiciones y llegar a conclusiones correctamente, y que también aprendan a detectar afirmaciones erróneas, absurdas o generalizaciones abusivas. De esta manera, serán capaces de realizar demostraciones matemáticas de proposiciones, apoyadas por medio de diferentes representaciones pictóricas y con explicaciones en lenguaje natural, para llegar finalmente a un lenguaje matemático. Además, al practicar estas dos habilidades, se fomenta el trabajo en equipo y la búsqueda de soluciones en forma colaborativa, por lo que también se estimula la capacidad de expresar y escuchar ideas de otros, así como la creatividad y la actitud reflexiva.

6.2.2. Ejes temáticos.

En este ciclo, los conocimientos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Algebra y funciones, Geometría y Probabilidad y estadística. Dentro de cada uno de estos ejes, se puede desarrollar cada una de las habilidades descritas recientemente. Para tener una visión sistémica de los todos los conocimientos que aprenden los estudiantes en este curso, así como las habilidades que desarrollan, detallamos aquí brevemente cada uno de ellos.

Números, en este eje, los estudiantes trabajan la comprensión de nuevos conjuntos numéricos y las operaciones entre ellos. Progresan desde los números enteros hasta los números reales. En este camino, comprenden como los distintos tipos de números y sus reglas respecto de las operaciones básicas, permiten modelar situaciones cotidianas más amplias. El trabajo con potencia comienza con la base diez y su uso en la notación científica, y su intención es tratar el concepto de manera concreta, pictórica y simbólica. Se espera además, que comprendan y manejen adecuadamente los porcentajes y las posibilidades de este concepto para modelar situaciones de otras áreas.

El trabajo que efectuaran los alumnos en este eje incluye formas de representar estos "nuevos números", de relacionarlos y de utilizarlos para resolver problemas y para manejarse en la vida diaria. Un énfasis de este eje es representar dichos números en la recta numérica. Se espera que, en este ciclo, los estudiantes sean capaces de aproximar, estimar y calcular con precisión, y tengan una noción clara de lo que es la cantidad, la magnitud y la medida de objetos utilizando estos números.

En cuanto al cálculo, deben ser precisos en los algoritmos, pero siempre en un contexto real y adecuado a la realidad de los jóvenes; es decir, el cálculo debe orientarse a resolver problemas en forma contextualizada y real, más que emplear los algoritmos sin sentido. Se debe fomentar y permitir que los alumnos usen la calculadora cuando ya han aprendido las operaciones elementales en un ámbito numérico limitado.

Se espera que, al final de este ciclo, los estudiantes puedan transitar por las diferentes formas de representación de un número (concreta, pictórica y simbólica).

Álgebra y funciones, se espera que en este eje los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se espera que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre en el contexto de resolver problemas; y que identifiquen regularidades que les permitan construir modelos y expresen dichas regularidades en lenguaje algebraico.

Este eje pone especial énfasis en que los alumnos sean capaces de reconocer modelos y ampliarlos, y en que desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas.

Los aprendizajes en Algebra y funciones se relacionan fuertemente con el eje de Números; un trabajo adecuado en ambos ejes permitirá a los alumnos desarrollar conceptos nuevos cuando cursen niveles superiores y fortalecer los adquiridos en el ciclo anterior. Se espera que, al final de este periodo, los estudiantes comprendan y manipulen expresiones algebraicas sencillas y que establezcan relaciones entre estas expresiones mediante ecuaciones o inecuaciones. Especialmente, se pretende que puedan usar metáforas para interiorizarse del concepto de función y como utilizarla para manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado. Específicamente, se espera que transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas y que sean capaces de justificar su proceder; que expresen igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones y que las apliquen para resolver problemas; que comprendan las funciones lineales las funciones cuadráticas y sus respectivas representaciones, y que resuelvan problemas con ellas.

Geometría, en este eje, se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas. Para lograr esto, los alumnos comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial. Los estudiantes deben describir posiciones y movimientos usando coordenadas y vectores, y tienen que obtener conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones.

Deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos.

Los alumnos aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán poder relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los alumnos tengan más herramientas para la resolución de problemas. Más aun, propone que los alumnos comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso de aprendizaje, los estudiantes deben utilizar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D y se recomiendan tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

Probabilidad y Estadística. Este eje responde a la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos. En el área de la probabilidad, se espera que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias.

Específicamente, se espera que los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados por sexo cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas.

El enfoque de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos. En particular, al final de este ciclo el estudiante debe comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas de la estadística y de la probabilidad misma.

Estos cuatro ejes descritos sintetizan las distintas ramas de la matemática clásica. En el caso del eje de álgebra, muchas veces puede ser visto como un campo conceptual abstracto, fuera de contexto y de aplicabilidad inmediata, presentándose serias deficiencias en la destreza de traducir del lenguaje habitual al lenguaje algebraico y viceversa (Erazo & Ospina, 2013).

6.2.3. Actitudes.

Las Bases Curriculares de Matemática promueven un conjunto de actitudes que derivan de los objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT). Estas actitudes se relacionan con la asignatura y se orientan al desarrollo social y moral de los estudiantes.

Las actitudes son objetivos de aprendizaje y se deben desarrollar de forma integrada con los conocimientos y habilidades propios de la asignatura. Se debe promover el logro de estas actitudes de manera sistemática y sostenida mediante las actividades de aprendizaje, las interacciones en la clase, las actividades extra programáticas, las rutinas escolares y también mediante el ejemplo y la acción cotidiana del docente y de la comunidad escolar.

Las actitudes a desarrollar en la asignatura de Matemática son las siguientes:

a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

b) Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

c) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

d) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

e) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

f) Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

6.3. Progresión de los Objetivos de Aprendizaje

A continuación se presenta la progresión de los objetivos de aprendizaje en el Eje de Álgebra para el Tercer Ciclo de Enseñanza Media, desde Séptimo año básico hasta Segundo año de enseñanza Media, según el Programa de Estudio otorgado por el Ministerio de Educación (Noviembre, 2016). Este eje presenta a su vez una subdivisión de tres temas: Expresiones algebraicas, Funciones y Ecuaciones e inecuaciones.

Eje Álgebra y Funciones			
Expresiones Algebraicas			
7° Básico	**8° Básico**	**1° Medio**	**2° Medio**
Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones. (OA6)	Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas: - representándolas de manera pictórica y simbólica - relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos - determinando formas factorizadas (OA6)	Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: - transformando productos en sumas y viceversa - aplicándolos a situaciones concretas - completando cuadrado de binomio - utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas (OA3)	
Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ (a, b, c є Z) (OA7)			
Funciones			
7° Básico	**8° Básico**	**1° Medio**	**2° Medio**
Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: - realizando tablas de valores para relaciones proporcionales - graficando los valores de la	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - realizando tablas - usando metáforas de máquinas - estableciendo reglas entre x e	Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo),	Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: ($a \neq 0$) - reconociendo la función cuadrática $f(x)$

tabla - explicando las características de la gráfica - resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas (OA8)	y - representación de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn) de manera manual y/o con software educativo (OA7) Mostrar que comprenden la función afín: - generalizándola como la suma de una constante con una función lineal - trasladando funciones lineales en el plano cartesiano - determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo - relacionándola con el interés simple - utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas (OA10)	propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: - creando tablas de valores con *a, b, c f*ijo y *x, y* variable - representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando *c* en la ecuación $ax + by = c$; ($a, b, c \in$ Q (decimales hasta la décima) (OA5)	$= ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas - representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo - determinando puntos especiales de su gráfica - seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda (OA3) ________________ Mostrar que comprenden la inversa de una función: - utilizando la metáfora de la máquina - representándola por medio de tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo - utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico del plano cartesiano - calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas (OA5) ________________ Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: - por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas - identificándolo con el interés compuesto - representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo - expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) – f(t) = a \cdot f(t)$ - resolviendo problemas de la vida

			diaria y de otras asignaturas (OA6)
Ecuaciones e Inecuaciones			
7° Básico	**8° Básico**	**1° Medio**	**2° Medio**
Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: • $ax = b$; $x/a = b$ (a, b y $c \in N$, $a \neq 0$) • $ax < b$; $ax > b$; $x/a < b$; $x/a > b$ (a, b y $c \in N$, $a \neq 0$) (OA9)	Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $x/a = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $x/a + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$ (a, b, c, $d \in Q$) (AO8)	Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo. (OA4)	Resolver de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$) (OA4)
	Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo (OA9)		

6.3.1. Análisis de Objetivos de Aprendizajes en el Eje de Álgebra según el Programa de Estudio de Primero Medio (Marzo, 2014)

Se presentan a continuación los Objetivos de Aprendizaje para la abordar la unidad de Álgebra según lo que plantea el Programa de Estudio de la asignatura de Matemática (Marzo, 2014), específicamente en primer año de Enseñanza Media.

"En esta unidad, los estudiantes resuelven sistemas 2x2 de ecuaciones lineales de manera concreta, pictórica y simbólica, y utilizan representaciones gráficas y de balanzas para determinar soluciones del sistema de ecuaciones. Asimismo, deben diferenciar entre solución única, infinita solución y sin solución. También, se tratan cuatro formas de resolver un sistema 2x2 de ecuaciones lineales, a saber: el método gráfico, por sustitución, por igualación y por reducción. Para estos efectos, se emplea el conocimiento adquirido en la unidad anterior sobre la operatoria con números racionales. Los estudiantes refuerzan lo aprendido sobre función lineal, incorporando la noción de linealidad en dos variables; se recurre a fijar los parámetros a y b de la relación lineal en dos variables y a determinar

relaciones en el gráfico. En esta etapa, el trabajo debe ser sencillo, variado y lento, quedándose en el nivel de haz de rectas paralelas y determinando condiciones sobre el punto de corte con el eje Y. Se desarrolla la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares, considerando algunos ángulos centrales, divisiones del círculo y la noción de perímetro y área del mismo para conjeturar respecto de las fórmulas."(Programa de Estudio Matemática – 1° Medio Ministerio de Educación - Noviembre 2016)

Las Bases Curriculares de Matemáticas establecen un conjunto de Objetivos de Aprendizaje, estos definen los aprendizajes del año para cada asignatura. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que buscan favorecer el desarrollo integral de los estudiantes. En cada unidad se explicitan los Objetivos de Aprendizaje a trabajar. Entre paréntesis se especifica el número del Objetivo en la Base Curricular de la asignatura.

Además el Programa de Estudio describe los Indicadores de Evaluación, estos detallan un desempeño observable (y por lo tanto evaluable) del estudiante en relación con el objetivo de aprendizaje al cual está asociado. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede complementarlos. Cada Objetivo de Aprendizaje cuenta con varios indicadores, dado que existen múltiples desempeños que pueden demostrar que un aprendizaje ha sido adquirido. Los indicadores referentes a un solo aprendizaje no tienen el mismo nivel de dificultad. Se espera que exista una secuencia cognitiva, que comience desde habilidades básicas y termine en habilidades superiores. Adicionalmente, dan espacio para diversas formas de aprendizaje y distintas metodologías. Los indicadores referentes a un solo aprendizaje no tienen el mismo nivel de dificultad. Se espera que exista una secuencia cognitiva, que comience desde habilidades básicas y termine en habilidades superiores. Adicionalmente, dan espacio para diversas formas de aprendizaje y distintas metodologías, independientemente de su nivel de dificultad.

Se presentan a continuación dos columnas, la primera de ellas corresponde a los Objetivos de Aprendizaje de la Unidad de Álgebra, la segunda corresponde a los Indicadores de Evaluación Sugeridos por el Ministerio de Educación de Chile, en el Programa de Estudio de Matemática para Primero Medio a partir del mes de Noviembre del año 2016, para su implementación a partir del año 2017.

Objetivos de Aprendizaje *Se espera que los estudiantes sean capaces de:*	**Indicadores de evaluación sugeridos** *Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
OA 3 Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • transformando productos en sumas y viceversa • aplicándolos a situaciones concretas • completando el cuadrado del binomio • utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas	• Aplican la propiedad distributiva de la multiplicación en productos de sumas. • Representan los tres productos notables mediante la composición y descomposición de cuadrados y rectángulos. • Reconocen los productos notables como caso especial del producto de dos sumas o diferencias. • Reconocen la estructura de los productos notables en su expresión aditiva. • Aplican los productos notables en el desarrollo de expresiones algebraicas. • Aplican los productos notables en la factorización y la reducción de expresiones algebraicas a situaciones concretas. • Aplican la estructura de los productos notables para completar sumas al cuadrado de una suma.
OA 4 Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.	• Verifican que una sola ecuación en dos variables $ax + by = c$ (con a, b, c fijo) tiene como solución infinitos pares ordenados (x/y) de números. • Transforman ecuaciones de la forma $ax + by = c$ a la forma $y = -\frac{a}{b} \cdot x + c/b$, reconociendo la función afín. • Representan sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones, de manera concreta (balanzas), pictórica (gráficos) o simbólica. • Elaboran los gráficos de un sistema de la forma: $ax + by = c$ $dx + ey = f$ • Resuelven sistemas de ecuaciones lineales utilizando métodos algebraicos de resolución, como eliminación por igualación, sustitución y adición. • Modelan situaciones de la vida diaria y de ciencias con sistemas 2x2 de ecuaciones lineales.
OA 5 Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • creando tablas de valores con a, b, c fijo y x, y variable • representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo • escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; (a, b, c ϵ Q	• Elaboran tablas y gráficos para ecuaciones de la forma $ax + by = c$ con a, b valores fijos y c con valores variables. • Reconocen el cociente $-\frac{a}{b}$ como pendiente de la recta con la ecuación $ax + by = c$. • Confeccionan modelos 3D (figuras rectangulares o poligonales en niveles equidistantes) y los proyectan al plano para identificar la proyección de los bordes como líneas de la forma $ax + by = c$. • Reconocen que las líneas con mayor densidad en el plano de proyección representan mayor cambio (pendiente) en el modelo 3D. • Confeccionan un haz de gráficos de funciones afines, sobre la base de la función $f(x/y) = ax + by$ (con a y b fijo). • Resuelven en el plano cartesiano problemas geométricos que involucren ecuaciones de la forma $ax + by = c$.

(decimales hasta la décima))	• Representan fenómenos geográficos y cotidianos mediante funciones lineales *f(x/y)* en dos variables.

Para analizar lo que se espera que los estudiantes aprendan en este nivel se desarrolla la Organización matemática de la unidad detallada anteriormente.

6.3.2. Clasificación de los Tipos de tareas (T_p) del Eje de Álgebra según el Programa de Estudio de Primero Medio (Marzo, 2014)

Una organización matemática nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones (Chevallard, 1997a).

La clasificación del tipo de tarea se desarrolló para investigar si el estudio del Álgebra en el programa de estudio surge a partir de la necesidad de utilizarla como una herramienta para resolver problemas o para modelizar situaciones.

En específico se analizaron detalladamente los Objetivos de Aprendizaje de la unidad de Álgebra que plantea el Programa de Estudio del Primer año de Enseñanza Media (Noviembre, 2016). A continuación se describen las principales tareas matemáticas encontradas en dicho documento.

T_{p1}: Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica:

T_{p1}': Transformando productos en sumas y viceversa

T_{p1}'': Aplicándolos a situaciones concretas

T_{p1}''': Completando el cuadrado del binomio

T_{p1}'''': Utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas

T_{p2}: Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.

T_{p3}: Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma *f(x, y) = ax + by*; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas:

$T_{p3}{}'$: Creando tablas de valores con *a, b, c* fijo y *x, y* variable

$T_{p3}{}''$: Representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo

$T_{p3}{}'''$: Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando *c* en la ecuación *ax + by = c*; (*a, b, c* ϵ Q (decimales hasta la décima))

6.3.3. Ejemplos de Actividades Sugeridas por el Programa de Estudio de Primero Medio (Marzo, 2014)

Para cada tipo de tarea descrita, el Programa de Estudio propone un ejemplo de Actividad sugerida, tal como se muestra a continuación.

T_{p1}: Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica:

$T_{p1}{}'$: Transformando productos en sumas y viceversa

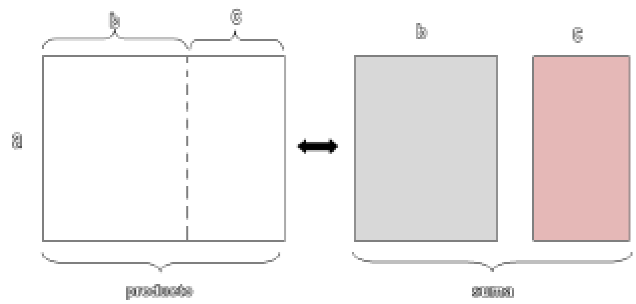
Transforman los siguientes productos en sumas o diferencias y luego relacionan los sumandos con el área del rectángulo:

- $x \cdot (y + z)$
- $x \cdot (x - 5)$
- $2r \cdot (3s + 5t)$
- $(4p - q) \cdot p$
- $\frac{1}{5} \cdot (15m + 20n)$
- $1{,}2b \cdot (4b - 5a)$

(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 60)

T_{p1}'': Aplicándolos a situaciones concretas

Aplican la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

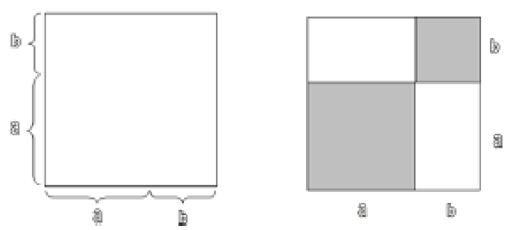


a. Expresan el área del rectángulo grande con las variables *a*, *b*, *c*.
b. Expresan la suma de las áreas de los rectángulos.
c. Explican y comunican la igualdad de ambas expresiones algebraicas.
d. Verbalizan la regularidad, completando la siguiente frase: "El producto de un número con una suma…".

(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 60)

T_{p1}''': Completando el cuadrado del binomio

4) Comparan el cuadrado grande de la izquierda con la figura compuesta de la derecha y luego realizan los ejercicios que se indican más abajo:

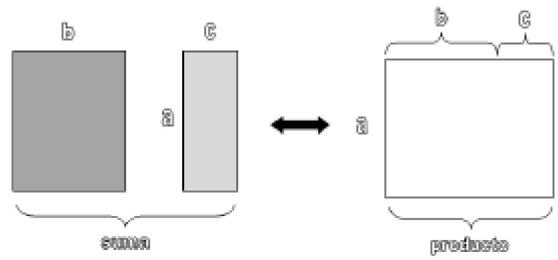


a. Expresan el área del cuadrado de la izquierda con las variables *a* y *b*.
b. Expresan el área de la figura compuesta de la derecha.
c. Explican y comunican la igualdad entre ambas expresiones algebraicas.
d. Verbalizan la regularidad completando la siguiente frase: "El cuadrado de la suma entre *a* y *b*…".
e. Aplican la propiedad conmutativa y comprueban simbólicamente la propiedad del producto notable de la siguiente manera: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \ldots$
f. Aplican el primer producto notable, transformando productos en sumas y viceversa:
   - $(r + s)^2$
   - $(2x + 5)^2$
   - $t^2 + 8st + 16s^2$
   - $(3m + 4n)^2$
   - $25d^2 + 30de + 9e^2$
   - $(3x^2 + 2y^2)^2$

(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 61)

T_{p1}'''': Utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas

3) Aplican la propiedad distributiva para factorizar sumas.

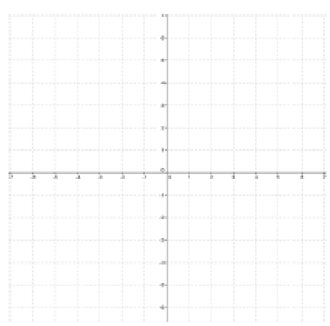


a. Transforman la suma de las áreas de los dos rectángulos en el producto que representa el área del rectángulo grande.
b. Explican y comunican la igualdad de ambas expresiones algebraicas.
c. Verbalizan la regularidad, completando la siguiente frase: "La suma de dos productos con un factor común…".

(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 61)

T_{p2}: Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.

1) Marcan los puntos A(2/0) y B(0/3) sobre el sistema cartesiano de coordenadas. Grafican una recta que pasa por ambos puntos.



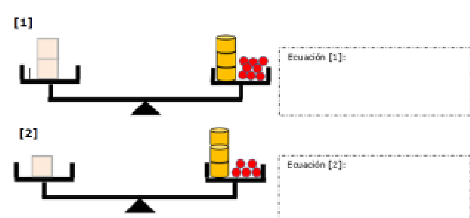
a) Elaboran la ecuación funcional: $y = m \cdot x + n$, que corresponde a la recta que pasa por A y B.
b) Determinan las coordenadas de más puntos que pertenecen al gráfico. Luego completan la tabla siguiente:

x	-4			2	4		8	
y		-3	3			-12		-6

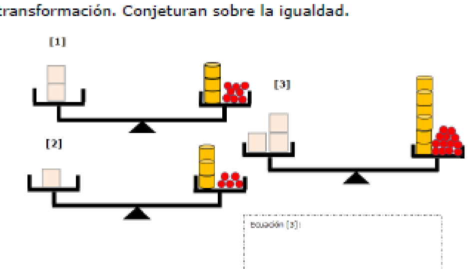
c) Transforman la ecuación funcional a la forma $a \cdot x + b \cdot y = c$ $(a, b, c \in Z)$.
d) Verifican que las coordenadas de los puntos del ejercicio b) también son soluciones de la ecuación $a \cdot x + b \cdot y = c$, reconociendo que hay infinitas soluciones.

(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 76)

4) Representan dos balanzas con un sistema 2x2 de ecuaciones lineales. Los cubos representan la variable y; los cilindros representan la variable x. Las bolas representan unidades de masa.
a. Elaboran las ecuaciones lineales y las escriben en la forma $ax = by + c$.



b. ¿Cómo se obtiene la siguiente balanza [3]? Describen verbalmente el proceso mostrado en el siguiente dibujo. Conjeturan sobre el estado del equilibrio.
Responden: ¿con qué proceso matemático se transforman las ecuaciones [1] y [2] a la ecuación [3]? Realizan simbólicamente la transformación. Conjeturan sobre la igualdad.



(Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 78)

T_{p3}: Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma *f(x, y) = ax + by*; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas:

$T_{p3}{}'$: Creando tablas de valores con *a, b, c* fijo y *x, y* variable

> 1) Los estudiantes marcan en el sistema cartesiano de coordenadas los puntos P(5|0) y Q(0|3).
>
>   d. Elaboran tablas de valores para determinar coordenadas de más puntos por los cuales pasan las rectas.
>
> (Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 82)

$T_{p3}{}''$: Representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo

> 1) Los estudiantes marcan en el sistema cartesiano de coordenadas los puntos P(5|0) y Q(0|3).
>
>   a. Grafican la recta que pasa por los puntos P y Q.
>
> (Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 82)

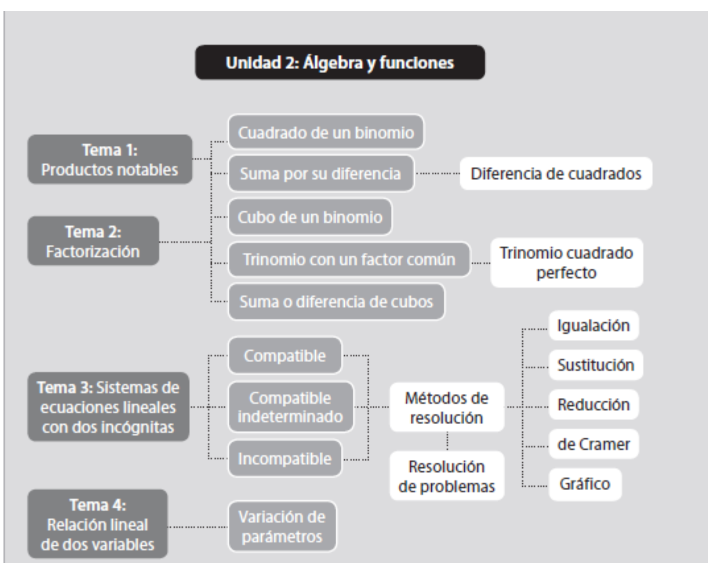
$T_{p3}{}'''$: Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando *c* en la ecuación *ax + by = c*;   (*a, b, c* ϵ Q (decimales hasta la décima))

> 1) Los estudiantes marcan en el sistema cartesiano de coordenadas los puntos P(5|0) y Q(0|3).
>
>   b. Determinan la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y la expresan en la forma *ax + by = c*.
>
>   c. Determinan las ecuaciones de más rectas paralelas a la primera y las grafican en el mismo plano cartesiano.
>
> (Programa de Estudio Matemática 1° Medio, Marzo 2014, página 82)

Se puede observar entonces que los programas proponen Tareas y dejan las Técnicas implícitas sugeridas en las actividades propuestas. Queda por concretar en forma explícita las técnicas asociadas a las tareas en los libros de texto sugeridos por el Ministerio de Educación.

6.4. Análisis de Objetivos de Aprendizajes en el Eje de Álgebra según el Libro de texto que propone el Ministerio de Educación para Primero Medio año 2018

"En esta Unidad se abordan las expresiones algebraicas en contextos multiplicativos, desarrollando los productos notables, así como su camino reciproco, las factorizaciones. También se aborda el estudio de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, observando las infinitas soluciones que generan, para luego conocer los sistemas de ecuaciones y sus diversos métodos de resolución. Finalmente, se enfrentaran a relaciones lineales, analizando cómo se comportan al variar sus parámetros. Estos contenidos establecen las bases para el desarrollo del pensamiento algebraico, que permitirá a los alumnos modelar situaciones que se asocien a la representación algebraica de medidas variables y de relaciones lineales de dos variables, así como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La Unidad se desarrolla en cuatro Temas coherentemente relacionados mediante un hilo conductor (la presencia de la geología en diversos aspectos cotidianos) y la progresión del contenido matemático." (Guía Didáctica del Docente, Matemática 1° Medio, Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, página 57)



(Guía Didáctica del Docente, Matemática 1° Medio, Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, página 57)

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3: Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • transformando productos en sumas y viceversa • aplicándolos a situaciones concretas • completando el cuadrado del binomio • utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.	• Aplican la propiedad distributiva de la multiplicación en productos de sumas. • Representan los tres productos notables mediante la composición y descomposición de cuadrados y rectángulos. • Reconocen los productos notables como caso especial del producto de dos sumas o diferencias. • Reconocen la estructura de los productos notables en su expresión aditiva. • Aplican los productos notables en el desarrollo de expresiones algebraicas. • Aplican los productos notables en la factorización y la reducción de expresiones algebraicas a situaciones concretas. • Aplican la estructura de los productos notables para completar sumas al cuadrado de una suma.
Objetivos de aprendizaje actitudinales	**Indicadores de evaluación**
OA C: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	• Tienen ideas propias y las defienden, sin rendirse fácilmente. • Planifican su trabajo y los procedimientos detalladamente. • Buscan, aceptan sus errores y repiten procesos. • Comprueban en forma autónoma para validar su resultado.

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3: Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • transformando productos en sumas y viceversa • aplicándolos a situaciones concretas • completando el cuadrado del binomio • utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.	• Aplican la propiedad distributiva de la multiplicación en productos de sumas. • Representan los tres productos notables mediante la composición y descomposición de cuadrados y rectángulos. • Reconocen los productos notables como caso especial del producto de dos sumas o diferencias. • Reconocen la estructura de los productos notables en su expresión aditiva. • Aplican los productos notables en el desarrollo de expresiones algebraicas. • Aplican los productos notables en la factorización y la reducción de expresiones algebraicas a situaciones concretas. • Aplican la estructura de los productos notables para completar sumas al cuadrado de una suma.
Objetivos de aprendizaje actitudinales	**Indicadores de evaluación**
OA C: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	• Tienen ideas propias y las defienden, sin rendirse fácilmente. • Planifican su trabajo y los procedimientos detalladamente. • Buscan, aceptan sus errores y repiten procesos. • Comprueban en forma autónoma para validar su resultado.

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 4: Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual o con *software* educativo.	• Verifican que una sola ecuación en dos variables $ax + by = c$ (con a, b, c fijo) tiene como solución infinitos pares ordenados (x, y) de números. • Transforman ecuaciones de la forma $ax + by = c$ a la forma $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$, reconociendo la función afín. • Representan sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones, de manera concreta (balanzas), pictórica (gráficos) o simbólica. • Elaboran los gráficos de un sistema de la forma $\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right\vert$ • Resuelven sistemas de ecuaciones lineales utilizando métodos algebraicos de resolución, como eliminación por igualación, sustitución y reducción. • Modelan situaciones de la vida diaria y de ciencias con sistemas 2x2 de ecuaciones lineales.
Objetivos de aprendizaje actitudinales	**Indicadores de evaluación**
OA A: Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.	• Aplican estrategias conocidos para obtener una solución. • Buscan y prueban estrategias propias y alternativas. • Escuchan los planteamientos de otros. • Crean tácticas propias.

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 5: Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$; como un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados, propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable • representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual o con *software* educativo • escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima).	• Elaboran tablas y gráficos para ecuaciones de la forma $ax + by = c$ con a, b valores fijos y c con valores variables. • Reconocen el cociente $-\frac{a}{b}$ como pendiente de la recta con la ecuación $ax + by = c$. • Confeccionan modelos 3D (figuras rectangulares o poligonales en niveles equidistantes) y los proyectan al plano para identificar la proyección de los bordes como líneas de la forma $ax + by = c$. • Reconocen que las líneas con mayor densidad en el plano de proyección representan mayor cambio (pendiente) en el modelo 3D. • Confeccionan un haz de gráficos de funciones afines, sobre la base de la función $f(x, y) = ax + by$ (con a y b fijo). • Resuelven en el plano cartesiano problemas geométricos que involucren ecuaciones de la forma $ax + by = c$. • Representan fenómenos geográficos y cotidianos mediante funciones lineales $f(x, y)$ en dos variables.
Objetivos de aprendizaje actitudinales	**Indicadores de evaluación**
OA D: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	• Respetan y valoran las opiniones y logros de otros. • Comparten, obedecen y asumen responsabilidades. • Manejan formas de convivencia, como trabajo entre pares, en grupos chicos, en pleno o en forma individual. • Aceptan reglas y plazos. • Trabajan sin supervisión.

6.4.1. Clasificación de los Tipos de tareas (T_p) del Eje de Álgebra según el Libro de texto que propone el Ministerio de Educación para Primero Medio año 2018

Se analizará detalladamente la unidad de Álgebra que plantea el Texto de Estudio que entrega el Ministerio de Educación Chileno para utilizar en los Colegios Municipales y Particulares Subvencionados para la asignatura de Matemática, en el nivel de 1° Medio, diseñado por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana.

Se pretende analizar la actividad matemática en cuanto al reflejo de la manipulación del Álgebra en los Objetivos de Aprendizaje y las actividades que se sugieren.

T_{p1}: Calcular Productos Notables

- $T_{p1.1}$: Calcular el cuadrado de un binomio
- $T_{p1.2}$: Calcular el cubo de un binomio
- $T_{p1.3}$: Aplicar la suma por su diferencia
- $T_{p1.4}$: Aplicar el producto de Binomio con un término en común

T_{p2}: Factorizar

- $T_{p2.1}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común monomio
- $T_{p2.2}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común polinomio
- $T_{p2.3}$: Factorizar mediante diferencia de cuadrados
- $T_{p2.4}$: Factorizar la suma y diferencia de cubos
- $T_{p2.5}$: Factorizar mediante trinomio de cuadrado perfecto
- $T_{p2.6}$: Factorizar el trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + a = (x^n + p)(x^n + q)$ con $p + q = b$ y $p \bullet q = a$

T_{p3}: Comprender el concepto de ecuación lineal de dos incógnitas

- $T_{p3.1}$: Representar la solución de una ecuación lineal de dos incógnitas

T_{p4}: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$T_{p4.1}$: Comprender sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$T_{p4.2}$: Resolver de manera gráfica el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$T_{p4.3}$: Utilizar el método de resolución por igualación para resolver problemas

$T_{p4.4}$: Utilizar el método de resolución por sustitución para resolver problemas

$T_{p4.5}$: Utilizar el método de resolución por reducción para resolver problemas

$T_{p4.6}$: Utilizar el método de resolución por Cramer para resolver problemas

T_{p5}: Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$

$T_{p5.1}$: Comprender una relación lineal de dos variables.

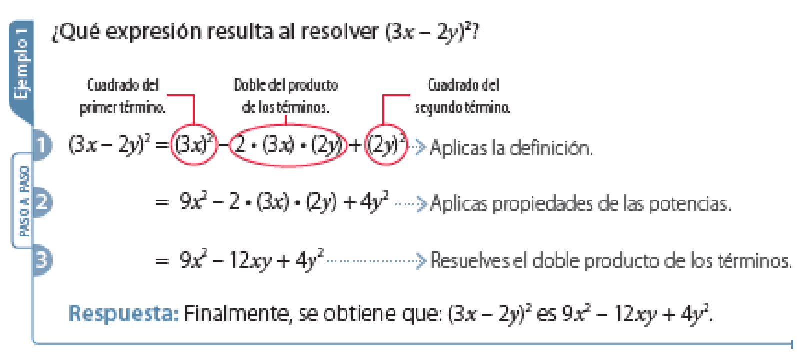
$T_{p5.2}$: Resolver problemas que se modelan con una relación lineal de dos variables

$T_{p5.3}$: Aplicar la variación de parámetros en expresiones de la forma $ax + by = c$ con a, b y $c \in \mathbb{Q}$

6.4.2. Ejemplos de Actividades Sugeridas por el Libro de texto que propone el Ministerio de Educación para Primero Medio año 2018

T_{p1}: Calcular Productos Notables

$T_{p1.1}$: Calcular el cuadrado de un binomio



Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

PASO A PASO

1 $(3x - 2y)^2 = \underbrace{(3x)^2}_{\text{Cuadrado del primer término.}} - \underbrace{2 \cdot (3x) \cdot (2y)}_{\text{Doble del producto de los términos.}} + \underbrace{(2y)^2}_{\text{Cuadrado del segundo término.}}$ → Aplicas la definición.

2 $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2$ → Aplicas propiedades de las potencias.

3 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ → Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 74)

Ejemplo 2

En la siguiente igualdad, ¿qué número debe ir en cada recuadro?

$$(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{} + \boxed{}$$

PASO A PASO

1. En el lado izquierdo de la igualdad el primer término es $5x$ y el segundo término, $2y$.
2. El número que debe ir en el primer recuadro será: "el doble del producto del primer por el segundo término", es decir, $2 \cdot 5x \cdot 2y = 20xy$. El número que debe ir en el segundo recuadro será: "el cuadrado del segundo término", es decir, $(2y)^2 = 4y^2$.
3. Finalmente, se obtiene que: $(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{20xy} + \boxed{4y^2}$

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 75)

Ejemplo 3

¿Qué expresión resulta al resolver $(4x - 5)^3$?

PASO A PASO

1. $(4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3$ → Utilizas el desarrollo del cubo de un binomio.
2. $64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 25 - 125$ → Calculas el valor de las potencias.
3. $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$ → Calculas los productos.

Respuesta: La expresión que resulta es: $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$.

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 75)

$T_{p1.2}$: Calcular el cubo de un binomio

Ejemplo 3

¿Qué expresión resulta al resolver $(4x - 5)^3$?

PASO A PASO

1. $(4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3$ → Utilizas el desarrollo del cubo de un binomio.
2. $64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 25 - 125$ → Calculas el valor de las potencias.
3. $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$ → Calculas los productos.

Respuesta: La expresión que resulta es: $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$.

Ejemplo 4

Si la roca tiene forma de cubo, ¿cuál es su volumen?

PASO A PASO

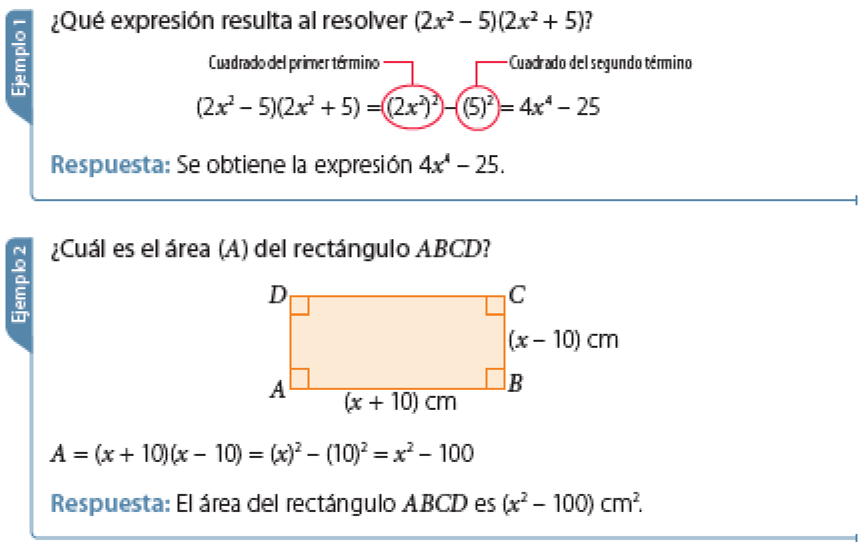
1. La arista mide $(5y + 2x)$ cm.
2. El volumen se calcula con la expresión $(5y + 2x)^3$ cm³.

3. $(5y + 2x)^3 \text{ cm}^3 = (125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3) \text{ cm}^3$.

Respuesta: El volumen es $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm³.

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 78)

$T_{p1.3}$: Aplicar la suma por su diferencia



Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(2x^2 - 5)(2x^2 + 5)$?

Cuadrado del primer término
Cuadrado del segundo término

$$(2x^2 - 5)(2x^2 + 5) = (2x^2)^2 - (5)^2 = 4x^4 - 25$$

Respuesta: Se obtiene la expresión $4x^4 - 25$.

Ejemplo 2

¿Cuál es el área (A) del rectángulo $ABCD$?

$$A = (x + 10)(x - 10) = (x)^2 - (10)^2 = x^2 - 100$$

Respuesta: El área del rectángulo $ABCD$ es $(x^2 - 100)$ cm².

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 78)

$T_{p1.4}$: Aplicar el producto de Binomio con un término en común

(Santillana 1° Medio, Edición especial para el Ministerio de educación, página 79)

T_{p2}: Factorizar

$T_{p2.1}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común monomio

$T_{p2.2}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común polinomio

$T_{p2.3}$: Factorizar mediante diferencia de cuadrados

$T_{p2.4}$: Factorizar la suma y diferencia de cubos

$T_{p2.5}$: Factorizar mediante trinomio de cuadrado perfecto

$T_{p2.6}$: Factorizar el trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + a = (x^n + p)(x^n + q)$ con $p + q = b$ y $p \cdot q = a$

T_{p3}: Comprender el concepto de ecuación lineal de dos incógnitas

$T_{p3.1}$: Representar la solución de una ecuación lineal de dos incógnitas

T_{p4}: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$T_{p4.1}$: Comprender sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$T_{p4.2}$: Resolver de manera gráfica el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$T_{p4.3}$: Utilizar el método de resolución por igualación para resolver problemas

$T_{p4.4}$: Utilizar el método de resolución por sustitución para resolver problemas

$T_{p4.5}$: Utilizar el método de resolución por reducción para resolver problemas

$T_{p4.6}$: Utilizar el método de resolución por Cramer para resolver problemas

T_{p5}: Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$

$T_{p5.1}$: Comprender una relación lineal de dos variables.

$T_{p5.2}$: Resolver problemas que se modelan con una relación lineal de dos variables

$T_{p5.3}$: Aplicar la variación de parámetros en expresiones de la forma $ax + by = c$ con a, b y $c \in \mathbb{Q}$

6.4.3. Identificación de las Técnicas (τ) asociadas a los tipos de tareas (T_p) del Eje de Álgebra según el Libro de texto que propone el Ministerio de Educación para Primero Medio año 2018

Para cada tipo de tarea descrita anteriormente existe una técnica asociada, tal como se muestra

a continuación.

T_{p1}: Calcular Productos Notables

$T_{p1.1}$: Calcular el cuadrado de un binomio

$\tau_{1.1.1}$:

- Calcular el área de un cuadrado de lado (a + b)
- Propiedad distributiva

- Multiplicación de expresiones algebraicas
- Propiedad conmutativa
- Agrupar términos semejantes

$\tau_{1.1.2}$:

- Aplicar la definición
- Aplicar las propiedades de las potencias
- Resolver el doble del producto de los términos

$T_{p1.2}$: Calcular el cubo de un binomio

$\tau_{1.2.1}$:

- Multiplicar un binomio por sí mismo tres veces
- Propiedad distributiva
- Multiplicación de expresiones algebraicas
- Propiedad conmutativa
- Agrupar términos semejantes

$\tau_{1.2.2}$:

- Utilizar el desarrollo del cubo de un binomio
- Calcular el valor de las potencias
- Resolver los productos

$T_{p1.3}$: Aplicar la suma por su diferencia

$\tau_{1.3.1}$:

- Calcular el área del rectángulo de lados (a + b) y (a – b)
- Valorizar por las medidas dadas
- Propiedad distributiva
- Multiplicación de expresiones algebraicas
- Propiedad conmutativa
- Agrupar términos semejantes

$\tau_{1.3.2}$:

- Aplicar el producto notable Suma por su diferencia

$T_{p1.4}$: Aplicar el producto de Binomio con un término en común

$\tau_{1.4.1}$:

- Aplicar el producto notable
- Agrupar términos semejantes

$\tau_{1.4.2}$:

- Aplicar el producto notable
- Aplicar las propiedades de las potencias
- Agrupar términos semejantes

T_{p2}: Factorizar

$T_{p2.1}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común monomio

$\tau_{2.1.1}$:
- Se calcula el MCD entre los coeficientes numéricos
- Se extrae el divisor común entre los factores literales
- Se agrupa por factor común

$\tau_{2.1.2}$:
- Identifica el lado faltante del rectángulo dada su área

$T_{p2.2}$: Comprende la factorización de una expresión algebraica por un factor común polinomio

$\tau_{2.2.1}$:
- Identificar un binomio que es factor común del polinomio

$\tau_{2.2.2}$:
- Asociar los términos
- Factorizar cada paréntesis por factor común
- Factorizar utilizando como factor común un polinomio

$T_{p2.3}$: Factorizar mediante diferencia de cuadrados

$\tau_{2.3.1}$:
- Identificar los términos
- Identificar que es una diferencia de cuadrados
- Identificar la raíz cuadrada de los términos
- Completar la diferencia de cuadrados expresándola como una multiplicación de binomios

$T_{p2.4}$: Factorizar la suma y diferencia de cubos

$\tau_{2.4.1}$:
- Expresar cada término al cubo
- Factorizar la suma de cubos
- Calcular las potencias y productos

$\tau_{2.4.2}$:
- Dada una diferencia de cubos, completar con el término faltante

$T_{p2.5}$: Factorizar mediante trinomio de cuadrado perfecto

$\tau_{2.5.1}$:

- Identificar la factorización de un trinomio como el proceso inverso a encontrar el desarrollo del cuadrado de la suma o diferencia de dos términos

$\tau_{2.5.2}$:
- Identificar la raíz cuadrada del primer y tercer término
- Identificar que el término central es el doble del primer término por el segundo

$\tau_{2.5.3}$:
- Identificar la raíz cuadrada del primer y tercer término
- Completar con el término central identificando que el término central es el doble del primer término por el segundo

$T_{p2.6}$: Factorizar el trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + a = (x^n + p)(x^n + q)$ con $p + q = b$ y $p \bullet q = a$

$\tau_{2.6.1}$:
- Identificar la raíz cuadrada del primer término
- Determinar dos números p y q tales que $p + q = b$ y $p \bullet q = a$
- Escribir como producto de dos binomios

$\tau_{2.6.2}$:
- Identifica el lado faltante del rectángulo dada su área

T_{p3}: Comprender el concepto de ecuación lineal de dos incógnitas

$T_{p3.1}$: Representar la solución de una ecuación lineal de dos incógnitas

$\tau_{3.1.1}$:
- Despejar la incógnita y por medio de la manipulación de expresiones algebraicas
- Expresar la ecuación lineal de dos incógnitas de la forma $y = mx+n$

$\tau_{3.1.2}$:
- Dada la ecuación de la recta dar valores para x utilizando una tabla de valores

$\tau_{3.1.3}$:
- Ubicar los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano dada una ecuación lineal de dos variables

$\tau_{3.1.4}$:
- Obtener la ecuación representada en el plano cartesiano
- Por medio del intercepto y de la pendiente

T_{p4}: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$T_{p4.1}$: Comprender sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$\tau_{4.1.1}$:

- Definir las incógnitas x e y
- Definir las ecuaciones
- Plantear el sistema de ecuaciones

$T_{p4.2}$: Resolver de manera gráfica el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$\tau_{4.2.1}$:

- Se registran valores para cada ecuación en las tablas de valores
- Se ubican los puntos de cada tabla en un mismo plano cartesiano
- Se trazan las rectas dados los puntos anteriores
- Se reconoce la solución como el punto de intersección entre las dos rectas

$T_{p4.3}$: Utilizar el método de resolución por igualación para resolver problemas

$\tau_{4.3.1}$:

- De ambas ecuaciones se despeja una de las dos incógnitas
- Se igualan ambas ecuaciones
- Se obtiene el valor de una incógnita
- Se reemplaza ese valor en una de las ecuaciones originales
- Se obtiene el valor de la otra incógnita
- Comprobar las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales

$T_{p4.4}$: Utilizar el método de resolución por sustitución para resolver problemas

$\tau_{4.4.1}$:

- Identificar y definir las incógnitas x e y
- Plantear las ecuaciones
- Plantear el sistema de ecuaciones
- Se despeja x o y de una de las ecuaciones
- Se reemplaza esa incógnita en la otra ecuación
- Se obtiene el valor de una de las incógnitas
- Se reemplaza el valor obtenido en la otra ecuación
- Se obtiene el otro valor
- Comprobar las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales
- Se responde el problema

$T_{p4.5}$: Utilizar el método de resolución por reducción para resolver problemas

$\tau_{4.5.1}$:

- Identificar y definir las incógnitas
- Plantear las ecuaciones
- Plantear el sistema de ecuaciones
- Multiplicar cada ecuación por un coeficiente numérico de tal manera que en una de las ecuaciones quede el inverso aditivo de la otra para la misma incógnita
- Se suman ambas ecuaciones
- Se obtiene el valor de una de las incógnitas
- Se reemplaza el valor obtenido en una de las ecuaciones originales
- Se obtiene el otro valor
- Comprobar las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales
- Se responde la pregunta del problema

$T_{p4.6}$: Utilizar el método de resolución por Cramer para resolver problemas

$\tau_{4.6.1}$:

- Se expresan las ecuaciones de la forma: $ax + by = c$
  $dx + ey = f$
- Se calcula el determinante del sistema Δ
- Se calcula el determinante para Δx
- Se calcula el determinante para Δy
- Se utiliza el método de Cramer para calcular x, esto es $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$
- Se utiliza el método de Cramer para calcular y, esto es $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$
- Comprobar las soluciones obtenidas reemplazándolas en las ecuaciones iniciales
- Se responde el ejercicio

T_{p5}: Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$

$T_{p5.1}$: Comprender una relación lineal de dos variables.

$\tau_{5.1.1}$:

- Valorizar expresiones
- Verificar igualdades

$\tau_{5.1.2}$:

- Construir una tabla de valores para x e y dada una relación entre dos variables

$\tau_{5.1.3}$:

- Dada una relación lineal entre dos variables, representarla como una ecuación lineal de dos incógnitas

$\tau_{5.1.4}$:

- Dada una relación lineal entre dos variables, representarla como una ecuación lineal de dos incógnitas
- Ordenar la relación lineal para encontrar la pendiente y el coeficiente de posición de la ecuación de la recta

$T_{p5.2}$: Resolver problemas que se modelan con una relación lineal de dos variables

$\tau_{5.2.1}$:

- Dada una relación lineal entre dos variables, escribirla de la forma y = mx + n
- Hacer la tabla de valores
- Graficar los puntos
- Graficar la recta
- Interpretar las soluciones
- Dar respuesta al problema

$\tau_{5.2.2}$:

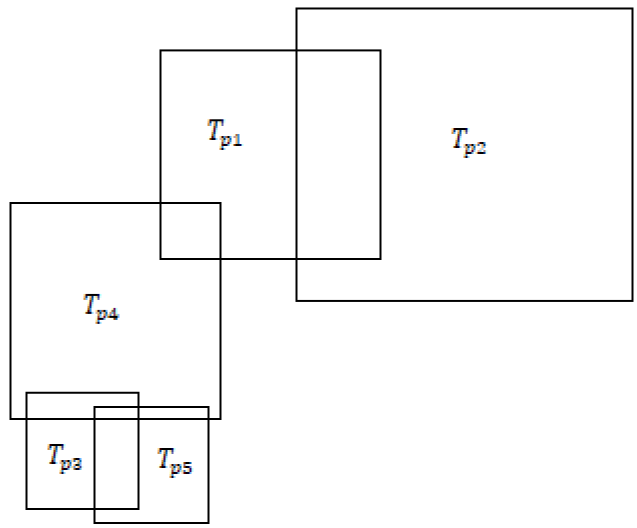
- Dada una relación lineal entre dos variables ordenar la relación de la forma y = mx + n
- Identificar la pendiente de la recta
- Identificar el coeficiente de posición

$T_{p5.3}$: Aplicar la variación de parámetros en expresiones de la forma $ax + by = c$ con a, b y $c \in \mathbb{Q}$

$\tau_{5.3.1}$:

- Dadas las rectas representadas en un plano cartesiano, calcular la pendiente de cada una de ellas para verificar si son paralelas
- Escribir la ecuación $ax + by = c$ que representa cada recta en la gráfica
- Generalizar el haz de rectas paralelas con la ecuación $ax + by = c$ donde c $\in \mathbb{Q}$

A continuación se presenta un Mapa de Tareas Matemáticas que permite tener una visión sintética de la cantidad de tareas propuestas en el estudio del Álgebra, así como del papel que ocupan dentro la Organización Matemática. Una mayor preporencia de una tarea matemática en el estudio se traduce en el mapa a un mayor tamaño del rectángulo que la representa. Esta preponderancia se obtiene a partir del tipo de tratamiento que sa da a cada tarea en libro de texto, desde su aboradaje y trabajo matemático implicado, definiciones, explicaciones y argumentaciones, así como por la cantidad de ejercicios realizados y propuestos a los estudiantes.



El Mapa o Esquema muestra que las tareas T_{p1} y T_{p2} comparten espacio, esto se debe a que ambas involucran aspectos de técnicas comunes, en este caso productos notables, es más, son tareas inversas, la factorización con la multiplicación o el desarrollo de expresiones algebraicas. Mientras que T_{p4} y T_{p1} comparten sólo la manipulación y desarrollo de productos notables. La tarea T_{p3} hace referencia a la ecuación lineal con dos incógnitas mientras que T_{p4} utiliza dos de estas ecuaciones y platea diversos métodos de resolución (sistemas de ecuaciones). Además T_{p5} se relacionan con T_{p4} cuando se trabaja con dos rectas paralelas y tiene en común con T_{p3} que trata la ecuación lineal y la relaciona con sus parámetros, por lo que se trabaja con la estructura de función afín.

Finalmente se puede extraer del Esquema y del análisis de las tareas descritas por el libro de texto Santillana que facilita el Ministerio de Educación, que una parte muy importante de la cantidad total de tareas es de manipulación algebraica, casi un 61%, mientras que solo el 39% restante es de análisis.

6.4.4. Estadística de los tipos de tareas (T_p) en el Eje de Álgebra según el Libro de texto que propone el Ministerio de Educación para Primero Medio año 2018

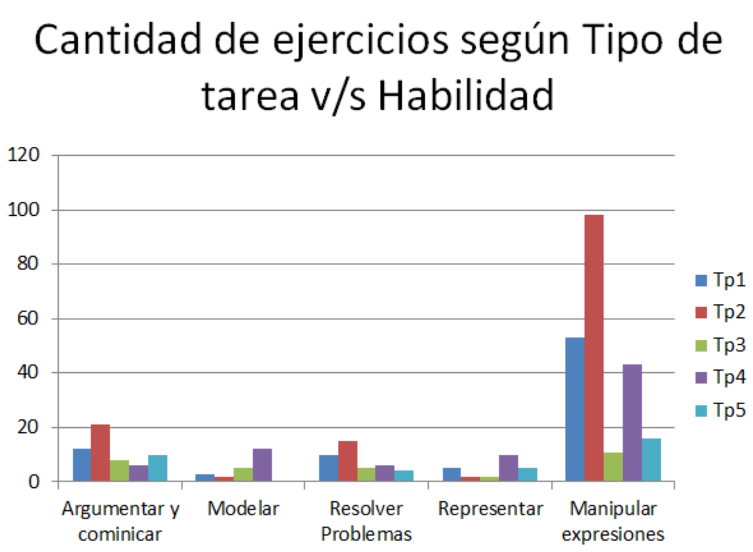
A continuación se presenta una tabla que muestra la cantidad total de ejercicios según habilidad (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que propone el Ministerio de Educación y según el tipo de tarea T_p que se había descrito anteriormente.

T_p / Habilidad	T_{p1}	T_{p2}	T_{p3}	T_{p4}	T_{p5}	Total Ejercicios por Habilidades
Argumentar y comunicar	12	21	8	6	10	**57**
Modelar	3	2	5	12	0	**22**
Resolver problemas	10	15	5	6	4	**40**
Representar	5	2	2	10	5	**24**
Manipular expresiones	53	98	11	43	16	**221**
Total Ejercicios por Tareas	**83**	**138**	**31**	**77**	**35**	**364**

Es pertinente hacer la observación que si bien en el curriculum nacional no se presenta la manipulación de expresiones algebraicas como una habilidad, la tendencia es clara, se expresa a continuación el resultado en porcentaje:

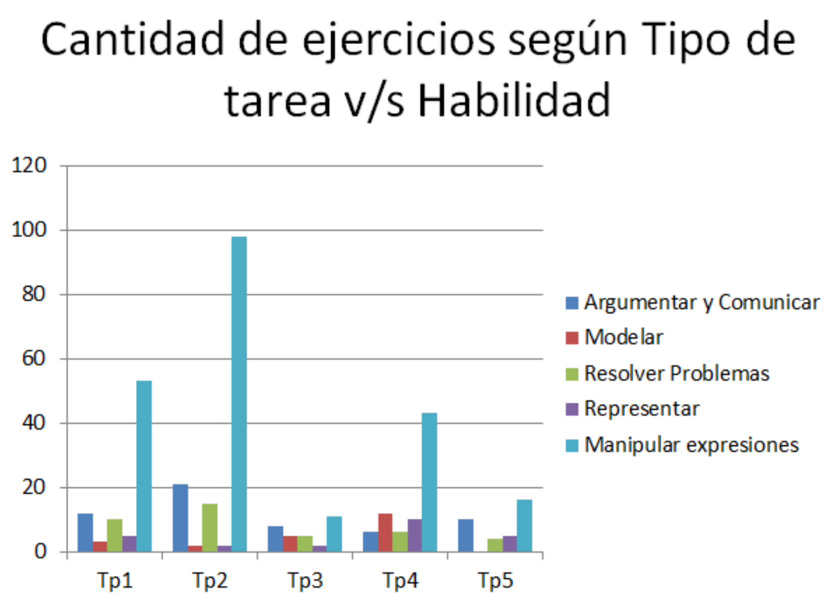
T_p / Habilidad	T_{p1}	T_{p2}	T_{p3}	T_{p4}	T_{p5}	% Total Ejercicios por Habilidades
Argumentar y comunicar	3,3	5,8	2,2	1,6	2,7	**15,7**
Modelar	0,8	0,6	1,4	3,3	0	**6**
Resolver problemas	2,7	4,1	1,4	1,6	1,1	**11**
Representar	1,4	0,6	0,6	2,7	1,4	**6,6**
Manipular expresiones	14,6	27	3	11,8	4,4	**60,7**
% Total Ejercicios por Tareas	**22,8**	**37,9**	**8,5**	**21,2**	**9,6**	**100**

Otra manera de exponerlo es en su representación gráfica:



En la información del gráfico se entiende que Manipular expresiones matemáticas es la habilidad dominante, es sin duda la que más trabaja el libro de texto, ya que todas las tareas se vinculan a esta habilidad. El modelo de competencias matemáticas (MCM) define y ubica esta habilidad junto a la resolución de problemas; la representación; razonamiento y argumentación; que están presentes en nuestro currículum nacional (Espinoza L., 2009, Proyecto FONIDE).

Las habilidades menos trabajadas son Representar y Modelar, le siguen Argumentar y Comunicar y luego resolver problemas. Manipular expresiones matemáticas está muy por sobre el desarrollo de las otras habilidades.



Si bien la organización de este gráfico es distinta, se aprecia que la tarea T_{p2}, correspondiente a factorización, es la que predomina ante las otras tareas y se demuestra un tratamiento notoriamente mayor que a las otras tareas propuestas en el libro de texto. Aun así, independientemente de la tarea que se represente, la habilidad que más se moviliza es la manipulación de expresiones matemáticas.

6.5. Confirmación de Hipótesis

Es clara la tendencia que se muestra en los documentos oficiales, las Bases Curriculares y en particular el Programa de Primer año de Enseñanza Media, exponen el Álgebra como una manipulación de expresiones, que sin duda es necesaria, pero no se centra en la comprensión y buena utilización del Álgebra, entendiendo por esto último una herramienta útil para resolver distintos tipos de problemas. Convirtiéndose así en una enseñanza carente de sentido ya que la forma en la que se presenta el álgebra no responde a una necesidad.

Asimismo, la habilidad de modelación al servicio de la resolución de problemas es casi nula. Y, la comunicación y argumentación igualmente son escasamente trabajadas, y cuando aparecen lo hacen casi exclusivamente para comentar y/o justificar un potencial error.

Se puede observar además un conjunto de hechos didácticos que se repiten en forma sistemática por lo que podemos hablar de la presencia de *fenómenos didácticos*, un conjunto de hechos didácticos que se repiten sistemáticamente frente a algunas variaciones de la situación (Espinoza, 1998). Particularmente en el Libro de Texto se presentan una serie de tareas a resolver por los estudiantes sin innovar en el tipo de problema, por lo que responde a un enfoque conductista que presenta una imposición de un procedimiento único para su resolución, sin dar el espacio a una justificación que permita valorar una técnica a utilizar ni descartarla porque la impone implícitamente, “esto se hace así”. Por lo que los estudiantes son capaces de manipular expresiones algebraicas pero muchas veces no logran modelar situaciones ni resolver problemas por medio del Álgebra.

Al observar el análisis de las tareas matemáticas propuestas por el libro de texto se puede notar un gran predominio del trabajo algebraico por sobre la resolución de problemas algebraicos, además esto deja entrever un desfase entre las bases curriculares y la implementación de estas en el aula ya que las tareas problemáticas iniciales se convierten en tareas rutinarias. En otras palabras, los tipos de problemas y técnicas asociadas constituyen un “saber hacer”, que recae en la práctica de la actividad matemática, es decir, los objetos matemáticos aparecen de una forma atomizada, los temas no se articulan y no tienen sentido, no tienen un orden lógico, cronológico o un contexto por el cuál puedan surgir naturalmente. Los estudiantes aprenden el álgebra como una generalización de la aritmética que sigue ciertas reglas, por lo que se aprende de manera atomizada e impuesta, no por una necesidad.

Con todos estos antecedentes se plantea la necesidad construir una propuesta didáctica que ayude a dilucidar este diagnóstico y contribuir de alguna manera para revertir o minimizar estos fenómenos didácticos.

Capítulo 7

Fase 2: Diseño y desarrollo de la Propuesta Didáctica

Luego de la revisión y posterior análisis de la documentación oficial, en particular, del Programa de Estudio del Primer año de Enseñanza Media, se diagnosticó la escasa importancia que se le da al Álgebra como una herramienta de modelización y un instrumento de resolución de problemas reales, con significado y contexto acorde en el currículum nacional.

Se genera una propuesta didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico utilizando y haciéndose cargo del proceso de sucesivas y constantes adaptaciones que deben experimentar los conocimientos matemáticos para ser enseñados, se sostiene a su vez que aprender matemática consiste esencialmente en hacer matemática y por lo tanto recae en la realización de una práctica.

Retomando lo anterior, el currículum se hace cargo de la realización de la práctica de la técnica más no de la esencia de hacer matemática.

Es en este sustento que se genera una situación didáctica que se hace cargo del que el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra responda a una problemática real para el estudiante, es decir, la utilización del álgebra como una necesidad para resolver un problema y no como una imposición de técnicas arbitrarias.

Por lo que se desea desarrollar una propuesta didáctica que contribuya a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra en Primer año de Enseñanza Media.

7.1. Descripción Global de la Propuesta Didáctica:

La propuesta didáctica comienza con un conjunto de problemas que son resolubles aritméticamente de tal modo que los estudiantes, apoyándose en sus aprendizajes previos, son capaces de recurrir a técnicas conocidas para resolverlos. Posteriormente se les plantea un problema (Imagen 5) donde las herramientas aritméticas no son suficientes para resolverlo, por lo que deben modificar sus técnicas o bien, construir una técnica nueva. Una vez aparece esta manera distinta de solucionar los problemas se proponen tres ejemplares más de ese tipo, para que los estudiantes pongan a prueba su nueva técnica y la consoliden.

Posteriormente aparece un segundo hito en la guía (Desafío 1), que pone a prueba esta nueva técnica, ya que tampoco es resoluble por ese método y requiere de una manipulación algebraica distinta, esta nueva técnica será de gran utilidad para resolver también los Desafíos 2 y 3.

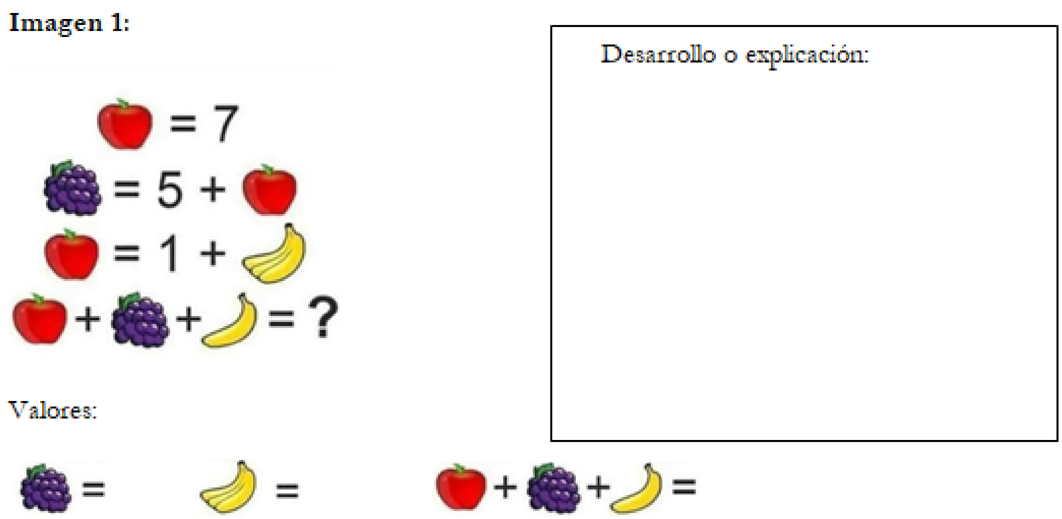
Con esta sucesión de ejercicios propuestos se pretende ofrecer una oportunidad a los estudiantes para que ellos construyan técnicas algebraicas a partir de las herramientas previas que manejan y los desafíos planteados.

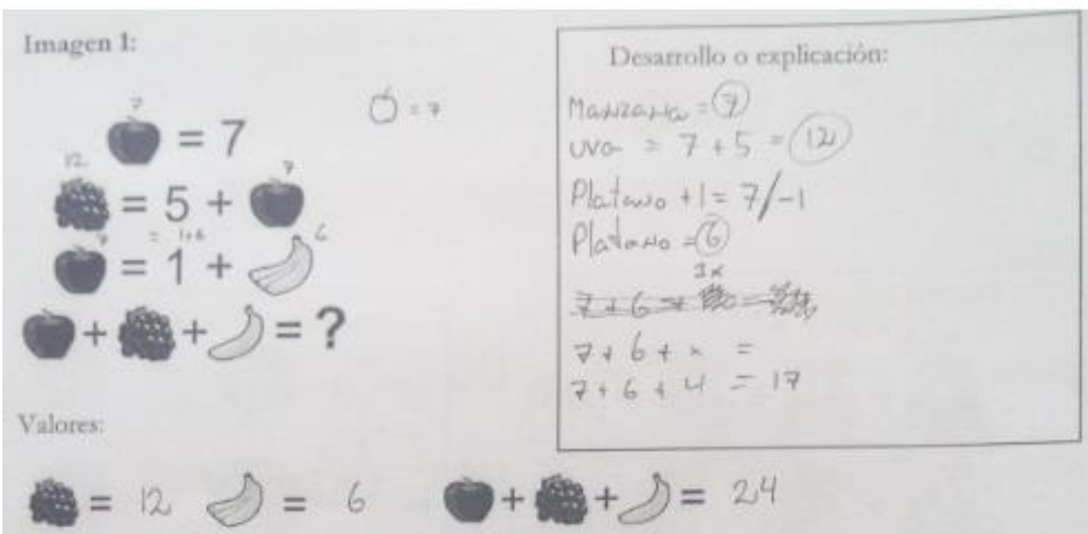
Se espera que los propios estudiantes se encuentren con la necesidad real de construir herramientas distintas a las aritméticas que ya conocen y experimentar maneras diferentes de razonar y resolver estos nuevos problemas.

7.2. Descripción detallada de la propuesta didáctica

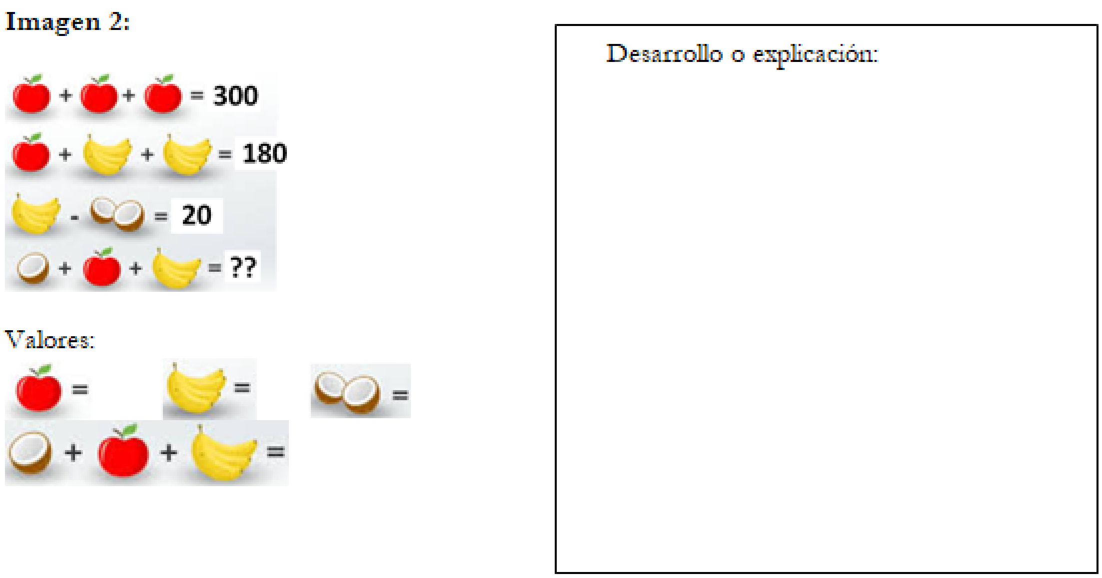
Se presenta a los estudiantes una Guía de trabajo (Anexo IV) en donde se les plantea primeramente cuatro problemas resolubles haciendo cálculos aritméticos con los datos que ahí aparecen de manera directa. A este *tipo de problemas* o tarea le llamaremos T_1. Los ítems son los que se presentan a continuación; los acompañamos de algunas producciones de los estudiantes frente a cada problema para ilustrar cómo funcionaron en el aula.

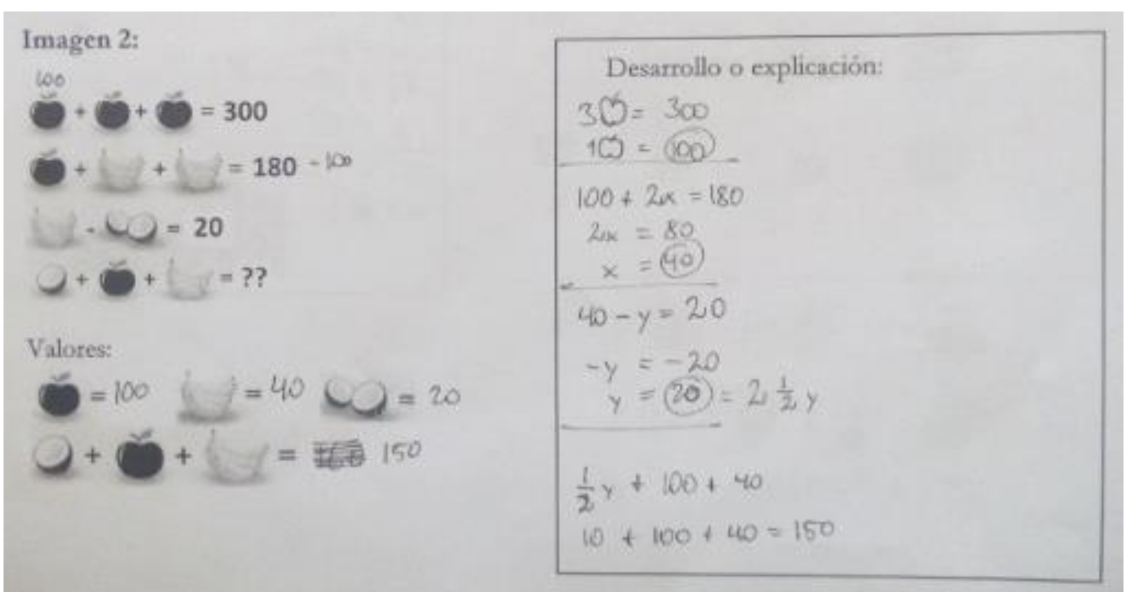
Problema 1 y la producción de un estudiante en respuesta al Problema1:



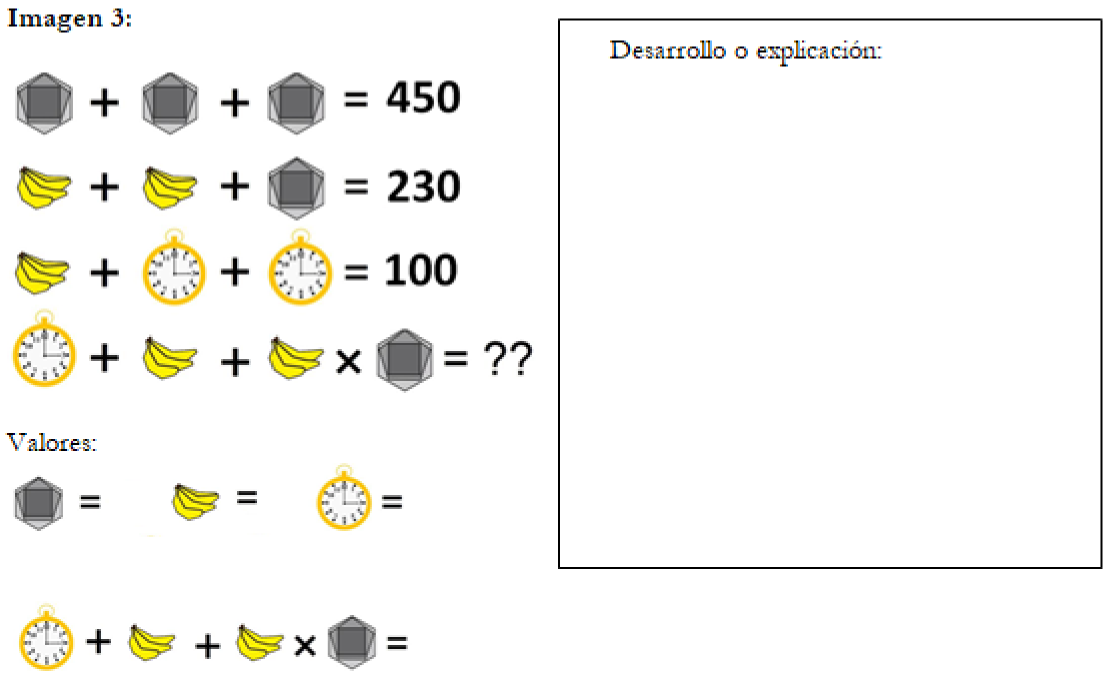


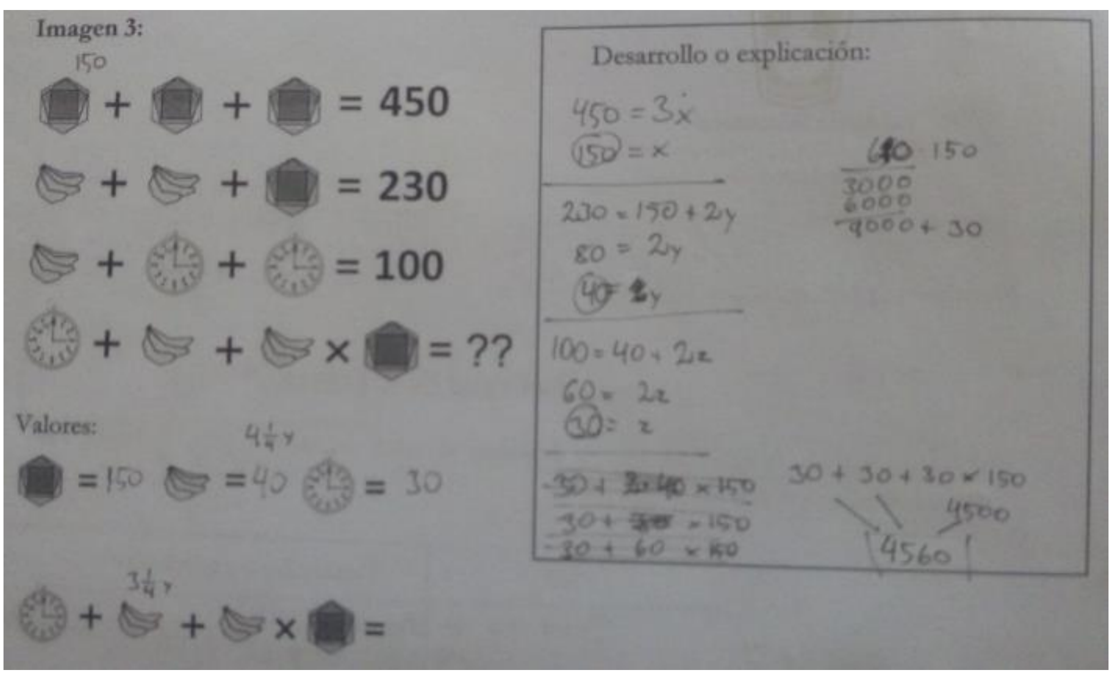
Problema 2 y producción de un estudiante en respuesta al Problema 2:



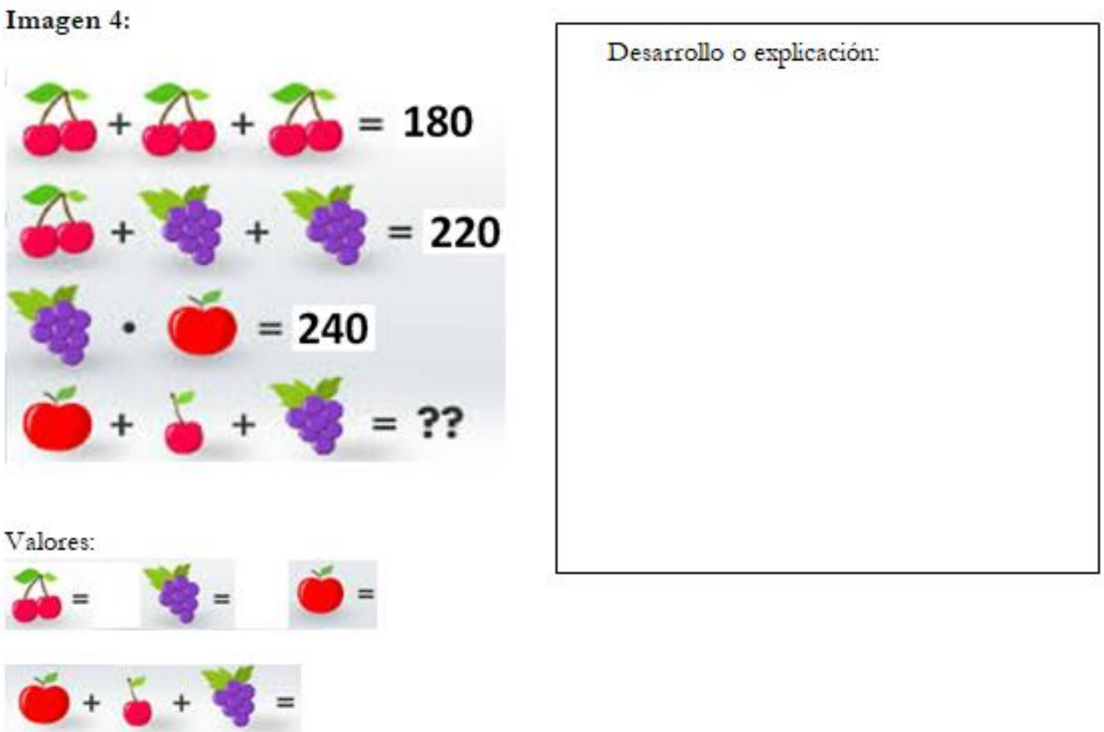


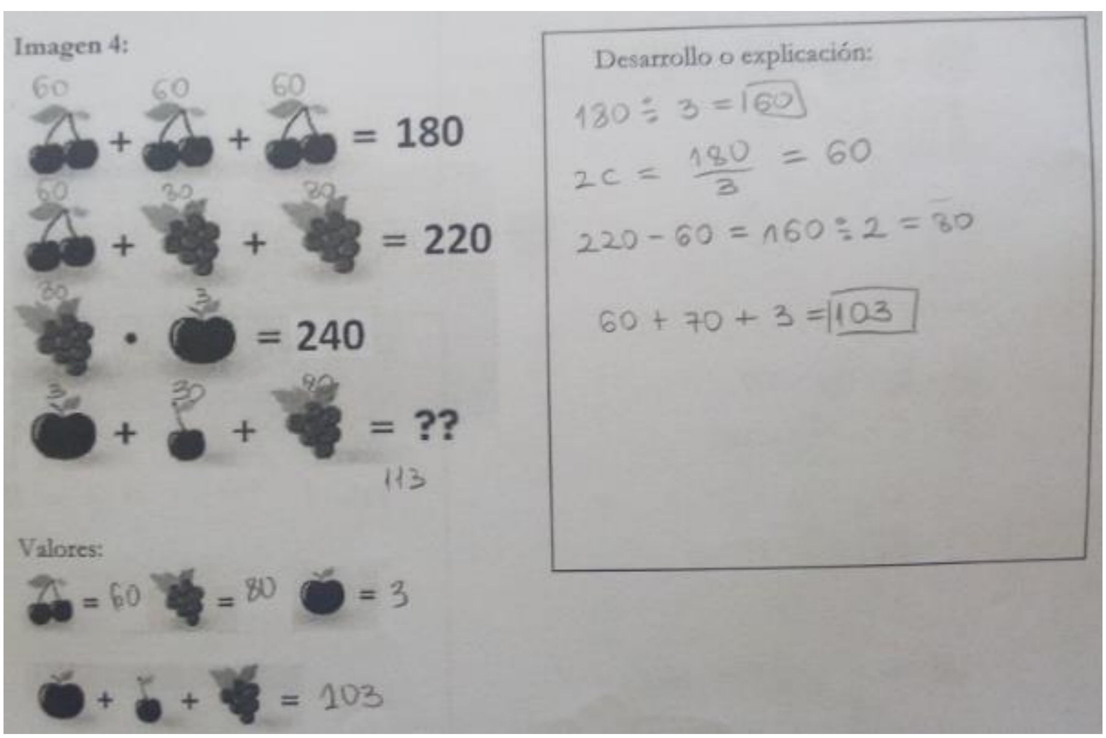
Problema 3 y producción de un estudiante en respuesta al Problema 3:





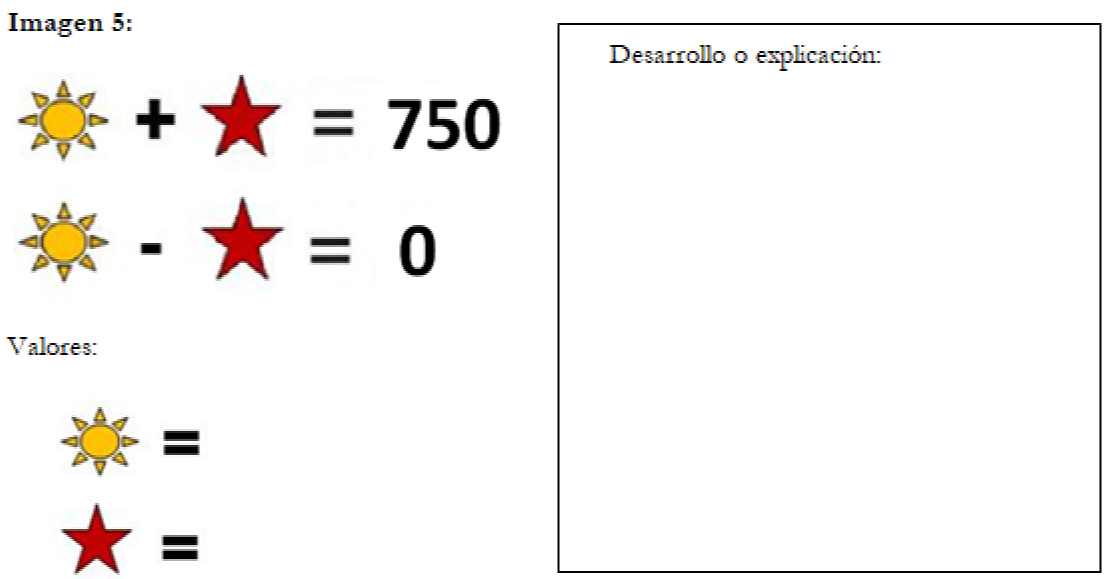
Problema 4 y producción de un estudiante en respuesta al Problema 4:





Cabe mencionar que los problemas son planteados en base a diversos objetos conocidos para ellos (figuras, frutas, animales), esto será motivo de análisis en el próximo capítulo. En definitiva se les pide calcular el valor de un objeto en base a otros conociendo todos sus valores.

Luego se propone el problema 5 que con simple aritmética no es posible resolverlo. Es el primer hito de quiebre en esta propuesta didáctica. Se presenta entonces el siguiente programa de cálculo aritmético:



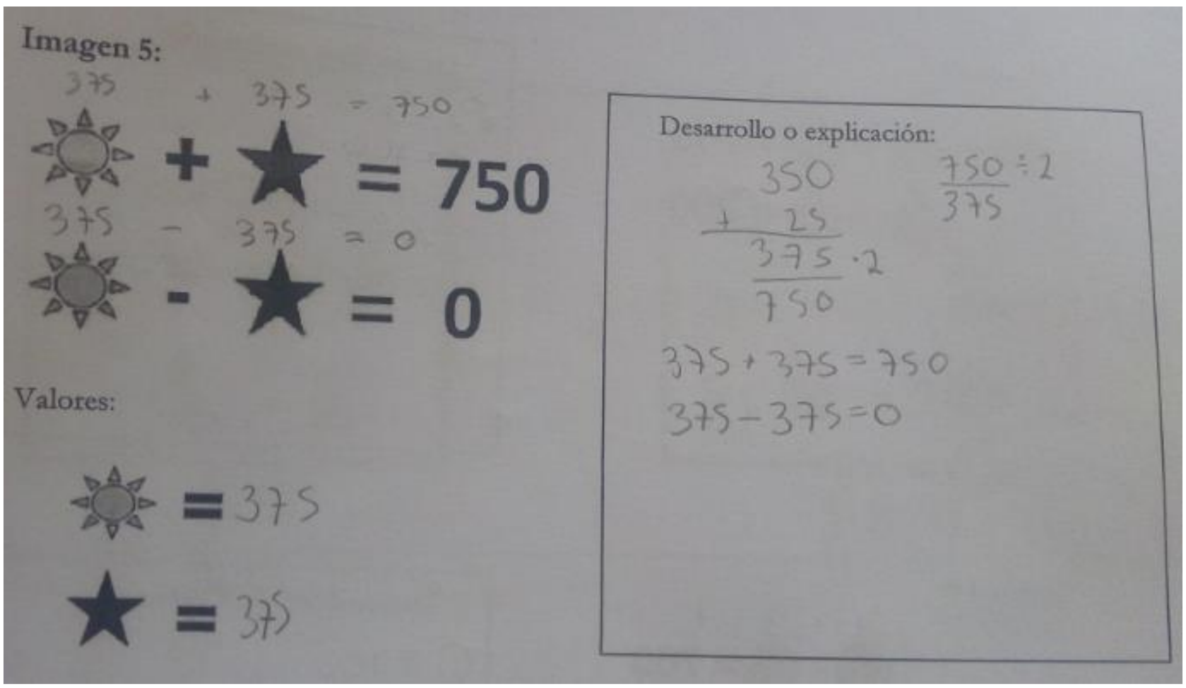
El tipo de tarea cambia, ahora para resolver no basta de un objeto extraer el valor del otro, sino que deben igualar ambas estructuras para poder despejar las variables que se les presentan. Es en esta situación donde los estudiantes utilizan sus conocimientos previos, ellos por medio de procesos aritméticos encontraron los valores que se les pedían en los problemas 1, 2, 3 y 4, utilizaron las propiedades de los números naturales, enteros y racionales, prioridad de la operatoria, e incluso plantearon ecuaciones para obtener el valor de la imagen que les faltaba, también utilizaron el tanteo (probaron con ciertos números) esa también es una técnica, es decir, utilizaron todas las técnicas que han aprendido en los años anteriores.

En el problema 5, por el contrario, no puede obtenerse directamente el valor de los objetos, basándose únicamente en una de las dos igualdades dadas, se presenta un Sistema de

Ecuaciones lineales de dos incógnitas con dos ecuaciones, este contenido es nuevo para ellos y se trabaja en este nivel por lo que se eligió para centrar la propuesta didáctica. Al no conocer esto como objeto matemático, los estudiantes tienden a probar todas las técnicas anteriormente mencionadas, varios fracasan, pero lo intentan.

Es un problema que no es complejo de valorizar por los números que aparecen en las ecuaciones, los estudiantes analizan la segunda ecuación y conjeturan que la resta del sol con la estrella resulta cero, por lo que deben ser el mismo número. La primera ecuación dice que ambos suman 750, es decir cada uno de los objetos, sol y estrella valen 375.

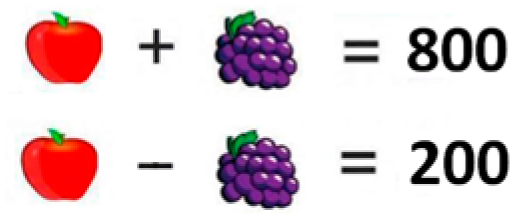
Como se puede apreciar en la producción de un estudiante al Problema 5:



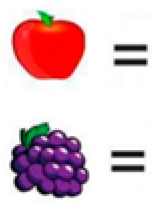
En este análisis no están igualando dos ecuaciones pero si están realizando una operación matemática que antes no habían hecho. Sin saber han experimentado la matemática, han resuelto el sistema por lo que más tarde se llamará “el Método de Reducción”.

Luego de éste momento clave, se les presentan los problemas 6, 7 y 8, donde se muestran Sistema de Ecuaciones lineales de dos incógnitas con dos ecuaciones resolubles por el “Método de Reducción” que ellos mismos descubrieron.

Imagen 6:

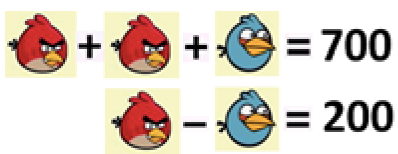


Valores:



Desarrollo o explicación:

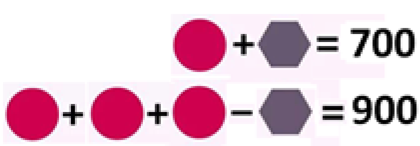
Imagen 7:



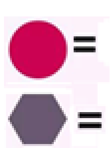
Valores:

Desarrollo o explicación:

Imagen 8:

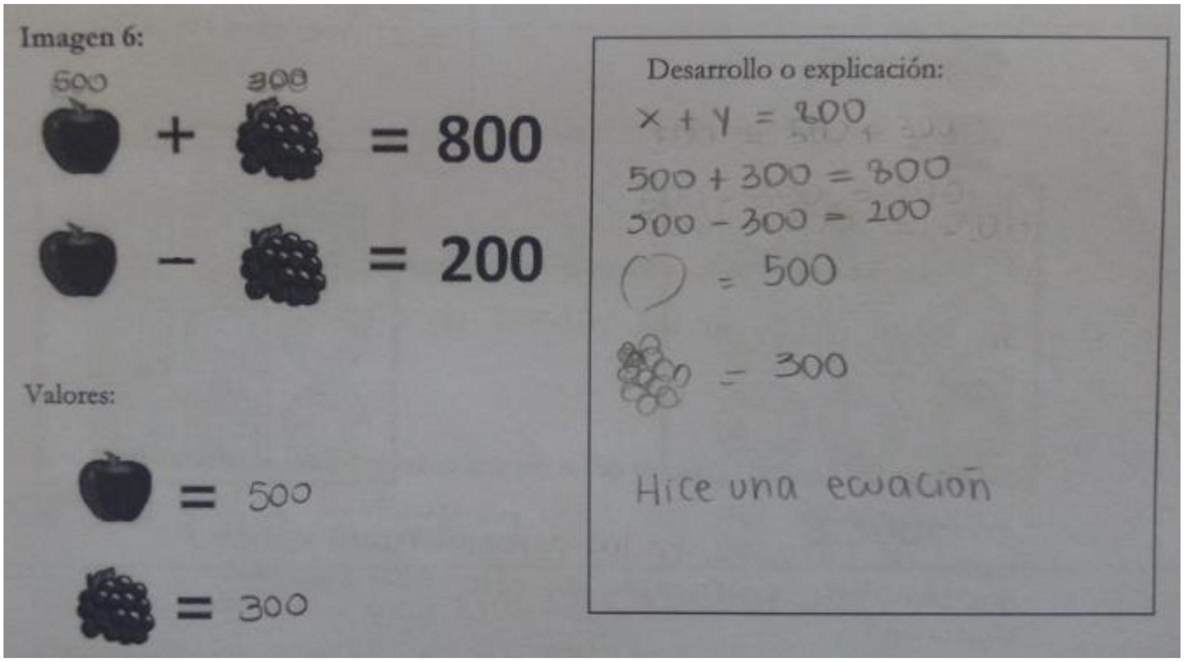


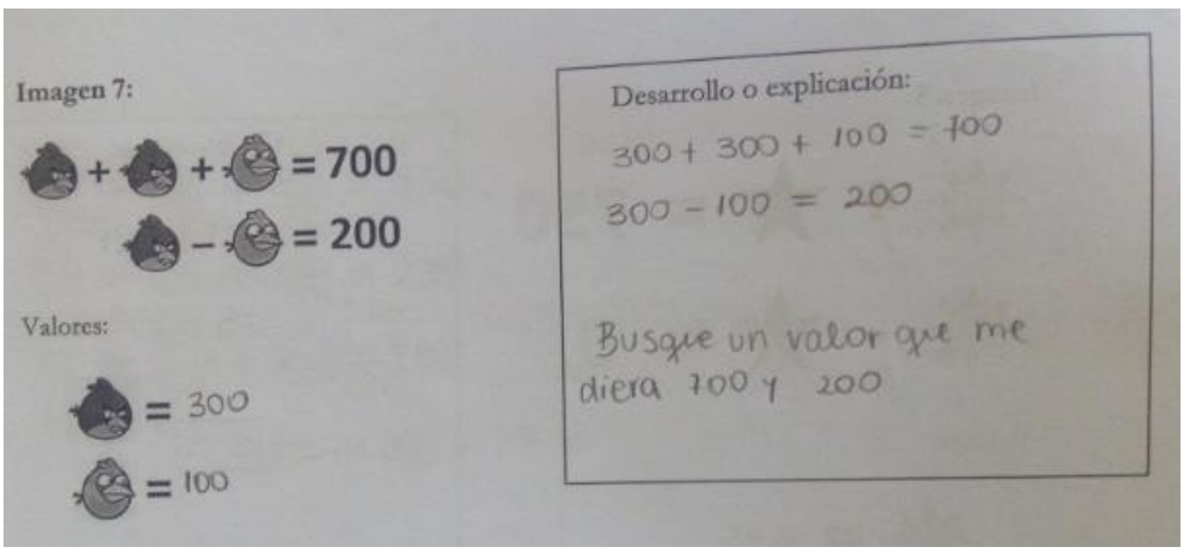
Valores:

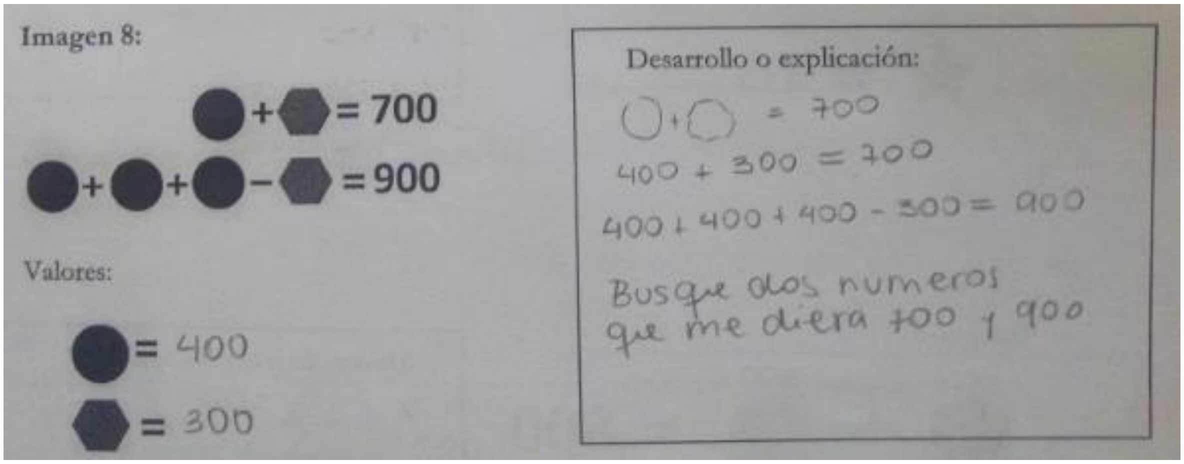


Desarrollo o explicación:

Se presentan algunas producciones de estudiantes de estos problemas:

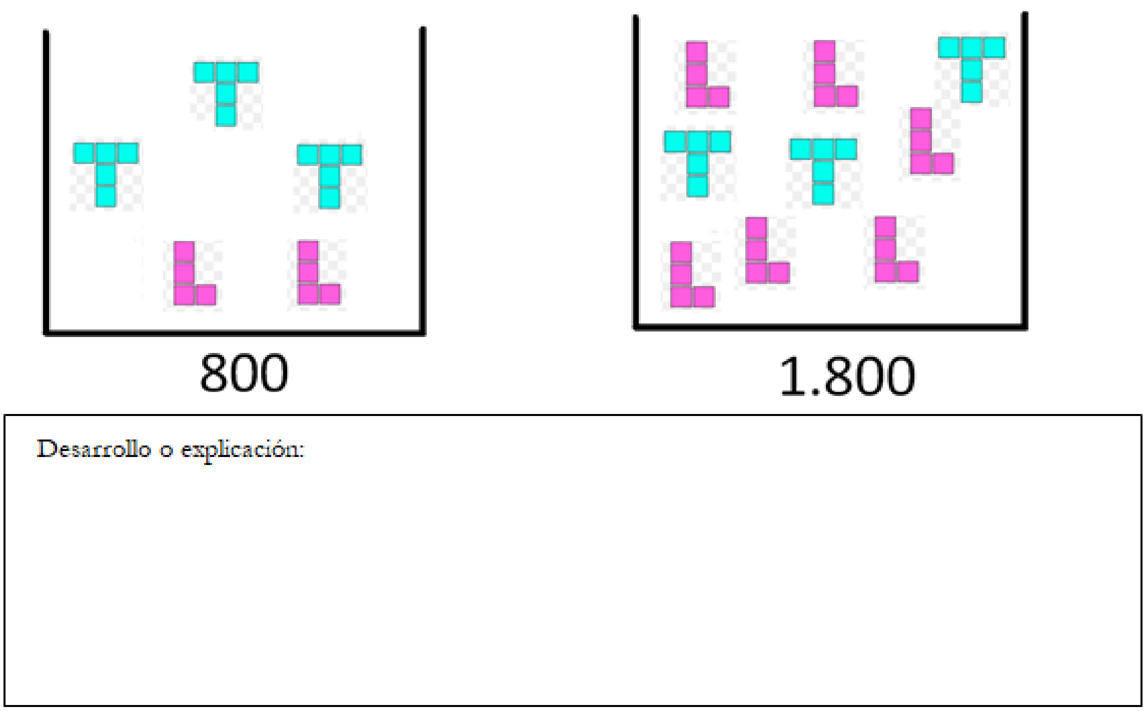




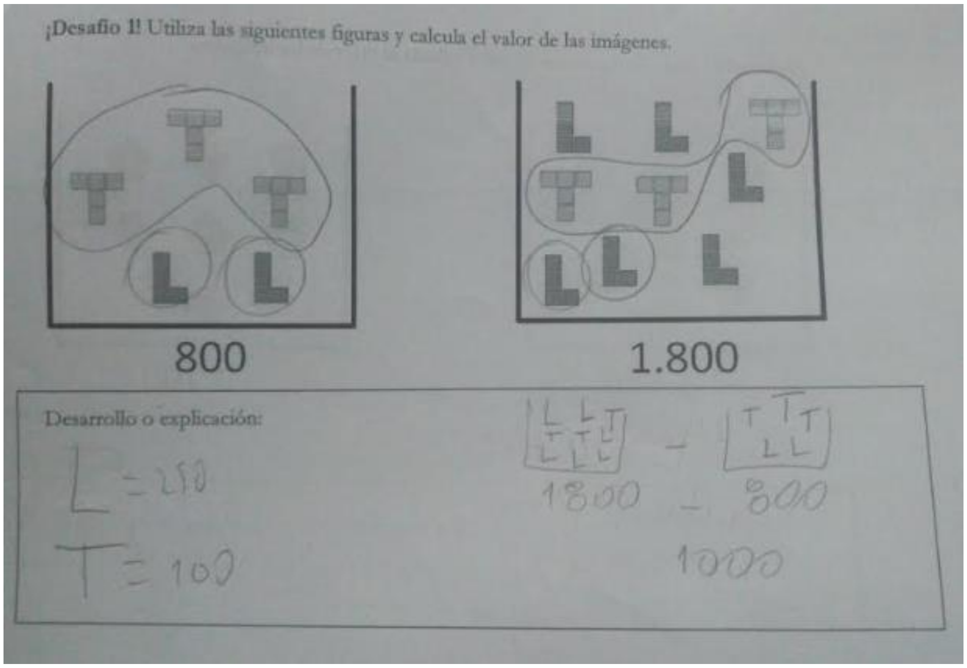


Posteriormente, se presenta el problema llamado Desafío 1 que es el segundo hito de quiebre, esta vez el problema no es resoluble por el Método de Reducción que habían descubierto.

¡Desafío 1! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.

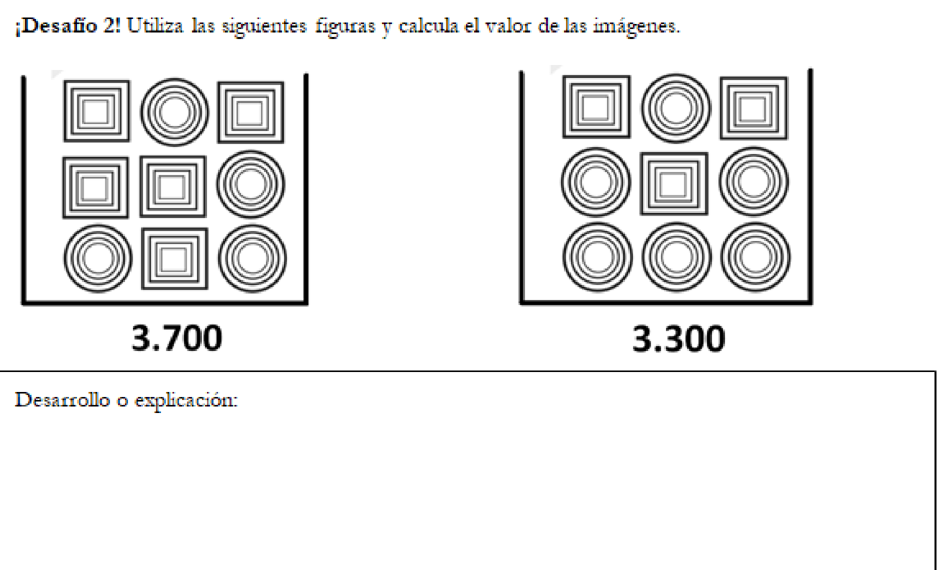


Los estudiantes buscan otra estrategia, algunos valorizan y otros encuentran la solución, simplemente encierran todos los elementos del cuadro que vale 800 e identifican que están contenidos en el cuadro de 1.800, es así como les sobran cuatro L, y cuatro L valen 1.000, por lo tanto cada L vale 250.

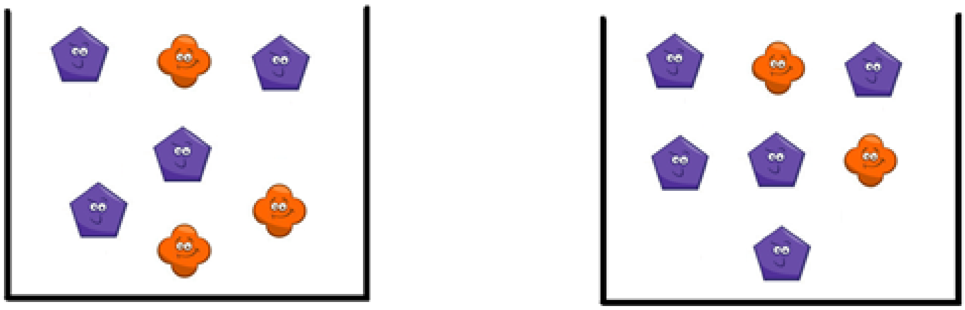


Aquí el estudiante sustituyó una ecuación en la otra, los estudiantes tampoco saben resolver Sistema de Ecuaciones lineales de dos incógnitas con dos ecuaciones por el Método de Igualación, lo que consiste en igualar dos programas de cálculo aritmético, en el apartado que sigue llamamos técnica τ_2 de la tarea T_2, pero lo han descubierto de manera intuitiva, sin siquiera hacer cálculos con incógnitas usuales como x e y.

El tercer y último hito de quiebre de esta propuesta didáctica son los Desafíos 2 y 3



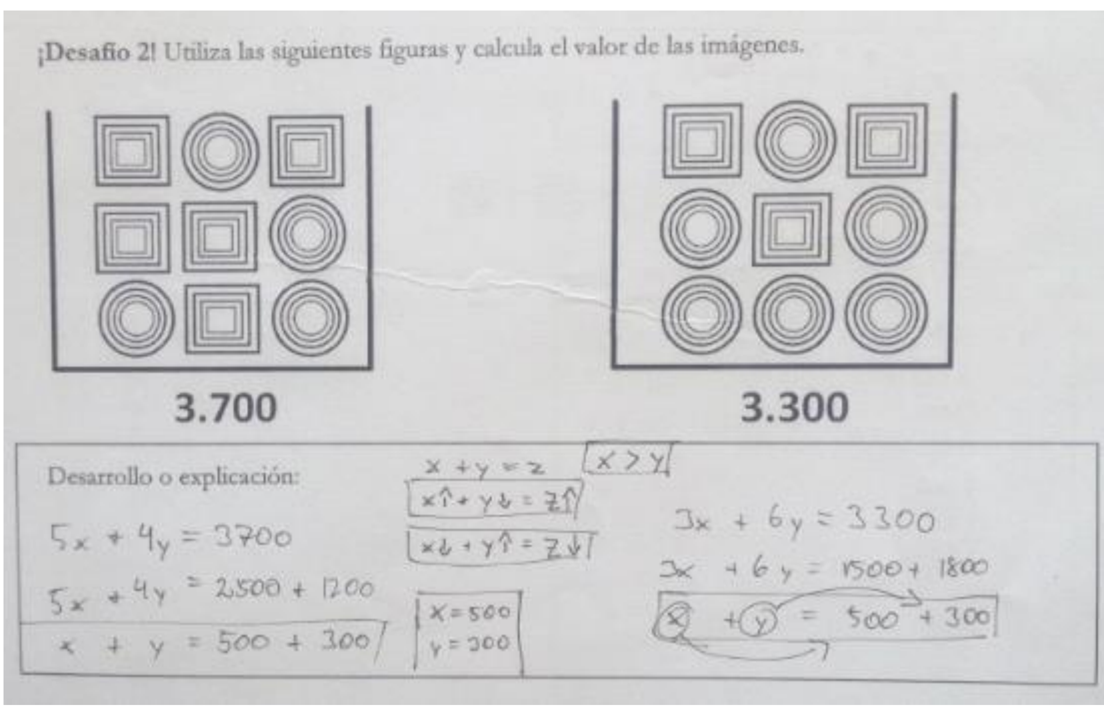
¡Desafío 3! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.

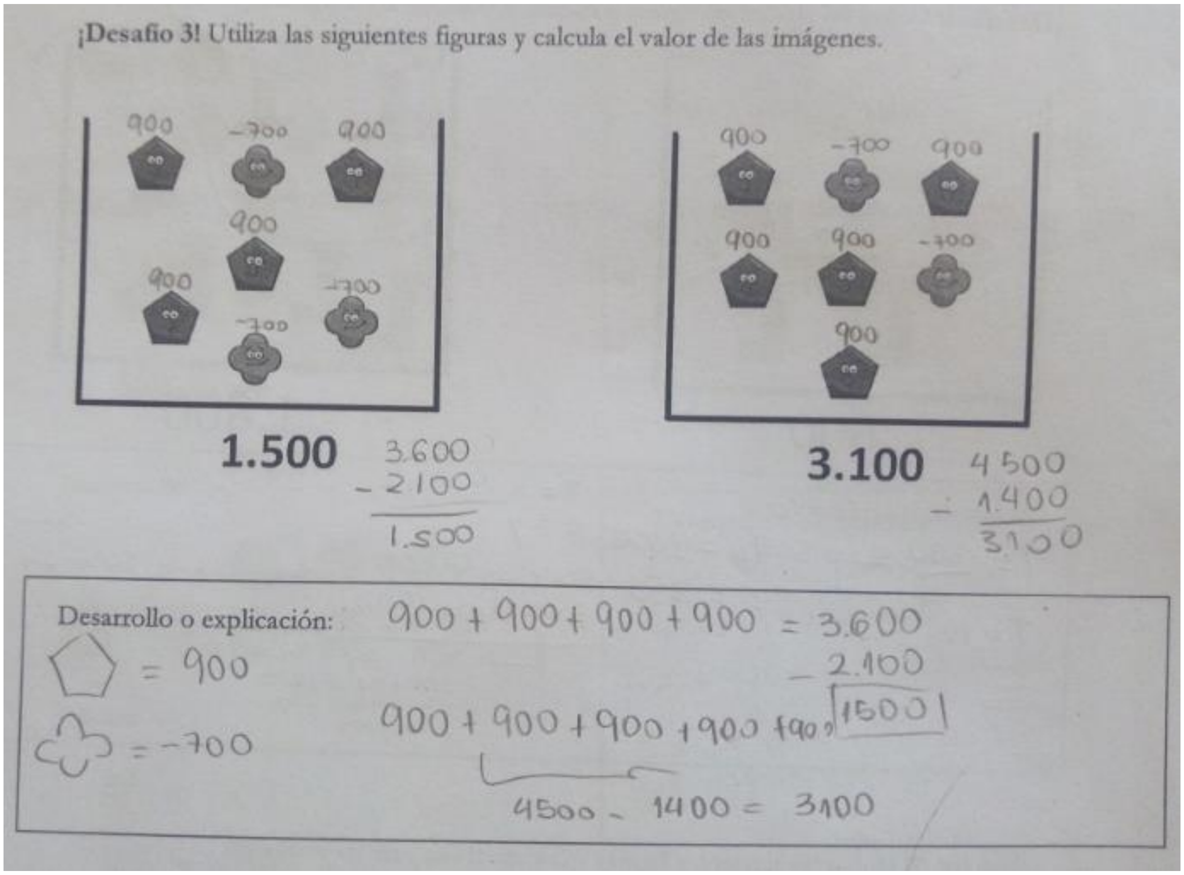


1.500 3.100

Desarrollo o explicación:

Se presentan algunas producciones de estudiantes de estos problemas:





Ambos problemas son resolubles por el Método de Sustitución, entendiéndose por éste método sustituir una ecuación en la otra, que más tarde llamaremos la técnica τ_3 de la tarea T_3 . En este caso si necesitan plantear las ecuaciones y luego manejar la técnica de resolución, pero el foco de este tipo de problema es decir que necesitamos el Álgebra para resolverlo.

La progresión de esta propuesta fue que a partir de problemas resolubles aritméticamente que se fueron complejizando, se cambió de técnica a una que los estudiantes manejaban previamente para luego experimentar y hacer matemática con una técnica que no era conocida para ellos, sin embargo pudieron resolver los ejercicios planteados y formar sus propias técnicas antes de formalizar los Métodos de Solución para Sistemas de Ecuaciones lineales de dos incógnitas con dos ecuaciones.

7.3. Descripción de la propuesta didáctica en torno a la OM

La propuesta didáctica elaborada y que describimos en detalle en el apartado anterior, constituye la respuesta que hemos dado en este trabajo de graduación al problema de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la institución escolar, problema que hemos identificado y documentado en apartados anteriores.

En este sentido, la propuesta se hace cargo de brindar a los estudiantes la oportunidad de encontrarse con la necesidad real de recurrir al álgebra, al enfrentar unos tipos de problemas que ya no son resolubles con herramientas aritméticas. La propuesta transita por una secuencia de problemas que van progresando en complejidad según se varían las variables didácticas que los definen (OD). Se parte por unos tipos de problemas (Tareas matemáticas) resolubles aritméticamente (técnicas) que luego, en función de variaciones en las variables didácticas que los definen, se van complejizando hasta provocar el **fracaso** de los procedimientos aritméticos y sea necesario recurrir a otro tipo de razonamiento y herramientas, nuevo para los estudiantes, que formarán parte de un nuevo tipo de conocimiento que más tarde será llamado álgebra. **Esta es la idea fundacional de Teoría de Situaciones (Brousseau, 1987) que postula que es en este cambio de estrategias —de las que funcionaban y que dejaron de funcionar frente a problemas complejos a estrategias diferentes— que se juega la real oportunidad de aprender.**

Por supuesto, este fracaso o quiebre de procedimientos frente a determinado tipo de problemas debe ser adecuadamente gestionado por el profesor de tal modo que los estudiantes puedan efectivamente construir o adaptar estrategias nuevas para resolverlo.

En este apartado explicitamos la Organización Matemática (OM) y la Organización Didáctica (OD) que están a la base de la propuesta didáctica construida. Esto es, los *tipos de tareas o problemas* por los que transitarán los estudiantes de tal modo de provocar que sean ellos mismos los que, frente al fracaso de técnicas aritméticas conocidas, construyan nuevas técnicas, en este caso de naturaleza algebraica, para resolverlos. De este modo, se explicitan las Tareas matemáticas y las técnicas asociadas detrás de cada uno de los problemas que componen la propuesta didáctica, así como la secuencia seguida entre dichos problemas.

Componentes de la Organización Matemática (OM)

Tarea T_1

Problemas aritméticos de varias incógnitas en el que las relaciones cuantitativas entre ellas hacen posible calcular el valor numérico de todas.

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de tres incógnitas en el conjunto de los números naturales que involucran la suma y resta.

Tarea T_1'

Problemas aritméticos en el que aparece la incógnita repetida (multiplicación)

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de la incógnita en el conjunto de los números naturales que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Tarea T_1''

Problemas aritméticos en el que aparece la incógnita repetida con suma, resta, multiplicación y división como operatoria

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de la incógnita en el conjunto de los números naturales que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Tarea T_2

Problema aditivo que involucra dos incógnitas y dos relaciones en las que la manipulación aritmética no permite resolver el problema.

- Técnica τ_2: igualar dos programas de cálculo aritmético.

Tarea T_3

Problema aditivo que involucra dos incógnitas y dos relaciones en las que la manipulación aritmética no permite resolver el problema.

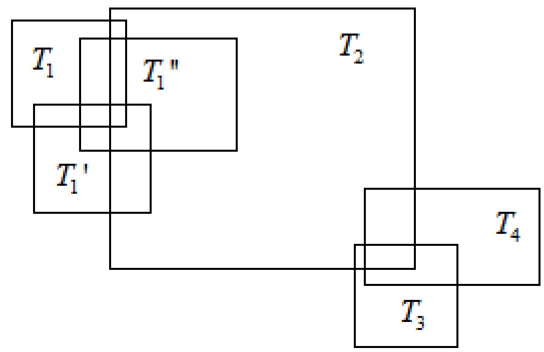
- Técnica τ_3: sustituir una relación aritmética en la otra relación.

Tarea T_4

Problema aditivo que involucra dos incógnitas y dos relaciones en las que la manipulación aritmética no permite resolver el problema.

- Técnica τ_4: reducir una relación aritmética en la otra relación.

Esto se puede visualizar en el siguiente esquema:



En el esquema se entiende que el tamaño de cada cuadro que contiene las tareas se relaciona directamente con la cantidad de ejemplares que hay de cada una de ellas, si bien el próximo apartado está el detalle, la Propuesta Didáctica contiene un ejemplar de T_1, otro de T_1' y dos de T_1'', además de cuatro ejemplares de T_2, uno de T_3 y dos de T_4.

Las tareas T_1, T_1' y T_1'' comparten elementos en común como el cálculo aritmético de incógnitas en el conjunto de los números naturales que involucran la suma y resta, luego se les agreda la multiplicación y división, esto es, [τ , Θ, Θ], si bien las técnicas aritméticas son, en su mayoría, heredadas para el mundo algebraico, podemos visualizar en el esquema que son dos programas de cálculo muy diferentes. T_1, T_1', T_1'' son del mundo aritmético mientras que T_2, T_3 y T_4 pertenecen al mundo algebraico.

Podemos enlazar y observar de mejor manera la Propuesta Didáctica con los elementos de la Organización Matemática descrita, es decir las técnicas y tareas asociadas a cada ejercicio, en el siguiente esquema, además de asociar las habilidades a cada problema propuesto:

Ítem	Tare a	Habilidades	Técnic a

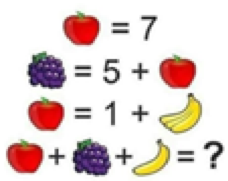
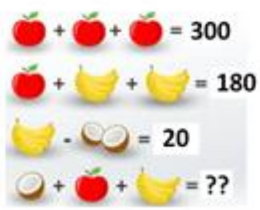
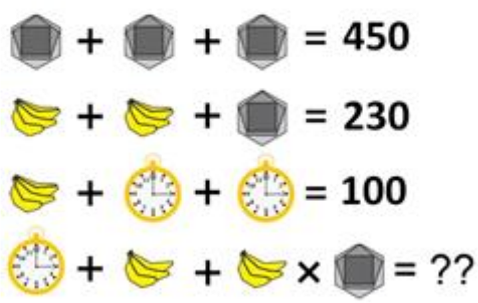
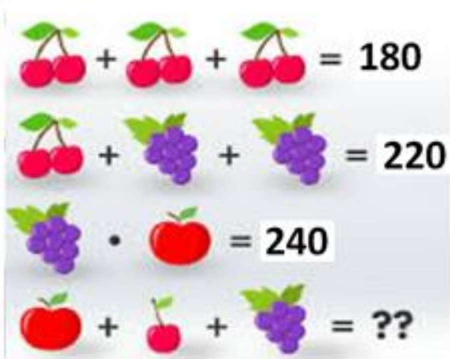
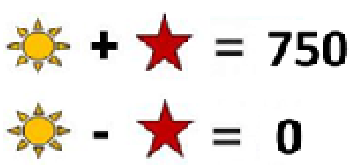
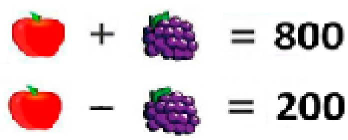
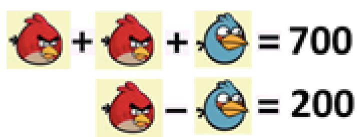
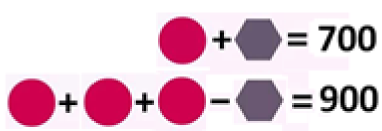
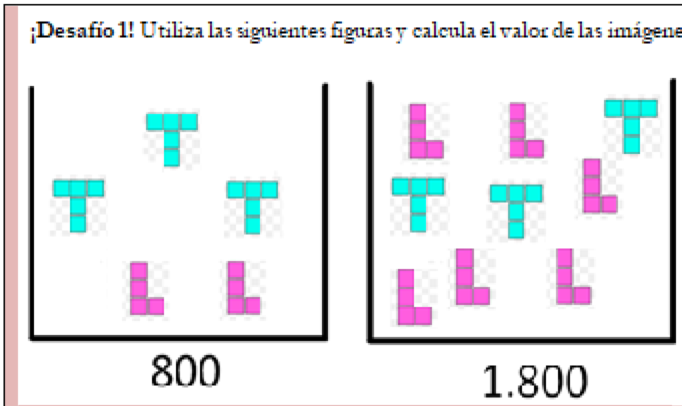
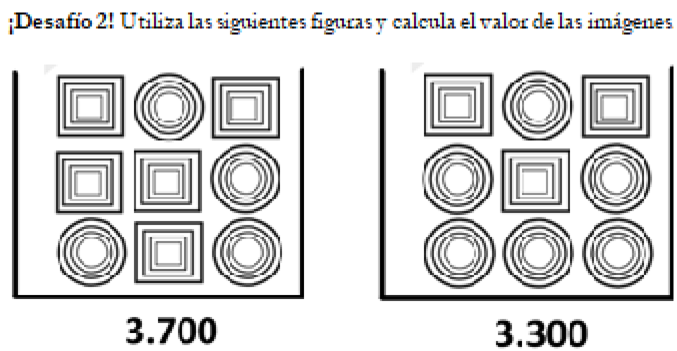
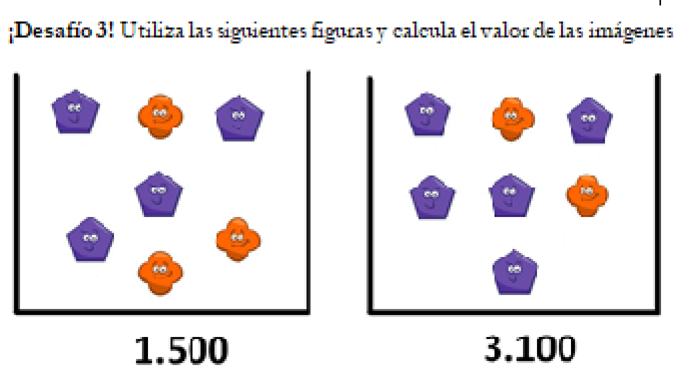
Problema 1 **Imagen 1:** 	T_1	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_1
Problema 2 **Imagen 2:** 	T_1'	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_1
Problema 3 **Imagen 3:** 	T_1''	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_1
Problema 4 **Imagen 4:** 	T_1''	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_1
Problema 5	T_2	• Resolver problemas	τ_2

Imagen 5: 		• Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	
Problema 6 Imagen 6: 	T_2	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_2
Problema 7 Imagen 7: 	T_2	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_2
Problema 8 Imagen 8: 	T_2	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_2
Problema 9	T_3	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_3

			
Problema 10 	T_4	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_4
Problema 11 	T_4	• Resolver problemas • Representar • Modelar • Argumentar y comunicar • Manipular expresiones	τ_4

La propuesta didáctica moviliza todas las habilidades consideradas en el currículum además de la habilidad de manipular expresiones matemáticas.

Esto se da en toda la extensión de la propuesta didáctica, es decir, tanto en los problemas iniciales (que son resolubles aritméticamente) como en los problemas posteriores (desde el 5 en adelante).

Se potencian las siguientes habilidades: *resolver problemas*, el estudiante logra solucionar una situación problemática dada sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir; *representar*, los problemas no tienen variables, si no que se valorizan objetos a través de los cuales tienen que ir haciendo las operaciones, es decir, se transita de una representación pictórica a una simbólica; *modelar*, deben construir un modelo que permita buscar soluciones y aplicarlas a otras realidades, he aquí la importancia de los Hitos de la propuesta, al transitar por los problemas deben ir modelando las distintas situaciones ya que los modelos fallaran en ciertas etapas; *argumentar y comunicar*; se les pide que expliquen los procedimientos que están realizando en cada problema; *manipular expresiones*, deben hacer operaciones aritméticas o algebraicas según el tipo de tarea.

Al transitar por la experiencia de la propuesta didáctica los estudiantes experimentan maneras diferentes de razonar y resolver estos nuevos problemas, es así como se encuentran con la necesidad de construir herramientas distintas a las aritméticas que ya conocen.

Por ello, uno de los propósitos de la didáctica de las matemáticas es justamente el de caracterizar las condiciones bajo las cuales los aprendizajes matemáticos específicos pueden desarrollarse y, en función de ellas, proponer situaciones, dispositivos, medios y orientaciones de gestión, para que se logren efectivamente en la escuela. Un criterio central para elaborar situaciones de aprendizaje para tal efecto consiste en elegir aquellas que potencialmente puedan generar situaciones fundamentales (Brousseau, 1990). Esto es, una situación problemática que el estudiante enfrenta sin la intervención directa del profesor, a través de su interacción con un medio que le devuelve información sobre la adecuación de sus acciones frente al problema, cada vez que lo manipula. En este medio intervienen ciertas condiciones o variables didácticas que, al ser controladas adecuadamente por el profesor, "obligan" al niño a progresar en sus acciones hasta lograr la construcción del conocimiento matemático esperado.

Capítulo 8

Fase 3: Implementación de la propuesta didáctica y análisis de resultados

8.1. Muestra

Se implementa la propuesta didáctica con alumnos de un Colegio Católico, Particular Pagado, del sector oriente de nuestra capital, en dos grupos que llamaremos con tratamiento (Primer año medio A y Primer año medio B) y dos grupos más sin tratamiento (Primer año medio D y Primer año medio E)

Los cuatro cursos si bien son parte del mismo nivel de un colegio tienen características muy diferentes. El Primer año medio A, cuenta con 38 estudiantes de sexo masculino, se destacan en el nivel por su bajo rendimiento y mala conducta, prueba de esto es la gran cantidad de anotaciones negativas por conducta dentro y fuera del aula, por no participar en clases y no llevar materiales, es incluso algunas faltas de respeto a sus profesores y entre ellos mismos. Son un curso que se caracterizan por participar y en talleres extracurriculares dentro del ámbito deportivo. Un 38% tiene excelencia académica, esto se otorga a los estudiantes que tienen promedio igual o superior a 6,5.

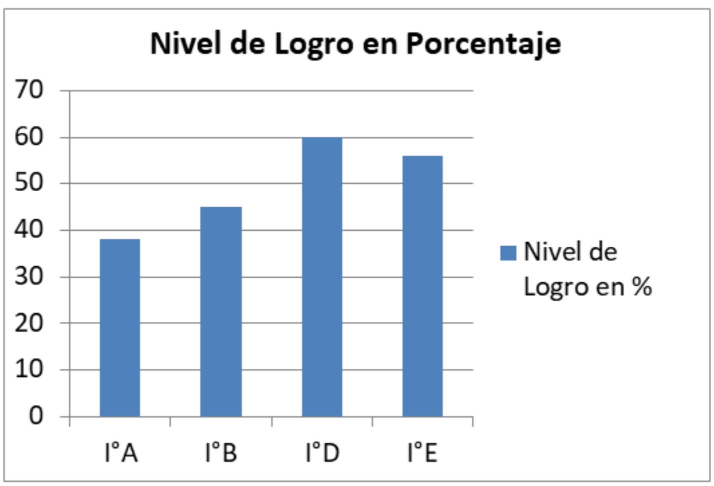
El Primer año medio B, cuenta con 36 estudiantes de sexo masculino, tiene muchos alumnos con promedios sobresalientes, cerca de un 45% tiene excelencia académica. Ellos generan un ambiente de respeto en la sala de clases, ponen atención, participan activamente, son muy preocupados por los resultados académicos y hay siete alumnos que en este último año participan en el CMAT (competencia que reúne a jóvenes estudiantes de enseñanza básica y media para competir en diversas pruebas matemáticas durante períodos prolongados en el año con el objetivo de reforzar este talento)

El Primer año medio D, se conforma por 34 mujeres, y es un curso que se destaca por su alegría, por desarrollar las áreas artísticas y académicas, por lo general son muy intensas, divertidas, y su participación y trabajo en clases no es muy constante, cerca del 60% tiene excelencia académica.

El Primer año medio E, se conforma por 32 estudiantes de sexo femenino, de muy buena conducta, son muy fraternas entre ellas y con sus profesores, son muy dedicadas al ámbito académico y se caracterizan por interesarse mucho en las clases, preguntar y participar de forma activa, cerca del 56% de las alumnas de este curso tiene un promedio igual o superior a 6,5 y 3 de ellas participan en el CMAT

La información anterior se sintetiza en el siguiente cuadro, entendiendo como nivel de logro la excelencia académica que es un promedio igual o superior a la calificación 6,5:

Curso	Niveles de logro
A	38%
B	45%
D	60%
E	56%



Claramente el grupo tratamiento de este trabajo (A y B) parte con logros de aprendizaje inferiores al grupo control (D y E).

Es una muestra amplia de 140 estudiantes en total en el nivel de primer año de enseñanza media, pero al momento de implementar la propuesta asistieron 128 alumnos, esta se implementó en el mes de junio, cercano a las Pruebas de Síntesis (evaluación final del semestre que incluye el contenido abordado en todo ese período, además es calificada con nota coeficiente dos)

8.2. Implementación de la propuesta

La propuesta didáctica se implementa en dos primeros medios, y en los otros dos grupos se enseñan los sistemas de ecuaciones de manera tradicional, desde la teoría hacia la manipulación de la técnica.
En el Primer año medio A, la implementación estuvo a cargo de la profesora y autora de la propuesta didáctica, si bien tiene pocos practicando la docencia (5 años), es el segundo año consecutivo que enseña la asignatura de matemáticas con este curso y se ha formado una relación fraterna, donde ha sido invitada por los estudiantes a varias celebraciones que se hacen en el colegio, es capaz de mantener un clima de respeto para que se escuchen las opiniones que se dan entre los compañeros y que se replique a la relación entre profesor – estudiante.
En el Primer año medio B, la implementación estuvo a cargo de la profesora que les hace clases desde este mismo año, ella tiene 16 años de experiencia trabajando en el mismo colegio, es jefa de departamento y está abierta a sugerencias, tiene muy buena disposición y tiene la disposición para aplicar nuevas metodologías.

8.3. Resultados y evidencia de los estudiantes ante la aplicación de la propuesta didáctica

Se entrega el material a los estudiantes, en principio tienen una buena reacción ante la propuesta ya que las imágenes que se les presentan en la guía son conocidas para ellos, varias de estas imágenes aparecen a modo de desafío en Instagram o Facebook (redes sociales que ellos utilizan a menudo), por lo que se motivan casi inmediatamente a mirar la guía y resolver los ejercicios.

Se disponen a trabajar y se encuentran con el problema 1:

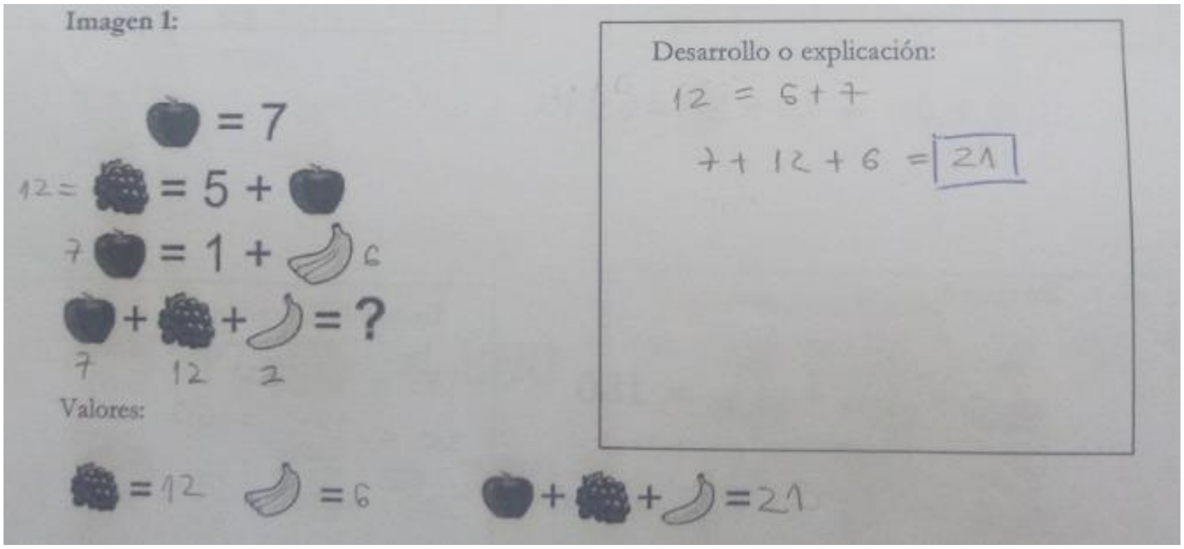


Imagen 1:
= 7
12 = = 5 +
7 = 1 + 6
+ + = ?
7 12 2
Valores:
= 12 = 6 + + = 21
Desarrollo o explicación:
12 = 5 + 7
7 + 12 + 6 = 21

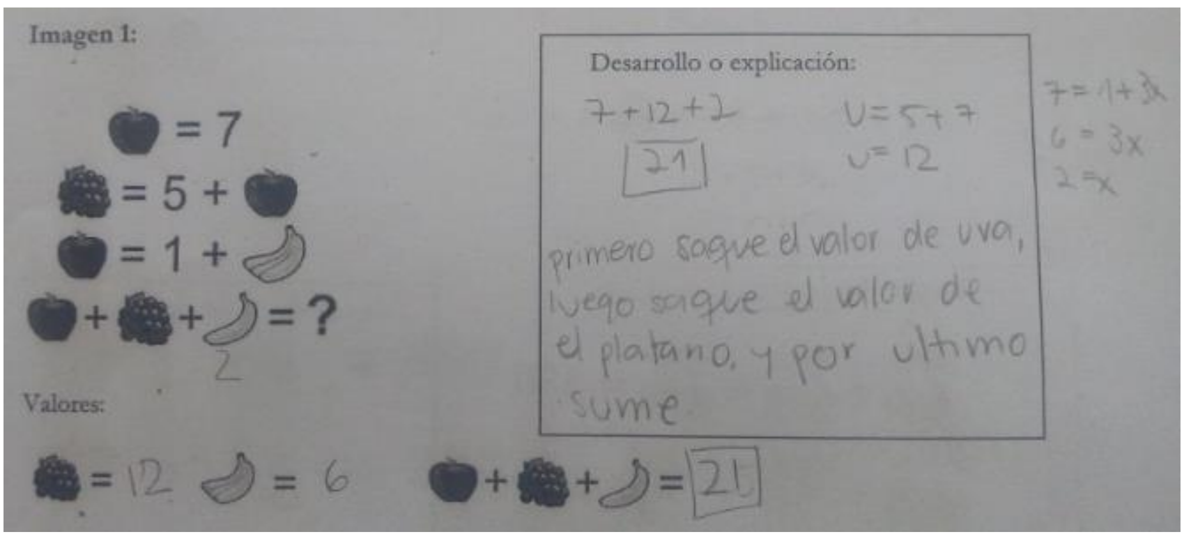


Imagen 1:
= 7
= 5 +
= 1 +
+ + = ?
2
Valores:
= 12 = 6 + + = 21
Desarrollo o explicación:
7 + 12 + 2
21
U = 5 + 7
U = 12
primero saque el valor de uva, luego saque el valor de el platano, y por ultimo sume
7 = 1 + 3x
6 = 3x
2 = x

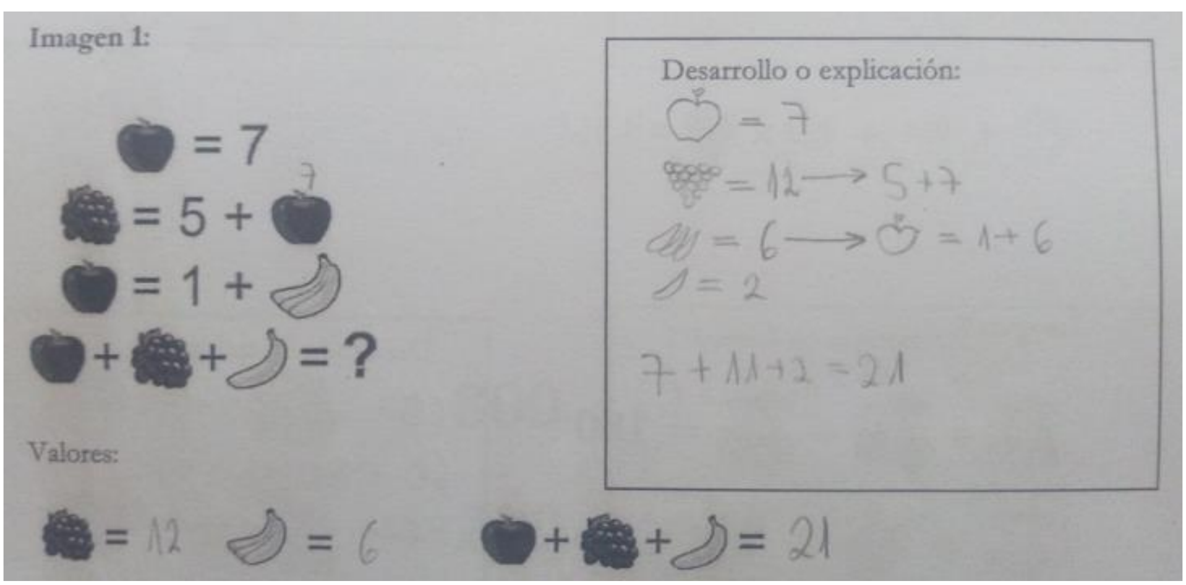
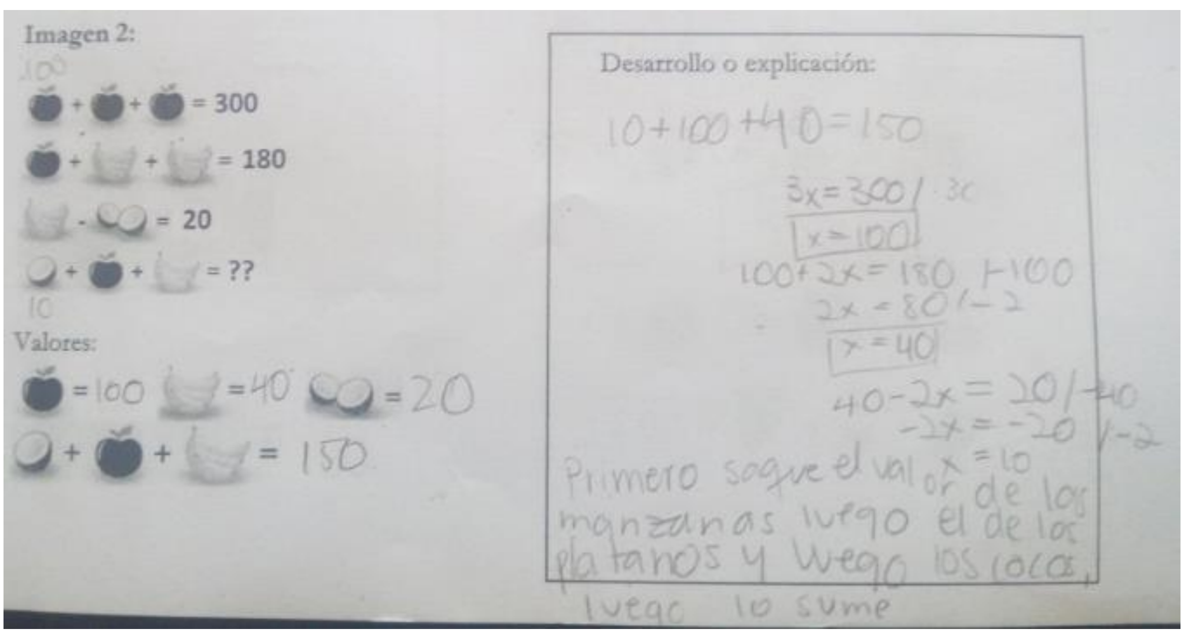
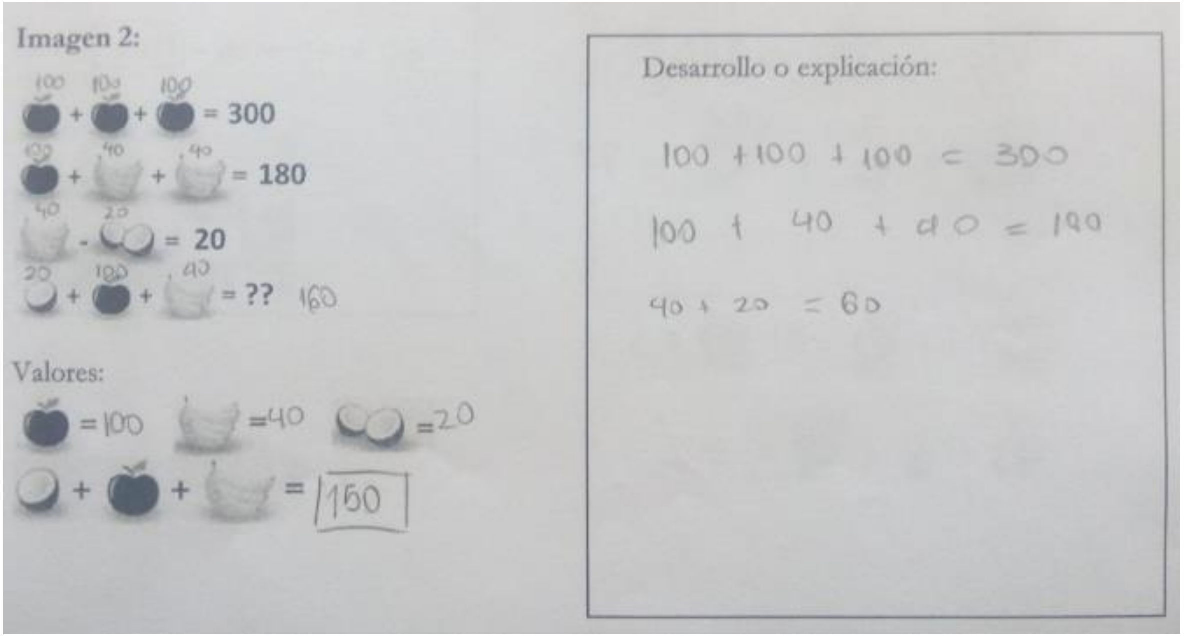


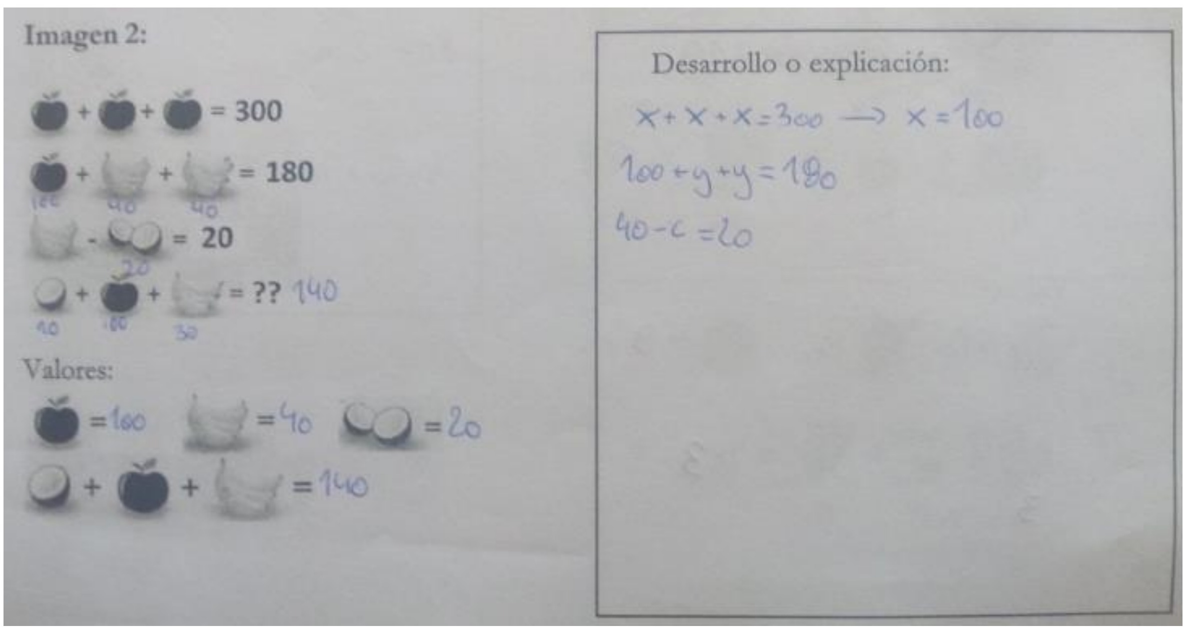
Imagen 1:
= 7
7
= 5 +
= 1 +
+ + = ?
Valores:
= 12 = 6 + + = 21
Desarrollo o explicación:
= 7
= 12 → 5 + 7
= 6 → = 1 + 6
= 2
7 + 12 + 2 = 21

La gran mayoría de los y las estudiantes fueron capaces de obtener el valor de cada fruta, la mayor dificultad de éste ítem fue la suma final que se les pedía, en ésta se les pide el resultado del valor de la manzana (7), más la mora (12) y un plátano (2), no tres plátanos (6), como habían calculado anteriormente, por lo que algunos estudiantes se confunden y suman el valor de tres plátanos, en vez de un plátano, resultando la suma 25 y no 21 como es la respuesta correcta.

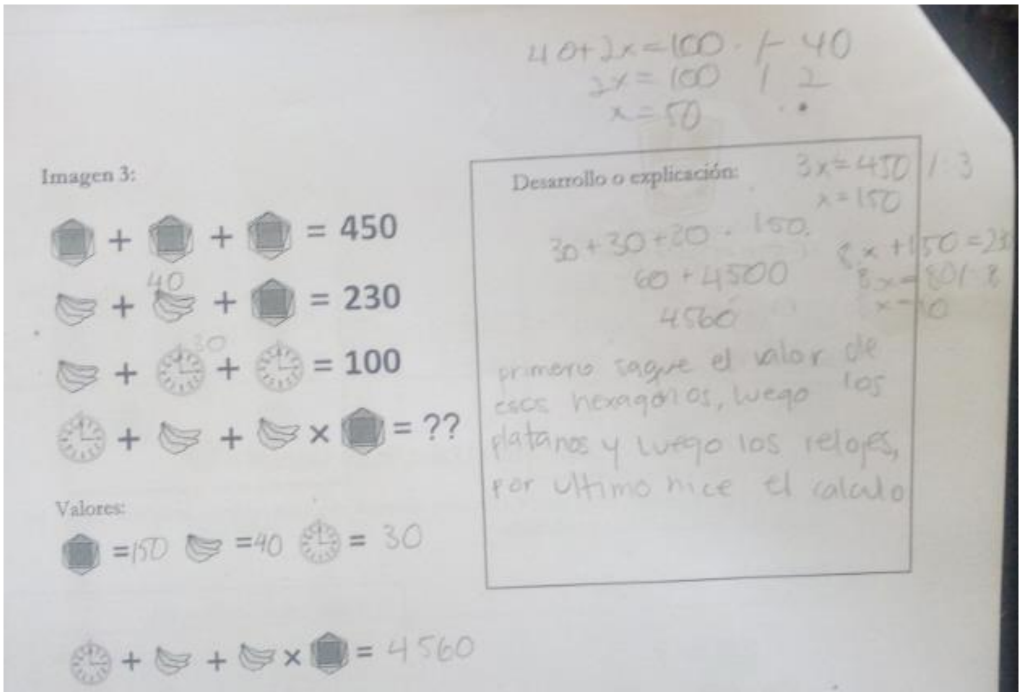
En el Problema 2, calculan el valor de la manzana por medio de la división, dicen, si tres manzanas son 300 entonces una vale 100. En la segunda relación, a 180 le restan la manzana (100), para sacar el valor de los dos racimos de plátanos que es 80, entonces un racimo de plátano vale 40. Ahora un racimo de plátanos (40) le resto un coco y resultan 20, entonces un coco vale 20. Al completar lo que piden sería medio coco (10) más una manzana (100) más tres plátanos (30), cuatro plátanos forman un racimo, por lo que cada uno vale 10, es así como el resultado es 140. Nuevamente el error común es contar un coco en vez de medio o cuatro plátanos en vez de tres. Pero en general se logra bastante la comprensión y resultado correcto del ejercicio.

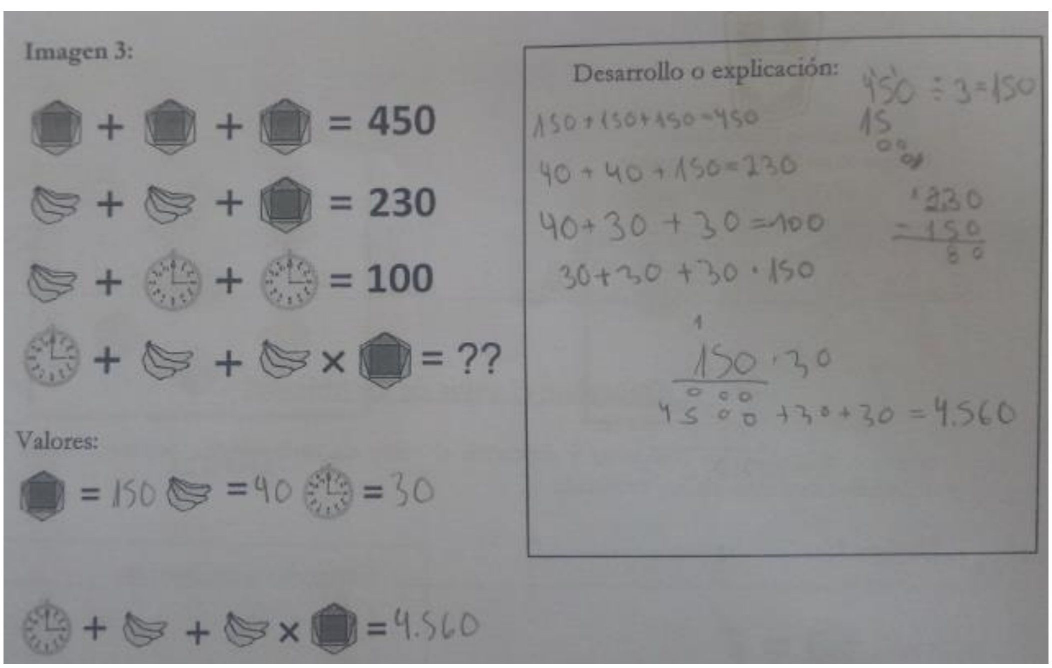


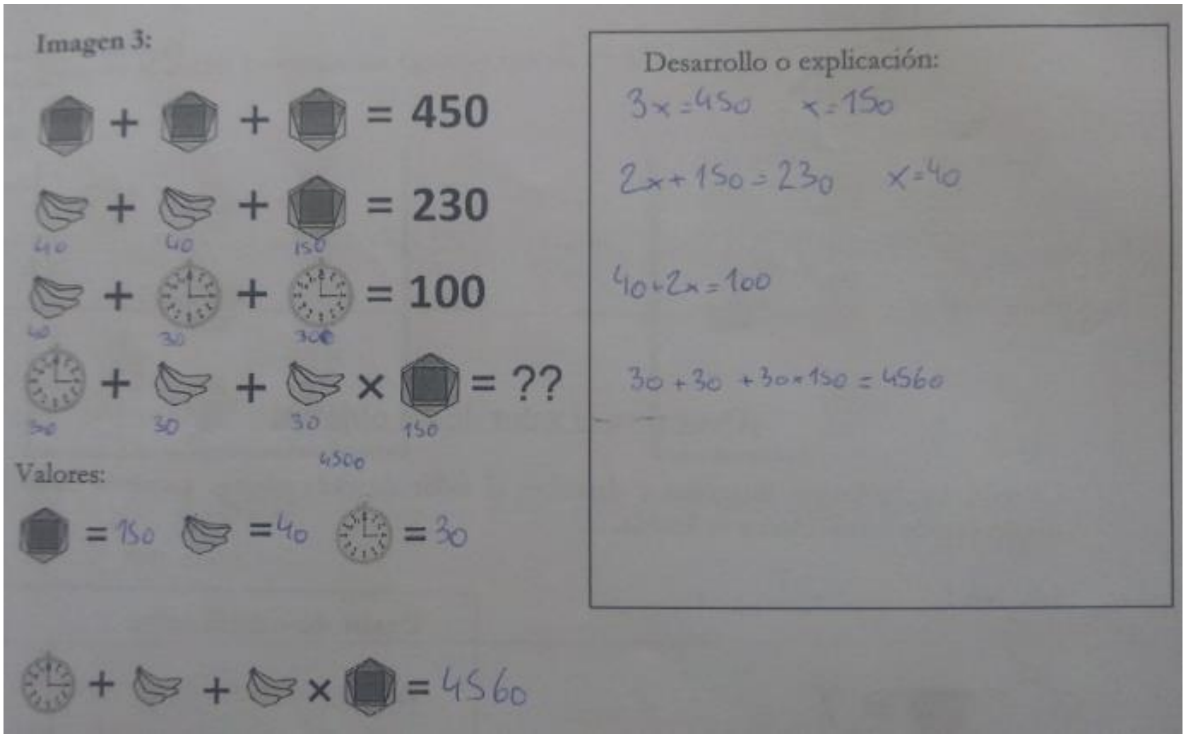




En el Problema 3, se presenta el valor de tres hexágonos que sumados dan 450, por lo que cada uno vale 150. En la segunda relación el hexágono sumado a los dos racimos de plátanos resultan 230, como ya sabemos que el hexágono vale 150, entonces los dos racimos de plátanos valen 80, así cada racimo vale 40, y son 4 plátanos por racimo por lo que cada uno vale 10. En la tercera relación los dos relojes más el racimo de plátanos suman 100, ya saben que el racimo de plátanos vale 40, por lo que los dos relojes suman 60, entonces cada reloj vale 30. Entonces se les pide la siguiente operación combinada, la suma del reloj (30) más tres plátanos (30) más el producto de tres plátanos por un hexágono (30·150) esto es 60 + 4500 = 4560. Los errores más frecuentes de este ejercicio fueron no darse cuenta que el racimo de plátanos tenía tres y no cuatro como en la relación anterior y fue común también que se equivocaran en la prioridad de la operatoria, algunos sumaron antes de multiplicar y otros multiplicaron mal entonces afectó su resultado.







En el Problema 4, se muestra que tres racimos de cerezas valen 180, por lo que cada racimo de cerezas vale 60. Luego dos racimos de uva más un racimo de cerezas suman 220, como un racimo de cerezas es 60 entonces dos racimos de uvas valen 220 – 60 = 160, entonces cada racimo de uva vale 80. Luego la relación dice que el producto del racimo de uvas por la manzana es 240, entonces la manzana es 240 dividido por los 80 del racimo de uvas, esto resulta 3. Hay que saber que un racimo de cerezas son 2 unidades, por lo que cada una de ellas vale 30, además debemos contar los granos de uvas, son 8 por racimo, entonces cada una vale 10. Finalmente se pide la suma de una manzana (3) más una cereza (30) más un racimo de 7 uvas (70), esto suma 103. Los errores frecuentes en este ejercicio fue que no contaron los granos de uvas y pensaron que el racimo tenía 8 y no 7 como era la pregunta, esto afectó el resultado de varios estudiantes.

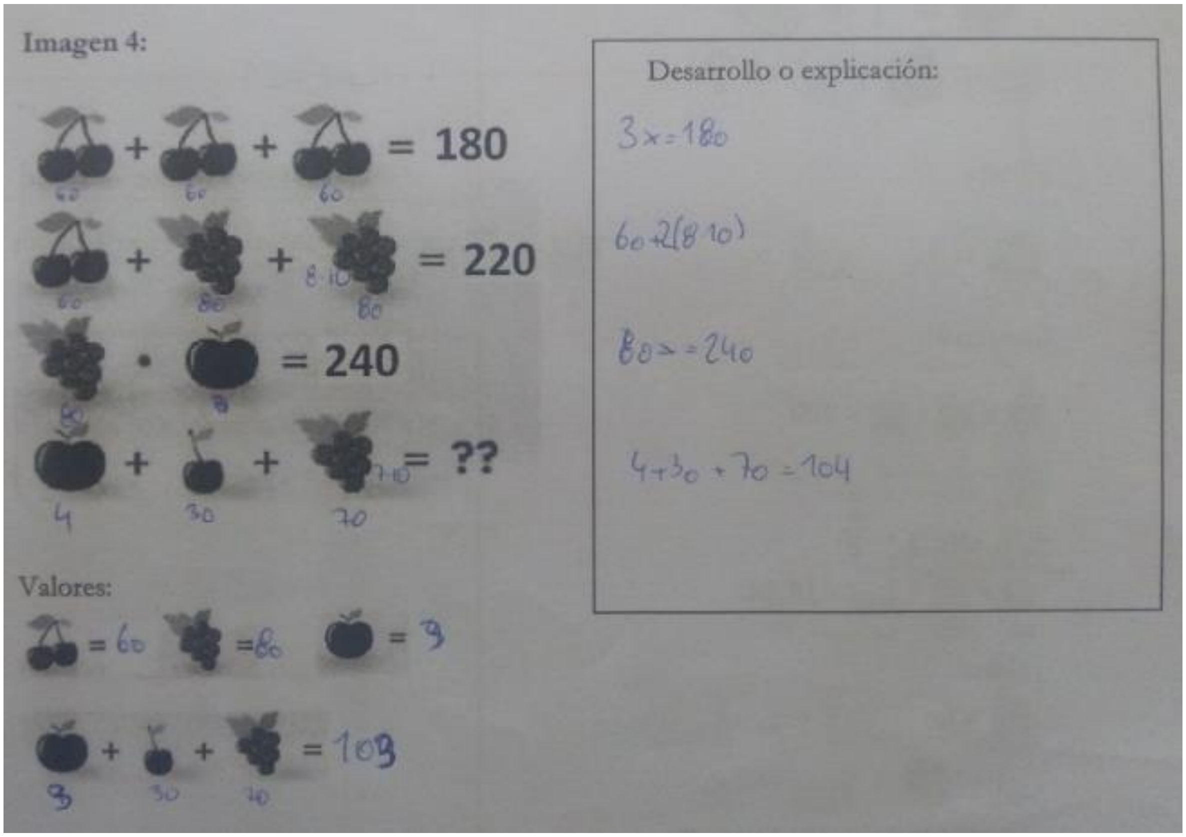


Imagen 4:
= 180
= 220
= 240
= ??
Valores:
= 60
= 80
= 3
= 103
Desarrollo o explicación:
3x = 180
60 + 2(8·10)
80x = 240
4 + 30 + 70 = 104

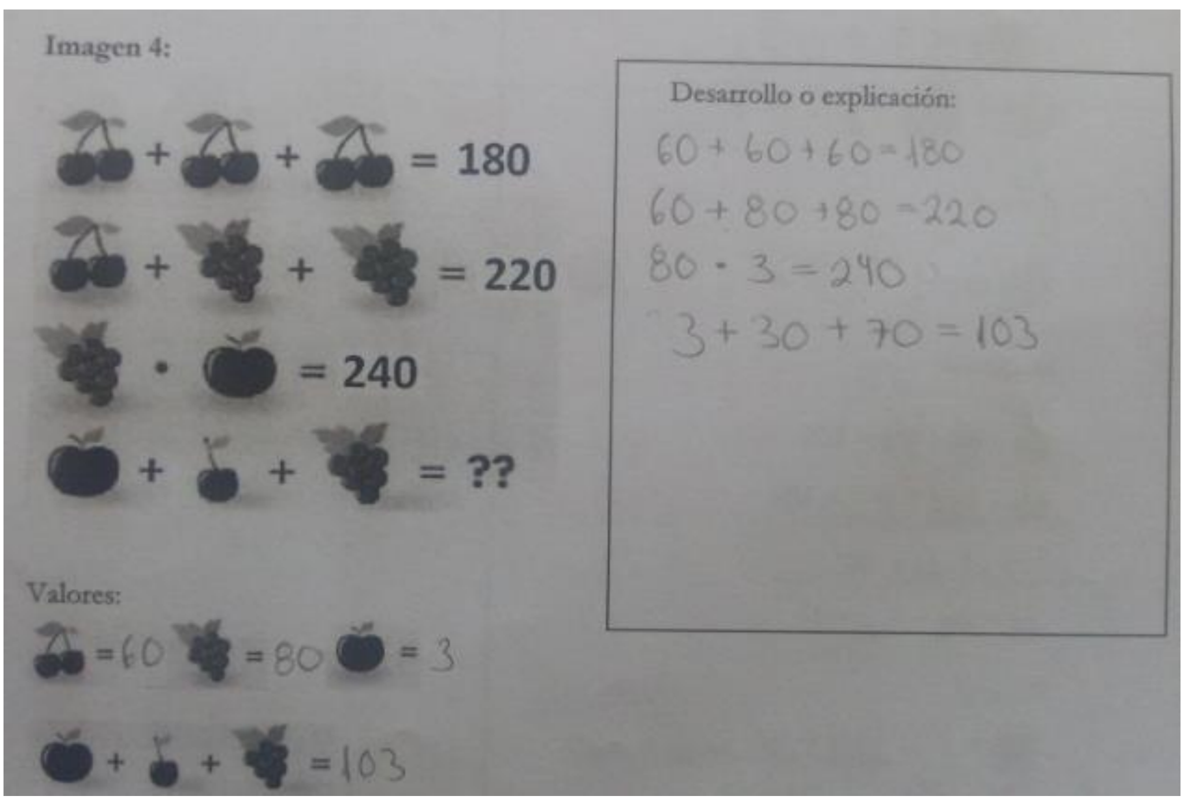
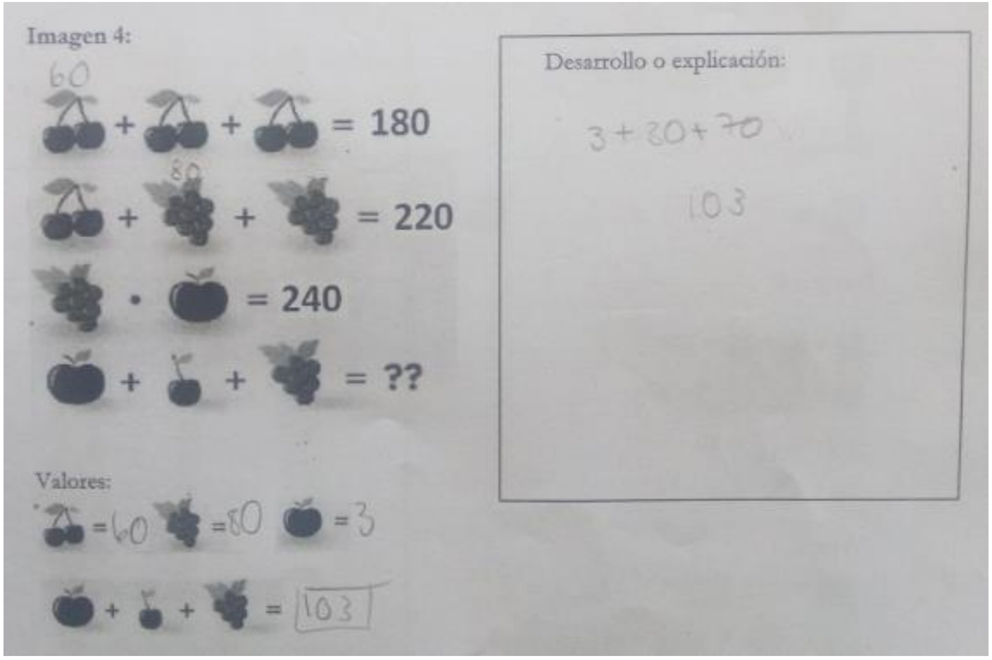
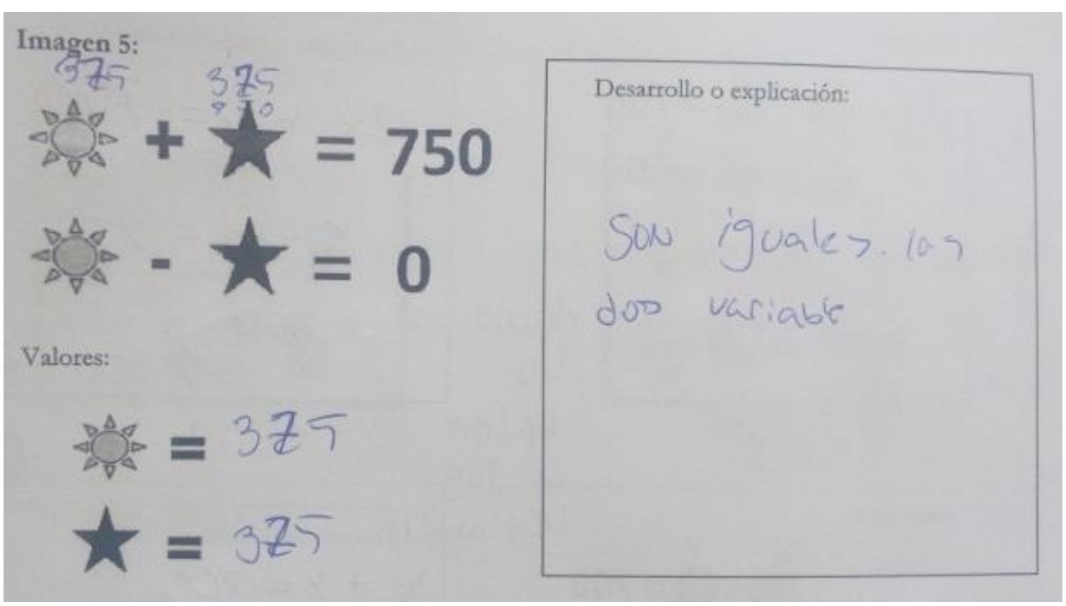


Imagen 4:
= 180
= 220
= 240
= ??
Valores:
= 60
= 80
= 3
= 103
Desarrollo o explicación:
60 + 60 + 60 = 180
60 + 80 + 80 = 220
80 · 3 = 240
3 + 30 + 70 = 103



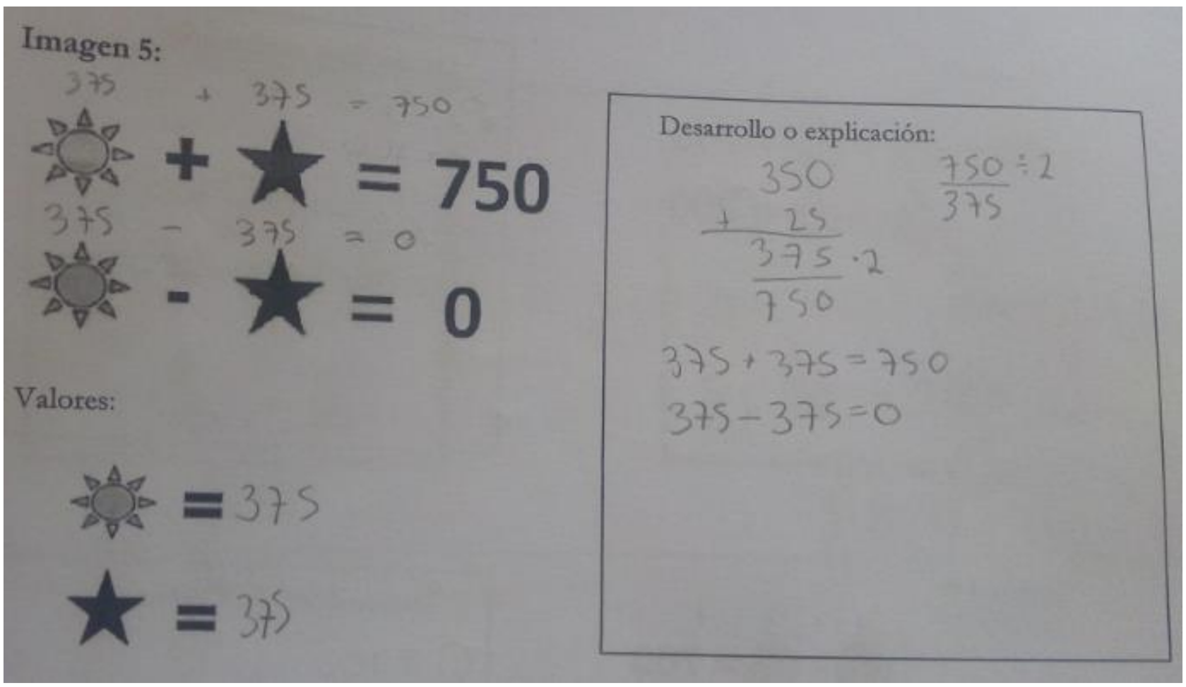
En los cuatro problemas anteriores se le pide a los estudiantes que calculen el valor de un objeto en base a otro dado en una relación anterior y de forma directa o por medio de una manipulación aritmética sin mayor dificultad o por medio de ecuaciones simples de primer grado con incógnitas en un solo lado de la igualdad.

Luego se propone el Problema 5, que es el primer hito de quiebre en esta Propuesta Didáctica, puesto que con simple aritmética no es posible resolverlo. Se presenta el siguiente programa de cálculo:



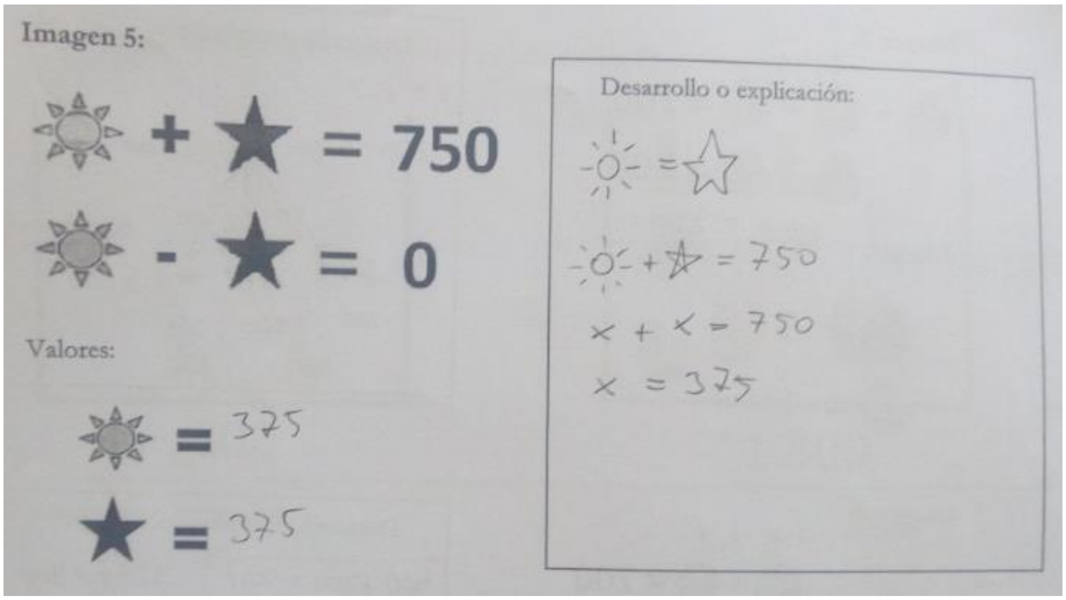
Varios estudiantes usaron la técnica por tanteo en la primera ecuación, dándoles muchas posibles respuestas, como se muestra en la producción de un estudiante, si bien descubrió en una primera instancia que las dos variables son iguales, al principio probó con 325 y luego lo cambió a 375, de esta manera llegó a que como son iguales el sol y la estrella, cada uno deben valer 375 para que sumen 750.

En otros casos, no se dan cuenta inmediatamente de que el sol y la estrella valen lo mismo, pero recurren de igual manera al tanteo de números redondos.



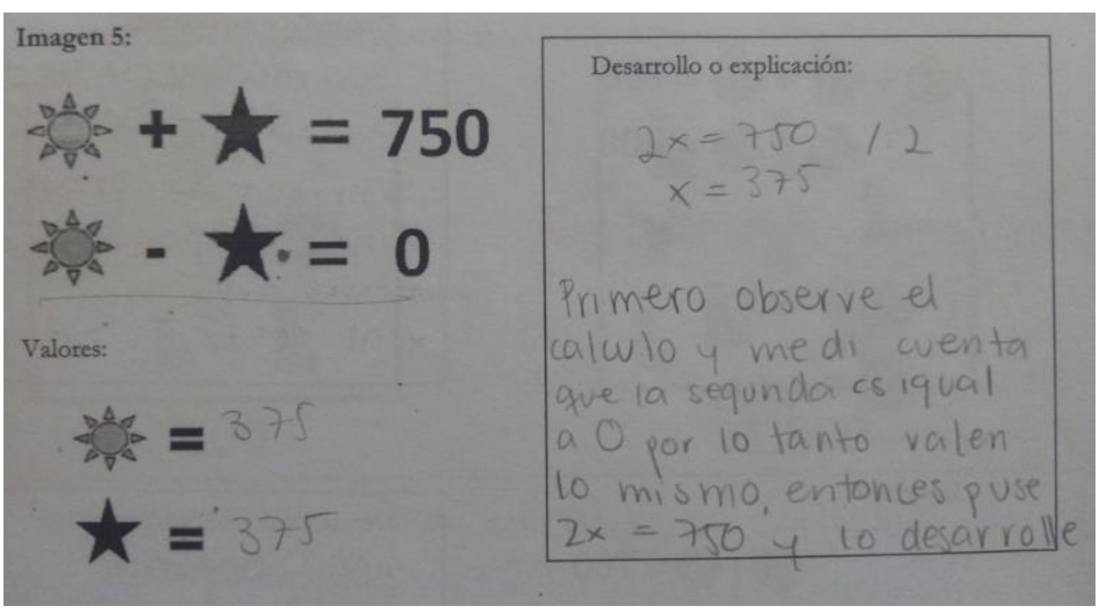
Estos estudiantes pensaron en que dos números sumados deben dar 750, por lo general proponían números redondos como 300 y 450, 400 y 350, 500 y 250, 200 y 550… pero luego al considerar la segunda ecuación y sustituir esos valores que se habían propuesto, los números no resultaban cero; 450 – 300 = 150, 400 – 350 = 50, 500 – 250 = 250, 550 – 200 = 350, todos distintos de cero.

En el programa de cálculo presentado hay infinitas soluciones para la primera relación, por lo que se necesita de una segunda ecuación para que los números elegidos cumplan también, y no se está cumpliendo la segunda relación porque la diferencia de los números elegidos hasta el momento no da cero; por lo que concluyen que dos números que al restarse resulten cero deben ser iguales. Es aquí donde visualizan que la segunda ecuación entrega información clave para poder resolver la primera ecuación y concluyen que ambos objetos valen lo mismo.



Esta deducción es categórica y matemáticamente se escribe: sol = estrella. Hay estudiantes que dedujeron rápidamente que hay una igualdad entre ambos elementos, pero no fue la mayoría.

Otros estudiantes si bien llegaron a esta conclusión, no lo escribían matemáticamente sol = estrella, valorizaban las expresiones en la ecuación para que se cumpliera la igualdad o lo decían verbalmente pero no necesariamente lo escribían formalmente.

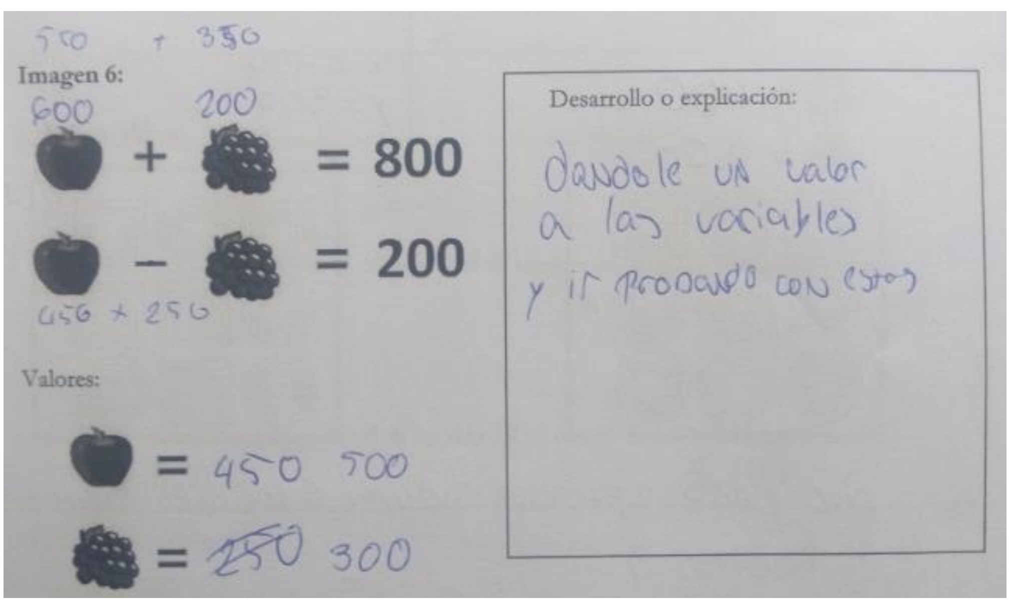


Luego conectaron la primera ecuación con esta nueva información y dedujeron que si son dos números iguales y que sumados dan 750, entonces los números son 375 para sol y los mismos 375 para estrella.

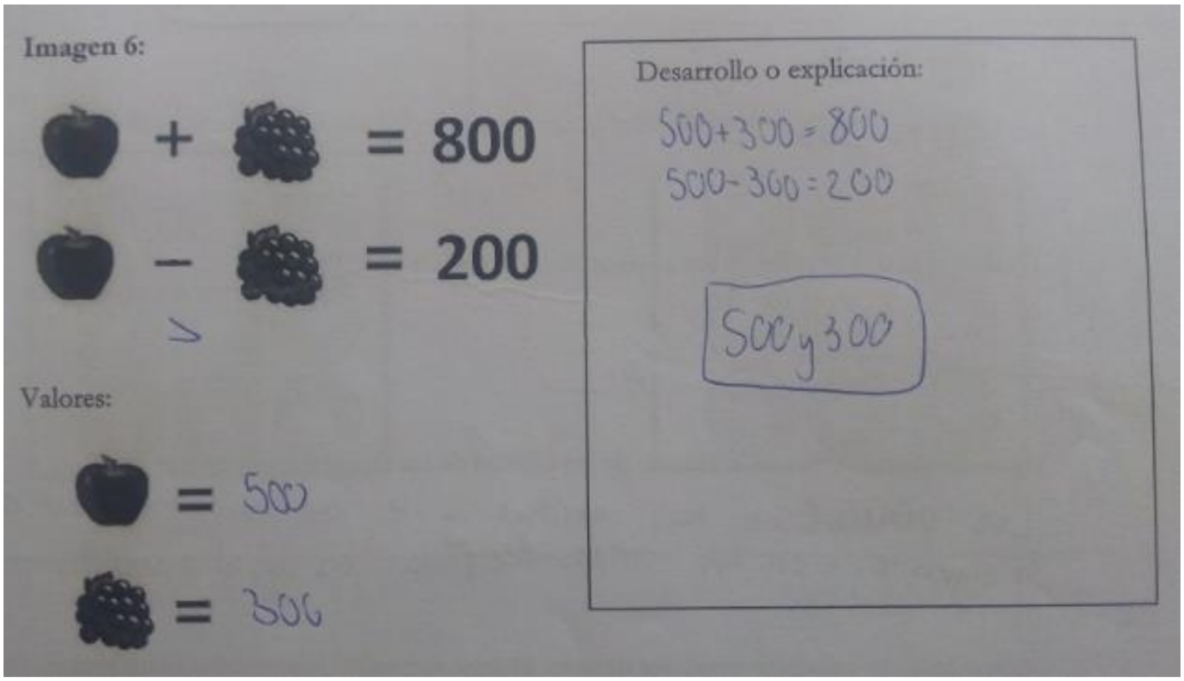
A pesar de las complicaciones que enfrentan los estudiantes, se refleja en los resultados que este problema tiene un porcentaje de logro entre el 73% y el 90%.

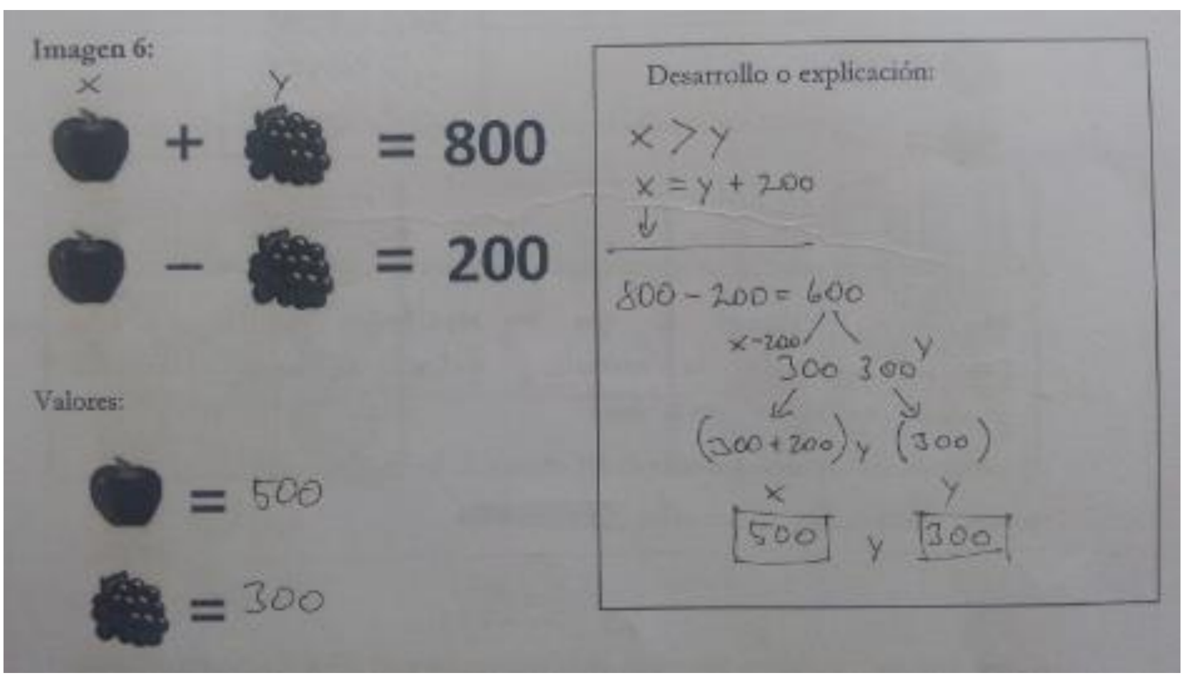
En el problema 6, se les presentan dos programas de cálculo en el que ambos tienen resultados distintos de cero, tratan de seguir la estrategia anterior pero fracasan. Es entonces cuando varios son capaces de mirar ambas ecuaciones en su conjunto y se dan cuenta que al sumar ambas ecuaciones se anulan las moras, porque una ecuación es manzana más mora suman 800 y la otra dice manzana menos moras suman 200, la forma en la que están posicionadas permite que visualmente se intensione esta reflexión, entonces al sumas ambas ecuaciones queda que dos manzanas valen 1000, por lo que una manzana vale 500, así una vez encontrado el valor de la manzana, calculan la diferencia y concluyen que la mora vale 300.

Varios estudiantes prueban con números cerrados como 400 y 400 tomándose del ejercicio anterior, luego saben que tienen una diferencia de 200 por lo que empiezan a probar con 550 y 350, 600 y 200, por ejemplo, pero al elegir un número lo prueban en ambas ecuaciones y van descartando.



Otros estudiantes concluyen que la manzana debe tener un valor mayor que la mora porque la segunda relación queda positiva, entonces sabiendo que hay una diferencia de 200 y siendo la manzana mayor que la mora entonces empiezan a buscar valores.



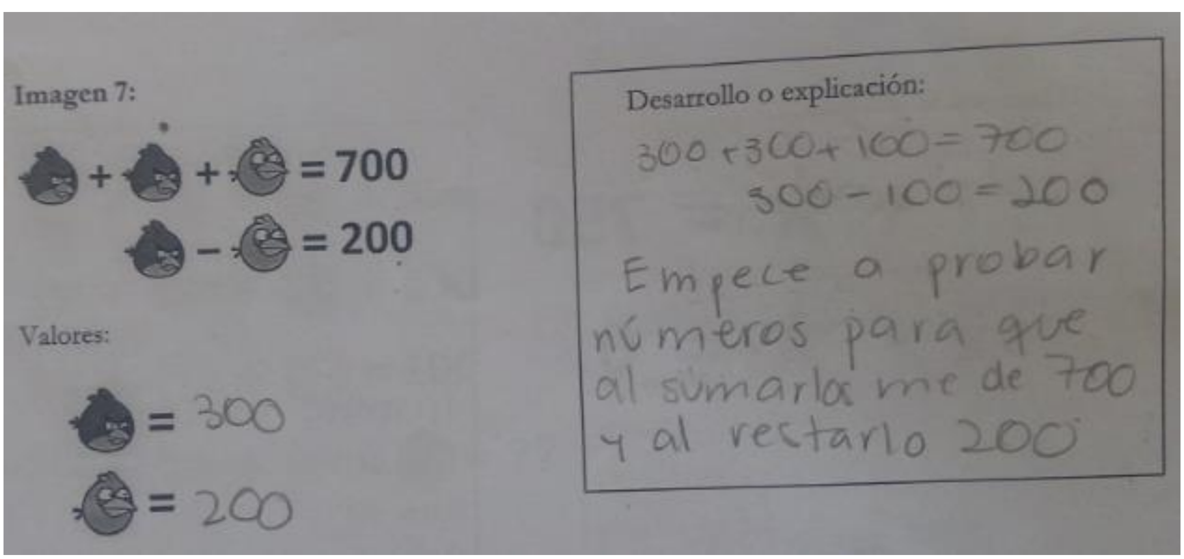


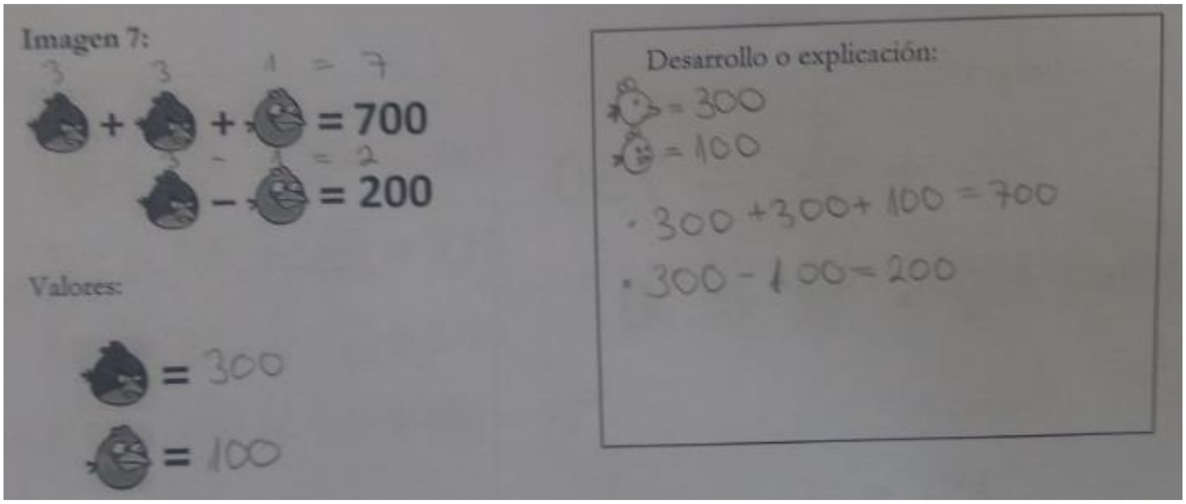
Si bien el problema 5 es un Hito de esta propuesta, en los resultados que se presentan más adelante, se ve claramente que hay una gran disminución del porcentaje de logro de este problema, variando entre un el 53% y 70%.

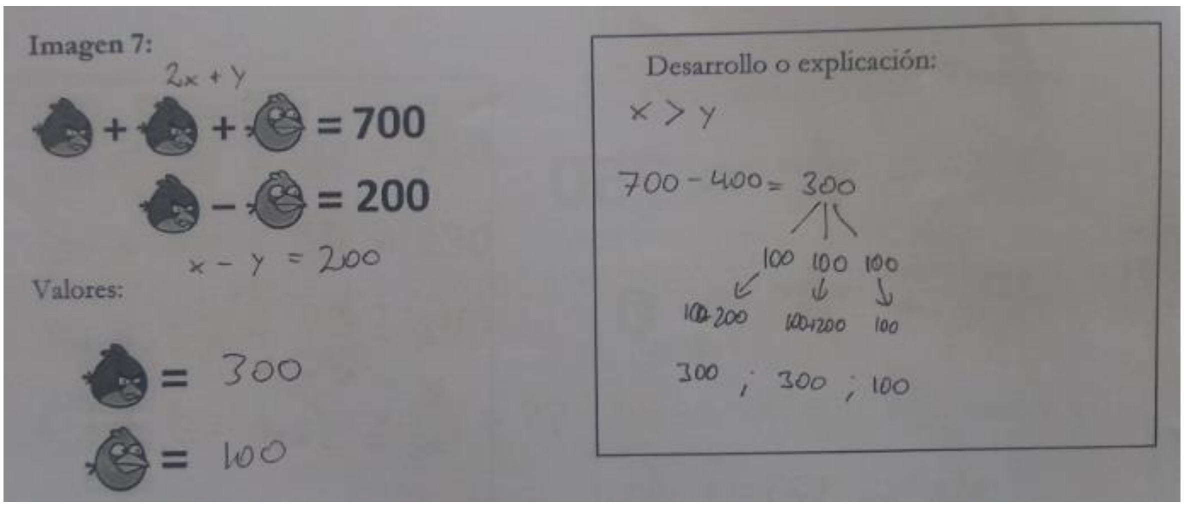
En el problema 7 se agrega un elemento a la primera ecuación, entonces ya no tendrán que buscar dos valores que sumados o que cuya diferencia cumplan tales condiciones, si no que en esta oportunidad se complejiza ya que son más condiciones en juego. Esto no quiere decir que los estudiantes no valoricen, si no que antes de hacerlo encuentran una condición para hacerlo óptimamente, esto es posible ya han adquirido la técnica de sumar ambas ecuaciones.

A partir de este problema, varios estudiantes comienzan a escribir las relaciones matemáticas como dos ecuaciones de dos incógnitas, les acomoda porque ahora no hay un pajarito de cada color, sino que en la primera ecuación hay dos pajaritos rojos y uno amarillo, esto lo traducen en $2x + y = 700$. Y en la otra ecuación hay una diferencia entre los pajaritos, esto es, $x – y = 200$.

Algunos suman ambas ecuaciones y llegan a que $3x = 900$, por lo tanto un pajarito rojo vale 300 y en amarillo vale 100. La gran mayoría de los estudiantes que logra hacer este ejercicio, lo resuelve por tanteo, de la diferencia entre los dos pajaritos que es 200 comienzan a probar, para cumplir con la condición de la primera ecuación.







En el problema 8, la técnica ya está a poniéndose a prueba por cuarta vez, lo que da mucha seguridad a los estudiantes en el planteo de las ecuaciones, pero se refleja que la gran mayoría sigue valorizando una vez que plantea ambas ecuaciones, entonces comienzan a probar números que cumplan las condiciones, o bien, teniendo en cuenta una relación van probando los valores hasta que satisfaga la segunda relación también.

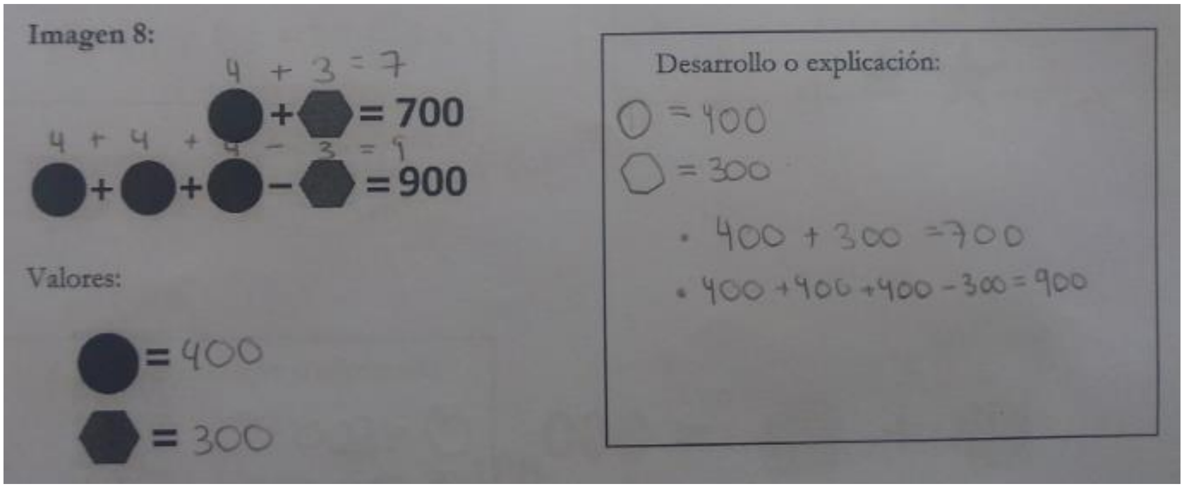


Imagen 8:
4 + 3 = 7
= 700
4 + 4 + 4 − 3 = 9
= 900
Valores:
= 400
= 300
Desarrollo o explicación:
= 400
= 300
• 400 + 300 = 700
• 400 + 400 + 400 − 300 = 900

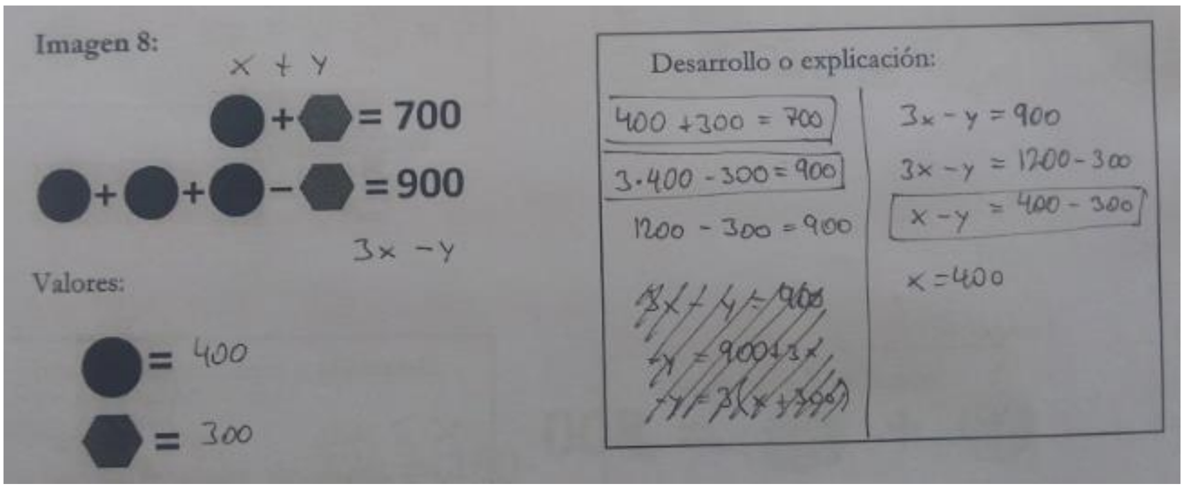


Imagen 8:
x + y
= 700
= 900
3x − y
Valores:
= 400
= 300
Desarrollo o explicación:
400 + 300 = 700
3·400 − 300 = 900
1200 − 300 = 900
3x − y = 900
3x − y = 1200 − 300
x − y = 400 − 300
x = 400

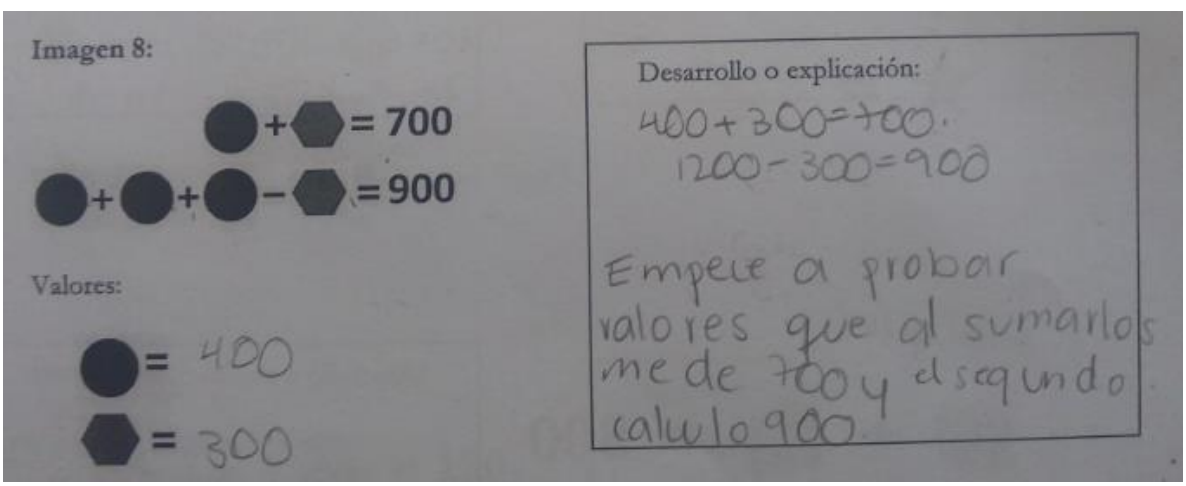
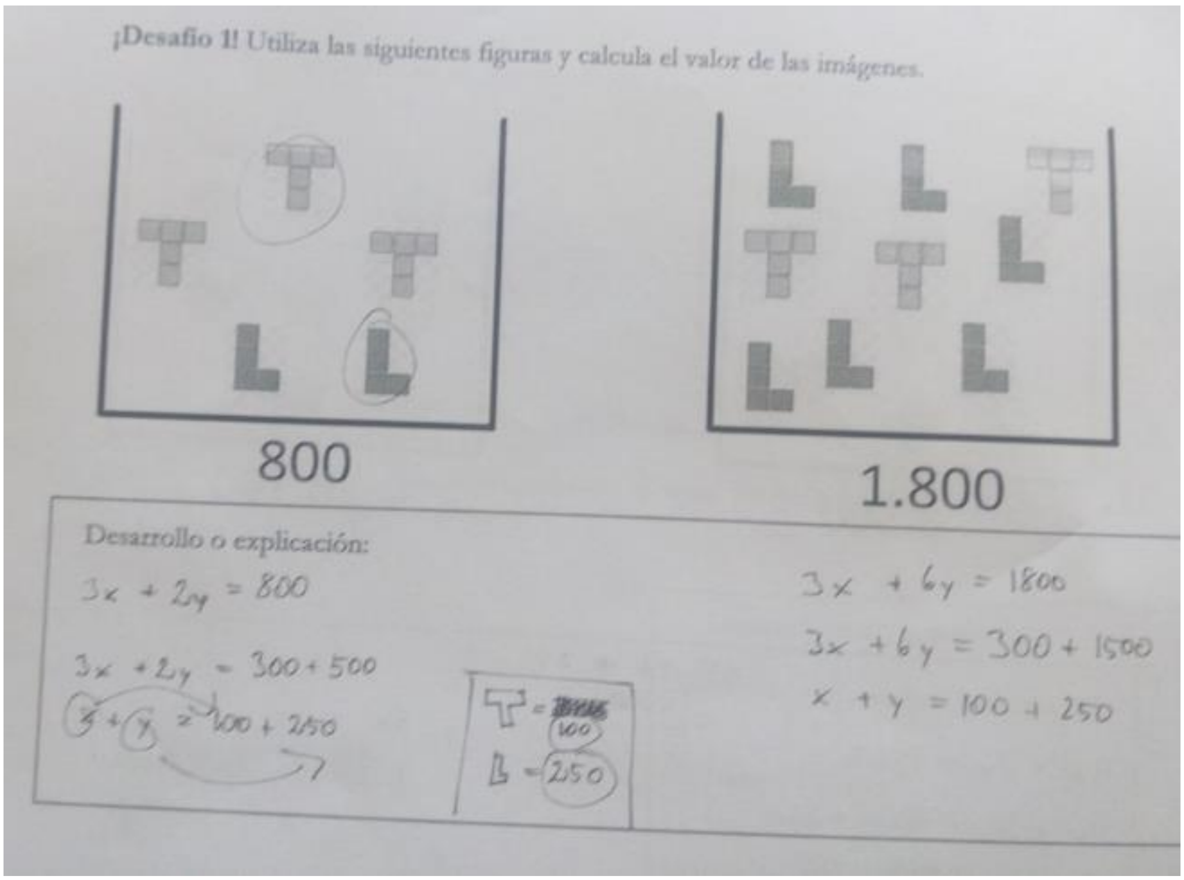


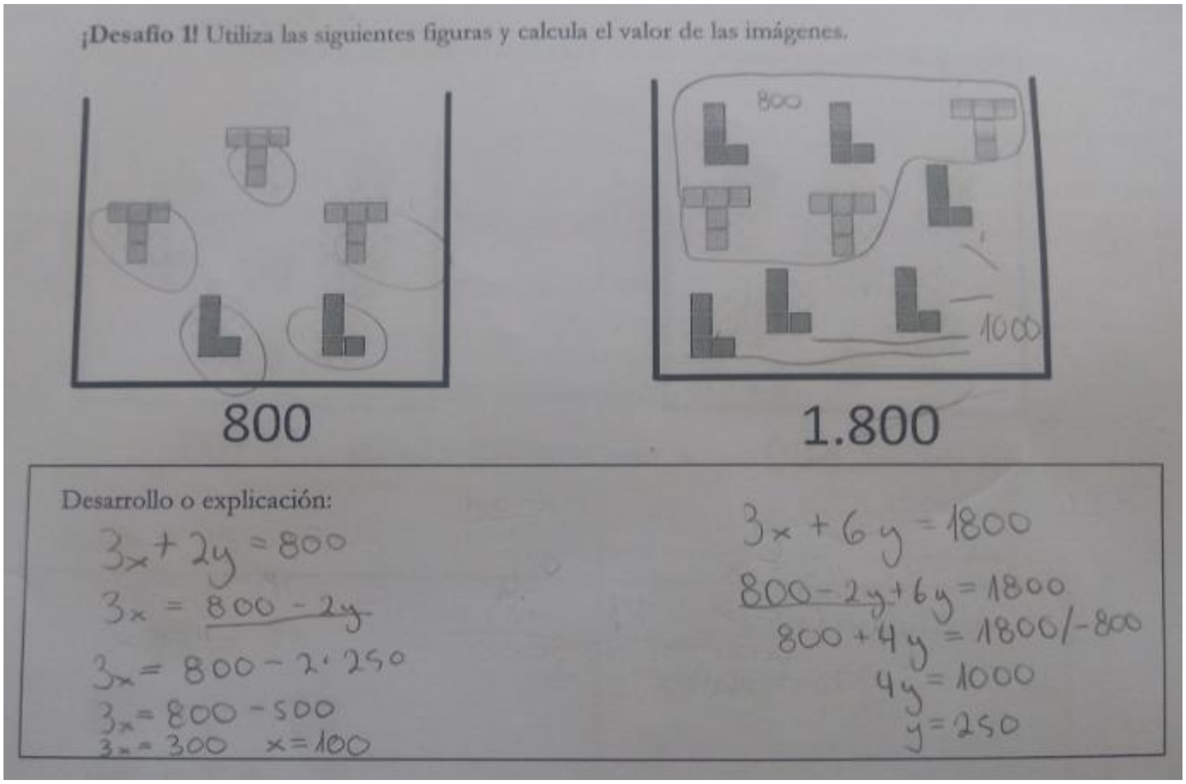
Imagen 8:
= 700
= 900
Valores:
= 400
= 300
Desarrollo o explicación:
400 + 300 = 700.
1200 − 300 = 900
Empece a probar valores que al sumarlos me de 700 y el segundo calulo 900.

En el problema 9, llamado Desafío 1, varios estudiantes arman las ecuaciones, en estas más de un ejemplar por objeto, en el primer cuadro se traduce como 3T + 2 L = 800 y el segundo, 3T + 6 L = 1800.

Este es el segundo hito de la propuesta didáctica se produce un punto de inflexión, ya que los estudiantes deben cambiar la técnica que los había acompañado durante los últimos cuatro ejercicios. Algunos tienden a entender las relaciones que hay en una de las ecuaciones, encontrar números y luego hacerlos calzar con la segunda condición.



Muy pocos estudiantes logran sustituir una ecuación en la otra y darse cuenta que uno está contenido en el otro, por lo que la diferencia de 1000 equivale a la diferencia de las 4L, entonces cada L vale 250.



¡Desafío 1! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.

Desarrollo o explicación:

$3x + 2y = 800$

$3x = \underline{800 - 2y}$

$3x = 800 - 2 \cdot 250$

$3x = 800 - 500$

$3x = 300 \quad x = 100$

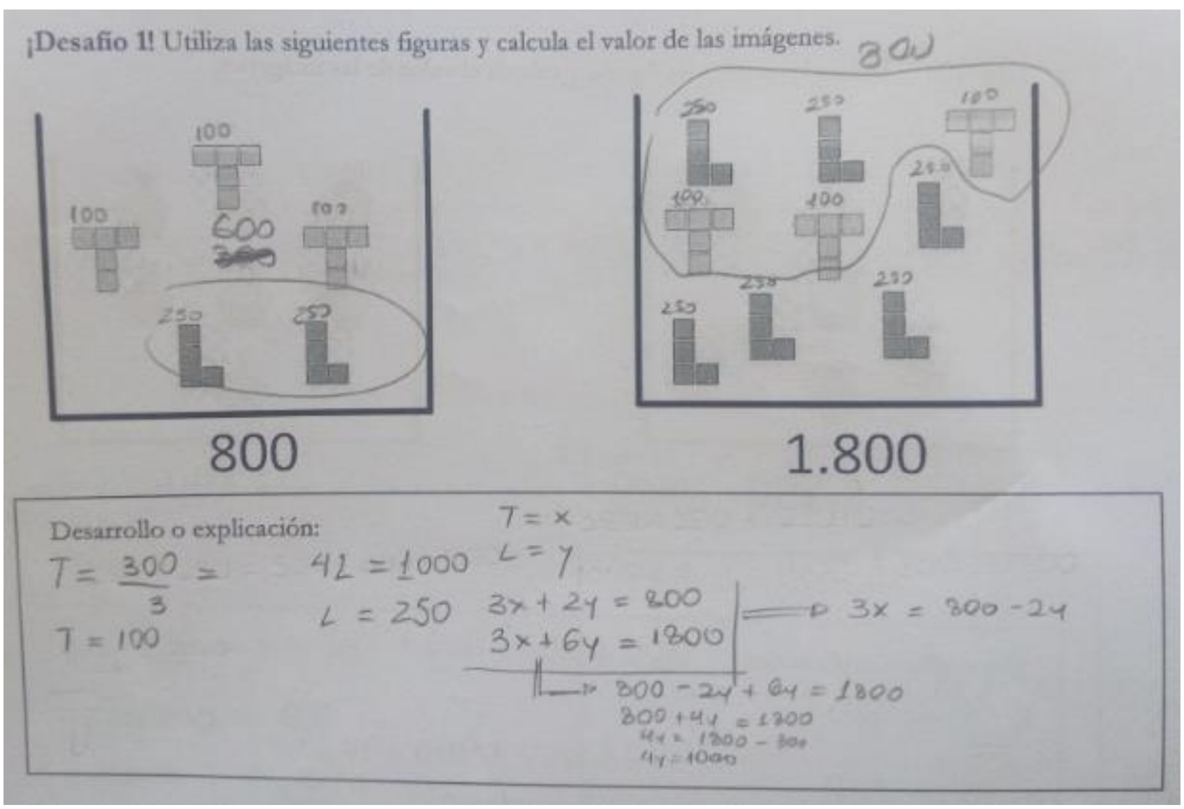
$3x + 6y = 1800$

$\underline{800 - 2y} + 6y = 1800$

$800 + 4y = 1800 / -800$

$4y = 1000$

$y = 250$



¡Desafío 1! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes. 800

Desarrollo o explicación:

$T = \frac{300}{3} =$

$T = 100$

$4L = 1000$

$L = 250$

$T = x$

$L = y$

$3x + 2y = 800$

$3x + 6y = 1800$

$\Rightarrow 3x = 800 - 2y$

$\Rightarrow 800 - 2y + 6y = 1800$

$800 + 4y = 1800$

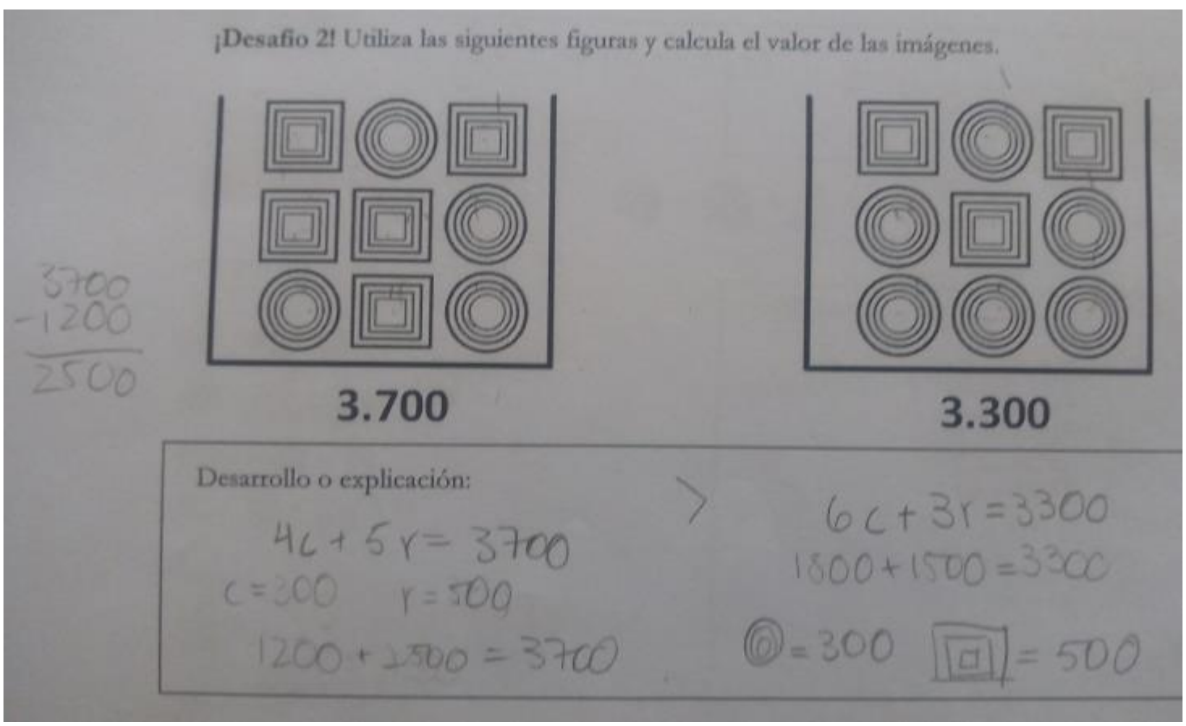
$4y = 1800 - 800$

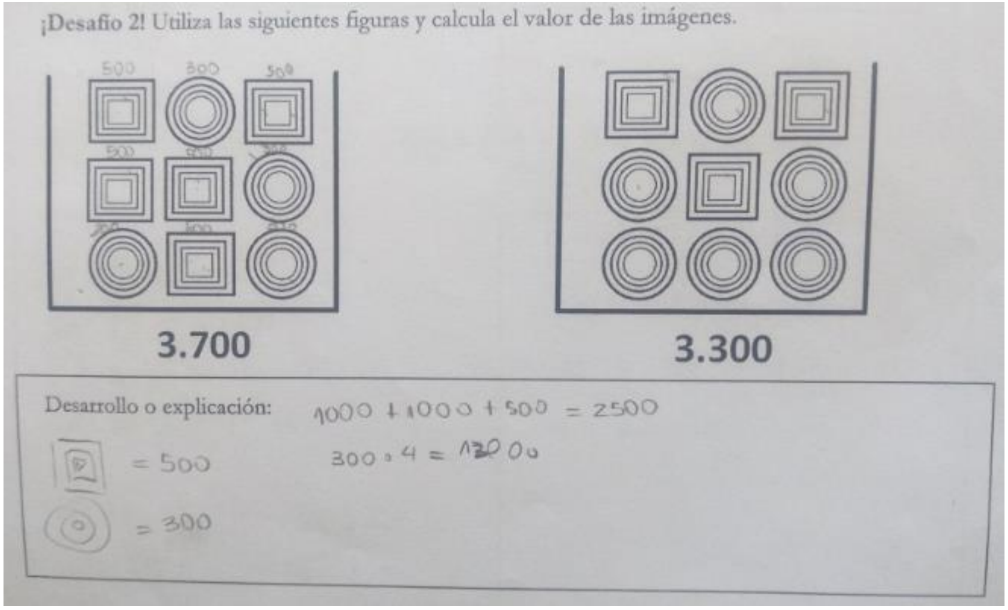
$4y = 1000$

Ante los resultados que se exponen más adelante se refleja que este problema es claramente un hito de quiebre ya que tuvo un porcentaje de logro entre un 40 y un 67%.

En el problema 10, llamado Desafío 2, no tienen explícitamente la diferencia entre una relación y la otra, son todas cantidades positivas, por lo que la técnica de Reducción no está explícita, más bien, deben generar otra técnica.

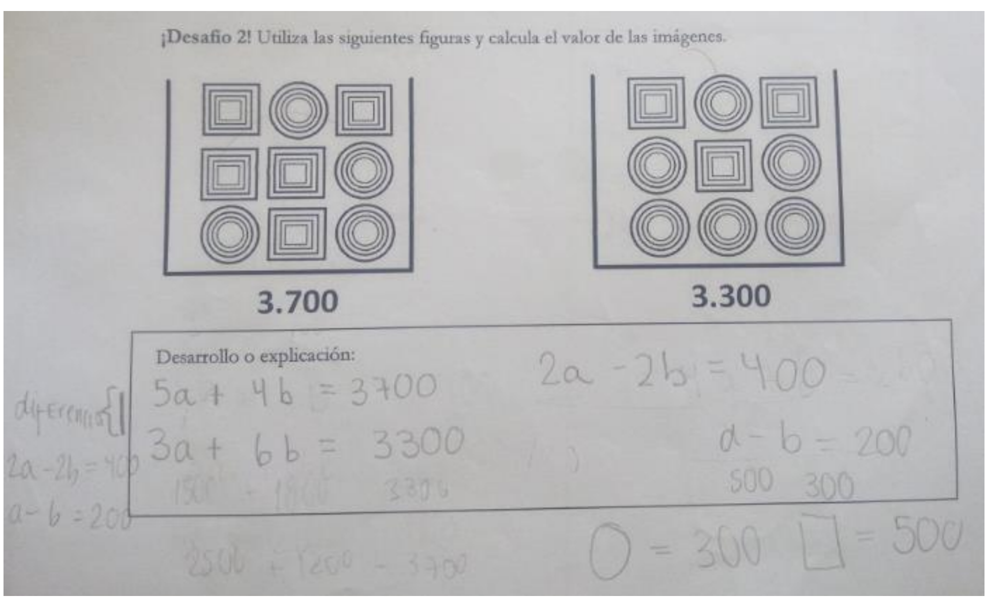
Nuevamente recurren con frecuencia al tanteo, pero antes buscan una condición que les sirva de ayuda para comenzar a encontrar números que cumplan ambas relaciones. Esta condición es decir que el recuadro de la izquierda es más grande que el de la derecha, luego plantean ecuaciones y se dan cuenta que hay elementos repartidos en distintas cantidades entre un cuadro y el otro. Algunos proponen, tenemos 4 círculos más 5 cuadrados y suman 3700, en el otro recuadro se tienen 6 círculos más 3 cuadrados y suman 3300. Por lo tanto los cuadrados deben valer más que los círculos y valorizan en base a esa conclusión.



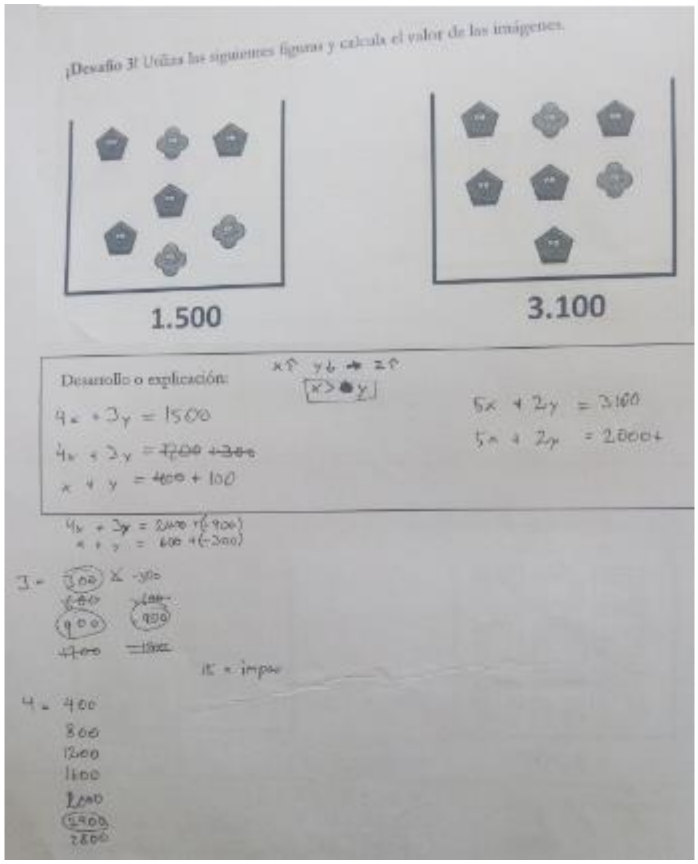


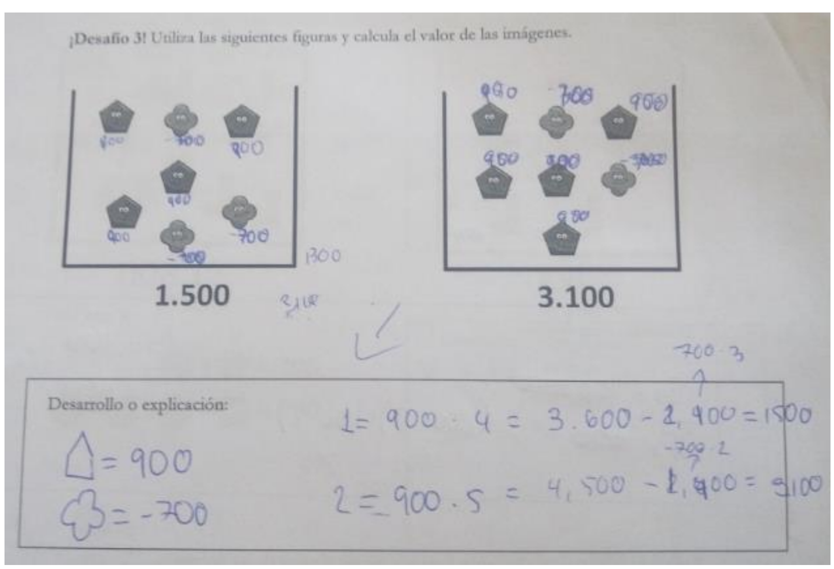
Otros, una vez planteadas las relaciones de ambos recuadros, ven la diferencia entre las ecuaciones y trabajan sobre la expresión reducida para luego valorizar, esto es, la diferencia entre el primer cuadro y el segundo es, la diferencia entre 2 cuadrados y dos círculos es 400, luego, la diferencia entre un cuadrado y un círculo es 200, ahora es más sencillo valorizar que con las primeras dos ecuaciones.

Este problema implicó un gran nivel de dificultad, además de las estrategias rebuscadas que se mostraron y del ensayo y error, esto se vio reflejado en que entre un 60% y 76% del grupo tratamiento no contestó bien el problema o no contestó.

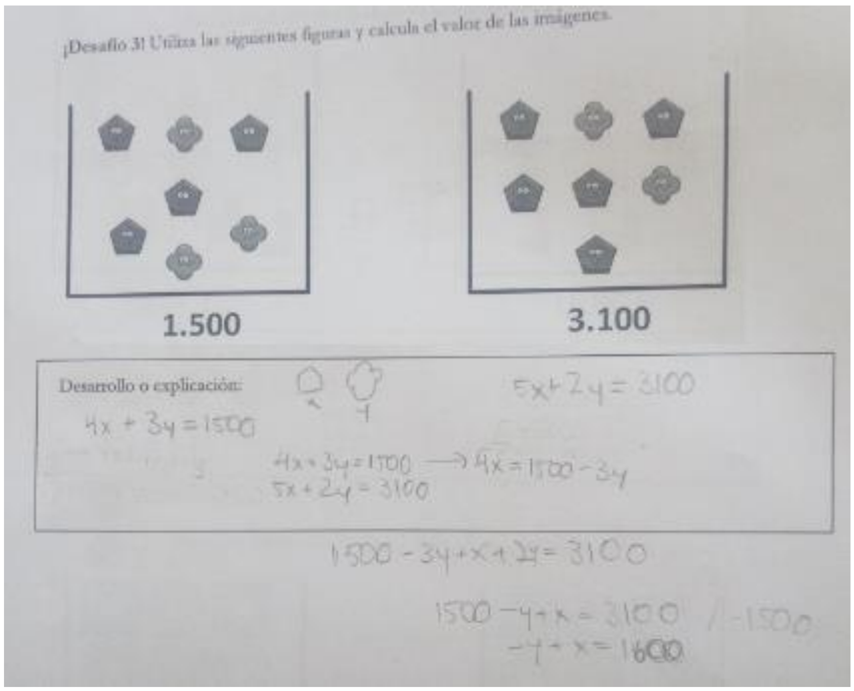


En el problema 11, llamado Desafío 3, siguen con esta técnica pero les falla con mayor frecuencia. Tratan de conjeturar qué recuadro tiene mayor valor según la cantidad de elementos que tienen para luego encontrar alguna condición que les haga más fácil la valorización de los números, pero muchos no logran obtener los valores, a pesar de que son capaces de plantear de forma correcta las ecuaciones.





Son escasos los estudiantes que, al plantear las dos ecuaciones correspondientes, son capaces de sustituir una ecuación en la otra y luego no logran seguir por la manipulación de expresiones algebraicas involucradas que es el nuevo contenido que ellos aún no manejan. Las dificultades al enfrentarse a este problema son claras, solo responden el problema entre un 20 y un 23 por ciento de los estudiantes que participan en esta experiencia.



Esta propuesta didáctica, permite finalmente que los estudiantes por sus propios medios se encuentren con la necesidad de construir diferentes técnicas algebraicas para resolver los problemas propuestos que no se pueden resolver por aritmética. Al enfrentarse ante esta necesidad gran parte de los estudiantes lo logran.

Fase 4: Análisis de resultados

8.4. Resultados de los estudiantes frente a la Propuesta Didáctica

En este apartado se analizarán los resultados y respuestas de los estudiantes ítem a ítem de la Propuesta Didáctica. Para analizar de manera cuantitativa el impacto de la propuesta en los estudiantes de cada curso, se otorga un valor numérico al trabajo de los estudiantes ítem a ítem, resultando la siguiente escala de valores:

0: No contesta o no responde

1: Esboza relaciones incorrectas

2: Escribe el resultado sin explicación o comete equivocaciones menores.

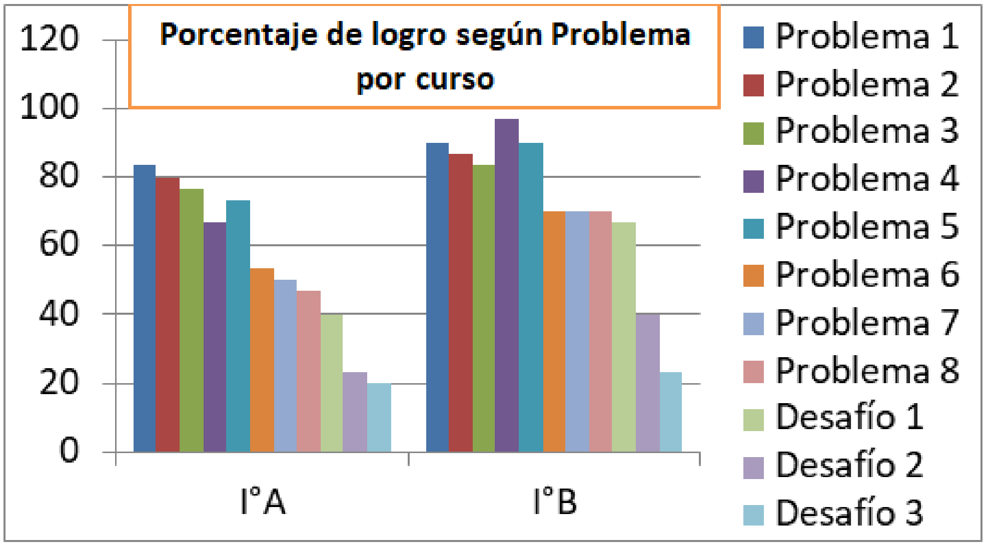
3: Desarrolla y explica el ejercicio correctamente.

Luego se ordenan en la siguiente tabla, donde podemos observar el promedio de cada pregunta (ítem) por curso y finalmente en la última columna esto resulta en un promedio por curso.

Curso/Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	D1	D2	D3	Promedio curso
I°A	2,5	2,4	2,3	2,0	2,2	1,6	1,5	1,4	1,2	0,7	0,6	1,67
I°B	2,7	2,6	2,5	2,9	2,7	2,1	2,1	2,1	2,0	1,2	0,7	2,13

Dado que la rúbrica es de una escala muy pequeña, de cero a tres puntos, nos permite analizar de mejor manera los resultados si nos centramos en el porcentaje de logro por ítem, como se presenta en la siguiente tabla y gráfico adjunto.

Curso/Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	D1	D2	D3	Porcentaje de logro
I°A	83,3	80	76,7	66,7	73,3	53,3	50	46,7	40	23,3	20	55,7%
I°B	90	86,7	83,3	96,7	90	70	70	70	66,7	40	23,3	71%



Ahora tenemos una visión general del comportamiento de ambos grupos tratamiento. Tal como buscaba nuestra hipótesis, los estudiantes vivieron una ruptura con el Problema 5, que lograron superar y luego, en su mayoría formularon estrategias para poder resolver los Problemas 6, 7 y 8. La adquisición de esta nueva técnica se pone a prueba nuevamente en el Desafío 1, el que pocos pueden superar, pero tienen grandes dificultades para encontrar una técnica que les permita resolver los Desafíos 2 y 3.

8.5. Resultados por grupo

La información que nos entrega el gráfico podemos analizarla de varias maneras, comenzaremos con la evidente diferencia que se tiene en cuanto a porcentaje de logro de la Propuesta en general, donde el I°A logra un promedio de 55,7% y el I°B logra en promedio un 71% de logro. El I°B tiene una ventaja de un 15% por sobre el logro del I°A.
Al mirar en detalle los resultados por cada problema, podemos ver que el ítem mejor logrado para el I°A es el primer problema, recordemos, este es de simple aritmética y luego va descendiendo conforme a que se le van agregando operaciones combinadas, luego repunta en el problema 5 pero sólo un 50% o menos, encuentra la técnica necesaria para resolver los problemas 6, 7 y 8, habiendo muchos estudiantes que no contestan o que esbozan relaciones incorrectas. Luego un 40% contesta el problema Desafío 1, son 34 estudiantes que participaron en el I°A, por lo que el 40% son alrededor de 14 estudiantes.

Luego sigue en descenso para el Desafío 2 y 3, por lo que se concluye que no pudieron encontrar una técnica que les permitiera resolver estos problemas.

En una mirada general de este curso, siempre tiende a la baja, a medida que se les van presentando los problemas, logran cada vez en menor medida resolverlos correctamente, esto solo cambia con el Problema 5, al ser un hito de la propuesta en el que deben cambiar de estrategia con respecto a lo que venían haciendo.

En el I°B se les presenta el primer problema y comparten la estrategia para resolver los siguientes tres, el porcentaje de logro baja con respecto del ítem 1 al 2 y del ítem 2 al 3, por la manipulación aritmética que ya describimos en el apartado anterior pero sube y en el problema 4, esto nos dice de alguna forma que fueron dándose cuenta de que debían calcular el valor de cada uno de los elementos que se les mostraban y no pasarlos por alto. En el Problema 5, tienen muy buenos resultados, un 90% de logro, pero solo un 70% logra adquirir y traspasar la técnica para resolver los problemas 6,7 y 8. El Desafío 1 tiene un gran porcentaje de logro, sabemos que participaron 33 estudiantes, por lo que el 66,7% son alrededor de 33 estudiantes, luego en el Desafío 2, disminuye a 40% y finalmente en el Desafío 3 cae al 23,3% de logro.

Dados los resultados obtenidos, se muestra que son cursos muy diferentes, desde el inicio, por lo que es importante centrarse en el análisis de las respuestas que escribieron en el instrumento.

Una diferencia notoria fue que en la documentación de los estudiantes del Primer año medio B, la gran mayoría de los ejercicios resueltos estaban con sus desarrollos respectivos de manera ordenada y con buenas explicaciones, en su gran mayoría, dibujaron las frutas, figuras o elementos cuyos valores se les pedían encontrar, mientras que en el Primer año medio A pocos estudiantes hicieron los desarrollos de los problemas.

Al observar las guías y las producciones de los estudiantes de ambos grupos, se encontraron similitudes entre los estudiantes, dentro de un mismo curso utilizaron diferentes técnicas, como resolver por completación, utilizar ecuaciones de primer grado para resolver, probar con distintos números y cambiarlos según sirva o no, en ambos grupos se encontraron producciones en blanco, en las que no contestaron el ejercicio, esto se dio con mayor regularidad al ir avanzando en la guía, esto nos hace pensar que les faltó tiempo para terminar, esto se observa mucho más en el I°A que en el I°B.

Una similitud es que están bastante parecidos en cuanto al porcentaje de logro de los tres primeros problemas, ya que varios estudiantes se equivocaron en sumar o en contar una uva de más o de menos, ese tipo de errores se compartió en ambos grupos.

Luego en el Problema 5 hay un 17% de diferencia en el porcentaje de logro de ambos cursos, es una diferencia importante y denota que es un hito de la Propuesta didáctica.

En el segundo hito de la propuesta, el Desafío 1, la diferencia se acentúa aún más, con casi un 27% de diferencia entre el porcentaje de logro de ambos grupos. En el Primer año medio A, solo un 40% lo logró mientras que el Primer año medio B, un 66,7% de los estudiantes logró resolver ese tipo de problemas.

En cuanto al Desafío 3, la diferencia en porcentaje de logro poco significativa entre ambos grupos.

Es en base lo que muestran las respuestas de los estudiantes, podemos decir que el sentido didáctico de la propuesta se confirma, ya que permitió que los estudiantes transitaran de la aritmética al álgebra sin la intervención directa de un profesor, es decir, sin una clase formal o expositiva.

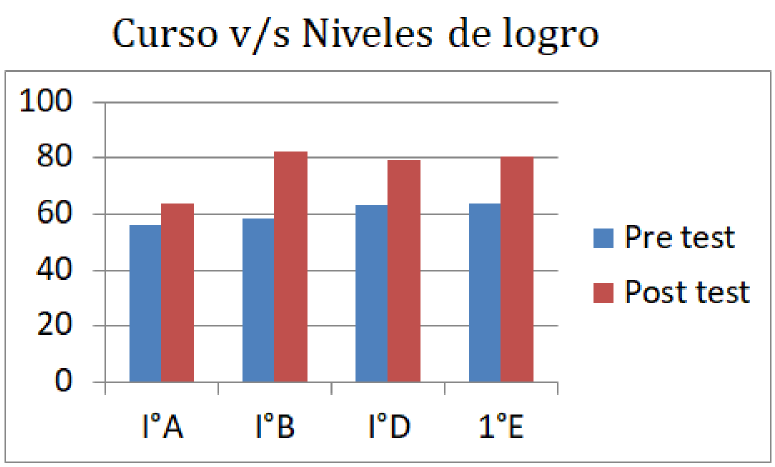
8.6. Cruces entre resultados de grupos tratamiento y grupo control

Dadas las restricciones del colegio, principalmente de tiempo para cumplir la cobertura curricular anual, utilizamos como pre test y post test instrumentos generados por esta institución, considerando trabajan con estos instrumentos que testean el aprendizaje de sus alumnos en el eje de álgebra antes y después de comenzar esta unidad, podemos obtener esta información. El pre test que se decide utilizar para la investigación fue una Prueba de Síntesis (Anexo IX) y el post test también fue una prueba institucional del colegio (Anexo VII). Instrumentos probados y validados año a año por un equipo formado por docentes y coordinación académica de la institución, además, es claro que todos los estudiantes fueron medidos con los mismos instrumentos. En todos los grupos se observa un aumento en el porcentaje de logro en el eje de Álgebra desde el pre test hasta el post test, en cuanto a los grupos con tratamiento, el Primer año medio A subió un 7,64% y el Primer año medio B subió un 23,8% y además llegó a un porcentaje de logro mayor que los otros grupos del nivel.

En los grupos sin tratamiento, se tiene que el Primer año medio D aumentó su porcentaje de logro en un 16,47% y el Primer año medio E, un 16,69%.

En la tabla se muestra el contraste del porcentaje de logro entre la aplicación del pre test, la aplicación de la propuesta didáctica para los grupos con tratamiento y las clases tradicionales para los grupo sin tratamiento y finalmente se les aplica el post test.

Grupo curso	A	B	D	E
Pre test	56,08	58,61	62,96	63,63
Post test	63,72	82, 41	79,43	80,32



Ambos grupos sin tratamiento (I°D y I°E) aumentaron en un 16% su porcentaje de logro en el eje de Álgebra con el sistema tradicional de enseñanza que propone el colegio.

Dado que la diferencia entre ambos grupos con tratamiento es muy pronunciada contrastaremos la información por separado.

Para el Primer año medio A, la diferencia en cuanto a porcentaje de los logros obtenidos es de un 7,6%. Si bien subió, fue el grupo que avanzó menos en cuanto a porcentaje de logros, incluso menos que los grupos control.

Si bien con estos resultados no se puede afirmar que un estudiante aprende mejor cuando se presentan problemas cuya resolución no depende de una técnica impuesta, si no que el estudiante por medio de la indagación va generando sus propias estrategias y haciendo matemática, construyendo y modelando, si se puede concluir, por medio de las explicaciones que hicieron los estudiantes tanto en las clases como en las guías de trabajo que se recogieron, se observaron varias felicitaciones que vale la pena nombrar ya que aportan a la esencia de la propuesta didáctica, como primera impresión, a los estudiantes se les vio motivados resolviendo los primeros problemas, ya que los habían visto en redes sociales y se les hicieron conocidos, por lo que se logró de cierta manera que sean problemas contextualizados, además de una motivación que no estaba contemplada. También agradecieron que sea una guía visualmente amigable y que no haya sido una clase tradicional en donde ellos, por medio de la experimentación descubrieron las técnicas, así también los estudiantes que no lograron resolver el problema 5 pidieron ayuda a sus compañeros o simplemente avanzaron hasta donde pudieron sin desmotivarse y cada uno a su propio ritmo de aprendizaje.

El Primer año medio B en cambio, logró subir un 23,8% entre ambos test, esta es la mayor diferencia registrada entre los cuatro cursos que fueron testeados. Este grupo tratamiento aumentó por lejos su nivel de logro con respecto a los otros tres grupos, incluso alcanzó y superó a los grupos control que comenzaron con una pequeña ventaja en el pre test que se les aplicó. En este grupo tratamiento se consiguió evidenciar que estudiantes que no tenían tan altos sus niveles de logros consiguieran mejores resultados que estudiantes que les iba bien, o al menos mejor que a ellos. Esto hace una gran diferencia, superando en niveles de logro a los otros tres cursos de su nivel.

Al observar en detalle los análisis de la propuesta didáctica ítem a ítem en el Primero Medio A, hay una gran cantidad de estudiantes que no contesta los problemas a partir del Desafío 1, más notoriamente, o que su producción baja de calidad, esto es, que ya no dibujan, si no que ocupan incógnitas usuales x e y para plantear las ecuaciones o no explican los ejercicios. Estos resultados nos dan luces de que una variable que no fue considerada es que el tiempo de aprendizaje o de reacción de los estudiantes es distinta y era de esperarse dadas las características de este grupo. El I°A evidentemente tiene un ritmo distinto al B, ahora esto no tiene cabida en nuestra educación tradicional que se normaliza el tiempo para todos por igual. Esto nos demuestra que es muy complejo generalizar estrategias de enseñanza únicas para todo un sistema escolar, dado que los estudiantes son diversos, tiene distintas habilidades. Hay estrategias que les sirve a unos y puede que no sean las mejores para otros.

La didáctica no puede limitarse al estudio de las condiciones y restricciones tras las cuales se presenta una intención didáctica: para estudiar, por ejemplo, la eficacia de un sistema particular de condiciones y restricciones, es decir, de una organización didáctica particular, creada en un aula por un profesor, es posible que haya que tener en cuenta condiciones y restricciones que, por el contrario, no fueron creadas por el profesor, [algunas de las cuales] no responden a ninguna intención didáctica claramente identificable. (Chevallard Y., 2007)

Chevallard lo trabaja en la problemática ecológica, menciona que lo que sirve en un ambiente puede que no necesariamente sea lo mejor para otro de similares características ya que las condiciones no son las mismas, entonces no se puede utilizar la misma estrategia didáctica. En este caso, ambos cursos son del mismo nivel social, ambos cursos de hombres con la misma enseñanza durante 12 años que no tiene los mismos intereses ni comportamientos, por lo que debería haberse implementado una estrategia distinta, con más tiempo para el I°A por ejemplo, para poder haber aprovechado de mejor manera el instrumento y se habría logrado visualizar las formas de razonamiento de los últimos problemas.

Capítulo 9

<u>Fase 5:</u> Conclusiones del estudio y proyecciones

La pregunta de investigación que generó el trabajo fue: "*¿Existe un problema en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Álgebra en cuanto al método tradicional de enseñanza? ¿Se puede enseñar el Álgebra con sentido para nuestros estudiantes, de manera que aparezca el Álgebra como una necesidad y no como una imposición de técnicas?"*.

Para darles respuesta se generaron algunas hipótesis: "*El Álgebra aparece en el sistema escolar de una manera arbitraria e impuesta, desvinculada de su realidad, necesidad y por lo tanto de su real sentido*". "*En el sistema escolar se impone el Álgebra a temprana edad por lo que los estudiantes son capaces de manipular expresiones algebraicas pero muchas veces no logran modelar situaciones ni resolver problemas por medio del Álgebra".* Para sustentar esta hipótesis se hizo una revisión documental, del Currículum Nacional, del Programa de Estudio y del libro de Texto oficial con el que trabaja el Ministerio de Educación, por medio del análisis se detectó una gran cantidad de ejercicios de manipulación de expresiones algebraicas, no así oportunidades para crear la técnica.

Los estudiantes son capaces de utilizar las herramientas del álgebra y de manipular expresiones algebraicas, ya que en el currículum aparece el Álgebra en tercer año Básico, y se les van agregando técnicas a medida que van creciendo hasta llegar Primer año de Enseñanza Media con un "set de técnicas algebraicas", que utilizan sin tener que discriminar qué técnicas utilizar porque los problemas que se les presentan son ejercicios clásicos y de un mismo tipos, es decir, se presenta la tarea, se enseña la técnica y luego se hacen ejercicios del mismo tipo repetidas veces.

No se observó en los documentos que se presentara algún ejercicio o problema que se necesitara una técnica distinta a la presentada, los llamados problemas, o resolución de problemas son ejercicios de enunciado verbal. Los tipos de tareas que se presentan, son resolubles con una técnica y luego se utiliza para todas las tareas, tampoco se presentan tareas desafiantes en las que surja la necesidad de crear u ocupar otras técnicas.

Otra hipótesis del trabajo: "*Los estudiantes aprenden el álgebra como una generalización de la aritmética que sigue ciertas reglas, por lo que se aprende de manera atomizada e impuesta, no por una necesidad".* En los libros de texto se observa esta situación no como un hecho puntual, si no muy por el contrario, se generaliza a lo largo del Eje de Álgebra del texto, notando una gran cantidad de reglas para aplicar efectivamente el álgebra, esto se sustenta dada la imposición o falta de argumentación al proponer la utilización de los distintos objetos matemáticos y en una forma disociada y parcelada que se les va presentando a los estudiantes, estos son los fenómenos didácticos que Espinoza en 1988, estudió y explicó, y aún siguen apareciendo luego de más de 30 años en nuestro sistema escolar Chileno.

La última hipótesis que pretende dar respuesta a la pregunta de investigación es: *"Una gran parte de los ejercicios que les proponemos a nuestros estudiantes no necesitan el uso del álgebra, por lo que utilizan la aritmética o la completación para encontrar la solución, sin embargo esto falla cuando les presentamos cierto tipo de tareas donde necesariamente deben encontrar otra estrategia ya que la aritmética falla y se hace necesario el uso o aparición del álgebra".*

La propuesta didáctica trata de sustentar esta hipótesis, como ya vimos en el capítulo anterior, al experimentar podemos obtener una gran variedad de resultados, al trabajar con personas y distintos agentes siempre nos vamos a encontrar con dificultades, aciertos, experiencia. Si bien el grupo sin tratamiento avanzó con la enseñanza tradicional que se imparte en la institución, y que fue un avance muy similar entre ambos cursos controles, este avance es bastante menor que el experimentado por uno de los cursos del tratamiento, que además partía de niveles de logro considerablemente más bajos. Ello podría interpretarse como que la enseñanza escolar tradicional funciona, pero nos enfocaremos en el grupo que recibió tratamiento, específicamente en el grupo que aumentó significativamente sus resultados, llegando muy por sobre los resultados de sus pares. En este grupo la propuesta didáctica se implementó por una profesora con mucha experiencia en aula y que llevaba el ritmo de la clase, muy pocos estudiantes se quedaron atrás, todos experimentaron la necesidad real de construir técnicas nuevas, en este caso de naturaleza algebraica, y llegaron a elaborar y comprender el concepto de Sistemas de Ecuaciones y las técnicas para resolverlos. Mientras que en el otro grupo con tratamiento se pudo observar un avance muy por debajo de sus compañeros. Sin embargo, al revisar minuciosamente las producciones de los estudiantes de este segundo grupo con tratamiento frente al instrumento o guías de trabajo, se encontró variedad y riqueza de técnicas, explicaciones, procedimientos. Y, lo más relevante de señalar, es que muchos estudiantes de este grupo *no alcanzaron a responder todas las actividades*, especialmente las últimas; las guías fueron resueltas de maneras muy distintas en un grupo que en el otro. Ello podría estar indicando que, los menores resultados de logro alcanzados en este segundo grupo, más que deberse a que la propuesta didáctica no les aportó, tendrían más relación con que el tiempo para el estudio de la guía fue insuficiente para los estudiantes de este grupo. No es lo mismo responder erróneamente frente a un problema, que no responderlo. Esto nos da para pesar que lo que ocurrió en el aula fue muy distinto en un grupo que en el otro. Además, tenemos el contexto de ambos cursos muy diferentes, intereses distintos, características iniciales de sus estudiantes muy dispares, sobre todo relacionadas con rendimientos escolares. En efecto, el segundo grupo tratamiento partió con niveles de logro de aprendizaje muy por debajo que el primero. Ello podría explicar que requirieran de más tiempo para desarrollar la propuesta. Para dilucidar esto de mejor manera se tendría que hacer una análisis de video exhaustivo de la experiencia que se vivió en cada aula de clases, interacción entre los alumnos, interacción alumno – profesora, clima de aula, participación, la metodología utilizada por el docente en la clase, etc… Esto será motivo de estudio para analizar en otro trabajo.

Antes de finalizar nuestras conclusiones, quisiéramos exponer algunas de las limitaciones con las cuales nos vimos enfrentados y que deberían ser superadas más adelante. La primera de éstas, y quizá la más importante, es la necesidad de ampliar la propuesta didáctica y desarrollar una ingeniería didáctica de una unidad completa, con test más constantes y grabaciones más precisas, de modo de poder obtener unos resultados estadísticamente significativos apoyando el proceso. Dado que por motivos de restricciones impuestas por la institución en que se implementó la propuesta didáctica, debimos acotar los tiempos significativamente a lo que habíamos inicialmente presupuestado, por lo que el instrumento estadístico y las grabaciones se pueden considerar limitadas para concluir nuestro trabajo. De hecho algunos resultados se pueden interpretar solo porque tenemos acceso a la fuente directa de quién implementó la propuesta en uno de los grupos con tratamiento.

La segunda limitación tiene que ver con la profundidad y continuidad del análisis minucioso para cada uno de los grupos tratamiento, realización de pre y post test pertinentes sólo a lo que se está trabajando en las clases experimentales, entrevistas a alumnos, entrevistas a profesoras, preparación de profesoras, en el sentido no sólo de estudiar el plan de clases, si no de ensayar, compartir estrategias, observarse y tratar de influir de igual manera en ambos grupos tratamiento.

Correspondiente con las limitaciones señaladas, algunas de las proyecciones de este trabajo serían ampliar la cantidad de sesiones de la propuesta didáctica. La experiencia está condensada en tres clases, lo que no permite que todos los estudiantes tengan un ritmo cómodo de aprendizaje, o que se pueda volver a visitar los "hitos de quiebre" para luego seguir avanzando, haciéndose conscientes de que generaron nuevas estrategias de aprendizaje. La propuesta debería haber sido desarrollada al menos en dos clases más.

Otra proyección podría ser implementar la Propuesta Didáctica en otros colegios, cuyos contextos sean diferentes, cursos mixtos, niveles académicos más homogéneos, para aislar ciertas variables que aparecieron en la implementación actual y estudiar otras, por ejemplo el rol que juega el profesor, la motivación que causa el instrumento en los estudiantes y si eso influye en su actitud ante la clase y finalmente ante la asignatura.

En la ambición de responder la pregunta de investigación, se ha recorrido un largo camino de investigación, revisión bibliográfica, análisis de documentos oficiales y textos que afirman que claramente existe un problema en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra, un problema sistémico, que tiene sus inicios en la poca coherencia que plantea el currículum nacional, transitando por el proceso que se da en el aula, siendo recibido finalmente por el estudiante. Porque este último pocas veces es co-creador de su propio aprendizaje. Para la segunda pregunta tenemos el orgullo de poder contestar que sí, se puede, y para ello se deben tener en cuenta muchas variables, una de las más importante, el tiempo, el tiempo de preparación, investigación, ensayo y error del material, variable que se considera muy limitadamente en el programa de estudio. Como profesores debemos estar conscientes de lo que queremos generar en nuestros estudiantes, identificar los puntos de inflexión en el proceso de aprendizaje, problemas, ejercicios, momentos o preguntas claves que hacen posible la problematización, la experimentación y la resolución del problema, pero por sobre todo, dar el espacio para que nuestros estudiantes puedan razonar y experimentar por sí mismos.

Bibliografía

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001a). *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001b*). ¿Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas?* Educación Matemática, 13(3), 22-63.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano. *Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.*

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de praxeologías didácticas docentes espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques,*

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques,*

Brousseau, G. *et al.* (1994). *Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole.* Université de Bourdeaux: Editorial LADIST.

Cox, C. (editor) (2003). *Políticas educacionales en el cambio de siglo. La reforma del sistema escolar en Chile*, Santiago: Editorial Universitaria.

Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires: Aique. (La traducción es de 1997).

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE-Horsori.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinariété. Notes sur une nouvelle épistemologie scolaire, Intervención en el *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, Université Joseph Fourier, Francia.

Espinoza, L. y Barbé, J. (2004). La Matemática en la Educación Básica y Media: Un análisis de discontinuidades entre ambos niveles educativos, *Revista Chilena de Educación Matemática*.

Espinoza, L., Barbé, J., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teaching of Limits of Functions at Secondary School, *Educational Studies in Mathematics*,

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena, *Enseñanza de las ciencias*, 2009

Espinoza, L.; Barbe; J.; Mitrovich, D.; Solar, H.; Rojas, D.; Matus, C; Olguín, P. (2009). Análisis de las competencias matemáticas en NB1. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE N°: DED0760.

Galasso, B., Maldonado l., Marambio V. (2017). Matemática 1°medio. *Edición especial ministerio de educación. Ed. Santillana.*

Gellert, U., Espinoza, L.; Barbé, J., (2013). Towards a local integration of theories: Codes and praxeologies in the case of computer-based instruction, Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, pags. 303 – 321. (ISI)

Ruiz, N. (2010). La introducción del álgebra escolar y su desarrollo hacia la modelización funcional.

Programa de Estudio Matemática Marzo 2014. 1° Medio Ministerio de Educación – *Unidad de Currículum y evaluación.*

Solar H., Espinoza L.; Rojas F., Ortiz A., González E.; Ulloa R., (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Proyecto FONIDE N° 511091.

Anexos

Anexo I: Estrategia didáctica

Estrategia didáctica

<u>Inicio</u>

Los estudiantes se enfrentan a cuatro problemas resolubles haciendo cálculos numéricos con los datos, de manera directa.

Luego de que la mayoría del curso lo resuelve.

¿Se parecen estos problemas a los vistos anteriormente?

Luego se pide a los estudiantes que resuelvan el problema 5.

<u>Desarrollo:</u>

Se les solicita seguir con las imágenes 6, 7 y 8 aunque no puedan terminar de calcular los valores de cada objeto.

Discusión:

¿Cómo lo hicieron?

¿Qué dificultades enfrentaron?

¿En qué sentido son distintos a los problemas de las imágenes 1, 2, 3 y 4?

Aparece la diferencia entre la aritmética y el álgebra (necesidad del álgebra)

Se pide a los estudiantes que resuelvan el problema 5, luego aunque se estanquen se les pide seguir de la imagen 5 a la 8, que son el mismo tipo que 5.

Es posible deducir una relación simplificada entre los objetos, esa relación es la que al usarla en la otra hace posible resolver el problema.

Luego se pide resolver los desafíos y se genera una discusión entre el profesor y los estudiantes.

<u>Cierre:</u>

Ideas clave

- Problemas resolubles aritméticamente
- Hay problemas que no son resolubles aritméticamente, puesto que hay relaciones (ecuaciones)
- Problemas como estos hicieron que la humanidad construyera el álgebra, que ya no sólo se trabaja con números, si no con ecuaciones.
- Con álgebra es posible resolver problemas aritméticos, pero ese no es su principal aporte.

Anexo II: Plan de clase

Plan de la clase

Inicio

Se les entrega el material a los estudiantes (guía de trabajo), donde se enfrentarán a cuatro problemas resolubles aritméticamente, al hacer cálculos numéricos con los datos de cada problema se obtendrán de manera directa los valores de los objetos pedidos.

Se monitorea el trabajo en clases y transcurrido un tiempo prudente en que los estudiantes hayan terminado de calcular los valores de los cuatro primeros problemas, se les pregunta qué estrategias utilizaron para calcular los valores de los distintos objetos que aparecen., se recogen las distintas estrategias y se genera una discusión o explicación entre ellos.

Luego se pide a los estudiantes que resuelvan el problema 5.

Desarrollo:

Se pide a los estudiantes que resuelvan el problema 5, aunque no puedan resolverlo, se les pide avanzar hasta la imagen 8. Luego de monitorear el trabajo de los alumnos y dar un tiempo pertinente para que analicen este tipo de ejercicios se les pide que respondan las preguntas de la guía, a pesar de que no hayan podido realizar los ejercicios.

Cierre:

Se genera una discusión entre los estudiantes acerca de las respuestas que dieron a las preguntas planteadas en la guía.

Se espera que salgan elementos como que en las primeras 4 imágenes se daba explícito el valor de algún objeto y a partir de ese se podía obtener el valor de los otros. En cambio en los otros problemas (5 al 8), no hay un valor explícito de cada objeto, sino que hay una relación entre dos objetos y eso nos permite obtener un valor.

El profesor sistematiza haciendo la diferencia entre los problemas que son resolubles aritméticamente, en los que haciendo distintas operaciones (suma, resta, multiplicación y división) se puede llegar al resultado. En cambio hay otro tipo de problema en que la operatoria aritmética no es suficiente y que originaron la necesidad del álgebra, éste tipo de problemas se llaman problemas algebraicos, en los que se no se tiene el valor de un dato específico, sino que se tienen relaciones entre los datos, sin saber el valor específico de cada uno.

Se recomienda al profesor explicar el problema de la imagen 5 y decir que si bien no se sabe el valor de estrella ni de sol, sabemos que si se restan da cero, por lo que se puede deducir que valen lo mismo y por lo tanto si ambos valen 750, cada uno vale 375.

Cabe destacar que las relaciones que se pueden deducir en que la resta entre los dos objetos resulta cero, son infinitas, por lo que necesitamos una segunda ecuación para encontrar los valores exactos de cada objeto. Y por lo tanto necesitamos una relación en la otra, es así, como nace la necesidad de formar un sistema de dos ecuaciones para dos incógnitas.

Es decir, si tenemos dos valores desconocidos (incógnitas) necesitamos tener dos ecuaciones (o relaciones entre ellas) para poder obtener los valores que se piden (la solución), a esto lo llamaremos sistemas de ecuaciones.

Se invita a los estudiantes a realizar los desafíos con la nueva información.

Se da un tiempo pertinente y tal como se explicó el problema de la Imagen 5, se explica el Desafío N°1, donde se explicita que no es necesaria una manipulación algebraica en este problema, sólo se debe sustituir una imagen en la otra y así se obtiene la diferencia en cantidad de objetos, sobran 4 (L) y valen un total de 1.000, por lo que cada objeto vale 250, es así como al volver a la primera relación se tiene que los otros objetos (T) vale 100 cada uno.

Entonces hay sistemas de ecuaciones donde se puede sustituir una relación en otra, pero hay otros (como el desafío 3), en los que necesitamos nuevas técnicas para manipular y resolver los sistemas de ecuaciones, estos se llaman métodos de resolución para sistemas de ecuaciones.

Anexo III: Análisis didáctico de la propuesta

Análisis didáctico de la propuesta

Tarea T_1

Problemas aritméticos de varias incógnitas en el que las relaciones cuantitativas entre ellas hacen posible calcular el valor numérico de todas.

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de tres incógnitas en el conjunto de los números naturales que involucran la suma y resta.

Tarea $T_1^{´}$

Problemas aritméticos en el que aparece la incógnita repetida (multiplicación)

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de la incógnita en el conjunto de los números naturales que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Tarea $T_1^{''}$

Problemas aritméticos en el que aparece la incógnita repetida con suma, resta, multiplicación y división como operatoria

- Técnica τ_1: cálculo aritmético de la incógnita en el conjunto de los números naturales que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Tarea T_2

Problema aditivo que involucra dos incógnitas y dos relaciones en las que la manipulación aritmética no permite resolver el problema.

- Técnica τ_2: sustituir una relación aritmética en la otra relación.

Tarea T_3

Problema aditivo que involucra dos incógnitas y dos relaciones en las que la manipulación aritmética no permite resolver el problema.

- Técnica τ_3: reducir una relación aritmética en la otra relación.

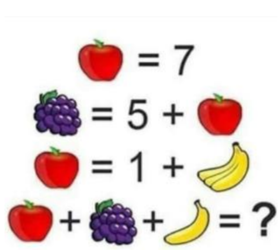
Anexo IV: Material aplicado

Nombre: ________________________________Curso: __________ Fecha:______________

¡Descubre el valor de los objetos!

Observa las siguientes imágenes y descubre el valor de cada objeto, recuerda hacer los desarrollos de forma clara y ordenada.

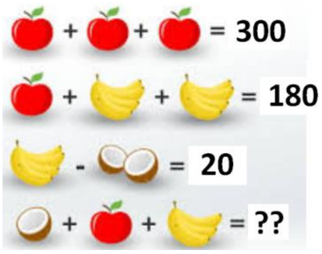
Imagen 1:



Desarrollo o explicación:

Valores:

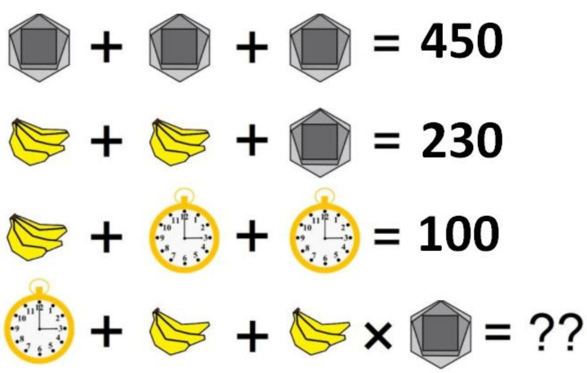
Imagen 2:



Desarrollo o explicación:

Valores:

Imagen 3:



Desarrollo o explicación:

Valores:

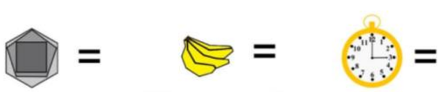
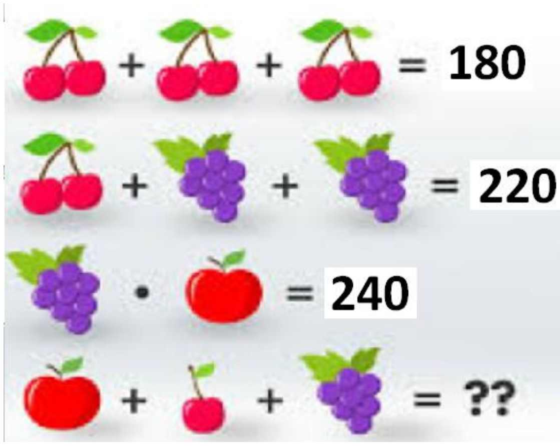


Imagen 4:

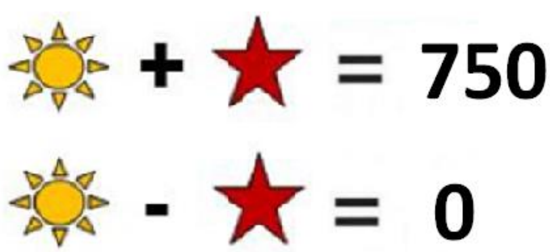
Desarrollo o explicación:



Valores:

Imagen 5:

Desarrollo o explicación:



Valores:

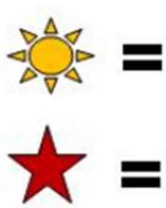
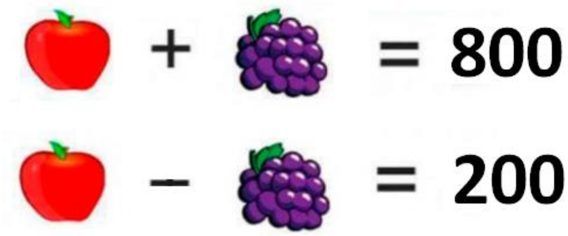


Imagen 6:

Desarrollo o explicación:



Valores:

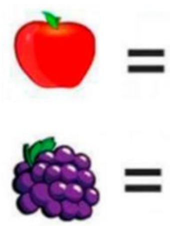
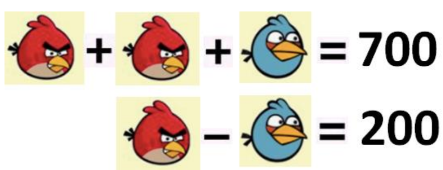


Imagen 7:

Desarrollo o explicación:



Valores:

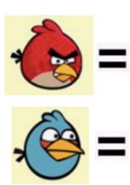
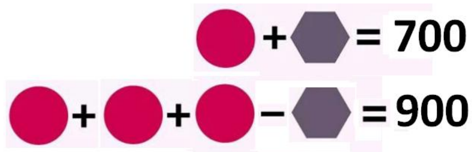
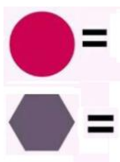


Imagen 8:

Desarrollo o explicación:



Valores:

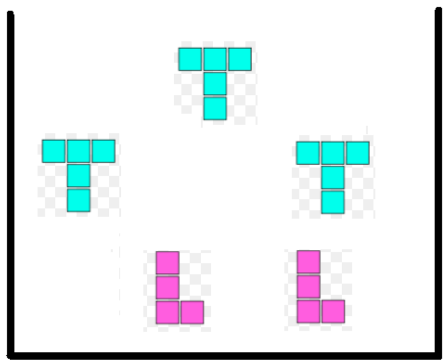


¿Pudiste calcular el valor de los objetos de las imágenes 5, 6, 7 y 8?

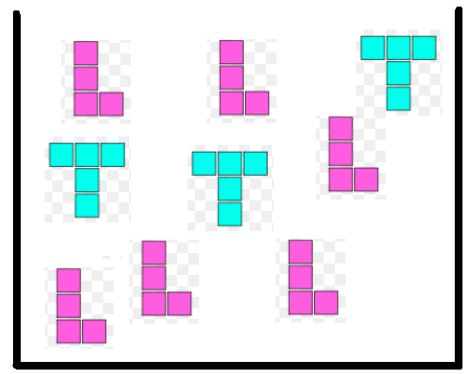
¿Qué diferencias hay con el cálculo de los objetos de las imágenes anteriores?

¿Cómo lograste calcular los valores de estas últimas figuras? ¿Qué estrategias utilizaste?

¡Desafío 1! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.



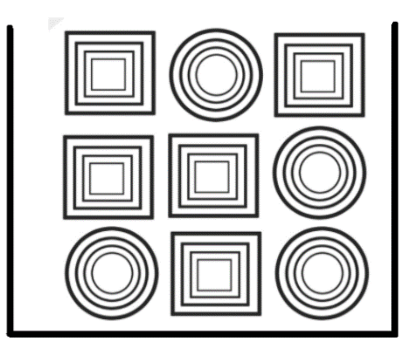
800



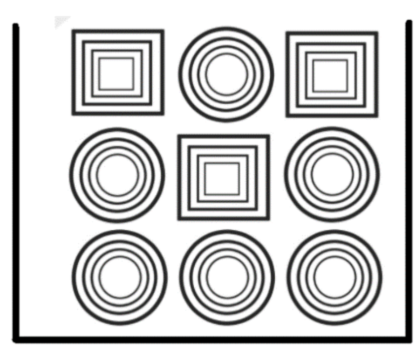
1.800

Desarrollo o explicación:

¡Desafío 2! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.



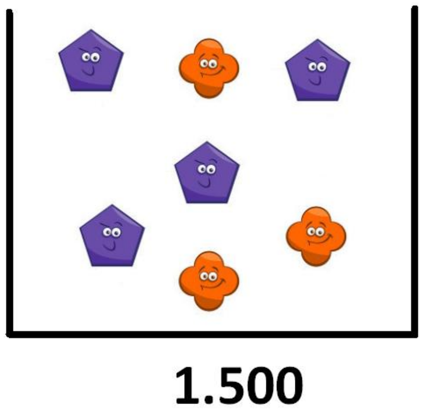
3.700

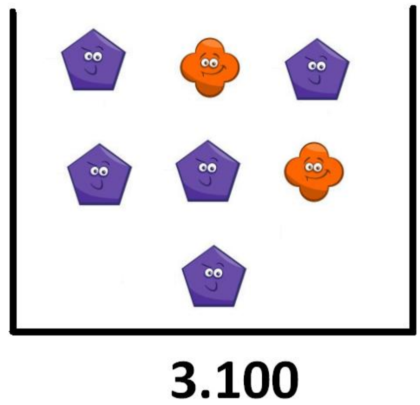


3.300

Desarrollo o explicación:

¡Desafío 3! Utiliza las siguientes figuras y calcula el valor de las imágenes.





Desarrollo o explicación:

Anexo VI: Preguntas Prueba de Síntesis Primero Medio 2019

<u>PRUEBA DE SÍNTESIS– PRIMER SEMESTRE</u>

Iº MEDIO – MATEMÁTICA

Preguntas de sistemas de ecuaciones:

1. La solución del sistema $\left.\begin{array}{l}2x-y=5\\ x+y=4\end{array}\right|$ es:

   a) $(-1,-3)$
   b) $(1,-3)$
   c) $(3,1)$
   d) $(-3,1)$
   e) $(-3,-1)$

2. La representación gráfica de las ecuaciones del sistema $\left.\begin{array}{l}x-2y=8\\ -2x+4y=0\end{array}\right|$, corresponde a:

   a) Dos rectas paralelas

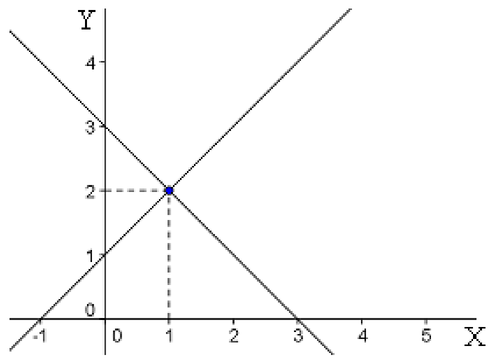
b) Dos rectas perpendiculares

c) Dos rectas secantes

d) Dos rectas coincidentes

e) No corresponden a rectas.

3. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones representado en el siguiente gráfico?



a) $\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = -1 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{array}$

4. En un examen, un alumno obtiene 4 puntos por cada respuesta correcta, pero se le descuenta 1 punto por cada respuesta incorrecta. Si la prueba tiene 60 preguntas y obtuvo 140 puntos. Indica el sistema de ecuaciones que representa la situación planteada.

a) $\begin{array}{r} x - y = 60 \\ -4x + y = 140 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x + y = 60 \\ 4x - y = 140 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 4x + y = 140 \\ -x + y = 60 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} x+y=60 \\ x-4y=140 \end{array}\Big|$

e) $\begin{array}{r} x-y=60 \\ -x+y=140 \end{array}\Big|$

5. Se puede determinar el valor de un celular y un GPS si:

   (1) Se sabe que dos celulares y un GPS cuestan $350.000
   (2) Se sabe que tres celulares y dos GPS cuestan $600.000

a) (1) por sí sola
b) (2) por sí sola
c) Ambas juntas (1) y (2)
d) Cada una por sí sola.
e) Se requiere información adicional

Anexo VII: Análisis Prueba de Síntesis Primero Medio 2019 por eje **y habilidad**

RESULTADOS PRUEBAS DE SÍNTESIS 2018

Departamento: Matemática Asignatura: Matemática Nivel: I° medio

Profesor(es**): Camila Acevedo (A), Carolina Gallardo (B), Violeta Peña (D), Ruth Alfaro (E).**

I. ANÁLISIS POR NIVEL: Porcentaje (%) de logro

	Nombre Eje	**Nº** Preg.	**NIVEL**				**Rango** MIN-MAX	**Promedio**
			A	**B**	**D**	**E**		
CONTENIDOS	**Álgebra y Sistemas de ecuaciones**	16	63,7	82,4	79,4	80,3	**0 – 100**	**76**
	Números Racionales y Potencias	9	65,8	79,7	73,1	75	**0 – 100**	**75**

	Promedios eje contenidos		**64,5**	**81,4**	**77,1**	**78,4**		**76**
HABILIDADES								
	Analizar	**6**	63	79,7	76,3	75	**0 – 100**	**73**
	Aplicar	**15**	68,1	84,8	80,2	83,5	**0 – 100**	**79**
	Evaluar	**4**	52,7	71,5	66,7	64,1	**0 – 100**	**64**
	Promedios eje habilidades		**64,4**	**81,4**	**77,1**	**78,4**		**75**
	Promedios totales							
	Prueba de Síntesis/ Promedio semestre		**4,5/4,5**	**5,6/5,7**	**5,3 /5,1**	**5,4/5,7**		**5,2/**

Fortalezas de la asignatura en el nivel

¿A qué cree que se deben los buenos resultados, ya sea por eje temático, habilidad y/o por curso?

Los mejores resultados del nivel están en el eje de Álgebra y Sistemas de Ecuaciones, se debe a que los contenidos fueron abordados desde lo elemental, repasando los conocimientos previos de años anteriores, por lo que la base de los contenidos estaba firme, además fue la última materia que se trabajó.

La prueba de síntesis refleja fielmente los resultados del semestre, ya que existe una fuerte correlación entre ambos promedios.

Se ha mejorado la planificación, se han incluido actividades de los planes y programas, además se implementó una situación didáctica para introducir los sistemas de ecuaciones lo que ha ayudado al logro de los objetivos.

La habilidad con mejor de desempeño es Aplicar, se cree que esto se debe a que se trabajó intencionadamente con guías de ejercicios y el texto de estudio.

La actitud de los alumnos frente a las diferentes modalidades de trabajo (ARPA, COPISI). Se nota un cambio al ser una generación que viene trabajando con bases desde el segundo ciclo.

Debilidades de la asignatura en el nivel

¿A qué cree que se deben los bajos resultados, ya sea por eje temático, habilidad y/o por curso?

El contenido con menor desempeño es Números Racionales y potencias, este es un contenido que siempre genera dificultades, se cree que los alumnos priorizaron el eje de Álgebra y sistemas de ecuaciones que fue e último contenido trabajado en el semestre.

Anexo VIII: Preguntas Prueba de Síntesis 8°Básico 2018

PRUEBA DE SÍNTESIS– PRIMER SEMESTRE

8º BÁSICO – MATEMÁTICA

1) El valor de x en la ecuación $3(x-2)-2(x-1)=-5-4x$ es:
   a) 3
   b) $\frac{3}{5}$
   c) $\frac{1}{5}$
   d) $-\frac{1}{5}$
2) La mitad de la edad, en años, que tenía Germán el año pasado es igual a la que tenía hace 7 años. ¿Qué ecuación representa la situación?
   a) $\frac{1}{2}x-1=x-7$
   b) $\frac{1}{2}(x-1)=x-7$
   c) $\frac{1}{2}(x+1)=x-7$

d) $\frac{1}{2}(x-1) = x + 7$

3) ¿Cuál es el valor de la incógnita en la ecuación $\frac{5}{4}x - 1 = x + 2$?

a) 13

b) 12

c) 6

d) 3

Con el siguiente enunciado responde las preguntas 4 y 5.

La mitad de un número natural aumentado en 5 unidades sumado con tres cuartos de él es menor o igual que 20.

4) ¿Qué expresión representa la situación?

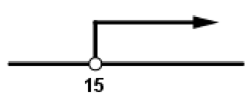
a) $x + \frac{5}{2} + \frac{1}{4}x \leq 20$

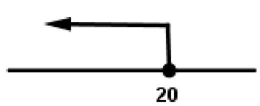
b) $\frac{1}{2}x + 5 + \frac{3}{4}x \leq 20$

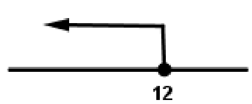
c) $\frac{1}{2}x + 5 + \frac{3}{4}x < 20$

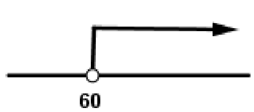
d) $x + \frac{3}{4}x < 20$

5) ¿Qué números cumplen la condición del problema?

a) 

b) 

c) 

d) 

En base al instrumento completo se hizo el siguiente análisis por eje y habilidad

Anexo IX: Análisis Prueba de Síntesis 8°Básico 2018

ANÁLISIS POR NIVEL: Porcentaje (%) de logro

Eje	Nombre	Nº Preg.	NIVEL A	NIVEL B	NIVEL D	NIVEL E	Rango MIN-MAX	Promedio
CONTENIDOS	Área y volumen de prisma y cilindro	4	67,34%	72,74%	79,42%	83,33%	0 – 100 = 100	75,36%
	Ecuaciones e inecuaciones	5	56,08%	58,61%	62,96%	63,63%	0 – 100 = 100	57,97%
	Estadística	4	64,57%	71,62%	69,85%	82,56%	0 – 100 = 100	71,56%
	Función lineal y afín	5	73,36%	78,95%	74,15%	75,74%	0 – 100 = 100	74,64%
	Teorema de Pitágoras	2	80,56%	78,3%	70,6%	84,84%	0 – 100 = 100	75%
	Transformaciones isométricas	5	61,62%	65,63%	71,21%	75,15%	0 – 100 = 100	68,84
	Promedios eje contenidos		65,76%	70%	71,19%	76,23%		69,8%
HABILIDADES	Modelar	11	54,03%	57,13%	60,68%	70,52%	0 – 100 = 100	60,4%
	Representar	8	76,74%	78,55%	81,98%	82,21%	25 – 100 = 75	79,8%
	Resolver problemas	6	72,73%	67,64%	76,01%	78,75%	0 – 100 = 100	73,69%
	Promedios eje habilidades		65,79%	66,51%	71,17%	76,23%		69,79%
	Promedios de notas		4,6	4,7	4,9	5,3		4,9

Fortalezas de la asignatura en el nivel

¿A qué cree que se deben los buenos resultados, ya sea por eje temático, habilidad y/o por curso?

- El contenido “función lineal y afín” fue el que obtuvo uno de los mayores porcentajes de logro (**74,64%)**, esto se debe a que se trabajó por más tiempo, se hizo un trabajo analítico con los estudiantes y se evaluó en controles y pruebas, lo que permitió pesquisar errores.
- El contenido “área y volumen de prisma y cilindro” fue el que obtuvo mayor porcentaje de logro (**75,36%)**, esto se debe a que se realizó un repaso de los contenidos previos necesarios para abordar este tema, además de aumentar la ejercitación y se logró evaluar en controles (cosa que años anteriores no se había podido hacer) lo que permitió pesquisar errores.
- La habilidad “representar” fue la que obtuvo mayor porcentaje de logro (**79,8%)**, debido a que es una de las habilidades que se trabajaron en clases a lo largo de todo el semestre.
- La segunda con mayor porcentaje de logro es “resolver problemas” (**73,69%)**, creemos

que esto se puede deber al énfasis que se da en clases a esta habilidad y al tratamiento de los contenidos.

Debilidades de la asignatura en el nivel

¿A qué cree que se deben los bajos resultados, ya sea por eje temático, habilidad y/o por curso?

- El contenido con menor porcentaje de logro fue “ecuaciones e inecuaciones” (**57,97%)**, creemos que esto se debe a que el ítem con mayor error de la prueba corresponde a uno que evaluaba este contenido.
- La habilidad más baja es “modelar” (**60,4%),** esto se puede deber al énfasis que se realiza en clases al enseñar el contenido, ya que se priorizó el análisis de diferentes problemáticas en desmedro de la ejercitación, además de que en algunos cursos por la pérdida de clases y la necesidad de abarcar más contenidos del currículum se debió dejar trabajo de ejercitación de tarea.