UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Modelación y comportamientos gráficos: Una propuesta al docente para la resignificación del concepto de función

Raquel Isabel Garrido Barrera

Tesis presentada a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

Profesoras Guía y Co Guía: Daniela Soto
Gladys Bobadilla

Santiago – Chile
2023

Resumen

Actualmente, el currículum nacional concibe la noción de función bajo el predominio algebraico que promueve el discurso matemático escolar, evidenciado a través de los textos escolares y guías didácticas ministeriales, en los cuales se expone como estrategia clave de enseñanza de la noción, la metáfora de la máquina, quedando la modelación relegada al rol de mediadora entre representaciones de la noción función. El objetivo de este proyecto de investigación es aplicar una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica para que el docente resignifique la noción de función, la finalidad es contribuir con una propuesta innovadora a la resignificación del concepto de función por parte de docentes de matemática que ejercen en enseñanza media, a través de la aplicación de una situación de modelación.

Ésta situación de modelación se fundamenta en la teoría socioepistemológica, e involucra el análisis del comportamiento tendencial de las funciones. El supuesto de este estudio, es que con la aplicación de la situación de modelación, se provocará una transformación en la perspectiva del docente participante respecto a la concepción de la noción.

La metodología utilizada en este estudio, es cualitativa, de carácter exploratorio, basada en un estudio de casos, que involucra a tres docentes de matemática que ejercen en el nivel 8º Básico. El diseño contempla tres fases, las cuales corresponden a tres encuentros presenciales e individuales. Las evidencias y datos fueron recolectados a través de dos entrevistas una inicial y otra final, fase1 y fase 3 respectivamente, cuyas preguntas fueron categorizadas basándose en la dialéctica Exclusión – Inclusión. La fase 2 corresponde a la aplicación de la situación de modelación desde la teoría socioepistemológica.

Respecto a los resultados de este estudio, la aplicación de la situación de modelación sí generó un cambio, en la mirada de los docentes participantes, respecto al concepto de función, promoviendo en ellos una reflexión respecto a sus conocimientos disciplinares y a su práctica pedagógica en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de este constructo. A partir del análisis y confrontación de las entrevistas realizadas, se aprecia que la aplicación de la situación de modelación, le presentó a los docentes participantes, una estrategia alternativa a la metáfora de la máquina, para la enseñanza de la noción de función, sin que ello signifique erradicarla, les permitió ampliar la mirada de la noción, involucrando situaciones cotidianas analizadas a partir de su comportamiento gráfico, sin la limitante de usar expresiones algebraicas que el estudiantado aún no maneje.

Palabras claves: resignificación, función, modelación, teoría socioepistemológica, comportamientos gráficos.

Abstract

Currently, the national curriculum conceives the notion of function primarily through an algebraic approach promoted by school mathematical discourse, as evidenced by school textbooks and ministerial teaching guides. In these materials, the machine metaphor is presented as a key teaching strategy for the notion, relegating modelling to a mediator role between representations of the function notion. The objective of this research project is to apply a modelling situation from the socioepistemological theory to enable teachers to re-signify the notion of function. The aim is to contribute with an innovative proposal to the redefinition of the function concept by mathematics teachers in secondary education through the application of a modelling situation.

This modelling situation is based on socioepistemological theory and involves analysing the trend behaviour of functions. The hypothesis of this study is that the application of the modelling situation will provoke a transformation in the participating teachers' perspective on the notion.

The methodology used in this study is qualitative, exploratory in nature, based on a case study involving three mathematics teachers who teach 8th-grade students. The design includes three phases, corresponding to three individual face-to-face meetings. Evidence and data were collected through two interviews—an initial and a final one—phases 1 and 3, respectively, with questions categorized based on the Exclusion-Inclusion dialectic. Phase 2 involves the application of the modelling situation from the socioepistemological theory.

Regarding the results of this study, the application of the modelling situation did generate a change in the participating teachers' perspective on the concept of function. It promoted reflection on their disciplinary knowledge and pedagogical practice concerning the teaching and learning process of this construct. From the analysis and comparison of the interviews conducted, it is clear that the application of the modelling situation presented the participating teachers with an alternative strategy to the machine metaphor for teaching the notion of function. This did not imply eradicating the machine metaphor but allowed them to broaden their perspective on the notion by involving everyday situations analysed through their graphical behaviour, without the limitation of using algebraic expressions that students have not yet mastered.

Keywords: redefinition, function, modelling, socioepistemological theory, graphical behaviour.

Agradecimientos

Mi primer pensamiento está dedicado a mi madre, la Mamita Ana, a ella agradezco inyectar la energía necesaria para finalizar este anhelado proyecto, su voz retumba permanentemente en mi mi mente y mi corazón, diciéndome "vez que se puede". Aunque ya no estés físicamente junto a nosotros, se que nos acompañan constantemente, y que alumbraste con tu luz cada uno de los instantes en los que mis manos tocan las teclas del computador para escribir cada palabra.

Agradezco a mi amado esposo Manuel, por siempre creer en mí, apoyarme y acompañarme en este proceso, a mis amadas hijas Sofía, Fresia y María Soledad, por hacerme sentir siempre tan importante, tan valiosa e inteligente. Al Tata Clemente, por su paciencia, los cafecitos a media tarde, los cigarritos y preparar la once para los dos, mientras yo trabajo en mi proyecto. A mis perritas Kuky, Pelusa y Bonnie, quienes a punta de besito perrunos limpiaron mis lágrimas cuando sentía que me daba por vencida, fueron mi compañía constante a los pies de mi escritorio mientras trabajaba en las noches.

A mi familia en general, quienes siempre han sido un pilar importante, brindándome su apoyo, su reconocimiento y amor, en especial a mi amada hermana Anita, mi amiga, mi sol, mi compañera, mi ilustre transcriptora de entrevistas, quién junto a mi querido Sebastían me ayudaron con tan ardua labor. Gracias querida hermanita por estar siempre para mi, espero estar siempre a la altura para ti.

A mis queridas amigas, las que siempre están, sobre todo en las circunstancias más complejas, cada una de ellas desde su esencia, mi querida Valeska, mi Pepe Grillo constante en este proceso, de quien mucho he aprendido a lo largo de estos años. Mis queridas Clarita, Florinda, Sandra, sus buenas vibras siempre animan mi espíritu. Mi querida Natacha, la que me ayuda a resolver cada dificultad y hace que todo sea más simple. Mi Pamelita, el aire distractor que siempre me permite renovar energías. Agradezco a la vida que me honren con su amistad y sobre todo que me apoyaran en los instantes en que las necesite durante el desarrollo de mi proyecto.

A mis profesoras Daniela y Gladys, agradezco infinitamente la fortuna de haber trabajado con ustedes, su paciencia, su apoyo y que siguieran creyendo en mí, pese a las dificultades que se me presentaron, agradezco cada una de nuestras charlas, y sus sugerencias, las que fueron muy significativas y generaron un valioso aprendizaje para mi.

A mis queridos colegas participantes, quienes comprometidamente brindaron valioso tiempo para que este proyecto fluyera.

Índice

Introducción

La noción de función es un tema fundamental en matemática, en el sistema educacional chileno se estudia formalmente durante los últimos 5 años del nivel enseñanza media, desde 8º básico, y se proyecta como un eje relevante de muchos programas de estudio en cursos de diversas carreras de educación superior.

Algunos artículos e investigaciones describen fenómenos y situaciones relacionados a la noción de función, atendiendo diversas problemáticas asociadas a ésta, tanto desde el punto de vista del estudiante como del punto de vista del docente. Develan dificultades que presenta la enseñanza y aprendizaje de la noción y ofrecen fundamentos importantes para comprender dichas dificultades. En este sentido, De Armas (2021), en su investigación advierte de las dificultades que enfrentan las y los docentes respecto al tema de funciones, señala lo siguiente:

> Estudios previos reportan una comprensión limitada de las representaciones (Dreher y Kuntze, 2015) y de las funciones (Amaya, 2020; Amaya, Pino Fan y Medina, 2016; Biehler, 2005; Even, 1990; 1993), al resolver situaciones que las involucren, tanto en docentes en formación como en ejercicio, ya que no logran conectar las representaciones producidas, y les cuesta integrar los significados parciales de una función. (p. 3)

Por otro lado, Soto (2020) expone que:

> Soto, Silva-Crocci, Vergara & Barve (2018) desarrollaron una investigación que evidenció que los profesores de matemáticas de una comunidad escolar, no consideran en sus planificaciones e instrumentos evaluativos la habilidad de modelar, es decir, en sus clases de matemática la modelación no está presente. Al ser cuestionados acerca de esto, los profesores señalan la falta de herramientas teóricas y prácticas para abordar esta habilidad. (p. 113)

Respecto a lo anterior, vale preguntarse, ¿con qué herramientas cuenta el docente para enfrentar estas dificultades?, además de los recursos que implementa el Mineduc, a través de textos escolares, guías didácticas y recursos digitales, ¿desde donde el docente se puede inspirar para ampliar sus perspectivas y estrategias metodológicas?.

Es importante considerar, ¿cuáles son los desafíos actuales que se presentan en educación matemática?, ¿cómo se generan instancias para ayudar a los docentes a enfrentar sus dificultades?.

Al realizar un análisis de los textos escolares ministeriales, de los últimos 10 años, específicamente en lo que respecta al concepto de función, es posible evidenciar que se han ampliado las estrategias de enseñanza. Pero, existe aún cierto predominio algebraico que limita, a docentes y estudiantes, en la posibilidad de experimentar, proponer, deducir y argumentar sobre el concepto de función.

Por otro lado, la revisión de los textos escolares y guías didácticas, evidencian la carencia de modelación, en donde ésta queda relegada, fundamentalmente, a una concepción de representación de una función y no a la posibilidad de comprender un fenómeno.

En el currículum nacional, respecto a la noción de función, se observa el predominio de lo algebraico, evidenciado a partir del uso de la metáfora de la máquina como elemento de entrada al mundo de las funciones, estrategia antigua que aún ocupa un espacio importante en los textos escolares y en especial en las orientaciones didácticas del docente.

Esta metáfora fortalece y enfatiza la importancia de la representación algebraica y su mecánica en la noción de función, y se establece como foco en el que el docente debe centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este constructo. El capítulo 1 de esta investigación, detalla esta problemática abordando en una primera instancia: las dificultades del docente respecto a la noción de función, la mirada del currículum nacional respecto de la noción de función y de la modelación, entregando un análisis de los textos escolares de los últimos 10 años respecto al a la noción de función.

Los primeros puntos del capítulo 1, abren la necesidad de profundizar en otros tres aspectos, que son: Las ideas primitivas que dieron origen a la noción de función, así como las distintas miradas de la noción a lo largo de la historia; profundizar en la concepción de modelación y su implicancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y por último realizar una mirada a modelos de formación docente.

Lo anterior, otorga el sustento necesario para elaborar una propuesta de resignificación de la noción de función del docente de matemática de enseñanza media, a través de la aplicación de una situación de modelación, enmarcada en la teoría socioepistemológica, que aborde el constructo a través de la experimentación de un fenómeno y el comportamiento tendencial de su gráfica. Esto, contribuye a promover una perspectiva que disminuya el predominio de lo algebraico y releve la noción de función a la comprensión de fenómenos a partir de su comportamiento gráfico y las tendencias que este involucra.

Actualmente, en el nivel 8º Básico, la noción de función se introduce a partir de la función lineal, no se incorporan situaciones o fenómenos que puedan ser descritos por otro tipo de curvas, la propuesta ministerial, restringe el proceso de enseñanza y aprendizaje de otros comportamientos gráficos, puesto que su énfasis está en los aspectos algebraicos de la función, ello está limitado y condiciona al alcance de los conocimientos que el estudiantado de ese nivel posee.

La teoría socioepistemológica otorga elementos que la hacen interesante a la hora de pensar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función, su énfasis en la construcción social del conocimiento matemático, abordando situaciones que rodean la vida de las personas, son elementos que compatibiliza perfectamente con la modelación y su rol en la comprensión de fenómenos. Se deja así, una invitación abierta tanto a docentes como a estudiantes, a la experimentación, la predicción y la argumentación sobre situaciones cotidianas, inmersas en la simplicidad de la vida de las personas.

El capítulo 2 profundiza en la comprensión de la teoría socioepistemológica y en ciertos elementos que se desprenden de ella, tales como, el discurso matemático escolar y el fenómeno de exclusión, rediseño del discurso matemático escolar, modelación desde la socioepistemología y formación docente a partir de la Exclusión – Inclusión.

Todos estos elementos forman la base teórica que sustenta esta investigación y otorgan los cimientos para la estructuración de un proceso que provoque la resignificación de la noción de función por docentes de matemática de enseñanza media y promueve una alternativa más a la enseñanza de este valioso constructo. Otorgando una posibilidad abierta al docente a cargo de la enseñanza, para que incorpore otras miradas a este proceso y enriquezca las posibilidades de aprendizaje de sus estudiantes.

El capítulo 3, Metodología, plantea que esta investigación es de tipo cualitativa y de carácter exploratorio, pues describe un el cambio de perspectiva de docentes de matemática, respecto a la noción de función, el cual se describe a partir de un proceso, que involucra tres fases en un estudio de casos.

El rediseño de una situación de modelación, basada en la teoría socioepistemológica, plantea una mirada innovadora en la enseñanza de la noción de función, a través del análisis del comportamiento tendencial de las funciones, la que será experimentada por docentes de matemática, participantes de esta investigación.

Las fases incluyen entrevistas semiestructuradas cuyas preguntas están enmarcadas en la dialéctica de la exclusión – inclusión, a través de la cual se pretende evidenciar el cambio y la transformación planteada en los supuestos de esta investigación, éstas entrevistas serán realizadas a los docentes de matemática participantes, previa y posteriormente a la aplicación de la situación de modelación.

Es importante señalar que las investigaciones y artículos revisados en la literatura, abordan la descripción de problemáticas en torno a la noción de función, pero no proponen alternativas que apunten a subsanar estas problemáticas, lo que sí aborda este estudio a través de la resignificación del concepto de función hacia la comprensión de fenómenos a partir del comportamiento gráfico de éstos.

Finalmente, el capítulo 4, referido a los resultados de la investigación, presenta un análisis de la confrontación de las respuestas de la entrevista previa, con sus respectivas respuestas de la entrevista posterior, proceso realizado para cada docente participante en la investigación, en forma individual, lo que permite apreciar el cambio de perspectiva de los docentes respecto a varios aspectos importantes de la noción de función.

Los aspectos involucrados están relacionados a la concepción de la noción, a la forma de enseñarla, al foco del docente en proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función, a los recursos que utiliza el docente para preparar las clases relacionadas al tema.

Es posible apreciar, a lo largo de la interacción con los docentes participantes, un cambio del enfoque respecto a la noción de función, respecto a la concepción de modelación, respecto al uso de la gráfica y el análisis de sus tendencias, se produce una transformación en la mirada que el docente participante tiene de la noción de función.

Capítulo 1. Estado del arte

1.1. Problemática

En el sistema educativo chileno, es posible reconocer fenómenos como la exclusión y la violencia simbólica, los cuales se desprenden del discurso matemático escolar, así lo establece Soto (2020), entre otras investigaciones. Estos fenómenos se encuentran, presentes y evidentes, particularmente, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función, la propuesta ministerial está basada fundamentalmente en la metáfora de la "máquina" y las estructuras algebraicas que la acompañan, éstos elementos de predominio algebraico, constituyen una forma de violencia simbólica, tanto para el docente como para el estudiante. Además, el currículum actual es excluyente, puesto que no propicia la construcción del conocimiento desde un sentido de comunidad, incorporando realmente en sus decisiones a los diversos actores, no reconoce la identidad y elementos culturales del estudiantado, ni su entorno cercano, sino que impone una estructura uniforme, para todos igual. Lo anterior constituye una limitante que se transforma en la base para un rediseño del discurso matemático escolar, inspirado en la construcción social del conocimiento que permita a las y los docentes resignificar el concepto de función considerando una nueva perspectiva a partir de la modelación.

El interés por resignificar el concepto de función en los docentes de matemática, nace a partir de vivencias personales en el quehacer educativo como profesora de aula de enseñanza media, como profesora hora en la Facultad de Administración y Economía de la Universidad de Santiago de Chile y como relatora en módulos de números, álgebra y datos y probabilidad en Postítulos para docentes que ejercen en primer y segundo ciclo de enseñanza básica ofrecidos en la Universidad de Santiago de Chile. Esta experiencia de trabajo ha generado la preocupación por un constructo importante dentro del contexto curricular de estudiantes de enseñanza media y superior, preocupación que se condice con el informe emanado de la Vicerrectoría Académica de la Universidad de Santiago de Chile, la cual ha implementado una evaluación diagnóstica de entrada, dirigida a estudiantes que ingresan a su primer año de educación superior.

En relación a este informe, los resultados obtenidos son un insumo para las unidades académicas y los docentes que la integran, con la finalidad de que las sugerencias que surgen de los análisis realizados impliquen la incorporación de estrategias que permitan ajustar los procesos de nivelación de este grupo de estudiantes.
Particularmente, los resultados del diagnóstico de Matemática de estudiantes que ingresaron en 2021 a la carrera de Administración Pública de la Facultad de Administración y economía generaron la reflexión pedagógica siguiente:

> Se recomienda elaborar estrategias de reforzamiento que apunten a identificar relaciones numéricas y geométricas, en donde el estudiante deba tomar decisiones adecuadas a partir de la identificación de relaciones y patrones en contexto. Dominar estos elementos, permite que el estudiante desarrolle habilidades relacionadas con el pensamiento lógico-deductivo y con la capacidad de leer e interpretar datos presentados en diferentes registros tales como tablas y gráficos. (VRA, 2021, p.7)

Estos resultados revelan la necesidad de fortalecer entre otros aspectos la capacidad de leer e interpretar datos presentados en diferentes registros, elementos esenciales para el estudio de diversos conceptos, entre ellos el concepto de función, el cual nace en currículum nacional en el nivel octavo básico.

1.2. Concepto de función y modelación en el currículum nacional

En diciembre del año 2013 se establecen en Chile las Bases Curriculares, para varias asignaturas entre ellas Matemática, del 7º año básico al 2º año de enseñanza media. Estas bases curriculares presentan los contenidos mínimos obligatorios que deben estar incorporados en los programas de estudios de cada colegio, ya sean propios o los propuestos por el Ministerio de Educación (MINEDUC). En enero de 2015, se publica el documento que orienta en forma explícita la incorporación de éste nuevo camino curricular.

Las bases curriculares presentan las directrices en diversos ámbitos del proceso educativo: marcos de referencia, organización curricular, objetivos de aprendizaje, entre otros aspectos. Entre estas directrices, se encuentran los criterios que fundamentan la orientación sobre el aprendizaje, uno de estos criterios señala:

> Implica también, de manera prioritaria, que dominen el lenguaje, los procedimientos y el razonamiento de las matemáticas, como herramientas para entender el mundo, para actuar frente a problemas cotidianos y tomar decisiones bien fundadas. Igualmente deben adquirir los conceptos e ideas de las ciencias exactas y de su

> método que los y las facultarán para comprender y explicarse el mundo físico, valerse de la tecnología de manera informada y autónoma y valorar la evidencia empírica como método de análisis y de aproximación al conocimiento. (Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, 2015 p19)

Se destaca de lo anterior la declaración explícita de aprender matemática y su razonamiento como “herramientas para entender el mundo, para actuar frente a problemas cotidianos y tomar decisiones bien fundadas”. Es decir, se hace explícita la importancia de conectar la matemática con el mundo, con su entorno, de razonar en torno a experiencias y vivencias, propias o de otros.

El Mineduc, en el documento de las Bases Curricuares, declara que “se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje” (Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, 2015), cuyos objetivos integran elementos como: habilidades, conocimientos y actitudes, los cuales deben plasmadas y evidenciadas en su descripción. Señalan que:

Las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Una habilidad puede desarrollarse en el ámbito intelectual, psicomotriz, afectivo y/o social. (Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, 2015 p. 22)

Para la asignatura de matemática se establecen las habilidades de: Resolver Problemas, Representar, Modelar y Argumentar y Comunicar. El foco de atención de esta investigación esta centrada en la habilidad de Modelar, respecto a ello las Bases Curriculares dan relevancia al modelamiento matemático indicando que:

El objetivo de desarrollar esta habilidad es lograr que el o la estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capture los patrones clave y los exprese mediante símbolos matemáticos. (Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, 2015 p. 95)

En la propuesta Ministerial, considera que modelar es construir un modelo físico o abstracto que interprete una realidad con el fin de estudiarla, es decir, un modelo que el individuo pueda materializar o imaginar, consumando lo anterior en la expresión de la realidad mediante símbolos matemáticos, lo cual supone enfatizar en las representaciones algebraicas de situaciones o fenómenos, para dar respuesta a sus problemáticas o de establecer conexiones con otras disciplinas. La idea es lograr dar sentido al aprendizaje y conectarlo con su entorno privilegiando de cierta forma los aspectos algebraicos de las mismas por sobre otro tipo de representaciones.

Un ejemplo de lo anterior, el la introducción del concepto de función al mundo escolar, la propuesta ministerial sugiere primero incorporar el uso de tablas como registro, asociar el concepto de función con la metáfora de una máquina, seguramente con la finalidad de reconocer un patrón algebraico, para establecer así una relación o regla entre x e y, todo lo anterior, supone en énfasis del cual se hablaba respecto a la pronta algebrización del concepto. Posteriormente, a partir de software educativos introducir la representación gráfica del concepto. Según las bases curriculares, la noción de función se incorpora en el 8º año de enseñanza básica, en el eje de álgebra y funciones, señalado en el objetivo:

> OA 7
> Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:
> Utilizando tablas
> Usando metáforas de máquinas
> Estableciendo reglas entre x e y.
> Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagrama de Venn), de manera manual y/o con software (Programa de estudios 8º Básico, 2016, p. 56)

El MINEDUC plantea que se muestre al estudiante la "noción" de función, dejando una puerta abierta a una estructura un poco menos exigente que la estructura de "Concepto", por ejemplo, no involucra, explícitamente, los conceptos de dominio y recorrido, dentro del enunciado del objetivo. En relación a lo anterior, surgen algunas interrogantes, ¿Se debería mostrar la noción o el concepto de función?, ¿necesariamente el concepto de función debe presentarse al estudiante con una fuerte naturaleza algebraica?, ¿Será conveniente presentar únicamente comportamientos lineales en este primer encuentro?, ¿podrían ser incorporados fenómenos cuya modelación no sea lineal?

Por otro lado, en las bases curriculares se establece que:

> Usar metáforas de experiencias cercanas ayuda a las y los estudiantes a comprender conocimientos matemáticos; por ejemplo: explicar las funciones como una máquina que transforma los números, u ordenar los números en una recta y explicar la adición como pasos hacia la derecha de la recta. En el uso de metáforas se reconocen tres ventajas para el aprendizaje: relacionar experiencias personales con el conocimiento formal, potenciar la comprensión, memorización y explicación de conceptos matemáticos, y brindar a las expresiones matemáticas un significado cercano. (Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, 2015 p. 98)

El uso de metáforas relacionadas a experiencias cercanas aportan en la comprensión de conocimientos, es entonces válido preguntarse ¿sí, dentro de las experiencias cercanas de estudiantes de 8º básico, se encuentran máquinas que transforman números?, ¿será realmente esta metáfora de la "máquina", una herramienta que permita al estudiantado comprender un concepto tan abstracto como lo es el concepto de función?. ¿Será posible incorporar al mundo matemático del estudiantado el importante concepto de función, partiendo por argumentos distintos a aquellos que dan énfasis a lo algebraico?.

Los contenidos minimos obligatorios planteados por el Mineduc, en la asignatura de matemática, presentan respecto al concepto de función una desconexión entre el contenido y fenómenos cercanos a la realidad de los estudiantes, en este sentido Pezoa y Morales

(2016) argumentan que, "para la enseñanza de las funciones hemos evidenciado que en general su estudio se limita a proporcionar a los estudiantes técnicas que les permitan resolver ejercicios (principalmente de carácter algebraico), ignorando una realidad contextualizada" (p.53).

En la asignatura de matemática, actualmente, se establecen las siguientes habilidades a desarrollar: Resolver problemas, Argumentar y comunicar, Modelar y Representar, además de las habilidades digitales, las mismas autoras señalan que el currículum Nacional, respecto al concepto de función, "conlleva un aprendizaje centrado en fórmulas, con alguna representación gráfica, la que es tratada como un dibujo y no como una modelación en sí misma, ni usada como argumento" (p. 53). Para un concepto que conformará la base fundamental, la columna vertebral de otros que se desprenden de él, el concepto de función requiere ser conectado con la realidad de los estudiantes, contextualizado en base a otras disciplinas para otorgarles un sentido, que las vivencias de los estudiantes puedan verse reflejadas en su aprendizaje.

En el currículum actual del área de matemática se considera la modelación como una habilidad a desarrollar, particularmente en el objetivo OA7 que se refiere al concepto de función, no se aprecia esta habilidad incorporada en forma explícita.

Este objetivo de aprendizaje da cuenta del sentido "utilitario" del concepto de función, utilizar tablas, metáforas de maquinas, reglas que relacionan variables, plano cartesiano, etc, es decir, representaciones de situaciones, pero no promueve la conexión con otras disciplinas, o con la aspectos cotidianos del estudiantado. En otras palabras, el concepto de función es "útil" para representar situaciones y no está siendo contemplado como un medio para interpretar y transformar el entorno del estudiantado y su comprensión de él. En su investigación Pezoa y Morales (2016) plantean que:

> Si bien en el currículo del sector de matemática se menciona la modelación, esta es entendida como la aplicación de conceptos aprendidos, que en muchos casos corresponde a problemas propuestos llamados "problemas de modelación" donde no hay referencia directa con actividades que permitan a los estudiantes experimentar en la clase de matemáticas con un fenómeno (tomar datos, graficar, plantear o conjeturar el modelo matemático) promoviendo así la articulación de las matemáticas con otros campos de conocimiento y en contextos diferentes. (p. 53)

Lo anterior, expone la necesidad de enriquecer el objetivo de aprendizaje 7 de 8º básico en la asignatura de matemática, pasando de una "matemática utilitaria" a un status de "matemática funcional", desarrollada por Cordero (2006, 2008, 2010), en el sentido que:

> Se enseña la matemática bajo el supuesto de que el profesor transmite el conocimiento y no bajo la necesidad de que el estudiante adquiera un conocimiento que le permita no sólo pasar los cursos de matemáticas sino adquirir un conocimiento que le sirva en los ámbitos formativo y profesional, que le ayude a construir y transformar su vida. (citado por Pezoa y Morales, 2016, p.53).

Para ello se hace necesario incorporar la modelación en la enseñanza del concepto de función más allá de su concepción como habilidad dentro del currículum, sinó como un medio de construcción de conocimiento que relacione los conceptos matemáticos con fenómenos o situaciones presentes en otras disciplinas, promoviendo la generación de conocimiento a partir de la experimentación y la argumentación.

La modelación es una habilidad, en el contexto curricular chileno, que posee grandes riquezas, pues a través de ella se pueden complementar, explorar y fortalecer, perfectamente, todas las otras habilidades establecidas en el currículum, el documento Fundamento de las Bases Curriculares de 3º y 4º año Medio, se refiere a la habilidad de modelar indicando lo siguiente:

> La habilidad de modelar implica resolver un problema; por ende, construir un modelo matemático está directamente relacionado con desarrollar la habilidad de resolver problemas. Sin embargo, resolver un problema no implica por fuerza modelar matemáticamente. La habilidad de modelar está también muy ligada a las habilidades de representar y argumentar y comunicar. (p.257)

En el marco de lo anterior, son las y los docentes que ejercen en 8º básico quienes deben tener en cuenta los elementos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sus implicancias y recursos. En ese sentido, la modelación es un camino que aporta una vía novedosa e innovadora como propuesta para introducir el concepto de función en la vida del estudiantado, incorporando en ella el resto de las habilidades que promueve el currículum, generando así un vínculo entre al estudiantado, el concepto, y su entorno, incorporando el aspecto "funcional" de la matemática. Mendez (2009) plantea que "los saberes para ser funcionales deben ser socialmente construidos para poder ser movilizados" (p. 195), la misma autora, citando a (Arrieta, 2003; Buendía, 2006; Cordero, 2006; Méndez, 2005 y 2008; Suárez, 2008; Tuyub, 2008, entre otras) plantea la visión de la Teoría Socioepistemológica y de como esta mirada de la Matemática Educativa, entrega evidencia de cómo las prácticas sociales son medios de generación de conocimiento matemático para cualquier individuo.

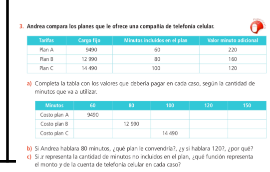
La idea, como lo plantea Mendez (2009), "es buscar medios para reconstruir significados, a luz de prácticas sociales" (p. 196), en este sentido, toma fuerza la idea de que el docente pueda resignificar el concepto de función, a partir de la modelación mirada como una práctica social, es decir, desde su perspectiva socioespistemológica. De esta manera, posea una perspectiva diferente a la propuesta por el Mineduc en su currículum y los textos escolares asociados.

1.3. Revisión de textos escolares de matemática de 8º básico

A lo largo de los últimos 10 años, son varias las editoriales cuyos textos escolares han formado parte de los recursos pedagógicos del Ministerio de Educación de Chile, como propuesta para abordar el currículum nacional. Particularmente en el nivel de 8º básico, son varias las editoriales que han sido seleccionadas en la última década, para efectos de esta investigación, éstos textos han analizados bajo distintos aspectos, considerando para ello las siguientes categorías:

- Metodología: esta categoría considera la descripción de la metodología utilizada para introducir el concepto de función, en la primera instancia del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Registros y simbología: aquí se identifican los registros abordados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función, la forma en que estos son presentados al estudiante y la simbología utilizada asociada al concepto.
- Orientaciones didácticas al docente: en esta categoría se recogen los aspectos más relevantes considerados por los autores, dirigidas a los docentes, como sugerencias disciplinares, didácticas y metodológicas.
- Modelación, esta categoría involucra reconocer el uso de la modelación en la propuesta de los autores y el rol que juega en la enseñanza del concepto de función.

Tabla 1: Análisis de textos de estudios de matemática de 8º básico, seleccionados por Mineduc para ser entregados en los colegios públicos y particulares subvencionados.

TEXTO	Metodología	Registros y simbología	Orientaciones didácticas al docente	Modelación
Editorial Santillana 2010	Presenta una situación asociada a una tabla, a partir de la cual se establece una expresión algebraica, la que se utiliza para relacionar las variables involucradas y describir esa relación como una función.(p. 172)	Presenta situación contextualizada que involucra: -Registro verbal -Registro en tabla -Registro algebraico No se utiliza la simbología $y = f(x)$ para hacer referencia a una función.	La guía didáctica del docente en la orientación de la unidad que involucra el concepto de función indica textualmente "La imagen inicial de la unidad está destinada a motivar a sus alumnos y alumnas en el estudio del Álgebra, específicamente el planteamiento de ecuaciones, análisis de fenómenos que representan la relación entre dos variables y la representación algebraica de una función." (p. 286)	No se considera en forma explícita, sino como un medio para representar una función, en distintos tipos de registros, a partir de situaciones de contextos cotidianos o matemáticos, favoreciendo el registro algebraico. Lo anterior se aprecia en las propuestas de actividades. (p. 173) 

3. Andrea compara los planes que le ofrece una compañía de telefonía celular.

Tarifas	Cargo fijo	Minutos incluidos en el plan	Valor minuto adicional
Plan A	9490	60	220
Plan B	12 990	80	160
Plan C	14 490	100	120

a) Completa la tabla con los valores que debería pagar en cada caso, según la cantidad de minutos que va a utilizar.

Minutos	60	80	100	120	150
Costo plan A	9490				
Costo plan B		12 990			
Costo plan C			14 490		

b) Si Andrea hablara 80 minutos, ¿qué plan le convendría?, ¿y si hablara 120?, ¿por qué?
c) Si x representa la cantidad de minutos no incluidos en el plan, ¿qué función representa el monto y de la cuenta de telefonía celular en cada caso?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Noción de función

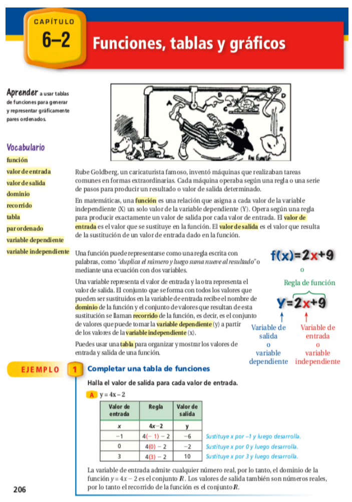
Miguel vende automóviles. Su sueldo fijo mensual es de $ 180 000, y por cada unidad vendida durante el mes, recibe una comisión de $ 35 000.

Observa la tabla de valores:
<table>
<tr><th>Cantidad de automóviles vendidos</th><th>Sueldo recibido ($)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>180 000 + 35 000 • 1 = 215 000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>180 000 + 35 000 • 2 = 250 000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>180 000 + 35 000 • 3 = 285 000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>180 000 + 35 000 • 4 = 320 000</td></tr>
</table>
Para discutir
• ¿Cuál será el sueldo de Miguel si vende ocho automóviles durante un mes?, ¿y si vende dieciséis?, ¿por qué?
• Si durante un mes vendió x automóviles y recibió un sueldo de y pesos, ¿qué expresión algebraica permitiría calcular su sueldo?, ¿cuántas variables tiene?
• ¿Cuántos automóviles vendió en un mes que ganó $ 530 000?, ¿cómo lo supiste?

Si analizamos la tabla, podemos observar que para determinar cuál será el sueldo de Miguel si vende ocho automóviles, podemos calcular 180 000 + 35 000 • 8 = 460 000,
es decir, este será de $ 460 000 y, si vendiera dieciséis, calculamos 180 000 + 35 000 • 16 = 740 000, entonces, recibiría $ 740 000.

Si representamos con una y el sueldo recibido por Miguel al vender x automóviles, la situación anterior se puede modelar por la expresión $y = 180\,000 + 35\,000x$. Esta expresión, que relaciona dos variables x e y de manera que a cada valor de x (n° autos vendidos) le corresponde un único valor de y (sueldo), recibe el nombre de función.</td>
<td></td>
<td>Dentro de las habilidades a desarrollar, propuestas en la guía didáctica no se involucra la habilidad de modelar.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="5">Comentario: Al inicio de la unidad, se plantea como objetivo alcanzar por los estudiantes el “Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y utilizarlos para representar variadas situaciones” (p. 165), entre otros. No se plantea el aprendizaje de funciones como una noción que permita comprender fenómenos y su comportamiento, solo su uso como medio de representación.
La representación algebraica aparece como un argumento recurrente, prioritario y fundamental a partir del reconocimiento de una ecuación, se evidencia la ausencia de registro gráfico en la introducción del concepto. Solo contemplan situaciones de comportamiento lineal, no se involucran otro tipos de comportamientos no lineales.</td>
</tr>
<tr>
<td>TEXTO</td>
<td>Metodología</td>
<td>Registros y simbología</td>
<td>Orientaciones didácticas al docente</td>
<td>Modelación</td>
</tr>
<tr>
<td>Editorial Galileo 2014</td>
<td>Se presenta una caricatura relacionada al comportamiento de una máquina, para luego definir en forma textual una función como relación entre variables. (p. 206)</td>
<td>Se aprecian explícitos:
-Registro verbal
-Registro en tabla
-Registro algebraico
-Registro gráfico en el plano cartesiano.

Se impone la simbología $y = f(x)$ para hacer referencia a una función.</td>
<td>La guía orientadora propone al docente presentar el concepto de función con la siguiente indicación:
“Dirija la atención del estudiante al inicio de la página para leer el primer párrafo y comente cómo funcionan las máquinas matemáticas que producen pares de números (uno que entra a la máquina y el otro que sale de ella) después de ser procesados según la regla” (p. 115). Lo</td>
<td>No se considera la modelación, se explicita la representación de funciones fundamentalmente a partir de tablas, sin establecer mayormente un tránsito entre registros, no existen ejemplos de contextos involucrados. Se evidencia en la sugerencia de práctica en la guía docente: “Práctica con supervisión:</td>
</tr>
</table>

			anterior hace referencia directa a un proceso algebraico y mecánico.	Resuelva en conjunto con los estudiantes, los ejercicios del 1 al 5. Verifique que realicen un desarrollo ordenado del proceso para completar cada tabla. Recuerde que solo deben reemplazar cada valor que entrega la tabla para "x" en la función." (p. 117)

CAPÍTULO 6–2 Funciones, tablas y gráficos

Aprender a usar tablas de funciones para generar y representar gráficamente pares ordenados.

Vocabulario
función
valor de entrada
valor de salida
dominio
recorrido
tabla
par ordenado
variable dependiente
variable independiente

Rube Goldberg, un caricaturista famoso, inventó máquinas que realizaban tareas comunes en formas extraordinarias. Cada máquina operaba según una regla o una serie de pasos para producir un resultado o valor de salida determinado.

En matemáticas, una **función** es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente (X) un solo valor de la variable dependiente (Y). Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por cada valor de entrada. El **valor de entrada** es el valor que se sustituye en la función. El **valor de salida** es el valor que resulta de la sustitución de un valor de entrada dado en la función.

Una función puede representarse como una regla escrita con palabras, como *"duplica el número y luego suma nueve al resultado"* o mediante una ecuación con dos variables.

$f(x)=2x+9$
o
Regla de función
$y=2x+9$
Variable de salida o variable dependiente
Variable de entrada o variable independiente

Una variable representa el valor de entrada y la otra representa el valor de salida. El conjunto que se forma con todos los valores que pueden ser sustituidos en la variable de entrada recibe el nombre de **dominio** de la función y el conjunto de valores que resultan de esta sustitución se llaman **recorrido** de la función, es decir, es el conjunto de valores que puede tomar la **variable dependiente** (y) a partir de los valores de la **variable independiente** (x).

Puedes usar una **tabla** para organizar y mostrar los valores de entrada y salida de una función.

EJEMPLO 1 **Completar una tabla de funciones**

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

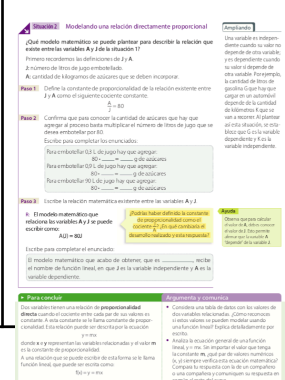
A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$4x-2$	y	
−1	$4(-1)-2$	−6	*Sustituye x por −1 y luego desarrolla.*
0	$4(0)-2$	−2	*Sustituye x por 0 y luego desarrolla.*
3	$4(3)-2$	10	*Sustituye x por 3 y luego desarrolla.*

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto $\mathbb{R}$. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto $\mathbb{R}$.

206

Comentario: El estudiante en su primer contacto con la unidad le manifiestan que las "destrezas" que aprenderá, las utilizará "Para analizar datos y hacer predicciones sobre funciones lineales en Matemáticas y Ciencias" (p. 198). Por otra parte, el objetivo de la clase, que el texto propone es "Aprender a usar tablas de funciones para generar y representar gráficamente pares ordenados" (p 206). No es posible apreciar una intención de involucrar la modelación o la comprensión de fenómenos, sino más bien la aspiración de representar situaciones. El estudiante, para comprender el concepto de función recibe una "Invasión" de símbolos y definiciones, mientras que el docente recibe indicaciones sobre la mecánica que involucran estos símbolos y definiciones.

TEXTO	Metodología	Registros y simbología	Orientaciones didácticas al docente	Modelación
Editorial SM 2015	Relaciona directamente la función lineal con la proporción directa, presentando la idea de una máquina procesadora. La máquina se asocia a un contexto a partir del cual se establece la relación proporcional. Se habla de modelo matemático enunciando la función lineal. (p. 154, 155)	Se aprecian explícitos: -Registro verbal -Registro en tabla -Registro algebraico -Registro gráfico a partir de un diagrama con botellas. Se observa el uso de simbología del tipo $y = f(x)$ para hacer referencia a una función.	Se orienta la modelación de una función como la descripción de fenómenos, en el texto guía se declara como propósito (p. 69): "Modelar situaciones utilizando funciones para lo cual las y los estudiantes necesitan: Relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal Caracterizar funciones lineales y afines. Analizar funciones de acuerdo a sus parámetros. Graficar funciones Se indica al docente que: "Se parte de la metáfora	La modelación se utiliza explícitamente como medio para representar una situación en distintos tipos de registros. (p. 158, 159) 

Situación 2 Modelando una relación directamente proporcional

¿Qué modelo matemático se puede plantear para describir la relación que existe entre las variables A y J de la situación 1?

Primero recordemos las definiciones de J y A.

J: número de litros de jugo embotellado.

A: cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar.

Paso 1 Define la constante de proporcionalidad de la relación existente entre **J** y **A** como el siguiente cociente constante.

$$\frac{A}{J} = 80$$

Paso 2 Confirma que para conocer la cantidad de azúcares que hay que agregar al proceso basta multiplicar el número de litros de jugo que se desea embotellar por 80.

Escribe para completar los enunciados:

Para embotellar 0,3 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 0,9 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 90 L de jugo hay que agregar:
80 • ____ = ____ g de azúcares

Paso 3 Escribe la relación matemática existente entre las variables **A** y **J**.

R: **El modelo matemático que relaciona las variables A y J se puede escribir como:**
$A(J) = 80J$

¿Podrías haber definido la constante de proporcionalidad como el cociente $\frac{J}{A}$? ¿En qué cambiaría el desarrollo realizado y esta respuesta?

Escribe para completar el enunciado:

El modelo matemático que acabo de obtener, que es ________, recibe el nombre de función lineal, en que **J** es la variable independiente y **A** es la variable dependiente.

Ampliando

Una variable es independiente cuando su valor no depende de otra variable; y es dependiente cuando su valor sí depende de otra variable. Por ejemplo, la cantidad de litros de gasolina G que hay que cargar en un automóvil depende de la cantidad de kilómetros K que se van a recorrer. Al plantear así esta situación, se establece que G es la variable dependiente y K es la variable independiente.

Ayuda

Observa que para calcular el valor de **A**, debes conocer el valor de **J**. Esto permite afirmar que la variable **A** "depende" de la variable **J**.

Para concluir

Dos variables tienen una relación de **proporcionalidad directa** cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante. A esta constante se le llama constante de proporcionalidad. Esta relación puede ser descrita por la ecuación

$$y = mx$$

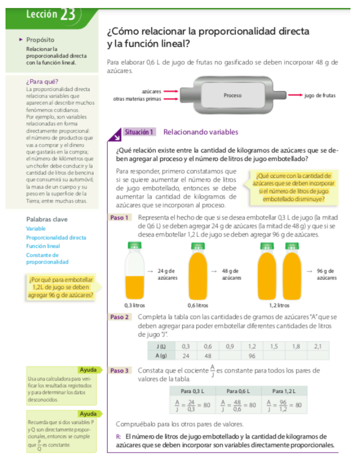
donde **x** e **y** representan las variables relacionadas y el valor **m** es la constante de proporcionalidad.

A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama función lineal, que puede ser escrita como:

$$f(x) = y = mx$$

Argumenta y comunica

- Considera una tabla de datos con los valores de dos variables relacionadas. ¿Cómo reconoces si estos valores se pueden modelar usando una función lineal? Explica detalladamente por escrito.
- Analiza la ecuación general de una función lineal, $y = mx$. Sin importar el valor que tenga la constante **m**, ¿qué par de valores numéricos (x, y) siempre verifica esta ecuación matemática? Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera y comuniquen su respuesta en común al resto del curso.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Lección 23
Propósito
Relacionar la proporcionalidad directa con la función lineal.
¿Para qué?
La proporcionalidad directa relaciona variables que aparecen al describir muchos fenómenos cotidianos. Por ejemplo, son variables relacionadas en forma directamente proporcional: el número de productos que vas a comprar y el dinero que gastarás en la compra; el número de kilómetros que un chofer debe conducir y la cantidad de litros de bencina que consumirá su automóvil; la masa de un cuerpo y su peso en la superficie de la Tierra; entre muchas otras.
Palabras clave
Variable
Proporcionalidad directa
Función lineal
Constante de proporcionalidad
¿Por qué para embotellar 1,2L de jugo se deben agregar 96 g de azúcares?
¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal?
Para elaborar 0,6 L de jugo de frutas no gasificado se deben incorporar 48 g de azúcares.

Situación 1 Relacionando variables
¿Qué relación existe entre la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben agregar al proceso y el número de litros de jugo embotellado?
Para responder, primero constatamos que si se quiere aumentar el número de litros de jugo embotellado, entonces se debe aumentar la cantidad de kilogramos de azúcares que se incorporan al proceso.
¿Qué ocurre con la cantidad de azúcares que se deben incorporar si el número de litros de jugo embotellado disminuye?
Paso 1 Representa el hecho de que si se desea embotellar 0,3 L de jugo (la mitad de 0,6 L) se deben agregar 24 g de azúcares (la mitad de 48 g) y que si se desea embotellar 1,2 L de jugo se deben agregar 96 g de azúcares.

Paso 2 Completa la tabla con las cantidades de gramos de azúcares "A" que se deben agregar para poder embotellar diferentes cantidades de litros de jugo "J".
J (L): 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1
A (g): 24 | 48 | | 96 | | |
Paso 3 Constata que el cociente $\frac{A}{J}$ es constante para todos los pares de valores de la tabla.
Para 0,3 L: $\frac{A}{J} = \frac{24}{0,3} = 80$ | Para 0,6 L: $\frac{A}{J} = \frac{48}{0,6} = 80$ | Para 1,2 L: $\frac{A}{J} = \frac{96}{1,2} = 80$
Compruébalo para los otros pares de valores.
R: El número de litros de jugo embotellado y la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar son variables directamente proporcionales.
Ayuda
Usa una calculadora para verificar los resultados registrados y para determinar los datos desconocidos.
Ayuda
Recuerda que si dos variables P y Q son directamente proporcionales, entonces se cumple que $\frac{P}{Q}$ es constante.</td>
<td></td>
<td>de la máquina y se sube poco a poco el nivel de abstracción pasando por el diagrama sagital para terminar con la representación gráfica que implica una visión geométrica del problema. El ritmo de la clase deberá obedecer a la capacidad de abstracción que muestren los y las estudiantes"(p. 70).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="5">Comentario: Si bien en este texto se incorpora la modelación, su uso se relaciona fundamentalmente a las diversas representaciones de una situación de contexto matemático o cotidiano o de algún área del conocimiento. Se aprecia la inclinación hacia lo algebraico a partir del uso de la "máquina" y la relación algebraica que se le asocia. Lo anterior se enfatiza con la identificación de posibles errores por parte de los autores del texto, al indicar lo siguiente (p. 71):

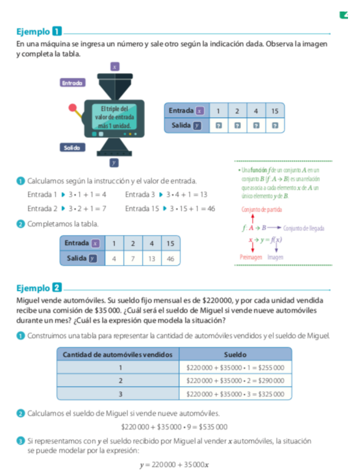
Por otra parte,
$f(x_1 + x_2) = m\ (x_1 + x_2) + n$
$m(x_1 + x_2) + 2n \neq m\ (x_1 + x_2) + n$

Errores frecuentes
Los estudiantes se pueden confundir con el uso de las letras de los parámetros. Normalmente se trabaja con las fórmula $y = ax + b$ o $y = mx + n$, insista que lo importante son los conceptos de pendiente y de intercepto más que las letras en sí.

En los errores frecuentes, no se contemplan dificultades de comprensión o interpretación, sino la mera preocupación sobre lo algebraico, casi como un acto mecánico.</td>
</tr>
<tr>
<td>TEXTO</td>
<td>Metodología</td>
<td>Registros y simbología</td>
<td>Orientaciones didácticas al docente</td>
<td>Modelación</td>
</tr>
<tr>
<td>Editorial Santillana 2019</td>
<td>El tema se inicia con una situación asociada al celular y el deporte (p. 90), a partir de la que se establecen preguntar para luego completar una tabla, luego en la siguiente página, se expone el proceso de una máquina que realiza un proceso algebraico sin mediar un contexto.</td>
<td>Se aprecian explícitos:
-Registro verbal
-Registro en tabla
-Registro algebraico
-Registro gráfico en el plano cartesiano.

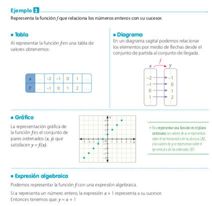
Se observa el uso de simbología del</td>
<td>En las orientaciones para la gestión de la clase se sugiere: "Relacione el concepto de función con el de una máquina en la que se ingresan valores, esta los opera matemáticamente y libera otros. Proponga a sus estudiantes que creen nuevas operaciones para la máquina, luego llévelos</td>
<td>La modelación se utiliza explícitamente para representar una situación en distintos registros de representación (p. 93).

Ejemplo 5
El valor general de las entradas para una obra de teatro es de $4 500 y la capacidad máxima del teatro es para 150 personas. ¿Cuál es el dominio y cuál el recorrido de la función que modela la cantidad de asistentes y la recaudación de dinero?
1 La función que modela la situación es $y = 4\,500x$, donde la variable independiente x es la cantidad de personas que asisten al teatro y la variable dependiente y es la recaudación de dinero en pesos.
2 Como x representa la cantidad de personas, los valores que puede tomar van desde 0 a 150, y al reemplazarlos en la función resultan los valores de y, es decir, $4500 \cdot 0, 4500 \cdot 1, \dots 4500 \cdot 150$.
3 Luego, el dominio y el recorrido de la función están dados por:
$Dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \dots 150\}$
$Rec(f) = \{0, 4500, 9\,000, \dots 675\,000\}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Ejemplo 1
En una máquina se ingresa un número y sale otro según la indicación dada. Observa la imagen y completa la tabla.

1 Calculamos según la instrucción y el valor de entrada.
Entrada 1 ▶ $3 \cdot 1 + 1 = 4$ Entrada 3 ▶ $3 \cdot 4 + 1 = 13$
Entrada 2 ▶ $3 \cdot 2 + 1 = 7$ Entrada 15 ▶ $3 \cdot 15 + 1 = 46$
2 Completamos la tabla.
Entrada x: 1, 2, 4, 15
Salida y: 4, 7, 13, 46
• Una función f de un conjunto A en un conjunto B ($f: A \to B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.
Conjunto de partida
$f: A \to B$ → Conjunto de llegada
$x \to y = f(x)$
Preimagen Imagen
Ejemplo 2
Miguel vende automóviles. Su sueldo fijo mensual es de $220000, y por cada unidad vendida recibe una comisión de $35 000. ¿Cuál será el sueldo de Miguel si vende nueve automóviles durante un mes? ¿Cuál es la expresión que modela la situación?
1 Construimos una tabla para representar la cantidad de automóviles vendidos y el sueldo de Miguel.
Cantidad de automóviles vendidos | Sueldo
1 | $220 000 + $35 000 • 1 = $255 000
2 | $220 000 + $35 000 • 2 = $290 000
3 | $220 000 + $35 000 • 3 = $325 000
2 Calculamos el sueldo de Miguel si vende nueve automóviles.
$220 000 + $35 000 • 9 = $535 000
3 Si representamos con y el sueldo recibido por Miguel al vender x automóviles, la situación se puede modelar por la expresión:
$y = 220000 + 35000x$

Finalmente, se define el concepto de función como relación entre variables, incorporando directamente conceptos asociados a la noción de función, exponiendo sus formas de representación (p. 92).</td>
<td>tipo $y = f(x)$ para hacer referencia a una función.


Ejemplo 3
Representa la función f que relaciona los números enteros con su sucesor.
■ Tabla
Al representar la función f en una tabla de valores obtenemos:
x: …, −2, −1, 0, 1, …
y: …, −1, 0, 1, 2, …
■ Diagrama
En un diagrama sagital podemos relacionar los elementos por medio de flechas desde el conjunto de partida al conjunto de llegada.

■ Gráfico
La representación gráfica de la función f es el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen $y = f(x)$.
• Para representar una función en el plano cartesiano, los valores de x se representan sobre el eje horizontal o de las abscisas (X), y los valores de y se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas (Y).
■ Expresión algebraica
Podemos representar la función f con una expresión algebraica.
Si x representa un número entero, la expresión $x + 1$ representa a su sucesor. Entonces tenemos que: $y = x + 1$</td>
<td>a representar esto algebraicamente, con ayuda de una tabla de valores". (p. 153)

Se añade además lo siguiente:

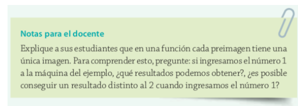

Notas para el docente
Explique a sus estudiantes que en una función cada preimagen tiene una única imagen. Para comprender esto, pregunte: si ingresamos el número 1 a la máquina del ejemplo, ¿qué resultados podemos obtener?, ¿es posible conseguir un resultado distinto al 2 cuando ingresamos el número 1?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="5">Comentario: Una diferencia que presenta este texto respecto de los otros, es la incorporación de comportamientos gráficos no lineales. Este texto enfatiza el uso del álgebra en el proceso de aprendizaje del concepto de función, se evidencia en las indicaciones de la guía didáctica, se le sugiere como desarrollo del pensamiento matemático plantear la pregunta: "¿Cómo se puede utilizar el lenguaje algebraico para representar la situación?" (p. 152), no se enfatiza la interpretación, ni el comportamiento de fenómenos.</td>
</tr>
</table>

Tabla 1: Elaboración propia

En ninguna de las propuestas de los textos escolares analizados se aprecia la enseñanza del concepto de función como un medio de comprensión e interpretación del entorno, solo atienden, mayoritariamente, la representación de éste. Se evidencia la ausencia del uso de la experimentación, del análisis y de la argumentación como mecanismo de aprendizaje. Falta fortalecer el vínculo entre la modelación, las otras habilidades a desarrollar y los fenómenos provenientes de otras disciplinas para ampliar en las y los docentes, que ejercen en 8º Básico, las perspectivas y enfoques en la construcción del concepto de función.

1.4. Concepto de función en enseñanza media

La noción de función se incorpora en el currículum nacional chileno en los primeros años de enseñanza media, en 8º básico para precisar, el concepto se va ampliando y profundizando para el estudiantado a medida que avanzan en niveles, incorporando cada año, hasta 4º medio, diferentes tipos de funciones, entre ellas lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, potencias, trigonométricas. Cada una de ellas con sus características y propósitos. El aprendizaje de las funciones constituye uno de los temas imprescindibles en los programas de estudio del ministerio de educación de Chile , sin dudas también en los programas de muchos otros países, así como en los programas de estudios de múltiples carreras de educación superior a nivel nacional. Como lo plantea Sastre et al. (2009), "El concepto de función permite modelizar múltiples situaciones del mundo real, relacionando variables diversas. De esta manera, se posibilita el análisis de las situaciones desde un punto de vista dinámico, lo que permite sacar conclusiones y formular generalizaciones", convirtiéndose en una herramienta fundamental en la interpretación de fenómenos de las diversas áreas del conocimiento.
Éste concepto, que es una base importante del currículum del sector de matemática, significa un importante desafío en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto para docentes como para estudiantes. Por un lado, no todos los docentes de matemática que ejercen en 8º básico son especialistas, algunos de ellos tienen sólo formación general, lo que a veces dificulta su práctica docente, considerando que debe atender una diversidad de estudiantes cada uno con sus necesidades individuales. Algunas investigaciones advierten esta dificultad que enfrentan profesoras y profesores,

> Desconocen elementos de actualización en cuanto al saber propio de las disciplinas y en particular de las matemáticas, los resultados permitieron identificar condiciones y necesidades de los profesores para la enseñanza en contextos de diversidad y reconocer los recursos (cognitivos, físicos, comunicativos, emotivos, sociales) desde las dificultades de comunicación, de representación y de resolución de problemas en el momento de enseñar conceptos matemáticos en el aula. (Bermudez, 2018)

Junto a lo anterior, De Armas (2021), en su investigación advierte de las dificultades que enfrentan las y los docentes respecto al tema de funciones, señala lo siguiente:

> Estudios previos reportan una comprensión limitada de las representaciones (Dreher y Kuntze, 2015) y de las funciones (Amaya, 2020; Amaya, Pino Fan y Medina, 2016; Biehler, 2005; Even, 1990; 1993), al resolver situaciones que las involucren, tanto en docentes en formación como en ejercicio, ya que no logran conectar las representaciones producidas, y les cuesta integrar los significados parciales de una función. (p. 3)

De Armas (2021) advierte además, citando a (Gagatsis y Shiakalli, 2004),

> Que estas limitaciones en quien enseña podrían resultar nocivas para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que su capacidad para hacer transformaciones entre

> los elementos de las representaciones de una función condiciona el éxito o fracaso para la comprensión de esta noción por parte de sus estudiantes. (p. 3)

Lo anterior es preocupante, puesto que según Guerra et al. (2015), una mala concepción del concepto de función podría redundar en un bajo rendimiento en el aprendizaje del cálculo (p. 278). Esto conlleva otra dificultad, considerando, en palabras del mismo autor (citantando a López y Sosa, 2008), que el concepto de función es:

> Uno de los pilares más importantes para el acceso al cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos profesionales y de la ciencia, de modo que los resultados de aprendizaje y los procesos desarrollados en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación de este concepto. (p. 278)

De Armas (2021), (citando a Hitt, 1998), ratifica lo expuesto por Guerra et al.(2015), señalando que "la falta de comprensión del objeto matemático función podría afectar el acceso al cálculo o al razonamiento algebraico en estudios más avanzados en matemáticas" (p. 3).

Por otro lado, la mayoría de los artículos revisados para realizar esta investigación, relacionados al estudio de las problemáticas que involucra el concepto de función, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, contemplan a los registros de representación, como una dificultad a considerar,

> El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro. (Ugalde, 2014, p. 19)

Bajo esta mirada Sastre et al. (2009) plantea en su investigación que "El concepto de función puede admitir representaciones en diferentes registros, con diversos alcances y limitaciones" (p.158), argumenta además que "los registros son medios de expresión y de representación y se caracterizan precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico" (p.158), es decir, a partir de sus relaciones podemos articular los procesos de significación del concepto de función.

Si bien en la actualidad, las propuestas en los textos escolares, atienden la necesidad de incluir diferentes tipos de registros de representación de una función, tal como se aprecia en la revisión de textos en la sección anterior, la modelación es el elemento integrador de éstas, es la conexión entre ellas y entorno, pero no está considerada de manera explícita en la declaración del programa de 8º básico, lo cual fue expuesto anteriormente. Frente a ello es válido preguntarse si las y los docentes que ejercen en 8º básico, ¿comprende que a través de la modelación pueden establecer las condiciones necesarias para transitar entre los diversos registros de representación de una función?, ¿Qué a través de la modelación pueden conectar el concepto de función con el entorno y otras disciplinas, para entender comportamientos y comprender fenómenos?.

Para enseñar el concepto de función, la propuesta del texto escolar ministerial plantea introducirlo por medio de un comportamiento lineal, cabe preguntarse ¿por qué no incluir otros tipos de comportamientos?, quizás la respuesta pueda estar en la ausencia de conocimientos en los estudiantes respecto a ciertas estructuras algebraicas, las que desconocen por su etapa de desarrollo, lo cual conlleva a representaciones algebraicas más complejas para estudiantes de 8º básico. Lo anterior tiene sentido ya que, según lo evidenciado en el análisis de los textos escolares, se parte, generalmente, desde una mirada algebraica la introducción del concepto de función, pero ¿qué pasaría si se mira desde otro prisma?, ¿si se propone introducir el concepto de función desde su gráfica?. Cordero (2006), en una de sus investigaciones establece que "desarrollar los usos de las gráficas traería en consecuencia el desarrollo del concepto de función" (p. 828), lo anterior nos permite de cierta forma ampliar el espectro, cambiar de prisma y considerar los comportamientos lineales, mirados desde una instancia introductoria, a partir de su representación gráfica, sin la necesidad de abordar primero las estructuras algebraicas planteadas en los textos escolares, que consideran metáforas de maquinas inexistentes que transforman números, dando la posibilidad de comprender fenómenos a través de su comportamiento gráfico, a partir de ello conectarse con el concepto de función y que la modelación sea el vínculo entre sus diversas representaciones, conectándolas a través de la realidad y el conocimiento del entorno.

1.5. Epistemología de la Conceptode Función

Ugalde (2013), (citando a M. Spivak), señala lo siguiente:

> El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad. (p.2)

Actualmente, en la educación chilena el concepto de función es muy importante, está presente en el sistema de enseñanza desde 8º básico, pasando por toda la enseñanza media, llegando hasta la educación superior, su profundización varía según los programas de cada nivel y de cada carrera, respectivamente. Su importancia se percibida bajo las miradas de diversos autores, Farfán y García (2005) plantean, respecto al concepto de función, que "tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años" (citando a Ruiz, 1998) (p. 489).
"El concepto de función ocupa un lugar importante a lo largo de la historia, ya que las funciones según Leonhard Euler (siglo XVIII)(1707-1783) son la base del desarrollo más moderno de las matemáticas" (Briceño, 2019, p.2) .

Realizar un recorrido epistemológico del concepto de función, permite comprender su concepción y reconocer los obstáculos que involucra, con ello visibilizar las dificultades que envuelve el proceso de enseñanza y aprendizaje relacionado a este constructo.

El desarrollo de la matemática en la humanidad se aprecia desde tiempos primitivos, a partir de acciones básicas necesarias, como contar y medir. Bajo estas consideraciones, según Ugalde (2013), contar es la forma más primitiva de una función, puesto que:

> Se asigna a cada uno de los objetos de interés, un dedo de la mano o una marca en una vara de madera. De este modo, cada uno de los objetos se hace corresponder con uno de los dedos o con una de las marcas. El conjunto de dedos seleccionados o marcas en la vara describe, en cardinalidad, el conjunto de objetos en cuestión. (p. 2)

A partir de esta observación, éste autor destaca tres hechos importantes:

- Que el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto (amén de otros conceptos como relación, variable, etc.).
- Que el concepto de función desde su origen, cualquiera que este sea, está ligado al desarrollo del concepto de cantidad, y más generalmente, al concepto de número.
- Que el concepto de función nace del interés de la humanidad por entender el mundo que le rodea. (p. 2)

Éste último hecho, toma mucha relevancia en la educación chilena, puesto que el Mineduc en sus bases curriculares y programas de las diversas asignaturas, promueve y orienta transversalidad de objetivos y el trabajo interdisciplinario, particularmente, advierten la estrecha relación entre las funciones y fenómenos presentes en diversas áreas del conocimiento. Ugalde (2013), citando al destacado matemático J. Fourier (1768 - 1830), promueve que "el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos" (p.2).

Lo anterior nos permite entender de cierta forma, el hecho de que el desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia de la humanidad esté ligado al estudio de fenómenos y a la comprensión del entorno por parte del ser humano, desde miradas prácticas para dar respuesta a problemáticas de la vida, desde concepciones filosóficas y hasta religiosas para comprender su cosmovisión y la relación de ésta con su entorno. Ugalde (2013) señala que:

> El concepto de función está presente en toda la matemática. No sólo es central en las áreas propias de la matemática (llamada teórica o pura), sino que es la herramienta por excelencia en las áreas que buscan modelar o describir las actividades cotidianas y los fenómenos que se perciben (matemática aplicada) (p.2).

Éste autor, en relación a lo anterior, profundiza indicando que:
"Es fundamental comprender que el concepto de función, como tantos otros conceptos de la matemática, no debe enseñarse como un ente abstracto, si no que debe tenerse presente que

lo que le dio vida fue precisamente el entendimiento de fenómenos naturales y situaciones cotidianas alrededor del hombre. Claros ejemplos de esta condición son:
La trigonometría.
Las leyes de la física.
Estudio de crecimientos poblacionales.
Interés simple o compuesto".

1.5.1. Desarrollo histórico del concepto de función

Comprender el desarrollo del concepto de función, a lo largo de la historia, entrega la posibilidad de conectar con aquellos hechos que impulsaron su concepción, su desarrollo y su evolución, nos permite entender las distintas interpretaciones y definiciones que se le han otorgado a lo largo del tiempo.

Farfán y García (2005), su línea histórica del concepto de función, se destacan respecto al mundo antiguo las siguientes concepciones:

> "Dos culturas que sobresalen en la antigüedad debido a sus impresionantes logros filosóficos y matemáticos que han legado a la humanidad, entre otros tantos, son la Griega y la Babilónica". Los autores aluden a que estas culturas hacen "uso de una intuición primitiva del concepto de función", por una parte "los babilonios buscan regularidad en las tabulaciones de fenómenos naturales como el movimiento de los astros, para después intentar aritmetizar y lograr generalizar tales observaciones", ya que "si no hubiera una regla general subyacente sería difícil explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo" Boyer (1986) (citado en Farfán y García, 2005). Así también se propone la existencia de un instinto de funcionalidad, "función no sólo es fórmula, es también una relación que asocia elementos de dos conjuntos" Pedersen (1974) (citado en Farfán y García, 2005, pp 489-490).

En relación a este mismo período histórico, Ugalde (2013), rescata también la búsqueda de regularidades y el uso de tablas por parte de los babilonios, así como también los inicios de la proporcionalidad en mundo griego,

> En el mundo antiguo (Babilonia y Egipto), la matemática desde el punto de vista del concepto de función se limitaba a la elaboración de tablas de mediciones de fenómenos observados. Luego aparecen las matemáticas griegas, en particular los trabajos de Arquímedes con las primeras leyes de la cinemática. Si bien en la Grecia antigua no se conocía el concepto de función como tal, las proporciones y los primeros intentos de cálculo infinitesimal vieron la luz. (p. 4)

La edad media es un período histórico que encierra muchos hitos, los cuales generan un gran impacto en el desarrollo del concepto de función, al respecto de ésta época Farfán y García (2005) describen que:

> Una característica esencial de este periodo se observa en los intentos por dar una explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción los cuales se verán fuertemente negados debido a la disociación entre número y magnitud. La consecuencia de tal confrontación llevará a dar sustento poco después a la modelización matemática de estos fenómenos a partir de resultados experimentales, de tal manera que “la historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función” (René de Cotret, 1985. p.58) (citado en Farfán y García, 2005, p. 490).

Para Farfán y García (2005), es en esta período que se presentan las primeras ideas en la concepción de función, identificando en ello dos corrientes:

> Por un lado, Heytesbury y Swineshead en Inglaterra a través de la teoría de la intensidad de formas, expresada mediante un álgebra de palabras; por otro, Oresme (1323-1382) en Francia con un foco en la geometría de gráficas, “representando por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que dependen de otra magnitud análoga” (Ruiz, 1998) (citado en Farfán y García, 2005, p. 490), y desde aquí es posible percibir los principios de la noción de función, en el que, “Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda” (René de Cotret, 1985. p.38) (citado en Farfán y García, 2005, p. 490).

Ugalde (2013) por su parte, se refiere a este período como:

> Una época de oscurantismo en muchas áreas del pensamiento humano, se vislumbraron los primeros intentos para representar mediante gráficas sencillas los movimientos y cambios observados en los fenómenos naturales. El mayor auge del concepto de función se dio durante los siglos XVI, XVII y XVIII con el desarrollo de los números reales y el análisis matemático. (p. 4)

En relación a lo anterior, Farfán y García (2005) profundizan respecto a los siglos XV, XVI destacando lo que los historiadores llaman “perídodos auxiliares”, puesto que, según los autores,

> No se logra aportación sobresaliente al desarrollo del concepto de función, sin embargo, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre “variable” de una función e “incógnita” de una ecuación, Ruiz (1998) (citado en Farfán y García, 2005, p. 490), lo cual marcará el sendero simbólico que llevará a la estructuración plena de la noción de función. (p. 490)

Farfán y García (2005), destacan de los siglos siguientes los hitos que se detallan a continuación:

> Comienza a tomar forma la estructura de la trigonometría como una ciencia encargada de situaciones propias, se escribirán libros y el matemático Müller, (s.XVIII), obtendrá por vez primera las tablas de tangente y cotangente, sirviendo todo lo anterior para nutrir a las matemáticas de una nueva clase de función: la función trigonométrica.
> Inmersos en matices de movimiento se observa una relación muy estrecha entre número y magnitud lo cual trae a consecuencia el surgimiento de la noción de logaritmo a través de los trabajos de Chuquet, Stiefel y Neper.
> Galileo prosigue lo iniciado en el periodo anterior, sin embargo ahora no solamente es la abstracción, si no que definitivamente se llega a la modelización matemática de los fenómenos a través de resultados experimentales, mecanismo que ayuda a evolucionar notablemente el concepto debido a que "Galileo tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente" (René de Cotret, 1985. p.13) (citado en Farfán y García, 2005, p. 491).

Sin embargo, la notación en la que se expresan los resultados sigue estando fuertemente basada en un gran obstáculo epistemológico: la idea de proporción. En la actualidad muchas de las propuestas de enseñanza del concepto de función, abordan como primera instancia la proporción directa, lo que lleva a plantear la pregunta respecto a ¿si será conveniente o no partir desde esta perspectiva?.

El siglo XVII, es protagonista de toda una revolución en matemáticas. Nace la geometría analítica como consecuencia de los trabajos de Fermat y principalmente de Descartes al renunciar a las concepciones griegas de número y magnitud y lograr fusionarlas, y que según Youschevitch (1976) (citado en Farfán y García, 2005, p. 491): Es aquí donde por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra.

A consecuencia de lo anterior, se inicia el estudio de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, lo cual da pie al desarrollo de la teoría de funciones, "el cual se basa fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal y la extensión del concepto de número" (Youschevitch, 1976) (citado en Farfán y García, 2005, p. 491).

> Se ponen los cimientos de la estructura de la noción formal de función y del análisis, columna vertebral del estudio del movimiento, el cual se desarrolla por un lado en Inglaterra por Newton bajo dos formas: la primera mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen y la segunda a través del método de las fluxiones. Simultáneamente, en Alemania por Leibnitz a través del cálculo de los diferenciales, quien por vez

> primera habla en términos de función, ya que según Youschevitch (1976) (citado en Farfán y García, 2005, p. 491): A falta de un término general entre él y Bernoulli, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir bien pronto al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica,

En el siglo XVIII, se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función(Farfán y García, 2005, p. 491).

> Bernoulli y Euler, serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega f para designar la característica de una función, escribiendo entonces: << fx>>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como f(x) (Farfán y García, 2005, p. 491).

El siglo XIX se encuentra caracterizado por diversas generalizaciones observadas en los trabajos de Cauchy, (1827), Lobachevsky, (1834), Dirichlet, (1837), Riemann, (1858) (citado en Farfán y García, 2005, p. 492), al emplear al objeto matemático función como la médula del Análisis recién creado por Euler. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general (Ruiz, 1998) (citado en Farfán y García, 2005, p. 492).
El siglo XX, es el que corresponde al uso pleno y a la exploración minuciosa del concepto basado formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, y basta observar lo que Spivak (1978) (citado en Farfán y García, 2005, p. 491 y por Ugalde, 2013, p. 2).

En libros clásicos de matemáticas de nuestros tiempos, es observable cómo se intenta favorecer más la relación que guarda este concepto con el intento por describir fenómenos naturales, de tal manera que "en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación" (Dieudonné, 1989, p.187) (citado en Farfán y García, 2005, p. 493).

Para Ugalde (2013), "El concepto de función se consolida del siglo XIX a la primera parte del siglo XX, cuando este concepto juega un papel central en la gran mayoría de las áreas del quehacer matemático".

Sin dudas el recorrido histórico del concepto de función nos entrega luces claras de evolución, desde una concepción intuitiva, hasta su estructura abstracta que prevalece en la actualidad, además de reconocer los obstáculos que su epistemología involucra, tales como:

- Disociación entre número y magnitud.
- Dificultades al relacionarla con la proporcionalidad.

Así como también reconocer su rol modelizador de fenómenos a partir de resultados experimentales, unificando concepciones para dar vida al concepto de función.

1.5.2. Definiciones del concepto de función

En la mayoría de los textos escolares chilenos, se define una función, “tradicionalmente” como una relación de la forma y = f (x), la cual necesita de dos conjuntos A y B, donde el conjunto A recibe el nombre de dominio y mientras que el conjunto B recibe el nombre de codominio. En esta relación, todos los elementos del conjunto A se conectan con un único elemento en el conjunto B. Generalmente no se formalizan o establecen otro tipo de definiciones, lo mismo se puede apreciar en muchos textos de cálculo y precálculo que son fuentes para la preparación de clases de muchos docentes que ejercen en enseñanza media.

Las distintas definiciones del concepto de función, tienen relación con aquellos aspectos que los autores desean presentar como relevantes, Ugalde (2013) recoge la clasificación propuesta por Azcárate y Deulofeu (1990):

- Correspondencia entre valores de variables: cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda.
- Dependencia entre dos variables: Se define primero que significa que una variable varíe en un conjunto, dicho conjunto será el dominio. La función es la relación que establece cómo la segunda variable varía en el segundo conjunto, en relación a la variación de la primera variable en el primer conjunto.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos: una función f de un conjunto A hacia un conjunto B es una regla de correspondencia que asignan a cada elemento x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única f (x) de B.
- Conjunto de pares ordenados: una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares ordenados tienen tiene el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función. (p. 21-22)

Por su parte, Briceño (2019) considera interpretaciones de matemática de 8º del concepto de función, muy similares a las definiciones dadas en Ugalde (2013):

- Una primera interpretación como correspondencia entre los elementos del dominio y los del codominio, poniéndo el énfasis en estos conjuntos.
- En una segunda interpretación, lo que más importa es la relación de dependencia entre las variables que componen los conjuntos.
- En la tercera interpretación, considera la función como una regla, y el énfasis está en la regularidad en la relación entre dos variables, por lo que la regla puede aplicarse a cualquier número y no solo a valores discretos, dependiendo de si el dominio incluye valores continuos o discontinuos (Vinner y Dreyfus, 1989) (citados en Briceno, 2019, p. 14).

Esta tercera interpretación dada en Briceno (2019) complementa las definiciones dadas anteriormente y es abordada en el contexto educativo, generalmente, como el reconocimiento de un patrón, como una herramienta para determinar una expresión algebraica, pero no necesariamente como la interpretación de una función.

Briceno (2019) cita a Thompson y Carlson (2017) para señalar "que no existe una interpretación de función que sea la forma correcta de concebir la función, ya que la forma de entender qué es una función puede variar de persona a persona" (p. 15). Más aún, Thompson y Carlson (2017) (citado por Briceno, 2019, p. 15), destacan que "la acción mental relacionada con la función depende del razonamiento covariacional. En su opinión, la covariación es una forma de procesar la información". Lo anterior constituye una cuarta interpretación dada en Briceno (2019), en la cual señala que "el razonamiento covariacional está relacionado con la capacidad de ver cómo la magnitud de una variable se ve directamente afectada por cualquier cambio en el valor de otra variable" (p. 15), sostiene además que "dominar la covariación requiere tener una visión dinámica de la función para poder ver claramente los cambios potenciales" (p. 15).

Las distintas miradas respecto a las definiciones que pueden darse al concepto de función, están relacionadas con las que cada autor pretende abordar el concepto, observándose una fuerte conexión con el álgebra.

1.5.3. Tipos de representación del concepto de función

Briceno (2019), hace referencia a la representación de una función como Dibujo, (citando a Duval, 1993) menciona que "un dibujo puede ser una representación geométrica de un objeto matemático como una función. Esta es una forma simplificada de representar la dinámica de las variables sin dar explícitamente todos los elementos de la función, gracias al aspecto visual" (p. 19).

Cada una de estas representaciones son unas más adecuadas que otras para lograr los objetivos que el uso de una función plantea, en ese sentido Ugalde (2013), señala algunos alcances:

- Respecto a la representación en diagrama "es muy útil para trabajar con conjuntos finitos, y con fenómenos que no son necesariamente cuantificables" (p. 20). Por ejemplo, cuando relacionan palabras letras con números.
- En relación a la Tabla de valores señala que "para conjuntos de gran cardinalidad ofrece sólo una visión parcial de la relación, es quizá la más utilizada en forma cotidiana. Se usan para indicar precios, temperaturas, porcentajes. Por su naturaleza (presenta pares ordenados), es más cercana a la noción de relación o correspondencia, de la cual es sólo un caso particular. Por su naturaleza finita, es sencillo utilizar la información de la tabla de valores para crear una representación gráfica, sin embargo, se presentan algunos errores usuales, por ejemplo a la hora de

interpretar tablas de valores es la extrapolación a valores no admitidos. Otro error común es olvidar la naturaleza del fenómeno en estudio, y las características que lo definen. Unos cuantos datos por sí mismos pueden dar una versión errónea del concepto global" (p. 21).

- La representación gráfica "es la más popular de las representaciones, y guarda una estrecha relación primero, con el desarrollo histórico del concepto de función, y segundo con el cálculo, terreno de juego por excelencia para el estudio y uso de las funciones" "Las sucesiones son un excelente ejemplo de funciones para las cuales la tabla de valores y la gráfica no son tan buenas como la representación mediante una relación algebraica" (p. 21).

Todas estas apreciaciones y distinciones relacionadas a las representaciones del concepto de función, recalcan la importancia comprender cómo éstas interactúan, como se relacionan, el por qué de una o de otras y que la naturaleza de la evolución del concepto han dado paso a cada una de ellas. Lo anterior, hace necesario entonces considerar cada una de ellas con su particularidad, con su objetivo de uso y no solo el hecho de transitar de una en otra, sin un mayor sentido. Los textos escolares de 8º básico presentan, en este aspecto, la limitante de exponer las representaciones sin exponer al estudiante la necesidad natural de cada una de ellas, imponiendo en primera instancia su representación algebraica, perdiendo de cierta forma la oportunidad de que surjan de manera espontánea a partir de la experimentación, conectandolas a través de la modelación de fenómenos que le den un sentido al aprendizaje de este constructo.

Generalmente, en los diversos textos de estudio, tanto de educación media como de educación superior, es posible reconocer 5 tipos de representaciones: Verbal, Diagramas, Tablas de valores, Gráfica y Algebraica.

> El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro (Azcárate y Deulofeu, 1990)(citado en Ugalde, 2013).

Para Ugalde (2013) "es importante conocer las debilidades y fortalezas de cada uno de estas representaciones, y tener a la mano una serie de actividades y situaciones en las que cada tipo de representación es más adecuada que las otras" (pp 19-22).

La tabla 2 contempla la descripción de cada una de las representaciones dadas en Ugalde (2013).

Tabla 2: Descripción de tipos de representación de una función.

Representación	Descripción
Verbal	En este tipo de representación, mediante el lenguaje común se ofrece una descripción general, cualitativa, de la relación funcional que asigna los elementos del conjunto de salida, o variable independiente, con los elementos del conjunto de llegada, o variable dependiente. Ofrece una relación funcional que no requiere de simbología elaborada.
Diagrama	La representación mediante diagramas es muy rica visualmente, y guarda estrecha relación con los diagramas de Venn de la teoría de conjuntos. Es muy útil para trabajar con conjuntos finitos, y con fenómenos que no son necesariamente cuantificables.
Tabla de valores	Mediante el listado explícito de pares ordenados, establece en forma concreta que elemento del primer conjunto corresponde a que elemento del segundo. Describe mejor las funciones entre conjuntos finitos. Para conjuntos infinitos ofrece sólo una visión parcial de la relación funcional.
Gráfica	Generalmente es una representación cartesiana (discreta o continua), en donde los elementos del primer conjunto se representan sobre un eje horizontal, y los del segundo sobre un eje vertical (claro está, se limitan al caso de dos variables). Permite "visualizar" características globales de la relación funcional.
Algebraica	En este tipo de representación se busca, mediante una fórmula matemática o ecuación entre los elementos de los conjuntos en cuestión, expresar en forma explícita o implícita, la relación funcional.

Tabla 2: fuente Ugalde (2013)

1.6. La Modelación

Al revisar literatura relacionada con la modelación, varios autores coinciden en su definición, es así, como Caroca (2020), define un modelo matemático, (citando a Villa-Ochoa , 2007) como un “conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p. 11).

Similarmente, Rojas (2021) (citando a Blomhoj, 2004), “plantea que la modelación constituye un proceso de enseñanza y aprendizaje que relaciona el mundo real y la matemática”. (p. 32).

Por su parte, Soto (2020) cita a Blum y Borromeo-Ferri (2009), destacando su perspectiva de modelación, puesto que esta concibe a la modelación como el proceso de traducción entre el mundo real y el mundo matemático. Estos autores coinciden en que un modelo matemático tiene la virtud de unir la matemática con la realidad e interactúa con ambas, están íntimamente relacionadas.

En su investigación Caroca (2020), realiza una recopilación de información respecto a la modelación, la cual permite comprender los alcances de ésta en los distintos aspectos en los que está involucrada y permiten configurar una serie de características, tales como:

> (Citando a Vilches, Soto y Silva-Crocci, 2019) menciona que el proceso de modelación debe tener un enfoque interdisciplinario puesto que entrega la oportunidad de comprender, analizar y predecir ciertos comportamientos, no solo comportamientos relacionados exclusivamente a la matemática, sino a otras áreas en donde la realidad este presente. (p. 11)
>
> La construcción de un modelo requiere un cierto periodo de tiempo, por lo que construir modelos matemáticos no es un proceso inmediato, sino es un proceso en donde se pone en juego conocimientos matemáticos y no matemáticos, el conocimiento del contexto, la intuición y la creatividad para interpretar un determinado contexto, habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes en la situación problemática del mundo real que posee quien modela (citando a Salett & Hein, 2004; Villa, 2007, p. 11).

En Blomhoj (2004) (citado en Caroca, 2020, pp 11-12), se establece que “para poder crear y aplicar esos modelos matemáticos es necesario recorrer todo el ciclo de un proceso de modelación, el cual tiene los siguientes subprocesos” (ver Ilustración 1):

Ilustración 1: Subprocesos del ciclo de modelación, (Caroca, 2020)

Caroca (2020) c

- Comienza con la formulación del problema, en donde se formula una tarea que posea características de la realidad la cual será modelada.
- Luego, la sistematización de los conceptos, en el cual se organizan los objetos matemáticos que serán usados en la resolución de los modelos matemáticos.
- Posteriormente se traducen dichos objetos y relaciones obtenidas a un lenguaje matemático.
- Siguiendo con el ciclo, el uso de métodos matemáticos para encontrar resultados y extraer conclusiones, los cuales deben ser interpretados considerando la situación real inicial.
- Finalmente, se evalúa la validez y pertinencia del modelo, el cual debe ser lo más coherente posible con la realidad investigada. (p.12)

El proceso de modelación no finaliza con la obtención del modelo, sino que se deben obtener resultados matemáticos pertinentes al problema del mundo real. Y que para finalizar, el modelo debe ser validado mediante la comprobación de los resultados y la interpretación en cuanto a la situación original. Si el proceso de validación no arroja resultados satisfactorios, se debe repetir el proceso con una modificación o con un modelo completamente diferente. En el caso que el proceso de validación arroje resultados satisfactorios, se comunica la solución de la situación problemática del mundo real (Salett & Hein, 2004; MaaB, 2006, citado por Caroca, 2020, p. 15).

1.6.1.Modelación matemática

Villa-Ochoa (2017) señala que “en la Educación Matemática existe un creciente interés por la investigación acerca de la modelación y las aplicaciones matemáticas, así como por su integración en los currículos escolares”, esto se evidencia en el currículum nacional vigente. Además, agrega que:

> El interés se fundamenta en la presencia de los modelos y la modelación en diversas actividades sociales, su conexión con la tecnología y la preparación de los estudiantes en actitudes y competencias matemáticas, para el ejercicio de una ciudadanía responsable y para la participación en los desarrollos de la sociedad. (p.220)

Respecto a lo anterior, según (Salett y Hein,2004, citado en Caroca, 2020), “la modelación matemática permite a los alumnos mejorar la capacidad de lectura, de interpretación, de formulación de situaciones y de solucionar problemáticas” (p.16).

Para Villa-Ochoa (2017) el uso de la modelación matemática en la cotidianidad escolar, se argumenta porque:

> Puede constituirse en un ambiente para promover una participación de los estudiantes en actividades necesarias para el aprendizaje del discurso matemático escolar. También posibilita la motivación por el estudio de las matemáticas y la constitución de una imagen adecuada de las matemáticas en relación con su rol en la sociedad y la cultura; asimismo, además del conocimiento matemático, también promueve la producción de conocimientos de los contextos en los cuales se da la actividad de modelación. (p. 220)

Ejemplos de lo anterior se pueden encontrar en los modelos utilizados para describir fenómenos de la física, de la biología, tan frecuentes en los distintos niveles de enseñanza del sistema educativo. Por otro lado, Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo (2009) (citado en Caroca, 2020) “mencionan que la modelación matemática es una estrategia que permite el entendimiento de algún concepto matemático, más que una herramienta para construirlos, por lo que se prepara al estudiante para criticar y abordar problemas de un contexto real”. (p. 16)

Blomhoj (2004) (citado en Caroca, 2020), da cuenta de “tres argumentos a favor de la modelación matemática como elemento central en la enseñanza general de la matemática, aún desde edades tempranas”, las que se exponen a continuación:

- La modelación matemática es un puente entre la experiencia diaria de los estudiantes y la matemática, lo cual motiva el aprendizaje de la matemática y sitúa a ésta en la cultura, para poder describir y entender situaciones de la vida diaria.

- Colabora en el desarrollo de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos en sociedades altamente tecnológicas.
- Los modelos matemáticos están jugando roles importantes en el funcionamiento de las sociedades basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, se debe desarrollar las competencias necesarias para criticar esos modelos matemáticos y la forma en que son utilizados para la toma de decisiones, lo cual se convierte en algo idóneo para sociedades democráticas.
- La modelación genera estudiantes capacitados para desenvolverse en las diferentes sociedades, se convierten en ciudadanos críticos y autónomos que buscan mejorar el lugar el cual habitan. (pp. 16-17)

Estos argumentos elevan la modelación matemática a un estatus de imprescindible en la formación de los estudiantes, puesto que los beneficios que genera para su desarrollo en diversos ámbitos que la sociedad actual nos plantea, significan la entrega de una educación integral, relacionando al estudiante con su realidad, con su entorno en un sentido bien amplio.

Desde otra arista, “la función del profesor en el desarrollo del proceso de modelación es seleccionar situaciones y contextos que son de importancia para sus alumnos y afrontar ciertos momentos” Villa-Ochoa (2007)(citado en Caroca, 2020, p. 17) , (ver ilustración 2):

Ilustración 2: Momentos que debe afrontar el docente en el proceso de modelación, (Caroca, 2020)

Respecto a estos momentos, Caroca (2020) citando a Salett y Hein (2004)) señala que:

> El docente, en el proceso de modelación, cumple un rol fundamental debido a que es el encargado de desarrollar el contenido pragmático y cercano a la realidad de los estudiantes, a partir de los modelos matemáticos y es quien orienta a sus alumnos para que realicen un trabajo de modelación. En la cotidianidad escolar, la modelación se considera como un ambiente de aprendizaje asociado con el estudio, la problematización y la investigación de problemas no matemáticos por medio de las matemáticas (p. 223)

La revisión de literatura demuestra que existen varios enfoque y miradas respecto a la modelación, en este sentido Villa-Ochoa (2017) advierte de "la diversidad de enfoques y orientaciones de la modelación apoyan la idea de que no existe una comprensión homogénea de los modelos y la modelación, ni de las maneras en que se presentan en la cotidianidad escolar". Por su parte, Caroca (2020) recopila distintas persepectivas de modelación en educación matemática citando a Kaiser y Sriraman (2006) y Blomhoj (2008), menciona además que "es importante mencionar que tanto las tareas de modelación como la modelación no tienen las características de una única perspectiva, sino que se puede encontrar ciertos rasgos de cada perspectiva en ello".

Las perspectivas consideradas por los autores fueron resumidas de la siguiente formas:

- **Perspectiva Realista**: El enfoque principal de la perspectiva realista es lograr resolver problemas de la vida real a través de la modelación matemática. Según Huincahue (2017) (citado en Caroca, 2020), las tareas de modelación deben ser abordadas de tal manera que el énfasis se encuentre en la resolución del problema propiamente tal y no en el desarrollo de teoría matemática. Además de tener el énfasis en la resolución de problemas reales, Blomhoj (2008) (citado en Caroca, 2020) señala que, bajo esta perspectiva, las situaciones de modelación deben tener un enfoque interdisciplinar, esto es, que sea un aporte a la formación del estudiante y a la continuación de estudios de los educandos. Así, la modelación no solo debe ser de utilidad para el campo científico, en particular para la matemática, sino para el campo político, económico, entre otros.

- **Perspectiva Contextual**: La perspectiva contextual se centra en el desarrollo y diseño de tareas para modelar, si bien también tiene por objetivo resolver problemas de la vida diaria, su foco está en la situación de aprendizaje o actividades de modelación. El principio de "realidad" indica que la situación problemática diseñada debe ser significativa y, junto con ello, debe conectarse a las experiencias anteriores de los estudiantes.

- **Perspectiva Sociocrítica**: Los modelos matemáticos juegan un papel importante en el funcionamiento y formación de las sociedades, los cuales se utilizan para describir la brecha social y económica. Es por esto que Huincahue (2017) (citado en

Caroca, 2020) menciona que se debe realizar una crítica hacia estos modelos en función a problemáticas sociales. Es por esto que la crítica social se convierte en una característica principal de la perspectiva sociocrítica y es lo que la diferencia de las demás perspectivas de modelación. Por lo que los docentes, al realizar tareas de modelación, deben tener en consideración la crítica a la sociedad en la cual habitan sus estudiantes.

- **Perspectiva Educativa**: Según Blomhoj (2008) y Huincahue (2017) (citado en Caroca, 2020), existen tres argumentos principales para enseñar la modelación matemática como un elemento integrado en la educación general de la matemática bajo la perspectiva educacional. Según Blomhoj (2008), la perspectiva educativa tiene dos focos de interés:
  i. Integrar modelos en la enseñanza de la matemática como un medio para el aprendizaje de la matemática,
  ii. Desarrollar la competencia de modelación.

- **Perspectiva Epistemológica**: Para Huincahue (2017) (citado en Caroca, 2020) la perspectiva epistemológica tiene su centro en el desarrollo teórico de la situación problemática planteada, a saber, se vislumbra la matemática y la modelación como parte del desarrollo de la teoría (Kaiser & Sriraman, 2006) (citado en Caroca, 2020). Bajo la perspectiva epistemológica existe un objetivo teórico, el cual puede estar relacionado con cualquier área. Dicho objetivo es esencial a la tarea de modelación matemática, en donde es necesario matematizar.

- **Perspectiva Cognitiva:** La perspectiva cognitiva busca comprender qué funciones cognitivas se activan en los alumnos durante el proceso de modelación. Según Blomhoj (2008) y Huincahue (2017) (citado en Caroca, 2020) el objetivo de esta perspectiva es identificar las barreras que posee cada estudiante en el proceso de modelación y reconstruir todo el proceso cognitivo del alumno en el transcurso de la modelación. Para Guerrero-Ortiz y Mena-Lorca (2015) (citado en Caroca, 2020) los principales retos que se presentan al modelar una situación problemática no están precisamente relacionadas con los procesos matemáticos, sino tienen relación con la transición de la realidad al mundo de las matemáticas y, en sentido contrario, habiendo obtenido el modelo de la situación y su solución, con la reinterpretación en términos de la realidad. (p. 22-38)

- **Perspectiva socioepistemológica**, Caroca (2020), citando a Zaldívar (2016), se apuesta por la construcción social del conocimiento matemático, en donde se reconocen y delimitan los usos del conocimiento en determinadas situaciones, con el fin de que éste adquiera sentido y se pueda resignificar, a saber, identificar la funcionalidad del conocimiento matemático. Bajo esta perspectiva, antes de hablar de conceptos y/o definiciones matemáticas, se debe hacer énfasis en las prácticas sociales relacionadas con la conformación de dichos conceptos y/o definiciones.

1.7. Modelos de formación docente

Generar una mejora en el sistema educativo implica abordar diversos factores, entre ellos el factor docente, Tenorio et al. (2020) señala en su investigación que:

> Propiciar la mejora de los sistemas educativos requiere de acciones integrales que fortalezcan el desarrollo profesional de las y los docentes, considerando sus particulares contextos de desempeño. Diversos estudios muestran la importancia del "efecto" docente en la calidad de la educación y en la formación humana de niños y jóvenes. (p. 89)

En Chile, los procesos de acreditación de las carreras de pedagogía, además de instancias de formación continua promovidas por el Mineduc, dan cuenta de alguna forma sobre la importancia e interés en la formación docente. En Tenorio et al. (2020) se establece que:

> Mejorar la calidad de la formación docente está hoy en la agenda de la mayoría de los países. En Chile, en la última década se han considerado prioritarios distintos factores; entre los más relevantes están el aumento en el puntaje de ingreso exigido para las carreras de pedagogía, su acreditación obligatoria, fijación de estándares de egreso y programas de acompañamiento para profesores noveles. (p. 89)

> El desarrollo profesional docente, se fundamenta en los desafíos que enfrentan los establecimientos educativos, en la implementación del cambio estructural educativo, los cuales necesariamente deben ocurrir, a través de los principales actores, encargados de la ejecución de las reformas: Los docentes, en respuesta a una formación o desarrollo profesional que brinde respuestas a la necesidades actuales de los actores educativos: docente-estudiantes; con respecto a su experiencia de trabajo y a las distintas etapa del ejercicio docente (Rodríguez, Sánchez y Reyes, 2019 citado en Sanchez et al.,2021, p. 17-18).

Frente a esta necesidad constante en el desarrollo profesional docente, surgen variados modelos de formación que apuntan a un mismo fin, pero realizan caminos con diferentes orientaciones, en este sentido Sánchez et al.,2021(citando a Garcia (2020)), plantea que "un modelo de desarrollo profesional, debe ser constante y pertinente". Bajo esta mirada , para esta investigación se ha profundizado en tres modelos:

1.7.1. MTSK

Este modelo de formación fue propuesto en España,

> Un grupo de investigación de la Universidad de Huelva ha propuesto un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea

> necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. (Montes et al., 2013, p 404)

Carrillo el al. (2014) establece que el MTSK,

> Es un modelo analítico, de tipo descriptivo, adecuado para elaborar una interpretación del conocimiento especializado del profesor de matemática desde un punto de vista integral, que toma en cuenta las distintas naturalezas, tanto del dominio matemático, como del dominio de la didáctica del contenido matemático,(p. 16) .

Montes et al. (2013) establece que:

> El conocimiento especializado del contenido es entendido como aquel que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar su profesión, frente al conocimiento común del contenido, aquel que puede poseer cualquier usuario de la matemática en su labor profesional, como pudiera ser un ingeniero, físico, o biólogo. (p. 403).

Los mismos autores indican que el MTSK, está "basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas". (p. 404)
La Ilustración 3 contempla los subdominios del modelo que contempla las creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje.

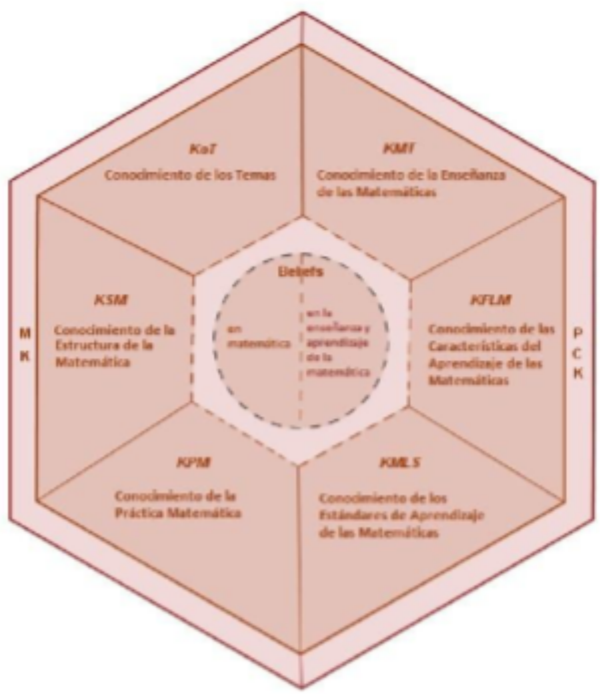


Ilustración 3: Subdominios del modelo MTSK, Montes et al., 2013 (p. 405)

Los subdominios relativos al conocimiento didactico y relativos al conocimiento didáctico del contenido son:

2. Conocimiento de los temas (KoT)
3. Conocimiento de la estructura matemática (KSM)
4. Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)
5. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)
6. Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)
7. Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS) (p. 405-406)

Para Flores-Medrano et al. (2016)

> Parece evidente el papel del profesor en el diseño y gestión del ETM idóneo que propicie el trabajo matemático de los alumnos. El conocimiento del profesor juega a su vez un papel central en dichas tareas, de modo que modelos analíticos que pongan el foco en la especificidad de la matemática nos ayudarán a comprender cómo se configura dicho ETM idóneo. En ese sentido, el MTSK, al servir de herramienta para comprender el conocimiento del profesor que sustenta sus acciones, nos parece adecuado para explicar parcialmente el ETM idóneo del profesor. (p. 218)

1.7.2. Reflexión - Acción

Actualmente los procesos reflexivos de los docentes son elementos fundamentales en su desarrollo profesional, se encuentran inmersos en su proceso de formación y de evaluación. Para Parada et al. (2011), "la reflexión de los profesores ha ganado un espacio especial en el campo investigativo de la matemática educativa", señala además que "La reflexión de los profesores de matemáticas se dirige a analizar su experiencia docente, antes, durante y después de la actividad que desarrolla en el salón de clase con sus estudiantes"(p.86)
Parada et al. (2011) diseñó un modelo de reflexión, establece que:

> Este modelo se construye alrededor de la actividad matemática que surge del triángulo pedagógico expuesto por Saint-Onge (1997, citado en Ibáñez, 2007), en el que identifica el vínculo entre el alumno y el profesor como mediación, el del alumno y el conocimiento como estudio, y el del conocimiento y el profesor como relación didáctica,(p.87).

El modelo de Parada et al. (2011) sugiere tener en cuenta cuatro aspectos que le permitan al maestro centrar su atención en elementos puntuales de su práctica docente:

- Los conocimientos matemáticos para la enseñanza (Ponte, 2000).
- Las formas de enseñar la materia (Shulman, 1987).

- Uso y selección de instrumentos, por el profesor, a partir de las ideas de Llinares (2000).
- El uso del lenguaje matemático, estudiado por Chevallard (1991). (p. 88)

El modelo propuesto consta de tres etapas de reflexión:

- La primera experiencia de reflexión.
- Reflexión sobre la acción mediante las herramientas de análisis.
- Nueva experiencia para la reflexión del caso de estudio. (p. 88-90)

Parada et al. (2011) indica además, que:

> Para que las reflexiones sobre los aspectos mencionados en cada uno de los procesos se realicen de manera crítica y objetiva, se hacen necesarios unos "lentes" que le permitan al maestro verse en el modo como trata el contenido que enseña, en la forma como lo enseña, en la manera como se ponen en juego los instrumentos en el aula y en cómo dar explicaciones y formalizar los conceptos estudiados en la clase. (p. 99).

La ilustración 4 presenta las etapas que involucran este modelo de formación docente.

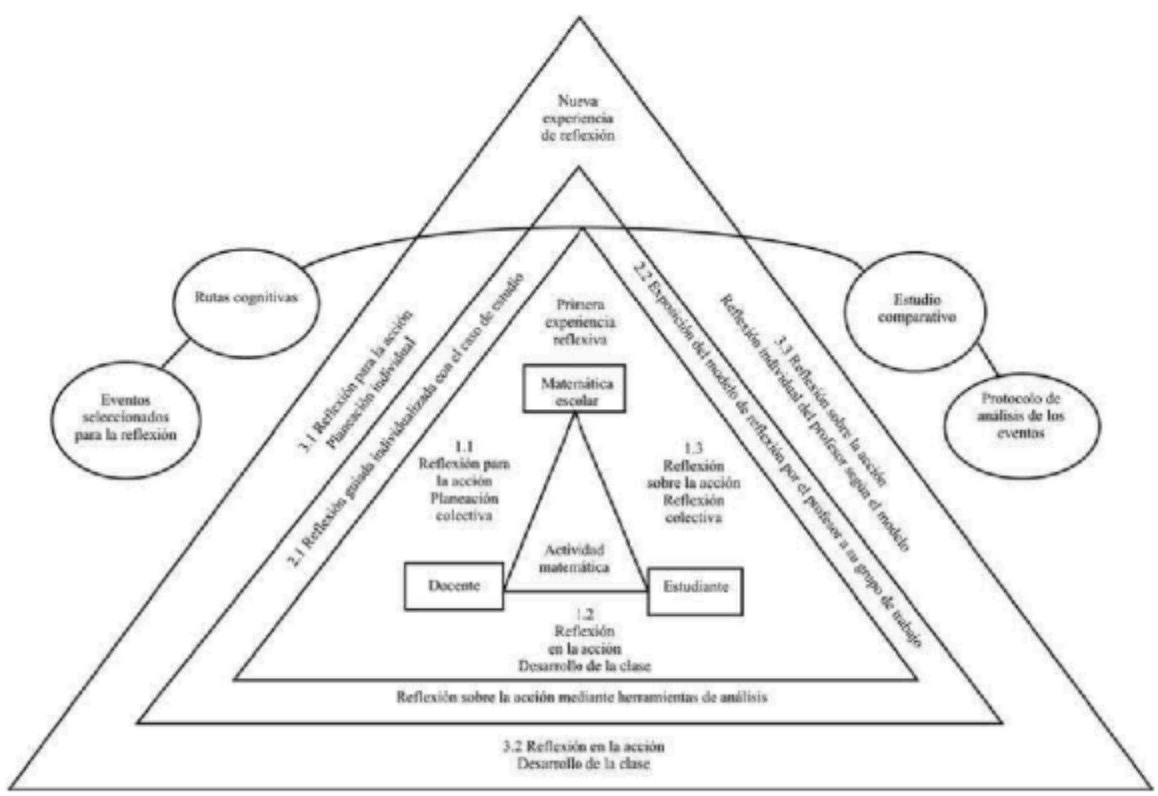


Ilustración 4: Etapas del Modelo Reflexión-Acción, Parada et al. (2011)

En Sánchez et al. (2021), se considera que:

> En la práctica docente, se debe reflexionar, lo que le otorga la construcción de conocimiento, desde la solución de las problemáticas educativas. En la acción reflexiva se articula el individuo y el contexto, desde la reflexión el docente evalúa de forma crítica sus valores, aspectos culturales y la gestión en el aula, para reformular, replantear o innovar el proceso de enseñanza. (p. 18).

1.7.3. Exclusión - Inclusión

En Silva-Crocci et al., (2015) considerando la dialéctica exclusión-inclusión contempla:

> La función social del profesor ha recaído en la transmisión de la cultura. Si bien este hecho no es negativo, debemos recordar que las culturas no son estáticas. Por tanto, el docente debe guiar a los estudiantes no sólo a aprender conocimientos específicos, sino también a transformar su realidad. (p. 947)

En la tabla 3 se presentan cinco categorías contrarias, las cuales se relacionan dialéctica exclusión-inclusión:

Discurso Matemático Escolar	*Construcción Social del Conocimiento Matemático*
Hegemónico	Pluralidad epistemológica
Utilitario	Funcional
Centrado en objetos	Centrado en prácticas sociales
Sin marcos de referencia	Transversalidad
Continuo y lineal	Desarrollo de usos

Tabla 3. Categorías para el análisis de la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p. 77)

Se establecen los siguientes criterios para describir cada una de las categorías:

1. La hegemonía se refiere a la supremacía de argumentaciones sobre otras. Esto no sólo quiere decir que se deben considerar las argumentaciones que el sujeto construye junto con sus pares, sino también nos referimos a las argumentaciones de donde emerge el conocimiento matemático. Por ejemplo, el caso de la función y la gráfica. En el dME la gráfica aparece como representación de una función, sin embargo, trabajos de investigación han planteado que la gráfica antecede a la función (como expresión analítica). Mientras que la pluralidad epistemológica es considerar las diferentes argumentaciones del conocimiento matemático, no sólo consideramos las diferentes argumentaciones que son propias de cada comunidad, contexto o situación, sino que además las diferentes argumentaciones que hacen emerger los objetos matemáticos para ser estudiados.

2. Lo utilitario se refiere al aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos para su utilización en determinada circunstancia, por ejemplo para aprender un conocimiento posterior, definido por la estructura de la dME o para determinada situación de la vida del sujeto. La enseñanza de la gráfica como la representación de una función, para entender las representaciones algebraicas. Por otro lado, la funcionalidad del conocimiento es intrínseca al contexto y la situación, es por esto que una de las características de la práctica social es el carácter funcional. En ese sentido emerge de una práctica del individuo en comunidad. Por tanto es funcional cuando se integra en la vida del sujeto y la transforma. Por ejemplo, en una comunidad de agricultores las unidades de medidas pueden tomar la forma que es más conveniente y que ha sido institucionalizada por el grupo humano.

3. La atomización de los conceptos se refiere a que el conocimiento se encapsula en saberes institucionales que soslayan los aspectos sociales, contextuales y culturales que permitieron su constitución y su difusión institucional. La centración en las prácticas sociales, desde la Socioepistemología, nos hacen entender a los saberes como el conocimiento puesto en uso. Las prácticas sociales son las encargadas de hacer emerger el conocimiento a través de las prácticas de referencia y las acciones que los sujetos desarrollan cuando construyen conocimiento.

4. El dME considera, en el mejor de los casos, los marcos de referencia solo como contextos para la aplicación, no como situaciones donde los conceptos y procedimientos matemáticos emergen. Hablar de transversalidad es considerar esos marcos de referencia donde el conocimiento se usa, no se aplica, en el sentido de que no se conoce el concepto primero para posteriormente utilizar.

5. La dialéctica entre el carácter lineal y acabado del conocimiento y el desarrollo de usos, se observa, cuando discursivamente se reconocen argumentos diferentes a los establecidos en el dME. El paso de la CSCM al dME, es decir el paso contrario, se

> observa cuando se consideran argumentos propios de la naturaleza de la situación pero se llega a concluir en el objeto matemático, para responder a esa linealidad de la organización institucional. Soto (2013), (p. 79-80).

En este contexto para Silva-Crocci et al., (2015) se establecen dos aspectos de esta dualidad:

- La idea de exclusión e inclusión nos acerca al fenómeno que vive el profesor de matemática ante el saber. Es necesario entender al dME como un sistema "de razón "que produce una "violencia simbólica" en los actores del sistema educativo (Soto y Cantoral, 2014). En otras palabras, el dME norma la práctica y las representaciones sociales de los actores, fundamentalmente a través de la imposición de significaciones, argumentaciones y procedimientos.

- Desde la CSCM hemos puesto la atención en los usos del conocimiento matemático, el carácter transversal, la pluralidad epistemológica, la centración en las prácticas sociales y la funcionalidad del conocimiento matemático. De esta forma los profesores al vivir una experiencia de profesionalización pusieron énfasis en estos y otros elementos. (p. 947)

Silver (1994) (citado por Soto (2013)), propone tres tipos ideales de enfoques analíticos que explican y definen, en cada caso, a la exclusión:

> Recoge la acepción de paradigma de Kuhn y los propone de la siguiente manera: Paradigma de solidaridad, de especialización y de monopolio. Cada uno de estos paradigmas atribuye a la exclusión una causa diferente, fundamentada en una filosofía política distinta: el republicano, el liberalismo y la socialdemocracia, respectivamente. (p. 36)

Soto (2013), expone que:

> El estudio de la exclusión como un fenómeno típicamente social es relativamente reciente, pero a su vez la difusión del término ha sido rápida, esto sumado al interés social por este tipo de fenómenos, ha generado una serie de marcos interpretativos que caracterizan a la exclusión y que al mismo tiempo reconocen la ineficacia de una definición única. En su investigación destacó dos aspectos del fenómeno: primero, entender a este fenómeno es dialéctico, por tanto es importante considerar la inclusión; y segundo, que en la pluralidad de los factores que la producen, la exclusión educativa ocupa un papel fundamental. (p. 40)

En Soto (2013), se plantea que:

> En la obra de Bourdieu y Passeron (2005) "La reproducción: elementos para una teoría del sistema de enseñanza". En esta obra los autores introducen el término "violencia simbólica" para describir "todo poder que logra imponer significaciones e imponerlas como legítimas disimulando las relaciones de fuerza en que se funda su propia fuerza" (Bourdieu y Passeron, 2005, p. 44). "La violencia simbólica es esa

> violencia que arranca sumisiones que ni siquiera se perciben como tales apoyándose en unas "expectativas colectivas", en unas creencias socialmente inculcadas" (Bourdieu, 1997, p. 173). (p. 43)

Los autores en Silva-Crocci et al., (2015) plantean que:

> Este modelo de formación docente se sitúa desde la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), lo que se traduce en ponerse en el lugar de las personas, en los usos de su conocimiento matemático, donde vive y se desarrolla, en la escuela, el trabajo y la ciudad. Que la ausencia de la inclusión de la gente ha generado un discurso Matemático Escolar (dME) que provoca fenómenos que trastocan la epistemología del conocimiento matemático. (p. 946)

Para Silva-Crocci et al., (2015), "el conocimiento del docente de matemática tendrá que ser la resignificación de su uso del conocimiento en la transversalidad de los escenarios a saber: la escuela, el trabajo y la ciudad". (p. 950)

1.8. Supuestos del trabajo, Pregunta de investigación y Objetivos

Supuestos del trabajo

La aplicación de una situación de modelación, enmarcada en la teoría socioespistemológica, que aborda el concepto de función a través de la experimentación de un fenómeno, contribuye a la resignificación de ésta por parte de docentes de matemática, puesto que promueve una perspectiva que disminuye el predominio de lo algebraico y releva la noción a la comprensión de fenómenos.

Pregunta de investigación

¿El docente de matemática resignifica el concepto de función mediante una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica?

Objetivo general

Aplicar una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica, para que el docente resignifique el concepto de función y para la validación del instrumento.

Objetivos específicos

- Identificar los significados existentes en el discurso docente, en relación al concepto de función.
- Aplicar una situación de modelación que aborda el concepto de función, utilizando un modelo basado en la teoría socioepistemológica.
- Contrastar los significados identificados en el discurso docente, respecto del concepto de función, con las opiniones que emergen posteriormente a la aplicación de la situación de modelación.

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1. Teoría socioepistemológica

¿Qué es una teoría científica de la matemática educativa?, Cantoral y Reyes-Gasperini (2014) pantean que "las teorías, en cualquier ámbito del conocimiento humano, juegan un papel preponderante en el intento por comprender al mundo en que vivimos y por eentendernos plenamente en él", para ellos las teorías son "simple y llanamente modelos para el entendimiento", señalan además, que "particularmente en el campo de las matememáticas se considera a una teoría como un conjunto de proposiciones cerradas bajo implicación y deducción lógica" (p. 92), para los autores:

> En términos amplios diremos que en el ámbito de la lógica matemática una teoría es un conjunto de fórmulas para ciertos axiomas y para todos los teoremas comprobables a partir de ellos. Esta breve caracterización de las matemáticas les ha permitido tratar con objetos (denominados objetos matemáticos) construidos a partir de axiomas, definiciones y proposiciones mediante el conocido pasaje que va de las conjeturas a los teoremas. La noción de objeto matemático emerge entonces, bajo esta acepción lógica, con una fuerte carga conceptual según la cual saber matemáticas es saber de sus objetos y de sus relaciones. (p. 93)

Cantoral en varias de sus investigaciones, expone lo que persigue la Teoría Socioepistemológica, por ejemplo:

Plantea que para la Teoría Socioepistemológica, el problema educativo no es el de la constitución de objetos abstractos, sino el de su significación compartida mediante el uso culturalmente situado.(Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014, 93)

Uriza (2015) indica que "la Teoría Socioepistemológica se ocupa del problema que plantea la constitución del saber matemático entre la población, sus constructos son elaboraciones con una fuerte base empírica". (p. 67)

Para Cantoral y Reyes-Gasperini (2014)

> El problema mayor en el ámbito educativo no es de la aprehensión individual de objetos abstractos, sino el de la democratización del aprendizaje, es decir, que los estudiantes, en tanto ciudadanos, disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas. (p. 93)

Lograr aquello, según Cantoral y Reyes-Gasperini (2014), "precisa ampliar nuestra idea de aula, de saber y de sociedad" así, "la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional" (p. 93).

En este sentido, Uriza (2015), indica que:

> En general, los estudios sobre el entendimiento en Matemáticas han sido la base para constituir al programa socioepistemológico, programa que se ocupa del análisis de los mecanismos de tránsito del conocimiento al saber. El paso del conocimiento al saber que experimenta un sujeto, sea este individual, social o histórico.

Cantoral y Reyes-Gasperini (2014), afirman que los inicios de la Teoría Socioespistemológica, puede encontrarse en la tesis: Un estudio de la formación social de la analiticidad... (citando a Cantoral, 1990), obra que según estos autores, es considerada "el fundamento de esta corriente de pensamiento que ahora denominan TSME" (citando a Cantoral, 2013). Agregan que también autores como Farfán (1993) y Cordero (1994) continuaron ampliando la problemática que involucra esta linea de investigación,

> La naturaleza de estas investigaciones delinearon desde entonces un programa de investigación que permitió el abordaje de una serie de problemas que no aparecían entonces de manera tan explícita en los escenarios de investigación en Matemática Educativa, al establecer un método de acercamiento a tales problemas en los que se estudiaban fenómenos de construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional, en los cuales se parte siempre de una problematización del saber. (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014, p.94)

Recogiendo situaciones que recrean la vida misma, tal cual lo detallan (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014), "emerge la primera afirmación del programa socioepistemológico: la Matemática, en tanto creación humana, recrea también a su manera la vida misma. El paso entonces del conocimiento al saber, debe satisfacer alguna necesidad fundamental". (p. 96)

Para Uriza (2015), "la expresión socioepistemología plantea en sí misma, una relación al saber, una analogía de naturaleza social que ubica al saber, en tanto construcción social del conocimiento", agrega que:

> Al introducir como objeto didáctico el saber matemático al aula, se producen discursos que faciliten la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza reduciéndose a temas secuenciados, con el fin de favorecer la formación de consensos. (p. 68)

Lo anterior se complementa con el hecho de que:

> Los discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema didáctico, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico, en esta teoría, de discurso Matemático Escolar (dME) y son vistos como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito didáctico. (Uriza, 2015, p. 68)

Gómez, Karla et al. (2014), afirman que:

> La falta de marcos de referencia no han permitido que los actores del sistema didáctico resignifiquen el conocimiento matemático. Debemos recordar que la matemática responde a diferentes disciplinas y ámbitos del conocimiento, es en el estudio de las diferentes situaciones y escenarios que encontraremos esos marcos de referencia que permitirán el rediseño del dME. Un elemento importante que se ha estudiado dentro de la Sociepistemología es la transversalidad del conocimiento para compensar esta carencia del dME. (p.1460)

Respecto a la socioepistemología, Cantoral y Reyes-Gasperini (2014) agregan que:

> La Socioepistemología tiene un aporte fundamental: modela la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, esto es, modeliza las dinámicas del saber o "conocimiento puesto en uso". Para lograrlo, fue necesario introducir la noción de uso, en contraste con la noción psicológica de adquisición por aprendizaje; se pasó del conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, es decir, al estudio del saber. (p. 97) y que la Socioepistemología responde a las preguntas: ¿qué es conocer?, ¿qué hacemos cuando construimos y usamos al conocimiento?, ¿cómo construimos nuestros sistemas conceptuales? (p. 98)

Es importante destacar qué, según plantea (Cantoral 2011, citado en Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014) "la Socioepistemología descansa en cuatro principios fundamentales. Sin tener una secuencia lineal, sino formando una red nodal", estos se describen a continuación:

El principio normativo de la práctica social:

> Este principio es el eslabón fundamental para el funcionamiento de la teoría. Se asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, como las generadoras del conocimiento. Se expresa en los planos individuales, colectivos e históricos. Es el producto de un análisis, no de una observación. Por tanto, la pregunta clave en este respecto es ¿qué produce la norma? La respuesta aceptada en la actualidad es que la norma es en sí misma un emergente social que regula al

desarrollo colectivo (p.99). La anidación de estas prácticas se observan en la Ilustración 3.

Ilustración 5: Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013, citado en Cantoral y Reyes- Gasperini, 2014)

- El principio de la racionalidad contextualizada enuncia que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza, 2009, citado en citado en Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014). La esencia de esta idea radica en entender que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural, es decir, "representativo de la sociedad en la que se gesta" (Crespo, 2007, p. 38, citado en Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014).

- El principio del relativismo epistemológico es el concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que, en todo caso, sólo poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia. En este principio los autores ejemplifican en el ámbito escolar: una visión determinista de la matemática escolar, no aceptaría como válidas más de una respuesta a un problema, sin embargo, las situaciones de aprendizaje propuestas por la Socioepistemología, privilegian la diversidad de las argumentaciones y considera a la Matemática como la herramienta que ayuda a la toma de decisiones, en donde la respuesta depende de la interpretación y argumentación del estudiante, considerándose, todas como válidas si sus argumentaciones son coherentes con su racionalidad.

- El principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada, considera para la epistemología genética, la acción es la base del desarrollo del conocimiento, la acción del sujeto sobre el objeto, de ahí derivan los significados construidos. De modo que el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos se personaliza y despersonaliza la apropiación, se significa al objeto.

En atención a los principios que guían la TSEM, el docente de matemática que se desenvuelve en el sistema educativo, puede generar herramientas que le permitan preparar un proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir del cual sus estudiantes alcancen sus objetivos de aprendizaje de manera significativa y le permitan transformar su realidad. En este sentido Cantoral y Reyes-Gasperini (2014), recogen elementos importantes dirigidos al docente, los que se resumen de la siguiente forma:

- Se abre para la comunidad educativa una posibilidad de intervención formidable. La matemática escolar es rediseñable con fines de aprendizaje.
- El matemático educativo entonces no sólo discute cómo enseñar, sino qué enseñar, a quién enseñar y cuándo enseñar.
- Un profesor que tome como saber teórico de referencia a la Matemática Educativa, no en el sentido de contenidos curriculares, sino que ante ciertos contenidos curriculares tome decisiones sobre argumentaciones y procedimientos que pondrían en juego sus estudiantes; atendiendo a sus racionalidades contextualizadas y al relativismo epistemológico correspondiente, podrá estar haciendo un rediseño de la matemática escolar. (p. 104)

Desde el punto de vista del estudiante, (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014) plantea que:

> La matemática escolar es vista por muchos alumnos como irrelevante y de poca utilidad en sus vidas profesionales. Las miran como una asignatura aburrida, repleta de técnicas y "trucos" difíciles de aprender y basadas en procedimientos adquiridos por repetición memorística. (p. 104).

Respecto a este punto, realizar un rediseño del dME daría la oportunidad de revertir o disminuir el impacto negativo de la asignatura de matemática sobre los estudiantes, generando un mayor interés en la construcción de su propio conocimiento, a partir de una vinculación con la matemática, como un camino que le permitirá comprender e interpretar su entorno.

Para (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014),

> Los estudiantes deben aprender matematizando, organizando y reorganizando su realidad, realidad que no se restringe a la Física, Biología o Sociedad sino a toda aquella realidad imaginable o razonable para los propios estudiantes. Por tanto, consideramos a la propia vida del estudiante como fuente del conocimiento y más ampliamente como fuente principal para la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad realidades a ser organizadas matemáticamente a la propia historia evolutiva, social y cultural de la especie humana. (p.105)

2.2. Discurso matemático escolar y el fenómeno de la exclusión

Para Uriza et al. (2015), "el libro de texto, como objeto cultural, es un medio a través del cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar" (p.10). En la educación chilena, las directrices del Ministerio de Educación (Mineduc) están dadas por las bases curriculares, mientras que los programas de cada asignatura y los textos de estudios que gratuitamente se entregan en los colegios, son la guía para el docente, orientándose en lo disciplinar, lo metodológico y lo didáctico. Es en este contexto, los textos escolares y sus guías didácticas juegan un rol fundamental en la preparación del proceso de enseñanza y aprendizaje, imponiendo las tendencias pedagógicas, didácticas, y las creencias de los autores y de las editoriales que sustentan dichos libros.

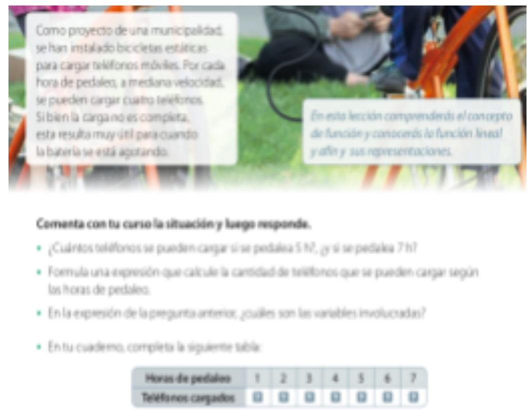
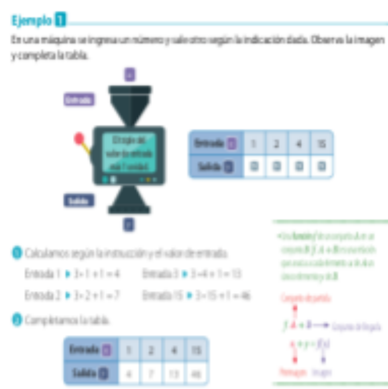
Uriza et al. (2015) plantea que:

> El dME subyace a lo inmediatamente visible, lo ostensible, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de aula, pero también a las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general. (p.14)

Particularmente, respecto al concepto de función es posible evidenciar la fuerte influencia de introducir la noción a partir de la metáfora de la "máquina", orientando el aprendizaje, fundamentalmente, a procesos algebraicos relacionados al concepto, plasmando en este primer contacto entre el estudiantado y el concepto de función, una fuerte influencia de lo simbólico y estructuras de dependencia.

Son varias las investigaciones que se han ocupado del dME para nociones específicas (Buendía, 2006, 2011; Cantoral 1990, Cantoral et al., 2006; Cordero, 2003, 2008; Farfán, 2012; Montiel, 2011; entre otras), citadas en (Soto y Cantoral ,2014), han evidenciado una serie de características que fueron analizadas extensamente en Soto (2010) (p. 1528), las cuales pueden reconocerse claramente en el texto de estudios vigente para 8º básico en la asignatura de matémática (Santillana, 2019), particularmente en la enseñanza del concepto de función (ver Tabla 4) :

Tabla 4: Características del dME

La atomización en los conceptos: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento. Como se aprecia en la Figura 1, la propuesta del texto contextualiza en base a una situación relacionada con un proyecto municipal, sin generar una real conexión entre el concepto y la realidad presentada.	 Ilustración 6.1: Extracto del texto (Santillana, 2019, p. 90)
El carácter hegemónico: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras. Las estructuras algebraicas predominantes en la presentación del concepto, respecto a otras representaciones. La Figura 2 presenta el primer ejemplo que aborda el concepto de función en el texto del estudiante, en el cual el predominio algebraico por sobre los otros registros queda en evidencia.	 Ilustración 6.2: Extracto del texto (Santillana, 2019, p. 91)
La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo: los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden. No existe la instancia de indagación, las estructuras y representaciones preconcebidas no dan al estudiante la oportunidad de proponer o experimentar	

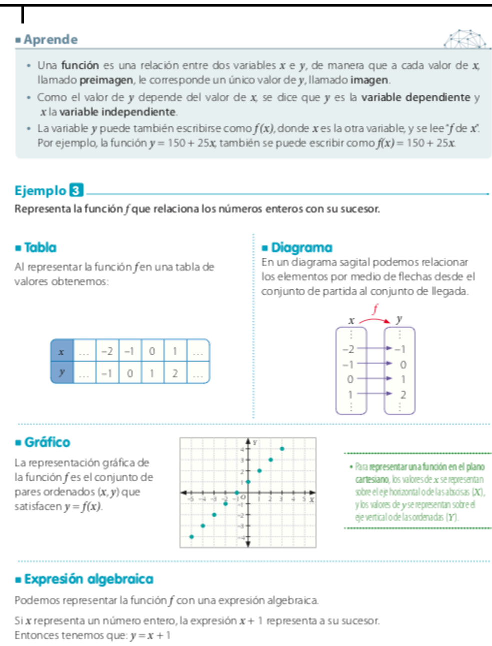
<table>
<tr>
<td>libremente. En la Figura 3, es un extracto del primer encuentro del estudiante con la definición de función y sus representaciones, sin mediar una mayor interacción o experimentación para deducirlas o relacionarlas.</td>
<td>
Aprende
• Una función es una relación entre dos variables x e y, de manera que a cada valor de x, llamado preimagen, le corresponde un único valor de y, llamado imagen.
• Como el valor de y depende del valor de x, se dice que y es la variable dependiente y x la variable independiente.
• La variable y puede también escribirse como $f(x)$, donde x es la otra variable, y se lee "f de x". Por ejemplo, la función $y = 150 + 25x$, también se puede escribir como $f(x) = 150 + 25x$.
Ejemplo 3
Representa la función f que relaciona los números enteros con su sucesor.
Tabla
Al representar la función f en una tabla de valores obtenemos:
x: … | −2 | −1 | 0 | 1 | …
y: … | −1 | 0 | 1 | 2 | …
Diagrama
En un diagrama sagital podemos relacionar los elementos por medio de flechas desde el conjunto de partida al conjunto de llegada.
Gráfico
La representación gráfica de la función f es el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen $y = f(x)$.
• Para representar una función en el plano cartesiano, los valores de x se representan sobre el eje horizontal o de las abscisas (X), y los valores de y se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas (Y).
Expresión algebraica
Podemos representar la función f con una expresión algebraica.
Si x representa un número entero, la expresión $x + 1$ representa a su sucesor. Entonces tenemos que: $y = x + 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>El carácter utilitario y no funcional del conocimiento: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.</td>
<td>En la propuesta del texto escolar este punto está totalmente ausente, no se aprecia una intención de brindarle un sentido al aprendizaje del concepto, más que la utilidad de representar situaciones.</td>
</tr>
<tr>
<td>La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.</td>
<td>En el texto no se aprecia la idea de un trabajo interdisciplinario que establezca una relación entre el concepto de función con otras áreas del saber, que permita entender la matemática como una herramienta integrada a su vida, a fin de que logren resignificar sus conocimientos, solo se percibe como una aplicación a otras áreas.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4: Fuente elaboración propia, basada en Soto, D. (2020)

"Por separado, cada una de estas características permite tratar al dME, mientras que, en su conjunto, brindan una información novedosa, pues permite reconocer y estudiar al fenómeno de exclusión" (Soto y Cantoral ,2014). Los mismos autores señalan que la forma de exclusión que expone su investigación se refiere a la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos asociados a los objetos matemáticos que ha promovido el dME, y cómo este genera violencia simbólica, la cual es posible apreciar en las ilustraciones anteriormente expuestas.

Esta violencia simbólica es dirigida tanto al estudiante como al docente, a partir del abuso simbólico generado a través del predominio algebraico en los textos, simbologías a veces incomprensible para estudiantes y docentes, a los procedimientos y argumentaciones impuestos a través de las orientaciones didácticas y lineamientos editoriales. ¿Tendrán las y los docentes, las herramientas para lidiar con esta exclusión y esta violencia simbólica?, ¿comprenderá el docente las posibles dificultades que se generan en el estudiante al procesar y entender el significado de esa simbología?.

Particularmente, el texto del estudiante y la guía didáctica del docente, encierran una serie de representaciones simbólicas que aluden a distintos tipos de representación de una función, todas ellas concentradas en una misma instancia, lo que desde la mirada de la Teoría Socioepistemológica y su estudio del dME, es un acto de violencia que atenta contra el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción función.

Es difícil suponer que un estudiante pueda apropiarse de todas esas concepciones a través del análisis de un único ejemplo, como lo plantea el texto actual, en el cual el estudiante participa realizando cálculos, pero es carente de experimentación, de análisis y por ende de la posibilidad de argumentar.

Soto y Cantoral (2014), hacen referencia al fenómeno de exclusión que provoca que tanto los docentes como los estudiantes, no puedan participar realmente de la construcción del conocimiento matemático, son excluidos del proceso.

> Es el propio conocimiento con fines didácticos el que impone significados y valida sólo un tipo de argumentación, lo que genera un tipo muy sutil de exclusión donde los actores del sistema educativo (estudiantes, profesores, padres, directivos, políticos etc.) son complices involuntarios debido a la legitimidad de la cual goza el sistema que lo produce. (p. 1533).

El sistema educativo Chileno impone los contenidos mínimos obligatorios que deben ser abordados en cada una de las asignaturas, entregando lineamientos sobre su enseñanza a través de programas, textos y guías didácticas. Es el docente que imparte las asignaturas quién debe reflexionar sobre las propuestas ministeriales y su pertinencia, ¿tendrán los docentes de matemática, las herramientas para proponer alternativas diferentes de enseñanza del concepto de función?, sin dudas está pregunta involucra varios aspectos a considerar, entre ellos el manejo disciplinar y el didáctico.

2.3. Rediseño del discurso matemático escolar

El discurso matemático escolar está cimentado en las instituciones que organizan lo que se va a enseñar, en el caso de Chile, en el Ministerio de Educación, ésta institución define los conocimientos que se van a impartir en cada disciplina, en cada área y asignatura. Gómez, Karla et al. (2014) plantean que:

> Diversas investigaciones desarrolladas en el seno de la comunidad de socioepistemólogos han reconocido y caracterizado al discurso Matemático Escolar (dME) como un constructo que permite modelar la génesis de la problemática que su programa académico latinoamericano busca atender. (p. 1458)

Es decir, lo que ellos como institución han definido como válido. Los mismos autores señalan que:

> En términos generales, se señala que este dME norma y legitima la construcción de la matemática escolar única y exclusivamente a través de los conceptos matemáticos. Esto en desmedro de la funcionalidad que juega la matemática escolar en la vida cotidiana de los ciudadanos. (p. 1458)

En la misma línea Cordero (2005) indica lo siguiente:

> Los sistemas educativos no han logrado hacer de la matemática un conocimiento funcional (en contraparte al conocimiento utilitario). Tal vez porque los modelos del conocimiento que ocupa la didáctica de la matemática están anclados al dominio matemático y en consecuencia a los conceptos del mismo. (p.477)

Mirar la forma en cómo se construye el conocimiento bajo los cánones de las instituciones, tiene como consecuencia, según Gómez, Karla et al. (2014), que la comunidad académica ha entendido que "justo lo que hay que estudiar y trastocar es el dME, pues es ahí donde se encuentra la génesis de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que aqueja a los ciudadanos". (p. 1459). También los autores indican que:

> La matemática escolar se ha fundamentado bajo un sistema de razón (sr) que norma las prácticas y las representaciones sociales de los actores del sistema didáctico. Este se caracteriza por ser hegemónico, utilitario, sin marcos de referencia que permitan resignificar la matemática, la centración en los objetos matemáticos y su presentación lineal y acabada. (p. 1460)

Las características dME, abordadas en el punto anterior, "en su conjunto hacen que el dME nos excluya de la construcción social del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica. Esta violencia se expresa en la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos matemáticos". (Gómez, Karla et al., 2014, p. 1460)

El rediseño del dME respecto al concepto de función, implica generar una propuesta que plantee una alternativa por un lado, a la violencia simbólica provocada por la imposición de la mirada fundamentalmente algebraica propuesta por el Mineduc a partir de la metáfora de la "máquina" y por otro lado, minimice la exclusión al proveer tanto a estudiantes como docentes de medios que permitan construir el conocimiento a partir de la resignificación del concepto de función bajo una construcción social.

Para atender esta próblemática, Cordero (2005) promueve en su investigación que para el rediseño del discurso matemático escolar, por una parte, se deben desarrollar situaciones didácticas donde la graficación juega el papel de argumentación matemática (citando a Cordero, 2003; Rosado, 2004; Campos, 2003; Domínguez, 2003) y fundamentar epistemologías donde la graficación es apreciada como una práctica social que genera conocimiento del Cálculo (citando a Cordero, 2003). (p. 478)

El uso de la gráficación se plantea como una alternativa de introducción del concepto de función a la vida del esudiante, "el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, puesto que nos ofrece indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla". (Cordero, 2005, p. 482)

En relación a lo anterior, Tellez y osorio (2010) argumentan que:

> Una situación de aprendizaje que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas de las funciones que ahí intervienen, contribuye a establecer relaciones entre gráficas y situaciones de cambio donde la variación tiene un sentido específico que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función. (p. 321)

Según lo anterior, y considerando la gran variedad de programas y software disponibles para realizar gráficas en celulares, tablets, computadores, el estudio de una función puede partir en torno a la argumentación respecto al comportamiento gráfico de un fenómeno asociado a su realidad, su posterior análisis de parámetros identificados, facilitan la construcción del concepto a partir de la experimentación y deducción, se concibe entonces la construcción social del conocimiento.

En este sentido la resignificación toma un rol fundamental, Cordero (2006) indica que:

> La resignificación es un concepto fundamental de la socioepistemología que manifiesta el uso del conocimiento en situaciones específicas. Por ello la naturaleza misma de la resignificación enfoca la atención a las prácticas sociales en oposición al efecto de centración de los conceptos. Por lo que la resignificación manifiesta no sólo el uso del conocimiento sino también su desarrollo que norma la práctica social, todo ello en oposición al desarrollo conceptual del conocimiento. (p.828)

Cordero (2006) agrega que:

> La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento

> en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes (citando a Cordero, en prensa (a)).

Cordero (2006) en su investigación se pregunta ¿Por qué el uso de las gráficas?, respecto a esto expone que:

> La gráfica como una representación de la función trata el desarrollo del concepto de función, pero no así el desarrollo del uso de la gráfica. Sin embargo, con el marco anterior, es decir, la resignificación, desarrollar los usos de las gráficas traería en consecuencia el desarrollo del concepto de función (p.828).
> En este mismo contexto el autor se plantea como pregunta: ¿Cuál es la relación entre el "discurso matemático escolar (dME)" y el "uso de las gráficas"?, a lo cual responde que " el dME y la categoría "uso de las gráficas" consiste fundamentalmente en oponerse al efecto de centración de los conceptos.

Cordero (2006) acota además, que:

> Vale la pena precisar que en la socioepistemología la práctica social como unidad de análisis no analiza a los participantes sino a los usos (y costumbres) de los participantes, porque lo que nos importa de los participantes son sus formas de constituir conocimiento. En ese sentido no estudiamos a las gráficas como una representación del concepto de función, sino los usos de las gráficas de los participantes. (p. 828)

2.4. Modelación desde la Socioepistemología

La Modelación desde su perspectiva socioepistemológica, constituye un elemento fundamental de esta investigación, puesto que sus características se ajustan a las necesidades planteadas en la problemática, puesto que entrega al docente que ejerce en el sistema educativo, una mirada respecto a la modelación, que se ajusta a la enseñanza del concepto de función.

Respecto a lo anterior, Huincahue (2017) (citado en Caroca, 2020) agrega que:

> La socioepistemología se enfoca en los contextos y las prácticas más que en los objetos matemáticos, con el propósito de que el conocimiento pueda transformar la vida de los ciudadanos, esto es, la socioepistemología pone su interés en la matemática funcional, es decir, aquel conocimiento matemático que debe ser integrado a la vida, reconstruyendo sus significados de manera permanente. (p. 30)

La perspectiva socioepistemológica se basa en 4 dimensiones (ver Ilustración 7)

Ilustración 7: Dimensiones perspectiva socioespistemológica, (Caroca, 2020)

Respecto a estas dimensiones:

1. La dimensión cognitiva hace referencia al ámbito del funcionamiento mental, como por ejemplo las representaciones o construcciones mentales de los conceptos.

2. Por su parte, la dimensión didáctica es propia de la conformación de sistemas didácticos, es decir, el estudio de los procesos de institucionalización de los conocimientos en el aula, considerando que el conocimiento se manifiesta a través de sus usos en diferentes contextos.

3. En cuanto a la dimensión epistemológica, es propia de la naturaleza y significados del pensamiento matemático, esto es, toma en cuenta la organización de los grupos humanos que llevan a construir el conocimiento matemático de una forma y no de otra.

4. Finalmente, la dimensión social permite ver el conocimiento matemático de manera funcional, situacional o histórica. (pp. 39-40)

Suárez y Cordero (2010) (citado en Caroca, 2020) promueven que "otro aspecto fundamental dentro de esta perspectiva, es el uso de las gráficas". Advierten que "existen evidencias de que el uso de las gráficas tiene un desarrollo que sustenta la construcción del conocimiento matemático" y, junto con ello, entregan tres datos epistemológicos:

- La gráfica antecede a la función, puesto que conforma elementos de construcciones para las ideas y se desarrolla de forma independiente o de forma paralela al desarrollo analítico de los conceptos.
- La gráfica es argumentativa, debido a que la gráfica pasa a ser un elemento central en las explicaciones.
- El uso de las gráficas tiene un desarrollo.(p. 40)

"Por lo cual, las gráficas pasan a ser un elemento de interés en la modelación matemática bajo la perspectiva socio-psistemológica" (Caroca, 2020, 40). Esto abre un espectro de posibilidades respecto a la enseñanza del concepto de función, en particular, presenta una alternativa a la metáfora de la "máquina" y propone un recurso que puede establecer un vínculo entre estudiante, realidad y tecnología, a través del cual se logre construir conocimiento y cimentar las bases de un concepto.

Para Caroca (2020), "en síntesis, la perspectiva socioepistemológica concibe la práctica social como generadora de conocimiento matemático, por lo que la modelación es vista como una práctica social", es decir, a partir de ella los estudiantes pueden comprender y describir distintas realidades.

La misma autora agrega además, que "la socioepistemología es una práctica humana que permite reconstruir el conocimiento matemático, a través de una matemática funcional. Las diferentes construcciones del conocimiento que se realizan dependen de la comunidad en que se encuentran los estudiantes", a través de la modelación matemática los docentes tienen la posibilidad de rediseñar el dME, resignificando el concepto de función a la realidad de su comunidad, utilizando la gráfica como un recurso que permita a los estudiantes describir su realidad a partir de argumentaciones y explicaciones que surgen desde la gráfica.

A partir de los aportes de Suárez y Cordero (2010) (citado en Caroca, 2020) es posible distinguir los indicadores de la perspectiva socioepistemológica, los cuales se presentan en la Ilustración 8:

Ilustración 8: Indicadores perspectiva socioespistemológica, (Caroca, 2020)

En este mismo sentido, Suarez (2106) indica que:

> Existen diversos elementos de construcción a tomar en cuenta si se quiere mirar a la Modelación desde una perspectiva socioepistemológica. La búsqueda de resignificación del conocimiento, la búsqueda de categorías de conocimiento, el rompimiento del carácter universal de la construcción y la formulación de nuevas acciones para el diseño de situaciones que modelen la actividad humana requieren de una aproximación sistémica. Los elementos didácticos, cognitivos y epistemológicos conforman una de las visiones sistémicas más aceptadas en la disciplina. (p. 493)

Complementando lo anterior, Pezoa y Morales (2016) plantean que:

> La Socioepistemología no considera a la modelación como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. Aquella se interesa en la modelación en Matemática Educativa como una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que

> al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático. (p. 57)

Las mismas autoras, citan a Cordero (2006) mencionando que “la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, sino una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión”. (p. 57)

Bajo todos los argumentos de los párrafos anteriores, la modelación bajo la perspectiva socioepistemológica, emerge con sus potencialidades, como una herramienta diferente a las propuestas en el currículum nacional, disponible para las y los docentes de matemática en la enseñanza del concepto de función, puesto que las características de la perspectiva socioepistemológica se ajustan perfectamente al constructo y su objetivo de aprendizaje.

2.5. Formación docente: Exclusión - Inclusión

“Desde la Socioepistemología la exclusión se ha reconocido a partir de las diferentes características del dME: el carácter hegemónico, la falta de marcos de referencia para resignificar la matemática, la atomización en conceptos, el carácter utilitario y acabado del conocimiento”, según la mirada de Soto (2013), mientras que “la inclusión del sujeto en la construcción del conocimiento, lo hemos caracterizado como aquello que nos permitiría democratizar el saber matemático, a saber: la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM)”. (p. 30)
Para Soto (2013),

> Una de las funciones sociales del profesor es la transmisión de la cultura, pero debemos recordar que las culturas no son estáticas, el docente debe ser capaz de guiar a los estudiantes a transformar también su cultura y realidad. Bajo el discurso que ha prevalecido en las ciencias y en particular la matemática, el profesor sólo ha podido reproducir e imponer una sola visión del conocimiento matemático, no se le ha formado para que lo trastoque, para que reconozca de él una construcción social. (p. 31)

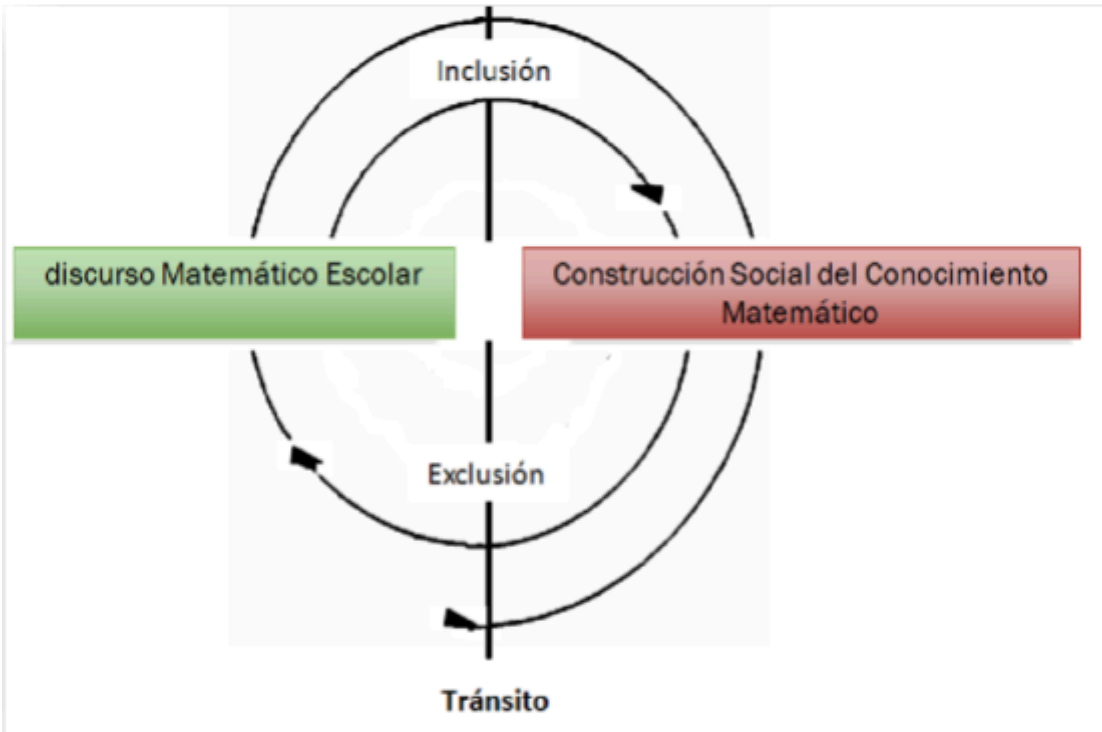


Ilustración 9: Modelo de la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p.32)

La mirada del fenómeno de exclusión- inclusión es dialéctica, por tanto, Soto (2016) considera que existe una lucha de contrarios: en este caso el *dME* y la *CSCM*, que permite el cambio y la transformación. En este sentido la resignificación de conceptos por parte del docente en formación se produce a partir del rediseño del dME (rdME).
Respecto a lo anterior un argumento para este rediseño aparece con el uso de la gráfica, Soto (2016) plantea en su investigación que:

> La gráfica usualmente en el *dME* aparece como la representación de una función, es decir, la gráfica siempre está vinculada con la idea de función algebraica (analítica). En ella se expresa la idea de la figura que representa a la función y sus características. Sin embargo, hemos documentado que el uso de la gráfica, tanto en su génesis histórica como en su funcionalidad cotidiana permite la construcción de conocimiento por sí sola. Lo que ha originado la construcción de una categoría para el conocimiento que debemos abordar: el *uso de la gráfica.* (p. 10)

En relación a la anterior, la autora expone elementos importantes para esta investigación, los que se detallan a continuación:

- El nacimiento de esta categoría tiene su origen en asumir que la graficación es una práctica social (Cordero, 2001; Cordero y Solís, 2001, Domínguez, 2003; Cordero y Flores 2007; Rosado, 2004: Morales y Cordero, 2014; entre otros).
- Existe evidencia que desde el comienzo de la historia de la humanidad han existido formas gráficas que le permitían al hombre desarrollarse y comunicarse.
- En la escuela, el universo de gráficas que debemos conocer es amplio y constituye una red de conocimientos.
- Para la perspectiva socioepistemológica la gráfica no sólo vive en la escuela, sino además en otros escenarios.
- Se ha analizado el *uso de la gráfica* en diversas situaciones específicas, por ejemplo: el uso de la gráfica en la situación de linealidad del polinomio. Rosado (2004) pone en escena una situación para resignificar el concepto de derivada, a través del comportamiento tendencial de las funciones. Esto es de suma importancia, ya que si bien la resignificación es de un objeto matemático, el núcleo central, "la función", no es considerada tradicionalmente como un objeto o proceso matemático, sino como una práctica; una instrucción que organiza comportamientos. Al resignificar el concepto de función, la derivada también se resignifica. (p. 10-11)

Soto (2016) "considera la categoría *uso de la gráfica* como un eje del rediseño del dME desde la *CSCM"*, promueve elementos a partir de los cuales se pueden "reconocer nuevas las argumentaciones, significaciones y los procedimientos que permiten hacer emerger el conocimiento matemático en la escuela y fuera de ella" (p. 12), planteando de esta forma una propuesta interesante e innovadora para orientar al docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular, del concepto de función.

Soto (2016), destaca de los resultados obtenidos de su tesis doctoral, lo siguiente:

> Tres elementos se conjugan para hacer funcionar esta dialéctica en torno al conocimiento matemático.
> - La confrontación entre argumentaciones durante la situación específica.
> - La interacción entre argumentaciones, significaciones y procedimientos que emergen de la situación.
> - La institucionalización-resignifición como mecanismos que nos permiten transitar en la dialéctica.
>
> Mientras que la economía como principio en la construcción de situaciones, la jerarquización del pensamiento matemático y el empoderamiento del profesor son condiciones que propician el tránsito. (p. 9)

Estos tres elementos señalados por la autora, son el eje fundamental para el rediseño del dME y su transformación en CSCM, conforman los ingredientes fundamentales para que este modelo de formación docente pueda provocar un cambio interno que fomente la generación de otra mirada a la enseñanza de la matemática, fundamentada en los usos y en el rol social que ella intrínsecamente conlleva.

Capítulo 3. Metodología y Diseño

3.1. Fundamentos del diseño

La metodología elegida para esta investigación es de tipo cualitativa, para Loayza-Maturrano Faustino (2020), "la investigación cualitativa se enfoca en la comprensión de los fenómenos y puede centrarse en significados, percepciones, conceptos, pensamientos, experiencias o sentimientos" (p. 57). El amplio espectro de elementos que esta metodología incorpora, la hace propicia para los propósitos que esta investigación persigue a través de sus objetivos. Este tipo de metodologías, examina cómo o por qué ocurre un fenómeno. Recopila datos en forma de palabras, textos o imágenes a través de entrevistas, observaciones, fotografías o revisiones de documentos" (Loayza-Maturrano, 2006) citado en Loayza-Maturrano Faustino (2020).

Sumado a lo anterior, se adopta una perspectiva metodológica cualitativa, por las características presentadas por Vasilachis (2005) citado por Schenkel y Pérez (2019), "la investigación cualitativa implica una forma de pensar, una manera particular de acercamiento al objeto de estudio que busca descubrir lo nuevo antes que verificar lo conocido, permitiendo comprender la complejidad, destacar las particularidades, innovar y crear conocimiento" (p.228). Lo anterior se condice con los lineamientos presentes en la esta propuesta de investigación, considerando las entrevistas como elemento fundamental en la recolección de información que dará vida a los resultados que emerjan de esta.

Por otra parte, el gráfico 1, muestra que en la revisión de literatura que apoya esta investigación, destaca la perspectiva cualitativa en la mayoría de los estudios contemplados, lo que sustenta aún más la elección.

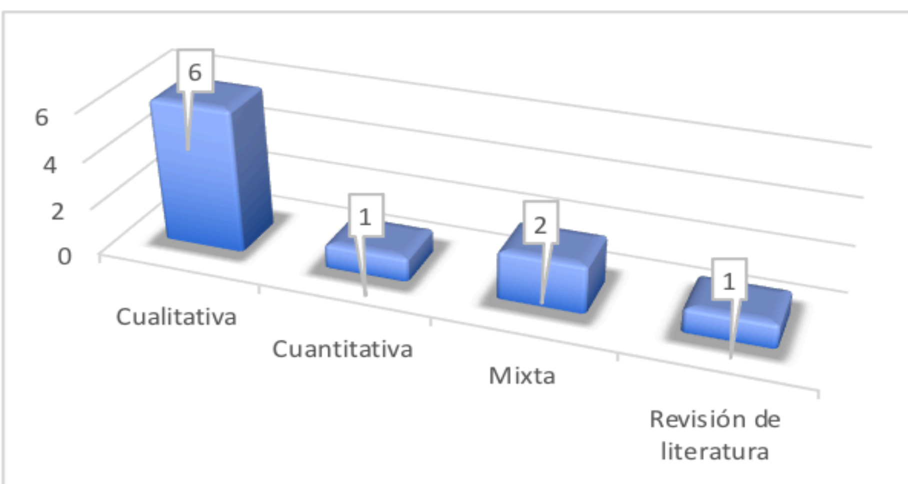


Gráfico 1: Resumen de las perspectivas de la revisión de literatura, elaboración propia

La Tabla 5 contempla el resumen y clasificación de articulos en la revisión de literatura.

Base de Datos	Cantidad de Resultados	Cantidad de Articulos Seleccionados
Web of Science	817	12
SciELO	5.122	2
Scopus	255.688	1
Total	261627	15

Tabla 5: Resumen y clasificación de artículos en la revisión de literatura, elaboración propia.

Schenkel y Pérez (2019) plantea que:

> La investigación cualitativa se interesa por la vida de las personas, por sus subjetividades, por sus historias, por sus experiencias, por sus interacciones, por sus acciones y por sus sentidos, interpretando a todas las personas de forma situada en el contexto particular en el que se desarrollan. A partir de esas realidades locales, intenta comprender los contextos y procesos que le dan origen, pero sin desvincularlos de estas situaciones particulares. El estudio de estas diversas experiencias sociales requiere de un diseño particular en su abordaje. (p. 229)

Este planteamiento, aporta más argumentos de la elección de la perspectiva cualitativa, en cuanto a que las entrevistas que se realizarán a las y los docentes de matemática serán individuales y recogerán las impresiones y vivencias personales de cada uno.

Por las características de la perspectiva metodológica escogida y por el hecho de que la literatura revisada, chilena y extranjera, no atiende la problemática aludida en esta investigación el alcance será exploratorio, lo anterior se apoya en lo expuesto por Ramos-Galarza (2020) quien indica que: “En el alcance exploratorio, la investigación es aplicada en fenómenos que no se han investigado previamente y se tiene el interés de examinar sus características”.

Además el mismo autor expone: "Por la propia naturaleza de la investigación exploratoria, en este nivel no es posible realizar el planteamiento de una hipótesis, puesto que todavía no se tiene la suficiente información como para realizar proyecciones sobre el fenómeno de interés". (p. 2)

3.2. Elección de la muestra

La muestra está integrada por 3 docentes de matemática que ejercen en el nivel 8º Básico. Los participantes de la investigación, fueron escogidos intencionalmente, usando como criterios de inclusión lo siguiente:

- Ser docente de matemática.
- Ejercer en el nivel 8º Básico.
- Tener título para ejercer en enseñanza media o tener postítulo en matemática para docentes que ejercen en segundo ciclo de enseñanza básica.

La revisión de literatura realizada, evidencia que estudios relacionados se focalizan fundamentalmente en profesores en formación o estudiantes, lo que se aprecia en el gráfico 2. Esta investigación incorporará a profesorado en ejercicio con al menos 1 año de experiencia en el nivel 8º Básico, puesto que es interesante analizar si la experiencia laboral tiene algún impacto en el reconocimiento del dME y en el proceso de resignificación.

Grafico 2: Clasificación de los sujetos participantes de las muestras

Se han establecido los requisitos anteriormente expuesto bajo la premisa de que la investigación atiende un fenómeno relacionado a la educación matemática y está enfocado en docentes en ejercicio que realizan clases en el nivel 8º básico.

La finalidad de esta investigación es propiciar la resignificación de la noción de función por parte del docente, evidenciada a partir de la confrontación entre el dME, que emerja por parte del docente en la entrevista inicial, y la CSCM que se espera evidenciar en la entrevista final, generada a través de la aplicación del rediseño de una situación de aprendizaje.

Lo anterior pretende provocar una reflexión en el docentes, que se transforme en una alternativa para el proceso de enseñanza aprendizaje de la noción de función, vista como la modelación de fenómenos, considerando así, una propuesta diferente a la metáfora de la máquina, que es la protagonista actual en el sistema escolar de Chile.

3.3. Recopilación de datos

Dado que la metodología elegida para esta investigación es de tipo cualitativa y de alcance exploratorio, la recopilación de datos se realizará a partir del método de estudio de casos, Chaves (2012) citando a Yin (1989), expone lo siguiente:
Uno de los más renombrados investigadores, manifestó sobre el estudio de casos en la metodología de investigación como “una investigación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo en su contexto real, donde los límites entre el fenómeno y el contexto no se muestran de forma precisa, y en el, que múltiples fuentes de evidencia son utilizadas”. (p. 142)
Frente a lo anterior, el estudio de casos es una metodología adecuada para esta investigación, Chaves (2012), citando a Villarreal y Landeta (2007) resume lo siguiente:
Que el estudio de casos es uno de los métodos más apropiados para aprender la realidad de una situación, en los que se requiere explicar relaciones causales complejas, realizar descripciones de perfil detallado, generar teorías o aceptar posturas teóricas exploratorias o explicativas, analizar procesos de cambio longitudinales y estudiar un fenómeno que sea, esencialmente, ambiguo, complejo e incierto. (p. 143)

Finalmente, Chaves (2012), en este mismo contexto, señala que “Las funciones del estudio de caso pueden ser varias de acuerdo a lo que él investigador quiere desarrollar”. Manifiesta citando a Yin (2009) que se distinguen tres finalidades distintas para las que los estudios de caso:

- Los estudios descriptivos de casos, pretenden describir un fenómeno puramente. Por ejemplo, un proceso o evento, para responder a "qué", "quién", "dónde" y "¿Cómo (muchos)" preguntas.

- Los estudios de caso explicativos tienen la intención de investigar y explicar las características del fenómeno con mayor profundidad, por ejemplo, sus interrelaciones, al preguntar "cómo" y "por qué".
- Los estudios exploratorios de casos se aplican a explorar campos totalmente nuevos de la investigación cuando el investigador sólo tiene pocos antecedentes o no (por ejemplo, los marcos, la teoría), como para explicar el fenómeno focalizado.

Esta última finalidad se agrega como fundamento para la elección de este método como herramienta de recopilación de información para esta investigación.

3.4. Resguardo ético de la investigación

Para asegurar el resguardo ético de la información aportada por los docentes de matemática participantes de la investigación, respecto de sus datos personales, opiniones y datos recogidos producto de la investigación, cada participante de la muestra tomará conocimiento del resguardo de la información, teniendo claridad de los objetivos que persigue la investigación y salvaguardando el respeto de derechos y responsabilidades.

Los documentos que serán considerados son:

- Consentimiento informado de cada participante.

3.5. Diseño de la Investigación

Por las características del proyecto de investigación, la perspectiva cualitativa y el alcance exploratorio de éste, se ha escogido un diseño de tres fases, en las cuales participaran, en forma individual tres docentes de matemática que ejercen en el nivel 8º básico. Cada una de las fases tributan a un objetivo específico, lo que propiciará el análisis de resultados para la concreción del objetivo general.

La síntesis del diseño (ilustración 10), presenta el esquema de las fases en que se desarrollará la investigación:

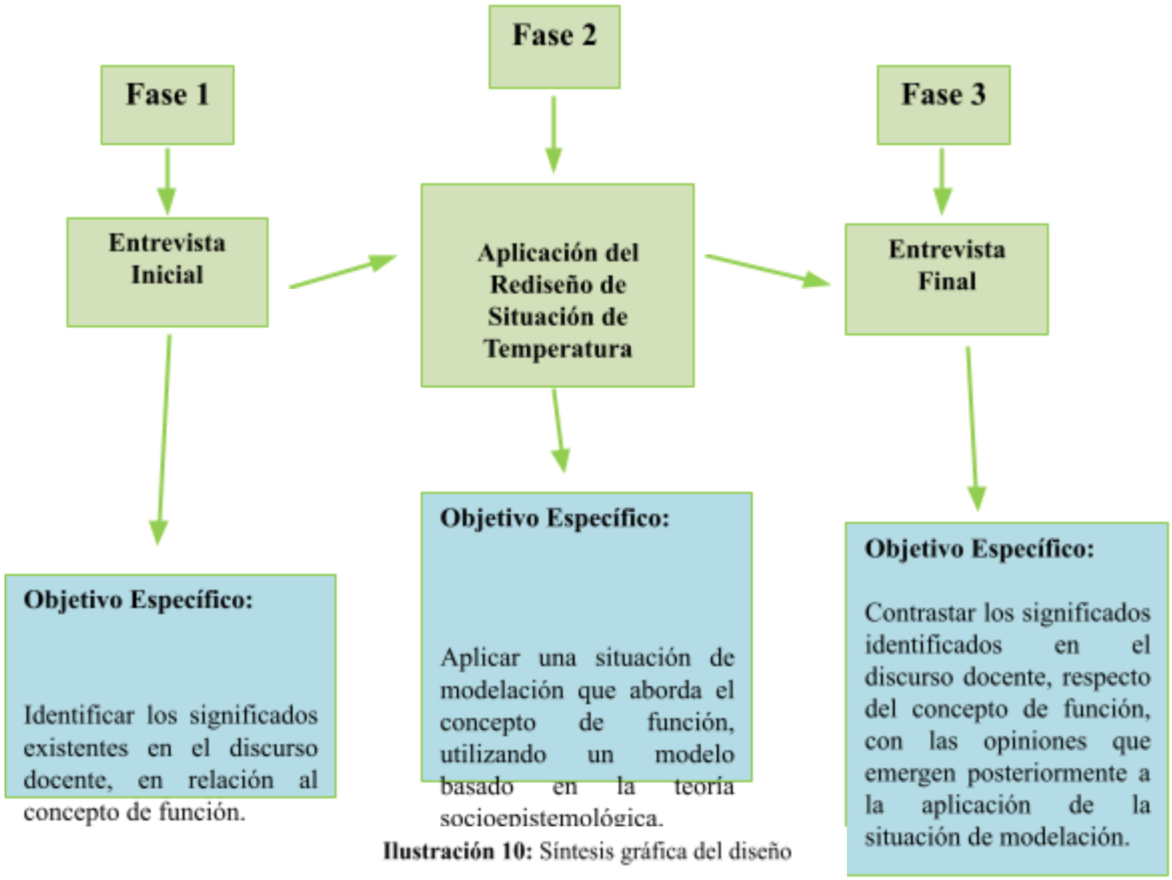


Ilustración 10: Síntesis gráfica del diseño

Las fases que contempla esta investigación, se describen a continuación:

3.5.1. Fase 1: Entrevista Inicial

Taylor y Bogdan (1987), "para un investigador cualitativo todas las perspectivas son valiosas, busca un comprensión detallada de las perspectivas de otras personas".

Para Rojas (2019), "la investigación cualitativa se configura de manera pertinente para la Educación. Permite aplicar y proponer mejoras continuas a la estructura de la realidad social emergente de la formación de estudiantes, docentes y comunidad educativa". El mismo autor, plantea que "la información emerge de la boca de los propios agentes educativos (narradores) destacando su naturalidad e independencia de datos respectos del investigador.

Taylor y Bogdan (1987), plantean que “las entrevistas cualitativas son flexibles y dinámicas, han sido descritas como no directivas, no estructuradas, no estandarizadas y abiertas”. Se agrega también, “el entrevistador avanza lentamente, trata de establecer rapport con los entrevistados” y “realiza las entrevistas en situaciones específicamente preparadas”.

Considerando todos los antecedentes anteriores, se realiza una entrevista semiestructurada. La entrevista se realiza en una sala del colegio donde trabajan los docentes participantes, cuidando que el ambiente sea el propicio para no ser interrumpidos y que se sientan cómodos en un espacio familiar para ellas(os).

La entrevista inicial corresponde al primer encuentro individual con las(os) docentes participantes, antes de comenzar y para generar un ambiente propicio de comunicación, se señala a las(os) participantes, que las respuestas no serán evaluadas de ninguna forma, por lo que no existen respuestas correctas ni incorrectas, se les explica cual es el objetivo de la entrevista y se establece una breve conversación sobre los contenidos que están trabajando actualmente en sus curso, solo con la finalidad de que logren bajar la tensión de ser entrevistadas(os)

Parte 1 de la entrevista inicial:

Para el resguardo ético y el resguardo de la elección de docentes participantes, se les consulta sobre los siguientes aspectos:

1) Accede a que sea grabado el audio de la conversación.
2) Sobre su título profesional.
3) Si ejerce actualmente en el nivel 8º básico
4) Sobre los años de experiencia en el nivel 8º básico

Parte 2 de la entrevista inicial:

Para alcanzar una comprensión detallada de los significados existentes en el discurso matemático escolar de las(os) docentes participantes se plantean una serie de preguntas, cuyas respuestas se analizan a fin de que puedan ser enmarcadas en la confrontación del dME – CSCM, las categorías utilizadas y sus respectivas preguntas se presentan a continuación, en Tabla 6:

Tabla 6: Preguntas para la confrontación dME y CSCM en Entrevista Inicial

Categorías	**Preguntas**
Categoría 1: Definiciones y representaciones	
dME: Hegemónico/ CSCM: Pluralidad Epistemológica	1) ¿Cómo y dónde aprendió el concepto de función? 2) ¿Cómo define el concepto de función? 3) ¿Qué entiende por dominio y recorrido de una función?, ¿Por qué debe enseñarse? Preguntas auxiliares: ¿Qué rol cumple el dominio y el recorrido en la noción de función? 4) Al enseñar el concepto de función, ¿Por qué son importantes las representaciones?, ¿Cuál considera más relevante? 5) Para preparar sus clases relacionadas al concepto de función: ¿Qué recursos pedagógicos utiliza?, ¿De dónde los obtiene?, ¿Utiliza material del MINEDUC, como texto del estudiante, guía didáctica, material digital?
Categoría 2: Enseñanza	
dME: Utilitario / CSCM: Funcional	6) Respecto al concepto de función, ¿Qué es lo que considera más importante que sus estudiantes aprendan?, ¿Cuál es su foco principal? 7) ¿Qué tipo de funciones involucra al momento de enseñar el concepto de función?, ¿Cree usted que es posible incorporar otros tipos de funciones, diferentes a la lineal? 8)¿Para qué el estudiante debe aprender el concepto de función?, ¿Por qué considera usted que es relevante?, ¿Por qué está en el currículum nacional?

Categoría 3: Estrategias	
dME: Centrado en el objeto / CSCM: Centrado en las prácticas sociales	9) ¿Qué estrategias utiliza en la enseñanza el concepto de función?, ¿Utiliza, por ejemplo, la metáfora de la máquina? 10) En el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ¿Qué es para usted la modelación?, ¿Qué rol cumple para usted la modelación?
Categoría 4: Contextos	
dME: Sin marcos de Referencia / CSCM: Transversalidad	11) ¿Considera que los contextos que utiliza para enseñar el concepto de función son relevantes para las y los estudiantes?, ¿son significativos para su comprensión?

Tabla 6: Preguntas para la confrontación dME y CSCM en Entrevista Inicial, elaboración propia, basada en el análisis de la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p. 77)

Finalmente, a modo de reflexión por parte del docente, la entrevista se cierra con la pregunta: ¿Cree usted que existen elementos, relacionados a la noción función, que usted quisiera perfeccionar o profundizar como docente?. Si bien la respuesta a esta pregunta no estará enmarcada en alguna categoría, es interesante en el contexto de esta investigación, conocer las percepciones del docente, respecto de las preguntas planteadas, sus propuestas y si la entrevista ha movilizado alguna reflexión en torno a la noción de función.

3.5.2. Fase 2: Aplicación de la Situación de Modelación

La idea de una situación de modelación, surge de la revisión de literatura y la realización de actividades en una de las asignaturas del Magíster, Análisis Didáctico matemático. En estos escritos se promovieron elementos interesantes de ser considerados en una propuesta de enseñanza del concepto de función, tales como, experimentación, observación y argumentación en torno a un fenómeno del cotidiano, elementos importantes que no son considerados actualmente en las propuestas ministeriales y que pueden constituir un enriquecimiento a lo ya existente respecto a la enseñanza de la noción de función.

Para Mendes (2017), la modelación es lo que hace posible a un grupo humano construir explicaciones de su realidad, tomar decisiones y desarrollar sus construcciones, de manera que no es ajena al ser humano, ni a la situación en la que sucede.(p. 1047).

Por otro lado, Soto (2013) afirma que la observación de los fenómenos ha desarrollado en los sujetos la capacidad de construir conocimientos y reflexionar acerca de lo acontece a su alrededor, este es el principio de la actividad creadora.

Considerando estos aspectos dentro de la situación de modelación, se decide realizar el rediseño del taller "Frio o caliente", taller que presentó Andrés Ruíz Esparza, en su tesis de Magister realizada en el año 2014, en la Unidad Zacatenco, dirigida por el Dr. Francisco Cordero Osorio, generando así la Situación de Temperatura que se utilizó en esta investigación.

¿Por qué este taller? Lo atractivo de este taller es que incorpora un elemento cotidiano y transversal dentro de la experimentación, la temperatura, que no necesita mayor contexto para familiarizarse con ella. Además, permite hacer uso de tecnología disponible, en este caso calculadora, laboratorio portátil y sensores de temperatura, con la finalidad de observar en tiempo real las gráficas que se producen a lo largo de la experimentación, promoviendo el análisis, la anticipación y la argumentación en torno a ellas.

Al taller original se le agregó un momento que tiene relación con la formalización de la noción de función, la cual se pretende que emerja a partir de los argumentos obtenidos de la experimentación y observación de las gráficas producidas.

3.5.3. A priori Situación de Modelación

En esta situación de aprendizaje se explora la noción de función y sus elementos asociados a partir del uso de la gráfica. Para lograr este propósito los docentes participan de una situación de modelación a partir de la variación de temperatura. El uso de la gráfica promueve el surgimiento de los elementos matemáticos asociados al concepto de función, confrontando así el uso de la metáfora de la máquina para alcanzar este propósito.
El diseño plantea 6 momentos, en los cuales los docentes realizan distintos procesos, tales como: experimentación, deducción, formalización, entre otros.

Situación de Temperatura

Momento 1: Tu cotidiano

¿Dibuja el cambio de algo frío a caliente o de caliente a frío?

El propósito de este momento es conectar al docente con elementos simples y cotidianos relacionados a los cambios de temperatura, que conecte estas situaciones con vivencias reales y cotidianas. De esta manera estamos enmarcando esta experiencia con situaciones de la vida que son comunes, en general, para la mayoría de las personas.

Momento 2: De Uso de la Curva

Para estudiar las temperaturas desarrollaremos el siguiente experimento:

Se tienen dos sensores de temperatura, y tres tazas con agua de diferentes temperaturas (caliente, templada y fría). Los sensores permanecerán por segundos en las distintas tazas, el registro de sus temperaturas se reflejará en un monitor, el cual presentará una gráfica y una tabla para cada sensor.

Cada sensor estará identificado por un color en la pantalla del monitor y en un inicio partirán desde tazas diferentes, uno del agua caliente y el otro del agua fría.

Durante el experimento los sensores permanecerán en distintas tazas (a veces en la misma), serán cambiados en distintos instantes (a veces en el mismo momento), el propósito es que en la pantalla del dispositivo que genera la gráfica y tabla obtenidas de las mediciones que registran los sensores, se aprecien diferentes comportamientos de la temperatura, en los distintos instantes de tiempo.

a) Observa el cambio de los sensores, al llevarlos de una taza a otra y observa las gráficas producidas.

Esta instancia, tiene como propósito que el docente pueda, a través de la observación reconocer los diferentes comportamientos de los sensores, identificar el comportamiento según el cambio de taza que se le aplique a cada sensor. Que logre identificar los distintos comportamientos, las formas en que crecen o decrecen, las tendencias a estabilizarse y comportarse de manera constante.

b) ¿Puedes identificar los sensores de acuerdo a sus gráficas?

Mediante la observación el docente debe reconocer la taza de inicio para cada sensor y cual es el color de la gráfica que se generó a partir de los cambios que se aplicaron.

c) ¿Dónde terminó el sensor que empezó en el agua caliente?

El docente debe reconocer la gráfica asociada al sensor que partió en el agua caliente e identificar según el comportamiento de la gráfica cuál es la taza en la que terminó este sensor.

d) ¿Y qué pasó con el otro sensor?¿Puedes describir el movimiento que desarrolló de taza en taza?

El docente identificará el sensor que parte en el agua fría, por la temperatura inicial que registra, luego deberá describir los comportamientos según los cambios del sensor a distintas tazas. Dependiendo de la taza, deberá reconocer cuando la tendencia de la curva se dirija a las temperaturas altas, o bajas o medias y se espera que reconozca los cambios de taza correspondientes.
Un factor importante de estas gráficas es el hecho de que no se aprecian líneas rectas como tal, pero si es posible observar distintas formas de crecimiento y decrecimiento, así como tendencias al comportamiento constante.

e) ¿En algún momento los sensores midieron la misma temperatura? Fundamenta tu respuesta.

El docente debe a partir de la identificación de puntos de intersección de las gráficas, reconocer que en algunos instantes de tiempo (segundos), ambos sensores alcanzaron la misma temperatura.

Momento 3: De Análisis de la tabla

Este momento permite indagar los resultados del experimento a partir de otra forma de representación de la información. La organización de la información en tabla permite realizar observaciones de valores de tiempo y temperatura más precisos, también permite establecer la necesidad de cada representación dependiendo del uso que se quiera dar a la información.

a) En la tabla producida por el experimento, puedes decir cual es la temperatura del agua caliente.

El docente revisará la tabla y observará la variación de temperatura del agua caliente, identificando la temperatura más alta alcanzada y como los otros valores del agua caliente se parecen a este valor máximo. También debe deducir, que al pasar del agua fría a la caliente, el sensor demora unos segundos para alcanzar esta temperatura máxima. Puede hacer también la reflexión de que el gráfico le permite observar estos elementos de una manera más rápida, quizás menos precisa, pero sí aproximada.

b) En algún instante del tiempo transcurrido, ¿el sensor marcó, a la vez, dos o más temperaturas diferentes? Fundamenta tu respuesta.

Se espera que el docente reflexione que es imposible, ya que en cada segundo el sensor va marcando una única temperatura, que podría incluso ser la misma en cada segundo, pero que a cada segundo se le asocia una única temperatura.

c) Puedes señalar en qué tiempo las temperaturas de los sensores fue la misma, aproximadamente, ¿en que segundo(os)?

El docente al observar la tabla revisará los tiempos e identificará dos temperaturas muy similares y deberá reconocer que se produce aquello en los instantes de tiempo en que las gráficas se intersectan.

d) ¿Qué pasará si dejamos los sensores fuera de todas las tazas?

El docente haciendo un análisis del comportamiento gráfico de los sensores, debe argumentar que la tendencia de ambos será estabilizarse hasta alcanzar la temperatura ambiente del lugar, por lo tanto, la gráfica tendrá un comportamiento paralelo al eje horizontal, mantenido la temperatura constante a lo largo del tiempo.

Momento 4: De Anticipación

La intención de este momento es realizar la simulación de un experimento con el fin de que el docente sin ver la gráfica y sin ver una tabla, pueda imaginar el comportamiento de las temperaturas que alcanzará el sensor y pueda anticipar en su mente este comportamiento.

Hagamos otro experimento:

Supongamos que se tiene una pistola con silicona, un trozo de papel de aluminio y un sensor de temperatura.
Se coloca en el papel de aluminio un poco de silicona caliente y sobre ella el sensor, luego se envuelve el sensor con la silicona en papel aluminio.

a) ¿Qué va a pasar con la temperatura?

El docente deberá describir que el sensor a medida que transcurren los segundos, irá elevando su temperatura, hasta alcanzar un máximo, luego se estabilizará en ese valor manteniendo un comportamiento constante, hasta que la silicona comience a enfriarse y alcance la temperatura ambiente.

b) ¿Cómo será la gráfica que va a proporcionar el sensor? Dibuja tu propia gráfica.

Se espera que la gráfica que dibuje el docente, comience con una curva ascendente que refleje el aumento de la temperatura del sensor, luego la curva tiende a estabilizarse en el valor máximo de temperatura, para luego comenzar a descender hasta alcanzar la temperatura ambiente y volver a la tendencia constante.

c) Compara tu propia gráfica con la obtenida en el experimento real.

Se presenta al docente la gráfica obtenida a través del comportamiento del sensor en el experimento real. Así podrá verificar si lo que imagina y anticipa es efectivamente lo que sucede.
Se espera que a partir de experimentación anterior, el docente logre realizar una gráfica similar a la real, considerando la experiencia adquirida en la actividad anterior.

Momento 5: De Reversión

Este momento tiene como propósito realizar el proceso inverso al realizado inicialmente. A partir de una gráfica dada el docente debe describir el comportamiento de los sensores al ser cambiados de taza, se pretende que el docente intérprete en este contexto el comportamiento de las temperaturas registradas.

Observa las siguientes gráficas y posteriormente describe el experimento que las originó.

Se presenta la gráfica del comportamiento de las temperaturas de tres sensores en un período de tiempo medido en segundos. El docente deberá identificar los cambios de tazas y la temperatura del agua de cada una de ellas.

Momento 6: De la Formalización

Después de explorar el comportamiento de las temperaturas de dos sensores en un período de tiempo, a partir de las gráficas producidas, se espera que los docentes respondan algunas preguntas que los conduzcan al concepto de función y el reconocimiento de elementos asociados, tales como dominio y recorrido y logre establecer una definición para este concepto

En los momentos anteriores hemos explorado, fundamentalmente a través de la gráfica, el comportamiento de la temperatura del agua en un período de tiempo.

a) El tiempo expresado en segundos, ¿para qué valores del eje horizontal tienen sentido?¿Cómo se relaciona el tiempo con el concepto de función?

Se espera que el docente reconozca que el tiempo medido en segundos tiene sentido para valores positivos y cero, no necesariamente enteros, puesto que tienen sentido también en cifras decimales. Por otro lado, respecto a la relación de este eje con el concepto de función se espera que reconozca en él no solo la variable independiente, sino también el dominio de la función.

b) La temperatura ubicada en el eje vertical, expresada en grados Celsius, ¿Para qué valores tiene sentido? ¿Cómo se relaciona la temperatura con la noción de función?

Se espera que el docente reconozca que la temperatura medida en grados Celsius tiene sentido para valores positivos, negativos y cero, no necesariamente enteros, puesto que tienen sentido también en cifras decimales. Por otro lado, respecto a la relación de este eje con el concepto de función se espera que reconozca en él no solo la variable dependiente, sino también el recorrido de la función.

c) ¿Cómo se relacionan la temperatura del agua con el tiempo transcurrido?

Se espera que el docente establezca una relación de dependencia de las temperaturas respecto del tiempo, pero también podrían establecer que el tiempo depende de la temperatura. Para establecer la relación que oriente la definición de función se establecen las preguntas del siguiente punto.

d) ¿A cada temperatura (en grados Celsius) se le puede asociar, siempre un único instante de tiempo?

Se espera que se señale que una misma temperatura puede estar asociada a más de un instante de tiempo.

e) A cada instante de tiempo (en segundos), ¿Cuántos valores de temperatura se le pueden asociar?¿será esto relevante para la noción de función?

Se espera que el docente establezca que a cada segundo se le asocia una única temperatura, incluso en distintos instantes de tiempo (en distintos segundos) la temperatura podría ser la misma, pero ello no se contrapone al hecho de que esta temperatura sea única para cada segundo. También debiera argumentar la relación de esta variable con el dominio de la función y reconocer la condición para establecer la función, que a cada elemento del dominio (tiempo) se le asocia un único elemento en el recorrido (temperatura).

f) A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, es posible estructurar la noción de función y elaborar una definición. ¿Cuál sería esa definición?

El docente puede establecer diversas definiciones para la noción de función que, como: una relación de dependencia entre variables, que, a los valores de la variable independiente, es decir, a los valores del dominio de la función, se le asocia un único valor en la variable dependiente, es decir, se asocie con un único valor en el recorrido de la función.

Esta definición conlleva a que la única relación entre las variables, que se puede establecer como función, es la que plantea que la temperatura del agua dependerá del tiempo transcurrido.

g) ¿Cómo simbolizaría esta relación llamada función, contextualizada al experimento de los sensores de temperatura? ¿Qué representa esta simbología?

Se espera que el docente utilice la simbología tradicional $f(x)$, *se orientara para que utilice, por ejemplo, la simbología* $t(s)$, *y que esta signifique que la variable temperatura* t *depende de la variable tiempo* s *medida en segundos.*

Así formalmente podrá simbolizar la función temperatura, por ejemplo, de la siguiente forma:

$$t: [0, \infty[\to R$$
$$s \to t(s)$$

El objetivo es comprender que para representar una función podemos utilizar cualquier letra o símbolo, que lo importante es comprender el significado de cada uno de ellos, su interpretación.

h) Considere la función temperatura, asociada a uno de los sensores, elabore una tabla, que incluya la estructura de pares ordenados. Considere solo 5 valores de tiempo.

La intención de este punto es que el docente comprenda que, desde la gráfica de una función, que presenta una idea global del comportamiento de un fenómeno, podemos llegar a información más precisa de éste, más puntual, al identificar pares ordenados.

s *(segundos)*	$t(s)$ *(temperatura)*	$(s,\ t(s))$

3.5.4. Fase 3: Entrevista Final

En la fase final, también se realiza una entrevista semiestructurada, la cual se lleva a cabo en un tercer encuentro con los participantes, esta entrevista se realiza en forma individual. Se desarrolla en una sala del colegio donde trabajan los docentes participantes, resguardando nuevamente que el ambiente sea el propicio para no ser interrumpidos y que se sientan cómodos en un espacio familiar para ellas(os).

Antes de comenzar la entrevista, nuevamente se intenta generar un ambiente propicio de comunicación, se señala a las(os) participantes, que las respuestas no serán evaluadas de ninguna forma, por lo que no existen respuestas correctas ni incorrectas.

Las preguntas correspondientes a la entrevista final, son las mismas que se utilizaron en la entrevista inicial, solo la primera pregunta está modificada con una mirada en retrospectiva, a diferencia de la instancia inicial que consideraba la perspectiva presente del docente respecto al concepto de función.

La entrevista finaliza con una pregunta que recoge la reflexión de los docentes participantes, en relación al proceso vivido a través de las entrevistas y aplicación de la situación de aprendizaje.

En esta fase se contrastan las opiniones y respuestas posteriores a la aplicación de la situación de modelación, se utiliza las preguntas de la entrevista inicial, solo se adecua la primera pregunta, con la finalidad de que tenga más sentido en una instancia posterior a la aplicación de la situación de modelación. La tabla 7 contiene las preguntas de la entrevista final:

Tabla 7: Confrontación dME y CSCM en Entrevista Final

Categorías	**Preguntas**
Categoría 1: Definiciones y representaciones	
dME: Hegemónico/ CSCM: Pluralidad Epistemológica	1) ¿Cómo le habría gustado que le enseñaran el concepto de función? 2) ¿Cómo define el concepto de función? 3) ¿Qué entiende por dominio y recorrido de una función?, ¿Por qué debe enseñarse? Pregunta auxiliar: ¿Qué rol cumple el dominio y el recorrido en la noción de función? 4) Al enseñar el concepto de función, ¿Por qué son importantes las representaciones?, ¿Cuál considera más relevante? 5) Para preparar sus clases relacionadas al concepto de función: ¿Qué recursos pedagógicos utiliza?, ¿De dónde los obtiene?, ¿Utiliza material del MINEDUC, como texto del estudiante, guía didáctica, material digital?
Categoría 2: Enseñanza	
dME: Utilitario / CSCM: Funcional	6) Respecto al concepto de función, ¿Qué es lo que considera más importante que sus estudiantes aprendan?, ¿Cuál es su foco principal? 7) ¿Qué tipo de funciones involucra al momento de enseñar el concepto de función?, ¿Cree usted que es posible incorporar otros tipos de funciones, diferentes a la lineal?

	8)¿Para qué el estudiante debe aprender el concepto de función?, ¿Por qué considera usted que es relevante?, ¿Por qué está en el currículum nacional?
Categoría 3: Estrategias	
dME: Centrado en el objeto / CSCM: Centrado en las prácticas sociales	9) ¿Qué estrategias utiliza en la enseñanza el concepto de función?, ¿Utiliza, por ejemplo, la metáfora de la máquina? 10) En el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ¿Qué es para usted la modelación?, ¿Qué rol cumple para usted la modelación?
Categoría 4: Contextos	
dME: Sin marcos de Referencia / CSCM: Transversalidad	11) ¿Considera que los contextos que utiliza para enseñar el concepto de función son relevantes para las y los estudiantes?, ¿son significativos para su comprensión?

Tabla 7: Preguntas para la confrontación dME y CSCM en Entrevista Final, elaboración propia, basada en el análisis de la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p. 77)

Para finalizar la fase 3, entrevista final, se realizan preguntas de cierre, las cuales tienen cómo finalidad, conocer desde la perspectiva del docente participante, si el proceso en cual ha participado, ha movilizado algo en él(ella), respecto a la noción de función.
Las preguntas son las siguientes:
¿Cree usted que ha cambiado o se ha ampliado su perspectiva respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción?, ¿Quisiera usted perfeccionar algún conocimiento o estrategia en relación a la enseñanza de la noción?.

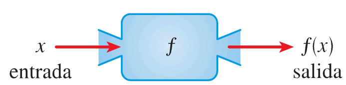
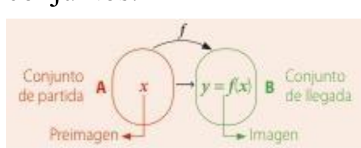
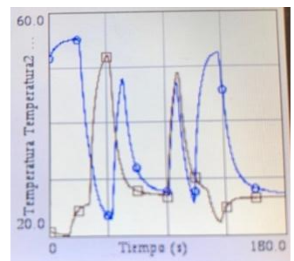
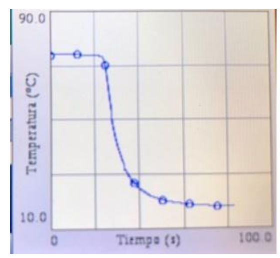
Capítulo 4. Análisis y Resultados

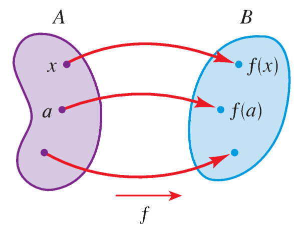
Para realizar el análisis de las respuestas a las preguntas planteadas en las entrevistas inicial y final, se utilizará la combinación de 2 elementos, los cuales se detallan a continuación:

4.1 Tablas para el análisis identificación del dME y la CSCM

Se ha elaborado la Tabla 8, basada en la dialéctica Exclusión - Inclusión Soto (2014), a través de la cual se clasificaron las respuestas dadas por los docentes, en cada una de las preguntas planteadas en las categorías presentada en el capítulo anterior, con la finalidad de determinar si las respuestas se ajustan al dME o a la CSCM.

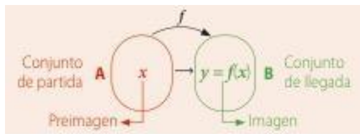
Preguntas	**dME**	**CSCM**
Categoría 1: Definiciones y representaciones	Hegemónico	Pluralidad Epistemológica
1) Inicial: ¿Cómo y dónde aprendió el concepto de función? 1) Final: ¿Cómo le habría gustado que le enseñaran el concepto de función?	Como una maquina, relación, relación entre conjuntos (diagrama), En la escuela, liceo, colegio, preuniversitario, universidad, etc. Aprendo a través de la práctica docente en base a los instrumentos ministeriales.	Como la modelación de un fenómeno, interpretación de situaciones. Como la comprensión de situaciones del entorno. A partir de varios enfoques, entre ellos la experimentación y/o la modelación.
2) ¿Cómo define el concepto de función?	- Como una maquina transformadora, donde ingresa un número y sale otro:  	Introducir el concepto de función a partir de la modelación de una experimentación o situación del cotidiano: - Analizando el comportamiento gráfico que se observa de la relación entre las variables independiente (ubicada en

	(Pag. 66 texto del estudiante 2024). Aproveche la instancia que ofrece el **ejemplo 2** para relacionar el concepto de función con el de una máquina en la que se ingresan valores, esta los opera matemáticamente y libera otros. Proponga a sus estudiantes que ellos creen nuevas operaciones para la máquina, luego llévelos a representar esto algebraicamente, con ayuda de una tabla de valores. **Desarrollo del pensamiento** Explique a sus estudiantes que en una función cada preimagen tiene una única imagen. Para comprender esto, pregunte: • si ingresamos el número 1 a la máquina del ejemplo, ¿qué resultados podemos obtener?, • ¿es posible obtener un resultado distinto al 2 cuando ingresamos el número 1? (Pag. 110 guía del docente 2024).  (Pag. 143 Precalculo Stewart) - Como una relación entre conjuntos.  (Pag. 66 texto del estudiante 2024). Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B ($f: A \rightarrow B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.	el eje x) y la variable dependiente (ubicada en el eje y), asociadas a la situación. Por ejmplo, la situación de temperatura con dos sensores o la situación con la pistola de silicona.   En base a las gráficas, identificar que cada valor de la variable independiente (eje x), se asocia con un único valor de la variable dependiente (eje y). Por ejemplo, en cada instante de tiempo se puede registrar una única temperatura. Entendiendo así, el concepto de función:

	(Pag. 66 texto del estudiante 2024).  (Pag. 143 Precálculo Stewart) Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B. (Pag. 143 Precálculo Stewart) Como la relación entre variables. “Una función es una relación entre dos variables x e y números racionales de manera que cada valor de x, llamado primagen, le corresponde un único valor de y, llamado imagen” (Pag. 67 texto del estudiante 2024) Como la relación entre variables una dependiente y otra independiente. “Como el valor de y depende del valor de x, se dice que y es la variable dependiente y x la variable independiente”.	Como la modelación de un fenómeno. Como la interpretación de situaciones del cotidiano.

	(Pag. 67 texto del estudiante 2024) Defina el concepto de función apoyándose en la información del recuadro Aprende y explique en la pizarra la diferencia entre los conjuntos de partida y de llegada, de los cuales provienen la preimagen y la imagen, respectivamente. (Pag. 111 guía del docente 2024).	
3) ¿Qué entiende por dominio y recorrido de una función?, ¿Por qué debe enseñarse? Pregunta auxiliar: ¿Qué rol cumple el dominio y el recorrido en la noción de función?,	Como un conjunto de partida y uno de llegada. Sirven para entender que número se conecta con otro. “Se llama dominio de una función *f*(*Dom*(*f*)) al conjunto de valores que la variable *x* puede tomar, es decir, el conjunto de las preimágenes”, “Se llama recorrido de una función *f* (*Rec*(*f*)) al conjunto de las imágenes *y*, es decir, todos los valores que resultan al reemplazar los valores del dominio en la función *f*”. (Pag. 69 texto del estudiante 2024) Dominio como el conjunto desde donde se toma un número para ser transformado y el recorrido aquel conjunto donde están las transformaciones. Se enseña para entender la transformación. Como el conjunto de las preimágenes y el conjunto de	En base a la gráfica, o a una tabla de valores asociada a la modelación de una experimentación o situación del cotidiano, identificar como el dominio de la función, aquellos valores para los cuales tiene sentido la variable independiente (ubicada en el eje x), y como el recorrido de la función, aquellos valores para los cuales tiene sentido la variable dependiente (ubicada en el eje y). Por ejemplo, en la situación de temperatura es posible identificar, a través de la gráfica, que el dominio corresponde a los valores que asume la variable tiempo (eje x, variable independiente), la cual tiene sentido, para valores positivos y cero.

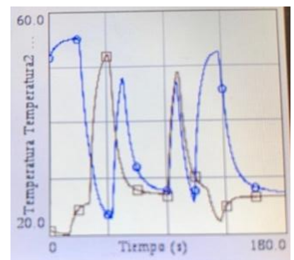
las imágenes. Se enseña a conectar dos conjuntos en un diagrama.



(Pag. 66 texto del estudiante 2024).

Como el conjunto donde están las x y el conjunto donde están las f(x) respectivamente. Se enseña para identificar un par ordenado en el eje coordenado.

Mientras que el recorrido, variable temperatura en grados Celsius, tiene valores entre 20 y 55 grados, en este caso, los valores del recorrido se pueden observar un poco más detallados a través de la tabla.



	Tiempo	Temp.	Temp.2
81	40.0	26.2	28.
82	40.5	26.2	28.
83	41.0	26.2	28.
84	41.5	26.2	28.
85	42.0	26.2	28.
86	42.5	26.2	28.
87	43.0	26.2	28.
88	43.5	26.2	28.
89	44.0	26.2	28.

(extracto tabla de valores)

Así, se puede entender el concepto de dominio y recorrido:

Como los conjuntos numéricos donde tienen sentido las variables involucradas en la modelación de una experimentación o situación del cotidiano.

		Cómo los valores que pueden asumir las variables asociadas a un fenómeno que pueda ser modelado a partir de una función.
4) Al enseñar el concepto de función, ¿Por qué son importantes las representaciones?, ¿Cuál considera más relevante?	Porque el estudiante debe transitar entre ellas. Todas son importantes. Porque se modela las situaciones transitando en cada una de las representaciones. Se enseña primero la álgebraica para el uso de la metáfora de la máquina.	Porque son necesarias para interpretar y comprender situaciones y fenómenos. Porque a través de ellas se pueden comprender situaciones del cotidiano, del entorno modeladas a partir de una función. Porque a través de ellas se pueden modelar situaciones y así comprender el entorno. Ninguna se considera más relevante que otra, la representaciones que se utilicen dependerá de lo que se requiera abordar en la situación o fenómeno o lo que se requiera observar y de la información que se posea.
5) Para preparar sus clases relacionadas al concepto de función: ¿Qué recursos pedagógicos utiliza?, ¿De dónde los obtiene?, ¿Utiliza material del MINEDUC, como texto del estudiante, guía didáctica, material digital?	Recursos ministeriales tales como texto del estudiante, guía didáctica, material en línea del MINEDUC. Recursos específicos del colegio. Textos clásicos de cálculo.	Material de elaboración propia. Adecuación de recursos ministeriales. Recurrir a material que encuentro disponible en línea o en plataformas libres y lo adapto a mis objetivos propuestos.

	Recurrir a material que encuentro disponible en línea o en plataformas libres. Elaboro material propio bajo las indicaciones de los programas ministeriales.	
Categoría 2: Enseñanza	Utilitario	Funcional
6) Respecto al concepto de función, ¿Qué es lo que considera más importante que sus estudiantes aprendan?, ¿Cuál es su foco principal?	Los conceptos y definiciones. Que realicen correctamente los cálculos numéricos y procesos algebraicos en las transformaciones. Que resuelvan problemas relacionados a la representación algebraica. Explicar situaciones y responder a cuestionamientos. Que grafiquen según una expresión algebraica dada. Que transiten de una representación en otra sin dificultad.	Que a través del concepto modelen el comportamiento de fenómenos y los interpreten. Que comprendan situaciones cotidianas de su entorno y las describen con argumentos.
7) ¿Qué tipo de funciones involucra al momento de enseñar el concepto de función?, ¿Cree usted que es posible incorporar otros tipos de funciones, diferentes a la lineal?	Solo la función lineal, ya que así lo indica el ministerio. Solo la función lineal ya que su expresión algebraica es más simple. Función lineal y cuadrática ya que sus expresiones algebraicas son sencillas de	Distintos tipos de comportamiento gráfico, asociados a distintos tipos de fenómenos. No es necesario profundizar en aspectos algebraicos complejos.

	comprender para los estudiantes.	
8)¿Para qué el estudiante debe aprender el concepto de función?, ¿Por qué considera usted que es relevante?, ¿Por qué está en el currículum nacional?	Para que comprenda los conceptos y definiciones que necesitará en su vida académica. Para que realice cálculos numéricos y procesos algebraicos establecidos en los planes y programas. Para resolver problemas a través de un modelo. Para que resuelvas problemas de la vida diaria.	Para comprender y explicar su entorno. Para comprender y analizar situaciones y fenómenos asociados a diversas áreas del conocimiento, a partir de la modelación de estos.
Categoría 3: Estrategias	Centrado en el Objeto	Centrado en prácticas sociales
9) ¿Qué estrategias utiliza en la enseñanza del concepto de función?, ¿Utiliza, por ejemplo, la metáfora de la máquina?	Sigo paso a paso las indicaciones ministeriales. Me apoyo en la metáfora de la máquina. Me apoyo en problemas de contexto y en las representaciones de la noción.	Modelar situaciones o fenómenos enmarcados en las prácticas sociales significativas dentro de su entorno. Utilizar la experimentación como recurso. Modelar situaciones relacionadas a distintas áreas del conocimiento.
10) En el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ¿Qué es para usted la modelación?, ¿Qué rol cumple para usted la modelación?	Permite cambiar de una representación en otra. Es una forma de representar una situación cotidiana o de la vida diaria. Es una manera de interpretar situaciones contextualizadas.	Es un medio que permite comprender el entorno a través de la experimentación. Una forma de darle significado a la matemática en uso.

		Una manera de analizar fenómenos de distintas áreas del conocimiento desde distintas perspectivas. Una herramienta para elaborar argumentos que permitan comprender y explicar el entorno cotidiano.
Categoría 4: Contextos	Sin marcos de Referencia	Transversalidad
11) ¿Considera que los contextos que utiliza para enseñar el concepto de función son relevantes para las y los estudiantes?, ¿son significativos para su comprensión?	Si, ya que son contemporáneos a ellos. No, ya que utilizó los planteados en los recursos ministeriales y son poco atractivos. No lo sé, utilizar los planteados en los recursos ministeriales.	Si, me preocupo de considerar contextos cercanos a sus realidades, sus vivencias, al cotidiano y faciliten la deducción del constructo. Si, me preocupo de averiguar o buscar situaciones del cotidiano, en las cuales el contexto no interfiera con la posibilidad de que emerjan las ideas claves del concepto de función.

Tabla 8: Confrontación dME y CSCM, badasa en la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p.32)

Para apoyar el análisis del discurso docente, se han considerado las tablas elaboradas en Ruiz-Esparza (2014), el cual contempla los procesos y significados en torno al discurso docente que debiera emerger luego de la aplicación de la situación de modelación, éstas están concentradas y resumidas en la Tabla. asociadas a los momentos del Rediseño de la situación de modelación trabajados en este proyecto.

Tabla 9, Análisi de los momentos del rediseño

Momento de mantenimiento **Para el rediseño: Momento 1: Tu Cotidiano, Momento 2: Uso de la curva y Momento 3:Análisis de la tabla**	
Usos de la gráfica: *identificar cambios asociados al traslado del sensor* Funcionamiento del uso: *establecimiento de relaciones entre las características de la gráfica y de la situación* Forma del uso: *formular un patrón de comportamiento o ajuste de tipo icónico/gestual/verbal que expresa lo observable*	
Elementos de construcción	**Argumentaciones**
Significados	La *variación* como cambio de estado de agregación de la materia
Procedimientos	Producción icónica/gestual/verbal de un patrón de comportamiento
Procesos – objetos	Transferencia del calor
Momento de anticipación – crisis **Para el rediseño: Momento 4: De Anticipación**	
Usos de la gráfica: *interpretación cualitativa del experimento a realizar* Funcionamiento del uso: *discusión de la temperatura y los cambios de temperatura descritos por el enfriamiento, el calentamiento o el equilibrio térmico* Forma del uso: *formular un patrón de comportamiento o ajuste de tipo icónico/gestual/verbal que expresa lo observable*	
Elementos de construcción	**Argumentaciones**
Significados	La variación exponencial como ascenso/descenso de la temperatura
Procedimientos	Producción icónica/gestual/verbal de un patrón de comportamiento
Procesos – objetos	Enfriamiento de la silicona
Momento de generación **Para el rediseño: Momento 5: De Reversión y Momento 6: De Formalización**	
Usos de la gráfica: *identificación de patrones de comportamiento* Funcionamiento del uso: *establecimiento de relaciones entre las características de la gráfica y de la situación* Forma del uso: *producción experimental de un patrón similar al dado*	
Elementos de construcción	**Argumentaciones**
Significados	La variación exponencial como estabilidad del aumento/descenso de la temperatura
Procedimientos	Manipulación de la realidad para obtener un patrón

Procesos – objetos	La función como instrucción que organiza comportamientos

Tabla 9: Análisis de los Momentos del Rediseño de la Situación de Modelación, basado en Ruiz-Esparza (2014), (p.53-55)

4.2 Análisis Crítico del Discurso

Para complementar el uso la tabla en el análisis de las entrevistas, se utilizará como práctica de investigación, el Análisis crítico del Discurso (ACD), según Núñez, J. (2019), el análisis crítico del discurso (ACD) tiene como objetivo desnaturalizar las ideologías mediante el estudio de las prácticas discursivas que tienen una aparente objetividad y neutralidad.

En Meersohn, C. (2005), se entrevista a Teun Van Dijk, quien plantea que:

> El ACD no se limita, en mi perspectiva, a los trabajos que explícitamente se llaman así, sino que también engloba todas las modalidades de investigación crítica que tienen que ver con el uso de la lengua o con la comunicación. (p. 3)

El discurso docente, recogido en esta investigación, es un elemento importante, relevante para comprender cómo se ha construido el conocimiento del profesor de matemática, en relación al concepto de función, y cómo este se proyecta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este constructo.

En la misma entrevista, Meersohn, C. (2005) consulta al Van Dijk sobre a la “objetividad” de la ciencia cuando se trata del ACD, frente a lo cual responde:

> Creo que en varias aproximaciones del estudio del discurso estamos de acuerdo en que las ciencias se construyen, en gran parte, a través de discursos y otras interacciones, y esas construcciones son intersubjetivas y sociales. El hecho de que diferentes científicos en momentos diferentes construyan la "realidad" de maneras diferentes ya muestra que su construcción es relativa, y una función de ideologías y otras representaciones sociales que comparten. Cierto; puede ser que un análisis de algo tan “tangible” como las palabras, las oraciones u otras estructuras del discurso parezca más “concreto” y por eso más “objetivo” que una interpretación social del uso o de las funciones del lenguaje. (p. 6)

Considerando lo anterior, respecto a que el Análisis Crítico del Discurso (ACD) se define el discurso como una práctica social, Pardo Abril, N. G. (1999) expone:

> La tarea central del analista es develar cómo actúa el discurso en las otras prácticas sociales, esto es, cómo se construyen los acontecimientos sociales, cómo se formulan, establecen, mantienen o se transforman las relaciones sociales y cómo se

> constituye la identidad del sujeto o, más puntualmente, cómo se expresan y reproducen las ideologías en el discurso. (p. 64)

La misma autora manifiesta que:

> El ACD exige una postura interdisciplinaria amplia en la que se integran lo cognitivo, lo social, lo cultural, lo lingüístico y lo comunicativo, en este sentido, el discurso es una práctica pluridimensional que se explica simultáneamente como producto sociocomunicativo, es decir, como acto social y discursivo que vive en una situación concreta, y como práctica cognitiva que estructura y construye formas de saber individual y colectivo.

Pardo Abril, N. G. (1999) indica que:

> Las creencias como producto del pensamiento humano tienen dimensiones cognitivas, discursivas y sociales: «son unidades de información y de procesamiento, así como condiciones y consecuencias mentales del discurso y la interacción social.
> Las creencias en tanto constructos mentales son la base desde donde se constituyen las ideologías que se expresan en discursos y, en general, en las prácticas sociales y culturales.parte de los tejidos sociales que constituyen los hechos de la realidad social y cultural. (p. 66)

La autora sostiene, respecto a los límites metodológicos del discurso,

> Analizar el discurso con la pretensión de comprender críticamente la cultura implica desentrañar las estructuras del discurso para formular explicaciones sobre sus funciones y contextos cognitivos, sociales, políticos, históricos y culturales, dentro de los cuales se enmarca el estudio de la expresión discursiva y la reproducción de la ideología. (p.78)

Pardo Abril, N. G. (1999), en la ilustración 11, propone un conjunto de estructuras y estrategias discursivas, útiles en el procedimiento analítico, las cuales formulan de manera "general, aunque parcial y provisional", según la autora, un instrumento que permita identificar en diversas expresiones discursivas las formas en que se generan, (re)producen o transforman las ideologías:

Es importante y esencial, para esta investigación, analizar en profundidad las ideologías presentes en el discurso docente, en relación a la noción de función, tanto en la entrevista inicial, como en la final.

En Núñez, J. (2019) se expone que:

> Los grupos que controlan los discursos tienen más posibilidades de controlar las mentes y las acciones de los otros; de modo que es necesario conocer cómo las mentes controlan nuestras acciones y cómo, a partir de ello, se puede influenciar la mentalidad de la gente, a través del texto o el habla (Van Dijk, 1999). El mismo

> autor agrega que el control de la mente tiene que ver con la adquisición de creencias sobre el mundo a través del discurso y de la comunicación.

En este mismo sentido, el autor menciona, (citando a Van Dijk, 1999)

> Cuatro puntos que sugieren que el control discursivo de la mente es una forma de poder y de dominio):
> a) Los receptores u oyentes tienden a aceptar las creencias (conocimientos y opiniones) transmitidas por el discurso de las fuentes que consideran autorizadas, fidedignas o creíbles.
> b) En otras ocasiones, los participantes están obligados a ser receptores del discurso (por ejemplo, en la educación y/o actividades laborales.
> c) A veces no existen otros discursos alternativos sobre el mismo tema.
> d) Sucede, también, en algunas ocasiones que los receptores no poseen conocimientos y creencias necesarias para desafiar los discursos o la información a que están expuestos (Wodak, 1987).

Lo anterior, se ajusta perfectamente a lo que esta investigación aborda, reconocer el dominio de una ideología en el discurso docente respecto a la noción de función.

Soto (2014), recoge en su investigación, que dentro de este campo de estudio (AD) existen diferentes perspectivas. Expone que una de éstas:

> Entiende al discurso como una práctica social vinculada a sus condiciones sociales de producción y a su marco de producción institucional, ideológica, cultural e histórico- coyuntural. Pecheux (citado en Karem, 2005) señala que el sujeto-emitente no está en el origen del significado del discurso sino que está determinado por las posiciones ideológicas puestas en juego en los procesos sociales en los que se produce la palabra.

En este sentido, se quiere determinar a partir de las respuestas recogidas de las preguntas asociadas a las diferentes categorías de las entrevistas, si el dominio en el discurso docente está dado por el dME o la CSCM.

Para Soto (2014), el ACD presenta diversas características

- Es multidisciplinario, esto quiere decir que acepta la perspectiva crítica que dé cuenta de las complejidades de las relaciones entre las estructuras del discurso y las estructuras sociales.
- El ACD no nos brinda un enfoque único, que nos indique como hacer el análisis social, sino que subraya que para cada estudio debe procederse al completo análisis teórico de una cuestión social, de forma que seamos capaces de seleccionar que discursos y que estructuras sociales hemos de analizar y seleccionar.

- Los métodos de investigación concretos dependen de las propiedades del contexto de la investigación erudita: objetivos, participantes, instalaciones y usuarios, lo que incluye también sus creencias e intereses.
- Es un análisis discursivo completo de un gran corpus de textos o conversaciones es algo fuera de lugar.
- Existen diferentes niveles y estructuras que son utilizados para desarrollar un análisis del discurso: estructura paraverbales, visuales, fonológicos, sintácticos, semánticos, estilísticos, retóricos, pragmáticos e interactivos.
- El análisis de un pequeño texto con todas estas categorías podría ser muy largo e incluso interminable. Por este motivo para el ACD es preciso optar y seleccionar para el análisis más pormenorizado aquellas estructuras que sean relevantes para nuestro estudio.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, en las respuestas de los docentes dadas en las entrevistas, se han seleccionado estructuras relevantes de sus discursos, con la finalidad de proporcionar elementos para un análisis más objetivo, a través de la tabla de análisis basada en la confrontación de la dialéctica exclusión – Inclusión, al identificar palabras, o frases claves, que caracterizan tanto al dME, como a la CSCM.

Para una investigación que involucra el dME como un sistema de razón, Soto (2014) señala que, ésta se debe desarrollar en términos de tres componentes: los significados, las estructuras y el contexto del discurso. La misma autora, plantea además lo siguiente:

- Estos componentes se analizarán en términos globales y locales. Esto permite observar las significaciones asociadas a ciertas nociones matemáticas que viven en el dME (significados globales y locales).
- El contexto en el que se desarrollan las argumentaciones del conocimiento (contextos globales y locales)
- Como se presentan esos significados en un acto comunicativo específico (estructuras locales y globales).

Van Dijk (1980) (Citado por Soto (2014)) plantea que:

- Un discurso es coherente sólo si es también coherente en un nivel global, y esta coherencia global se da cuando se puede asignar un tema o un asunto al discurso.
  Después de leer o escuchar un discurso, frecuentemente nos es posible (y a veces lo hacemos) señalar el tema o los temas de ese discurso. También usamos términos como asunto, resultado e idea general, o locuciones como lo importante/esencial de lo que se dijo. Al usar tales términos, nos referimos a algunas propiedades del significado o del contenido del discurso (p.43).

- Respecto a las estructuras locales, señala que “mientras la sintaxis organiza la forma y la semántica el significado y la referencia de las oraciones y textos, la pragmática analiza su función elocutiva como acto del habla” (p.59).

> Por lo general estas estructuras no expresan directamente ningún significado subyacente, y por lo tanto, tampoco expresan creencias.
> Señalan más bien la perspectiva que estos tienen sobre los acontecimiento de los hablantes, la perspectiva que estos tienen sobre los acontecimientos de los que se conversa. (Van Dijk, 2003, p.158) .

Respecto a esto último, son las estructuras locales, los elementos fundamentales que facilitarán el análisis de resultados de esta investigación. Para Soto (2014) "Esto quiere decir que más que una herramienta de análisis es una herramienta para dar sentido a los discursos analizados. Por ejemplo, el profesor no sólo da explicaciones sobre su práctica, también da ejemplos donde pone en juego todo el sistema de razón que lo norma."

Las estructuras destacadas en rojo, serán las que se considerarán semánticamente para reconocer el dME o CSCM en las respuestas de los docentes, dadas en las entrevistas inicial y entrevistas final.

4.3 Análisis de Entrevistas Inicial y Final

Tanto la entrevista inicial, previa a la aplicación de la Situación de Modelación, como la entrevista final, posterior a la Situación de Modelación, se realizan en las dependencias del Liceo Teniente Dagoberto Godoy Nº3, establecimiento educacional particular subvencionado, ubicado en la comuna de Lo Prado, lugar de trabajo de las(los) docentes participantes. Cada entrevista se realizó de manera individual y privada, siendo grabado solo el audio de las conversaciones.

Las entrevistas inicial y final, se concretaron en distintos días, por lo cual se instruyó a los participantes que no realizarán ningún tipo de comentarios entre ellos, en relación a lo consultado en la entrevista. Se destaca la responsabilidad y respeto de esta instrucción, por parte de los docentes.

Las conversaciones inician consultando a los docentes, informalmente, sobre niveles en los cuales imparte clases, sobre contenidos que actualmente está trabajando, sobre sus estudiantes, etc, todo ello a modo de distender el ambiente y disminuir la tensión que se apreciaba al principio de las entrevistas.

La tabla siguiente presenta la información de los docentes entrevistadas(os), consultada al principio de la entrevista inicial, en la cual se asegura el resguardo ético de la información y el cumplimiento de los requisitos para ser partícipes de esta investigación.

Tabla 10: Resguardo de la información y cumplimiento de los requisitos para ser partícipes de esta investigación.

¿Tiene claro el resguardo ético bajo el cual se realizará su participación en ésta investigación?	Si, recibí la carta con el detalle.	Si, lo tengo claro.	Si, tengo la carta y la entendí.
¿ Accede a que sea grabado el audio de la conversación?	Si, no tengo problema	Si, no hay problema	Claro, si puede
¿Cuál es su título profesional?	Profesor de Estado en Matemática y Computación	Profesor de Estado en Matemática y Computación	Profesor General Básico con Mención en Matemática para Segundo Ciclo
¿Ejerce actualmente en el nivel 8º Básico?	Si	Si	Si
¿Cuántos años de experiencia profesional posee?	6 años	14 años	2 años
¿Cuántos años de experiencia lleva realizando clases en el nivel 8º Básico?	2 años	4 años	2 años

Tabla 10: Resguardo de la información y cumplimiento de los requisitos para ser partícipes de esta investigación. Elaboración propia.

4.3.1. Confrontación entre el dME y la CSCM

Se presenta el análisis de la confrontación entre el dME y la CSCM en las respuestas de las entrevistas inicial y final. Las respuestas a cada una de las preguntas, y análisis de éstas, se presentan en la Tabla 9, la cual detalla la confrontación entre el dME y la CSCM, basado en la Dialéctica Exclusión- Inclusión, Soto (2013), (p. 77). El orden de las respuestas esta organizado de la siguiente forma:

- Respuesta de P1
- Respuesta de P2
- Respuesta de P3

Para realizar el análisis del discurso docente, presente en las respuestas dadas en las entrevistas inicial y final, combinaremos dos elementos:

Por un lado la tabla 8, de confrontación del dME y la CSCM, la cual contiene las posibles respuestas del docente, clasificadas en uno de los dos tipos de discurso. Por otro lado se considera el ACD, el cual estará enfocado en su componente sintáctica, ya que en ella se identifican proposiciones, estructuras que estarán identificadas en color rojo dentro de las transcripciones de las entrevistas, las cuales están relacionadas con procesos formales que involucran la identificación de categorías, tales como estructuras, visual, gráfica, entre otras.

Estas dos herramientas serán el soporte para analizar el discurso del docente en torno al concepto de función y permitirán evidenciar si se produce la resignificación a partir de la aplicación de la situación de modelación.

En cada una de las respuestas se presentan sólo estructuras relevantes para el análisis, vale decir, palabras, frases u oraciones que permitan categorizar las respuestas dadas por los docentes. Lo anterior, se consideró dada la extensión de algunas respuestas dadas por los docentes participantes.

Tabla 11: Análisis de la confrontación entre el dME y la CSCM en las respuestas de las entrevistas inicial y final. Se presentan extractos de las respuestas, las entrevistas completas se contemplan en los anexos.

Preguntas	INICIAL	FINAL
Categoría 1: Definiciones y representaciones		
1) Inicial ¿Cómo y dónde aprendió la noción de función? 1) Final ¿Cómo le habría gustado que le enseñaran la noción de función?	La **maquinita** en donde entra un producto y sale un resultado. En el colegio.	Mmm, a partir de lo que se hizo en la anterior sesión. **Más significativo** para el estudiante el concepto presentándose a partir de la **experimentación**.
	Pero el contenido, en el colegio, era **una relación entre un conjunto y otro**.	De una **forma más cercana al contexto** en el que uno vive, algo que se podría **ver en el cotidiano**.
	Enseñando a los estudiantes, no me lo enseñaron en la universidad.	**No deducir**, que me la la entregasen, no construirla.
Análisis Pregunta 1	El dME es dominante en este punto, el concepto de función se maneja bajo las concepciones establecidas fundamentalmente por el currículum nacional, contemplando la metáfora de la máquina y la relación entre conjuntos. Los tres docentes indican que aprendieron el concepto de función en el colegio, siendo estudiantes, o enseñando, como docentes, y es a partir de esa concepción que ellos enseñan el concepto. En la entrevista final, dos de los docentes indicaron que la situación de temperatura, la experimentación fueron significativa, cercana y les habría gustado aprender el concepto de función a partir de una situación similar, es decir, toman en consideración el poder construir la definición de función a través de la modelación.	
2) ¿Cómo define la noción de función?	El tema de una **máquina transformadora** que tiene operaciones matemáticas en el interior.	Como una especie de **regla o correspondencia entre dos variables** que tienen alguna relación por medio de alguna situación puntual.
	Relacionarlos con dos grupos que están relacionados por una función, y esta función hace que varíe cada uno de sus términos.	Una única **relación que se pueda entender** de una manera, de una representación, es decir, **distintas formas.**
	Una función para mí es que hay un numerito una formulita que entra	La función es **una relación** que tiene un conjunto de partida y un punto de llegada y a cada

	por **una máquina** y aparece un nuevo resultado.	elemento del conjunto de partida le **corresponde un único elemento** del conjunto de llegada.
Análisis Pregunta 2	El dME está presente en la definición que manejan los docentes, se evidencia a partir del uso de la metáfora de la máquina o una alusión a ella, se debe considerar que es la sugerencia ministerial- También se advierte considera el concepto de función como una relación entre conjuntos. Ninguno de los docentes entrega una definición formal de la noción. Después de la aplicación de la situación de temperatura, los docentes intentan configurar una definición de función sin basarse en la metáfora de la máquina, lo cual implica que han ampliado sus concepciones respecto al concepto, intentan incorporar otros elementos que antes no consideraban para el concepto de función, se amplían los enfoques del docente. Uno de los docentes entrega una definición más precisa del concepto de función, en relación a lo expuesto al inicio.	
3) ¿Qué entiende por dominio y recorrido de una función?, ¿Por qué debe enseñarse?, ¿Qué rol cumple el dominio y el recorrido en la noción de función?	El dominio tiene importancia para saber **qué valores son los que yo puedo ingresar a esta maquinita**.	Los **posibles resultados** que uno podría tener **en esta relación** entre ambas variables, se ve en el experimento, se comprende y yo creo que eso es de alta importancia conocer en lo que es el dominio y recorrido.
	El dominio viene siendo desde donde **parte un conjunto, hasta el conjunto de llegada,** donde van a ser los términos que cambian.	Se pueden ver en las representaciones, ehh **ayudan como, a entender la situación que plantea la función.**
	Es relevante que los estudiantes sepan que lo que es el dominio de una función, el condominio, el recorrido, pero no entiendo **por qué, yo no entiendo para qué sirven.**	Saber cuál es el dominio, cuál es el recorrido, saber que elemento parte y que elemento llega, **es importante ya que no sirve cualquier número.**
Análisis Pregunta 3	No existe un conocimiento claro de lo que implica el dominio y recorrido de la función, los acercamientos a estos conceptos están más relacionados a los algebraico y conjuntistas, es decir más relacionados a lo que promueve el dME en los textos escolares.	

	Luego de la aplicación de la situación de temperatura, los docentes le encuentran sentido a los conceptos de dominio y recorrido, más allá de la mecánica que involucra la metáfora de la máquina. Esto implica la ampliación del significado de éstos conceptos por parte de los docentes, relevando su importancia a la comprensión e interpretación de fenómenos o situaciones.	
4) Al enseñar la noción de función, ¿Por que son importantes las representaciones?, ¿Cuál considera más relevante?	Poder **traspasar esa información**, al gráfico que me va a dar una idea dependiendo de si el gráfico va a ser creciente o decreciente. Son importantes porque ayudan a ampliar la forma de entender el concepto de función.	Establecer esta relación que existe entre las dos variables, las puede **utilizar para entender la situación**, las dos más relevantes son la algebraicas y la gráfica.
	Son importantes para **entender de diferentes maneras el concepto de función,** podemos ir jugando un poco con esta relación, pasar la representación en tabla, a una gráfica.	Siento que todas las representaciones son importantes para poder **entender el concepto** y ver diferentes formas de entender el concepto de función.
	Para así mostrarle a los estudiantes que las **funciones se pueden encontrar escritas** de diferentes maneras.	Las representaciones dan un **énfasis para explicar el tema de la función**, **la construcción del proceso de función**, **le doy a la gráfica y a la expresión algebraica más importancia, la gráfica para entender la situación y la algebraica para algo especifico.**
Análisis Pregunta 4	Las representaciones son tratadas, fundamentalmente, como un medio para exponer la información, para mostrar lo que la función modela, es decir, el tránsito entre las representaciones está relacionado a la modelación de la misma. Lo anterior presenta evidencia del dominio del dME, puesto que así es como se relaciona la modelación y las representaciones de una función en el currículum nacional. Después de la aplicación de la situación de temperatura, los docentes modifican su discurso, incorporando en él, el hecho de que las representaciones ayudan a la comprensión de la una situación o fenómeno, lo cual amplía el significado de las representaciones del concepto de función, más allá de transitar entre ellas de manera mecánica. Los docentes además, manifiestan que las representaciones tiene	

	distintos objetivos, dependiendo de lo que se desee observar en la modelación, lo que es significativo.	
5) Para preparar sus clases relacionadas a la noción de función: ¿Qué recursos pedagógicos utiliza?, ¿De dónde los obtiene?, ¿Utiliza material del Mineduc, como texto del estudiante, guía didáctica, material digital?	**GeoGebra, ticket de entrada y salida Kahoot, videos** de en qué momento se puede llegar a ocupar en la vida real. En general siento que si bien el **material del MINEDUC es bueno, siento que no es tan progresivo** como a mi me gustaría.	Geogebra, visualización de videos y **planteamiento de situaciones** en las que se ocupan funciones en la vida real, un problema plantearlo desde la **modelación** de qué ocurriría.
	Libros de textos del mismo nivel, he trabajado en **GeoGebra**, mostrando la gráfica, utilizó los **libros de texto del estudiante y del docente**, e información de internet.	Me gustó mucho la forma de **introducir el concepto a los estudiantes con experimentación,** después de esa introducción se hace con los **textos o planes y programas del MINEDUC.**
	Me apoyo del **libro del estudiante**, También ocupó material que está en la web**, páginas del MINEDUC.**	Me hubiese gustado trabajar el concepto de **función con geogebra, pero no lo manejo.**
Análisis Pregunta 5	La hegemonía del dME está presente en las respuestas de los docentes, puesto que uno de los ejes fundamentales de los recursos que utilizan son los que promueve el MINEDUC. Solo uno de los docentes genera su material y cuestiona el tratamiento de los contenidos en el texto del estudiante. Posterior a la aplicación de la situación de temperatura, los docentes incorporan en su discurso la idea e intención de incorporar la experimentación y modelación como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función, lo que es significativo ya que implica ampliar el espectro de recursos del docente tanto para su propia comprensión, como para la preparación del proceso de enseñanza y aprendizaje.	
Categoría 2: Enseñanza		
6) Respecto a la noción de función,	Creo que la **relación de variables**. Para mi, creo que el poder relacionar variables, sobre todo **en un problema contextualizado.**	**una relación entre dos variables**, y **no siempre van a tener una un comportamiento constante**, sino que más bien **en la vida cotidiana las variables van variando en torno a distintos sucesos.**

¿Qué es lo que considera más importante que sus estudiantes aprendan?, ¿Cuál es su foco principal?	del dominio, al pasar por la función, **hay una transformación algebraica** de ese resultado que llega al recorrido. Que entiendan por qué esta **relación.**	**Sirve para entender sus representaciones y como operarlas.**
	En los **problemas de la vida diaria**, es importante que **ellos discriminen**.	En la definición de función, que **es una relación** como dije al principio.
Análisis Pregunta 6	Se advierte en las respuestas iniciales de esta pregunta que no existe una respuesta clara respecto a cuál es el foco principal, se argumenta en torno al hecho de que una función es una relación, que relaciona variables y se relaciona con problemas contextualizados o de la vida diaria, la respuesta final no difiere mucho, el dME está fuertemente arraigado en este aspecto, entendiéndose que el foco principal de la función es la resolución de problemas. La aplicación de la situación de temperatura si impacto en el hecho de incorporar al lenguaje del docente, asociado al concepto de función, el comportamiento de éstas y que el éste no siempre será lineal, que se quiera transmitir esto al estudiantado es querer generar un significado distinto respecto del concepto.	
7) ¿Qué tipo de funciones involucra al momento de enseñar la noción de función?, ¿Cree usted que es posible incorporar otros tipos de funciones, diferentes a las lineales?	Función **lineal**, función afín, funciones de **valor absoluto**, otras, de manera **muy superficial**, una función simple, de una **cuadrática**, pero sin tanta complejidad.	Importante el hecho de conocer que **no siempre** van a ser **líneas rectas** sino que **pueden ser curvas**, presentar un gráfico de una **exponencial** con distinto exponente. Porque es importante saber que existen **distintos comportamientos**.
	funciones **lineales,** después **ir complejizando** la función **algebraica**, en general nos vamos por función lineal, función **afín**, porque ya después en **niveles superiores** vemos **otro tipos** de funciones.	Después de la experimentación me doy cuenta de que con otro tipo de función se puede entender mucho mejor el concepto, uno tiene ese miedo de meter otro tipo de funciones por ser más complejas, pero **en realidad ayudó** mucho más **al entendimiento** del concepto el ver **distintos comportamientos.**
	Comportamientos **lineales**, si porque en octavo se pasa la función **afin y lineal** y son lineales ambas, una recta. Entonces. Pero **no veo otras curvas**, solamente al menos	**Lineal** y, **quizás pueda mostrar algunas,** sí sería **bueno** para que ellos **discriminan** como es una de la otra.

	nos limitamos a pasar lo que indica el currículum de octavo básico.	
Análisis Pregunta 7	Las respuestas iniciales de los docentes están enmarcadas en torno a lo que se quiere implementar a través del currículum, puesto que los docentes tienen una mirada enfocada en el comportamiento lineal, fundamentalmente por la limitante que involucra lo algebraico, lo cual es evidencia del impacto del dME en el tipo de función con la cual se introduce el concepto. Después de la situación de modelación, se percibe claramente un cambio en las respuestas de los docentes, reconociendo lo que benefició para su propia comprensión del concepto de función, el hecho de incorporar comportamientos gráficos diferentes a los lineales, sin necesidad de profundizar en la expresión algebraica que era lo que más les complicaba, esto implicó incorporar un elemento importante y significativo para sus futuros procesos de enseñanza del concepto de función.	
8)¿Para qué el estudiante debe aprender la noción de función?, ¿Por qué considera usted que es relevante?, ¿Por qué está en el currículum nacional?	Es una puerta inicial para la resolución **de problemas**. Porque hasta antes de ver el concepto de función facilita el **relacionar las dos variables** el poder asociar qué debo hacer en torno al problema. Porque es **multidisciplinario.** Creo que tiene una **versatilidad** que tiene el concepto que es fundamental el poder **comprenderlo** y poder **aplicarlo**.	**Relacionar** también con muchas **otras disciplinas**, **comprender** otros elementos que también rodean las matemáticas, **utilidad** ya más eh, **cotidiana**, creo que las funciones nos ayudan a establecer la **comprensión** de eh, mm, el **comportamiento.**
	Vayan **relacionando** con cosas que vemos en la misma televisión, economía, **operaciones de un conjunto** y **transformarlas a otro**. Proceso de **modelación** donde ellos deben **transitar** por diferentes **representaciones** para poder **comprender un concepto.**	Al **analizar gráficos** en diferentes **contextos,** ya no solo matemático, ver este concepto de función y que **entiendan** como los conceptos se relacionan en **gastos cotidianos**, sino también ver su **predicción desde otra representación,** que lo puedan **incorporar a su vida**.
	Pueden desarrollar **problemas** matemáticos **de la vida diaria**, para qué va a **servir la pendiente**, niño que quiera estudiar una carrera matemática, **no a todos les va a servir.**	Para ver **situaciones**, no sé, **resolver problemas de la vida diaria**, ehm, No sé, **para entender la vida**.

Análisis Pregunta 8	De las respuestas iniciales dadas por los docentes, se argumenta en torno a que los estudiantes deben aprender a relacionar dos variables, a transitar entre las representaciones, al hecho de que el concepto de función es multidisciplinario, que comprendan su entorno. La respuesta final, no se difiere mucho, el dME no está tan presente en este aspecto. La aplicación de la situación de temperatura permitió, a algunos de los docentes, incorporar elementos a su discurso, relacionado a la comprensión de comportamientos, a la predicción, a argumentar en otros aspectos.	
Categoría 3: Estrategias		
9) ¿Qué estrategias utiliza en la enseñanza de la noción de función?, ¿Utiliza, por ejemplo, la metáfora de la máquina?	Acercarles el tema de esta **máquina transformadora**, identificar qué es lo que ocurre con **distintas operaciones**. Trato de **observar con GeoGebra**, el tema de **ir cambiando parámetros**, tanto en funciones lineales como no lineales, para describir por medio de una función.	La **experimentación,** que los chicos traten de entorno a sus variedades de gustos traer o presentar, **alguna gráfica** que ellos hayan **observado** y que traten de **describir** cuales es la relación que existe entre los dos elementos que aparecen en **la gráfica**, con un **experimento más tangible** donde ellos van a ir **manipulando** y observando **la gráfica** que es como el primer **acercamiento visual.**
	La máquina, casi siempre trato de irme a la **representación de la tabla**. Representaciones que les favorece a los estudiantes, que del conjunto de las **X al conjunto de las Y,** una estructura del tema de la tabla para poder **pasar a otro tema de representación.**	Siento que después de esta **experimentación** es mucho más **fácil entender el concepto de función** sin ni siquiera llegar inmediatamente a lo que es una expresión algebraica sino que partir de una **experimentación con objetos concretos** que son **cotidianos para nosotros** y luego ya empezar a formalizar un poquito más.
	Parto con un **problema matemático**, entonces a través de un problema matemático llegamos a la **parte algebraica** y después de la algebraica llegamos a la otra **forma gráfica**, utilizó la **metáfora de la máquina**.	Como lo dije en la primera parte, **con la maquinita**, uno lo mete en esa maquinita y sale otro numerito.
Análisis Pregunta 9	Las respuestas iniciales dadas por los docentes, evidencian la fuerte presencia del dME en su estrategia de enseñanza,	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">basados fundamentalmente en la metáfora de la máquina y sus fuertes implicaciones algebraicas, miradas desde una perspectiva centrada en el objeto a enseñar. La aplicación de la situación de temperatura generó la ampliación de los enfoques en las estrategias de enseñanza, a dos de los docentes, significando mirar el concepto de función desde una perspectiva de enseñanza diferente, a partir de la experimentación con elementos de su cotidiano, incorporando elementos que lo hacen al concepto más comprensible para el estudiantes, analizando comportamientos y realizando argumentaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">10) En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función, ¿Qué es para usted la modelación?, ¿Qué rol cumple para usted la modelación?</td><td>Describir una situación por medio de una expresión matemática. Uno de los niveles de taxonomía más altos. Realizar una modelación de una situación es simplificar una situación contextualizada o una situación matemática, comprender que pueden llegar a predecir incluso resultados en torno la situación.</td><td>Es describir a través de un modelo matemático alguna situación en particular para llegar a predecir en un momento futuro. La finalidad dentro del aprendizaje del concepto de función, así como habilidad final.</td></tr>
<tr><td>Está implícitamente al momento de enseñar funciones, porque al usar los diferentes tipos de representaciones, estamos realizando modelación de este contenido. Al poder transitar de diferentes tipos de representaciones, ayudó a los estudiantes a que ellos puedan modelar situaciones y a entenderlo de mejor forma.</td><td>Lo que plantea el ministerio como la modelación, no es la comprensión sino que es el cambio de una representación en otra.</td></tr>
<tr><td>La modelación es la manera de representar la función.</td><td>Habilidad dentro de la matemática, es como seguir un patrón, presentarle algún problema y exponerlo, mostrarlo en la gráfica para entenderlo.</td></tr>
<tr><td>Análisis Pregunta 10</td><td colspan="2">En el discurso docente presente en las respuestas, identifican la modelación como una habilidad mayor, pero que abordan según lo que plantea el currículum nacional, que en el contexto del concepto de función, está mirada como la herramienta que permite transitar entre las diferentes representaciones de éste.</td></tr>
</table>

	La situación de temperatura genera un cuestionamiento en algunos docentes, respecto al significado del rol de la modelación en el contexto educativo, lo que les permite incorporar que no solo permite ayudar en el tránsito entre representaciones, sino que también para realizar predicciones, para comprender, para argumentar.	
Categoría 4: Contextos	Sin marcos de Referencia	Transversalidad
11) ¿Considera que los contextos que utiliza para enseñar la noción de función son relevantes para las y los estudiantes?, ¿son significativos para la comprensión de la noción?	Hay **algunos cotidianos**, sobre todo que son más que son **más fáciles de buscar en torno a funciones lineales** o afines, como temas de **cuentas del hogar,** un contexto de salud también, tema de infectados, cómo va creciendo. Creo que **la modelación ayuda mucho al entorno**, tomando **el objetivo de predecir algo.**	Como docente pecamos **usando los mismos contextos. cuentas del hogar, y ellos no tienen el compromiso aún de pagar una cuenta no les es tan relevante**, existen contextos a los que se pueden trabajar con el estudiante, el tema de los **videojuegos**, las **redes sociales** también arrojan mucha información, **creo que contextos de ese estilo son más relevantes para el estudiante.**
	Los contextos que están alejados un poco de la realidad, siento que uno siempre **trata de llevarlos a lo concreto**, a lo que es más cercano a ellos, pero **es difícil igualar** esa parte.	Me guiaba con el material que teníamos disponible del **Ministerio, con contextos alejados de la realidad**, **prefiero** buscar **contextos que tenga sentido** para los estudiantes, para su vida diaria o en lo que vayan a dedicarse a futuro, por ejemplo. **La experimentación me pareció algo muy bueno** porque eran **elementos** que son básicos que uno tiene en su casa, entonces el hecho de hacerlo ya más **cercano a la realidad de los estudiantes**, para ellos les hace **más sentido** también.
	Súper relevantes, porque **son cosas que ellos van a ver en la vida diaria,** y van a ver una función, van a tomar el medidor de luz, y ahí hay una función, hay una infinidad de problemas matemáticos, hay un sinfín de formas y situaciones.	Lo **mejor es actualizarla y llevarla a la realidad de ellos.** Pienso que siempre hay que **aterrizar.**

Análisis Pregunta 11	Los docentes consideran que los contextos son muy importantes en el proceso de enseñanza del concepto de función, pero se basan en situaciones lejanas al estudiante, poco naturales, o de difícil comprensión, lo que no aporta al entendimiento del concepto, algunos docentes cuestionan esto en los contextos presentes en el texto del estudiante, de los pocos contextos presentes, es decir, cuestionan el dME presente en ellos. La situación de temperatura les presentó un alternativa muy significativa, puesto que el contexto estaba basado en una situación del cotidiano de cualquier persona, de fácil comprensión, lo cual impide que se pierda el foco respecto al concepto de función. Que el contexto esté basado en el cotidiano es un elemento que los docentes están dispuestos a incorporar en sus prácticas habituales en la enseñanza del éste concepto, sienten que facilitará su comprensión por parte de los estudiantes.

Tabla 11: Análisis de la confrontación entre el dME y la CSCM en las respuestas de las entrevistas inicial y final. Elaboración propia

4.3.2. Preguntas de cierre para la entrevista inicial

La pregunta planteada al cierre de la entrevista, tuvo como finalidad captar las percepciones, reflexiones y necesidades de los docentes participantes, respecto a la noción de función, las respuestas están presentadas junto a su análisis en la tabla 10. Éstas respuestas aportan un elemento reflexivo, por parte del docente, importante para la investigación, puesto que evidencia inquietudes, previas a la aplicación de la situación de modelación, que coinciden en ciertos aspectos con situaciones que este proyecto aborda.

Tabla 12: Percepciones, reflexiones y necesidades de los docentes participantes, respecto a la noción de función.

¿Cree usted que existen elementos, relacionados a la noción función, que usted quisiera perfeccionar o profundizar como docente?	Me gustaría **perfeccionar el concepto** o ir como, acercandolo un poco más el tema de acercarlo con el concepto de la máquina que transforma, **que fuese un poco más cercano**, pero se me ha hecho difícil como transformar en un lenguaje más informal, y cercano a los estudiantes. Siento que todo lo que tenga que ver con álgebra y funciones, llega un momento en que tiene que existir un cierto **porcentaje de abstracción, y esa abstracción igual ayuda al análisis y al poder desarrollar un pensamiento crítico en el estudiante,** que no todo sea concreto. Pero yo creo que esa parte como acercarlo un poco más, variar **un poco el concepto de la maquinita** que transforma, me gustaría hacerlo pero la verdad **se me hace un poco difícil.**

	Sí, por supuesto me gustaría, continuar perfeccionándose en ese sentido, para poder **dar una mayor cercanía y un mejor entendimiento de este concepto** que cuando uno recién lo enseña, para ellos parece ser algo muy complejo y muy alejado de la realidad. Siento que lo que parece ser más complejo, más difícil de entender, son los diagramas. Cómo se **une en diagramas el dominio con el recorrido, las flechitas, siento que eso les cuesta a veces comprender,** siento que **esa parte les complejiza bastante a los estudiantes.** La **gráfica** también siento que sería **un tema interesante de estudiar.** Quizás las mismas fuentes donde uno busca recursos para poder enseñar, el material, que de repente **uno por tiempo, por comodidad, se va a los recursos fáciles de acceder, más básicos,** pero quizás no son los más adecuados para enseñar los contenidos. También lo que hablábamos **buscar quizás contextos que sean más cercanos a la realidad cuando uno ya empieza a problematizar el contenido, contextos que sean más cercanos y más entendibles** para los estudiantes. Me gustaría también de alguna forma **acercarme más a la realidad de ellos, de los estudiantes, para que se les haga más sentido en realidad.**
	Que los estudiantes sepan lo que es el dominio de una función, el codominio, el recorrido. Por qué es relevante que ellos sepan, por qué es importante ese concepto para ellos, por qué lo debo de pasar, porque siento que no es necesario.
Análisis de las Respuestas	Los docentes reflexionan en torno a sus prácticas en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, fundamentalmente cuestionando sobre aquellas cosas que deben enseñar y que no manejan bién y sobre aquellas metodologías que deben aplicar, como la metáfora de la máquina, y que no le hacen mucho sentido, las consideran lejanas. Pero reconocen sus dificultades para generar un cambio, para incorporar otros elementos en el proceso que sean más significativos en la comprensión del concepto por parte del estudiantado. Desean actualizar e incorporar nuevos elementos y estrategias, pero por tiempo, como ellos mencionan, no saben cómo hacerlo. Es en éste punto que la matemática educativa tiene un rol fundamental, en proporcionar herramientas que faciliten este proceso al los docentes de nuestro sistema educativo.

Tabla 12: Percepciones, reflexiones y necesidades de las(los) docentes participantes, respecto a la noción de función. Elaboración propia.

4.3.3. Preguntas de cierre para la entrevista final

Para cerrar la entrevista final, era importante para la investigación, conocer las reflexiones y consideraciones finales de las(los) participantes, puesto que entregan un feed back importante, inmediato, en relación al impacto de la situación de modelación como medio para la resignificación de la noción de función y como medio para la reflexión de la práctica docente en torno a la enseñanza de este constructo. Estas consideraciones se presentan en la tabla 13.

Tabla 13: Consideraciones del docente al terminar la entrevista final.

<table>
<tr><td rowspan="3">¿Cree usted que ha cambiado o se ha ampliado su perspectiva respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción?</td><td>Yo creo que sí, como concepto general, creo que es más eh, o se me imagina que es más significativo, perdón, para el estudiante la parte gráfica, creo yo. Por un tema de, de que es más fácil recordar la imagen que la descripción completa de un concepto y la relación que existe de manera algebraica.</td></tr>
<tr><td>Sí me gustaría que pudiéramos trabajar más en el concepto de gráfica, porque en el caso de poder entender la gráfica en los cambios, qué significa que estén en una parte alta, baja, luego tener diferentes cambios, qué significa eso en contexto o matemáticamente en una tabla, como si tuviéramos más tiempo de poder hacer ese estudio sería interesante.</td></tr>
<tr><td>A mí me gustaría hacer lo que usted hizo con nosotros, ver si yo puedo que mis estudiantes infieran de algún problema sin que nosotros les entreguemos el concepto de función y que ellos lleguen, pero siento que se me va a hacer tan difícil llegar, o para que ellos puedan construir ese concepto de función, siento que es un trabajo que no lo tengo que hacer en función.</td></tr>
<tr><td>Análisis de las Respuestas</td><td>Para todos los docentes la experimentación generó una nueva mirada al concepto de función, les permitió considerar, para su enseñanza, otros elementos que consideran que no están bien desarrollados actualmente, como el comportamiento gráfico, la experimentación, la indagación y la argumentación. Pero manifiestan también el temor, la incertidumbre sobre algo que no manejan, esto refleja la necesidad de generar instancias que permitan a los docentes incorporar a sus prácticas habituales otros enfoque de enseñanza.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¿Quisiera usted perfeccionar algún conocimiento o estrategia en relación a la enseñanza de la noción?</td><td>Creo que la, valga la redundancia, la resolución o modelación de problemas creo que es algo de lo que me gustaría ahondar mayor cantidad de tiempo, creo que el currículo es demasiado ambicioso, en el sentido de que muchas veces nos pilla el tiempo por un tema que nos exigen cobertura curricular.</td></tr>
<tr><td>Me gustaría también perfeccionarme en el comportamiento de la gráfica y también quizás buscar mejores elementos…. para hacer clase para tener más recursos y contextos que sean más cercanos a</td></tr>
</table>

	la realidad de los estudiantes y poder hacer el concepto un poco más sencillo.
	Si, uno siempre tiene que estar abierta a la perfeccionarse, uno nunca termina de saber, yo siento que hacen falta de ese tipo de capacitaciones como didáctica de la matemática, quizás a lo mejor uno ya está empapado de toda esa noción de mostrarle lo que es lo que yo siento que falta, **más una forma más cercana de enseñar unos conceptos matemáticos,** eso yo siento que sería bueno que nos capacitaran, **me gustaría que más infirieron ellos, mis estudiantes, que ellos argumentaran más también.**
Análisis de las Respuestas	Después de la aplicación de la situación de modelación, los docentes plantean abierta y sinceramente las necesidades que ellos reconocer deben cubrir, en torno a la enseñanza del concepto de función, éstas tienen relación con aquellos elementos fundamentales de las actividades realizadas en la situación de temperatura, como la modelación, comportamientos gráficos, argumentación. Es decir, realmente las actividades realizadas tuvieron un impacto en los docentes, en sus concepciones respecto a la enseñanza del concepto de función, les permitió incorporar nuevos significados respecto del constructo, complementando las existentes.

Tabla 13: Consideraciones del(la) docente al terminar la entrevista final. Elaboración propia.

4.4 Posteriori Situación de Modelación

La Situación de Modelación se realiza en las dependencias del Liceo Teniente Dagoberto Godoy Nº3, establecimiento educacional particular subvencionado, ubicado en la comuna de Lo Prado, lugar de trabajo de los docentes participantes.

La instancia se realiza con los tres docentes a la vez, se les explica que trabajaremos con una calculadora, un pequeño laboratorio y sensores de temperaturas. Se les presentan los instrumentos, se les explica cómo funcionan y se les permite manipularlos. Ninguno de los presentes había trabajado directamente con alguno de estos elementos.

Se distribuye a las(los) docentes en espacios cercanos pero independientes, se les instruye que deben realizar las actividades en forma independiente, que no pueden interactuar entre ellos y que las preguntas que puedan surgir se realizan directamente a la investigadora en forma privada. Cabe destacar, que los participantes fueron muy responsables y respetuosos de estas instrucciones.

En la sala donde se realiza la actividad, se dispone de todos los materiales para la experimentación: instrumentos (calculador, laboratorio y sensores), papel aluminio, pistola de silicona, computador, tazas con agua (caliente, fría y templada), lápices, copias impresas de las actividades de la situación de modelación.

La actividad duró en total dos horas y media, los docentes se apreciaban un poco dubitativos al abordar cada una de las actividades, pese a que fueron escuetos en sus respuestas, se tomaron bastante tiempo para responder, no realizaron consultas a lo largo del desarrollo de las actividades. Al finalizar la actividad, los docentes compartieron sus resultados, comentaron sus procesos y dieron sus opiniones respecto a la actividad realizada.

Se manifestaron contentos con las actividades realizadas, en un principio se sentían un poco extraños, algo desconcertados, ya que no estaban acostumbrados a realizar actividades de matemática a partir de un experimento, lo cual encontraron muy innovador y atractivo.

Sintieron en un principio que las actividades iniciales parecían un poco complejas, debido a la falta de habitualidad en la observación de fenómenos, pero la encontraron entretenida y lo que más destacaron era la simpleza de la situación, la temperatura, algo tan simple y cotidiano, que no requería de mayor contexto o explicación. Esto último fue un elemento relevante para ellos, puesto que sintieron que la simpleza del contexto les facilitó mucho la realización de las actividades.

Otra observación que se debe rescatar, según los participantes, es que la simpleza del contexto no le permitió percatarse, en un inicio, de que estaban trabajando el concepto de función, pero no a partir de una recta, sino que de una gráfica que alberga distintos tipos de crecimientos y decrecimientos, lo cual derribaba para ellos el mito de que la noción de función en 8º básico sólo debía abordarse en base a la función lineal.
Pero lo más relevante de toda la actividad, es que los docentes reflexionaron respecto al hecho de que en ningún momento necesitaron de la expresión algebraica para pensar en la definición de función y que la protagonista de todo el proceso de construcción de la noción fue la gráfica y su comportamiento.

A continuación se presenta el análisis de las evidencias obtenidas a partir de la Aplicación de la Situación de Modelación llamada Situación de Temperatura.

Momento 1: Tu cotidiano

¿Dibuja el cambio de algo frío a caliente o de caliente a frío?

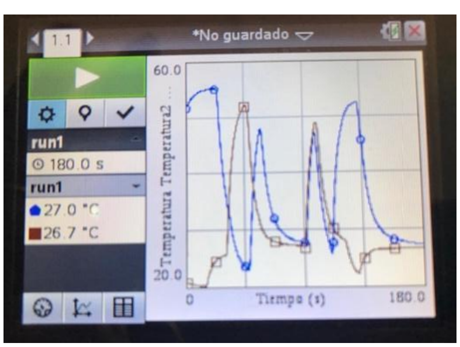
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P1</td><td>P2</td><td>P3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Evidencia Momento 1
En esta instancia, es posible apreciar cómo cada docente conecta lo frio y lo caliente con elementos de su cotidiano, simples y que no requieren de mayores contextos o explicaciones para su comprensión. Que es una de las características de la situación de temperatura, un contexto transversal, de lo cotidiano, que no distraiga con dificultades el foco de atención que es la noción de función.</td></tr>
</table>

Momento 2: De Uso de la Curva

Para estudiar las temperaturas desarrollaremos el siguiente experimento:

Se tienen dos sensores de temperatura, y tres tazas con agua de diferentes temperaturas (caliente, templada y fría). Los sensores permanecerán por segundos en las distintas tazas, el registro de sus temperaturas se reflejará en un monitor, el cual presentará una gráfica y una tabla para cada sensor.

a) Observa el cambio de los sensores, al llevarlos de una taza a otra y observa las gráficas producidas.

<table>
<tr><td>
</td><td>Evidencia y Análisis del Momento 2 a)
En esta instancia, los docentes observan atentamente el experimento aprecian como se van generando las gráficas correspondientes a dos sensores, el tiempo de observación es de 180 segundos. Se adjunta fotografía de la gráfica obtenida.</td></tr>
</table>

b) ¿Puedes identificar los sensores de acuerdo a sus gráficas?

P1	b) ¿Puedes identificar los sensores de acuerdo a sus gráficas? Sí, de acuerdo a su comportamiento de alzas y bajas *Transcripción* Si, de acuerdo a su comportamiento de alzas y bajas.
P2	b) ¿Puedes identificar los sensores de acuerdo a sus gráficas? Sí, se pueden diferenciar por el lugar donde comienzan. *Transcripción* Si, se pueden diferenciar por el lugar donde comienzan.
P3	b) ¿Puedes identificar los sensores de acuerdo a sus gráficas? Sí, se identifican, hay un comportamiento constante *Transcripción* Si, se identifican, hay un comportamiento constante.
Evidencia y Análisis del Momento 2 b) En esta instancia los docentes identifican claramente cada sensor parte de una taza determinada, pero no especifican en sus textos claramente la taza específica para cada sensor, no lo detallan. Una vez que finaliza la actividad completa, se genera una instancia de diálogo entre los docentes y detallan para este momento, que el sensor rojo parte en el agua fría y el azul en la caliente, como mejora para del diseño, habrá que explicitar que identifiquen las tazas en sus fundamentos.	

c) ¿Dónde terminó el sensor que empezó en el agua caliente?

P1	c) ¿Dónde terminó el sensor que empezó en el agua caliente? en la taza templada por el equilibrio de temperatura *Transcripción* En la taza templada por el equilibrio de la temperatura.
	c) ¿Dónde terminó el sensor que empezó en el agua caliente? En la taza tibia (templada).

P2	*Transcripción* En la taza tibia (templada).
P3	c) ¿Dónde terminó el sensor que empezó en el agua caliente? En la taza tibia. (templada) *Transcripción* En la taza tibia (templada).

Evidencia y Análisis del Momento 2 c)

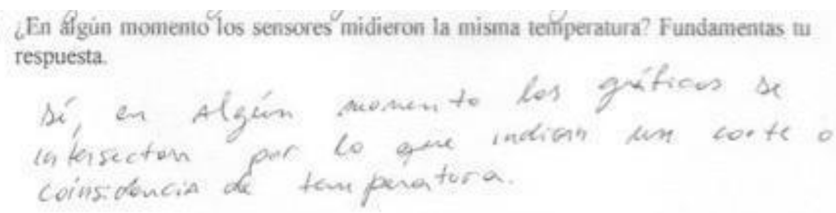
En este punto los docentes no tienen dificultad para identificar que el es el sensor azul el que comienza en el agua caliente y que finaliza en el agua templada. Al finalizar la actividad, y producirse el diálogo entre los docentes, reconocen que el gráfico finaliza aproximadamente, cerca de los 27 grados, que es la temperatura ambiente en el momento de la actividad.

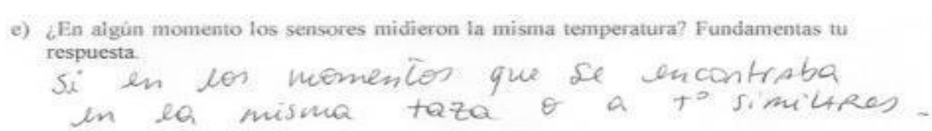
d) ¿Y qué pasó con el otro sensor?, ¿Puedes describir el movimiento que desarrollo de taza en taza?

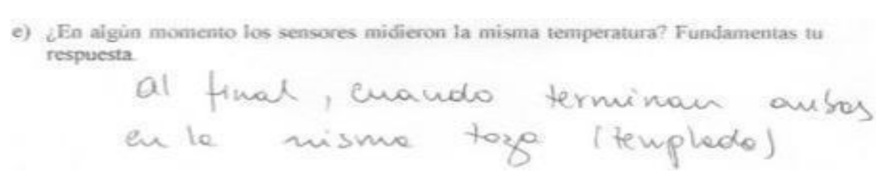
P1	d) ¿Y qué pasó con el otro sensor?, ¿Puedes describir el movimiento que desarrollo de taza en taza? también termino en la taza templada, su movimiento fue fluctuando por los cambios de temperatura realizando alzas y bajas en el gráfico *Transcripción* También terminó en la taza templada, su movimiento fue fluctuando por lo cambios de temperatura realizando alzas y bajas en el gráfico.
P2	d) ¿Y qué pasó con el otro sensor?, ¿Puedes describir el movimiento que desarrollo de taza en taza? El otro sensor finaliza de la misma forma en el agua templada. *Transcripción* El otro sensor finaliza de la misma forma en el agua templada.
P3	d) ¿Y qué pasó con el otro sensor?, ¿Puedes describir el movimiento que desarrollo de taza en taza? Terminó en el agua tibia. (templada

<table>
<tr><td></td><td>Transcripción
Término en el agua tibia (templada).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 2 d)
Este momento fue un poco más complejo para los docentes, les dificulta describir el comportamiento de taza en taza del sensor rojo. Faltó la indicación más precisa, de que fundamentan sus respuestas, para que en la descripción los participantes indicarán por cuál taza pasó específicamente el sensor en cada instante. Al finalizar la actividad reconocieron que podían hacer una lectura general del comportamiento, pero se encontraron con la dificultad, en este momento, de reconocer las tazas específicas por donde pasó el sensor. Comentaban que la falta de costumbre de analizar gráficas les “había pasado la cuenta”, lo hicieron luego en forma grupal, y lograron determinar la taza que cada momento tocó el sensor rojo. Una observación importante en este punto, es que la experimentación para ser más profunda y más efectiva, requiere de un diálogo que alimente la argumentación y la deducción.</td></tr>
</table>

e) ¿En algún momento los sensores midieron la misma temperatura? Fundamenta tu respuesta.

<table>
<tr><td>P1</td><td>
e) ¿En algún momento los sensores midieron la misma temperatura? Fundamentas tu respuesta.
Sí, en algún momento los gráficos se intersectan por lo que indican un corte o coinsidencia de temperatura.

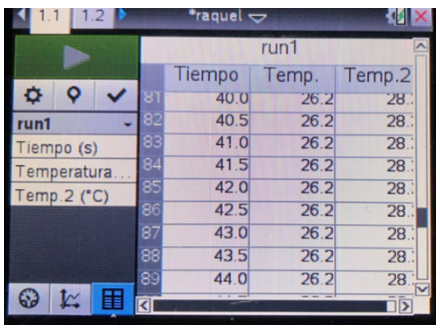
Transcripción
Si, en algún momento los gráficos se intersectan por lo que indican un corte o coincidencia de temperatura.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>
e) ¿En algún momento los sensores midieron la misma temperatura? Fundamentas tu respuesta.
Si en los momentos que se encontraba en la misma taza o a tº similares.

Transcripción
Si, en los momentos que se encontraba en la misma taza o a tº similares.</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>
e) ¿En algún momento los sensores midieron la misma temperatura? Fundamentas tu respuesta.
Al final, cuando terminan ambos en la misma taza (templado)

Transcripción
Al final, cuando terminan ambos en la misma taza (templada).</td></tr>
</table>

Evidencia y Análisis del Momento 2 d)
Los argumentos de los docentes fueron diferentes en este punto, mientras uno determina que las coincidencias de temperatura se dan en la intersección de las gráficas, otra reconoce que cuando los sensores coinciden en la misma taza coinciden las temperaturas, ninguno de los dos relaciona estos dos argumentos juntos, pero si logran asociar la misma temperatura en estas instancias. Una de las profesoras solo identifica que poseen la misma temperatura solo al final del experimento. Una vez que dialogan, al finalizar la actividad, concluyen que considerando esos dos argumentos pueden determinar bajo qué situaciones los sensores medirán la misma temperatura, pero que encontrar esos tiempos exactos desde la gráfica era un poco complejo.

Momento 3: De Análisis de la tabla

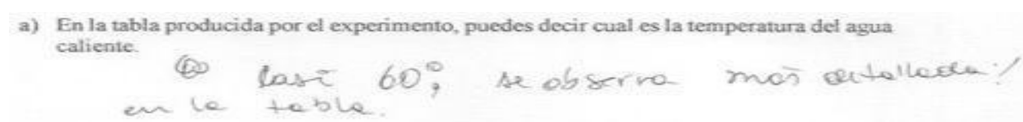


Evidencia y Análisis del Momento 3

Se presenta extracto de la tabla producida en el experimento, los docentes participantes tienen acceso, cada uno en forma independiente, a revisar la tabla producida para responder las preguntas de este momento.

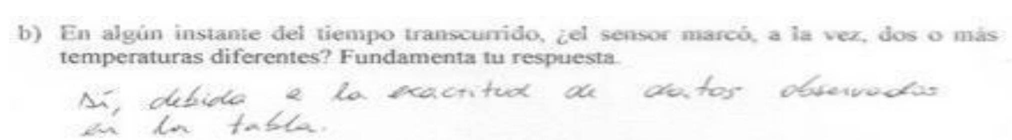
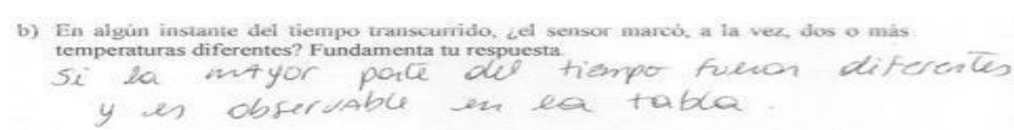
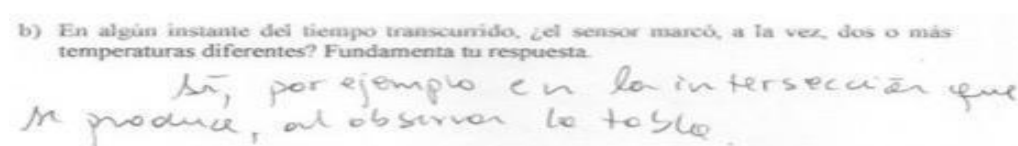
e) En la tabla producida por el experimento, puedes decir cual es la temperatura del agua caliente.

P1	a) En la tabla producida por el experimento, puedes decir cual es la temperatura del agua caliente. Si, la que tiene mayor temperatura inicial ≈ 55° *Transcripción* Si, la que tiene mayor temperatura inicial ≈55°.
P2	a) En la tabla producida por el experimento, puedes decir cual es la temperatura del agua caliente. Si la del agua caliente presenta las t° más altas. *Transcripción* Si la del agua caliente presenta las tº más altas.

P3	 a) En la tabla producida por el experimento, puedes decir cual es la temperatura del agua caliente. casi 60°, se observa más detallada en la tabla. *Transcripción* Casi 60º, se observa más detalladamente en la tabla.

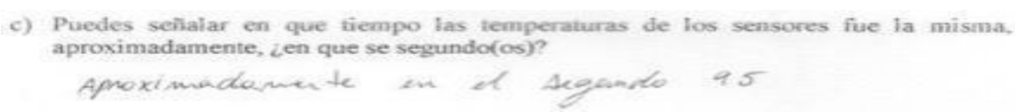
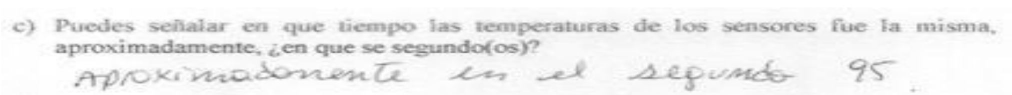
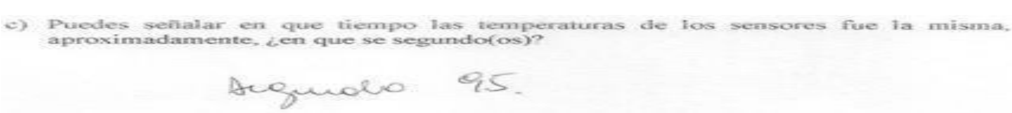
Evidencia y Análisis del Momento 3 a)
Los docentes, cada uno, revisa la tabla, uno de ellos advierte que el que inicia en el agua caliente registra la temperatura más alta, por ser la temperatura inicial. Otra indica que las temperaturas más altas de la tabla corresponden a la temperatura del agua caliente, la otra advierte algo similar, señalando que la temperatura más alta fue de casi 60º, pero indica algo importante, destaca que en la tabla las temperaturas se ven de manera más detallada. Dentro del contexto de la conversación posterior, los docentes comentan que la tabla es “súper” precisa, ya que muestra las temperaturas con “décimas”.

f) En algún instante del tiempo transcurrido, ¿el sensor marcó, a la vez, dos o más temperaturas diferentes? Fundamenta tu respuesta.

P1	 b) En algún instante del tiempo transcurrido, ¿el sensor marcó, a la vez, dos o más temperaturas diferentes? Fundamenta tu respuesta. Si, debido a la exactitud de datos observados en la tabla. *Transcripción* Si, debido a la exactitud de datos observados a través de la tabla.
P2	 b) En algún instante del tiempo transcurrido, ¿el sensor marcó, a la vez, dos o más temperaturas diferentes? Fundamenta tu respuesta. Si la mayor parte del tiempo fueron diferentes y es observable en la tabla. *Transcripción* Si la mayor parte del tiempo fueron diferentes y observable en la tabla.
P3	 b) En algún instante del tiempo transcurrido, ¿el sensor marcó, a la vez, dos o más temperaturas diferentes? Fundamenta tu respuesta. Si, por ejemplo en la intersección que se produce, al observar la tabla. *Transcripción* Si, por ejemplo, en la intersección que se produce, al observar la tabla.

Evidencia y Análisis del Momento 3 b) Esta parte del momento 3 llevó a un poco de confusión a una de las docentes, ya que no pudo reconocer en una primera instancia que existían varios instantes en los cuales la temperatura de ambos sensores coincidía, ya que al mirar la tabla y ver diferencias en las décimas, le hacía pensar que no eran coincidentes. Mientras que para los otros dos, la tabla si fue un buen referente para analizar el detalle de las coincidencias. En la conversación final de los docentes, una de las participantes comentó que observó muy pocas coincidencias y en su diálogo con los pares, advirtió que era la alta precisión del instrumento, pero que existían varios tiempos en que las temperaturas de ambos sensores eran las mismas.

g) Puedes señalar en qué tiempo las temperaturas de los sensores fue la misma, aproximadamente, ¿en que segundo(os)?

P1	 c) Puedes señalar en que tiempo las temperaturas de los sensores fue la misma, aproximadamente, ¿en que se segundo(os)? Aproximadamente en el segundo 95 *Transcripción* Aproximadamente en el segundo 95.
P2	 c) Puedes señalar en que tiempo las temperaturas de los sensores fue la misma, aproximadamente, ¿en que se segundo(os)? Aproximadamente en el segundo 95. *Transcripción* Aproximadamente en el segundo 95.
P3	 c) Puedes señalar en que tiempo las temperaturas de los sensores fue la misma, aproximadamente, ¿en que se segundo(os)? Segundo 95. *Transcripción* Segundo 95.

Evidencia y Análisis del Momento 3 c) Se observa que los tres docentes identifican el segundo 95 como el tiempo en que ambos sensores marcaron la misma temperatura, ya que entre el segundo noventa y el segundo 100, aproximadamente, es el período en que ambos sensores estuvieron durante más tiempo dentro de la misma taza y en la tabla buscaron el valor común más preciso, esto se dio efectivamente en el segundo 95. Al finalizar la actividad, los docentes en este punto, concordaban en que la tabla tuvo muchos momentos en que las temperaturas coincidían, pero que ellos buscaban la exactitud numérica que no necesariamente se va a presentar con instrumento de este tipo, pero consideraban que había sido entretenido buscar en la tabla de manera más precisa algo que ven de manera general en la gráfica, de palabras de los docentes, “usamos la gráfica para mirar todo y la tabla para el detalle”.

En este sentido, aparece la diferencia entre lo global y lo puntual, es decir, cuando quiero ver un comportamiento más general miro la gráfica y cuando quiero algo más detallado, de mayor precisión acudir a la tabla, es decir, utilizar las representaciones según la necesidad de lo que se desea analizar, no solo porque debo transitar entre ellas para cambiar de representación sin un sentido claro.

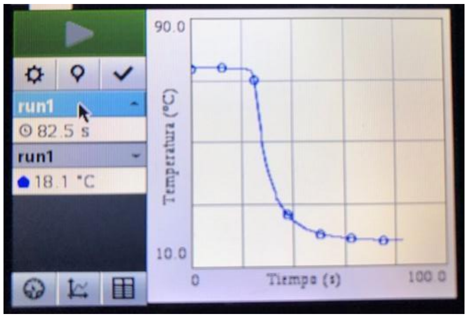
h) ¿Qué pasará si dejamos los sensores fuera de todas las tazas?

P1	d) ¿Qué pasará si dejamos los sensores fuera de todas las tazas? debería tender a medir la misma temperatura (ambiente *Transcripción* Debería tender a medir la misma temperatura (ambiente).
P2	d) ¿Qué pasará si dejamos los sensores fuera de todas las tazas? Tenderían a marcar la misma tº. *Transcripción* Tenderían a marcar la misma tº.
P3	d) ¿Qué pasará si dejamos los sensores fuera de todas las tazas? Estarán a tº ambiente *Transcripción* Estarán a temperatura ambiente.
Evidencia y Análisis del Momento 3 d) Para los docentes la respuesta a esta pregunta les fue muy natural. Argumentaron al final de la actividad que esa temperatura ambiente dependería del lugar, de la época del año y de que ambos sensores estuvieran en las mismas condiciones, por lo sensibles que observaron que eran en el registro de las temperaturas. Es importante destacar estos argumentos que surgen a partir de algo que tiene una respuesta simple y quizás evidente para algunos.	

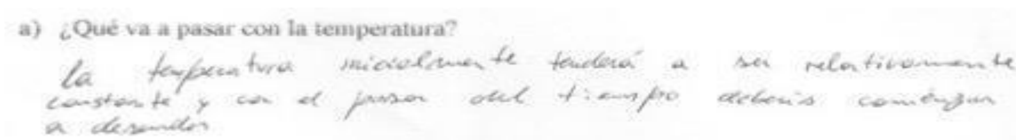
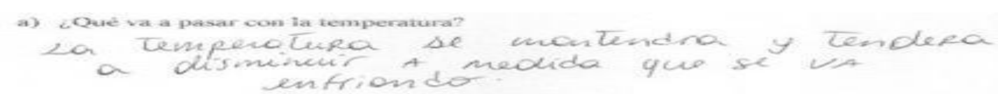
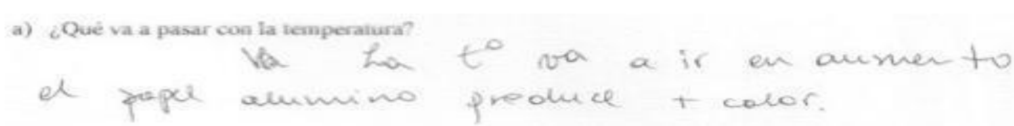
Momento 4: De Anticipación

Hagamos otro experimento:

Supongamos que se tiene una pistola con silicona, un trozo de papel de aluminio y un sensor de temperatura.
Se coloca en el papel de aluminio un poco de silicona caliente y sobre ella el sensor, luego se envuelve el sensor con la silicona en el papel aluminio.

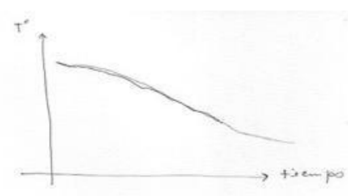
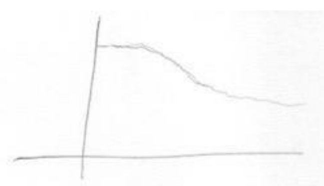
	Evidencia y Análisis del Momento 4 Se presenta gráfica similar a la producida en el experimento.

a) ¿Qué va a pasar con la temperatura?

P1	 a) ¿Qué va a pasar con la temperatura? la temperatura inicialmente tenderá a ser relativamente constante y con el pasar del tiempo debería comenzar a descender *Transcripción* La temperatura tenderá inicialmente a ser relativamente constante y con el pasar del tiempo debería comenzar a descender.
P2	 a) ¿Qué va a pasar con la temperatura? La temperatura se mantendra y tendera a disminuir a medida que se va enfriando. *Transcripción* La temperatura se mantendrá y tenderá a disminuir a medida que se va enfriando.
P3	 a) ¿Qué va a pasar con la temperatura? Va la t° va a ir en aumento el papel aluminio produce + calor. *Transcripción* La temperatura va a ir en aumento, el papel aluminio produce + calor.
Evidencia y Análisis del Momento 4 a) Esta instancia predictiva tomó un tiempo de reflexión para cada docente, cada uno de ellos presenta sus argumentos dos de ellos similares, en relación a que la temperatura tendería a disminuir a medida que el tiempo transcurre, solo una docente argumenta sosteniendo que el papel aluminio haría que la temperatura aumentará. Los docentes comentaron que no fue fácil determinar este comportamiento, pero se apoyaron en las experiencias de los momentos anteriores para elaborar su gráfica predictiva, este momento de anticipación	

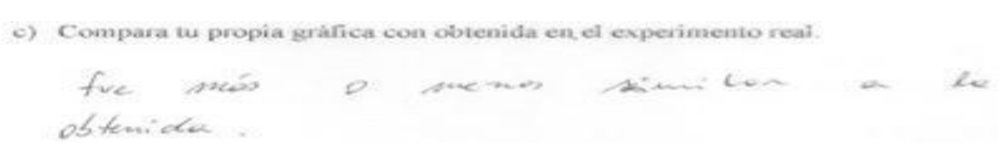
cumplió su objetivo, puesto que permite anticipar un comportamiento con una fundamentación de fondo.

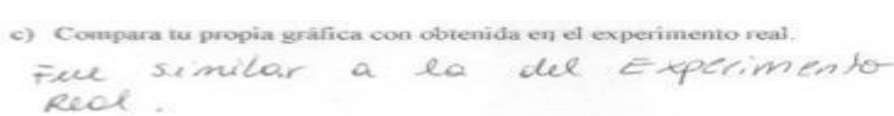
b) ¿Cómo será la gráfica que va a proporcionar el sensor? Dibuja tu propia gráfica.

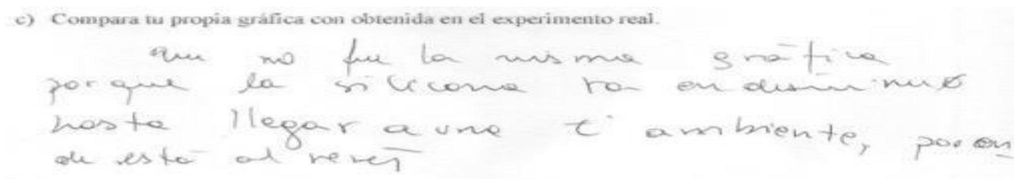
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P1</td><td>P2</td><td>P3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Evidencia y Análisis del Momento 4 b)
Dos de los docentes generaron gráficas bastantes relacionadas con la real, la docente que generó una gráfica diferente comprendió al final de la actividad, en el dialogó con sus pares, cual había sido su error, entre los tres conversaban respecto a que la silicona se enfriaba rápidamente a medida que transcurría el tiempo, de hecho, comentaban que tal vez esa característica permitía que fuese un elemento apto para ser utilizado en manualidades escolares. La anticipación, finalmente les permite elaborar argumentos en base a situaciones reales y cotidianas dentro de la vida escolar.</td></tr>
</table>

c) Compara tu propia gráfica con la obtenida en el experimento real.

Se presenta al docente la gráfica obtenida a través del comportamiento del sensor en el experimento real. Así podrá verificar si lo que imagina y anticipa es efectivamente lo que sucede.

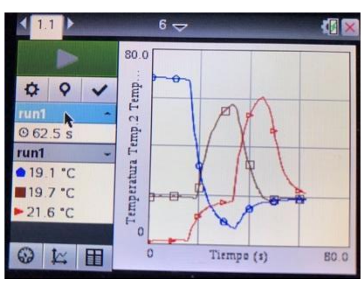
<table>
<tr><td>P1</td><td>
c) Compara tu propia gráfica con obtenida en el experimento real.
fue más o menos similar a la obtenida.

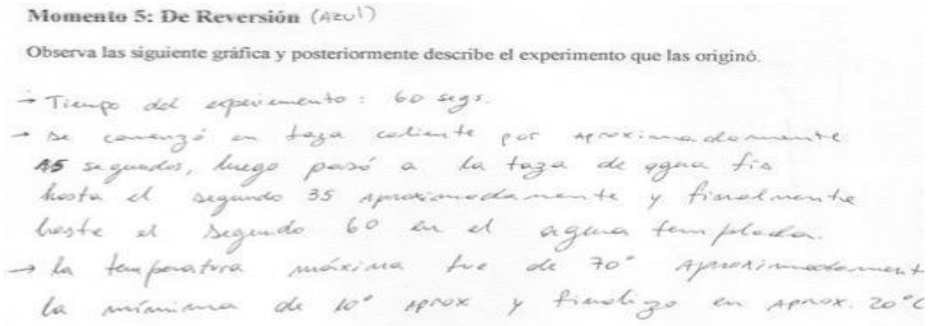
Transcripción
Fue más o menos similar a la obtenida.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>
c) Compara tu propia gráfica con obtenida en el experimento real.
Fue similar a la del Experimento Real.</td></tr>
</table>

	Transcripción Fue similar a la del experimento real.
P3	 c) Compara tu propia gráfica con obtenida en el experimento real. no fue la misma gráfica porque la silicona va en disminuyendo hasta llegar a una t° ambiente, por en de esto al revez *Transcripción* No fue la misma gráfica porque la silicona va en disminución hasta llegar a una temperatura ambiente, por ende, está al revés.
Evidencia y Análisis del Momento 4 c) Una vez concluida la actividad, pido a los participantes que muestren a todos sus gráficas y las comparen, unos con más aciertos que otros, cada uno argumenta el porqué de la forma de su curva y se genera entre ellos un diálogo bastante enriquecedor. Cada docente compara su gráfica con la obtenida en el experimento real y logra, el docente que generó una gráfica diferente, comprender cuál había sido su error y cuál era el comportamiento correcto que debía describirse en el experimento. Un comentario interesante respecto a este momento, es que los docentes destacan que todas las gráficas que han obtenido hasta el momento no tienen comportamientos lineales.	

Momento 5: De Reversión

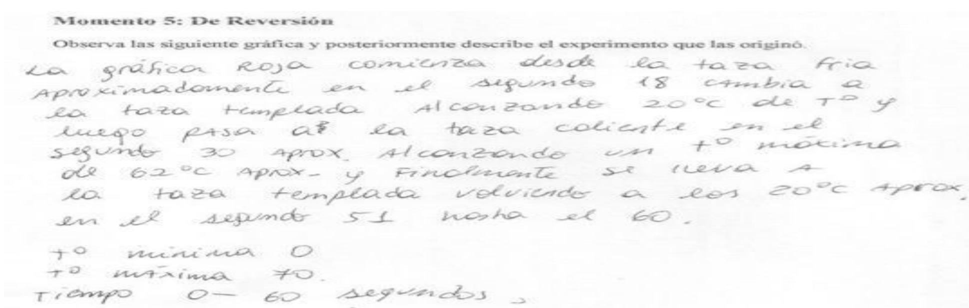
Observa las siguientes gráficas y posteriormente describe el experimento que las originó.

	Evidencia y Análisis del Momento 5 Se presenta gráfica presentada en este momento, se le asigna un color de gráfica diferente a cada docente: Ariel: Azul Victoria: Roja Loreto: Café

<table>
<tr>
<td>P1</td>
<td>


Transcripción

Tiempo del experimento: 60 seg.
Se comenzó en taza caliente por aproximadamente 15 segundos, luego pasó a la taza de agua fría hasta el segundo 35 aproximadamente y finalmente hasta el segundo 60 en el agua templada.
La temperatura máxima fue de 70º aproximadamente, la mínima de 10º aprox y finaliza aprox. 20º.

</td>
</tr>
<tr>
<td>P2</td>
<td>


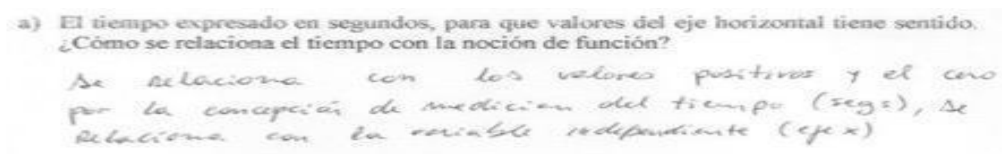
Transcripción
La gráfica roja comienza desde la taza fría aproximadamente en el segundo 18 cambia a la taza templada alcanzando 20ºC de tº y luego pasa a la taza caliente en segundo 30 aprox. Y finalmente se lleva a la taza templada volviendo a los 20ºC aprox. en el segundo 51 hasta el 60.
Tº mínima 0
Tº máxima 70
Tiempo 0 – 60 segundos
</td>
</tr>
</table>

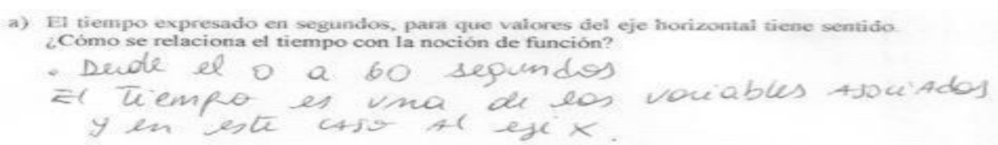
P3	**Momento 5: De Reversión** (color café). **Observa las siguiente gráfica y posteriormente describe el experimento que las originó.** - La gráfica comienza en agua templada. - Se mantiene constante, por pero al ~~...~~ segundo 20 se va al agua caliente y ~~con~~ sube su temperatura hasta llegar a 55° aproximadamente, luego va bajando ~~los~~ disminuyendo hasta llegar a la misma t° del inicio (agua templada). *Transcripción* - La gráfica comienza en agua templada. - Se mantiene constante, pero al segundo 20 se va al agua caliente y sube su temperatura hasta llegar a 55º aproximadamente, luego bajando disminuyendo hasta llegar a la misma tº del inicio (agua templada)
Evidencia y Análisis del Momento En este punto los docentes no tienen dificultades para interpretar el comportamiento de los sensores asignados y reconocer las tazas por las cuales pasó el sensor mientras se realizó la experimentación, unos fueron más detallistas e indicaron los cambios de temperatura en tiempos específicos. Al finalizar la actividad, los docentes comentaban que este momento les fue "sencillo" de realizar, según sus propias palabras, argumentaban que la realización de las actividades anteriores, les generaron las herramientas suficientes para comprender el comportamiento de cada uno de los sensores.	

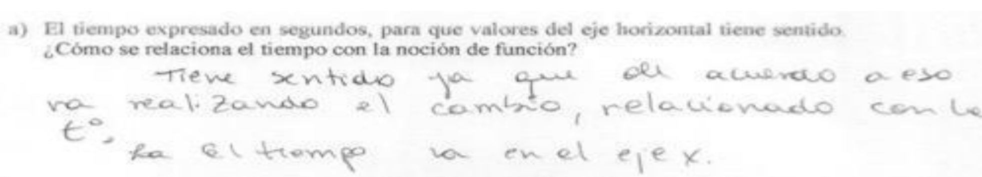
Momento 6: De la Formalización

En los momentos anteriores hemos explorado, fundamentalmente a través de la gráfica, el comportamiento de la temperatura del agua en un período de tiempo.

a) El tiempo expresado en segundos, para que los valores del eje horizontal tiene sentido. ¿Cómo se relaciona el tiempo con la noción de función?

<table>
<tr><td>P1</td><td>
a) El tiempo expresado en segundos, para que valores del eje horizontal tiene sentido. ¿Cómo se relaciona el tiempo con la noción de función?
Se relaciona con los valores positivos y el cero por la concepción de medicion del tiempo (seg.), se relaciona con la variable independiente (eje x)

Transcripción
Se relaciona con los valores positivos y el cero por la concepción de la medición del tiempo (seg.), se relaciona con la variable independiente (eje x).</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>
a) El tiempo expresado en segundos, para que valores del eje horizontal tiene sentido. ¿Cómo se relaciona el tiempo con la noción de función?
• Desde el 0 a 60 segundos
El tiempo es una de las variables asociados y en este caso al eje x.

Transcripción
Desde el 0 a 60 segundos.
El tiempo es una de las variables asociadas y en este caso al eje x.</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>
a) El tiempo expresado en segundos, para que valores del eje horizontal tiene sentido. ¿Cómo se relaciona el tiempo con la noción de función?
Tiene sentido ya que de acuerdo a eso va realizando el cambio, relacionado con la tº, la el tiempo va en el eje x.

Transcripción
Tiene sentido ya que de acuerdo a eso va realizando el cambio, relacionado con la tº. El tiempo va en el eje x.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 6 a)
Los docentes identifican los valores para los cuales tiene sentido la temperatura, pero no identifican la relación de estos valores con el dominio de la función. Al finalizar la actividad, advierten esta situación y manifiestan que “ahora si les queda más claro que es el dominio”.</td></tr>
</table>

b) La temperatura ubicada en el eje vertical, expresada en grados Celsius, ¿Para que valores tiene sentido? ¿Cómo se relaciona la temperatura con la noción de función?

<table>
<tr><td>P1</td><td>Transcripción
Tiene sentido para los valores positivos y negativos (-273ºC como mínimo) y se relaciona con la variable dependiente (del tiempo transcurrido) (eje y).</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>Transcripción
Desde 0 a 70ºC aproximadamente.
También sería una variable asociada al eje y en este caso.</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>Transcripción
Tiene sentido cuando se relaciona la tº con el cambio producido a través de los segundos, mientras la tº le corresponde un único cambio de segundo si se le aplica + calor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 6 b)
Al igual que en el ítem anterior, los docentes identifican los valores para los cuales tiene sentido el tiempo, pero no identifican la relación de estos valores con el recorrido de la función. Al finalizar la actividad, advierten también esta situación al igual que con el dominio. Un comentario importante en este sentido, es que ambos, dominio y recorrido no son necesariamente todo un conjunto numérico, pueden ser solo un pedacito de recta.</td></tr>
</table>

c) ¿Cómo se relacionan la temperatura del agua con el tiempo transcurrido?

P1	c) ¿Cómo se relacionan la temperatura del agua con el tiempo transcurrido? a mayor tiempo transcurrido la temperatura se va estancando en torno a la temperatura real del agua en donde se apoya *Transcripción* A mayor tiempo transcurrido las temperaturas se van estancando en torno a la temperatura real del agua en donde se apoya.
P2	c) ¿Cómo se relacionan la temperatura del agua con el tiempo transcurrido? Al transcurso del tiempo se pueden observar las variaciones de temperatura y se podría establecer la relación entre ambos variables. *Transcripción* Al transcurso del tiempo se pueden observar las variaciones de temperatura y se podría establecer la relación entre amabas variables.
P3	c) ¿Cómo se relacionan la temperatura del agua con el tiempo transcurrido? El agua mientras +tº se le aplica va aumentando en un tiempo, al igual que se le aplica agua fría. *Transcripción* El agua mientras +tº se le aplica va aumentando en un tiempo, al igual que si se le aplica agua fría.
Evidencia y Análisis del Momento 6 c) No fue simple establecer describir una relación entre las variables, una vez finalizada la actividad, los tres docentes coincidieron en que trataban de buscar una relación algebraica que no lograron establecer, pero finalmente se dieron cuenta dentro de su discusión que no era eso lo que le solicitaban.	

d) ¿A cada temperatura (en grados Celsius) se le puede asociar, siempre un único instante de tiempo?

P1	d) ¿A cada temperatura (en grados Celsius) se le puede asociar, siempre, un único instante de tiempo? ~~Así~~ No, hay un par de temperaturas que se repiten a lo largo del experimento. *Transcripción*

<table>
<tr><td></td><td>No, hay un par de temperaturas que se repiten a lo largo del experimento.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>d) ¿A cada temperatura (en grados Celsius) se le puede asociar, siempre, un único instante de tiempo?
Si, para saberlo más en detalle observando la tabla asociada a la gráfica.

Transcripción
Si, para saberlo más en detalle observando la tabla asociada a la gráfica.</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>d) ¿A cada temperatura (en grados Celsius) se le puede asociar, siempre, un único instante de tiempo?
no necesaria/

Transcripción
No necesariamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 6 d)
Solo una de las docentes no logró una afirmación correcta, aunque ella se concentro más en la tabla que en la gráfica. Una vez finalizada la actividad, al comparar sus respuestas, entablaron un diálogo en el cual se percata la docente que estaba abordando mal lo consultado, indicaba que la poca costumbre de mirar los conceptos asociados a la función a partir del gráfico la habían confundido, pero que ahora si le encontraba mucho sentido a mirar esta condición desde un punto de vista gráfico, que era más simple comprender porque a una determinada temperatura puede ser registrada en más de un instante de tiempo.</td></tr>
</table>

e) A cada instante de tiempo (en segundos), ¿Cuántos valores de temperatura se le pueden asociar?, ¿será esto relevante para la noción de función?

<table>
<tr><td>P1</td><td>e) A cada instante de tiempo (en segundos), ¿Cuántos valores de temperatura se le pueden asociar?, ¿será esto relevante en el contexto de la noción de función?
a cada segundo se le asocia solo 1 temperatura. y si es relevante para ver el tipo de función que puede llegar a ser.

Transcripción
A cada segundo se le asocia solo 1 temperatura, y si es relevante para ver el tipo de función que puede llegar a ser.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>e) A cada instante de tiempo (en segundos), ¿Cuántos valores de temperatura se le pueden asociar?, ¿será esto relevante en el contexto de la noción de función?
se puede asociar un unico valor.

Transcripción
Se puede asociar un único valor.</td></tr>
</table>

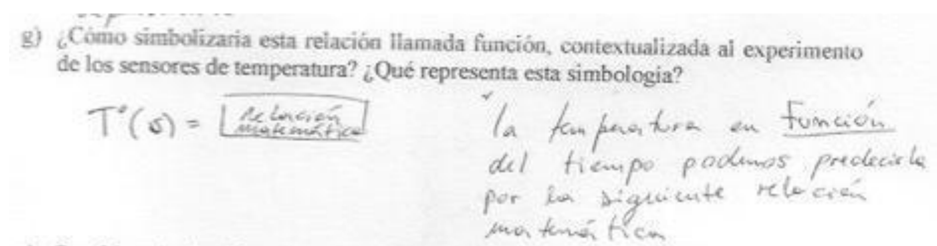
P3	e) A cada instante de tiempo (en segundos), ¿Cuántos valores de temperatura se le pueden asociar?, ¿será esto relevante en el contexto de la noción de función? Un único valor, ya que según el concepto le corresponde un único valor. *Transcripción* Un único valor, ya que según el concepto le corresponde un único valor.
Evidencia y Análisis del Momento 6 e) Los docentes no presentan inconvenientes para establecer la condición solicitada. En el diálogo posterior, los docentes manifiestan que mirar el cumplimiento de esta condición desde el punto de vista gráfico les resultó más sencilla, más simple, indicando "me gustó".	

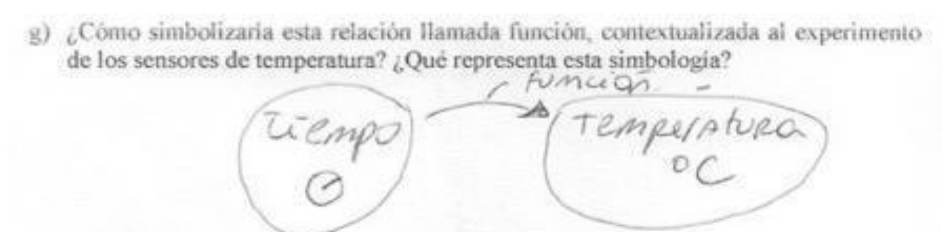
f) A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, es posible estructurar la noción de función y elaborar una definición. ¿Cuál sería esa definición?

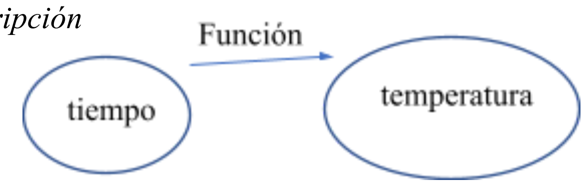
P1	f) A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, ¿es posible estructurar la noción de función y elaborar una definición?, ¿Cuál sería esa definición? Sí, podríamos indicar que: "una función es una relación matemática entre dos variables (dependiente e independiente), en donde cada valor de la independiente solo puede tener un valor asociado de la dependiente" *Transcripción* Si, podríamos indicar que: "una función es una relación matemática entre dos variables (dependiente e independiente), en donde cada valor de la independiente solo puede tener un valor asociado de la dependiente".
P2	f) A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, ¿es posible estructurar la noción de función y elaborar una definición?, ¿Cuál sería esa definición? En este caso podríamos establecer la noción de función como la relación entre la variable tiempo y temperatura. Asociando a un único tiempo una temperatura. *Transcripción* En este caso podríamos establecer la noción de función como la relación entre la variable tiempo y temperatura, asociando a un único tiempo una temperatura.
P3	f) A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, ¿es posible estructurar la noción de función y elaborar una definición?, ¿Cuál sería esa definición? Sí, a cada instante de tiempo le corresponde un único cambio de t°, es decir, una relación de uno a uno. *Transcripción*

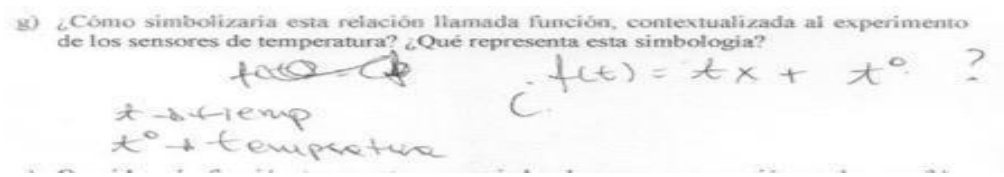
<table>
<tr><td></td><td>Si, a cada instante de tiempo le corresponde un único cambio de tº, es decir, una relación de uno a uno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 6 f)
Este momento es el más importante de toda la actividad, puesto que es en este momento en el cual los docentes presentan una definición de la noción de función, contextualizada a la experimentación realizada, lo interesante es que no aparecen elementos tan abstractos como la metáfora de la máquina o con el hecho de asociar un número de un conjunto con otro numero de otro conjunto sin un sentido o condiciones claras. El diálogo que surge, al finalizar la actividad, en torno a este momento, es que, según los docentes, la definición de función emana de forma “natural” en esta ocasión, influenciada lógicamente por las actividades realizadas y las preguntas planteadas anteriormente.</td></tr>
</table>

g) ¿Cómo simbolizaría esta relación llamada función, contextualizada al experimento de los sensores de temperatura? ¿Qué representa esta simbología?

<table>
<tr><td>P1</td><td>
g) ¿Cómo simbolizaría esta relación llamada función, contextualizada al experimento de los sensores de temperatura? ¿Qué representa esta simbología?

Transcripción
Tº(s) = Relación matemática
“La temperatura en función del tiempo podemos predecirla por la siguiente relación matemática”</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>
g) ¿Cómo simbolizaría esta relación llamada función, contextualizada al experimento de los sensores de temperatura? ¿Qué representa esta simbología?

Transcripción

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>P3</td><td>
g) ¿Cómo simbolizaría esta relación llamada función, contextualizada al experimento de los sensores de temperatura? ¿Qué representa esta simbologia?
¿f(t) = tx + t°?
t → tiemp
t° → temperatura
Transcripción
¿f(t) = tx + tº?

t = tiempo
tº = temperatura</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia y Análisis del Momento 6 g)
En este ítem una docente se confunde ya que intenta elaborar una representación algebraica y no necesariamente buscar una simbología para este contexto. Presentan distintas formas de simbolizar una función dentro del contexto de temperatura, pero finalmente al comparar sus respuestas y generar el diálogo entre ellos, concuerdan en que no les solicitaban una representación algebraica, que en ningún momento la han utilizado y que no fue necesaria para definir el concepto de función. El otro comentario que se rescata de este punto es que para simbolizar una función no necesariamente deben utilizar la expresión f(x), que pueden personalizarla según el contexto y así darle más sentido a la relación entre las variables y no generar un “mero acto mecánico”, como ellos lo describen.</td></tr>
</table>

h) Considere la función temperatura, asociada a uno de los sensores, elabore una tabla, que incluya la estructura de pares ordenados. Considere solo 5 valores de tiempo.

P1

eje x Tiempo (seg)	eje y Temperatura (°C)	
0	1	
20	16	
30	18	
40	56	
60	20	

Transcripción

Eje x Tiempo (seg)	Eje y Temperatura (ºC)
0	1
20	16
30	18
40	56
60	20

P2

tiempo	temperatura	(x, y)
0	0	(0, 0)
20	10	(20, 10)
40	18	(40, 18)
50	20	(50, 20)
60	20	(60, 20)

Transcripción

Tiempo	Temperatura	(x,y)
0	0	(0,0)
20	10	(20,10)
40	18	(40,18)
50	20	(50,20)
60	20	(60,20)

P3

a) Considere la función temperatura, asociada al sensor que partió en el agua fría, elabore una tabla, que incluya la estructura de pares ordenados. Considere solo 5 valores de tiempo.

tiempo	temperatura ~~tiempo~~	Par.
0	20	(0, 20)
10	20	10, 20
20	25	20, 25
30	50	30, 50.
50	20	50, 20

Transcripción

Tiempo	Temperatura	(x,y)
0	20	(0,20)
10	20	(10,20)
20	25	(20,25)
30	50	(30,50)
60	20	(60,20)

Evidencia y Análisis del Momento 6 h)

En este ítem se aprecia en la confección de las tablas de los docentes, que de la asociación que se establece entre tiempo y temperatura, a través de la función, es posible distinguir valores puntuales, pero que según los docente, dentro de su diálogo, no permiten apreciar claramente un comportamiento, sirve solo para cosas específicas, la gráfica permite ver el comportamiento general.

Capítulo 5. Reflexiones finales

Este proyecto de investigación surge a partir de inquietudes personales, fundamentadas en mis propias prácticas docentes, descritas en el primer capítulo, relacionadas con el concepto de función.

En el transcurso de este proceso investigativo, se fueron generando variaciones desde muchos ámbitos, entre ellos los fundamentos teóricos, los participantes, la forma de recopilar la información. Cada una de esas instancias de cambio, si bien generaron bastante inquietud en algún instante, se transformaron en una riqueza, puesto que significaron un aprendizaje muy valioso desde el punto de vista disciplinar y desde la didáctica. Fueron generando fortalezas dentro de esta investigación.

Cumplimiento de objetivos

El objetivo general de la investigación fue "Aplicar una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica, para que el docente resignifique el concepto de función y para la validación del instrumento", para lograr este objetivo se plantean 3 objetivos específicos, apuntando cada uno de ellos a fases en el desarrollo del proyecto, las cuales fueron:

Fase 1, entrevista inicial, cuyo objetivo fue "Identificar los significados existentes en el discurso docente, en relación al concepto de función", las entrevistas se desarrollaron según lo esperado, en formato individual, se generó en cada una de ellas un espacio de confianza para que los docentes entrevistados pudieran responder, dejando evidencia explícita de que el dME estaba muy presente en sus discursos, relacionados al concepto de función. La metáfora de la máquina que es un ícono importante en el currículum nacional, emerge como estrategia pedagógica protagonista en el discurso docente, se evidencia además la carencia de otras estrategias, que apoyen la comprensión del concepto por parte de los estudiantes y más aún la entrevista inicial evidencia también que los propios docentes presentan dudas respecto a ciertos elementos relacionados al concepto de función, tales como el dominio y recorrido. En esta primera fase se observa también que el rol de la modelación no está claro para los docentes, la identifican como una habilidad, pero el currículum la trata como el tránsito entre las representaciones de la función, lo que genera ciertas dudas en los docentes.
La fase 2, aplicación de la situación de modelación, tenía por objetivo "aplicar una situación de modelación que aborda el concepto de función, utilizando un modelo basado en la teoría socioepistemológica", esta instancia permitió a los docentes conectarse con una manera distinta de relacionarse con el concepto de función, algunas de las dificultades que se presentaron a los docentes, tuvieron relación con el hecho de que ellos en ciertos instantes esperaban que emergiera la expresión algebraica, lo que no sucedió y les generó, a uno de ellos al menos, un poco de inquietud. Uno de los docentes participantes afirmó que se le hizo muy difícil realizar las actividades, ya que esperaba que fueran ejercicios más mecánicos y no que requirieran de conjeturar o argumentar, se sintió un poco abrumada por el tipo de actividad. En general, la falta de costumbre de abordar situaciones de este tipo, les impidió tener fluidez en la redacción de sus respuestas, en poder argumentar en forma escrita.
Creo que esto último reafirma el hecho de que el predominio algebraico, descrito en el dME ha mermado la capacidad del propio docente, de generar análisis y producir argumentos con fundamento matemático, puesto que mayoritariamente se ha profundizado en la mecánica del concepto de función.

La fase 3, entrevista final, que tenía por objetivo "Contrastar los significados identificados en el discurso docente, respecto del concepto de función, con las opiniones que emergen posteriormente a la aplicación de la situación de modelación", en esta fase la conversación se generó más fluida con los docentes participantes, en general, la aplicación de la situación de modelación generó en ellos grandes variaciones en su perspectiva, respecto al concepto de función, les gusto mucho la experimentación, consideraron que era un contexto tan simple, observar las variaciones de las temperaturas a partir de dos sensores, que el contexto en sí no requería mucha explicación, lo cual permitía concentrarse absolutamente en observar el comportamiento de los datos que se registraban. Dentro de las respuestas a las preguntas que se plantearon, comenzaron a emerger palabras y concepciones que ya no están fundamentadas sólo sobre lo que enmarca el dME, sino que se van acercando a la CSCM, instando a comprender el comportamiento gráfico de una experimentación o fenómeno, incorporar la argumentación, modelar situaciones para comprender el entorno. Se evidencian también, a través de esta instancia, las necesidades de los docentes, de profundizar en ciertos elementos que les permitan ampliar sus enfoques respecto al concepto de función.

Todo lo anterior, permite argumentar que el objetivo de esta investigación se ha cumplido, dado que los docentes participantes han resignificado el concepto de función, en concepciones que van más allá de considerarla una máquina que transforma números en otros números, sino que ahora el docente contempla el concepto de función como una estructura modeladora de situaciones o fenómenos, que no necesitan estar tan lejanos del cotidiano de sus estudiantes, que la simpleza de sus prácticas sociales, la graficación y la argumentación, pueden ser los elementos que le faciliten la comprensión de este importante constructo.
En consecuencia, puedo conclluir, que el supuesto de trabajo que planteaba que “La aplicación de una situación de modelación, enmarcada en la teoría socioespistemológica, que aborda el concepto de función a través de la experimentación de un fenómeno, contribuye a la resignificación de ésta, por parte de docentes de matemática, puesto que promueve una perspectiva que disminuye el predominio de lo algebraico y releva el concepto a la comprensión de fenómenos a partir de su comportamiento gráfico”, se ha cumplido.

Aspectos Positivos y Negativos del Proceso

Creo que uno de los aspectos positivos es el haber podido cumplir el deseo personal de profundizar en el entendimiento de la problemática que encierra el concepto de función y sentir que se aporta en no sólo describirla, sino que proponer una alternativa para abordarla. Otro de ésts aspectos, que rescato profundamente, son las respuestas francas y honestas de los docentes participantes en las entrevistas, que aportan información relevante para quienes nos interesamos por la matemática educativa, puesto que nos plantean desafios importantes en generar instancias que permitan apoyar a los docentes que se desenvuelven en los colegios de nuestro país, en ampliar y profundizar sus conocimientos disciplinares y didácticos en la enseñanza de la matemática. En este mismo sentido es valioso rescatar lo siguiente:

- Que los docentes consideran, todo el proceso en el que participaron, como una oportunidad de aprendizaje.

- Qué a partir del proceso en que participaron los docentes, naciera en ellos el interés de querer un perfeccionamiento en este ámbito. Producto de ello quedó el compromiso de adecuar la situación de modelación para que ellos, después de una capacitación, puedan enseñar el concepto de función a sus estudiantes de octavo básico, este año escolar.
- Que los docentes participantes, puedan ver en otros instrumentos, como los sensores de temperatura, una herramienta que aporte de manera innovadora en sus procesos de enseñanza y se abra una puerta más amplia al trabajo interdisciplinario.

Y el último aspecto, tan relevante como los anteriores, es la riqueza de los aprendizajes adquiridos, entregados por académicos que aportaron en la construcción de este proyecto de investigación, ya sea en las asignaturas del MEM y particularmente las enseñanzas de mis pacientes profesoras Guía y Coguía, quienes con sus aportes invaluables, enriquecieron guiaron esta investigación.

Respecto a los aspectos negativos, las complicaciones mayores se presentaron en la dificultad de realizar el proceso de investigación con un mayor número de docentes, las escasas horas libres y las exigencias laborales no permitieron que dos de los cinco docentes originales, participaran de la investigación, habría sido enriquecedor contar con mayor información.
Otro aspecto a mejorar son en relación algunas de las preguntas de la situación de modelación, en la cuales se debiera ser más explícitos en que la respuesta debe ser más amplia y con la mayor argumentación posible.

Referencias

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. I., & Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos.

Aparicio, Eddie, et al. "Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos." (2010): 167-147.

Arcos, J. (2017). Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica. *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*.

Bermúdez, E.A., Gutiérrez, H., Wagner, G. (2018) Formación de profesores para una educación matemática en y para la diversidad. *Sophia*, 14(1) 65-74. doi: 10.18634/sophiaj.14w.1i823

Briceno Montoya, Alexander (2019). Les interprétations et représentations de la notion de fonction chez les futurs enseignants de mathématiques au secondaire, Canadá [Mémoire, Université du Québec à Montréal], Maîtrise en mathématiques Université du Québec à Montréal.

Cantoral, Ricardo; Reyes-Gasperini, Daniela; Montiel, Gisela (2014). *Socioepistemología, matemáticas y realidad.* Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 7(3), pp. 91-116 .

Carocca, C. (2020). Perspectivas de modelación en la formación inicial del docente de matemáticas. Un estudio de los campos disciplinares, Chile [Tesis Licenciatura, Universidad de Santiago de Chile]. Repositorio institucional de la Universidad de Santiago de Chile.

Cordero, Francisco (2005). *La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar.* En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 477-482). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F., Gómez, K., Soto, D. G. S., & Crocci, H. S. (). Opacidad y adherencia, tres fenómenos del discurso matemático escolar.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar.

Farfán, Rosa y García, Mario A. (2005). *El concepto de función: un breve recorrido epistemológico.* En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta

Flores, H. P. (2020). Construcción y validación de cuestionarios sobre la práctica reflexiva y el desarrollo profesional docente. *Desafios*, *11*(1), 48-61.

Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 489-494). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, Karla; Silva, Héctor; Cordero, Francisco; Soto, Daniela (2014). *Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1457-1464). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Guerra, E. M. G., Patermina, H. E. H., & Jácome, A. E. C. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia et technica*, *20*(3), 278-285.

Lozano, M. E. D., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *11*(41).

Méndez, M. E. M., & Cordero, F. (2009). La función de la modelación en la resignificación de conocimiento matemático.

Moreno, E. A. R. (2002). Concepciones de práctica pedagógica. *Folios*, (16), 105-129.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7º básico – 2º medio*. Santiago de Chile.
MINEDUC. (2019). *Fundamentos bases curriculares 3º y 4º medio.* Santiago de Chile.
Osorio, F. C. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *1*(1), 56-74.

Pardo Abril, N. G. (1999). Análisis crítico del discurso: un acercamiento a las representaciones sociales. *Forma y función*.

Pezoa Reyes, M. I., & Morales Soto, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *11*(2), 52-63.

Reyes, D., y Cantoral, R. (2012). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. 43-51

Rojas, W. J. C. (2019). La investigación cualitativa en educación. *Horizonte de la Ciencia*, *9*(17), 159-168.

Ruiz, M. J. C., y Palomino, M. D. C. P. (2015). Cuestionario para futuros docentes de Educación Secundaria acerca de las percepciones sobre atención a la diversidad: Construcción y validación del instrumento. *Estudios sobre educación*, *29*, 165-189.

Ruiz-Esparza (2014). Rediseño de una situación específica desde una categoría del cotidiano: de la divulgación a la socialización de la ciencia, México [Tesis Maestro en ciencias, Especialidad Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

Sastre, P., Rey, G., Boubée, C., y Cañibano, A. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 153-162.

Soto, D. (2020). Diseño de situaciones de modelación. Una propuesta para la formación inicial de docente de matemática. *UCMaule*. 58,107-139. DOI: http://doi.org/10.29035/ucmaule.58.107.

Soto, Daniela; Cantoral, Ricardo (2014). *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 50, pp. 1525-1544 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

Suárez, L., Ruiz, B., Torres, J. L., Gómez, A., Flores, C., & Luna, V. (2016). Modelación graficación para la matemática escolar. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *1*, 492-503.

Taylor, S. J., y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación* (Vol. 1, p. 348). Barcelona: Paidós.

Téllez, L. S., y Osorio, F. C. (2010). Modelación Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(4), 319-333.

Uriza, R. C. (2015). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa: una introducción breve. *1*. 67-76.

Uriza, R. C., Espinosa, G. M., & Gasperini, D. R. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28.

Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, *14*(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564

Van Dijk, T. (2002). El análisis crítico del discurso y el pensamiento social. *Athenea digital*, 18-24.
Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251.

Anexos

Anexo 1: Transcripción completa de las respuestas en las entrevistas

Preguntas	INICIAL	FINAL
Pregunta 1)	Yo creo que es como el concepto clásico que se tiene, el tema de que se tiene el tema de la maquinita en donde entra un producto y sale un resultado. En el colegio.	Mmm, a partir de lo que se hizo en la anterior sesión, Claramente es más didáctico el tema y quizás como más significativo para el estudiante trabajar de manera más tangible, el concepto presentándose a partir de la experimentación. creo que llega a tener un sentido más completo dentro de lo que vendría siendo la mente del estudiante el poder recordarlo tanto visual, auditivo, fotográfico, tangible, alrededor de lo que vendría siendo el concepto.
	En el colegio, recuerdo haber aprendido el concepto de función, pero, de forma más abstracta, en la universidad. El concepto, ya su definición, sus características más… como los elementos más en profundidad de funciones, en la universidad. Pero el contenido, en el colegio, que era una relación entre un conjunto y otro.	De una forma que sea a una forma más cercana al contexto en el que uno vive, porque generalmente cuando se enseña en el colegio lo ve como un contenido alejado de la realidad o un concepto abstracto matemático más que algo que se podría ver en el cotidiano.
	Enseñando a los estudiantes, no me lo enseñaron en la universidad y no me lo enseñaron o sea quizás en el colegio, pero cuando uno se lo explica a los estudiantes como que ahí se da cuenta. …aah De esta manera, este es el concepto real de función: No me lo enseñaron en la universidad.	No deducirla, ehh, que me la entregasen. Me pongo en el lugar de los niños de hecho yo entendí todo el proceso que usted hizo con las temperaturas, el cambiar en cada lo que estaba con más con menos, con la temperatura del ambiente, me costó un poco deducir, y yo me pongo en el lugar de los estudiantes, de mis estudiantes, que a ellos les va a costar un poco, yo creo que va a ser un trabajo arduo y continuo para que ellos puedan deducir el concepto de función y eso es un trabajo que se da desde antes, no en el momento que de enseñarles que es una función, como un trabajo continuo,

		una forma de aplicar el constructivismo para que ellos puedan construir el concepto de función. Si yo hubiese sido estudiante me hubiese gustado que me lo entregaran no más, no construirla.
Pregunta 2)	Depende, si es el primer acercamiento o si es algo más profundo. El concepto de función, por ejemplo, cuando recién estoy empezando la unidad o como para recordarlo si es que no es en octavo básico, O sea, como yo lo aprendí por primera vez de esa manera, creo que el primer acercamiento sigue siendo el tema de una máquina transformadora que tiene operaciones matemáticas en el interior, y que me arroja un resultado asociado a ese valor inicial.	Yo creo que en este momento, la podría establecer como una especie de regla o correspondencia entre dos variables que tienen alguna relación por medio de alguna situación puntual, En dónde a lo largo de una de estas, que vendría siendo la independiente, se van variando los parámetros de la otra.
	También trataría de irme a términos más sencillos y relacionarlos con dos grupos que están relacionados por una función, y esta función hace que varíe cada uno de sus términos.	Yo lo definiría como una relación entre dos variables. Ehh que siempre va a ser uno a uno, siempre va a ver del conjunto uno que va a estar relacionado con el otro, que siempre va a ver una única relación que se pueda entender de una manera, de una representación, es decir,ehh de distintas formas.
	Una función para mí es que hay un numerito una formulita que entra por una máquina y hay un proceso en esa máquina, donde puede haber operaciones y aparece un nuevo resultado, para mí eso es una función.	La función es una relación que tiene un conjunto de partida y un punto de llegada y a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.
Pregunta 3)	El dominio, dependiendo de las funciones que uno practica, tiene de importancia para saber qué valores son los que yo puedo ingresar a esta maquinita por así decirlo, y el dominio son los posibles valores que me pueden resultar. Entonces el poder conocer desde dónde voy hasta dónde voy a llegar, me da como un acercamiento de los posibles resultados, en el caso de que me llegue a equivocar en la operación.	Como concepto para mí, hay un cambio, tenemos un conjunto de inicio que da la función, que puede tener alguna restricción o no dependiendo del contexto; y el recorrido vendría siendo el conjunto de salida, por así decirlo, en torno a los posibles resultados que uno podría tener en esta relación entre ambas variables, se ve en el experimento, se comprende y yo creo que eso es de alta importancia conocer en lo que es el dominio y recorrido, comprender ambos conceptos por el hecho de que… al tener la noción de que es una relación entre variables, tenemos que conocer que esas variables tienen una especie de mundo en donde viven, por lo tanto pueden llegar a tener ciertos valores y no siempre van a ser todos los números que nosotros conocemos.

	Siento que es el nombre correcto para definir estos dos conjuntos que están relacionados, donde el dominio viene siendo desde donde parte un conjunto, hasta el conjunto de llegada, donde van a ser los términos que cambian.	Para mí el dominio sería el conjunto inicial que varía en base a la función hasta llegar al recorrido, el recorrido sería el resultado final de la función. Se pueden ver en las representaciones, ehh ayudan como, a entender la situación que plantea la función.
	Creo que es relevante que los estudiantes sepan que lo que es el dominio de una función, el condominio, el recorrido, pero no entiendo por qué lo tienen que saber ellos, o sea, está bien que uno como profesor lo sepa, pero yo no entiendo para que sirven.	Ay, si ahora después de lo que usted experimentamos ese día es importante saber cuál es el dominio, cuál es el recorrido, cuál tipo de dominio, es importante porqueee, yo lo veo como ese elemento del conjunto de partida al pasarlo por esa función o por esa maquinita, no le va a corresponder cualquier elemento, le va a corresponder quizás un único elemento, entonces, por eso es importante el conjunto de partida porque como que le doy un valor quizás a esa función y al pasar por ese proceso le va a tocar otra correspondencia única, eso yo siento que, en ese sentido, saber que elemento parte y que elemento llega, es importante ya que no sirve cualquier número.
Pregunta 4)	A ver, para mi lo más importante es tener claro el concepto básico de lo que es el plano cartesiano, saber ubicar coordenadas, y entender que existe una variable dependiente y una independiente. Entonces todo lo que nosotros manejamos y todo lo que nosotros otorgamos, que vendrían siendo las variables independiente, está asociado a la abscisa o coordenada X, y lo que vendría siendo el resultado de la función, está asociado a la coordenada Y, y poder traspasar esa información, al gráfico que me va a dar una idea dependiendo de si el gráfico va a ser creciente o decreciente. Son importantes porque ayuda a ampliar la forma de entender el concepto de función. Por el hecho de que, si bien no son estilos de aprendizaje, ahora que está la teoría de que ya no se utilizan esos, sí hay estudiantes que se les hace más agradable el tema de la visualización, versus la algebrización , al respecto entonces, muchas veces el poder asociar una coordenada X con una Y, se les hace más natural que ver simplemente el cálculo.	La representación viene siendo como distintas formas de demostrar o de enseñarle al estudiante el mismo conjunto de elementos que hace la representación algebraica, la representación gráfica, la representación de conjuntos, para establecer esta relación que existe entre las dos variables y la importancia es poder llegar - así como con el experimento que nombraba anteriormente-, teníamos distintas formas de recordarle,... El poder representar las distintas formas también puede llegar a quedar en el subconsciente, por así decirlo, del estudiante, de que si no recuerda una en específico, quizás, puede llegar a llegar a esa representación a partir de otra, las puede utilizar para entender la situación, en ese aspecto para mí las dos más relevantes son la algebraicas y la gráfica, por así decirlo, la algebraica por lo netamente matemático en cuanto al manejo de conceptos de operatoria y relaciones para poder llegar a modelar situaciones y la Gráfica por un tema de visualización global, por

		así llamarlo, para ver mejor la relación de las dos variables por así llamarlo.
	Considero que las representaciones son importantes para entender de diferentes maneras el concepto de función, porque solamente quedándose, por ejemplo, con el concepto algebraico, puede ser un poco difícil de comprender. Ya al tener diferentes representaciones podemos ir jugando un poco con esta relación, por ejemplo ya el pasar la representación en tabla, a una gráfica, siento que da un mejor entendimiento para los estudiantes, el tener diferentes representaciones para abordar el concepto de función.	Siento que todas la representaciones son importantes para poder entender el concepto y ver diferentes formas de entender el concepto de función. Eh, para mí siento que ninguna es más importante que otra, pero si para mi es más fácil de entender el concepto que con otro, como por ejemplo al ver los datos en una gráfica o en una tabla se pueden establecer relaciones que pueden ayudar al entendimiento de lo que la función presenta, más que entenderlo como una expresión algebraica.
	Súper importante porque los niños tienen que identificar de qué manera ellos pueden representar la función, porque tenemos los diagramas sagitales, tenemos la Gráfica de la función, tenemos la tablita de valores, y obtenemos la ecuación y la parte algebraica, ya que todo eso es una función, para así mostrarle a los estudiantes que las funciones se pueden encontrar escritas de diferentes maneras.	Yo creo que cualquiera de las representaciones da un énfasis para explicar el tema de la función, ehmmm, por ejemplo, la tabla hace que nosotros podamos representar una función tanto como valores, para poder hacer la gráfica, hacer los diagramas o hacerlo de manera algebraica, como ya toda la construcción del proceso de función hasta llegar a una expresión algebraica, que en el fondo es donde los chiquillos prácticamente tienen que trabajar. Yo encuentro que todas son importantes, pero le doy a la gráfica y a la expresión algebraica más importancia, la gráfica para entender la situación y la algebraica para algo específico. Porque más adelante cuando ellos tengan que enfrentarse una función no lineal o a fin –estoy bajando a octavo y subiendo a la enseñanza media eh, van a ver otro tipo de funciones, entonces van a tener que analizar esas gráficas, por ejemplo, la hipérbole y ahí van a poder discriminar van a poder dar la expresión algebraica y con la expresión algebraica.
	Como herramienta aparte de lo que es plumón, escuadra, pizarrón, GeoGebra lo uso mucho, ocupo mucho para ticket de entrada y salida Kahoot, y también videos ejemplificactorios de, por ejemplo, una función afín, en qué momento se puede llegar a ocupar en la vida real, en qué situaciones o en qué carreras se emplean, pongo videos que lo señalan. De repente me apoyo en el libro de ejercitación, pero los libros	Por lo general por una Temas disposición de materiales en los establecimientos, ehh, lo que ocupo son temas de geogebra, visualización de videos y planteamiento de situaciones en las que se ocupan funciones en la vida real, un problema planteado desde la realidad, plantearlo desde la modelación de qué ocurriría, por ejemplo el tema de… no sé, una

Pregunta 5)	propiamente como tal, no los ocupo. Soy más de crear mi propio material. En general son, o material que tengo con ellos de años anteriores, o me voy apoyando en nuevas herramientas que van saliendo. Por ejemplo en GeoGebra, existe una como, un GeoGebra virtual en que la comunidad va dando distintas applet para poder enseñar distintos contenidos, entre ellos funciones, y voy siempre voy actualizando, en caso de que encuentre uno más didáctico, entretenido, dependiendo de lo que se quiera implementar en el tema de las funciones. En general siento que si bien el material del MINEDUC es bueno, siento que no es tan progresivo como a mi me gustaría. Siento que se da la definición y eh, bueno, por lo general en los contextos que he trabajado son de alta vulnerabilidad entonces, estoy acostumbrado a que el mínimo que se exige en el libro de repente es, medianamente complejo para muchos, o gran parte del curso, entonces prefiero empezar de un nivel más bajo.	persona que trabaja en la una especie de bolsa de monedas y ver la relación entre el valor de la moneda a lo largo del día, representado en el tiempo que ha pasado, y el valor de la moneda respecto, por ejemplo, al Dólar.
	A veces me respaldo de los mismos libros de textos del mismo nivel, trato de usar las cuatro representaciones para mejor entendimiento de los estudiantes, utilizo pizarrón, PowerPoint donde muestro las diferentes representaciones, también he trabajado en GeoGebra, mostrando la gráfica, pero en realidad la información, utilizo los libros de texto del estudiante y del docente, e información de internet. Eh sí, a los planes anuales. O, ¿cómo se llama? creo, programa creo que se llama donde hay recursos como didácticos donde salen actividades para desarrollar, desde currículum en línea donde está el programa en específico del nivel. Sí utilizo el material desde ahí.	Eh, bueno como le explicaba en la entrevista inicial, recurríamos como a lo más básico de material que había en el ministerio o recurso de internet para explicar el concepto, pero ahora después de la experimentación me gustó mucho la forma de introducir el concepto a los estudiantes y creo que sería mucho más adecuado para que se vea un concepto más cercano para ellos, o entender el concepto de función como algo no tan alejado de la realidad y después de esa introducción poder formalizar en base a lo que se hace con los textos o planes y programas del MINEDUC.
	Diapositivas, solo muestro la clase con una diapositiva y ahí es donde aparece un poco el resumen y ocupo pizarra, plumón. Súper poco constructivista. Me apoyo del libro del estudiante, pero no que ellos lo ocupen, sino que yo saco material para pegarlo en la diapositiva, para que todo sea más bonito, más Dinámico más entretenido para que ellos lean lo vean y vayan a la página 50 y tanto, porque es mucha información para ellos, discrimino lo que es importante que el estudiante sepa	A mi siempre me ha gustado, me hubiese gustado trabajar el concepto de función, con geogebra, pero no me manejo mucho en el geogebra, entonces, tengo que estudiar para presentarle también la función porque ahí uno también puede mostrar con la gráfica, o como representando, ehh, no lo ocupo mucho porque no se como…. En el fondo, en el nivel octavo siento que los chiquillos están acostumbrados quizás a una presentación más

	y lo que no es importante. También ocupo material que está en la web, pero con páginas que tengan un real concepto matemático no cualquier página particular. No ocupo la guía docente. Si, es como que uno visita las páginas del MINEDUC y ahí uno ve los recursos y ahí me doy cuenta si me sirve o no, porque los recursos no están contextualizados, también hay uno tiene que ver, si estos ejercicios son para mis estudiantes, esto lo pueden resolver, este problema lo voy a contextualizar a la realidad de mis chiquillos, no es llegar y ponerle una guía ahí, uno tiene que entrar a profundizar en el conocimiento de su grupo curso igual.	expositiva o una clase en PowerPoint, eso. Guías.
Pregunta 6)	Creo que la relación de variables. Para mi, creo que el poder relacionar variables, sobre todo en un problema contextualizado, poder definir cuál es la variable dependiente, y la independiente, creo que genera una apertura mental por así decirlo, que puede llevar a dejar una mejor base para ver los contenidos de más adelante.	Yo creo que lo principal es que entiendan que una función, valga la redundancia (que lo vimos con el experimento en la sesión anterior), es una relación entre dos variables, y no siempre van a tener una un comportamiento constante, sino que más bien en la vida cotidiana las variables Van como dice su nombre, van variando en torno a distintos sucesos, por ejemplo: La temperatura si acaso la exponemos más temperatura caliente más temperatura fría No necesariamente tiene que ser una línea recta, pero que en torno a la situación que nosotros queramos modelar, podríamos llegar a plantear una situación el tema de la exponencial podría ser presentada predictiva, digamos de manera lineal.
	Que entiendan esta relación, entendiendo que la función va a hacer que desde el conjunto de partida, del dominio, al pasar por la función, hay una transformación algebraica de ese resultado que llega al recorrido. Pero hago que ellos intenten entender esta relación y por qué cambian, por qué están unidos el dominio con el recorrido, eso es lo que intento yo hacer que comprendan, que entiendan por qué está esa relación.	Creo que el foco principal estaría en que ellos primero entiendan el concepto de función, para que sirve, que no sea algo tan alejado de su realidad, que no lo vean como un concepto tan abstracto y luego de eso ya entender sus representaciones y como operarlas, pero creo que primero debería estar bien claro qué es una función para luego operar matemáticamente o hacerlo.
	En los problemas de la vida diaria, es importante que ellos discriminan, por ejemplo, en octavo básico la función a fin y lineal, entonces hay que contextualizar la función afin y lineal, ya sea cuando uno toma un taxi, puede generar una función, o cuando tengo que pagar la luz, para mí eso es lo primordial.	En la definición de función, que es una relación como dije al principio.

Pregunta 7)	La primera es la función lineal, luego se hace la variación de función afín, y después hasta donde yo recuerdo haberlo trabajado, hay funciones como más particulares, por ejemplo las funciones de valor absoluto, creo que esas son las que recuerdo en este momento, las que alcancé a trabajar en octavo básico, afín lineal, y valor absoluto. Yo creo que es posible ver otras, pero de manera muy superficial. Porque en octavo básico manejan el concepto de potencia, por lo tanto podrían trabajar con una ecuación, perdón, con una función simple, de una cuadrática, pero sin tanta complejidad de encontrar vértices quizás. Involucrar las fórmulas quizás por que creo que con un currículum tan cargado como el actual siento que es cargar aún más el tema del pensamiento.	Me imagino que los más allá de que no sean quizás como las más complejas, creo que sirven para entender el concepto de función, el tema de lo que engloba en la parte algebraica, lo que engloba la parte gráfica, creo que la función lineal es fundamental, creo que una función cuadrática -al menos como concepto general- también es súper importante el hecho de conocer que siempre van a ser líneas rectas sino que pueden ser curvas, ehmm, y creo que esas dos son las más relevantes a mi entender, Porque ya entrando una raíz o una exponencial Creo que van más allá del entendimiento de que se tiene en ese momento con el estudiante De la logarítmica del tema del concepto que hasta donde tengo comprendido no no tienen el concepto de logaritmo hasta octavo básico, el tema de la exponencial podría ser presentada, pero siento que con una función cuadrática se puede enseñar el mismo problema solamente cambiando algunas palabras. Para enseñar el concepto, creo que no. Por ejemplo, presentar un gráfico de una exponencial con distinto exponente, Presentar una función logarítmica como relación de valores, creo que se puede hacer, pero más allá de explicar que existe la relación entre los números, de ahí como se pide dentro del currículum, creo que quedaría en eso, como en mostrar que existan. Porque es importante saber que existen distintos comportamientos que se estudian de manera particularizada después.
	Generalmente partimos con funciones lineales, donde, funciones básicas, donde tenemos solamente sumas, solo restas, y después ir complejizando la función algebraica, en este caso después la función con multiplicaciones, con divisiones, pero siempre trato de partir con el ejemplo más básico. Yo creo que sí, pero, o sea en general nos vamos por función lineal, función afín, porque ya después en niveles superiores vemos otro tipos de funciones, por eso en ese nivel nos quedamos con lo más básico, pero yo creo que sí se podría hacer y estudiar.	Bueno, también cuando partir con la entrevista inicial, yo me iba siempre a lo más básico de una función lineal donde era –según yo- era más fácil de analizar porque eran sociedades algebraicas más sencillas, pero después de la experimentación me doy cuenta de que con otro tipo de función se puede entender mucho mejor el concepto, siendo que uno tiene ese miedo meter otro tipo de funciones por ser más complejas, pero en realidad ayudó mucho más al entendimiento del concepto el ver distintos comportamientos.
	Comportamientos lineales, si porque en octavo se pasa la función a fin y lineal y	Lineal y, quizás pueda mostrar algunas pero de conocer no más, por

	son lineales ambas, una recta. Entonces, A lo más se le menciona que más adelante se le enseñan otras como la parábola que tiene otra forma, pero es solamente mencionar. Pero no veo otras curvas, solamente al menos nos limitamos a pasar lo que indica el currículum de octavo básico, si es función afin y lineal, sí. Es importante aprender es afín y lineal para calcular pendientes, etc., que la ocupará más adelante.	conocimiento, que la van a ver más adelante, mostrarle alguna gráfica, pero ahondar más en otro tipo de función no, porque ya para ellos tienen, deben aplicar muchos conceptos, como funciones como infinitas, y todo lo que ellos saben de expresiones algebraicas, valorizar las expresiones , aplicar muchos conceptos, es como, funciones como infinitas y todo lo que ellos saben expresiones algebraicas, ehmm, valorizan las expresiones, aplicar gráficas, entonces es como un todo, entonces mostrarles lo que es una función cuadrática, explicarle así, eso es como más profundo y es más para enseñanza media, mostrarla, si sería bueno para que ellos discriminan como es una de la otra.
Pregunta 8)	Creo que el concepto de función como lo nombró anteriormente es una puerta inicial en la cual los estudiantes pueden llegar a asociar de mejor manera el tema de la resolución de problemas. Porque hasta antes de ver el concepto de función, a muchos estudiantes les complica el tema de la asociación de la operatoria que debo realizar en torno a la problemática, y muchas veces el tema de comprender la función, creo que les facilita el relacionar las dos variables el poder asociar qué debo hacer en torno al problema. A mi parecer, creo que función es uno de los conceptos más relevantes como concepto general, más allá de las distintas variables porque es multidisciplinario por así llamarlo, en donde el concepto se puede ocupar en el área científica, más metódica, como más en el área de estudios humanistas para poder describir, predecir conceptos o entorno en los que se está desarrollando. Creo que tiene una versatilidad que tiene el concepto que es fundamental el poder comprenderlo y poder aplicarlo.	Eh, tengo como dos respuestas en torno a eso, una que es como la respuesta curricular, y la otra es como más del saber algo que podríamos llegar a ocupar o que vamos a ocupar en la vida cotidiana, ehh, en torno a lo curricular el concepto de función es algo que abre muchas aristas, eh, en el continuo de la matemática escolar, eh, y que se relaciona también con muchas otras disciplinas: física, química, biología, eh, entonces, comprender el concepto de función a nivel curricular creo que facilita el comprender otros elementos que también rodean las matemáticas, y la otra parte que vendría siendo la utilidad ya más eh, cotidiana, creo que es la funciones nos ayudan a establecer la comprensión de eh, mm, el comportamiento y también sobre algunas noticias, eh, que muchas veces nos caen desde el noticiero en general o las redes sociales, que podamos comprender cuál es la información que se nos está entregando.
	Bueno la verdad es que siento que cada nivel va complejizando como la dificultad de las matemáticas y el hecho de que en octavo básico ya lleguen con una buena base de este concepto, que tiene varias relaciones, y después vamos viendo otros tipos de funciones, exponenciales, logarítmicas, bueno, y tiene que ver, si lo queremos llevar a la vida cotidiana, vemos el tema con la relación de gráficos, cómo ver, cómo	Eh, bueno, yo lo llevaba más asociado porque, en general, en los niveles superiores, en la enseñanza media después de ver la noción como una base, se enseñan otros tipos de funciones y empieza a complejizarse un poco más el contenido, y bueno al analizar gráficos en diferentes contextos, ya no sólo matemático, ver este concepto de función y que entiendan

	funcionan, cómo crecen, crecimiento, de crecimiento, para que ellos vayan relacionando con cosas que vemos en la misma televisión, economía, como a veces muestran gráficos que no tienen que ver con la realidad. Como en ese sentido siento que ellos deberían aprender funciones. Bueno, en realidad apoyándome de lo que decía recién, que en realidad luego para cualquier carrera a la que uno quiera dedicarse, o quiera tomar en un futuro, están las funciones, están las matemáticas, está este concepto de relacionar dos conjuntos, de hacer operaciones de un conjunto y transformarlas a otro. También ayuda a hacer este proceso de modelación donde ellos deben transitar por diferentes representaciones para poder comprender un concepto, lo que no se da con todos los contenidos matemáticos.	cómo los conceptos se relacionan estrechamente y pueden incluso, no sé, en gastos cotidianos que ellos tengan que puedan ir pensando en algo no solamente como una cifra matemática, sino también ver su predicción desde otra representación, que lo puedan incorporar a su vida.
	No sé, no se me ocurre. ¿Qué es lo más relevante?, para que puedan desarrollar problemas matemáticos de la vida diaria, no sé. (retoma), porque, para qué va a servir la pendiente, ya el X en la pendiente, para que me sirve esto, entonces también es importante resaltar que esto le va a servir quizás a algún niño que quiera estudiar una carrera matemática, entonces por eso uno no profundiza más allá porque no a todos les va a servir, entonces es como que entregamos lo que sabemos, pero no más allá de desarrollar esa habilidad, porque no a todos le va a servir. Es como un avance por ejemplo los niños no se les pasa función, pero como que tienen un concepto cuando uno les pasa las tablas y tienen que encontrar el patrón y después lo encuentran numéricamente y se les va acercando un poco a ellos al tema de función, ya en séptimo no se les nombra función pero les hablas de proporcionalidad directa e inversa, ya en octavo ya esa proporcionalidad directa e inversa la llevamos inmediatamente a funciones no así la inversa que es una curva, en cambio la proporcionalidad directa la llevamos a la función, es un proceso en el cual que ellos sepan que lo que es función, como en primero medio ellos deberían tener arraigado el concepto de función.	Para ver situaciones, no sé, resolver problemas de la vida diaria, ehm, No se, para entender la vida. Eso, no se, en la casa, puedo ver el gasto de energía de la luz, del consumo de agua, hacer una gráfica con respecto a eso, yo sé que ninguno lo va a hacer, pero si alguno que si le guste, que si quiera enfrentarse a este tipo de desafíos, lo pueda hacer.
	Para enseñar el concepto, creo que lo primero que hago es acercarles el tema de esta máquina transformadora donde	A ver, una estrategia que ya fue presentada que fue el tema de la experimentación, no necesariamente

Pregunta 9)	nosotros ingresamos algo y obtenemos algo de resultado, y después, una vez que entienden ese proceso, el tema de poder poder identificar qué es lo que ocurre con distintas operaciones. Si yo sumo algo, qué ocurre con la función. Si va a ser más grande, va a ser más chica, los números asociados van a ser distinto, van a ser iguales, y eso por lo general lo trato de observar con GeoGebra, el tema de ir cambiando parámetros, tanto en funciones lineales como no lineales, para que se vayan dando cuenta de que existen cosas también que se pueden llegar a describir por medio de una función.	el mismo que se presentó en la sesión anterior, sino, que puede ser una… el hecho de poder, no sé, eh, que los chicos traten de entorno a sus variedades de gustos traer o presentar, alguna gráfica que ellos hayan observado y que traten de describir cuales es la relación que existe entre los dos elementos que aparecen en la gráfica, con una variable determinada con la otra, y poder a partir de estos distintos ejemplos que ellos mismo van a crear quizás eh, ir estableciendo esta relación de por ejemplo, eh, no sé, la gráfica de un video juego, la cantidad de personas de personas que van jugando dicho juego a lo largo del tiempo. Ehm, establecer por qué sube, por qué baja en que momentos, por ejemplo, si fuese un año, en que momento del año mayor cantidad de jugadores, en que momento tiene menor cantidad de jugadores, lo comparamos con otros juegos, en qué momento están más equiparados, menos equiparados, eh, podría ser una estrategia en donde ellos relacionan que quizás por ahí son más importantes en torno a sus gustos o directamente como así en la sesión pasada con un experimento más tangible donde ellos van a ir manipulando u observando la manipulación de algún elemento para poder observar la gráfica que, eh, es como el primer acercamiento visual.
	En general, claro, la máquina, y también, casi siempre trato de ir a la representación de la tabla. Siento que esa es una de las representaciones que les favorece a los estudiantes como de hacer, de visualizar más rápida, no sé, que del conjunto de las X al conjunto de las Y, este término, y así irse ordenando primero. Siento que les da un orden y una estructura al tema de la tabla para poder pasar a otro tema de representación.	Hasta el momento, hacíamos que trabajarán las diferentes representaciones para que ellos también se quedarán con la forma en que se le hiciera más sencilla la forma de trabajar y entenderlo, pero siento que uno trabajaba del concepto de función como el concepto ya entendido e integrada al concepto de los estudiantes, pero siento que después de esta experimentación es mucho más fácil entender el concepto de función sin ni siquiera llegar inmediatamente a lo que es una expresión algebraica sino que partir de una experimentación con objetos concretos que son cotidianos para nosotros y luego ya empezar a formalizar un poquito más. Creo que

		partiría de esa forma, para mis próximas planificaciones.
	Parto con un problema matemático, entonces a partir de ese problema matemático, puede ser que plantee pinos y quiero faenarlo, no sé cómo decirlo, y me sale y doble de pinos, entonces ahí hay una función porque ellos tienen que identificar que el 2Y es = 2X, entonces a través de un problema matemático llegamos a la parte algebraica y después de la algebraica llegamos a la otra forma gráfica, entonces, esa expresión que uno les muestra el problema, toda la clase se basa en eso. Si utilizo la metáfora de la máquina, de hecho, vi un video de una profesora que le enseñaba funciones a sus estudiantes en Argentina, yo encuentro que es relevante, me pareció muy buena, yo como que desde ahí me gustó cómo explicar el concepto de funciones, y lo entienden súper bien, es como que les digo muevan la maquinita, etc.	Como lo dije en la primera parte, con la maquinita, la que pasa por un proceso, algún numerito, que uno lo mete en esa maquinita y sale otro numerito, de esa manera yo lo enseño.
Pregunta 10)	Poder describir una situación descrita por medio de una expresión matemática predictiva. Yo creo que, bueno, uno de los niveles de taxonomía más altos es modelar, yo creo que cuando un estudiante logra comprender lo que es la modelación, o lograr poder realizar una modelación de una situación es porque ya el concepto, lo maneja de gran manera. El hecho de poder simplificar una situación contextualizada o una situación matemática directamente por medio de la modelación significa que ya maneja el concepto de dominio, recorrido, la asociación de las operaciones, que le lleva a comprender que pueden llegar a predecir incluso resultados en torno la situación.	La modelación para mi es describir a través de un modelo matemático alguna situación en particular para llegar a predecir dicha situación en un momento futuro. Yo creo que es como la finalidad que yo buscaría dentro del aprendizaje del concepto de función, así como habilidad final, dentro de lo que es el currículo, el poder modelar situaciones que ellos sepan dentro de los tipos de funciones que ellos conocer, cual deben ocupar, porque es el modelo que deben ocupar, con que parámetros, con qué relación algebraica, con qué, eh, cierto como, acierto hacia eh un futuro acercamiento a la misma situación, creo que es como el objetivo entorno a las habilidades que se busca con el concepto.
	Siento que está implícitamente al momento de enseñar funciones todo tiempo porque al usar los diferentes tipos de representaciones, estamos realizando modelación de este contenido, eso es lo que siento yo. Al poder transitar de diferentes tipos de representaciones, ayudó a los estudiantes a que ellos puedan modelar situaciones y a entenderlo de mejor forma.	Mm, ahora sabes que, después desde que yo vi el concepto en la universidad, el concepto de modelar yo siento que lo veía de una perspectiva diferente que lo que dice el currículo en este caso, claro, que modelar habla de que ello utiliza las habilidades para eh, cómo transitar en diferentes aprendizajes hasta llegar a lo concreto y su aprendizaje final, pero para mí igual es un concepto complejo que para mí cuesta hacer clase y que realmente

		se utilice la modelación, porque en general, uno llega hasta las habilidades más básicas que serían representar, identificar, argumentar pero el hecho de resolver problemas siento que es una habilidad un poco más compleja del el proceso para llegar a una modelación. Hay que planificar de una mejor forma para que se concluya ese proceso, lo que plantea el ministerio como la modelación, no es la comprensión sino que es el cambio de una representación en otra.
	La modelación es la manera de representar la función, primero los niños ven la situación, después ven la parte algebraica, después la tabla, grafican y así pasan por todas las maneras de ver una función.	Es como una habilidad dentro de las matemáticas, es como seguir un patrón, por ejemplo, es cómo presentarle una función y modelarla, o presentarle algún problema y exponerlo, mostrarlo y llegar a algo más profundo con respecto a ese problema, que puede ser, no sé... la gráfica para entenderlo.
Pregunta 11)	Algunos sí y algunos no. Hay algunos que son más cotidianos, sobretodo que son más que son más fáciles de buscar en torno a funciones lineales o afines, como temas de cuentas del hogar, que se les puede solicitar a ellos, que traigan alguna cuenta para que veamos cuál es el precio base, cuál es el precio por X cantidad consumida, donde ellos mismos pueden llegar a predecir que si guardan cierta cantidad de kilowatts en el hogar, cuánto les va a salir la cuenta, temas de, no se, un contexto de salud también, como los resultados de acuerdo, por ejemplo en la pandemia que utilizó mucho el tema de infectados, cómo va creciendo, cómo iba decreciendo, las fechas, cómo lo podíamos predecir con respecto a los resultados obtenidos, que si acaso íbamos mejorando, ibamos empeorando. Y para mi una vez que vamos tomando el tema de la modelación, que se puede llegar a un tema más reflexivo, creo que la modelación ayuda mucho al entorno de, tomado el objetivo de predecir algo, podemos tomar acciones en torno a si eso es algo bueno o es malo.	Eh, si bien son importantes, creo que muchas veces como docente tomamos los mismos contextos. Eh, cuentas del hogar, que muchas veces, a pesar que ellos lo viven o sus familias lo viven, ellos no tienen el compromiso aún de pagar una cuenta y lo toman, quizás, un poco más a la ligera y no les es tan relevante como sujeto, eh, pero así como también, creo que existen unas infinidades de contextos a los que se pueden trabajar con el estudiante así como nombraba anteriormente, el poder llevar sus gustos a la relación entre las variables, el tema de los videojuegos ayuda mucho ya que ellos están en el temas del celular, el tema de las redes sociales también arrojan mucha información, ya se oficial o extraoficial entorno al uso o mal uso de las redes sociales, creo que contextos de ese estilo en general podrían llegar a ser un poco más concientizamos y relevantes para el estudiante .
	La verdad es que intento hacerlo pero a veces siento que son contextos que son alejados un poco de la realidad, de los estudios. siento que uno siempre trata de llevarlos a lo concreto, a lo que es más cercano a ellos, pero es difícil igual esa parte.	Hasta el momento yo me guiaba con el material que teníamos disponible del Ministerio, donde claro hay contextos que a veces un poco son alejados de la realidad y para mí en general a la hora de enseñar matemáticas, trato de buscar

		contextos cercanos y que tenga sentido para los estudiantes, para su vida diaria o en lo que vayan a dedicarse a futuro, por ejemplo, el ejemplo de la experimentación me pareció algo muy bueno porque eran elementos que son básicos que uno tiene en su casa, entonces el hecho de hacerlo ya más cercano a la realidad de los estudiantes, para ellos les hace más sentido también. Entonces a la hora de enseñar matemáticas también trato siempre de hacer eso pero claro hay conceptos que son un poco más complejos de buscar un contexto un poco más cercano, por eso trato siempre de hacer eso.
	Súper relevantes, porque son cosas que ellos van a ver en la vida diaria, y van a ver una función, van a tomar el medidor de luz, y ahí hay una función, hay una infinidad de problemas matemáticos, hay un sinfín de formas y situaciones.	Lo mejor es actualizarla y llevarla a la realidad de ellos. Pienso que siempre hay que aterrizar.

Anexo 2: Transcripción completa de las respuestas en las preguntas de cierre de las entrevistas

Pregunta de cierre para la entrevista inicial

Pregunta 1)	Me gustaría perfeccionar el concepto o ir como, acercandolo un poco más el tema de acercarlo con el concepto de la máquina que transforma, que fuese un poco más cercano, pero se me ha hecho difícil como transformar en un lenguaje más informal, y cercano a los estudiantes. Siento que todo lo que tenga que ver con álgebra y funciones, llega un momento en que tiene que existir un cierto porcentaje de abstracción, y esa abstracción igual ayuda al análisis y al poder desarrollar un pensamiento crítico en el estudiante, que no todo sea concreto. Pero yo creo que esa parte como acercarlo un poco más variar un poco el concepto de la máquina que transforma, me gustaría hacerlo pero la verdad se me hace un poco difícil Que fuese un poco más cercano, pero se me ha hecho difícil como transformar en un lenguaje más informal y cercano a los estudiantes, siento que todo lo que tenga que ver con álgebra y funciones llega un momento en que tiene que existir un cierto porcentaje de abstracción. Igual ayuda al análisis y al pensamiento crítico en el estudiante que no todo sea concreto, pero yo creo que esa parte como acercarlo un poco más, variar un poco el concepto de la máquina que transforma me gustaría hacerlo pero la verdad se me hace difícil.
	Sí, por supuesto me gustaría, continuar perfeccionándose en ese sentido, para poder dar una mayor cercanía y un mejor entendimiento de este concepto que cuando uno recién lo enseña, para ellos parece ser algo muy complejo y muy alejado de la realidad. Siento que lo que parece ser más complejo, más difícil

	de entender, son los diagramas. Cómo se une en diagramas el dominio con el recorrido, las flechitas, siento que eso les cuesta a veces comprender, generalmente se ve por ejemplo, si uno ya está en la relación uno a uno es función, si no, no lo es. Pero el estudiar los por qué, ocupar diferentes tipos de casos, siento que esa parte les complejiza bastante a los estudiantes. La gráfica también siento que sería un tema interesante de estudiar. Quizás las mismas fuentes donde uno busca recursos para poder enseñar, el material, que de repente uno por tiempo, por comodidad, se va a los recursos fáciles de acceder, más básicos, pero quizás no son los más adecuados para enseñar los contenidos. También lo que hablábamos buscar quizás contextos que sean más cercanos a la realidad cuando uno ya empieza a problematizar el contenido, contextos que sean más cercanos y más entendibles para los estudiantes. Que en realidad es un contenido complejo para los estudiantes en octavo básico, sienten que es algo muy difícil, muy difícil de entender, que tiene muchas cosas, muchos componentes, tienen muchas representaciones, se asustan, sienten que entienden una, no entienden otra, entonces, me gustaría también de alguna forma acercarme más a la realidad de ellos para que se les haga más sentido en realidad.
	Que los estudiantes sepan lo que es el dominio de una función, el codominio, el recorrido. Por qué es relevante que ellos sepan, por qué es importante ese concepto para ellos, por qué lo debo de pasar, porque siento que no es necesario.

Preguntas de cierre para la entrevista final

Pregunta 1)	Yo creo que sí, como concepto general, creo que es más eh, o se me imagina que es más significativo, perdón, para el estudiante la parte gráfica, creo yo. Por un tema de, de que es más fácil recordar la imagen que la descripción completa de un concepto y la relación que existe de manera algebraica. Ahora, eh creo que la parte algebraica también es relevante, pero creo que la primera impresión que debe quedar al estudiante es esta relación gráfica, entre dos variables, que desde ahí mismo pueden llegar a concluir el concepto genérico, a partir de esta experiencia que vivió en la enseñanza que vivió del concepto.
	Sí me gustaría que pudiéramos trabajar más en el concepto de gráfica, porque en el caso de poder entender la gráfica en los cambios, qué significa que estén en una parte alta, baja, luego tener diferentes cambios, qué significa eso en contexto o matemáticamente en una tabla, como si tuviéramos más tiempo de poder hacer ese estudio sería interesante.
	A mí me gustaría hacer lo que usted hizo con nosotros, ver si yo puedo que mis estudiantes infieran de algún problema sin que nosotros les entreguemos el concepto de función y que ellos lleguen, pero siento que se me va a hacer tan difícil llegar, o para que ellos puedan construir ese concepto de función, siento que es un trabajo que no lo tengo que hacer en función, tengo que hacerlo anteriormente, porque a mí me costó mucho deducir el concepto de función a pesar de que yo lo sabía pero de la manera que usted lo explicó me costó.
	Creo que la, valga la redundancia, la resolución o modelación de problemas creo que es algo de lo que me gustaría ahondar mayor cantidad de tiempo, creo que el currículo es demasiado ambicioso, en el sentido de que muchas veces nos pilla el tiempo por un tema que nos exigen cobertura curricular, siento que se nos va haciendo más corto el tiempo y no es posible del todo, dedicarle específicamente todo lo que nos gustaría a nosotros como docentes tiempo para desarrollar completamente la habilidad.
	Me gustaría también perfeccionarme en el comportamiento de la gráfica y también quizás buscar mejores elementos…. para hacer clase para tener más

	recursos y contextos que sean más cercanos a la realidad de los estudiantes y poder hacer el concepto un poco más sencillo.
Pregunta 2)	Si, uno siempre tiene que estar abierta a la perfeccionarse, uno nunca termina de saber, yo siento que hacen falta de ese tipo de capacitaciones como didáctica de la matemática, quizás a lo mejor uno ya está empapado de toda esa noción de mostrarle lo que es lo que yo siento que falta, más una forma más cercana de enseñar unos conceptos matemáticos, eso yo siento que sería bueno que nos capacitan, no sólo que pase por un tema de hacer capacitación en el colegio que quizás a lo mejor no son de mi agrado, pero me gustaría que me ayudaran a hacer mis clases más didácticas. No se trata de aplicar el constructivismo en los chiquillos, entonces uno tiene que hacer una clase más condicionada, o sea, que nadie está diciendo que está mal, puede que resulte, pero me gustaría que más infirieron ellos, que argumentaron más también.

Anexo 3: Consentimiento informado de los participantes

CONSENTIMIENTO INFORMADO

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

1.- Título: Modelación y Comportamientos Gráficos. Una propuesta al docente para la resignificación del concepto de función.

2.- Objetivo de la investigación: Aplicar una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica, para que el docente resignifique el concepto de función y para la validación del instrumento.

3.- Su participación consistirá en participar en entrevista y realizar actividades, lo que ocupará 4 horas, distribuidas en tres instancias.

4.- Riesgos y beneficios: La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para el(la) participante.

5.- Tipo de información que busca la investigación: A modo de ejemplo, el tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como: Conocer las concepciones del docente respecto al concepto de función y generar una instancia para la resignificación del mismo.

6.- Participación Voluntaria: La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

7.- Derecho a retirarse de la investigación: Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el (la) participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al (la) investigador(a) por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo(a) afecten.

8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación: Los resultados de este estudio, serán presentados en una tésis para acceder al grado de Magíster en Educación Matemática.

Si el (la) participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

9.- Derecho al resguardo de la identidad del (la) participante, de la información compartida y de sus datos personales.

Anonimato del (la) participante: El (la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

Confidencialidad del (la) participante: Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

Derecho a la imagen del (la) participante: En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

10.- Custodio de los Datos: El (la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

11.- Respecto de publicaciones: Se solicitará autorización al (la) participante respecto de que la información aportada aparezca en artículos o libros que se podrían publicar como resultado de esta investigación. Igualmente se solicitará su autorización para que su nombre figure en la investigación. En el caso que el(la) participante acepte aparecer con su identidad en la publicación, el(la) investigador(a) responsable, de manera previa enviará para su revisión la información a publicar. El(la) participante podrá realizar las correcciones y/u observaciones que estime pertinentes en lo que respecta a los datos por él(ella) aportados.

12.- Compensaciones: En el caso que corresponda, el(la) investigador(a) deberá compensar o retribuir transporte, colación u otros gastos extraordinarios derivados de la participación del sujeto en el estudio.

13.-Investigador(a) responsable: en caso de consultas, se puede dirigir a: Raquel Isabel Garrido Barrera
Unidad académica: Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Fono: (56-22406 8313- 56 9 97830691)
E-mail: raquel.garrido@usach.cl

14.- Ejemplares: Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el (la) investigador(a) responsable y uno para el (la) participante.

PARTICIPANTE:

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEIDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERISTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO __X__. DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LAS CONCLUSIONES DEL ESTUDIO: SI ___X____ NO _______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: ariel.sanmartin@usach.cl	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE Raquel Isabel Garrido Barrera FIRMA **FECHA** 01 de marzo de 2024	**PARTICIPANTE** NOMBRE: Ariel Alejandro San Martín Varela FIRMA **FECHA** 30 de mayo de 2024

PARTICIPANTE:

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEIDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERISTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO __X_. DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LAS CONCLUSIONES DEL ESTUDIO: SI __X__ NO ______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: lofierro@gmail.com	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE Raquel Isabel Garrido Barrera FIRMA **FECHA** 01 de marzo de 2024	**PARTICIPANTE** NOMBRE Loretto Fierro Castillo FIRMA Fierro **FECHA** 01 de marzo de 2024

CONSENTIMIENTO INFORMADO

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

1.- Título: Modelación y Comportamientos Gráficos. Una propuesta al docente para la resignificación del concepto de función.

2.- Objetivo de la investigación: Aplicar una situación de modelación desde la teoría socioepistemológica, para que el docente resignifique el concepto de función y para la validación del instrumento.

3.- Su participación consistirá en participar en entrevista y realizar actividades, lo que ocupará 4 horas, distribuidas en tres instancias.

4.- Riesgos y beneficios: La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para el(la) participante.

5.- Tipo de información que busca la investigación: A modo de ejemplo, el tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como: Conocer las concepciones del docente respecto al concepto de función y generar una instancia para la resignificación del mismo.

6.- Participación Voluntaria: La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

7.- Derecho a retirarse de la investigación: Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el (la) participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al (la) investigador(a) por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo(a) afecten.

8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación: Los resultados de este estudio, serán presentados en una tésis para acceder al grado de Magíster en Educación Matemática.

Si el (la) participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

9.- Derecho al resguardo de la identidad del (la) participante, de la información compartida y de sus datos personales.

Anonimato del (la) participante: El (la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

Confidencialidad del (la) participante: Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

Derecho a la imagen del (la) participante: En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

10.- Custodio de los Datos: El (la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

11.- Respecto de publicaciones: Se solicitará autorización al (la) participante respecto de que la información aportada aparezca en artículos o libros que se podrían publicar como resultado de esta investigación. Igualmente se solicitará su autorización para que su nombre figure en la investigación. En el caso que el(la) participante acepte aparecer con su identidad en la publicación, el(la) investigador(a) responsable, de manera previa enviará para su revisión la información a publicar. El(la) participante podrá realizar las correcciones y/u observaciones que estime pertinentes en lo que respecta a los datos por él(ella) aportados.

12.- Compensaciones: En el caso que corresponda, el(la) investigador(a) deberá compensar o retribuir transporte, colación u otros gastos extraordinarios derivados de la participación del sujeto en el estudio.

13.-Investigador(a) responsable: en caso de consultas, se puede dirigir a: Raquel Isabel Garrido Barrera
Unidad académica: Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Fono: (56-22406 8313- 56 9 97830691)
E-mail: raquel.garrido@usach.cl

14.- Ejemplares: Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el (la) investigador(a) responsable y uno para el (la) participante.

PARTICIPANTE:

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEIDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERISTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO __**X**__ . DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LAS CONCLUSIONES DEL ESTUDIO: SI _x______ NO _______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: Victoria.gomez@redcrecemos.cl	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE Raquel Isabel Garrido Barrera FIRMA **FECHA** 01 de marzo de 2024	**PARTICIPANTE** NOMBRE Victoria Belen Gómez Gómez FIRMA **FECHA** 01 de marzo de 2024