UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN LOS TEXTOS MINISTERIALES CHILENOS (2009 - 2023)

Un análisis de las dificultades de razonamiento condicional como aporte al tratamiento del concepto

Autora
ROCÍO ANDREA BARRIENTOS FLORES

Profesora Guía: Marta Salazar Aburto

Tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática

Santiago de Chile
2023

© ROCÍO BARRIENTOS FLORES
Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Dedicatoria:

Agradecimientos.

Resumen

En esta investigación, se exploró una muestra de seis textos de estudio ministeriales de enseñanza media, los cuales incorporan y tratan el concepto de probabilidad condicional. Estos textos, se sometieron a un exhaustivo Análisis de Contenido bajo un diseño descriptivo – interpretativo, mediante el cual se analizaron y describieron las características globales de cada texto y específicas con respecto al tratamiento del concepto, teniendo en cuenta las dificultades de razonamiento condicional. En base a esta información recabada, se obtuvieron los resultados de este estudio, logrando caracterizar los fenómenos del tratamiento de la probabilidad condicional, evidenciando la presencia y/o ausencia, como aporte al concepto, de las dificultades del razonamiento condicional y concluyendo de esta forma, en cómo los autores difundieron el concepto, durante el periodo de 2009 a 2023 en Chile.

Abstract

In this research, six high school ministerial study texts were explored, which incorporate and deal with the concept of conditional probability. These texts were subjected to an exhaustive Content Analysis under a descriptive-interpretative design, through which the global characteristics of each text and specific ones regarding the treatment of the concept were analyzed and described, taking into account the difficulties of conditional reasoning. Based on this information collected, the results of this study were obtained, managing to characterize the phenomena of conditional probability treatment, evidencing the presence and/or absence, as a contribution to the concept, of the difficulties of conditional reasoning and concluding in this way, in how the authors disseminated the concept, during the period from 2009 to 2023 in Chile.

TABLA DE CONTENIDOS

Informe de Tesis de Postgrado ……..……..
Dedicatoria …… ii
Agradecimientos……..……. iii
Resumen ……. iv
Abstract …..…… iv

Capítulo 1: Antecedentes y Planteamiento del problema ……. 1
1.1. Introducción 2
1.2. Antecedentes ……..... 3
1.2.1. Actualización Curricular 2005 …….. 6
1.2.2. Cambios Curriculares desde 2009 ……..…… 8
1.2.3. Resultados de evaluaciones Internacionales y Nacionales ..……... 18
1.2.4. Importancia de los Textos Escolares …..……..……... 22
1.2.5. Investigaciones sobre la Importancia de la Probabilidad Condicional. ……...… 24
1.3. Planteamiento del Problema 28
1.4. Preguntas de Investigación y Objetivos 29

Capítulo 2: Marco Teórico …….. 32
2.1. La Enseñanza de la Matemática y la Estadística 33
2.2. La Probabilidad y sus Diferentes Significados 35
2.3. Razonamiento sobre Probabilidad Condicional y sus Dificultades 40
2.3.1. Comprensión intuitiva de la Probabilidad Condicional e Independencia ……..……..… 41
2.3.2. Condicionamiento y Causación ……..……...……. 44
2.3.3. Condicionamiento y Temporalidad ……...……..…… 46
2.3.4. Intercambio de Sucesos en la Probabilidad Condicional ……... 48
2.3.5. Confusión de Probabilidad Condicional y Probabilidad Conjunta .. 49

2.4. Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística ……..…….. 51
2.5. La Probabilidad Condicional y sus Propiedades elementales …… 52

Capítulo 3: Metodología de la Investigación …… 55
3.1. Diseño de Investigación y Fundamentos 56
3.1.1. Consideraciones previas .....…… 57
3.1.2. La Técnica del Análisis de Contenido ……..……..……..…. 57
3.3. Periodos Curriculares contemplados en la Investigación …..... 58
3.4. Unidad de Muestreo ……..... 58
3.5. Plan de Análisis de los Datos ……..……... 60
3.5.1. Matriz MCGn para la caracterización general de los textos de estudio …….. 60
3.5.2. Matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en los textos de estudio ……... 61
3.5.3. Matriz MTCn para el tratamiento del concepto y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional …….. 63
3.5.4. Matriz de Resumen y Cotejo de descripción de Contenidos …..…. 66
3.5.5. Matriz de Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Condicional Mrd. ……... 73
3.5.6. Triangulación y Obtención de Conclusiones ……..…. 76

Capítulo 4: Presentación y Análisis de la Información …….. 81
4.1. Introducción ……..... 82
4.2. Aplicación de las Matrices a los Textos de Estudio ..…….... 83
4.2.1.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 1° …… 84
4.2.1.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 1° …..... 85
4.2.1.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 1° …… 97
4.2.2.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 2° ……..……..…… 112
4.2.2.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 2° ……..…… 113

4.2.2.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 2° 127
4.2.3.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 3° 139
4.2.3.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 3° 141
4.2.3.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 3° 154
4.2.4.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 4°..... 172
4.2.4.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 4°..... 173
4.2.4.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 4°..... 186
4.2.5.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 5°..... 194
4.2.5.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 5°..... 196
4.2.5.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 5° 204
4.2.6.1. Aplicación de la matriz MCGn al texto 6°..... 210
4.2.6.2. Aplicación de la matriz MCOn al texto 6°..... 213
4.2.6.3. Aplicación de la matriz MTCn al texto 6° 227
4.3. Síntesis del Capítulo 239
4.3.1. Resumen y Cotejo de contenidos 240
4.3.1.1. Tendencia de la Permanencia de los Contenidos en los Textos. 242
4.3.2. Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Condicional 248
4.3.2.1. Tendencia de la Presencia de las Dificultades de Razonamiento 250

Capítulo 5: Resultados y Conclusiones 254
5.1. Resultados de autoría y editorial 255
5.2. Triangulación 256
5.2.1. Conclusiones de la triangulación 258
5.3. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos y Preguntas..... 261
5.3.1. Conclusiones específicas respecto a las Preguntas 261
5.3.2. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos 265
5.5. Conclusiones generales 268

Referencias 269

CAPITULO 1

Antecedentes
y
Planteamiento del problema

1.1. Introducción.

Investigaciones previas, relacionadas con la comprensión de la probabilidad condicional, dan cuenta de diversas dificultades, que se presentan en estudiantes e incluso docentes, relativas al razonamiento condicional. Estos sesgos, han marcado una tendencia en base a los resultados obtenidos en estos estudios, logrando identificarlos y definirlos en relación a la dificultad que presenta cada uno. Esto, ha permitido realizar aportes al tratamiento del concepto, pues al conocer las dificultades que se desprenden del razonamiento condicional, permite orientar y adecuar el conocimiento a la mejora de estas. Por esta razón, se recomienda que la enseñanza tenga en cuenta los resultados de dichas investigaciones, es decir, que se consideren estas dificultades como un aporte al tratamiento del concepto.

Precisamente, este conjunto de sucesos es lo que me ha motivado a realizar este estudio, pues hay señales sustentables con respecto a este concepto y a otros asociados, que existe un déficit en la comprensión e interpretación del mismo y que en gran medida, esto se debe al tratamiento deficiente de la probabilidad condicional, principalmente, por parte de los textos de estudio, pues son los principales difusores del conocimiento.

Una de las intenciones de este estudio, es divulgar las dificultades del razonamiento de la probabilidad condicional y comunicar la importancia de considerarlas como un aporte efectivo y de mejora, en el tratamiento de este concepto.

1.2. Antecedentes.

Una reflexión constante sobre cómo la enseñanza y aprendizaje de la matemática intervienen en el desarrollo personal, integral y social de los estudiantes, debe ser una práctica sistemática y un recurso adoptado por todas las entidades educativas, desde el Ministerio de Educación pasando por la Agencia de la Calidad de la Educación, la Unidad Técnico Pedagógica hasta el profesor(a), con la finalidad de lograr mejoras tanto en las prácticas docentes como en los recursos utilizados para la enseñanza de la matemática. Partiendo de la base, que en el diario vivir el contacto con las matemáticas es inevitable, lo que hace imperioso considerar, como punto de partida y a nivel de cultura general, que los estudiantes comprendan que las matemáticas no son un conjunto de reglas que deben memorizar sino una ciencia consistente y precisa, que entrega procesos y herramientas para estudiar y resolver problemas que involucran desde las ciencias naturales, las ciencias sociales, hasta la vida cotidiana. (Eyzaguirre y Fontaine (Eds.), 1997, p. 540)

De acuerdo a Cordero ((Eds.), 2015), “La matemática escolar es un hecho social ineludible” (p. 16), que exige reconocer y considerar las diversas realidades de las comunidades educativas, permitiendo una participación activa de estas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Hoy en la sociedad del conocimiento, es deseado desarrollar, desde la niñez, procesos y habilidades tales como formas de pensar innovadoras para resolver problemas tanto cotidianos como técnicos en diversos contextos, dentro y fuera del aula. Para esto, la matemática juega un rol fundamental, ya que es un área necesaria para la innovación, pues esta desarrolla pensamiento crítico y analítico en general, además de pensamiento matemático y estadístico en situaciones específicas (Isoda y Katarigi, 2014).

Dentro de la educación matemática, se incluye hace algunos años, la enseñanza de la estadística; conocimiento que es objeto de investigación en los últimos 20 años y que ha cobrado cada vez mayor relevancia, debido a su rápido desarrollo como ciencia y como útil en la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado por la difusión de los ordenadores, el crecimiento de su potencia y rapidez de cálculo y las posibilidades de comunicación, así lo plantea Batanero (2001) en su libro *"Didáctica de la Estadística".* Como también, toma relevancia en la vida del ciudadano común y en activo, con la participación de este en la toma de decisiones en asuntos de la vida cotidiana, tales como la calidad nutricional de los alimentos, la seguridad y eficacia de los fármacos, la información bursátil y económica, los sondeos electorales, entre otros (Batanero, 2000).

De este modo, se genera la alfabetización estadística, la cual según Wallman (1993, como se citó en Ben-Zvi y Garfield (Eds.), 2004) argumentó que es la capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que impregnan la vida cotidiana, junto con la capacidad de apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en los sectores público y privado, y en las decisiones personales y profesionales.

En otras palabras, se puede decir que una persona alfabetizada estadísticamente debería ser capaz de leer e interpretar datos; usar argumentos estadísticos para dar evidencias sobre la validez de alguna afirmación; pensar críticamente sobre las afirmaciones, las encuestas y los estudios estadísticos que aparecen en los medios de comunicación; interpretar, evaluar críticamente y comunicar información estadística; apreciar el valor de la estadística en la vida cotidiana, la vida cívica y la vida profesional en calidad de consumidor de datos, de modo de actuar como un ciudadano informado y crítico en la sociedad basada en la información (Pino y Estrella, 2012).

En virtud de ello, en el ámbito escolar, la importancia de enseñar estadística, radica en dotar a los estudiantes de habilidades necesarias para desarrollarse en el mundo actual. Habilidades que se traducen en ser capaz de entender el alcance de las conclusiones de las investigaciones científicas y tener una opinión informada sobre la legitimidad de los resultados reportados. Por tanto, la alfabetización estadística se establece como la función principal de la enseñanza de la estadística en la escuela, es decir, un egresado de educación secundaria estadísticamente alfabetizado debiera lograr el desarrollo del pensamiento estadístico.

La principal razón del estudio de la estadística es que los fenómenos aleatorios tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. En otras palabras, la probabilidad y la estadística son muy cercanas al mundo familiar del alumno y, por tanto, proporcionan una oportunidad extraordinaria de "matematizar", de mostrar al alumno el proceso de construcción de modelos, así como la diferencia entre "modelo" y realidad. Fischbein (1975, como se citó en Batanero, 2000) menciona que en el mundo contemporáneo, la educación científica no debe reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos, ya que una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico.

La enseñanza de la probabilidad, al igual que la estadística, ha sido incorporada en los currículos escolares de manera reciente y en forma paulatina, tanto a nivel internacional como nacional, por ejemplo, en la comunidad Europea. En diversos estudios con respecto a este concepto, se ha notado una tendencia a renovar su enseñanza, volviéndola más experimental con la finalidad que pueda proporcionar a los estudiantes una experiencia estocástica desde su infancia. A lo largo del desarrollo histórico de la probabilidad, se puede decir que se le asocian diversos significados que aún coexisten, dejando en evidencia, una perspectiva polifacética de este concepto. La probabilidad puede contemplarse

como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad. Considerando este último significado, se plantea que la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad es un modelo matemático que se puede usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios. Este modelo ha mostrado su utilidad en las ciencias, técnicas, política y gestión; casi sin excepción en todos los campos de la actividad humana. Pero se debe tener en cuenta, que se necesita más investigación que clarifique cuáles son los elementos fundamentales del significado de la probabilidad. Es por esto, que en la actualidad su enseñanza no puede estar limitada a uno de sus significados, ya que están ligadas dialécticamente. (Batanero, 2005).

1.2.1. Actualización Curricular 2005.

Si bien el presente estudio, contempla el periodo 2009 a 2023 para el análisis de los textos de estudio, se debe tener en cuenta que los cambios curriculares se aplican de manera gradual en el tiempo. Por esta razón, algunos textos en el periodo de adecuación curricular 2009, seguían estando en vigencia bajo la actualización curricular 2005. Que es el caso, en dos de los textos analizados más adelante, para este presente estudio.

Con respecto a la “Formación General en la Educación Media”, la adecuación curricular de 2005, selecciona y organiza los contenidos matemáticos en torno a tres ejes temáticos: **Álgebra y Funciones**, que incluye el estudio de la expresión algebraica y gráfica de algunas funciones y su contextualización en diferentes fenómenos de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias. **Geometría**, que propone el estudio de propiedades de figuras del espacio bi y tri dimensional y la demostración de algunas de ellas. **Estadística y Probabilidad**, que se orienta a interpretar y analizar información y enfatiza la distinción entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.

En la Tabla 1.1, se presentan los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios relacionados con el concepto de probabilidad (por ser el interés principal de este estudio) de cada curso.
Cabe mencionar que, para Primero Medio, el curriculum no considera el eje temático de Estadística y Probabilidad, sólo desde Segundo Medio.

Tabla 1.1.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos del eje de Probabilidad, 2005

Curso	OF	CMO
2° medio	Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.	• Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad. • La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.
3° medio	Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre	• Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

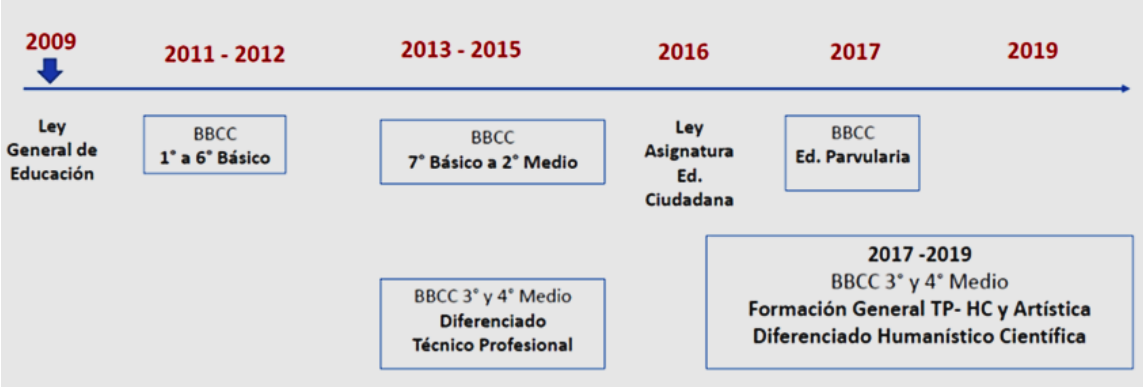
	estadística y probabilidades.	• Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios. • Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.
4° medio	Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.	• Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

1.2.2. Cambios curriculares desde 2009.

En Chile, el cambio curricular que han sufrido los aprendizajes desde el año 2009 con la "actualización curricular" hasta la fecha, ha permitido percibir cómo los contenidos han sido tratados a lo largo del tiempo a través del texto de estudio. En la Figura 1 se grafica todo aquel periodo, donde se puede apreciar los años claves de los ajustes curriculares en Chile.

Figura 1

Cambio Curricular desde el 2009 en Chile



Nota: Tomado de Nuevo Curriculum 3° y 4° medio - Matemática, por Unidad de Curriculum y Evaluación, 2019, Currículum Nacional (https://www.curriculumnacional.cl/portal/Secciones/3-y-4-medio/89597:3-y-4-ano-medio-Nuevo-Curriculum). Obra de Dominio Público.

Con respecto al contenido de probabilidad, en el periodo del año 2009 de la "Actualización curricular", se incorpora en cada curso de educación del Plan Común de Formación General, los siguientes Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que se exponen en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos del eje de Probabilidad, 2009

Curso	OF	CM
1° medio	• Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos	• Uso de técnicas combinatorias para resolver diversos problemas

	aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones. • Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.	que involucren el cálculo de probabilidades. • Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.
2° medio	• Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios. • Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.	• Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de esta como una función. • Exploración de la Ley de los Grandes Números, a partir de la repetición de experimentos aleatorios, con apoyo de herramientas tecnológicas y su aplicación a la asignación de probabilidades. • Resolución de problemas de cálculo de probabilidades aplicando las técnicas del cálculo combinatorio, diagramas de árbol, lenguaje conjuntista, operatoria básica con conjuntos, propiedades

		de la suma y producto de probabilidades.
3° medio	• Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios. • Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos. • Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales. • Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.	• Utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución. • Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales. • Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno. • Resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades.
4° medio	Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de	• Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una

una variable aleatoria continua.	variable aleatoria con distribución normal. • Estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contexto tales como: mediciones de peso y estatura en adolescentes; puntajes de pruebas nacionales e internacionales; datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relación entre la distribución normal y la distribución normal estándar. • Descripción de los resultados de repeticiones de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas. • Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.

En general, los nuevos planes y programas de estudio que se debían elaborar a partir de 2009, de acuerdo a los OF y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) señalados anteriormente con respecto a educación media, tenían como decreto ser aplicados gradualmente, según el siguiente calendario:

- Año escolar 2010: 1° año de Enseñanza Media, Formación General.
- Año escolar 2011: 2° año de Enseñanza Media, Formación General y 3° año de Enseñanza Media, Formación Diferenciada Técnico-Profesional de las 21 especialidades ajustadas.
- Año escolar 2012: 3° año de Enseñanza Media, Formación General y 4° año de Enseñanza Media, Formación Diferenciada Técnico-Profesional de las 21 especialidades ajustadas
- Año escolar 2013: 4° año de Enseñanza Media, Formación General.

En relación, al Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica para 3° y 4° medio, éste continuaba con la vigencia del D° 220/1998 y sus modificaciones, es decir, bajo los OF y CMO de la Actualización 2005 hasta el año 2019. Por ende, en 3° medio diferenciado no estaba incluido el aprendizaje de la probabilidad ni la estadística, en cambio, en 4° medio diferenciado se encontraba dentro del eje temático “Procesos Infinitos” como el planteamiento de problemas de probabilidades que involucraran la noción de sumatoria (OF y CMO de Ed. Media, Actualización curricular 2005).

En base a lo expuesto, se puede concluir que los textos de estudio ministeriales elaborados para el nivel de Educación Media de 1° a 4°, especialmente en la formación general y bajo el ajuste curricular 2009, logran cubrir un ciclo importante en el tiempo desde el año 2010 a 2016, siendo este el último año del ajuste curricular como tal. De igual forma, la probabilidad se establece en estos años mediante los OF descritos, iniciándose en 1° y 2° medio con el cálculo de probabilidades y la aplicación de conceptos en base a experimentos aleatorios, junto con la aplicación de las propiedades de la suma y producto de probabilidades. En 3° medio se continúa con el tratamiento de la aleatoriedad de manera más específica y profunda, y se incluye un OF dirigido especialmente al aprendizaje del concepto de probabilidad condicional, por lo que se puede

deducir que, en este curso de enseñanza media, se encuentra mayormente el tratamiento del concepto. Finalmente, en 4° medio se aborda la distribución de probabilidad (OF y CMO de Ed. Media, Actualización curricular 2009).

El nivel de educación básica que también es sometido al ajuste curricular 2009, sólo alcanza a poner en marcha los OF del Primer y Segundo año de enseñanza básica, debido a las nuevas bases curriculares que se ponen en vigencia, a partir del año 2012, contemplando los cursos de 1° a 6° básico. En virtud de esto, el eje temático "Datos y probabilidades" es presentado en general para todo el nivel básico como un conocimiento que permitirá a los estudiantes registrar, clasificar y leer información dispuesta en tablas y gráficos, e iniciarse en temas relacionados con las probabilidades, considerando sus experiencias e intereses para lograr el aprendizaje en cuestión (Bases Curriculares 1° a 6° básico, 2012). A partir de mediados de 2016, se ponen en vigencia las nuevas bases curriculares para educación media, contemplando los cursos desde 7° básico a 2° medio con una cobertura paulatina hasta alcanzar a cubrir todos los cursos mencionados el año 2019. De este modo, el contenido de probabilidad es considerado dentro del eje temático "Probabilidad y Estadística", y que en general se expone como el área en la que se pretende que los estudiantes estimen de manera intuitiva y calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos, determinando ésta en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias (Bases Curriculares 7° a 2° medio, 2015).

A continuación, se presentan los Objetivos de Aprendizaje (OA) de cada curso, relacionados con el concepto de probabilidad:

7° básico:

- Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo:
  - Estimándolas de manera intuitiva.
  - Utilizando frecuencias relativas.
  - Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.
- Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.

8° básico:

- Explicar el principio combinatorio multiplicativo:
  - A partir de situaciones concretas.
  - Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo.
  - Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.

1° medio:

- Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.
- Mostrar que comprenden el concepto de azar:
  - Experimentando con la tabla de galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo.
  - Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas.
  - Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.
  - Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

2° medio:

- Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:
  - Definiendo la variable.

  - Determinando los posibles valores de la incógnita.
  - Calculando su probabilidad.
  - Graficando sus distribuciones.
- Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.
- Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:
  - Revisando informaciones de los medios de comunicación.
  - Identificando suposiciones basadas en probabilidades.
  - Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.
  - Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.

Hasta aquí, se puede apreciar que la cobertura curricular de las nuevas bases 2017, ha logrado abarcar a todos los cursos mencionados hasta la fecha. Por tanto, los textos escolares se han visto sometidos a cambios, siendo la última modificación, aquellos textos con licitación el año 2020 correspondientes a 8° básico, 1° y 2° medio, y que actualmente están siendo utilizados por los estudiantes de establecimientos municipales y particulares subvencionados. Por otro lado, los Objetivos de Aprendizaje mencionados anteriormente, están dirigidos al concepto de probabilidad de distintos eventos, al desarrollo de sus reglas, a la permutación y combinatoria, y finalmente al rol de la probabilidad en la sociedad, lo que permite intuir que la probabilidad condicional es considerada de manera implícita en alguno(s) de los OA.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, en 3° y 4° medio, también comienzan a entrar en vigencia las nuevas bases curriculares, a partir de fines del año 2019. De este modo, la probabilidad se enmarca en los siguientes OA por cada plan de formación y curso:

1. Plan Común de Formación General.

3° medio:

- Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

4° medio:

- Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

2. Plan de Formación Diferenciada. Humanístico-Científica.

Eje temático: Probabilidades y Estadística. Descriptiva e Inferencial

3° medio y 4° medio:

- Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

Cabe mencionar, que en el plan de formación general para 3° y 4° medio, los ejes temáticos se identifican mediante su OA asignado, ya que sólo se presenta un OA por eje, a diferencia, del plan de formación diferenciada para ambos cursos, donde se identifica el eje temático por su nombre y sólo se presenta un OA en común. Referente a la probabilidad condicional, se puede apreciar en el plan de formación general de 3° medio que es incluida en el OA de manera explícita, lo que lleva a intuir que en este curso se aborda el contenido con mayor profundidad, manteniéndose en el mismo curso como en los años anteriores, pero planteando el objetivo de forma descriptiva y detallada.

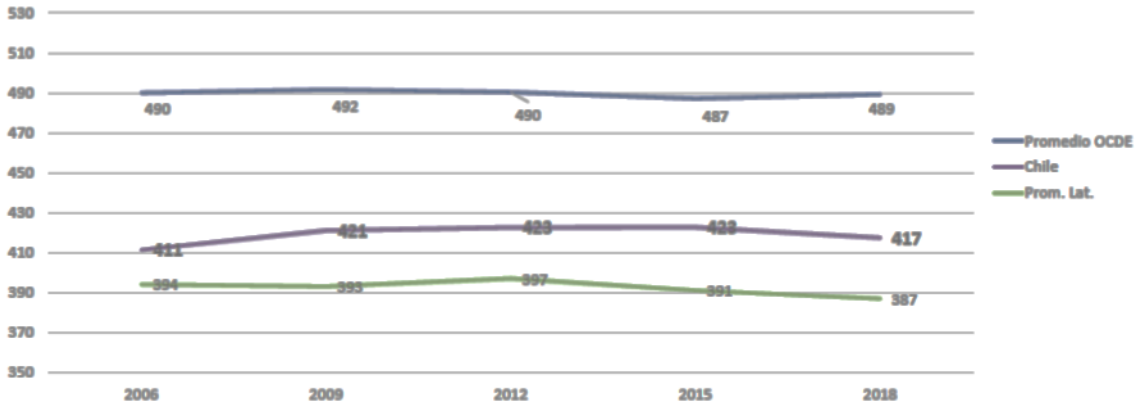
1.2.3. Resultados de evaluaciones internacionales y nacionales.

En el periodo 2006 a 2018, los resultados obtenidos por los estudiantes de Chile en PISA-Matemática se han mantenido estables, en otras palabras, no se han mostrado variaciones significativas entre los resultados en el largo plazo. (PISA 2018: Entrega de resultados). Por ejemplo, en la aplicación 2015, el 50% de los estudiantes no supera el nivel 2 de desempeño, situándose bajo el promedio obtenido por países de Producto Interno Bruto (PIB) similar. (Evaluaciones Nacionales e Internacionales de Aprendizaje, edición 2018). De manera similar, en PISA 2018, el 51,9% de los estudiantes en Chile no han desarrollado competencias matemáticas mínimas (Nivel 2 de desempeño). En este periodo, matemática es el área más débil para Chile entre las que evalúa PISA.

Véase Figura 2, respecto de la tendencia en matemática en los diferentes ciclos de PISA (2006 - 2018).

Figura 2

Puntaje promedio en Matemática: Comparación Chile, OCDE y Latinoamérica 2006 – 2018.



Nota: Tomado de PISA 2018 - Entrega de Resultados, por Agencia de Calidad de la Educación, 2019, Biblioteca Digital Mineduc

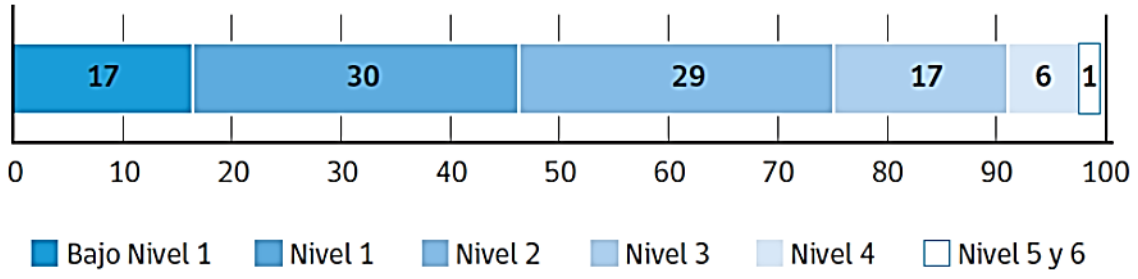
(https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/9286). Obra de Dominio Público.

En síntesis, los resultados obtenidos por Chile son significativamente más bajos que el promedio de la OCDE, aunque superiores a los del promedio de Latinoamérica en las últimas mediciones y por sobre la mayoría de los países participantes de la región. (PISA 2018: Entrega de resultados).

En base a los resultados PISA 2012, se obtiene información con mayor profundidad respecto de los contenidos que se evalúan en Matemática, entre ellos la denominada subescala *"Incertidumbre y datos",* esto debido a que el área fue dominio principal de evaluación en este periodo. Al respecto, como se muestra en la Figura 3; el porcentaje de estudiantes chilenos que no alcanza en este contenido el umbral del nivel 2, es 47%; el 24% supera el nivel 2 y hay un 1% del total que llega al nivel 5 ó 6 (Informe Nacional de Resultados Chile, PISA 2012).

Figura 3

Distribución de estudiantes chilenos en Niveles de Desempeño de la Subescala Incertidumbre y datos.



Nota: Tomado de Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012, por División de Estudios - Departamento de Estudios Internacionales, 2014, Agencia de Calidad de la Educación, https://www.agenciaeducacion.cl/estudiosinternacionales/pisa/. Obra de Dominio Público.

Por consiguiente, los estudiantes del Nivel 2, que en Chile son un 29%, pueden identificar, extraer y comprender los datos estadísticos presentados en una forma simple y familiar como una tabla sencilla, un gráfico de barras o un gráfico de torta. Pueden identificar, comprender y utilizar estadísticas descriptivas básicas y conceptos de probabilidad en situaciones cotidianas, como lanzar monedas o tirar los dados (PISA, 2012).

Respecto del SIMCE, el documento “Evaluaciones Nacionales e Internacionales de Aprendizaje, Periodo 2004 a 2018” (Nueva edición, 2018) muestra en relación a 8° básico, un aumento significativo de los resultados entre los años 2004 y 2017 en el área de Matemática, pese a que en las últimas tres aplicaciones los resultados han tendido a estabilizarse. Respecto a 2° medio, la tendencia de resultados en el lapso 2006 a 2018 en matemática, muestra una mejora significativa de 12 puntos. Sin embargo, en 2° medio, al igual que en 8° básico, la brecha entre el grupo socioeconómico alto y bajo en Matemática se mantiene.

La información sobre los resultados SIMCE 2018 con respecto de matemática, muestra la “tendencia” de los puntajes obtenidos a nivel nacional, comprendiendo ciertos periodos. Con respecto a 8° básico (primaria), se menciona que la tendencia en los resultados de Matemática ha sido estable en el periodo 2013 a 2017, sin que se observen diferencias importantes entre las mediciones

reportadas. Cabe mencionar que el año 2018 la evaluación Simce no se aplica para este nivel.
También, en 2° medio (secundaria) se muestra la tendencia de los resultados obtenidos por los estudiantes, esto es, en Matemática los puntajes se mantuvieron estables en relación al año 2016, replicando el alza que se observó entre 2015 y 2016.

Los resultados correspondientes al año 2019 sólo se refieren a 8° básico, ya que la evaluación Simce de 2° año medio no pudo realizarse debido a la serie de masivas manifestaciones y disturbios a lo largo del país, entre octubre y noviembre de 2019, viéndose comprometida la seguridad de los estudiantes y docentes en los establecimientos. Al igual que el año 2018, sólo se muestra la tendencia de los resultados del año en estudio con los anteriores, mencionando que se observa estabilidad en los resultados y que el puntaje promedio 263 del año 2019 es similar al promedio del año 2018 con respecto a matemática.

En los documentos publicados por el mineduc respecto a los resultados de las evaluaciones SIMCE, sólo se exponen los datos en forma general en base a puntajes obtenidos, a través de los cuales se muestra una tendencia en el rendimiento a lo largo de los años. Por esta razón, es que no se encuentra información con respecto a un eje temático, como por ejemplo, “Datos y azar” el cual es de interés en este estudio.

1.2.4. Importancia de los textos escolares.

Fontaine y Eyzaguirre (1997) en su libro *“El futuro en riesgo”,* se refieren al texto escolar como una obra diseñada para ser usada por estudiantes y profesores en sus clases, la cual provee una introducción sistemática a la disciplina o asignatura y que es dirigida por una secuencia de instrucción basada en un programa de estudios organizado. Los textos escolares, recaban lo medular de las disciplinas

enseñadas, mediante un consenso entre la comunidad profesional de educación, los padres, las familias y el Estado. Además, dan una forma concreta al currículum a través de su información organizada, ilustrada y complementada con otros materiales, con el fin de cumplir eficientemente su función pedagógica y permitir que el profesor pueda planificar sus clases, actualizar la información y perfeccionarse. Sumado a esto, los textos escolares permiten a los estudiantes un autoaprendizaje, si es necesario y aminorar las deficiencias educacionales de su familia o de su escuela.

Siguiendo con estas autoras; la importancia de los textos educacionales en la formación escolar está ampliamente documentada. Así se ha podido apreciar en los países en desarrollo que los textos de estudio han sido uno de los componentes más consistentes, pues han demostrado tener una influencia positiva sobre el rendimiento escolar. También lo reafirman investigaciones acerca de políticas públicas, las cuales proponen a quienes toman las decisiones a ocuparse del texto escolar como el verdadero vehículo del currículum.

Sánchez (2017) menciona la necesidad, que el libro de texto de matemáticas apunte al desarrollo de la capacidad de interpretar y cuestionar distintos fenómenos presentes en tablas, gráficos y datos, desde los primeros años de educación en forma paulatina. También es propicio disponer de recursos de aprendizaje que permitan mostrar de forma variada las ideas, conceptos y ejemplos sobre la estadística y probabilidad como los artefactos tecnológicos que muchas veces permiten ver desde una perspectiva real los fenómenos aleatorios que se pretenden estudiar. Pero aun así, el recurso utilizado por excelencia es el texto de estudio.

Pues también como señala García Alonso (2011, citado en Ortiz de Haro, 2015); el libro de texto es un elemento fundamental en la enseñanza de la estadística y probabilidad, que además contribuye a la formación del propio docente.

En definitiva, la enseñanza y aprendizaje de cualquier área del conocimiento, en especial de matemática, debe estar acompañada siempre de un texto de estudio, es por esto, que se hace imperioso y necesario el velar por textos de calidad que aseguren un tratamiento idóneo de los contenidos acorde a las necesidades cognitivas, sociales y culturales de los y las estudiantes como también de los profesores/as. Así lo avalan los autores antes citados (Fontaine y Eyzaguirre, 1997), ya que en sus estudios demuestran las falencias de los textos escolares en Chile y que falta bastante por mejorar.

1.2.5. Investigaciones sobre la importancia de la probabilidad condicional.

Es indispensable velar por un adecuado tratamiento del concepto de "probabilidad condicional", en especial, aquel entregado en los textos de estudio ministeriales, ya que estos son el recurso educativo de principal consulta sobre el saber matemático por parte de los y las estudiantes y también de los profesores/as. Por todo ello, Ortiz de Haro (2015) considera de interés el análisis de los libros de texto, ya que nos puede aportar información, no sólo sobre el significado que se da al concepto de probabilidad, sino también sobre el que se le ha atribuido en la mayor parte de los centros de enseñanza donde han sido utilizados. Así también, como señalan Huerta y Arnau (2017), citando a (Borovcnik, 2012); señala que nadie duda de que una comprensión adecuada del concepto de probabilidad no puede considerarse completa sin una comprensión adecuada del concepto de probabilidad condicionada, pues la complementa como medida del juicio subjetivo de las personas. Atendiendo a esto y en base a los antecedentes expuestos anteriormente, se considera relevante centrar el estudio de esta investigación en el tratamiento del concepto de probabilidad condicional en los textos de estudio ministeriales chilenos. En virtud de ello, surge la pregunta que guiará a la investigación.

Sánchez (1996) pasa un cuestionario de probabilidad a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización, encontrando en las respuestas incorrectas dos tipos de razonamiento:

a) Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes.

b) Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias.

Seguido de esto, Batanero (2007) en su estudio sobre *"Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional"* menciona que las dificultades (Tarr y Lannin, 2005) persisten en la universidad, las cuales son:

1. *Condicionamiento y causación*. Algunas personas identifican como similares condicionalidad y causalidad, aunque la relación condicional P(A/B) puede ser debida a una relación diagnóstica si A es causa de B (Tversky y Kahneman, 1982 a).
2. *Falacia del eje de tiempo* (Falk, 1989) o creencia de que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente (Gras y Totohasina, 1995).
3. *Situaciones sincrónicas y diacrónicas*: Si el problema se plantea como una serie de experimentos secuenciales (situaciones diacrónicas) o simultáneos (sincrónicas) (Falk, 1989; Ojeda, 1995). Formalmente las dos situaciones son equivalentes, aunque los sujetos no siempre las perciben de este modo (Sánchez y Hernández, 2003).
4. *Resolución de problemas bayesianos*. Las personas no usan el teorema de Bayes de forma intuitiva (Tversky y Kahneman, 1982b; Koehler, 1996), siendo parte de la dificultad debida a la representación escogida para resolver el problema (Totohasina, 1992). Recientemente se investiga el formato de presentación en frecuencias (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Lonjedo y Huerta, 2005) y se organizan experimentos de enseñanza para mejorar el razonamiento bayesiano (Martignon y Wassner, 2002).
5. *Otras dificultades* incluyen comprender el concepto de independencia (Sánchez, 1996; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006), la falacia de la conjunción o creencia que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Tversky y Kahneman, 1982a; Díaz, 2005) y la confusión de las dos probabilidades P(A/B) y P(B/A) o falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1989).

La probabilidad condicional es un concepto básico en Estadística. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel de significación

> y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. *(Díaz y Concepción, 2005)*

Investigaciones realizadas con respecto al análisis de contenido sobre "probabilidad condicional" en textos escolares chilenos, no se encontraron en la web y tampoco su reproducción. Sólo estudios dirigidos al análisis de contenido de probabilidad y estadística como tal. Esta ausencia también acontece en menor grado con otros países; así lo avalan estudios como, por ejemplo, de España, Huerta y Arnau (2017); *"La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad"*, quienes al respecto indican que son escasas las investigaciones que se han llevado a cabo sobre la comprensión de la probabilidad condicional, desde un punto de vista de la enseñanza y aprendizaje en un contexto de la resolución de problemas escolares.

Así también lo señala Ortiz de Haro (2015), Universidad de Granada, quien menciona que las investigaciones sobre libros de texto de matemáticas son numerosas, a diferencia de los de estadística y probabilidad, donde se pueden citar algunos como Cobo y Batanero (2004), Lavalle, Micheli y Rubio (2006), Batanero (2005), et al (2013).

Continuando con este estudio de Ortiz de Haro (2015), el cual pretende analizar las situaciones problemas de probabilidad que se presentan en una muestra de libros de texto españoles de Bachillerato; menciona que la enseñanza de la probabilidad debe tener en cuenta, la forma en que las situaciones-problemas se presentan en los libros de texto y si contemplan los diferentes significados de la probabilidad (cita a Batanero y Díaz, 2007) de una forma equilibrada y adecuada a la edad de los y las estudiantes. Dentro de sus conclusiones, menciona aquella

referente, a que los libros de texto deberían proponer una muestra de situaciones problemas contextualizadas y representativas de los diferentes significados de la probabilidad, apuntando más en la interpretación de estos que en los aspectos de cálculo.

Un estudio que se pudo hallar referente al análisis de contenido de la probabilidad condicional es la de Magallanes y Rodríguez (2011) de Argentina, el cual consiste en analizar el significado institucional de la probabilidad condicional en una muestra de libros de texto de enseñanza media de distintas editoriales. Interés que se genera en las autoras, a partir, de la consideración de las prácticas personales de los y las estudiantes frente a este contenido, encontrando en él distintos tipos de dificultades, las que han sido estudiadas por otros autores que también son un referente bibliográfico para este trabajo de investigación. Finalmente, las autoras concluyen que los textos analizados realizan una presentación simplificada del tema, contribuyendo sólo en la instancia de institucionalización de éste y tendiendo a generar una acción limitada por parte del alumno, lo que favorece más un uso mecánico que el logro de la comprensión de los distintos elementos del significado de la probabilidad condicional.

Si bien los estudios sobre análisis de contenido referente a probabilidad condicional en la enseñanza y aprendizaje son escasos, se pueden apreciar importantes investigaciones con respecto al contenido, que aportan información relevante para el correcto tratamiento del mismo, algunos estudios son los siguientes:

- Huerta y Lonjedo (2003) abordan la problemática de la enseñanza y aprendizaje de “Los problemas de probabilidad condicional en la enseñanza secundaria”, presentando una forma de clasificar estos problemas en base a los datos contenidos en el enunciado. Mostrando

que en los libros de texto de la enseñanza secundaria no se abordan todos los tipos posibles de problemas. Otro resultado, manifiesta que la mayoría de los estudiantes tienen confusión entre la probabilidad de la intersección y la probabilidad condicionada.

- Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) se centran en la "Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria", quienes sugieren la necesidad de reforzar la formación sobre probabilidad condicional en los futuros profesores y un cambio en la aproximación de este aprendizaje, haciendo más hincapié en aquellos razonamientos sesgados que están presentes en los futuros profesores.
- Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013). Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 237-244). Estos investigadores realizan un estudio, en el cual analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores, clasificándolas en función de su corrección y precisión. En base a sus resultados, sugieren la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que aquellos futuros maestros reciben durante su formación y discutir con ellos sus definiciones y sesgos de razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente.
- Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013). Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 237-244). Estos investigadores realizan un estudio, en el cual analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores, clasificándolas en función de su corrección y precisión. En base a sus resultados, sugieren la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que aquellos futuros maestros reciben durante su formación y discutir con ellos sus definiciones y sesgos de

razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente.

- Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013). Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 237-244). Estos investigadores realizan un estudio, en el cual analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores, clasificándolas en función de su corrección y precisión. En base a sus resultados, sugieren la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que aquellos futuros maestros reciben durante su formación y discutir con ellos sus definiciones y sesgos de razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente.

1.3. Planteamiento del problema.

En base a los antecedentes expuestos, se pretende analizar el tratamiento del concepto de probabilidad condicional, presentado en los textos de estudio ministeriales de enseñanza media, en el período que va de 2009 a 2022 en Chile, el cual ha sido considerado por abarcar periodos importantes, desde la actualización curricular del año 2009, la que comienza a aplicarse gradualmente desde el año 2010, lo que justifica el periodo seleccionado por este estudio; pasando por la reforma educacional del año 2015 hasta finalmente lograr avanzar a un cambio y actualización de las bases curriculares en el periodo de 2017, el cual se completa con la entrada en vigencia, a fines de 2019, para los cursos de 3° y 4° año medio. Este cambio fue formulado por el Ministerio de Educación para responder a los requerimientos de la Ley General de Educación de 2009 (LGE) N° 20.370.

1.4. Preguntas de Investigación y objetivos.

- **Para el estudio y comprensión del Problema se plantea la siguiente pregunta general:** ¿Cómo se ha difundido la probabilidad condicional y qué tratamiento se le ha dado en los libros de texto ministeriales utilizados en Chile entre 2009 y 2023?

Y el siguiente conjunto de interrogantes específicas al respecto:

P1. ¿Cuál es el significado de la probabilidad condicional que se propone en los textos ministeriales durante el periodo de 2009 a 2023?

P2. ¿Cuáles son los cambios en el tratamiento de la probabilidad condicional en los libros de texto ministeriales, a lo largo del periodo contemplado?

P3. ¿Se consideran los conocimientos previos que son claves para el tratamiento de la probabilidad condicional?

P4. ¿Se plantean las propiedades básicas de la probabilidad condicional?

P5. ¿Cuáles son las representaciones que se utilizan en los textos para trabajar la probabilidad condicional?

P6. ¿Se presenta la probabilidad condicional en los textos de estudio, de manera que se eviten errores en la comprensión del mismo?

P7. ¿Se realiza un tratamiento intuitivo y formal del concepto de probabilidad condicional para facilitar la comprensión de sus elementos?

P8. ¿Se consideran las dificultades de razonamiento condicional como aporte al tratamiento del concepto de probabilidad condicional?

La investigación busca dar respuesta a estas interrogantes, de manera de comprender, cómo ha evolucionado el tratamiento del concepto de la probabilidad condicional y en qué forma ha favorecido la comprensión del mismo, a través de los textos de estudio ministeriales.

- **Objetivo General**

OG: Caracterizar el tratamiento de la probabilidad condicional en los libros de texto ministeriales mediante un análisis conceptual y de contenido durante el período de 2009 a 2023 en Chile.

- **Objetivos Específicos**

OE1: Comparar los tratamientos del significado de la probabilidad condicional en los textos ministeriales durante el periodo de 2009 a 2023 en Chile.

OE2: Identificar posibles errores conceptuales o procedimentales en el tratamiento de la probabilidad condicional.

OE3: Detectar cuáles han sido los conceptos que sustentan el tratamiento de la probabilidad condicional en los textos ministeriales en el periodo de 2009 a 2023 en Chile.

OE4: Analizar los tipos de representaciones que se utilizan en el tratamiento de la probabilidad condicional durante el periodo 2009 a 2023 en Chile.

OE5: Analizar si los textos ministeriales consideran los distintos tipos de dificultades con que se puede enfrentar el estudiante ante la utilización de la probabilidad condicional.

OE6: Evidenciar cómo se ha favorecido la comprensión de los distintos elementos del significado de la probabilidad condicional durante el periodo de 2009 a 2023.

CAPITULO 2

Marco Teórico

2.1. La enseñanza de la matemática y la estadística.

Variadas investigaciones han abalado con el transcurso del tiempo, el rol principal que posee la exploración y experimentación en el aprendizaje de las matemáticas, entre ellas, el estudio realizado en Chile por Eyzaguirre y Fontaine (Eds.), (1997), en el cual participan distintos investigadores de educación matemática; Ricardo Baeza (1997), quien señala que el aprender matemáticas experimentando, cometiendo errores y corrigiéndolos son una actividad profunda del pensamiento humano, imprevistas y por ende sorprendentes, que a la vez son tremendamente útiles, llegando a ser entretenidas para el estudiante. Para esto, se debe considerar como punto de partida y a nivel de cultura general, que los y las estudiantes comprendan que las matemáticas no son un conjunto de reglas que deben memorizar sino una ciencia consistente y precisa que entrega procesos y herramientas para estudiar y resolver problemas de diversas áreas del conocimiento hasta la vida cotidiana.

Por consiguiente, la alfabetización o competencia matemática juega un papel clave en el progreso cognitivo y social de un estudiante, así lo plantea PISA, definiendo esta competencia como la capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar e involucrarse con las matemáticas en los momentos que requiera satisfacer sus necesidades personales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (Rico, 2007). De este modo, se puede apreciar que el aprendizaje de la matemática está ligado fuertemente con la realidad y cultura del estudiante, con sus experiencias y sus necesidades, dejando de manifiesto a un individuo activo y protagonista de su aprendizaje matemático.

La estadística también es parte fundamental en el desempeño de cada individuo como un ciudadano activo, ya que puede apoyar la toma de decisiones en asuntos de la vida cotidiana y profesional, la vida personal y social. Por tanto,

puede verse como la aplicación científica de los principios matemáticos a situaciones de variabilidad e incerteza, en particular a la recolección y análisis de datos, ofreciendo a otras áreas del saber un conjunto coherente de ideas y herramientas. Lo que se lleva también a diversas áreas de aplicación de la estadística como las ciencias médicas, la biología, las ciencias sociales, la economía, las finanzas, la manufactura y la administración (Pino y Estrella, 2012). Es así, como el interés por la enseñanza de la estadística, dentro de la educación matemática, viene ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como útil en la investigación, la técnica y la vida profesional (Batanero, 2000).

Cabe precisar, que a medida que avanzan las investigaciones sobre educación estadística, esta se impone como un área específica del saber, apartándose cada vez más de la matemática, ya que ha surgido la necesidad de experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística, a lo que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas. En virtud de ello, se sugiere una formación específica de los profesores en este ámbito de la estadística, ya que la misma naturaleza de esta rama es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas (Batanero (Eds.), 2001). Por tanto, surge la necesidad de dotar a los estudiantes en la enseñanza estadística de habilidades que les permitan leer e interpretar los datos; usar argumentos estadísticos para evidenciar la validez de alguna afirmación; pensar en forma crítica sobre las afirmaciones, las encuestas y los estudios estadísticos que se muestran en los medios de comunicación; leer e interpretar tablas y gráficos; evaluar críticamente y comunicar información estadística; apreciar el valor de la estadística en la vida cotidiana, de modo de actuar como un ciudadano informado y crítico en la sociedad (Pino y Estrella, 2012).

Los fenómenos aleatorios son la principal razón del estudio de la estadística, debido a que poseen una fuerte presencia en el entorno. Esto quiere decir, que la probabilidad y la estadística son muy cercanas al mundo familiar del alumno, por ende, es importante que el estudiante valore el papel de ambas temáticas, mediante ejemplos dados por el profesor que muestren en forma amplia esta fenomenología e incluyan aplicaciones de su mundo biológico, físico, social y político.

2.2. La probabilidad y sus diferentes significados.

Batanero (2006) menciona en su estudio que los fines de la enseñanza de la probabilidad en la educación obligatoria, son dos principalmente:

- *La probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas.*
- *La probabilidad es primordial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (se cita a Bennet, 1998).*

Por consiguiente, como señala Gal (2005, citado en Batanero, 2006); estas dos razones, debieran guiar el contenido y la metodología de la acción didáctica, aunque con frecuencia existe una tendencia a considerar más a la primera de ellas, suponiendo que de esta se derivará la segunda. Por lo tanto, se puede apreciar que la probabilidad forma parte de la evolución que experimentan los individuos, a medida que la vida avanza y es sometida a nuevos cambios y tendencias. Debido a esto, es que surge la necesidad de renovar la enseñanza de la probabilidad, volviéndola más experimental con el fin de conceder a los estudiantes una experiencia estocástica desde su infancia (Batanero, 2005). Esto conlleva a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad y cómo influyen los componentes de su comprensión en la enseñanza de la misma. Por lo cual, la investigadora citada recientemente sugiere tomar en consideración los diferentes

significados de la probabilidad que han surgido a lo largo de su desarrollo histórico y que aún coexisten. Los cuales se originan bajo un enfoque subjetivo y objetivo, es decir, como un grado de creencia y como evidencia aceptable para un científico. A continuación, se mencionan estos significados junto a sus limitaciones:

a) *Significado intuitivo*: hace referencia a las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar que aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, pero utilizan expresiones coloquiales para cuantificar sucesos inciertos y expresan su grado de creencia en ellos. Estas primeras ideas surgen ligadas a las apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y el concepto de juego equitativo.

b) *Significado laplaciano de la probabilidad*: corresponde a la definición que Laplace planteó en 1814 y que hoy se enseña como la "*regla de Laplace*" para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir sólo en un número finito de casos, *"como la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles".* Este significado se establece como el primer principio del cálculo de probabilidades (Campos, 2004). Las limitaciones que se encuentran en esta definición se refieren a que es restrictiva, ya que no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de casos, proporcionando sólo un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Sumado a esto, también no se puede aplicar a aquellos casos en que el espacio de muestreo sea finito, teniendo la condición de simetría.

c) *Significado frecuencial*: Bernoulli (1987, citado por Batanero, 2005) demuestra el teorema de la Primera Ley de los Grandes Números, siendo avalado en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Dicho teorema, indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento,

repetido en las mismas condiciones, se acerque tanto como se desee a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, con sólo aumentar el número de pruebas. Bajo esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, según Von Mises (1952, citado por la autora), aceptando la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es un valor aproximado.

Una de las limitaciones que conlleva este significado, es que a veces es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones, así como saber con certeza el número de experimentos que se deben realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como correcta.

d) *Significado subjetivo*: se pueden apreciar dos definiciones que se contraponen con lo objetivo. Una de ellas es la regla de Bayes, que consiste en transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de diversas causas una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que integran la información de los datos analizados. Y la otra corresponde a la descripción señalada por Keynes, Ramsey y De Finetti, mencionados por la autora, quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal, a partir del conocimiento y experiencia de la persona, quien asigna estas apreciaciones sobre el suceso dado. Por tanto, la probabilidad de un suceso puede ser diferente para distintas personas, Una problemática inicial de este enfoque fue encontrar la forma para asignar valores numéricos a las probabilidades, de manera que expresaran los grados de creencia personal. Pero luego se dedujo una teoría que permite separar las creencias de las preferencias a partir de un sistema de apuestas e inferir los valores de las probabilidades subjetivas (Batanero, 2006).

e) Significado matemático: Muchos autores contribuyeron a la formalización matemática sobre la probabilidad, siendo Kolmogorov quien se establece de manera permanente con una axiomática que han aceptado todas las escuelas. De este modo, define la probabilidad como un modelo matemático que se puede usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios, mostrando su utilidad en diversas áreas de la actividad humana. Este significado matemático-axiomático es un significado estructural, que facilita la organización y estructuración que se ve afectada en los significados parciales de probabilidad, descritos anteriormente.

En síntesis, la probabilidad se puede presentar en diversas situaciones de la vida cotidiana como una percepción o grado de creencia de la persona, ya que esta ha de reaccionar frente a estímulos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y azar, debiendo tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones. Por lo tanto, en la solución de muchos problemas que involucran la probabilidad, intervienen tantos factores matemáticos como extra matemáticos.

La Tabla 2.1 muestra la diferencia tanto en la definición de probabilidad como en cada uno de los elementos de significado que caracterizan a las definiciones.

Tabla 2.1.

"Elementos que Caracterizan los Diferentes Significados de la Probabilidad".

Significado de la Probabilidad	Problemas Analizados	Procedimientos de Asignación	Lenguaje	Definiciones y Propiedades	Algunos conceptos relacionados

Intuitivo	- Sorteos - Adivinación	- Manipulación de generadores de azar: dados, cartas, monedas.	- Lenguaje ordinario	- Opinión impredecible, creencia	- Suerte - Destino
Clásica-Laplaciano	- Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	-Combinatorias - Proporciones - Análisis a priori de la estructura del experimento	- Triángulo aritmético - Listados de sucesos - Fórmulas combinatorias	- Cociente de casos favorables y posibles - Equiprobabi-lidad de sucesos simples	- Esperanza - Equitatividad - Independencia
Frecuencial	- Estimación de parámetros en poblaciones	- Registros de datos estadísticos a posteriori - Ajuste de curvas matemáticas - Análisis matemático - Simulación	- Tablas y gráficos estadísticos - Curvas de densidad - Tablas de números aleatorios - Tablas de dsitribuciones	- Límite de las frecuencias relativas - Carácter objetivo en la evidencia empírica	- Frecuencia relativa - Universo - Variable aleatoria - Distribución de probabilidad
Subjetiva	- Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	- Teorema de Bayes - Asignación subjetiva de probabilidades	- Expresión de la probabilidad condicional	- Carácter subjetivo - Revisable con la experiencia	- Probabilidad condicional - Distribuciones a priori y a posteriori
Matemático -Axiomático	- Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	- Teoría de conjuntos - Álgebra de conjuntos - Teoría de la medida	- Símbolos conjuntistas	- Función medible	- Espacio muestral - Espacio de probabilidad - Conjuntos de Borel

Nota: Adaptado de Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria (p.256), por C. Batanero, 2005, *Relime, 8*(3).

La autora de este estudio, Batanero (2006) menciona que estos elementos debieran ser tomados en cuenta para la enseñanza de la probabilidad e incluso de cualquier otro contenido matemático, ya que investigaciones muestran que los estudiantes tienen dificultades en cada uno de los componentes descritos. De igual modo, la enseñanza de los distintos significados de la probabilidad también debería ser considerada en forma progresiva, comenzando desde las ideas intuitivas de los estudiantes, mediante un tránsito flexible entre los distintos significados parciales.

En síntesis, el marco teórico que sustenta este trabajo de investigación considera principalmente el razonamiento de la probabilidad condicional y sus sesgos (Díaz y de la Fuente, 2005 y 2007; Díaz, Batanero, et. al., 2012).

2.3. Razonamiento sobre probabilidad condicional y sus dificultades.

Para esta parte del marco teórico se considera principalmente el estudio de Díaz y de la Fuente (2005), en el cual se plantea el razonamiento probabilístico condicional como un componente fundamental en la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión, los modelos lineales y la toma de decisiones. Permite incorporar cambios en los grados de creencia de las personas sobre los sucesos aleatorios a medida que estas adquieren nueva información. En el campo profesional y en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

La correcta comprensión y el razonamiento de la probabilidad condicional han sido objeto de estudio de importantes investigaciones que apuntan a la comprensión de las ideas de probabilidad condicional e independencia, tanto en el campo de la Educación como en el campo de la Psicología, mostrando la

existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto.
Estas son dificultades con las que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en este tipo de razonamiento, lo que lleva a concluir en estas investigaciones que una enseñanza formal de la probabilidad condicional es insuficiente para superarlas, por lo que es indispensable que el individuo se haga consciente de estas dificultades con unas herramientas adecuadas, tanto para aprender como para enseñar.

A continuación, se presenta una clasificación de las principales dificultades que fueron recogidas por Díaz y de la Fuente (2005) de diversas investigaciones.

2.3.1. Comprensión intuitiva de la probabilidad condicional e independencia.

La probabilidad condicional se puede definir a través de diversos grados de formalización. Intuitivamente se puede decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ha ocurrido. La formalización del concepto se define mediante la expresión (1).

(1) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; siempre \; que \; P(B) > 0$$

El concepto que está relacionado a esta definición es el de independencia. Matemáticamente puede deducirse de la regla del producto de probabilidades, mediante la siguiente definición (2).

(2) $$A \; y \; B \; son \; independientes \; si \; y \; sólo \; si \; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Intuitivamente también se relaciona con el concepto de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro; definición intuitiva, "a priori" de independencia, según Maury (1986, citado por Díaz e Inmaculada, 2005).

Desde el punto de vista matemático estas definiciones no tienen dificultad de comprensión, ya que no requieren cálculos complejos. Pero desde un punto de vista psicológico y didáctico son difíciles, especialmente al ser aplicadas en la resolución de problemas y toma de decisiones.

Saber si dos sucesos reales son o no independientes, saberlo es complejo en muchos casos; por ejemplo, el mostrar la relación entre fumar y desarrollar un cáncer ha supuesto muchos años de investigación. Así lo avala el estudio realizado por Maury (1986, citado por las autoras) quien logra confirmar que cuando se consideran las intuiciones del alumno en el planteamiento del problema se obtienen mejores resultados que en un problema netamente técnico. Totohasina (1992, citado por Díaz e Inmaculada, 2005) en su estudio relacionado con la noción de probabilidad condicional encuentra dificultades por parte de los alumnos en la resolución de un problema que involucra este concepto, si bien los alumnos sólo habían estudiado la probabilidad, pero no la probabilidad condicional el 60% de ellos logra responder correctamente. De esto, se puede decir que más de la mitad de los alumnos presentaban un razonamiento intuitivo condicional que les permite resolver el problema apoyándose en sus herramientas adquiridas en el aprendizaje de la probabilidad.

Las dificultades encontradas por Totohasina (1992) se muestran a continuación:

- Interpretación no probabilística del enunciado, haciendo uso sólo de las frecuencias absolutas de casos, pero no de los porcentajes.
- No restringir el espacio muestral al calcular las probabilidades, lo que implica una comprensión deficiente de la idea de condicionamiento.

- Confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.

Estas dificultades no tan sólo se presentan en este tipo de casos sino que se ha comprobado su persistencia y el olvido total de la regla del producto o la definición de independencia estocástica, en estudiantes que sí habían estudiado estos conceptos. Se da el caso de Sánchez (1996) que realiza un cuestionario a 88 profesores de matemáticas en México, donde se planteaba un problema que pedía determinar si dos eventos A y B eran independientes. Los resultados que obtuvo al respecto, fue que sólo 44 profesores persistieron en intentar resolver el problema; de estos 39 lograron una respuesta, pero sólo 4 de ellos lo hicieron correctamente, utilizando la regla del producto. En base a las respuestas incorrectas logra deducir dos tipos de razonamiento:

a) *Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes.* Este error ha perdurado en el tiempo y ha sido descrito, entre otros autores, por Kelly y Zwiers (1986, citado por las autoras), quienes sugieren que el error se puede desprender de la imprecisión del lenguaje común, en que "independiente" puede significar, en ocasiones, separado. Por otro lado, tanto en la definición formal de independencia como en la de sucesos excluyentes interviene la operación de intersección. Habitualmente, decimos que dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia/no-ocurrencia de uno de ellos no proporciona información sobre la ocurrencia del otro. Para el caso de sucesos excluyentes la ocurrencia de uno implica la no-ocurrencia del otro, por lo tanto, "*dos sucesos excluyentes son siempre dependientes*".

b) *Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias.* Por ejemplo; *"si extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B entonces A y B son*

independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes".

2.3.2. Condicionamiento y causación.

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado, es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas, ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos.

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B/A) = 1$. La relación causal estricta es difícil de hallar en el mundo real y hablamos de relación de causa débil cuando al suceder A cambia la probabilidad de que ocurra B. Es decir, cuando P(B/A) es diferente de P(B), por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados. Sin embargo, lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden ser estadísticamente dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo, es sabido que los países con mayor esperanza de vida tienen una menor tasa de natalidad (por ello hay una correlación inversa entre esperanza de vida y tasa de natalidad), pero esto no implica que la tasa de natalidad sea causa de la esperanza de vida o al contrario, ya que si conseguimos aumentar la natalidad de un país esto no incide automáticamente en la esperanza de vida de sus habitantes. La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser falsa y no implica relación causal.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional P(A/ B) va a percibir dos relaciones muy diferentes entre A (suceso evaluado) y B (suceso condicionante) dependiendo del contexto.

Problema 1.

"¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

a. Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules. b. Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.

c. Los dos sucesos son igual de probables" (Pollatsek y cols., 1987, citado por las autoras).

- Si dentro del contexto se percibe que B (suceso condicionante) es una causa de A, la persona establecerá entre A y B una relación causal. En la primera opción, A sería que la niña tenga los ojos azules (efecto), B que la madre tenga los ojos azules (causa). Por tanto, P(A/ B), es una relación causal. En este caso el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas.
- Si dentro del contexto se percibe A como una causa de B, la persona establecerá entre A y B una relación diagnóstica. En la segunda opción A sería que la madre tenga los ojos azules (causa) y B que la niña tenga los ojos azules, por tanto P(A/ B), es una relación diagnóstica. En este caso se realizaría un razonamiento diagnóstico, estimando la causa dado el conocimiento del efecto. Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. Un efecto muy estudiado es la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. Tversky y Kahneman (1982a, citados por Díaz e Inmaculada, 2005) encontraron que las personas encontraban más probable que "una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules" que "una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules", aunque casi la mitad de los sujetos de su estudio respondieron correctamente "ambos sucesos son igual de probables". Tversky y Kahneman explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

2.3.3. Condicionamiento y Temporalidad.

La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal. Falk (1986, citado por las autoras) plantea el problema 2, a través del cual, ilustra cómo algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural.

Problema 2.

"Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.

- *¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? P (N2/ N1).*
- *¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N1/ N2)"*

Mientras los alumnos de Falk no tenían dificultad para resolver la primera parte del problema, muchos eran incapaces de dar una solución a la segunda, a la que responden que el resultado en la segunda extracción no afecta a la primera. Muchos de ellos dan como respuesta 1/2, teniendo en cuenta sólo la composición de la urna y sin utilizar el dato del resultado posterior. Este tipo de respuestas rechazando considerar la evidencia ocurrida después del suceso que juzgamos, se conoce como falacia del eje temporal y consiste en suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado.

También aquí hay un mecanismo implícito que supone la confusión entre condicionamiento y causación. En el ejemplo, el resultado en la segunda extracción depende causalmente del suceso obtenido en la primera. Esto no ocurre al revés, pero conocer el color de la segunda bola influye en la predicción del color de la primera, de la misma forma que conocer el resultado en la primera

extracción influye en la estimación del resultado en la segunda. Ello se debe al hecho de que al saber que la segunda bola fue negra, quita esta bola de los posibles resultados en la primera extracción, por tanto, ha habido una reducción del espacio muestral y P (N1/ N2) sería 1/3, igual que la P (N2/ N1).

En la primera situación, la inferencia causal es una situación natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda situación donde se nos pide hacer una inferencia inversa, requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo que puede crear dificultades psicológicas. Entender que la probabilidad de un suceso puede ser revisada a la luz de resultados posteriores es importante, sobre todo dentro del marco de la inferencia bayesiana, donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante.

Gras y Totohasina (1995) identifican tres tipos de concepciones erróneas sobre la probabilidad condicional en estudiantes:

- En la concepción cronológica los estudiantes interpretan la probabilidad condicional P(A/B) como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A.
- En la concepción causal, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.
- En la concepción cardinal los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A\cap B)}{Card(B)}$, que es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Aun así, cuando se maneja un espacio muestral continuo o las probabilidades de los diferentes sucesos no son iguales, esta concepción lleva a un error. Otros estudiantes interpretan $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A)}{Card\ (B)}$, lo que es siempre falso.

Para estimar la proporción de estudiantes con este tipo de concepciones, Gras y Totohasina (1995) hicieron las siguientes preguntas a una muestra de 75 estudiantes de secundaria (17-18 años), después de haber recibido una enseñanza experimental sobre probabilidad condicional:

> Problema 3.
> *"Pregunta A. Para calcular la probabilidad condicional P (A/B), ¿Debe ocurrir el suceso B cronológicamente antes que el suceso A? Sí__ No__ No sabe__"*
> *"Pregunta B. Para calcular la probabilidad condicional P (A/B), ¿Debemos asumir que el suceso B es la causa y el suceso A, el efecto o la consecuencia de B? Sí__ No__ No sé__"*

El 63% de los estudiantes dio una respuesta afirmativa a la pregunta A y un 28% respondió afirmativamente a la pregunta B. Los autores sugieren que el origen de las dos primeras concepciones erróneas es cognitivo, mientras que la concepción cardinal es inducida por la enseñanza.

2.3.4. Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional.

Falk (1986) sugiere que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional P(A/B) y P(B/A) y denomina a este error "*falacia de la condicional transpuesta"*. Este error se ha observado en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo, la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una

amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor.

En otro contexto Pollatsek y Cols (1987) encontraron que el 69% de los sujetos de su estudio consideran correcta la opción "c" en el Problema 4, lo que implica que igualan una probabilidad condicional y su transpuesta.

> Problema 4.
> *"¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?*
> *a. Que un taxi azul sea correctamente identificado por la noche como un taxi azul.*
> *b. Que un taxi identificado por la noche como azul sea realmente un taxi azul.*
> *c. Los dos sucesos son iguales de probables".*

Una posible explicación dada por Falk (1986) de la prevalencia de este error es que el lenguaje común, que es el que usamos en el enunciado de los problemas de probabilidad condicional no tiene la suficiente precisión y es por ello ambiguo. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí o de la probabilidad conjunta (ser fumador y tener cáncer).

2.3.5. Confusión de probabilidad condicional y probabilidad conjunta.

Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987, citados por la autora) coinciden con Falk (1986) en que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse a dificultades con la sintaxis de los enunciados de la probabilidad condicional y que la ejecución de

tareas que implican probabilidades condicionales depende de cómo se redacten los enunciados. Un ejemplo de esto lo encontraron Einhorn y Hogarth (1986) con los enunciados que usan la conjunción "y". Para estos autores estos enunciados pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Los autores plantearon a 24 estudiantes la pregunta: *"¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?".* Esta pregunta se refiere a la probabilidad conjunta, pero 9 de los 24 estudiantes la interpretaron en forma condicional como P (comprar café/ ir al supermercado).

También en la investigación de Ojeda (1995), las preguntas planteadas sobre intersección de sucesos fueron más complejas que las de probabilidad condicional, obteniendo que la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento. Un error relacionado es la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Estos autores plantearon a estudiantes sin formación estadística el Problema 5, a partir de los resultados de una encuesta de salud realizada en una muestra de hombres adultos de todas las edades y ocupaciones.

Problema 5.

- *"¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados tienen más de 55 años y además han tenido uno o más ataques al corazón?*
- *¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados ha tenido uno o más ataques al corazón?*
- *De los hombres entrevistados con más de 55 años, ¿qué porcentaje ha tenido uno o más ataques al corazón?"*

Lo que se menciona es que muchos estudiantes dan un mayor porcentaje a la primera pregunta que a las otras dos. Según Tversky y Kahneman el error se debe a considerar la conjunción como más representativa de la población

generadora que cada evento separado o bien del hecho que la conjunción hace que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido.

2.4. Implicaciones para la enseñanza de la estadística.

En los apartados anteriores se han mostrado una revisión de las investigaciones en Psicología y Educación sobre comprensión de la probabilidad condicional y razonamiento condicional, incluyendo el razonamiento sobre probabilidad conjunta e independencia. Se han descrito diferentes errores y algunas de las razones para los mismos, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

Como se mencionó inicialmente, la probabilidad condicional es un concepto básico en Estadística. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. Por tanto, es necesario garantizar que el alumno adquiera un conocimiento y competencia básica en este tema, antes de avanzar en el estudio de la estadística, ya que puede ocurrir que los errores y dificultades sobre la probabilidad condicional aumenten la dificultad de otros temas e imposibiliten su correcta aplicación.

No obstante, la investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades.

Finalmente, las autoras Díaz y de la Fuente sugieren que las soluciones erróneas pueden discutirse colectivamente y la simulación de las experiencias descritas en los problemas, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras u ordenadores, permitirá la superación gradual de las dificultades descritas. El uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje de estos conceptos.

2.5. La Probabilidad Condicional y sus Propiedades elementales.

En este apartado, se presentan dos grados de formalización matemática del concepto de probabilidad condicional, siendo una de ellas la relacionada con la regla de Laplace. También, se presentan las propiedades elementales del concepto, consideradas como tal en este estudio.

En la Figura 4, se muestra la definición de la probabilidad condicional, siendo considerada como ejemplo de formalización matemática del concepto.

Figura 4

Formalización matemática del concepto de probabilidad condicional

Definición 2.14 Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{2.5}$$

Nota. *Probabilidad y Estadística*. Canavos, G. (1988).

En esta definición, se presentan dos grados de formalizaciones también, esto es, la definición intuitiva (lenguaje natural) y la definición algebraica (matemática).

Con respecto a una segunda concepción del concepto, la cual se mencionó en el apartado anterior 2.4.3, se presenta el tratamiento que expone el profesor Eugenio Saavedra en su libro "Contenidos básicos de Estadística y Probabilidad".

- **Probabilidad a Posteriori (Concepción Cardinal de la Probabilidad Condicional)**

Bajo el modelo de Laplace se tiene que, $\frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, por lo que la probabilidad condicional de A dado B, es igual a $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Efectivamente se demuestra lo siguiente:

En el caso en que (Ω, P) sea el modelo de Laplace, esto es, $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ y

$$P(A) = \frac{\#A}{\#B}\,, \quad A \subset \Omega\,,$$

entonces

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}}$$

Por lo tanto,

$$P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}$$

- **Propiedades elementales de la probabilidad condicional.**

Sea (Ω, P) modelo de probabilidades cualquiera y $B \subset \Omega$ suceso, tal que $P(B) > 0$. Entonces se cumple:

1. Para todo suceso A, $0 \leq P(A/B) \leq 1$
2. P$(\Omega) = 1$ por lo que $P(\Omega/B\ ) = 1$
3. $P(\phi/B\ ) = 0$
4. $P(A/B)$ puede ser mayor, menor o igual a P(A)

Otra propiedad que se desea sumar a estas, es:

5. El espacio muestral de $P(A/B)$ queda restringido a B.

Esta propiedad es planteada por Peña (1986, citado en Díaz, C. y Batanero, C., 2004), el cual hace hincapié en considerar esta expresión como una propiedad de la probabilidad condicional.

CAPITULO 3

Metodología de la Investigación

3.1. Diseño de Investigación y Fundamentos.

Este trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo de investigación, el que resulta apropiado para los fines descritos en la presentación de esta tesis, puesto que el foco de interés está en describir, identificar y caracterizar los fenómenos del tratamiento de la probabilidad condicional, evidenciando la presencia o ausencia de las dificultades de razonamiento de este contenido y el tipo de utilización del mismo a través de su difusión en los textos de estudio ministeriales, durante el periodo de 2009 a 2023 en Chile.

Otra característica importante de este trabajo de investigación, es su carácter descriptivo según los objetivos que se han planteado, ya que pretende realizar una revisión crítica y un análisis en profundidad del tratamiento conceptual de la probabilidad condicional, con el objeto de describir, comparar, clasificar, interpretar y evaluar la presencia o ausencia de los sesgos del concepto en estudio.

Finalmente, a lo anterior se suma que esta investigación es de tipo exploratoria, debido a que la problemática es de muy poco estudio, ya que al realizar la búsqueda exhaustiva en los medios masivos de reproducción y difusión académica (páginas web oficiales, publicación de revistas, entre otros) y considerando, además, fuentes de información sugeridas por la bibliografía de otras tesis con estudios similares sobre probabilidad condicional y análisis de textos, sólo se logra conseguir un proyecto de graduación que lleva por título: *"Estrategia para la superación de obstáculos epistemológicos asociados a la resolución de problemas de probabilidad condicional"* realizado por Pablo Estuardo Awad (perteneciente al mismo programa de Magíster en educación Matemática en la Universidad de Santiago de Chile), en el cual se consideran las dificultades de razonamiento probabilístico condicional como sustento teórico para el estudio de la resolución de problemas basados en el mismo concepto, en el contexto de la educación matemática en Chile. Como señala Hernández, Fernández & Baptista (2014: 91, citado en Díaz, 2016) cuando la revisión de la

literatura revela que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien si se desea indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas, entonces la investigación es exploratoria.

3.1.1. Consideraciones previas.

Los principales componentes del análisis de contenido cualitativo se fundamentan en diferentes formas de interpretación de los textos. En los últimos años se han desarrollado numerosos procedimientos de análisis de contenido cualitativo alrededor de dos orientaciones fundamentales: a) desarrollo de categorías inductivas y b) aplicación de categorías deductivas (Andréu, 1998). Esta última es la que se considera para el presente estudio, ya que el desarrollo de las categorías se formula a partir de la teoría, construyendo un libro de códigos y categorías que se va aplicando en el texto.

3.1.2. La Técnica del Análisis de Contenido.

Analizar un contenido supone estudiar los contenidos de un material previamente seleccionado. Es de común acuerdo considerar que cualquier estudio con espíritu crítico de un mensaje, constituye ya un “análisis de contenido” en sí mismo. En general, el Análisis de Contenido (AC) se describe como un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones, que utiliza procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes (Tinto, 2013). Su sistematización, requiere de la elaboración de codificaciones por categorías clasificatorias, las que se presentan en matrices de análisis que se desarrollan en este capítulo, más adelante. Por tanto, se adoptará esta técnica para el caso específico del contenido de probabilidad condicional, que permitirá encontrar evidencias sobre la evolución del tratamiento del contenido, del tipo de utilización que se le ha dado a su significado y del uso de las dificultades de razonamiento probabilístico condicional, a través de los textos de estudio ministeriales chilenos en el periodo de los años 2009 a 2023.

3.3. Períodos Curriculares contemplados en la Investigación.

Como se ha hecho referencia en los antecedentes del problema, específicamente en el apartado 1.1., los cambios y ajustes curriculares definieron hitos importantes en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los últimos 15 años, pues el trabajo realizado durante estos establece las nuevas bases curriculares que actualmente rigen el sistema de enseñanza en Chile. En base a esto y a los objetivos planteados por el presente estudio, se consideran dos periodos claves para el análisis de contenido de la probabilidad condicional, siendo el primero de ellos el que va de 2009 a 2015; periodo que implica un cambio y adecuación curricular desde 1° año básico a la educación media. El segundo periodo curricular que acontece y por ende, que es siguiente al ya mencionado, corresponde al que data, desde el año 2016 hasta el 2023, considerando esta vez la educación parvularia y, en especial para esta investigación, los cursos de 3° y 4° año medio, los cuales se consolidan curricularmente el año 2019 por un proceso de elaboración y diagnóstico de las bases.

3.4. Unidad de Muestreo.

Se ha realizado una muestra intencionada y por conveniencia, correspondiente a los textos de estudios ministeriales chilenos, entre los años 2009 y 2023. En total son 6 libros de texto correspondientes a 3° medio y que están contemplados en los periodos de análisis descritos en el apartado anterior. Se obtiene así la siguiente distribución.

Tabla 3.1

Libros de texto ministeriales Periodo (2009 - 2023)

Año	Edición	Título	Autor(es)	Curso	Editorial

1*	2009 - 2010	1	Matemática III Medio	Roberto Hojman Jorge Yutronic	3° medio	Zig-Zag
2*	2011	1	Matemática 3° Educación Media	Sergio Muñoz Florencia Darrigrandi	3° medio	Santillana
3	2012	1	Matemática 3° medio	Olga Saiz Viktor Blumenthal	3° medio	Cal y Canto
4	2013 - 2014	2	Matemática 3° medio	Olga Saiz Viktor Blumenthal	3° medio	Cal y Canto
5	2015 - 2019	Reedición	Matemática 3° medio	Olga Saiz Viktor Blumenthal	3° medio	Cal y Canto
6	2020 - 2023	1	3° y 4° medio Matemática	Gladys Osorio Ma Patricia Romante Patricio Norambuena	3° y 4° medio	SM

3.5. Plan de Análisis de los Datos.

3.5.1. Matriz MCGn para la caracterización general de los textos de estudio.

Cada texto de estudio seleccionado, será descrito en su estructura general, mediante los siguientes campos de caracterización.

Tabla 3.1.

Matriz MCGn para la caracterización general de la estructura del texto

Campos genéricos MCGn, con $n = 1, 2, 3, 4$	Texto de estudio
MCG1: Título, curso y periodo curricular	
MCG2: Edición, publicación y editorial	
MCG3: Datos de Autoría	
MCG4: Presentación física	
MCG5: ISBN	

A continuación, se describen los campos genéricos de esta matriz:

- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

En este campo, se expone el título del libro, el tipo de texto, es decir, a quien va dirigido su uso, el curso y finalmente el periodo curricular que estuvo vigente en la educación escolar.

- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Aquí se describe el número de edición del texto consultado, fecha específica de su primera publicación y por último, la editorial.

- **MCG3: Datos de Autoría**

Se detallan los autores del texto, sus principales estudios de formación académica, universidad de procedencia y sus obras más relevantes publicadas y relacionadas con educación matemática.

- **MCG4: Presentación física**

En esta dimensión se describe el número de páginas del texto y sus dimensiones.

- **MCG5: ISBN**

En este último campo se indica el "código normalizado internacional para libros" (International Standard Book Number) del texto de estudio consultado.

3.5.2 Matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en los textos de estudio.

Con esta matriz se pretende describir cómo están organizados los contenidos matemáticos en cada texto de estudio y de qué manera, se presentan y articulan los conocimientos sobre la probabilidad condicional con la finalidad de obtener una descripción global y a la vez específica, que facilite el tratamiento de la probabilidad condicional a posterior. Se definieron en total cuatro campos para el diseño de esta matriz como se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2.

Matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos del texto

Campos genéricos MCOn, con n $= 1, 2, 3, 4$	**Texto de estudio**
MCO1: Estructura temática del texto	
MCO2: Organización de las unidades y contenidos	
MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional	

MCO4: Presentación de la probabilidad condicional

MCO5: Articulación de la probabilidad condicional

- **MCO1: Estructura temática del texto**

Aquí se pretende describir cómo se distribuyen y organizan en el texto, las unidades, secciones temáticas y partes más elementales del texto para su caracterización y articulación de los contenidos.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

De manera general, se presenta la secuenciación de todas las unidades del texto y los contenidos claves que se exhiben al inicio de cada unidad. Sumado a esto, se describe en forma detallada y más completa, la organización temática de los contenidos de la unidad de probabilidades, es decir, se considerarán tanto los contenidos generales como específicos y los aprendizajes esperados.

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

Aquí se pretende describir los conocimientos previos que se relacionan y son esenciales para el tratamiento de la probabilidad condicional.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

En este campo se muestra cómo es introducido el concepto de probabilidad condicional en el texto de estudio, es decir, cómo él o los autores inician la presentación, hacen la institucionalización, representación y ejemplificación del concepto. Cuál es la definición que se plantea y desde qué enfoques.

- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

Mediante este campo se pretende identificar las articulaciones que se plantean de la probabilidad condicional con otros conceptos o contenidos, es decir, describir las relaciones o composiciones que se forman a partir de este concepto.

3.5.3. Matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional.

En esta matriz se concentra lo más fundamental del análisis de los textos considerados en esta investigación, ya que describirá cómo los autores exponen el tratamiento del concepto de probabilidad condicional, analizando la presencia y/o ausencia de las principales dificultades de razonamiento condicional descritas en el marco teórico y que están alineadas con los objetivos de este estudio.

Tabla 3.3.

Matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional.

Campos genéricos MTCn, con n $= 1, 2, 3, 4$	Texto de estudio
MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia	
MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional	
MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos	
MTC4: Condicionalidad y falacia del eje temporal	
MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal	
MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta	
MTC7: Representaciones de la probabilidad condicional	

A continuación, se describen los campos genéricos de esta matriz:

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

En este campo se identificará el tratamiento de los conceptos de probabilidad condicional e independencia, presentes en el texto. Describiendo y analizando los distintos grados de formalización (lenguaje intuitivo y algebraico) y la relación entre ambos conceptos. Para el análisis de sucesos independientes se considerarán dos dificultades de razonamiento condicional:

- Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes.
- Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencia.

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

En este se campo, primero se pretende identificar la presencia de las propiedades básicas de la probabilidad condicional, en el texto de estudio. Y luego, describir cómo se plantean y/o ejemplifican como aporte al tratamiento del concepto.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

Aquí se pretende identificar y analizar de qué manera los autores incorporan la relación de causalidad entre sucesos y la relación de condicionalidad, con la finalidad de evidenciar el grado de importancia y explicación que se le atribuye a estas dos relaciones para la comprensión del concepto de probabilidad condicional.

- **MTC4: Condicionalidad y falacia del eje temporal**

Mediante este campo se desea analizar y detallar cómo los autores abordan la condicionalidad entre los sucesos respecto a la concepción errónea de temporalidad (falacia del eje temporal) que se le atribuye a estos. Para esto se tendrá en cuenta lo que mencionan Gras y Totohasina (1995):

- En la concepción cronológica los estudiantes interpretan la probabilidad condicional P(A/B) como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

La correcta asignación y definición del espacio muestral es fundamental para una adecuada interpretación de la probabilidad condicional. Por esta razón, es que en este campo se pretende analizar y evidenciar cómo los autores describen el espacio muestral y de qué manera influye en la concepción de la probabilidad condicional, teniendo como referencia para este análisis lo descrito en el marco teórico respecto a la interpretación errónea que menciona Gras y Totohasina (1995):

- En la concepción cardinal los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$, que es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Aun así, cuando se maneja un espacio muestral continuo o las probabilidades de los diferentes sucesos no son iguales, esta concepción lleva a un error. Otros estudiantes interpretan $P(A/B)$ como la proporción $\frac{Card(A)}{Card\ (B)}$, lo que es siempre falso.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

En este campo, se pretende primero identificar la presencia de la probabilidad simple y conjunta en el texto de estudio. Para luego, analizar cómo los autores contrastan estos dos conceptos con la probabilidad condicional y de qué manera se relaciona este tratamiento

- **MTC7: Uso de representaciones de la probabilidad condicional**

Como se expuso en el marco teórico, el uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas, contribuyen a la mejora del aprendizaje del concepto en estudio. Por esta razón, este campo pretende identificar y analizar las representaciones que incorporan o no, los o las autoras para el tratamiento del concepto. Entre estas, se consideran como elementales: el diagrama de árbol, diagrama de Venn, tablas de contingencia y el problema verbal. La representación en lenguaje común o algebraico, no se consideran en este campo, ya que son analizadas en los campos MCO4 y MTC1.

3.5.4. Matriz de Resumen y Cotejo de descripción de Contenidos

Respecto a la información obtenida, mediante la aplicación de las matrices MCGn, MCOn y MTCn, es indispensable sintetizar y objetivar lo observado a través de descriptores específicos que facilitan la comprensión de las características del texto y permiten comparar la información para efectos de una triangulación final, de la cual se podrán extraer conclusiones en relación a los objetivos planteados y así responder a las preguntas de investigación.

En esta matriz se resumen y cotejan los contenidos y conceptos más esenciales relacionados con la caracterización y el tratamiento de la probabilidad condicional, indicando la presencia o ausencia de ellos en los textos y comparando, a la vez, la información examinada en cada uno.

La caracterización y el tratamiento del concepto, quedan determinados en la matriz de resumen (Mrc), **mediante los descriptores puntuales llamados; Campos y Aspectos**. Se utilizan estos dos descriptores según sea el grado de especificidad necesaria. Por ejemplo, se define un campo llamado “Vigencia del texto”, el cual se refiere a los años de uso del texto de estudio y sólo se requiere de anotar en la celda respectiva, los dos últimos dígitos de los años en cuestión.

Los otros campos fueron seleccionados de las matrices MCGn y MCOn, y adecuados para facilitar la lectura y comprensión de la información recabada. Estos campos se desglosan en distintos aspectos, los cuales son claves para entregar una caracterización global del tratamiento del concepto, promulgado en los textos. Por ejemplo, el campo "Presentación al concepto", se desglosa en siete aspectos que brindan la información relevante para la caracterización de la metodología utilizada por los autores. Como se trata de una matriz de resumen y cotejo, la información que se recopile, permitirá identificar la tendencia del descriptor con respecto a los 6 textos de estudios analizados.

Escala de valoración:

i) Si el descriptor **aparece sin errores ni ausencias conceptuales**, en el texto examinado, se registra **C** (Completo) en la celda correspondiente.

ii) Si el descriptor **aparece con errores o ausencias conceptuales,** en el texto examinado, se registra **I** (Incompleto) en la celda correspondiente.

iii) Si el descriptor **no aparece** en el texto examinado, se opta por dejar en **blanco** la celda correspondiente.

Los descriptores de la matriz de resumen y cotejo están simbolizados por **Mrc(i.j)**, donde "i" es el ordinal que indica el campo y "j" el ordinal genérico de sus aspectos.

Tabla 3.4.

Matriz de Resumen y Cotejo de Descripción de contenidos Mrc

Campos y Aspectos	Texto 1°	Texto 2°	Texto 3°	Texto 4°	Texto 5°	Texto 6°
1. Vigencia del Texto						

2. Curso							
3. Conocimientos previos del concepto	3.1. Definición de espacio muestral						
	3.2. Espacio muestral finito equiprobable						
	3.3. Espacio muestral infinito numerable						
	3.4. Espacio muestral discreto/continuo						
	3.5. Regla de Laplace						
	3.6. Teoría de Conjuntos						
	3.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
4. Presentación del concepto	4.1. Deductiva						
	4.2. Inductiva						
	4.3. Uso de lenguaje intuitivo						
	4.4. Uso de lenguaje matemático						
	4.5. Ejemplificación del concepto						
	4.6. Uso de representaciones						
	4.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
5. Definición del concepto	5.1. Definición intuitiva del concepto						
	5.2. Definición formal del concepto						
	5.3. Concepción probabilística $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$						
	5.4. Concepción cardinal $P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$ con $\#B \neq 0$						
	5.5. Definición de espacio muestral del concepto						
	5.6. $P(B) > 0$ para definir $P(A/B)$						
	5.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
6. Propiedad	6.1. Para todo suceso A, $0 \leq P(A/B) \leq 1$						
	6.2. $P(\Omega) = 1$ por lo que $P(\Omega/\mathrm{B}) = 1$						

	6.3. $P(\phi/\mathrm{B}) = 0$						
	6.4. El espacio muestral de $P(A/B)$ queda restringido a B.						
	6.5. $P(A/B)$ puede ser mayor, menor o igual a $P(A)$						
	6.6. Otro (especificar al final de la parrilla)						
7. Representaciones del concepto	7.1. Área de una sección rectangular						
	7.2. Diagrama de árbol						
	7.3. Gráfico de barras						
	7.4. Diagrama de Venn						
	7.5. Tablas de contingencia						
	7.6. Resolución de Problema verbal						
	7.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
8. Definición de independencia y sucesos mutuamente excluyentes	8.1. Definición intuitiva de independencia						
	8.2. Definición matemática de independencia						
	8.3. Ejemplificación de independencia						
	8.4. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes						
	8.5. Probabilidad de la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes.						
9. Definición de dependencia	9.1. Definición intuitiva de dependencia						
	9.2. Definición matemática de dependencia						
	9.3. Ejemplificación de dependencia						

A continuación, se define cada descriptor, campo y aspecto.

A. Campos Mrc(i).

- Mrc(1) Vigencia del Texto: Se anotan los dos últimos dígitos de los años en que el texto de estudio es utilizado en el sistema escolar. Por ejemplo, si abarca de 2009 a 2010 se anota 09 y bajo este número se escribe 10.
- Mrc(2) Curso de enseñanza media: Se anotará el curso al que pertenece el texto, registrándose: 1º, 2º, 3º o 4º, para el primero, segundo, tercero o cuarto año de enseñanza media, respectivamente.

B. Campos y sus respectivos aspectos, Mrc(i.j).

- Mrc(3.j) Conocimientos previos del concepto: este campo tiene 7 aspectos ($1 \leq j \leq 7$).

Estos son:

- 3.1. Definición de espacio muestral
- 3.2. Espacio muestral finito equiprobable
- 3.3. Espacio muestral infinito numerable
- 3.4. Espacio muestral discreto/continuo
- 3.5. Regla de Laplace
- 3.6. Teoría de Conjuntos
- 3.7. Otro (especificar al final de la parrilla)

Se consideran estos aspectos, como los conocimientos previos elementales para iniciar el estudio de la probabilidad condicional.

- Mrc(4.j) Presentación del concepto: este campo tiene 7 aspectos ($1 \leq j \leq 7$).

Estos son:

- 4.1. Deductivo
- 4.2. Inductivo
- 4.3. Uso de lenguaje intuitivo
- 4.4. Uso de lenguaje matemático

- 4.5. Ejemplificación
- 4.6. Uso de representaciones
- 4.7. Otro (especificar al final de la parrilla)

Estos aspectos apuntan a la presentación del concepto de probabilidad condicional y a los recursos empleados para establecer su metodología.

- Mrc(5.j) Definición del concepto: este campo se desglosa en 7 aspectos ($1 \leq j \leq 7$).

Estos son:

- 5.1. Definición intuitiva
- 5.2. Definición matemática
- 5.3. Concepción probabilística $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$
- 5.4. Concepción cardinal $P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$ con $\#B \neq 0$
- 5.5. Definición de espacio muestral del concepto
- 5.6. P(B)>0 para definir P(A/B)
- 5.7. Otro (especificar al final de la parrilla)

Estos tienen por objetivo, describir los aspectos más elementales que deben conformar la definición de probabilidad condicional y que entregan un grado de rigurosidad a ésta. De este modo, se identifican los distintos grados de formalización utilizados para definir el concepto.

- Mrc(6.j) Propiedades básicas del concepto: este campo se desglosa en 6 aspectos ($1 \leq j \leq 6$).

Estos son:

- 6.1. Para todo suceso $A,\ 0 \leq P(A/B) \leq 1$
- 6.2. $P(\Omega) = 1$ por lo que $P(\Omega/B) = 1$

- 6.3. $P(\phi/B) = 0$
- 6.4. El espacio muestral de P(A/B) queda restringido a B.
- 6.5. $P(A/B)$ puede ser mayor, menor o igual a $P(A)$
- 6.6. Otro (especificar al final de la parrilla)

En este campo, los aspectos están enfocados a identificar primero la presencia de las propiedades básicas de la probabilidad condicional, para luego describir el tratamiento que se le da a cada una, para su interpretación y rigurosidad con respecto al concepto.

- Mrc(7.j) Representaciones del concepto: este campo se desglosa en 7 aspectos ($1 \leq j \leq 7$).

Estos son:

- 7.1. Área de una sección de un rectángulo
- 7.2. Diagrama de árbol
- 7.3. Gráfico de barras
- 7.4. Diagrama de Venn
- 7.5. Tablas de contingencia
- 7.6. Resolución de Problema verbal
- 7.7. Otro (especificar al final de la parrilla)

A través de estos aspectos, se pretende obtener información de las distintas representaciones utilizadas, como recurso, para la correcta interpretación de la probabilidad condicional y de este modo, describir la variabilidad de representaciones consideradas en el texto para la comprensión del concepto.

- Mrc(8.j): Definición de independencia y sucesos mutuamente excluyentes: este campo se desglosa en 7 aspectos ($1 \leq j \leq 5$).

Estos son:

- 8.1. Definición intuitiva de independencia
- 8.2. Definición matemática de independencia
- 8.3. Ejemplificación de independencia
- 8.4. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes
- 8.5. Probabilidad de la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes.

- Mrc(9.j): Definición de dependencia: este campo se desglosa en 7 aspectos ($1 \leq j \leq 3$).

Estos son:

- 9.1. Definición intuitiva de dependencia
- 9.2. Definición matemática de dependencia
- 9.3. Ejemplificación de dependencia

3.5.5. Matriz de Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Condicional Mrd.

Del mismo modo que el apartado anterior, aquí se pretende sintetizar la presencia/no presencia de las dificultades de razonamiento condicional como resultado del análisis y de las descripciones de los textos, mediante los campos MTC1 al MTC6. La síntesis, se presenta a través de la Matriz de Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Condicional (Mrd). Las que para esta ocasión, se modificaron cambiando la "dificultad" por una acción a observar en los textos de estudio, por ejemplo, la dificultad: *"Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes"* se relaciona con la acción: Diferencia eventos independientes - eventos excluyentes, pues lo que se observó en el análisis de contenido, es si estuvo presente o no la acción, implicando de este modo, identificar la dificultad de razonamiento condicional. En otras palabras, mediante la presencia/no presencia de la acción descrita, es posible concluir, si los textos consideran o no las dificultades de razonamiento condicional como aporte al tratamiento del concepto.

El tratamiento de la probabilidad condicional en los textos de estudio, con respecto a considerar sus dificultades de razonamiento como aporte al concepto, queda determinado en la matriz de resumen (Mrd), **mediante los descriptores puntuales llamados; Campos y Acciones**. Como se trata de una matriz de resumen y cotejo, la información que se recopile, permitirá identificar la tendencia de la presencia/no presencia del descriptor (acción) con respecto a los 6 textos analizados.

- **Escala de valoración**:

i) Si el descriptor **aparece sin errores ni ausencias conceptuales**, en el texto examinado, se registra **P** (Presente) en la celda correspondiente.
ii) Si el descriptor **aparece con errores o ausencias conceptuales,** en el texto examinado, se registra **MP** (Medianamente Presente) en la celda correspondiente.
iii) Si el descriptor **no aparece** en el texto examinado, se opta por dejar en **blanco** la celda correspondiente.

Los descriptores de esta matriz de resumen y cotejo Mrd, están simbolizados por **Mrd(i.j)**, donde "i" es el ordinal que indica el campo y "j" el ordinal genérico de sus acciones.

En la Tabla 3.5, se muestra la matriz Mrd, donde se sintetizará la información recabada en el capítulo 4, específicamente, de las matrices MTCn.

Tabla 3.5.

Matriz de Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Mrd

Campos y Acciones		Texto 1°	Texto 2°	Texto 3°	Texto 4°	Texto 5°	Texto 6°
MTC1	1.1. Tratamiento intuitivo de independencia						
	1.2. Tratamiento intuitivo de probabilidad condicional						
	1.3. Relación intuitiva probabilidad condicional - independencia						
	1.4. Relación formal probabilidad condicional - independencia						
	1.5. Diferencia eventos independientes - eventos excluyentes						
	1.6. Aplicación de independencia a **no sólo** sucesiones de experiencias						
MTC2	2.1. Reducción del espacio muestral al suceso condicionante						
MTC3	3.1. Relación condicional entre sucesos						
	3.2. Relación causal entre sucesos						
	3.3. Relación diagnóstica entre sucesos						
MTC4	4.1. Orden temporal natural entre sucesos						
	4.2. Orden inverso de la temporalidad de los sucesos.						
MTC5	5.1. Diferencia espacio muestral finito equiprobable – espacio muestral infinito no equiprobable						
	5.2. Diferencia espacio muestral discreto – espacio muestral continuo						
	5.3. Diferencia concepción cardinal – concepción probabilística, de la probabilidad condicional						

MTC6	6.1. Diferencia probabilidad simple – probabilidad condicional						
	6.2. Diferencia probabilidad conjunta – probabilidad condicional						

Cabe mencionar, que el campo MTC7 no se incorpora en esta tabla, ya que se incorporó en la Tabla 4.22, en el campo 6; representaciones del concepto. Pues si bien, apunta al tratamiento del concepto, no existe alguna dificultad que apunte a la comprensión de la representación del concepto.

3.5.6. Triangulación y obtención de Conclusiones.

Las matrices Mrc y Mrd, se presentan al término de haber examinado los 6 libros de texto y, por tanto, se consideran como parte de la síntesis del capítulo 4, dando así una caracterización del tratamiento oficial del concepto, promulgado por los textos de estudio.

De este modo, se llega al capítulo 5 llamado “Resultados y Conclusiones”, para contrastar la información y los análisis realizados, de la siguiente manera:

- Se efectúa la triangulación entre las matrices Mrc y Mrd, para poder obtener la caracterización global del tratamiento del concepto, en base a las dificultades de razonamiento condicional.
- Se proceden a responder las preguntas de investigación y a obtener las conclusiones finales, de acuerdo a los objetivos del estudio.

El perfil y la determinación para la triangulación se harán en relación a la Tabla 3.6, que articula y relaciona las descripciones entre ambas matrices de resumen y cotejo, en base a las dificultades del razonamiento condicional. Luego, esta tabla se codifica para una tabla de triangulación definitiva con el fin de facilitar la comparación y lectura de la información.

Tabla 3.6.

Articulación entre las descripciones de las matrices de resumen y cotejo en base a las dificultades de razonamiento.

Descripción de Contenidos (Aspectos)	Dificultades de Razonamiento (Acciones)
8.1. Definición intuitiva de independencia 5.1. Definición intuitiva del concepto 8.2. Definición matemática de independencia 5.2. Definición matemática del concepto 8.5. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes 8.3. Ejemplificación de independencia	1.1. Tratamiento intuitivo de independencia 1.2. Tratamiento intuitivo de probabilidad condicional 1.3. Relación intuitiva probabilidad condicional - independencia 1.4. Relación formal probabilidad condicional - independencia 1.5. Diferencia eventos independientes - eventos excluyentes 1.6. Aplicación de independencia a **no sólo** sucesiones de experiencias
6.2. $\boldsymbol{P}(\Omega) = \mathbf{1}$ por lo que $\boldsymbol{P}(\Omega/\mathrm{B}) = \mathbf{1}$ 6.3. $\boldsymbol{P}(\phi/\mathrm{B}) = \mathbf{0}$ 6.4. El espacio muestral de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B})$ queda restringido a $\boldsymbol{B}$. 4.5. Ejemplificación del concepto	2.1. Reducción del espacio muestral al suceso condicionante

4.5. Ejemplificación del concepto 4.6. Uso de representaciones	3.1. Relación condicional entre sucesos 3.2. Relación causal entre sucesos 3.3. Relación diagnóstica entre sucesos 4.1. Orden temporal natural entre sucesos 4.2. Orden inverso de la temporalidad de los sucesos.
3.2. Espacio muestral finito equiprobable 3.3. Espacio muestral infinito numerable 3.4. Espacio muestral discreto/continuo 5.3. Concepción probabilística $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0}$ 5.4. Concepción cardinal $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}}$ con $\boldsymbol{\#B \neq 0}$	5.1. Diferencia espacio muestral finito equiprobable – espacio muestral infinito no equiprobable 5.2. Diferencia espacio muestral discreto – espacio muestral continuo 5.3. Diferencia concepción cardinal – concepción probabilística, de la probabilidad condicional
3.5. Regla de Laplace 3.6. Teoría de Conjuntos 4.5. Ejemplificación del concepto **9.1. Definición intuitiva de dependencia** **9.2. Definición matemática de dependencia** 9.3. Ejemplificación de dependencia	6.1. Diferencia probabilidad simple – probabilidad condicional 6.2. Diferencia probabilidad conjunta – probabilidad condicional

Tabla 3.7

Triangulación de Descripción de Contenidos y Dificultades de Razonamiento

Descripción de Contenidos (Aspectos)	Dificultades de Razonamiento (Mrd)	%	%
8.1. Definición intuitiva de independencia 5.1. Definición intuitiva del concepto 8.2. Definición matemática de independencia 5.2. Definición matemática del concepto 8.5. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes 8.3. Ejemplificación de independencia	Mrd(1.1) Mrd(1.2) Mrd(1.3) Mrd(1.4) Mrd(1.5) Mrd(1.6)		
6.2. $\boldsymbol{P}(\Omega) = \mathbf{1}$ por lo que $\boldsymbol{P}(\Omega/\mathrm{B}) = \mathbf{1}$ 6.3. $\boldsymbol{P}(\phi/\mathrm{B}) = \mathbf{0}$ 6.4. El espacio muestral de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B})$ queda restringido a $\boldsymbol{B}$. 4.5. Ejemplificación del concepto	Mrd(2.1)		
4.5. Ejemplificación del concepto 4.6. Uso de representaciones	Mrd(3.1) Mrd(3.2) Mrd(3.3) Mrd(4.1) Mrd(4.2)		

3.2. Espacio muestral finito equiprobable 3.3. Espacio muestral infinito numerable 3.4. Espacio muestral discreto/continuo 5.3. Concepción probabilística $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0}$ 5.4. Concepción cardinal $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}}$ con $\boldsymbol{\#B \neq 0}$	Mrd(5.1) Mrd(5.2) Mrd(5.3)		
3.5. Regla de Laplace 3.6. Teoría de Conjuntos 4.5. Ejemplificación del concepto **9.1. Definición intuitiva de dependencia** **9.2. Definición matemática de dependencia** 9.3. Ejemplificación de dependencia	Mrd(6.1) Mrd(6.2)		

CAPITULO 4

Presentación y Análisis de la información

4.1. Introducción

En este capítulo se procede a presentar, describir y analizar el contenido temático y el tratamiento del concepto en estudio, de la muestra seleccionada. Luego, al final del capítulo, se realiza una síntesis de la información recabada, mediante el uso de dos matrices de resumen y cotejo, en donde a cada una se le asocia una tabla, donde se muestra la tendencia de los resultados, lo que permitirá hacer la triangulación de los datos, en el capítulo 5 relativo a los resultados y conclusiones.

4.2. Aplicación de las Matrices a los Texto de Estudio.

Los libros de texto que se examinarán son:

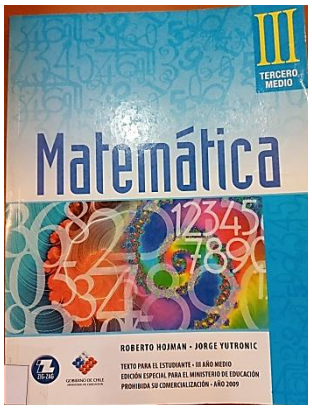
Tabla 4.1.

Libros de texto ministeriales examinados del periodo curricular 2009 - 2023

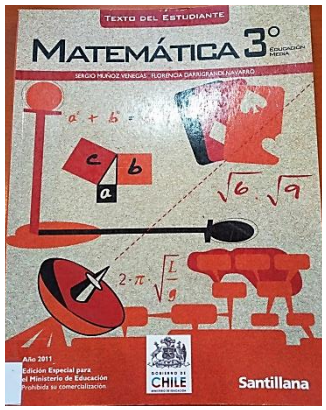
	Periodo curricular	Edición	Título	Curso	Editorial
1°	2009-2010	1	Matemática III Medio	3° medio	Zig-Zag
2°	2011	1	Matemática 3°	3° medio	Santillana
3°	2012	1	Matemática 3° medio	3° medio	Cal y Canto
4°	2013-2014	1	Matemática 3° medio	3° medio	Cal y Canto
5°	2015-2019	Reedición	Matemática 3° medio	3° medio	Cal y Canto
6°	2020-2023	1	3° y 4° medio Matemática	3° y 4° medio	SM

Cuyas portadas se presentan a continuación:

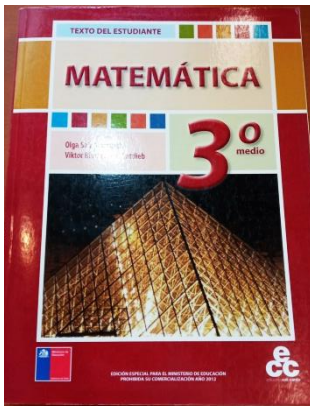
1° 2009 a 2010



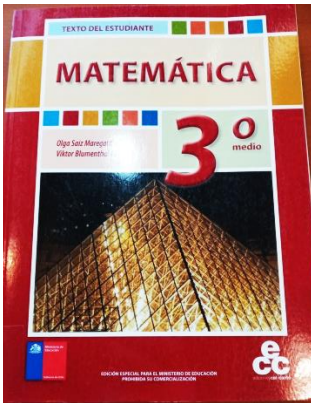
2° 2011



3° 2012



4° 2013 a 2014



5° 2015 a 2019

6° 2020 a 2023

4.2.1.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 1°.

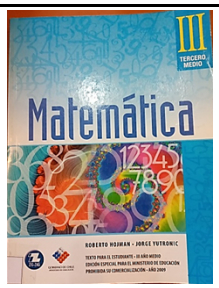
- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática III Tercero Medio

Tipo: Texto para el estudiante

Curso: 3° educación media

Periodo: 2009 - 2010



- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: Primera edición

Publicación: 2008 - 11 – 25

Editorial: Zig-Zag S.A.

- **MCG3: Datos de Autoría**

En Tabla 4.2 se organiza y describe la información de este campo.

Tabla 4.2.

Datos de autoría del texto 1°

Autor	Grados académicos	Universidad de procedencia	Obras
Roberto Hojman	- Doctor en Física	Universidad de Tries, Italia 1980	- Fundador de Gal&leo
	- Magíster en Ciencias con mención en Física	Universidad de Chile, 1975	- “Modelos matemáticos de objetos celestes”, 1991
	- Bachiller en Física	Universidad de Chile, 1975	

Jorge Yutronic	Ingeniero civil electricista	Universidad de Chile, 1976	- Creador del Programa Cultura de la Innovación, 1993 - Uno de los fundadores del Programa Explora, 1996

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 280 páginas cuyas dimensiones son de 27x21 cm

- **MCG5: ISBN**

ISBN 978-956-12-1964-9

4.2.1.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 1°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

En la Tabla 4.3, se presenta la distribución y organización temática del texto 1°, refiriéndose a sus partes más elementales que permiten caracterizar al texto.

Tabla 4.3.

Estructura temática del texto 1°

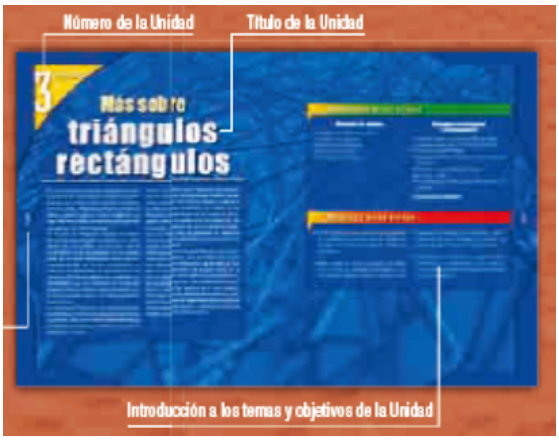
Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	Cierre del texto

- N° unidad - Título - Folio explicativo - Contenidos - Aprendizajes esperados	- Texto/actividad introductoria - Presentación de contenidos - Ejercicios resueltos - Ejercicios propuestos	- Síntesis de la unidad - Más ejercicios propuestos - Autoevaluación	- Solucionario - Bibliografía - Libros recomendados

En la Figura 5, se puede apreciar gráficamente la estructura del inicio de cada unidad del texto 1°.

Figura 5

Estructura gráfica del inicio de la unidad del texto 1°



Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 4), 2008, Zig-Zag.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

En la Tabla 4.4 se presenta cada unidad del texto 1° con sus contenidos y páginas correspondientes.

Tabla 4.4.

Organización de las unidades y contenidos del texto 1°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas
1	Las funciones raíz cuadrada y cuadrática	- La raíz cuadrada de un número - La función cuadrática	10 – 79
2	Inecuaciones lineales	- El mundo que percibimos y el que construimos - Solución de inecuaciones lineales - Estudio de desigualdades literales	80 – 131
3	Más sobre triángulos rectángulos	- Medición de ángulos - Triángulos rectángulos y trigonometría	132 – 187
4	El estudio de las probabilidades	- Nociones de probabilidad - Probabilidades y probabilidades - Combinatoria clásica	188 - 261

Cabe mencionar, que la cantidad de páginas utilizadas para la unidad 4, “El estudio de las probabilidades”, es de 73 páginas en total.

En la Tabla 4.5 se describe, específicamente, la organización temática de la unidad de probabilidades, considerando los contenidos específicos y los aprendizajes esperados en el orden que los presenta el texto a lo largo de la unidad.

Tabla 4.5.

Organización temática de la unidad de probabilidades del texto 1°

N°/ Eje temático	Contenidos / Secciones	Aprendizajes esperados	Páginas

4 El estudio de las probabilidades	➢ Nociones de probabilidad • La historia continúa • La probabilidad en la vida cotidiana • Azar • Experimento aleatorio • Espacio muestral • Frecuencia absoluta y frecuencia relativa • Equiprobabilidad • Sucesos de un experimento aleatorio	• Distinguirás entre sucesos equiprobables y no equiprobables.	188 – 202
	➢ Probabilidades y probabilidades • Probabilidad clásica • Regla de Laplace • Probabilidad experimental • Ley de los grandes números • Simulación de experimentos aleatorios • Generación de números aleatorios • Probabilidad subjetiva • Variable aleatoria • Información estadística y probabilidades • Probabilidad de sucesos compuestos • Relaciones entre sucesos • Probabilidad condicionada • Probabilidad con reemplazo y sin reemplazo	• Reconocerás variables aleatorias y las podrás interpretar de acuerdo a los contextos en que se presentan. • Conocerás la “Ley de los grandes números” y relacionarás la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso. • Resolverás problemas que requieran el cálculo de probabilidad condicionada en situaciones sencillas.	203 – 242

➢ Combinatoria clásica • Permutaciones • Variaciones • Combinaciones	243 – 253
➢ Síntesis de la unidad	254 - 256
➢ Más ejercicios propuestos	257 – 260
➢ Autoevaluación	261

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

Los contenidos expuestos en la Tabla 4.6 como conocimientos previos, se deducen de la unidad del texto 1 ° y se describen, teniendo en cuenta la probabilidad condicional como el conocimiento nuevo a tratar. Es por esto, que se buscan aquellos conocimientos relacionados y necesarios para poder iniciar el estudio de la probabilidad condicional.

Tabla 4.6.

Conocimientos previos de la probabilidad condicional del texto 1°

Conocimientos previos	Descripción	Páginas
• Espacio muestral	- Sólo se hace referencia, en forma general, al concepto de espacio muestral como: "*Se denomina espacio muestral E al conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio*".	192

• Regla de Laplace	- Se plantea la Regla de Laplace como aquella que define la probabilidad de un suceso A, mediante la expresión $\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$, en base a las condiciones que debe cumplir un experimento aleatorio: a) El número de resultados posibles (sucesos elementales) tiene que ser finito y conocido, b) Todos los resultados (sucesos elementales) tienen que tener la misma probabilidad de ocurrencia (equiprobables).	203
• Equiprobabilidad	- Inicialmente se considera el concepto de frecuencia relativa para explicar y ejemplificar el concepto de "resultados equiprobables" de un experimento aleatorio. Dando cuenta que, si al realizar un experimento se verifica que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse en valores parecidos para los diferentes resultados posibles de obtener, se puede concluir con cierto grado de certeza que los resultados son equiprobables. Al contrario, los "resultados no equiprobables", se deben a las frecuencias relativas que tienden a estabilizarse en valores notoriamente diferentes.	198
• Sucesos compatibles y sucesos	- Mediante un ejemplo sencillo de experimento aleatorio, se pretende concluir los conceptos de "sucesos compatibles" y "sucesos mutuamente	222 – 224

mutuamente excluyentes	excluyentes", definiéndolos intuitivamente como: "*algunos sucesos pueden ocurrir simultáneamente (sucesos compatibles), mientras que, en otros casos la ocurrencia de un suceso excluye la ocurrencia de otros (sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes)*".	225 - 226
• Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes	- Se ejemplifica un experimento aleatorio, mediante el cual se definen dos sucesos, A y B excluyentes y dos compatibles, A y C, comparando sus probabilidades para luego concluir*: "sólo para sucesos incompatibles, la probabilidad de que ocurra uno de los dos sucesos es,* $P(A\ o\ B) = P(A) + P(B)$".	226
• Sucesos independientes	- Se define intuitivamente como: "Dos sucesos A y B son independientes, si la ocurrencia de A no afecta la probabilidad de ocurrencia de B y viceversa", luego se ejemplifica el concepto, mediante una situación de secuencia de sucesos (con reposición).	233
• Probabilidad de sucesos independientes	- Se explica en lenguaje natural cómo encontrar la probabilidad de dos sucesos independientes que ocurren en secuencia y luego se expresa simbólicamente como: P(A y B) = P(A) • P(B). Se ejemplifica este concepto, retomando el ejemplo anterior de sucesos independientes.	

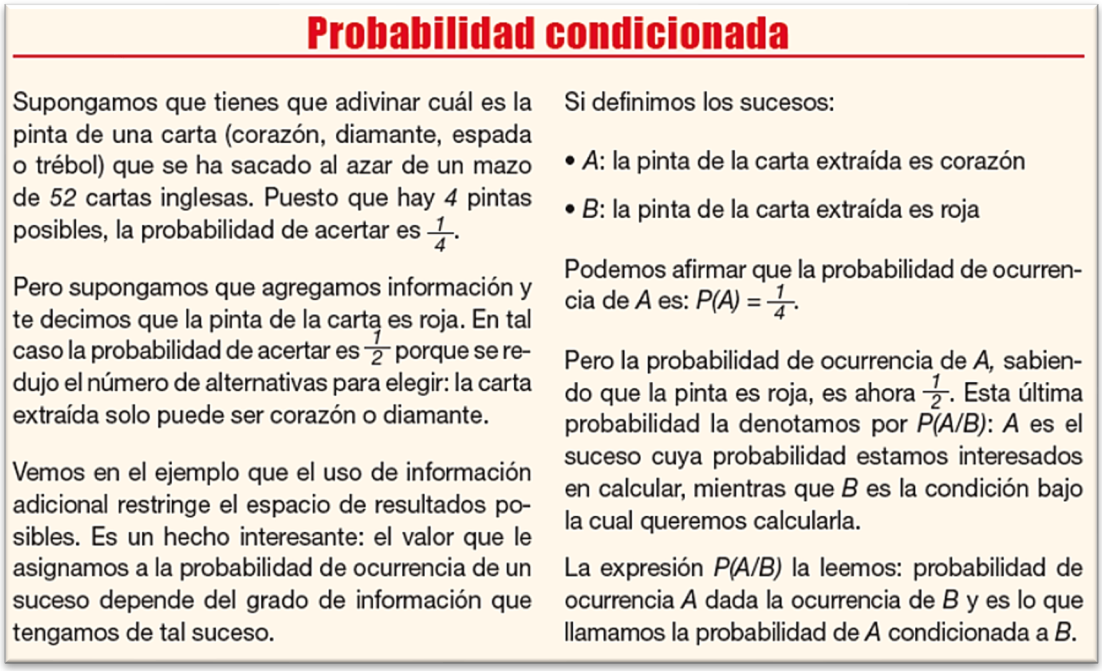
En general, se observa que los contenidos identificados como los conocimientos previos de la probabilidad condicional tienen relación con los resultados y tipos de sucesos que se obtienen de un experimento aleatorio, los que luego se utilizan para el cálculo de probabilidades. La metodología expuesta para la presentación de estos contenidos sigue un patrón que, en general, los trata de manera seccionada, aislada lo que impide en gran medida relacionarlos y articularlos entre sí.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

Inicialmente, la definición de probabilidad condicional es introducida mediante el planteamiento de un supuesto, es decir, de modo más intuitivo, ya que se invita al alumno a simular una situación azarosa para luego leer las conclusiones y a partir de estas, poder definir el concepto en lenguaje natural, considerando algunas simbologías. En la Figura 6, se muestra la presentación inicial del concepto presente en la unidad 4 del texto 1°.

Figura 6

Presentación inicial de la probabilidad condicional en el texto 1°



Probabilidad condicionada

Supongamos que tienes que adivinar cuál es la pinta de una carta (corazón, diamante, espada o trébol) que se ha sacado al azar de un mazo de *52* cartas inglesas. Puesto que hay *4* pintas posibles, la probabilidad de acertar es $\frac{1}{4}$.

Pero supongamos que agregamos información y te decimos que la pinta de la carta es roja. En tal caso la probabilidad de acertar es $\frac{1}{2}$ porque se redujo el número de alternativas para elegir: la carta extraída solo puede ser corazón o diamante.

Vemos en el ejemplo que el uso de información adicional restringe el espacio de resultados posibles. Es un hecho interesante: el valor que le asignamos a la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende del grado de información que tengamos de tal suceso.

Si definimos los sucesos:

- *A*: la pinta de la carta extraída es corazón
- *B*: la pinta de la carta extraída es roja

Podemos afirmar que la probabilidad de ocurrencia de *A* es: $P(A) = \frac{1}{4}$.

Pero la probabilidad de ocurrencia de *A*, sabiendo que la pinta es roja, es ahora $\frac{1}{2}$. Esta última probabilidad la denotamos por $P(A/B)$: *A* es el suceso cuya probabilidad estamos interesados en calcular, mientras que *B* es la condición bajo la cual queremos calcularla.

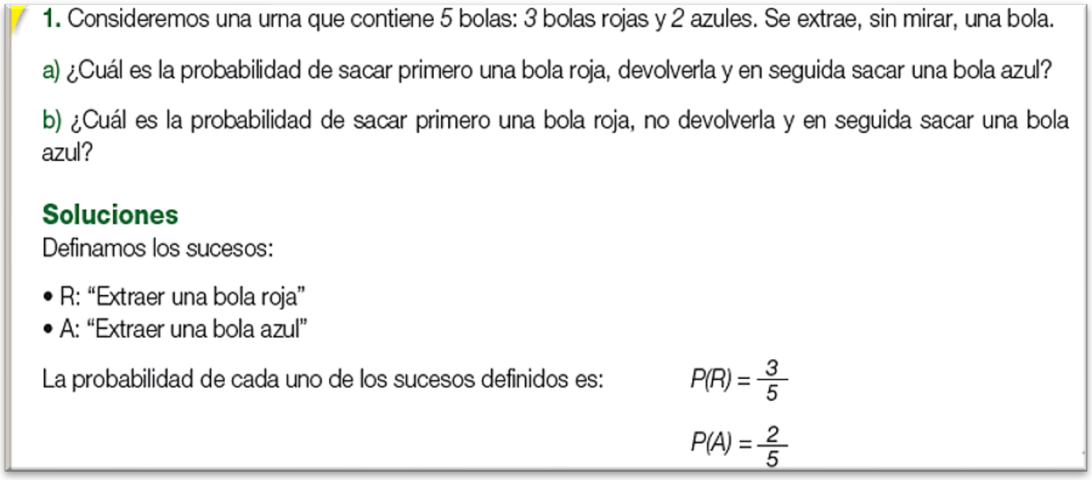
La expresión $P(A/B)$ la leemos: probabilidad de ocurrencia *A* dada la ocurrencia de *B* y es lo que llamamos la probabilidad de *A* condicionada a *B*.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 234), 2008, Zig-Zag.

Luego para mayor claridad de esta definición, se ejemplifica un experimento aleatorio que implica dos casos distintos; “con reemplazo” y “sin reemplazo”. En la Figura 7 y 8, se muestra el planteamiento del problema y las soluciones respectivas.

Figura 7

Ejemplo de la definición de probabilidad condicional en el texto 1°



1. Consideremos una urna que contiene *5* bolas: *3* bolas rojas y *2* azules. Se extrae, sin mirar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, devolverla y en seguida sacar una bola azul?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, no devolverla y en seguida sacar una bola azul?

Soluciones

Definamos los sucesos:

- R: "Extraer una bola roja"
- A: "Extraer una bola azul"

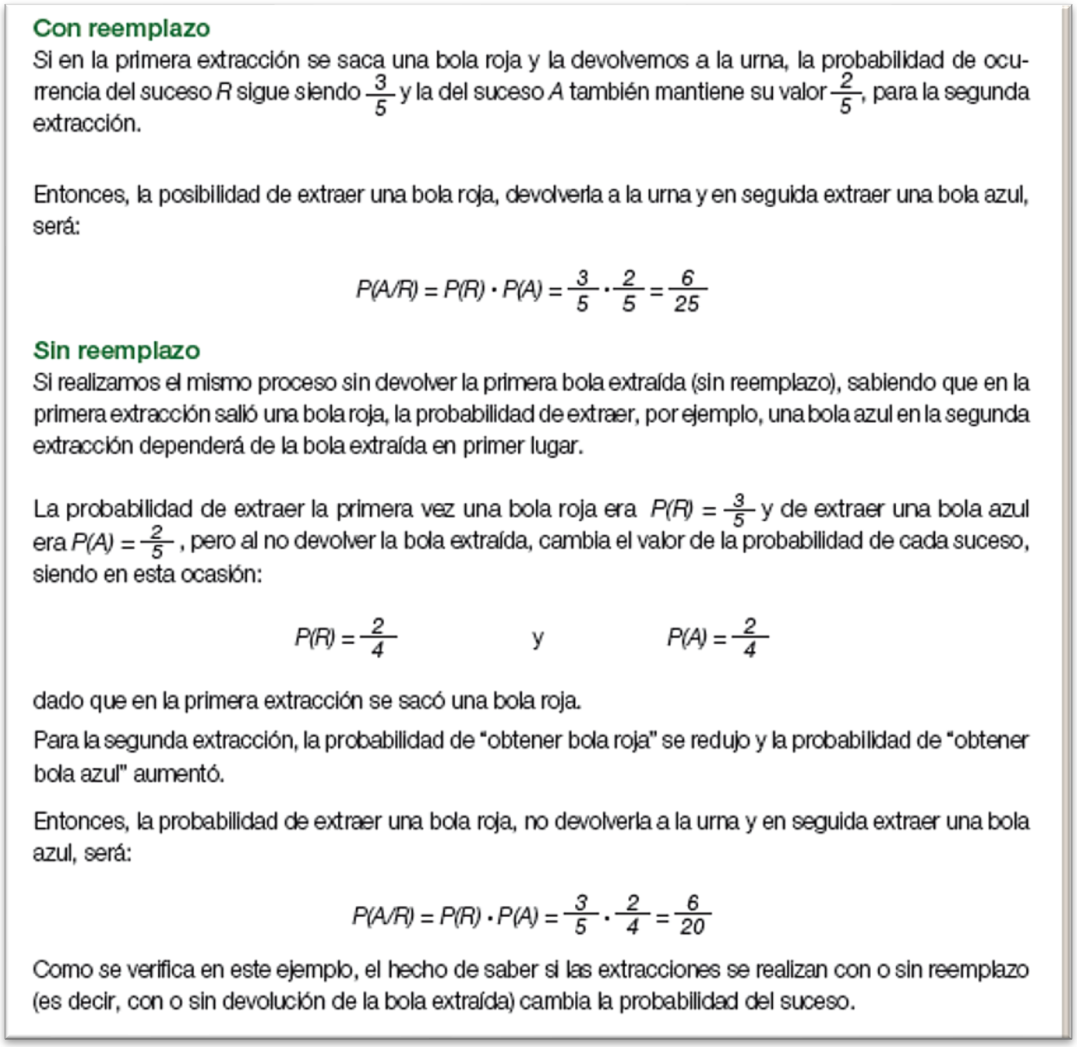
La probabilidad de cada uno de los sucesos definidos es: $P(R) = \frac{3}{5}$

$P(A) = \frac{2}{5}$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 234), 2008, Zig-Zag.

Figura 8

Soluciones de los casos "con reemplazo" y "sin reemplazo"



Con reemplazo

Si en la primera extracción se saca una bola roja y la devolvemos a la urna, la probabilidad de ocurrencia del suceso R sigue siendo $\frac{3}{5}$ y la del suceso A también mantiene su valor $\frac{2}{5}$, para la segunda extracción.

Entonces, la posibilidad de extraer una bola roja, devolverla a la urna y en seguida extraer una bola azul, será:

$$P(A/R) = P(R) \cdot P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Sin reemplazo

Si realizamos el mismo proceso sin devolver la primera bola extraída (sin reemplazo), sabiendo que en la primera extracción salió una bola roja, la probabilidad de extraer, por ejemplo, una bola azul en la segunda extracción dependerá de la bola extraída en primer lugar.

La probabilidad de extraer la primera vez una bola roja era $P(R) = \frac{3}{5}$ y de extraer una bola azul era $P(A) = \frac{2}{5}$, pero al no devolver la bola extraída, cambia el valor de la probabilidad de cada suceso, siendo en esta ocasión:

$$P(R) = \frac{2}{4} \quad \text{y} \quad P(A) = \frac{2}{4}$$

dado que en la primera extracción se sacó una bola roja.

Para la segunda extracción, la probabilidad de "obtener bola roja" se redujo y la probabilidad de "obtener bola azul" aumentó.

Entonces, la probabilidad de extraer una bola roja, no devolverla a la urna y en seguida extraer una bola azul, será:

$$P(A/R) = P(R) \cdot P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Como se verifica en este ejemplo, el hecho de saber si las extracciones se realizan con o sin reemplazo (es decir, con o sin devolución de la bola extraída) cambia la probabilidad del suceso.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 235), 2008, Zig-Zag.

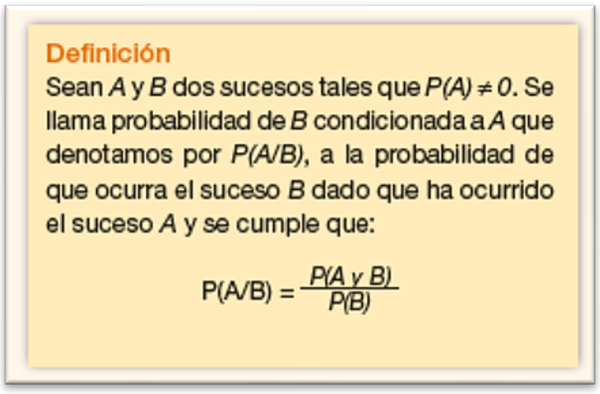
En la Figura 8, se puede apreciar cómo los autores desarrollan la solución a cada caso. En ambas situaciones, tanto el lenguaje utilizado como los procedimientos expuestos son ambiguos, ya que no se precisa, comenzando por las preguntas, un lenguaje condicional sino más bien conjuntista, pues los sucesos no figuran como condicionantes, lo que además se contradice con las notaciones de los

procedimientos expuestos, porque se presentan como probabilidad condicional P(A/B) pero desarrollándose con la regla del producto.

Finalmente, los autores formalizan la definición de probabilidad condicional como se muestra en la Figura 9.

Figura 9

Formalización de la definición de probabilidad condicional en el texto 1°



Definición

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) \neq 0$. Se llama probabilidad de B condicionada a A que denotamos por $P(A/B)$, a la probabilidad de que ocurra el suceso B dado que ha ocurrido el suceso A y se cumple que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 235), 2008, Zig-Zag.

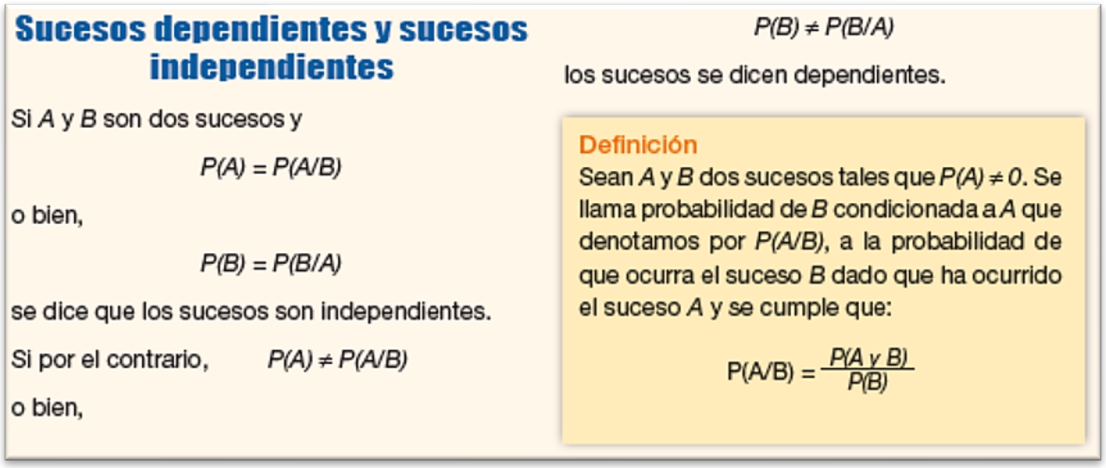
En la definición presentada se observa un error de asignación entre las variables A y B, ya que se intercambia el orden que se establece en un principio, pues al mencionar; “Se llama probabilidad de B condicionada a A”, esto quiere decir que A es el suceso condicionante, por ende, se denota P(B/A) y no P(A/B) como se expone en el texto. Luego se enfatiza en este error, ya que se puede apreciar tanto en la redacción como en la expresión algebraica, un planteamiento incorrecto.

- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

En la Figura 10, se muestran dos proposiciones relacionadas con dependencia e independencia de sucesos que se componen en base a la probabilidad condicional.

Figura 10

Proposiciones articuladas con la probabilidad condicional en el texto 1°



Sucesos dependientes y sucesos independientes

Si A y B son dos sucesos y

$$P(A) = P(A/B)$$

o bien,

$$P(B) = P(B/A)$$

se dice que los sucesos son independientes.

Si por el contrario, $P(A) \neq P(A/B)$

o bien,

$$P(B) \neq P(B/A)$$

los sucesos se dicen dependientes.

Definición

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) \neq 0$. Se llama probabilidad de B condicionada a A que denotamos por $P(A/B)$, a la probabilidad de que ocurra el suceso B dado que ha ocurrido el suceso A y se cumple que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 235), 2008, Zig-Zag.

Se aprecia también, la definición de probabilidad condicional, descrita en el campo anterior MCO4, junto a las proposiciones expuestas como un conocimiento concluyente y formalizado, pero con errores en su redacción.

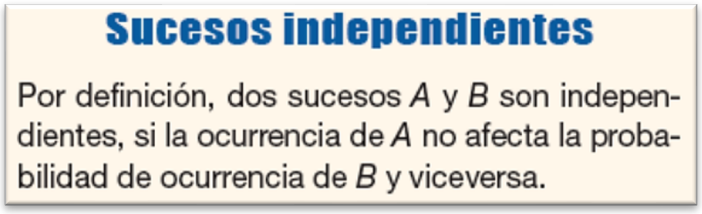
4.2.1.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 1°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

Como se describió en el apartado anterior 4.2.1.2 específicamente en el campo MCO4, el concepto de independencia entre dos sucesos se presenta primero que el de probabilidad condicional como definición intuitiva, en lenguaje común.

Figura 11

Definición intuitiva de independencia en el texto1°

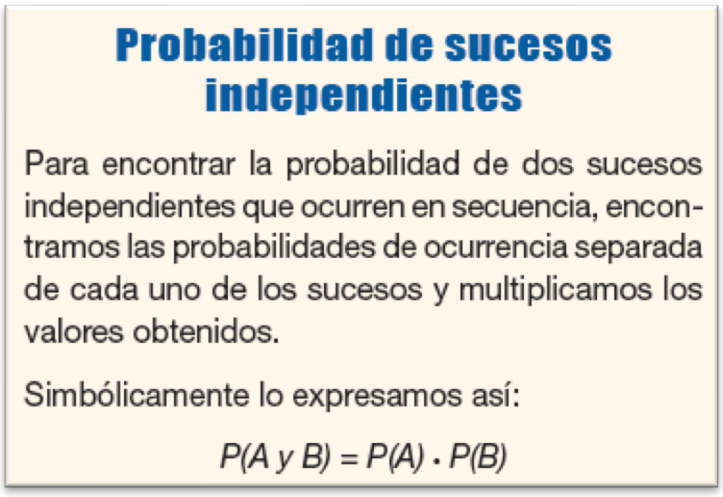


Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 226), 2008, Zig-Zag.

En esta definición de independencia, se aprecia poca precisión en la definición, ya que sólo se menciona "la ocurrencia de un suceso" omitiendo la "no-ocurrencia", lo cual es imprescindible considerar ambas ideas en la definición. Por otro lado, mencionar "la probabilidad de ocurrencia" desvía la idea simplificada e intuitiva de independencia por sí misma, pues además es a posterior cuando los autores hacen referencia a la "probabilidad de sucesos independientes" como lo muestra la Figura 12.

Figura 12

Probabilidad de sucesos independientes en el texto 1°.



Probabilidad de sucesos independientes

Para encontrar la probabilidad de dos sucesos independientes que ocurren en secuencia, encontramos las probabilidades de ocurrencia separada de cada uno de los sucesos y multiplicamos los valores obtenidos.

Simbólicamente lo expresamos así:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 227), 2008, Zig-Zag.

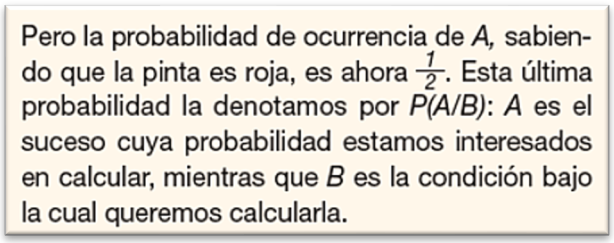
Aquí se hace presente uno de los errores de razonamiento descritos por Sánchez (1996), el cual es "*creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias*", pues en el texto justamente se hace mención a sucesos independientes que ocurren en secuencia, restringiendo el cálculo de la probabilidad a un caso específico de independencia y aquellos sucesos que no ocurren en secuencia simplemente se omiten. Además, se plantea la expresión $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$ como un procedimiento para encontrar la probabilidad de sucesos independientes, en vez de presentarla como una condición estricta y necesaria para establecer la independencia entre dos sucesos.

Finalmente, con respecto a la definición de probabilidad condicional, de acuerdo a lo descrito en el apartado 4.2.1.2 en los campos MCO4 y MCO5, se puede decir que los autores consideran tanto la definición intuitiva como la formalización del concepto, pero considerando sólo la explicación y ejemplificación, en ambos casos, más que interactuar con el razonamiento del estudiante.

En la Figura 13, se muestra específicamente la definición intuitiva del concepto que presentan los autores.

Figura 13

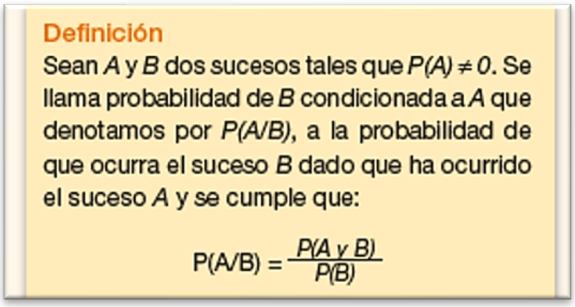
Definición intuitiva de la probabilidad condicional del texto 1°



Pero la probabilidad de ocurrencia de *A*, sabiendo que la pinta es roja, es ahora $\frac{1}{2}$. Esta última probabilidad la denotamos por *P(A/B)*: *A* es el suceso cuya probabilidad estamos interesados en calcular, mientras que *B* es la condición bajo la cual queremos calcularla.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 234), 2008, Zig-Zag.

Y con respecto a la definición formal del concepto, se desea presentar nuevamente la Figura 9 del apartado anterior, para establecer una mejor comparación con la definición intuitiva, descrita anteriormente, y así visualizar más claramente los errores que presenta su formalización.



Definición

Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) \neq 0$. Se llama probabilidad de *B* condicionada a *A* que denotamos por *P(A/B)*, a la probabilidad de que ocurra el suceso *B* dado que ha ocurrido el suceso *A* y se cumple que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Por lo tanto, se puede apreciar que esta formalización de la probabilidad condicional presenta errores en su planteamiento, respecto al cambio de condicionalidad entre los sucesos A y B, lo que se contradice con la expresión algebraica, induciendo a error. Además, esta definición queda condicionada a la

restricción planteada, a priori, sobre el "cálculo de probabilidad de sucesos independientes en secuencia".

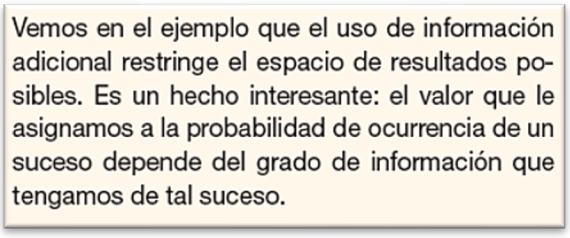
En resumen, se aprecia falta de precisión en el lenguaje natural de las definiciones como también rigurosidad en la formalización de los conceptos lo que lleva a cometer algunos errores de razonamiento relacionados con la comprensión intuitiva y formal de probabilidad condicional e independencia.

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

Solamente se aprecia una escueta mención respecto a la propiedad de restricción del espacio muestral en la probabilidad condicional como se muestra en la Figura 14. Por lo demás, no se presenta ninguna de las propiedades y/o axiomas de la probabilidad condicional, por ende, no es posible su descripción ni análisis.

Figura 14

Mención del espacio muestral de la probabilidad condicional en el texto 1°


Vemos en el ejemplo que el uso de información adicional restringe el espacio de resultados posibles. Es un hecho interesante: el valor que le asignamos a la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende del grado de información que tengamos de tal suceso.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 234), 2008, Zig-Zag.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

De acuerdo a lo observado en la sección de probabilidad condicional, se puede decir, que los autores abordan al inicio la "relación causal entre dos sucesos", de forma implícita e intuitiva, mediante un ejemplo como se muestra en la Figura 15.

Figura 15

Relación causal entre dos sucesos implícita en el texto 1°

Vemos en el ejemplo que el uso de información adicional restringe el espacio de resultados posibles. Es un hecho interesante: el valor que le asignamos a la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende del grado de información que tengamos de tal suceso.

Supongamos que tienes que adivinar cuál es la pinta de una carta (corazón, diamante, espada o trébol) que se ha sacado al azar de un mazo de *52* cartas inglesas. Puesto que hay *4* pintas posibles, la probabilidad de acertar es $\frac{1}{4}$.

Pero supongamos que agregamos información y te decimos que la pinta de la carta es roja. En tal caso la probabilidad de acertar es $\frac{1}{2}$ porque se redujo el número de alternativas para elegir: la carta extraída solo puede ser corazón o diamante.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 235), 2008, Zig-Zag.

A continuación de esto, los autores exponen la resolución de diferentes problemas para ejemplificar la probabilidad de un suceso condicionado por otro, en donde se puede apreciar cómo detallan la ocurrencia e influencia entre sucesos, manifestando algunas relaciones de causalidad, las que derivan a una relación condicional. De acuerdo a esto, se escoge de manera intencional un ejemplo del texto, el cual se muestra en la Figura 16 para poder visualizar la forma en que los autores exponen este razonamiento.

Figura 16

Ejercicio resuelto como modelo de relación causal del texto 1°

2. Hacemos rodar un dado de seis caras y queremos calcular la probabilidad del suceso "obtener *2*", sabiendo que ha salido un número par.

Solución

Definimos los sucesos

- *A*: "salir número par"
- *B*: "obtener *2*"

Lo que nos interesa calcular es *P(B/A)*.

Si no contáramos con información adicional, la probabilidad del suceso *B* "obtener *2*" es:

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

Como sabemos que ha salido un número par, el valor de la probabilidad del suceso *B* "obtener *2*" cambia, puesto que como el dado tiene solo tres números pares (*2, 4, 6*) el total de resultados posibles ahora es *3*.

Entonces la probabilidad de ocurrencia del suceso *B* sabiendo que ocurrió *A* es:

$$P(B/A) = \frac{1}{3}$$

Como se observa, $P(B) \neq P(B/A)$

Nuevamente vemos que la probabilidad de ocurrencia del suceso *B* "obtener *2*" cambió al saber que había ocurrido el suceso *A* "salir número par", es decir, la probabilidad del suceso *B* depende de la ocurrencia del suceso *A*.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (pp. 236), 2008, Zig-Zag.

Si bien se observa en la solución, que los autores ejemplifican y detallan dos situaciones en que la probabilidad de ocurrencia de un suceso se ve o no afectada por la ocurrencia del otro suceso, manifestando de manera implícita una relación de causalidad. Esta no se logra abordar en plenitud a través de este ejemplo ni con los otros del texto, ya que no se propone una situación de relación diagnóstica ni en donde dos sucesos posean dependencia estadística pero no causal. Por ende, no se establece con claridad y profundidad el razonamiento de causalidad, pues no se menciona en forma explícita, debiendo exponer los

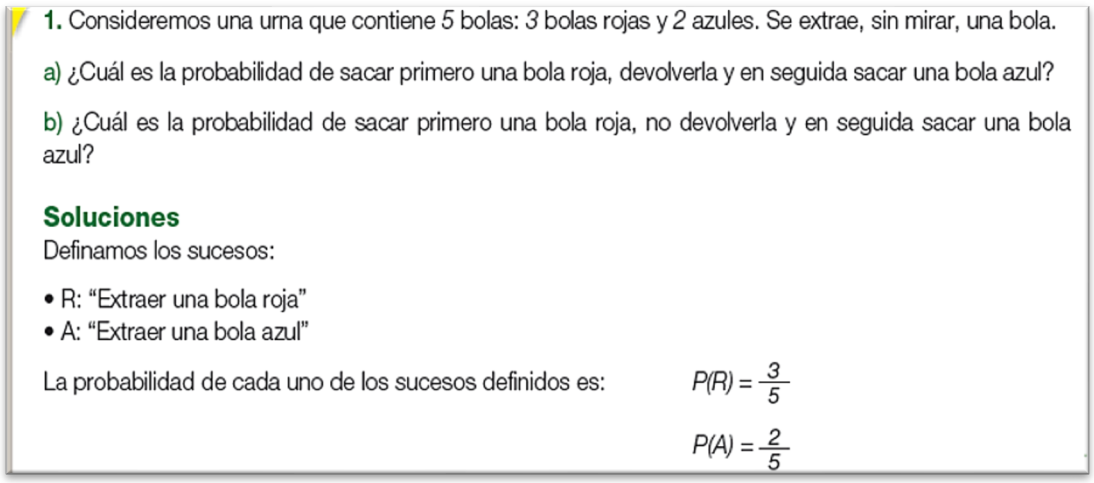
sucesos como causa y efecto para dar cuenta de una relación causal y luego una relación diagnóstica.

- **MTC4: Condicionalidad y falacia del eje temporal**

Al hacer la revisión, para este campo, de los contenidos y ejercicios resueltos en la sección de probabilidad condicional, no se encuentra un espacio destinado en el texto donde se pueda ver el tratamiento de la condicionalidad respecto al orden temporal entre sucesos y su inversa. Lo que se pudo hallar es un espacio destinado al tema; "Probabilidad con reemplazo y sin reemplazo" descrito en un campo anterior, en donde se puede analizar la condicionalidad relacionándola con el orden temporal entre sucesos y su inversa. Por esta razón, se muestra en la Figura 17 un ejemplo de la sección como modelo de análisis para el resto y así poder hacer las conclusiones pertinentes.

Figura 17

Ejemplo de "Probabilidad con reemplazo y sin reemplazo" del texto 1°



1. Consideremos una urna que contiene *5* bolas: *3* bolas rojas y *2* azules. Se extrae, sin mirar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, devolverla y en seguida sacar una bola azul?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, no devolverla y en seguida sacar una bola azul?

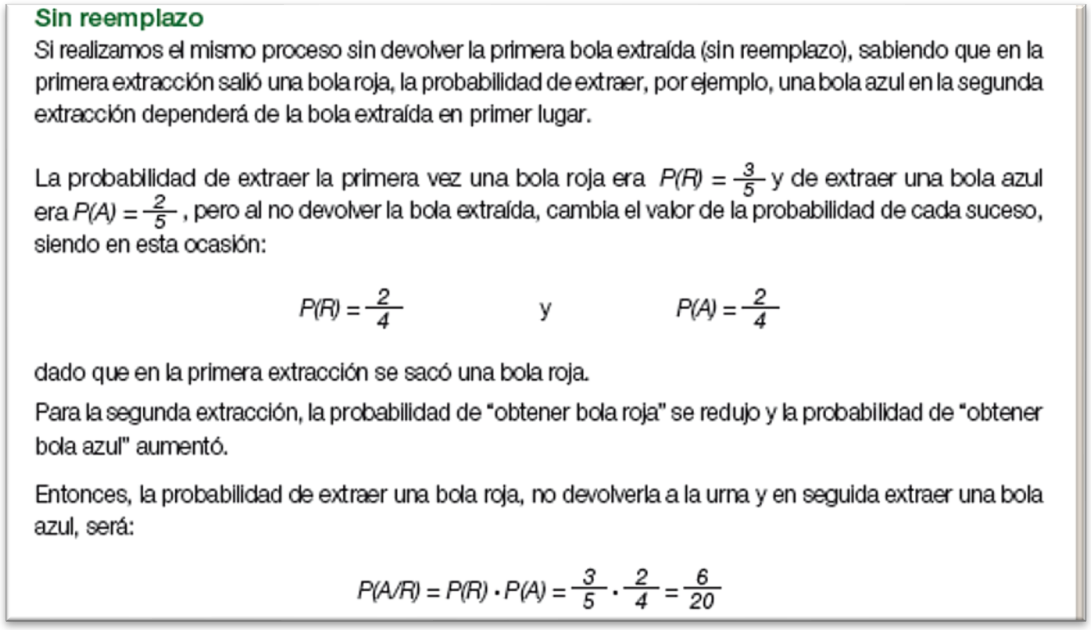
Soluciones

Definamos los sucesos:

- R: "Extraer una bola roja"
- A: "Extraer una bola azul"

La probabilidad de cada uno de los sucesos definidos es: $P(R) = \frac{3}{5}$

$P(A) = \frac{2}{5}$



Sin reemplazo

Si realizamos el mismo proceso sin devolver la primera bola extraída (sin reemplazo), sabiendo que en la primera extracción salió una bola roja, la probabilidad de extraer, por ejemplo, una bola azul en la segunda extracción dependerá de la bola extraída en primer lugar.

La probabilidad de extraer la primera vez una bola roja era $P(R) = \frac{3}{5}$ y de extraer una bola azul era $P(A) = \frac{2}{5}$, pero al no devolver la bola extraída, cambia el valor de la probabilidad de cada suceso, siendo en esta ocasión:

$$P(R) = \frac{2}{4} \qquad \text{y} \qquad P(A) = \frac{2}{4}$$

dado que en la primera extracción se sacó una bola roja.

Para la segunda extracción, la probabilidad de "obtener bola roja" se redujo y la probabilidad de "obtener bola azul" aumentó.

Entonces, la probabilidad de extraer una bola roja, no devolverla a la urna y en seguida extraer una bola azul, será:

$$P(A/R) = P(R) \cdot P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (pp. 234 y 235), 2008, Zig-Zag.

Como se mencionó anteriormente sobre este ejemplo, en el apartado 4.2.2 en el campo MCO4, referente a que posee un lenguaje ambiguo por no definir claramente la condicionalidad de los sucesos. De igual modo, se le considera porque es el caso que más se relaciona con el sesgo de la "falacia del eje temporal", debido al orden temporal que muestran los sucesos. Por consiguiente, en base a lo observado en este y otros ejemplos, se puede decir que los autores no consideran el "invertir el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural", pues sólo plantean problemas de probabilidad condicional donde el suceso condicionante ha de preceder temporalmente al suceso condicionado, fomentando la errónea "creencia de que un suceso no puede condicionar a otro que ocurra anteriormente". Así lo demuestran las preguntas planteadas:

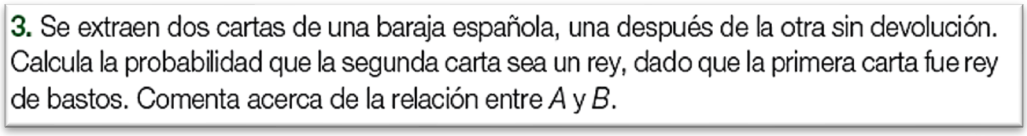
- *¿cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, devolverla y enseguida sacar una bola azul?*

- *¿cuál es la probabilidad de sacar primero una bola roja, no devolverla y enseguida sacar una bola azul?*

Se expone un ejercicio en la Figura 18, para visualizar que también se plantea sólo el orden temporal entre sucesos.

Figura 18

Ejemplo de sucesos en orden temporal, texto 1°


3. Se extraen dos cartas de una baraja española, una después de la otra sin devolución. Calcula la probabilidad que la segunda carta sea un rey, dado que la primera carta fue rey de bastos. Comenta acerca de la relación entre *A* y *B*.

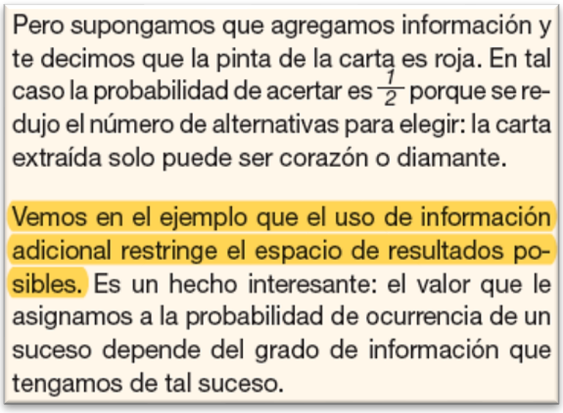
Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 237), 2009, Zig-Zag.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

En la Figura 19, se muestra una parte del ejemplo con el que se da inicio a la definición intuitiva de probabilidad condicional en el texto 1°. Encontrándose solamente con una insinuación sobre la "restricción del espacio muestral" respecto a un caso de condicionalidad y que, a lo largo del texto, no se retoma ni se menciona como una propiedad y condición elemental, para una correcta interpretación de la probabilidad condicional.

Figura 19

Insinuación de la restricción del espacio muestral



Pero supongamos que agregamos información y te decimos que la pinta de la carta es roja. En tal caso la probabilidad de acertar es $\frac{1}{2}$ porque se redujo el número de alternativas para elegir: la carta extraída solo puede ser corazón o diamante.

Vemos en el ejemplo que el uso de información adicional restringe el espacio de resultados posibles. Es un hecho interesante: el valor que le asignamos a la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende del grado de información que tengamos de tal suceso.

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 234), 2008, Zig-Zag.

Se puede apreciar en el texto de la imagen, la referencia que se hace al espacio muestral (cantidad de cartas) respecto a la reducción que sufre este cuando se agrega información adicional (se sabe que la carta es roja) y luego se hace alusión de manera general a la restricción de los resultados posibles cuando se presenta información extra.

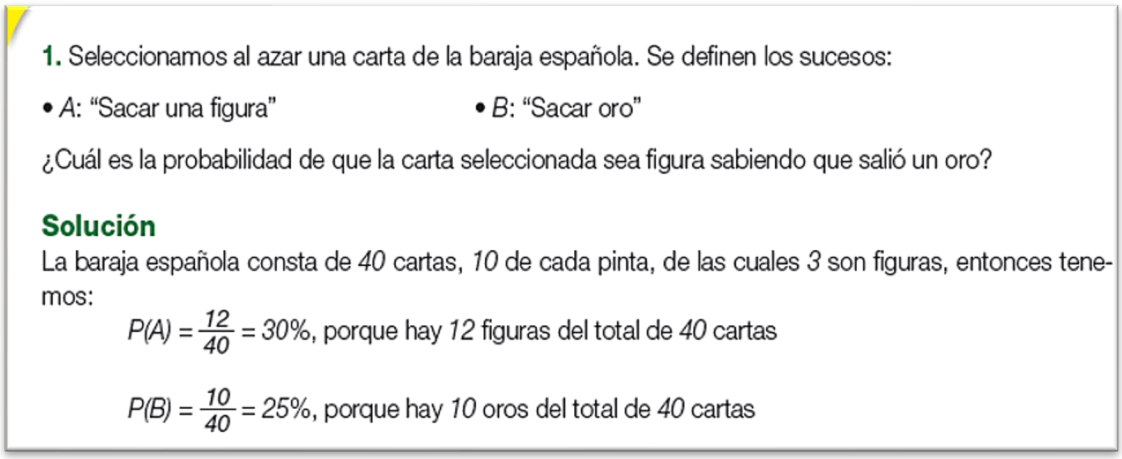
En consecuencia, no se aborda la *concepción cardinal* como la interpretación de la probabilidad condicional $P(A/B)$ en la proporción $\frac{\#(A\cap B)}{\#B}$, la cual es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

En la sección de probabilidad condicional, se compara este concepto con la probabilidad simple mediante ejemplos, mostrando generalmente en su resolución inicial el cálculo de la probabilidad simple de los sucesos para luego proceder al cálculo de la probabilidad condicional. En la Figura 20, se exhibe la primera parte de un ejemplo del texto donde se puede apreciar la resolución inicial de un problema, según lo mencionado, en contexto condicional.

Figura 20

Probabilidad simple como resolución inicial de un problema condicional



1. Seleccionamos al azar una carta de la baraja española. Se definen los sucesos:

• *A*: "Sacar una figura" • *B*: "Sacar oro"

¿Cuál es la probabilidad de que la carta seleccionada sea figura sabiendo que salió un oro?

Solución

La baraja española consta de *40* cartas, *10* de cada pinta, de las cuales *3* son figuras, entonces tenemos:

$P(A) = \frac{12}{40} = 30\%$, porque hay *12* figuras del total de *40* cartas

$P(B) = \frac{10}{40} = 25\%$, porque hay *10* oros del total de *40* cartas

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 236), 2008, Zig-Zag.

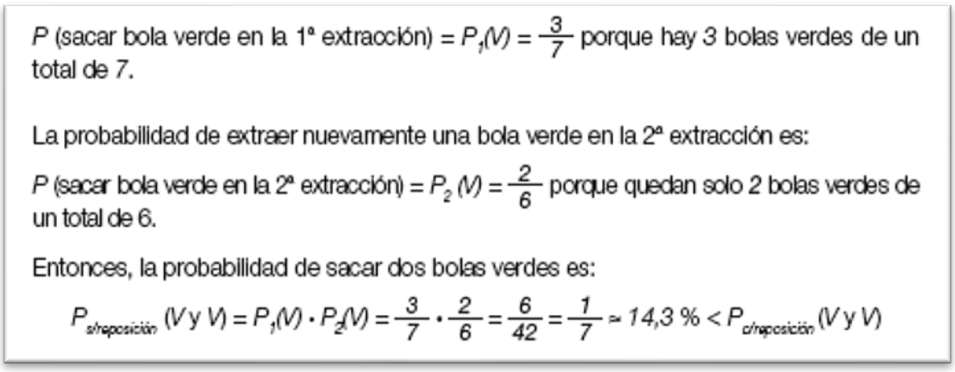
Otros ejemplos del texto (pp. 234 a 238) con respecto a la probabilidad condicional, también se inician con la resolución de la probabilidad simple de los sucesos involucrados. Por lo tanto, se puede decir que la comparación y relación entre ambas probabilidades se presenta en el texto 1°, pero de manera implícita, ya que no se especifica ni concluye la comparación propiamente tal, que guarda relación con la propiedad; *Una probabilidad condicionada P(A/B) puede ser mayor, menor o igual que la probabilidad simple P(A) del suceso condicionado A.* De igual forma, al plantear la comparación descrita, permite relacionar ambos conceptos y así obtener una interpretación más precisa de la probabilidad condicional.

En el caso de la probabilidad conjunta, al realizar la revisión de la unidad se puede decir que los autores no consideran el sesgo; "confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta", para poder lograr diferenciar ambas probabilidades y una correcta interpretación de los problemas propuestos. Esto se observa, principalmente porque la probabilidad conjunta se exhibe de forma

separada, ubicándose como contenido previo a la probabilidad condicional. Se utiliza la probabilidad conjunta con la notación $P(A\ y\ B)$, para plantear la propiedad de *independencia entre dos sucesos* y luego mostrar su aplicación en ejercicios resueltos, como se muestra en la Figura 21, donde se exhibe una parte de un ejemplo planteado, esencialmente el cálculo de la probabilidad de dos sucesos que ocurren secuencialmente.

Figura 21

Uso de la probabilidad conjunta en la independencia de sucesos



P (sacar bola verde en la 1ª extracción) = $P_1(V) = \frac{3}{7}$ porque hay 3 bolas verdes de un total de 7.

La probabilidad de extraer nuevamente una bola verde en la 2ª extracción es:

P (sacar bola verde en la 2ª extracción) = $P_2(V) = \frac{2}{6}$ porque quedan solo 2 bolas verdes de un total de 6.

Entonces, la probabilidad de sacar dos bolas verdes es:

$$P_{s/reposición}(V \text{ y } V) = P_1(V) \cdot P_2(V) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 14{,}3\ \% < P_{c/reposición}(V \text{ y } V)$$

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 231), 2008, Zig-Zag

A través de este ejemplo, se puede decir que la probabilidad conjuntista $P(A\ y\ B)$ no cobra mayor relevancia que esta, en el texto. Por ende, no se observa un tratamiento en paralelo con la probabilidad condicional que permita comparar ambos conceptos, con la finalidad de diferenciar en qué contextos se aplican y cuál es el lenguaje adecuado para su interpretación, en especial el uso y no uso de la conjunción “y” en los enunciados.

En conclusión, los autores dan por entendido que los estudiantes deben poseer, a priori, el conocimiento de probabilidad conjuntista, específicamente $P(A\ y\ B)$ y saber diferenciarlo con el lenguaje condicional.

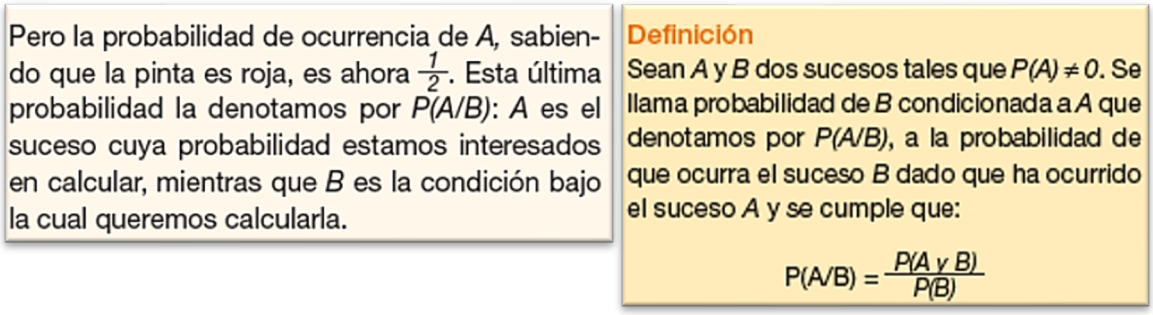
- **MTC7: Uso de representaciones de la probabilidad condicional**

Con respecto a las representaciones de la probabilidad condicional que se pretenden describir y analizar en este campo, sólo se encuentran en esta sección el lenguaje natural (intuitivo) y el lenguaje formal (algebraico) del concepto en estudio.

Comenzando por la definición de la probabilidad condicional, se observa su representación en lenguaje intuitivo y luego formal a lo largo de la unidad, como se exhibe en la Figura 22.

Figura 22

Representación en lenguaje intuitivo y formal de la probabilidad condicional
Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (pp. 234 y 235), 2008, Zig-Zag



Pero la probabilidad de ocurrencia de *A*, sabiendo que la pinta es roja, es ahora $\frac{1}{2}$. Esta última probabilidad la denotamos por *P(A/B)*: *A* es el suceso cuya probabilidad estamos interesados en calcular, mientras que *B* es la condición bajo la cual queremos calcularla.

Definición
Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) \neq 0$. Se llama probabilidad de *B* condicionada a *A* que denotamos por *P(A/B)*, a la probabilidad de que ocurra el suceso *B* dado que ha ocurrido el suceso *A* y se cumple que:

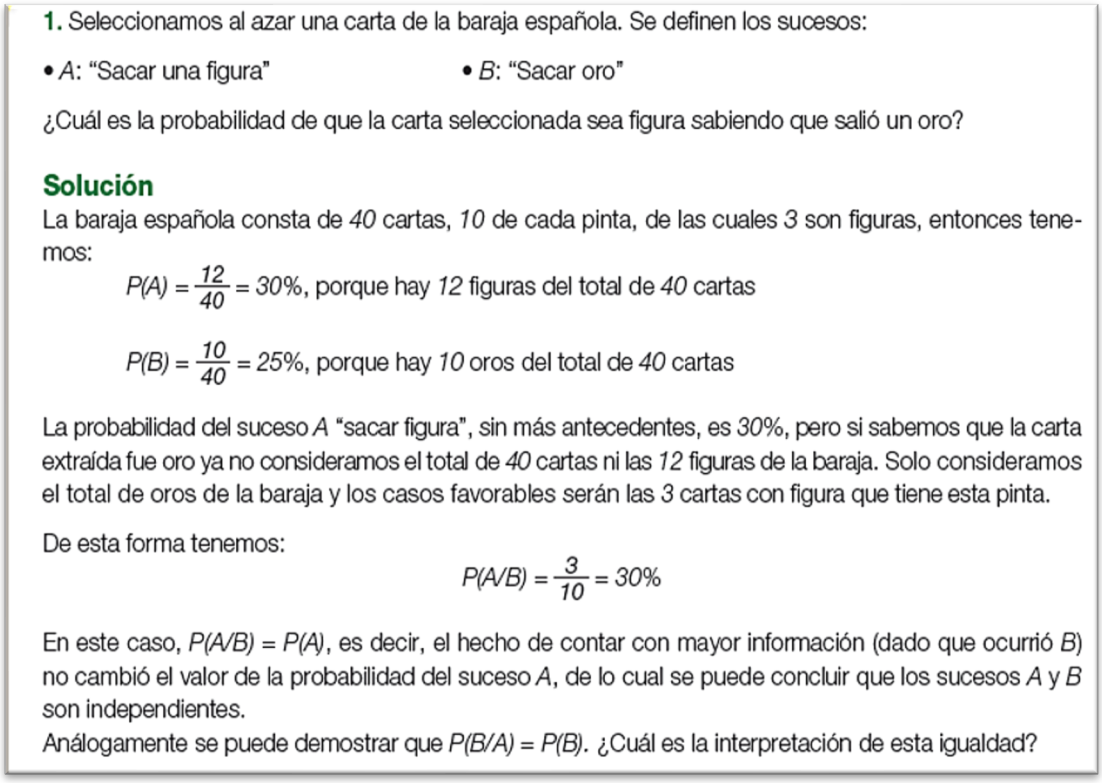
$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Recordar que el planteamiento de la definición en lenguaje formal (de la derecha), presenta errores en su redacción, mencionados anteriormente en el campo MTC1.

En la Figura 23, se muestra un ejemplo completo para visualizar cómo se utilizan ambas representaciones mencionadas, para el tratamiento y comprensión de la probabilidad condicional.

Figura 23

Uso del lenguaje intuitivo y formal como representación del concepto



1. Seleccionamos al azar una carta de la baraja española. Se definen los sucesos:

• *A*: "Sacar una figura" • *B*: "Sacar oro"

¿Cuál es la probabilidad de que la carta seleccionada sea figura sabiendo que salió un oro?

Solución

La baraja española consta de *40* cartas, *10* de cada pinta, de las cuales *3* son figuras, entonces tenemos:

$P(A) = \frac{12}{40} = 30\%$, porque hay *12* figuras del total de *40* cartas

$P(B) = \frac{10}{40} = 25\%$, porque hay *10* oros del total de *40* cartas

La probabilidad del suceso *A* "sacar figura", sin más antecedentes, es *30%*, pero si sabemos que la carta extraída fue oro ya no consideramos el total de *40* cartas ni las *12* figuras de la baraja. Solo consideramos el total de oros de la baraja y los casos favorables serán las *3* cartas con figura que tiene esta pinta.

De esta forma tenemos:

$$P(A/B) = \frac{3}{10} = 30\%$$

En este caso, $P(A/B) = P(A)$, es decir, el hecho de contar con mayor información (dado que ocurrió *B*) no cambió el valor de la probabilidad del suceso *A*, de lo cual se puede concluir que los sucesos *A* y *B* son independientes.

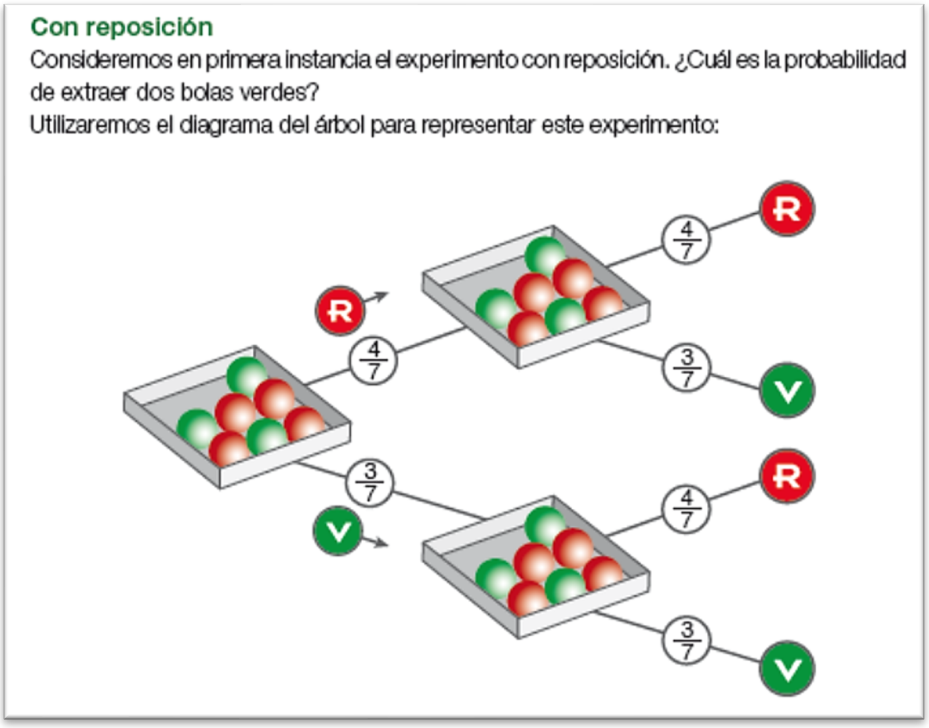
Análogamente se puede demostrar que $P(B/A) = P(B)$. ¿Cuál es la interpretación de esta igualdad?

Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 236), 2008, Zig-Zag

En resumen, las representaciones que se utilizan para la presentación y comprensión del concepto en estudio son las ya mencionadas, por el contrario de una representación gráfica como es el diagrama de árbol, pues no se observa el uso de este como recurso para representar una situación de probabilidad condicional. Sino que se aprecia sólo para un caso puntual que tiene relación con la *probabilidad de sucesos independientes,* como se muestra en la Figura 24.

Figura 24

Diagrama de árbol representativo de la probabilidad de sucesos independientes



Nota. Adaptado de *Matemática III Medio* (p. 231), 2008, Zig-Zag

En la imagen se muestra una parte de la solución de un problema planteado en la unidad, ya que la intención es describir, únicamente, para lo que se utilizó el diagrama de árbol, o sea, como representación del cálculo de la probabilidad conjuntista, principalmente para comparar los experimentos que implican reposición y no reposición.

4.2.2.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 2°.

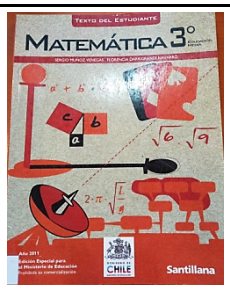
- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática 3°

Tipo: Texto del estudiante

Curso: 3° educación media

Periodo: 2011



- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: Primera edición

Publicación: 2010-12-30

Editorial: Santillana del Pacífico S.A.

- **MCG3: Datos de Autoría**

En Tabla 4.7 se organiza y describe la información de este campo.

Tabla 4.7.

Datos de autoría del texto 2°

Autor	Grados académicos	Universidad de procedencia	Obras
Sergio Muñoz Venegas	- Doctor en Ciencias Exactas, mención Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile, 2001	- Simple and Efficient Minimal RDFS, publicación 2009
	- Licenciado en Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile, 1997	- coautor del Texto del

			estudiante, Matemática IV medio, 2013
Florencia Darrigrandi Navarro	- Licenciada en Matemática con mención en Estadística	Pontificia Universidad Católica de Chile	- coautora en textos del estudiante para la educación básica y media
	- Magíster en Estadística	Pontificia Universidad Católica de Chile	

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 288 páginas cuyas dimensiones son de 27,5 x 23 cm

- **MCG5: ISBN**

ISBN 978-956-15-1758-5

4.2.2.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 2°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

Tabla 4.8.

Estructura temática del texto 2°

Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	Cierre del texto

- N° unidad - Título - Conceptos claves - Aprendizajes esperados - Introducción al tema de la unidad	- Activación de conocimientos previos - Presentación y desarrollo de contenidos - Formalización de conceptos - Actividades	- Actividades de progreso y cierre de la unidad - Síntesis de la unidad - Evaluación	- Taller de evaluación - Solucionario - Índice temático - Bibliografía

Una diferencia significativa entre la estructura temática de este texto 2° con la del texto 1°, es la consideración de los conocimientos previos al inicio de la unidad, ya que el texto 1° no designa un espacio específico para ello ni menciona los conocimientos claves que se necesitan para iniciar el estudio de los conocimientos nuevos, a diferencia del texto 2° que sí lo expone como se indicó en la Tabla 4.8.

En la Figura 25, se puede apreciar gráficamente la estructura del inicio de cada unidad del texto 2°.

Figura 25

Estructura gráfica del inicio de unidad del texto 2°

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 4), 2010, Santillana.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

En la Tabla 4.9 se presenta cada unidad del texto 2° con sus contenidos y páginas correspondientes.

Tabla 4.9.

Organización de las unidades y contenidos del texto 2°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas
1	Raíces	- Raíz cuadrada - Raíz cúbica - Potencias - Raíz enésima - Ecuaciones con radicales	12 – 53
2	Función cuadrática y función raíz cuadrada	- Función cuadrática - Parábola - Ecuación de segundo grado	54 – 105

		- Máximos y mínimos - Función raíz cuadrada	
3	El triángulo rectángulo y la trigonometría	- Teorema de Euclides - Demostraciones de teorema de Pitágoras - Tríos pitagóricos - Razones trigonométricas - Funciones trigonométricas - Sistemas de medición de ángulos - Ecuaciones trigonométricas	106 – 163
4	Inecuaciones lineales	- Nociones de probabilidad - Probabilidades y probabilidades - Combinatoria clásica	164 – 199
5	Probabilidades	- Desigualdades - Intervalos - Operaciones entre intervalos - Inecuaciones - Valor absoluto - Gráficos	200 - 247

La cantidad de páginas utilizadas en total para la unidad 5 de “Probabilidades”, es de 47 páginas, viéndose una diferencia significativa con el texto 1°, ya que en este, la cantidad ocupada fue de 73 páginas.

En la Tabla 4.10 se describe, específicamente, la organización temática de la unidad de probabilidades del texto 2°, considerando los contenidos a tratar y los aprendizajes esperados en el orden que los presenta el texto a lo largo de la unidad.

Tabla 4.10.

Organización temática de la unidad de probabilidades del texto 2°

N°/ Eje temático	Contenidos / Secciones	Aprendizajes esperados	Páginas
5 Probabili-dades	• Conocimientos previos • Espacio y tamaño muestral • Sucesos o eventos • Principio multiplicativo • Permutaciones • Combinaciones	• Contar los resultados de un experimento utilizando elementos de combinatoria.	202 – 217
	• Cálculo de probabilidades • Sucesos equiprobables • Probabilidad del suceso $A \cup B$ • Frecuencia relativa o probabilidad empírica • Ley de los grandes números	• Resolver problemas que involucran suma o producto de probabilidades. • Distinguir entre sucesos equiprobables y no equiprobables. • Conocer empíricamente la Ley de los grandes números y relacionar la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso.	218 – 227

• Probabilidad condicional • Probabilidad del suceso $A \cap B$ • Sucesos independientes • Variable aleatoria	• Resolver problemas que involucran el cálculo de probabilidad condicionada. • Reconocer e interpretar variables aleatorias de acuerdo a los contextos en que se presentan. • Calcular e interpretar el valor esperado de una variable aleatoria.	228 – 239
➢ Actividades de progreso y cierre		238 - 243
➢ Síntesis de la unidad		244
➢ Evaluación		245 – 247

Al comparar esta tabla con la Tabla 4.5 del texto 1°, se puede apreciar que hubo una reducción significativa de contenidos desde este primer texto al texto 2°. Teniendo en cuenta, que aún no se ajustaban los contenidos, por calendario, a las nuevas bases curriculares, ya que para 3° medio le correspondía el año escolar 2012.

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

Los contenidos expuestos en la Tabla 4.11, como conocimientos previos, se deducen de la unidad del texto 2 ° al igual como se procedió en el texto 1°, ya que en ambos textos no se relacionan estos conocimientos directamente con el concepto de probabilidad condicional. Es por esto, que se seleccionan y organizan en la tabla expuesta, teniendo en cuenta la probabilidad condicional como el conocimiento nuevo a tratar.

Tabla 4.11.

Conocimientos previos de la probabilidad condicional del texto 2°

Conocimientos previos	Descripción	Páginas
• Espacio y tamaño muestral	- Se presenta un tratamiento inductivo del concepto de espacio muestral, formalizándolo como: *"El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento corresponde al espacio muestral de este, el cual denotamos* Ω*".* Por otra parte, se define el tamaño muestral como: *"El tamaño del espacio muestral es la cantidad de elementos contenidos en él, denotado* $\#\Omega$*"*.	204 – 205
• Suceso o evento	- Mediante el planteamiento y resolución de un problema en contexto, se explica la idea que *"los conjuntos de un espacio muestral corresponden a sucesos o eventos asociados a un experimento aleatorio"*, relacionando el lenguaje conjuntista y sus notaciones con el lenguaje experimental de sucesos. Luego, se definen los distintos sucesos que se pueden obtener en un experimento aleatorio; complemento de un suceso, suceso elemental, suceso seguro y suceso imposible.	206 - 207
• Lenguaje y notación conjuntista	- Se inicia recordando la unión e intersección de dos conjuntos dados, *A y B*, denotando como $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente. Luego, se relacionan estos	208

	conceptos con la ocurrencia de sucesos, en base al mismo problema anterior, prevaleciendo el lenguaje conjuntista por sobre el lenguaje experimental.	
• Sucesos mutuamente excluyentes en lenguaje natural	- Se plantea una idea inicial sobre sucesos que ocurren simultáneamente, considerando la misma situación anterior con un suceso nuevo (F), para representar esta idea como la intersección $C \cap F$, siendo "*C*" otro suceso del problema. A partir de esto, se deduce el significado de sucesos mutuamente excluyentes en lenguaje natural, como: *"Si dos o más sucesos no tienen posibilidad de ocurrir simultáneamente, se dice que los sucesos son mutuamente excluyentes".* Lo cual es ambiguo.	208 – 209
• Regla de Laplace	- Se presente como un recordatorio anexo a la sección de "Cálculo de probabilidades", es decir, en un recuadro que lleva por título; *"Recuerda que…",* en donde se muestra la definición de la regla de Laplace, la cual se menciona como: *"De acuerdo a la regla de Laplace, la probabilidad de ocurrencia de un evento A está dada por:* $P(A) = \frac{n° \text{ de resultados favorables}}{n° \text{ total de resultados}}$*".* No se hace referencia a las condiciones que debe tener el espacio muestral para que se cumpla esta regla.	218
	- Se desarrolla la idea de sucesos equiprobables, a partir de una situación y preguntas planteadas al	220 - 221

• Sucesos equiprobables	respecto, como por ejemplo; *"¿Tienen todos los alumnos y alumnas la misma probabilidad de ser seleccionados?".* De este modo, se deduce el significado de sucesos equiprobables, pasando por la idea que "todos los elementos del espacio muestral tienen la misma oportunidad de ser elegidos". Luego se compara con la idea contraria y se calcula la probabilidad de ocurrencia en ambos casos, para finalmente formalizar el concepto.	
• Sucesos no excluyentes y mutuamente excluyentes	- Se deduce primero la probabilidad de la unión de dos sucesos, a partir de la representación e interpretación de un problema en contexto, logrando establecer $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Luego, se establece esta igualdad como la consecuencia de dos sucesos no excluyentes. Del mismo modo, ocurre con la igualdad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ la que se asocia a sucesos mutuamente excluyentes.	222 - 223

Previo a estos conceptos presentados en la tabla, se plantea una evaluación diagnóstica para reactivar conocimientos previos de años anteriores, referente a conceptos como: experimentos deterministas y aleatorios, probabilidad de sucesos simples y compuestos, frecuencia absoluta y relativa. Al término de esta evaluación se definen los conceptos de forma intuitiva, donde se puede identificar la definición de la probabilidad simple (Regla de Laplace), escrita como: "*En un experimento, la probabilidad de ocurrencia de un suceso es la razón entre el*

número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles del experimento." (p. 203)

En resumen, se encuentran conocimientos previos como requisito para la probabilidad condicional, relacionados principalmente con la ocurrencia de sucesos. El lenguaje que predomina en estos conceptos, es el lenguaje conjuntista que luego se relaciona con el lenguaje experimental de sucesos, en forma intuitiva y luego formal.

Cabe mencionar, que no se aprecia en el texto un hilo conductor entre los conocimientos descritos en la Tabla 4.11, pues un ejemplo claro de esto, es cuando se trata el concepto de sucesos mutuamente excluyentes en forma intuitiva (lenguaje natural) y luego se retoma, después de la presentación de varios contenidos, para recién formalizarlo y sin asociación entre ambas representaciones.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

En este texto 2°, el tratamiento del concepto de probabilidad condicional se inicia de manera intuitiva, a través del planteamiento de un problema con preguntas que invitan al estudiante a analizar y pensar usando un razonamiento probabilístico intuitivo. En la resolución del problema, se puede apreciar la integración gradual de los conceptos claves y necesarios para poder concluir la definición intuitiva de probabilidad condicional, entre ellos; espacio muestral equiprobable, probabilidad de un suceso, intersección de dos sucesos y su interpretación experimental, cardinalidad. En la Figura 26, se muestra la presentación inicial del concepto, presente en la unidad 5 del texto 2°.

Figura 26

Presentación inicial de la probabilidad condicional en el texto 2°

Claudio está jugando a lanzar un dado. Luego, el espacio muestral del experimento es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por otra parte, él sabe que este espacio muestral es equiprobable.

Si define el suceso:
A: el número obtenido es impar.
Donde $A = \{1, 3, 5\}$, entonces, se tiene que $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Camila se integra al juego y lanza el dado sin que Claudio pueda ver el número obtenido, pero le da una pista: "El número es menor que 4".

ANALICEMOS...

- ¿Piensas que la probabilidad de que salga un número impar cambia en este nuevo escenario?, ¿por qué?
- Intuitivamente, ¿crees que la probabilidad ahora, de que salga un número impar es mayor o menor que antes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el número que salió sea impar?, ¿cómo lo supiste?

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 228), 2010, Santillana.

Como se mencionó anteriormente, con respecto a la resolución de este problema, se agregaron de manera gradual conceptos claves para poder concluir la probabilidad condicional de manera intuitiva. En la Figura 27, se muestra esta definición en lenguaje natural (intuitivo).

Figura 27

Definición intuitiva de probabilidad condicional en el texto 2°

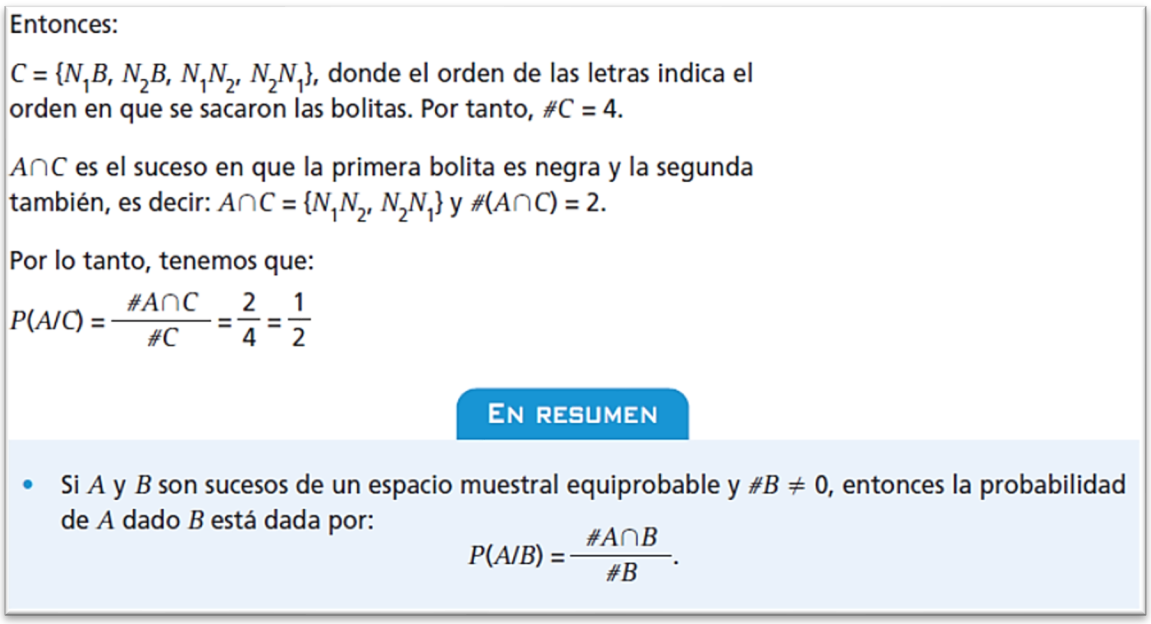
Tal como en la situación anterior, hay casos en que la probabilidad de un suceso A se ve afectada por la ocurrencia de otro suceso B. Este tipo de probabilidad se llama probabilidad condicional y se denota por $P(A/B)$ y se lee como "la probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B" o "la probabilidad de A dado B".

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 228), 2010, Santillana.

A continuación de esto, los autores plantean un ejemplo a través del cual se pretende concluir la expresión algebraica del concepto para luego formalizarlo. En la Figura 28, se muestra cómo se llega a la expresión y el planteamiento de la definición.

Figura 28

Deducción y formalización del concepto en estudio del texto 2°



Entonces:

$C = \{N_1B, N_2B, N_1N_2, N_2N_1\}$, donde el orden de las letras indica el orden en que se sacaron las bolitas. Por tanto, $\#C = 4$.

$A \cap C$ es el suceso en que la primera bolita es negra y la segunda también, es decir: $A \cap C = \{N_1N_2, N_2N_1\}$ y $\#(A \cap C) = 2$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$P(A/C) = \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EN RESUMEN

- Si A y B son sucesos de un espacio muestral equiprobable y $\#B \neq 0$, entonces la probabilidad de A dado B está dada por:

$$P(A/B) = \frac{\#A \cap B}{\#B}.$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 229), 2010, Santillana.

Se observa, que la que la formalización expuesta por los autores está planteada en relación a la cardinalidad de los sucesos, en vez de relacionarla y expresarla en términos de la probabilidad, es decir, como $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Además, no se identifica esta definición con el nombre del concepto, "probabilidad condicional", por lo que se realiza la conclusión sin conectar la idea con el resultado.

- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

Se aprecia en el texto 2°, que los autores articulan la probabilidad condicional con la "probabilidad del suceso $A \cap B$" y con "sucesos independientes", presentando a la probabilidad condicional como un conocimiento previo de estos. En la Figura 29, se muestra una parte de un ejemplo propuesto por los autores respecto al contenido de la "probabilidad del suceso $A \cap B$", con la intención de exhibir en qué momento del tratamiento de este conocimiento se produce la articulación con la probabilidad condicional.

Figura 29

Articulación de la probabilidad de $A \cap B$ con probabilidad condicional, texto 2°

Para responder la primera pregunta, definimos los sucesos:
$H1$ = el primer premio lo recibe un hombre.
$H2$ = el segundo premio lo recibe un hombre.

Debemos calcular $P(H1 \cap H2)$, entonces:

$P(H1 \cap H2)$ = P(el primer premio lo reciba un hombre) · P(el segundo premio lo reciba un hombre, dado que el primer premio también lo recibió un hombre). Es decir:

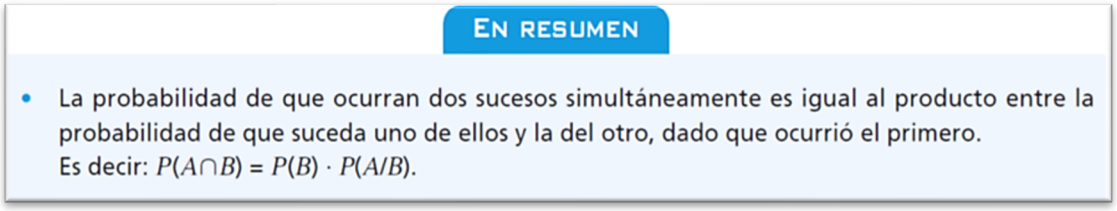
$$P(H1 \cap H2) = P(H1) \cdot P(H2/H1) = \frac{13}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{13}{63}.$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 230), 2010, Santillana.

En consecuencia, se formaliza el concepto de probabilidad del suceso $P(A \cap B)$, conocido también como "regla del producto", combinando el lenguaje intuitivo con el lenguaje formal (algebraico), como lo muestra la Figura 29.

Figura 30

Formalización de la regla del producto en el texto 2°



EN RESUMEN

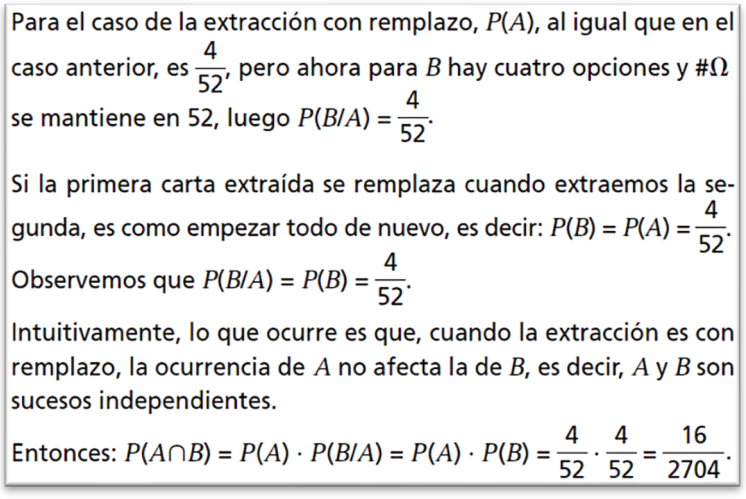
- La probabilidad de que ocurran dos sucesos simultáneamente es igual al producto entre la probabilidad de que suceda uno de ellos y la del otro, dado que ocurrió el primero.
  Es decir: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 231), 2010, Santillana.

Luego en la Figura 31, se muestra el segundo contenido que se articula con la probabilidad condicional, correspondiente a "sucesos independientes". Al igual que en el contenido anterior, también se exhibe sólo el momento donde se produce la articulación con el concepto en estudio.

Figura 31

Articulación de sucesos independientes con probabilidad condicional, texto 2°



Para el caso de la extracción con remplazo, $P(A)$, al igual que en el caso anterior, es $\frac{4}{52}$, pero ahora para B hay cuatro opciones y $\#\Omega$ se mantiene en 52, luego $P(B/A) = \frac{4}{52}$.

Si la primera carta extraída se remplaza cuando extraemos la segunda, es como empezar todo de nuevo, es decir: $P(B) = P(A) = \frac{4}{52}$.

Observemos que $P(B/A) = P(B) = \frac{4}{52}$.

Intuitivamente, lo que ocurre es que, cuando la extracción es con remplazo, la ocurrencia de A no afecta la de B, es decir, A y B son sucesos independientes.

Entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{16}{2704}$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 232), 2010, Santillana.

Se puede apreciar en ambos casos, cómo se integra de manera gradual la probabilidad condicional para concluir de manera intuitiva el concepto tratado.
Cabe mencionar, que luego del tratamiento intuitivo de cada contenido se presenta la formalización correspondiente, la que no se considera relevante describir en este campo, de acuerdo a lo mencionado anteriormente. Por ende, se analizarán más adelante.

4.2.2.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 2°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

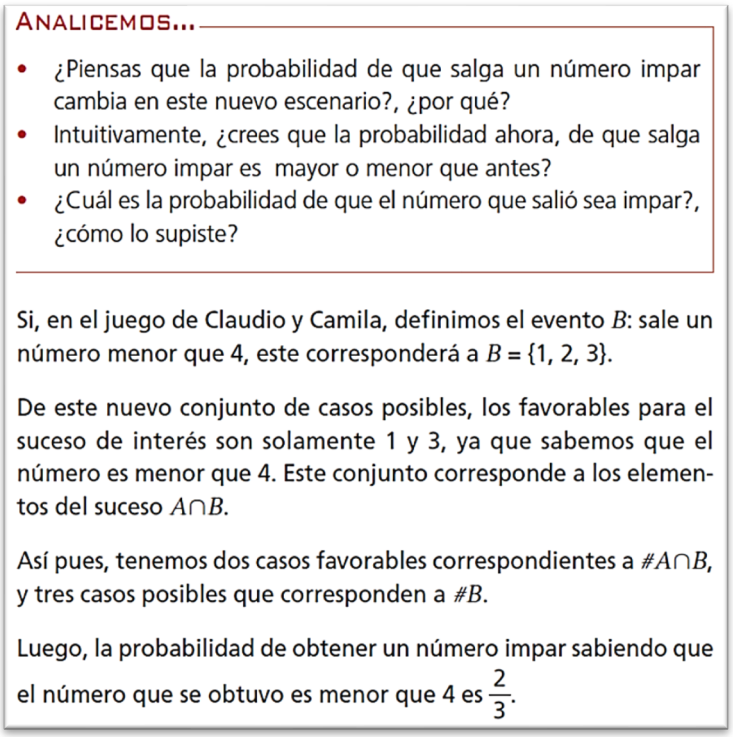
- Probabilidad Condicional

El tratamiento y definición de la probabilidad condicional se presenta previo al concepto de independencia, por ende, se asume que el concepto en estudio es considerado como conocimiento previo al de sucesos independientes. De este modo, los autores inician el tratamiento del concepto de probabilidad condicional con una situación de juego de azar, mediante la cual se plantean preguntas que consideran el pensamiento probabilístico intuitivo de los estudiantes y que luego se resuelven en el texto, integrando conceptos como la cardinalidad e intersección de sucesos.

En la Figura 26 del campo anterior MCO4, se muestra el planteamiento del problema y las preguntas asociadas. Es por esto, que para este campo sólo se considera mostrar las preguntas y su desarrollo, como lo exhibe la Figura 32, para dar cuenta de lo mencionado en el párrafo anterior respecto a la invitación que se hace al estudiante, a utilizar un razonamiento probabilístico intuitivo.

Figura 32

Tratamiento intuitivo del concepto de probabilidad condicional en el texto 2°



ANALICEMOS...

- ¿Piensas que la probabilidad de que salga un número impar cambia en este nuevo escenario?, ¿por qué?
- Intuitivamente, ¿crees que la probabilidad ahora, de que salga un número impar es mayor o menor que antes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el número que salió sea impar?, ¿cómo lo supiste?

Si, en el juego de Claudio y Camila, definimos el evento B: sale un número menor que 4, este corresponderá a $B = \{1, 2, 3\}$.

De este nuevo conjunto de casos posibles, los favorables para el suceso de interés son solamente 1 y 3, ya que sabemos que el número es menor que 4. Este conjunto corresponde a los elementos del suceso $A \cap B$.

Así pues, tenemos dos casos favorables correspondientes a $\#A \cap B$, y tres casos posibles que corresponden a $\#B$.

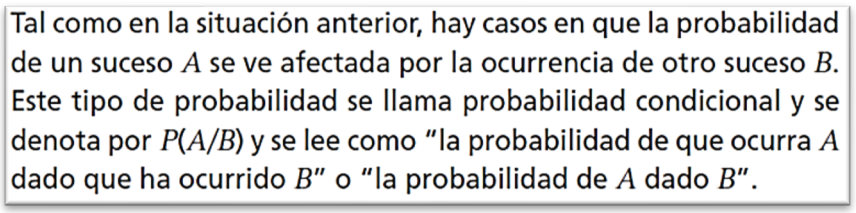
Luego, la probabilidad de obtener un número impar sabiendo que el número que se obtuvo es menor que 4 es $\frac{2}{3}$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 228), 2010, Santillana.

Como resultado de este tratamiento, los autores luego generalizan la definición del concepto en forma intuitiva, lo que se muestra en la Figura 33.

Figura 33

Definición intuitiva del concepto de probabilidad condicional en el texto 2°



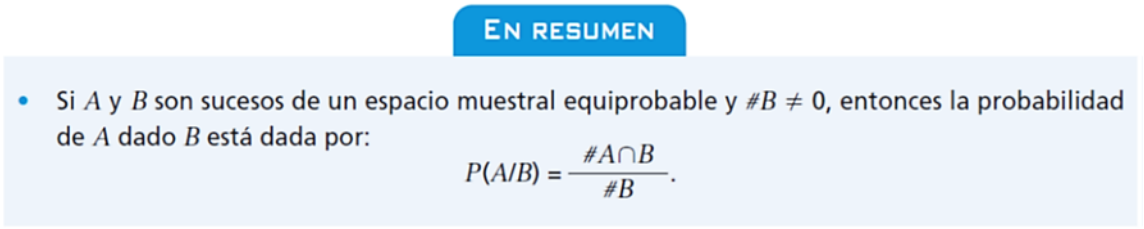
Tal como en la situación anterior, hay casos en que la probabilidad de un suceso A se ve afectada por la ocurrencia de otro suceso B. Este tipo de probabilidad se llama probabilidad condicional y se denota por $P(A/B)$ y se lee como "la probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B" o "la probabilidad de A dado B".

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 228), 2010, Santillana.

Finalmente, en la Figura 34 se muestra la formalización del concepto que plantean los autores, la cual ya se había mostrado, anteriormente, en el campo MCO4 junto con el desarrollo previo de un ejemplo, el que lleva a su deducción.

Figura 34

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 2°



Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 229), 2010, Santillana.

En esta definición, se puede apreciar que los autores definen la probabilidad condicional considerando un espacio muestral equiprobable, pero no especificando que sea finito, lo que lleva a una concepción errónea al momento de establecer la probabilidad condicional $P(A/B)$ como la proporción $\frac{\#A \cap B}{\#B}$, que según lo planteado por Gras y Totohasina (1995), estaría relacionada con la *concepción cardinal* del concepto. Esta formalización, además, no considera un espacio muestral continuo y tampoco no equiprobable, lo que lleva a interpretar que la probabilidad condicional sólo tiene relación con un espacio muestral equiprobable, o que la expresión $P(A/B) = \frac{\#A \cap B}{\#B}$ puede aplicarse a cualquiera de los tres espacios muestrales mencionados, lo cual es un error.

Por otra parte, se puede intuir que los autores optaron por restringir el concepto en estudio para facilitar su comprensión y aplicación.

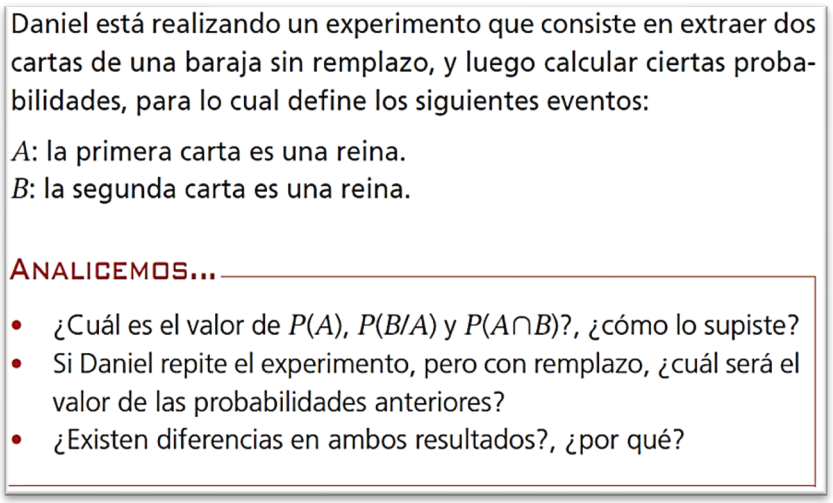
- Sucesos Independientes

Al igual que en el caso de la probabilidad condicional, los autores proceden de la misma forma, es decir, inician el tratamiento de independencia de sucesos con una situación particular sobre la "extracción de dos cartas sin devolución". A esto, se suman las preguntas de análisis que dirigen al estudiante a utilizar un pensamiento probabilístico, comparando principalmente resultados entre probabilidades, para finalmente mostrar su desarrollo y concluir el concepto.

En la Figura 35, se considera la situación planteada y las preguntas asociadas.

Figura 35

Tratamiento intuitivo de la independencia de sucesos en el texto 2°



Daniel está realizando un experimento que consiste en extraer dos cartas de una baraja sin remplazo, y luego calcular ciertas probabilidades, para lo cual define los siguientes eventos:

A: la primera carta es una reina.
B: la segunda carta es una reina.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es el valor de $P(A)$, $P(B/A)$ y $P(A \cap B)$?, ¿cómo lo supiste?
- Si Daniel repite el experimento, pero con remplazo, ¿cuál será el valor de las probabilidades anteriores?
- ¿Existen diferencias en ambos resultados?, ¿por qué?

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 232), 2010, Santillana.

Aquí se puede apreciar, como los autores intencionalmente hacen que el estudiante evalúe y luego compare tres probabilidades claves para el desarrollo del concepto de independencia; $P(A), P(A/B)$ y $P(A \cap B)$. Analizando estos resultados en ambos casos; sin reemplazo y con reemplazo.

A continuación de esto, los autores presentan la resolución del problema en forma deductiva, aplicando la "regla del producto" $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ para la extracción sin reemplazo. Luego, contrastan este procedimiento con el de extracción con reemplazo, mostrando la implicancia que tiene este suceso en el cálculo de la probabilidad condicional $P(B/A)$, es decir, $P(B/A) = P(B)$, lo que luego les permite plantear la conclusión sobre la independencia entre ambos sucesos. En la Figura 36, se muestra esta conclusión y la definición formal que se exhibe a continuación de esta.

Figura 36

Planteamiento intuitivo y formal del concepto de independencia en el texto 2°

Intuitivamente, lo que ocurre es que, cuando la extracción es con remplazo, la ocurrencia de A no afecta la de B, es decir, A y B son sucesos independientes.

Entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{16}{2704}$.

- Si dos sucesos A y B son independientes, entonces:
  - $P(A/B) = P(A)$.
  - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (pp. 232 y 233), 2010, Santillana.

En este tratamiento, los autores no mencionan el conocimiento de *sucesos mutuamente excluyentes,* por ende, no consideran la relación y diferencia que existe entre este concepto y la independencia de sucesos. Lo que tiende a establecer el sesgo de que "*dos sucesos mutuamente excluyentes son lo mismo que sucesos independientes*".

En resumen, se observa que los autores consideran el razonamiento probabilístico intuitivo para el tratamiento de la definición de ambos contenidos, integrando y relacionando de forma gradual conceptos claves que permiten deducirlos. Pero no logran integrar en su totalidad los razonamientos condicionales, anteriormente descritos, que permiten una mejor interpretación y aplicación de estos contenidos.

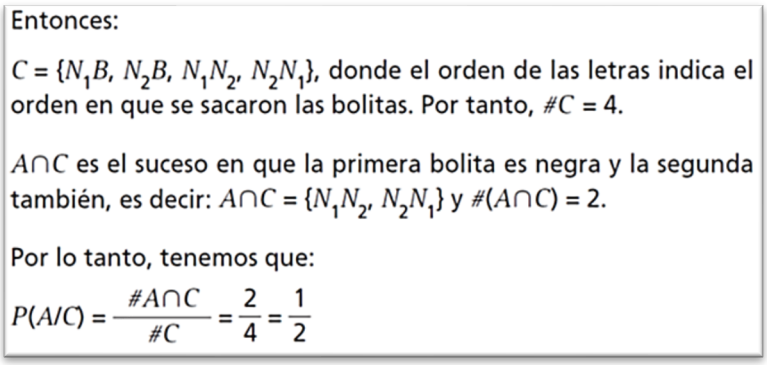
- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

Se observa la ausencia de la mayoría de las propiedades básicas de la probabilidad condicional y aquellas que se mencionan, no se indican como tal. Pues se presentan de manera implícita, debiendo deducirlas. Por lo tanto, las propiedades que se presentan en este texto se describen a continuación.

En la Figura 37, se intenta mostrar cuáles son los momentos en el tratamiento del concepto que se podrían relacionar para poder deducir la propiedad; "*la probabilidad conjunta* $P(A \cap B)$ *y probabilidad condicional* $P(A/B)$ *no son lo mismo*", según Peña (1986), estando presente en la unidad del texto de manera implícita.

Figura 37

Propiedad implícita de la probabilidad condicional en el texto 2°



Entonces:

$C = \{N_1B, N_2B, N_1N_2, N_2N_1\}$, donde el orden de las letras indica el orden en que se sacaron las bolitas. Por tanto, $\#C = 4$.

$A \cap C$ es el suceso en que la primera bolita es negra y la segunda también, es decir: $A \cap C = \{N_1N_2, N_2N_1\}$ y $\#(A \cap C) = 2$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$P(A/C) = \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de que ocurran dos sucesos simultáneamente es igual al producto entre la probabilidad de que suceda uno de ellos y la del otro, dado que ocurrió el primero.
Es decir: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (pp. 229 y 231), 2010, Santillana.

Se presenta en la imagen, dos momentos del texto, siendo el primero el correspondiente a la parte no sombreada, donde se puede apreciar la diferencia entre la intersección de los sucesos A y C con la probabilidad condicional $P(A \cap C)$. Y el segundo momento, tiene que ver con la formalización de la "regla del producto", donde se contrastan ambos conceptos, mediante el lenguaje natural y la expresión algebraica, dejando en claro que no son lo mismo.

Otra propiedad presente de la probabilidad condicional, es la referida a que el "*espacio muestral queda restringido al suceso condicionante*". Esto se puede apreciar, de manera sutil, en el desarrollo del planteamiento del problema que inicia el tratamiento intuitivo de la probabilidad condicional, mostrado anteriormente en la Figura 31 del campo MTC1. Donde se menciona un nuevo conjunto de casos posibles, referido al suceso condicionante B.

En resumen, se evidencia que los autores no consideran, en gran medida, las propiedades básicas de la probabilidad condicional y aquellas que son incluidas, no se indican como una propiedad elemental del concepto, sino que sólo se insinúan por la necesidad de resolver un problema.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

No se observa a lo largo de la unidad, que los autores consideren el razonamiento sobre "relación causal" respecto de la probabilidad condicional, pues no se aprecia alguna situación o momento que se refiera o de indicios de la relación de causa y efecto que se da entre los sucesos de una probabilidad condicional y la

implicancia que esto lleva en la comprensión del concepto. A pesar de esto, se pudo apreciar una insinuación al respecto, en la conclusión intuitiva de la probabilidad condicional, la cual se mostró anteriormente, en la Figura 33 como *"Definición intuitiva del concepto".* Aquí se muestra nuevamente como apoyo a lo expuesto.

> Tal como en la situación anterior, hay casos en que la probabilidad de un suceso A se ve afectada por la ocurrencia de otro suceso B. Este tipo de probabilidad se llama probabilidad condicional y se denota por $P(A/B)$ y se lee como "la probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B" o "la probabilidad de A dado B".

En la frase:

"Tal como en la situación anterior, hay casos en que la probabilidad de un suceso A se ve afectada por la ocurrencia de otro suceso B."

se puede apreciar la noción de relación causal, siendo la causa el suceso condicionante *B.*

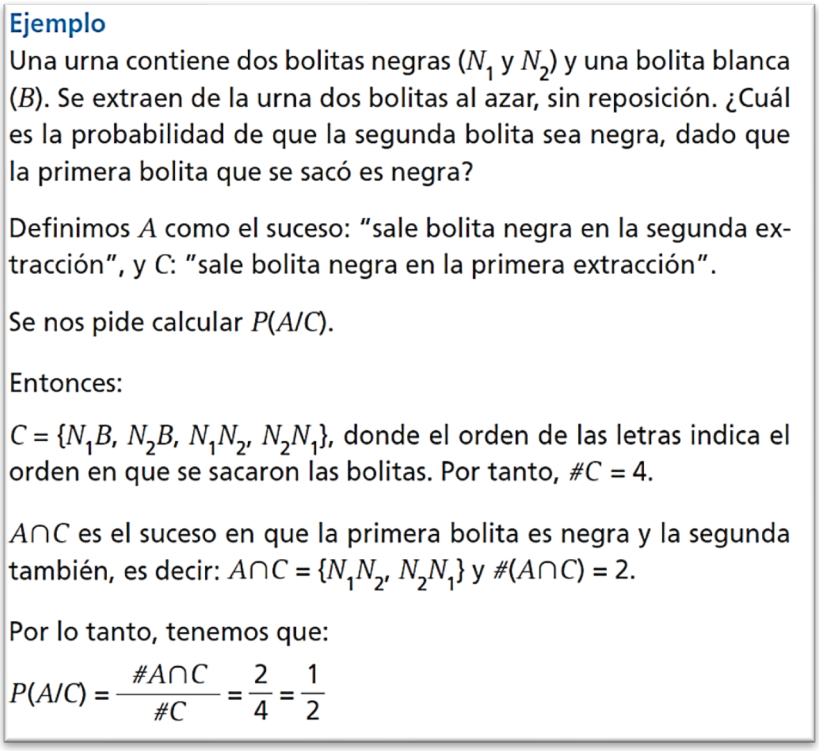
Con respecto a la relación diagnóstica, no se observa su tratamiento ni aplicación.

- **MTC4: Condicionalidad y falacia del eje temporal**

A lo largo, de toda la sección de probabilidad condicional, no se observa un espacio destinado en el texto donde se pueda ver el tratamiento específico de la *"condicionalidad respecto al orden temporal entre sucesos y su inversa".* De esto, lo que se pudo hallar, fue primero, un ejemplo que plantea una secuenciación temporal entre dos sucesos, pero sólo en un sentido, es decir, no se considera su inversa temporal. En la Figura 38, se muestra este ejemplo.

Figura 38

Ejemplo con orden temporal entre dos sucesos, en el texto 2°



Ejemplo

Una urna contiene dos bolitas negras (N_1 y N_2) y una bolita blanca (B). Se extraen de la urna dos bolitas al azar, sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bolita sea negra, dado que la primera bolita que se sacó es negra?

Definimos A como el suceso: "sale bolita negra en la segunda extracción", y C: "sale bolita negra en la primera extracción".

Se nos pide calcular $P(A/C)$.

Entonces:

$C = \{N_1B, N_2B, N_1N_2, N_2N_1\}$, donde el orden de las letras indica el orden en que se sacaron las bolitas. Por tanto, $\#C = 4$.

$A \cap C$ es el suceso en que la primera bolita es negra y la segunda también, es decir: $A \cap C = \{N_1N_2, N_2N_1\}$ y $\#(A \cap C) = 2$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$P(A/C) = \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (pp. 229), 2010, Santillana.

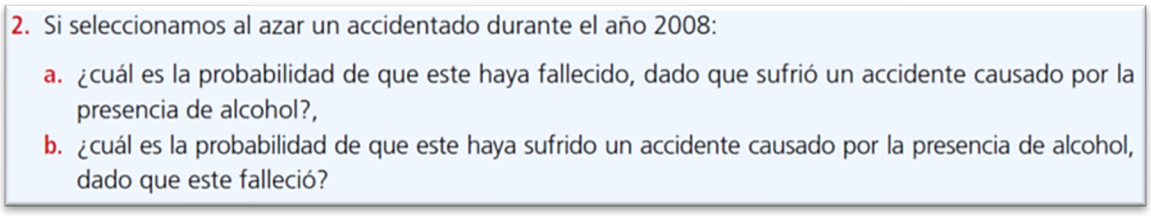
En el ejemplo, el orden temporal entre los sucesos se puede identificar mediante la pregunta planteada:

- *¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bolita sea negra, dado que la primera bolita que se sacó es negra?*

Y segundo, se observó una actividad de cierre de la unidad, donde se plantean dos preguntas que conducen al cuestionamiento del orden temporal de los sucesos y su inversa. En la Figura 39, se muestran las preguntas relacionadas con una información oficial sobre los "Siniestros de tránsito y consecuencias".

Figura 39

Preguntas que apuntan al orden temporal de los sucesos y su inversa


2. Si seleccionamos al azar un accidentado durante el año 2008:
   a. ¿cuál es la probabilidad de que este haya fallecido, dado que sufrió un accidente causado por la presencia de alcohol?,
   b. ¿cuál es la probabilidad de que este haya sufrido un accidente causado por la presencia de alcohol, dado que este falleció?

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 243), 2010, Santillana.

La primera pregunta (a), establece un orden temporal entre los sucesos, ya el suceso condicionante; "*sufrió un accidente causado por la presencia del alcohol*", precede temporalmente al suceso condicionado; "*haya fallecido*".
Y la segunda pregunta (b), invierte el orden de los sucesos mencionados, es decir, deja al suceso condicionado; "*haya fallecido*", precediendo al suceso condicionante "*sufrió un accidente causado por la presencia del alcohol*".

En resumen, se observa que los autores no profundizan en el sesgo de la "falacia del eje temporal", para el tratamiento de una correcta interpretación de la probabilidad condicional.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

Con respecto al espacio muestral de la probabilidad condicional, se aprecia en la introducción del concepto (tratamiento intuitivo), que los autores lo describen de manera indirecta, en relación con el desarrollo del problema. No profundizan en la implicancia, que tiene que ver con definir y precisar el espacio muestral, para una correcta aplicación e interpretación de la probabilidad condicional.
En la Figura 40, se muestra la descripción que se hace del espacio muestral, en base al contexto del problema.

Figura 40

Presentación intuitiva del espacio muestral en el texto 2°

Si, en el juego de Claudio y Camila, definimos el evento B: sale un número menor que 4, este corresponderá a $B = \{1, 2, 3\}$.

De este nuevo conjunto de casos posibles, los favorables para el suceso de interés son solamente 1 y 3, ya que sabemos que el número es menor que 4. Este conjunto corresponde a los elementos del suceso $A \cap B$.

Así pues, tenemos dos casos favorables correspondientes a $\#A \cap B$, y tres casos posibles que corresponden a $\#B$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3°* (p. 228), 2010, Santillana.

Se puede apreciar, que la descripción que hacen los autores del espacio muestral, en relación con el contexto del problema, está indicada cuando se menciona; "*De este nuevo conjunto de casos posibles…",* haciendo referencia a que el espacio muestral inicial sufrió una modificación al agregar nueva información, la que resulta, en tres casos posibles. Esto, posteriormente se corrobora con la conclusión de que *tres casos posibles corresponden a #B*.

Lo segundo que se menciona del espacio muestral, en forma específica, es en la definición formal de probabilidad condicional. Donde se define el espacio muestral como equiprobable, faltando la condición de "finito". Se muestra nuevamente una parte de la Figura 28, donde se aprecia la definición formal del concepto y donde se puede observar lo dicho del espacio muestral.

EN RESUMEN

- Si A y B son sucesos de un espacio muestral equiprobable y $\#B \neq 0$, entonces la probabilidad de A dado B está dada por:

$$P(A/B) = \frac{\#A \cap B}{\#B}.$$

Con respecto a la *concepción cardinal* de la probabilidad condicional, en esta misma imagen, se evidencia que los autores definen la probabilidad condicional en términos de la cardinalidad de los sucesos, lo que tiene correspondencia con el tipo de espacio muestral descrito, pues en base a esto, se puede decir que la definición propuesta de la probabilidad condicional estaría correcta, excepto por la omisión de "finito". Por consiguiente, se puede decir que los autores restringen la comprensión e interpretación del concepto en estudio, al considerar sólo la concepción cardinal de la definición y no incluir la probabilidad condicional con un espacio muestral continuo y no equiprobable, lo que la lleva a expresarse, en términos de la probabilidad de la intersección y de la probabilidad del suceso condicionante, como $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

Se evidencia a lo largo de la unidad, que los autores relacionan en forma sistemática los conceptos de probabilidad condicional, probabilidad simple y conjunta, estableciendo comparaciones y diferencias entre ellos, mediante la resolución de problemas. Ejemplos de esto, es lo que se ha descrito y mostrado en los campos anteriores, respecto a estos tres conceptos.

A continuación, se exhiben algunas preguntas, seleccionadas intencionalmente de los problemas introductorios que son parte de la presentación de los conceptos de probabilidad condicional, de la intersección de sucesos y de independencia, y que evidencian cómo los autores a través de estas preguntas, consideran tratar las diferencias entre las probabilidades condicional, simple y conjunta.

> *- Intuitivamente, ¿crees que la probabilidad ahora, de que salga un número impar es mayor o menor que antes?*
>
> *- ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre gane el segundo premio?*

- ¿Cuál es el valor de $P(A), P(B/A)$ y $P(A \cap B)$?, ¿cómo lo supiste?

En definitiva, se puede decir que los autores consideran el sesgo; *"confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta",* en el tratamiento de ambos conceptos y su articulación, logrando establecer sus diferencias.

- **MTC7: Uso de representaciones de la probabilidad condicional**

Se evidencia, que los autores para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional, consideran principalmente y prácticamente de manera exclusiva, sólo las representaciones en lenguaje intuitivo y algebraico, pues no se observa el uso de tablas de frecuencias, ni gráficos y tampoco diagramas de árbol que apoyen el desarrollo del concepto en estudio. Lo que pudo apreciar, es el uso de un diagrama de árbol, pero como apoyo al tratamiento del concepto de "*Probabilidad del suceso* $A \cap B$", lo que tendría en parte relación con la probabilidad condicional, pero no directamente.
Por esta razón, es que no es posible mostrar alguna figura que dé cuenta de representaciones como las ya mencionadas.

4.2.3.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 3°.

Antes de comenzar con las descripciones en cada campo, es necesario mencionar, que con este texto 3°, se da inicio a la puesta en vigencia del ajuste curricular 2009, pues como se mencionó en el capítulo 1, en los antecedentes; se dará curso al ajuste curricular para 3° año de enseñanza media, a partir del año escolar 2012.

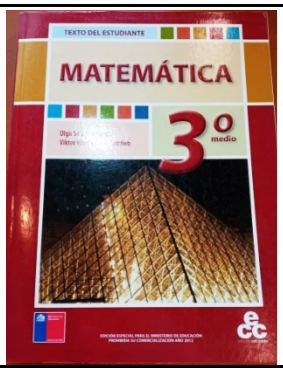
- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática 3° medio

Tipo: Texto del estudiante

Curso: 3° educación media

Periodo: 2012



- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: Primera edición

Publicación: 2011 - 03 - 01

Editorial: Cal y Canto Ltda.

- **MCG3: Datos de Autoría**

En Tabla 4.13 se organiza y describe la información de este campo.

Tabla 4.12.

Datos de autoría del texto 3°

Autor	Grados académicos	Universidad de procedencia	Obras
Olga Saiz Maregatti	- Profesora de Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile, 1993	- ¡Eureka! Matemáticas 1, 2 y 3, editorial Castillo (Cuadernos de trabajo para secundaria) - Texto del estudiante 3° medio, 2011.

Viktor Blumenthal Gottlieb	- Licenciado en Ciencias, mención Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile	- Matemáticas 3, editorial Castillo (Cuaderno de proyectos y actividades)

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 399 páginas cuyas dimensiones son de 27 x 21 cm

- **MCG5: ISBN**

ISBN 978-956-339-003-2

4.2.3.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 3°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

La información requerida para este campo con respecto al texto en cuestión, no es posible mostrarla en su totalidad, debido a que sólo se pudo encontrar un ejemplar de este libro en la biblioteca Mineduc, teniendo acceso a sólo fotos del mismo, debiendo seleccionar las partes más elementales (por tiempo y capacidad) relacionadas, principalmente, con el concepto en estudio. Por ende, no se tiene un registro visual de la estructura general que pudo presentar este texto 3°. Es por esto, que se considera la información del índice y de la unidad 5 de probabilidades, observando como regla general que la estructura y distribución de los contenidos es la misma, para todas las unidades.

La Tabla 4.13 describe la distribución y organización temática del texto 3°.

Tabla 4.13.

Estructura temática del texto 3°

Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	*Cierre del texto
- N° unidad - Título - Esquema introductorio - Objetivos fundamentales y transversales. - Contenidos - Aprendizajes esperados - Historieta	- Conocimientos previos - Presentación y desarrollo de contenidos - Formalización de conceptos - Ejercicios misceláneos (individual y grupal) - Actividad de metacognición (revisión de lo aprendido)	- Taller grupal - Evaluación de la unidad - Autoevaluación de aprendizaje - Evaluación de síntesis (unidades previas)	- Índice temático - Solucionario - Bibliografía

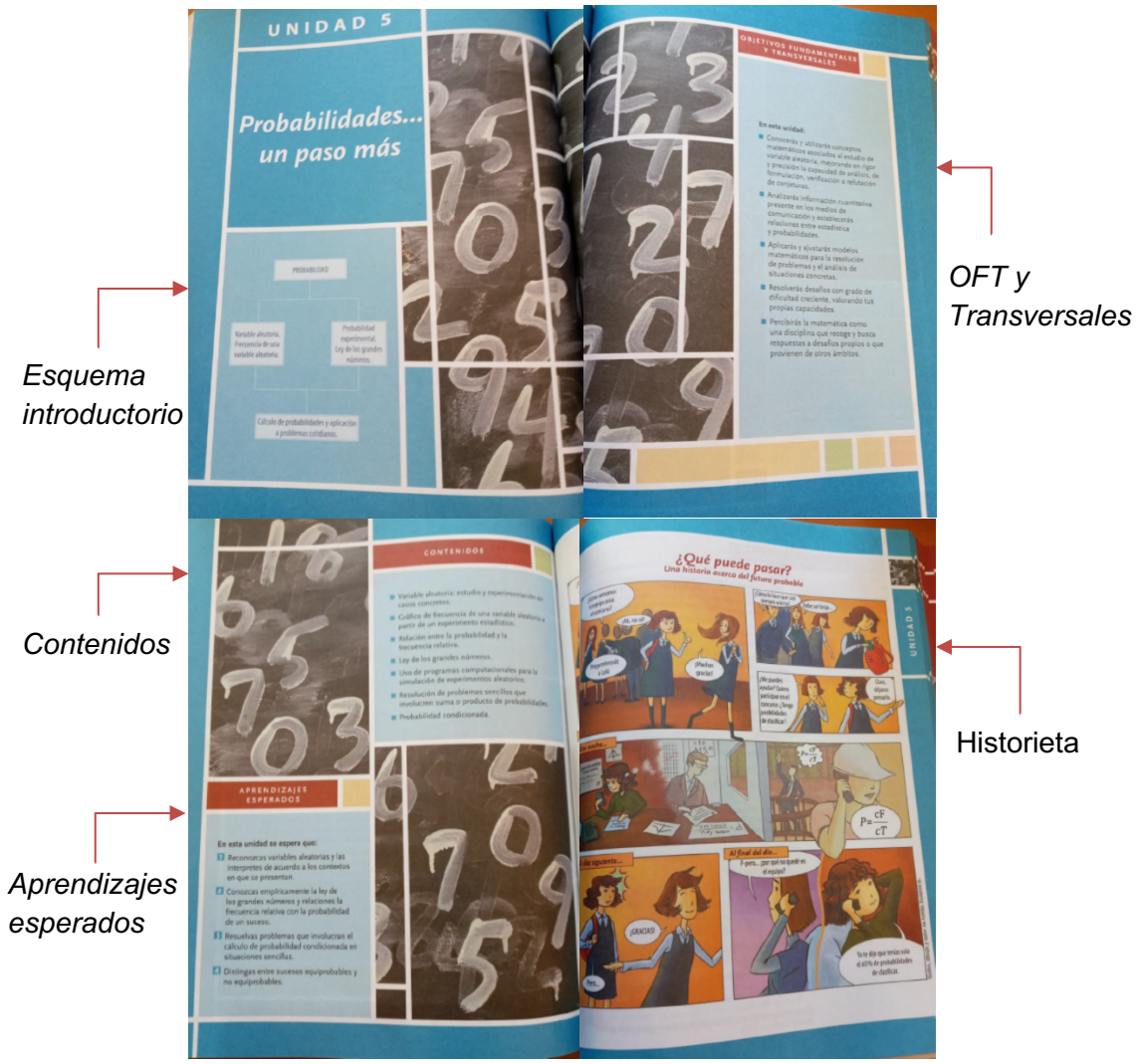
Aquí se puede apreciar, primero, con respecto al “inicio de unidad”; que el texto entrega una visión global de lo que va a tratar cada unidad, pues se exponen todos los lineamientos que establece el nuevo ajuste curricular; los Objetivos Fundamentales articulados con los Objetivos Transversales, los Contenidos y Aprendizajes esperados. Sumado a esto, también considerado en la introducción a la unidad, se presenta una historieta con la clara intención de acercar al estudiante y familiarizarlo con la probabilidad.

Segundo, con respecto al “Desarrollo de unidad” también se aprecia una concentración en actividades individuales y grupal, lo que se puede decir de antemano, que los autores entregan más posibilidades de aplicar y trabajar lo aprendido, a diferencia de los dos textos 1° y 2°, analizados en los apartados anteriores.

En la Figura 41, se muestran las cuatro páginas del inicio de la unidad 5 de probabilidades, como modelo de la estructura temática del texto 3°.

Figura 41

Estructura temática del texto 3°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (pp. 290 a 293), 2011, Cal y Canto.

Aquí se apuntan los lineamientos de la estructura temática de la unidad, para una mejor identificación. Demás se puede apreciar que se destinan cuatro páginas para la introducción a la unidad.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

Como se mencionó anteriormente, en el campo MCO1, con respecto a la información que se pudo recabar del texto. También en este campo se ve afectada la entrega de información, ya que para este campo se cuenta con registro fotográfico del índice de las unidades 3 a 5 y de la introducción a la unidad 5 de probabilidades. En base a esta información, se presenta la Tabla 4.14.

Tabla 4.14.

Organización de algunas unidades y contenidos del texto 3°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas
3	Desigualdades e inecuaciones	- Desigualdades y sus propiedades - Números reales - Intervalos - Inecuaciones lineales, fraccionarias y cuadráticas - Inecuaciones con valor absoluto - Sistemas de inecuaciones	146 – 215
4	Algo más sobre triángulos rectángulos	- Euclides, Pitágoras y sus teoremas - Teorema de Pitágoras y teorema de Fermat - Trigonometría	216 – 289

5	Probabilidades	- Variable aleatoria - Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria - Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa - Ley de los grandes números - Simulación de experimentos aleatorios con el uso de programas computacionales - Suma o producto de probabilidades - Probabilidad condicionada	290 - 359

La cantidad de páginas utilizadas en total para la unidad 5, “Probabilidades... un paso más”, es de 61 páginas, viéndose una diferencia de 14 páginas con el texto 2°, ya que en este la cantidad ocupada fue de 47 páginas.

En la Tabla 4.15 se describe, específicamente, la organización temática de la unidad de probabilidades del texto 3°, considerando los contenidos a tratar relacionados con los aprendizajes esperados en el orden que los presenta el texto, a lo largo de la unidad.

Tabla 4.15.

Organización temática de la unidad de probabilidades del texto 3°

N°/ Título unidad	Secciones / Contenidos	Aprendizajes esperados	Páginas
5 Probabili-	• Conocimientos previos • Variable aleatoria	• Reconozcas variables aleatorias y las interpretes	294 – 305

Dades… un paso más		de acuerdo a los contextos en que se presentan. • Distinguir entre sucesos equiprobables y no equiprobables.	
	• Probabilidad experimental y teórica	• Conozcas empíricamente la Ley de los grandes números y relaciones la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso.	306 – 313
	• Sucesos y probabilidades		314 – 319
	• Sucesos independientes		320 – 328
	• Sucesos dependientes… probabilidad condicionada	• Resuelvas problemas que involucran el cálculo de probabilidad condicionada en situaciones sencillas.	329 - 338
	➢ Taller		339
	➢ Evaluación unidad 5		340 – 351
	➢ Evaluación de síntesis (Unidades 1 a 5)		352 - 359

Al comparar esta tabla con las tablas 4.5 y 4.10 de los textos 1° y 2°, respectivamente, se puede apreciar de una reducción de los contenidos desde el primer texto a este texto 3°. En este último, los contenidos que ya no se consideran son las “permutaciones y combinaciones”, pues ambos estaban contemplados antes del ajuste curricular 2009.

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

Los contenidos expuestos en la Tabla 4.16, como conocimientos previos, se logran identificar de la unidad 5 del texto 3°, aun no siendo mencionados ni relacionados como conocimientos previos de la probabilidad condicional, a excepción del concepto "sucesos dependientes".

Tabla 4.16.

Conocimientos previos de la probabilidad condicional del texto 3°

Conocimientos previos	Descripción	Páginas
• Regla de Laplace	- Este concepto se introduce en la sección de conocimientos previos, mediante preguntas y respuestas que apuntan a recordar el concepto de probabilidad de un suceso, donde se define intuitivamente este. Luego, se plantea un ejemplo para reforzar el concepto en cuestión, finalizando con la conclusión: "*Esta forma de calcular probabilidades, de la forma* $P(suceso) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$ *se llama regla de Laplace*". Se evidencia que, carece de formalidad y es ambigua, por no especificar como el "número de casos…", además no presenta las condiciones que debe cumplir el espacio muestral para que se cumpla la regla.	294 – 295
• Sucesos equiprobables y no equiprobables	- Ambos conceptos se incluyen en la sección de "Variable aleatoria" de manera inductiva, mediante una situación particular que muestra una tabla con las probabilidades de los lanzamientos de dos dados, en forma experimental. A partir de esto, se formalizan	298 – 299

	ambos conceptos de manera intuitiva, mediante la expresión: *"Llamamos sucesos equiprobables a los que tienen igual posibilidad de ocurrir. Por lo tanto, serán no equiprobables los que, por alguna razón, no tienen la misma posibilidad de ocurrir"*	
• Razonamiento intuitivo de sucesos independientes y dependientes	- Ambos conceptos se mencionan y explican mediante un sólo ejemplo y el mismo, para luego formalizarlos de manera intuitiva, como: - *"Dos sucesos son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no incide en la ocurrencia del otro. - Dos sucesos son dependientes si la ocurrencia de uno de ellos depende de lo que haya ocurrido con el otro."*	315 – 316
• Probabilidad conjunta	- Este concepto de probabilidad conjunta, se presenta como sólo un ejemplo anexo, en la sección de "Sucesos independientes", con el propósito de recordar su aplicación a un caso particular de sucesos dependientes. Este ejemplo, se analiza más adelante.	320
• Independencia de sucesos	- Se retoma este concepto, luego de formalizarlo intuitivamente, mediante el planteamiento de un problema que luego se representa con un diagrama de árbol para establecer las distintas posibilidades del espacio muestral y poder verificar que las probabilidades de los sucesos son independientes. Luego, se formaliza matemáticamente como: *"Si* $P(A) = a \ \ y \ \ P(B) = b \Longrightarrow P(a \wedge b) = a \cdot b.$ *Nota*	320 - 321

	que aquí la clave es que se quiere la probabilidad de A y B a la vez.". Claramente se aprecia un error en la proposición y una ambigüedad en la nota, las cuales serán analizadas más adelante en este estudio.	
• Probabilidad de un suceso u otro	- Este concepto se plantea a consecuencia de la "probabilidad del complemento de un suceso", por lo que se define como: *"Para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso u otro, calcula el complemento de la probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez; esto es:* $P(A\ o\ B) = 1 - P(no\ A\ y\ no\ B)$*".* Aquí se plantea la condición que los *sucesos ocurran a la vez,* lo que induce a creer erróneamente que no pueden ocurrir sucesivamente. Más adelante se analiza esta proposición.	324
• Sucesos dependientes	- Se retoma este concepto, relacionándolo intuitivamente con el concepto de probabilidad condicional, mediante la proposición; *"Un suceso depende de otro, entonces, probabilidad condicionada"*, en la sección "Sucesos dependientes. Probabilidad condicionada…" Luego se define intuitivamente por sí solo y finalmente se incorpora en la definición de probabilidad condicionada.	329 - 330

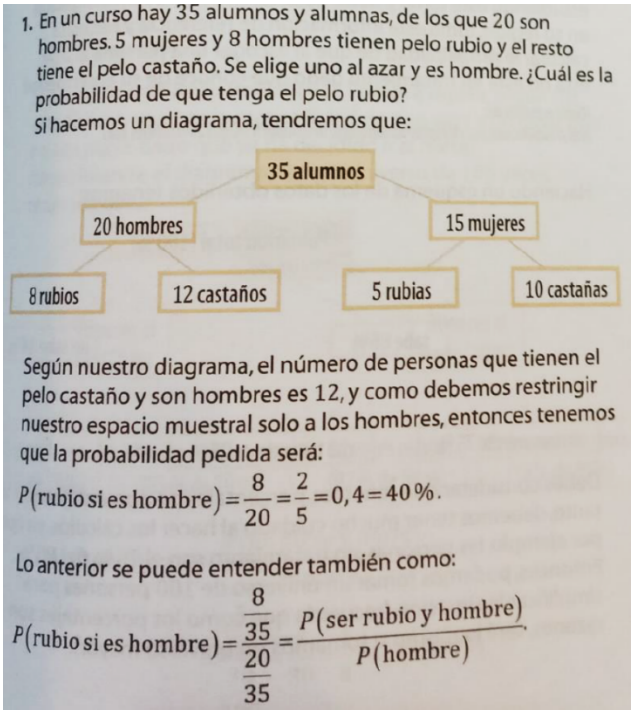
En resumen, se observa la presencia de algunos conocimientos previos con respecto a la probabilidad condicional, faltando presentar otros conocimientos esenciales referidos a; los tipos de espacio muestral, sucesos mutuamente excluyentes y teoría de conjuntos.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

En este texto 3°, la presentación del concepto de probabilidad condicional, se muestra en general, como una consecuencia de la "dependencia de sucesos". Se inicia esta presentación, mediante un relato que no pone en contexto el concepto sino más bien es un diálogo (entre jóvenes) con la intención de familiarizarse con el estudiante (lector). A continuación de esto, sí se presenta un ejemplo, el cual intenta ejemplificar una situación de probabilidad condicional, la que se muestra en la Figura 42 (su primera parte), donde se puede apreciar también el lenguaje condicional utilizado.

Figura 42

Presentación inicial de la probabilidad condicional en el texto 3°



1. En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres. 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?
Si hacemos un diagrama, tendremos que:

Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo castaño y son hombres es 12, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\,\%.$$

Lo anterior se puede entender también como:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$$

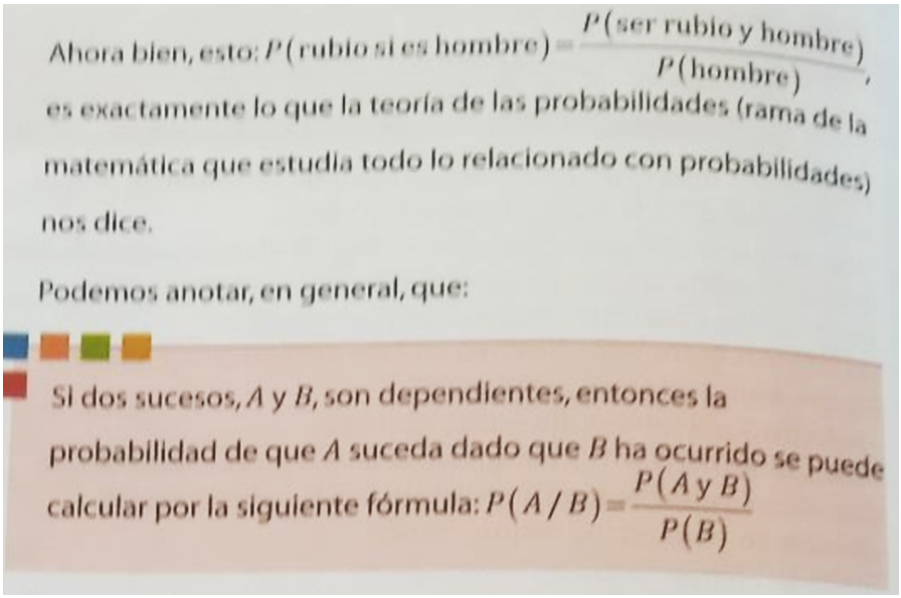
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329), 2011, Cal y Canto.

Aquí también se puede observar que se hace mención a la “restricción del espacio muestral” debido al suceso condicionante; “sólo hombres”. Y como se mencionó anteriormente, el lenguaje condicional utilizado considera la conjunción “si” para establecer la condición entre los sucesos. Lo que se diferencia del lenguaje utilizado por los dos textos anteriores y del más frecuente que usa la palabra “dado”.

En la Figura 43, se muestra cómo se intenta concluir el concepto en estudio y formalizarlo.

Figura 43

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 3°


Ahora bien, esto: $P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$, es exactamente lo que la teoría de las probabilidades (rama de la matemática que estudia todo lo relacionado con probabilidades) nos dice.

Podemos anotar, en general, que:

Si dos sucesos, A y B, son dependientes, entonces la probabilidad de que A suceda dado que B ha ocurrido se puede calcular por la siguiente fórmula: $P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 330), 2011, Cal y Canto.

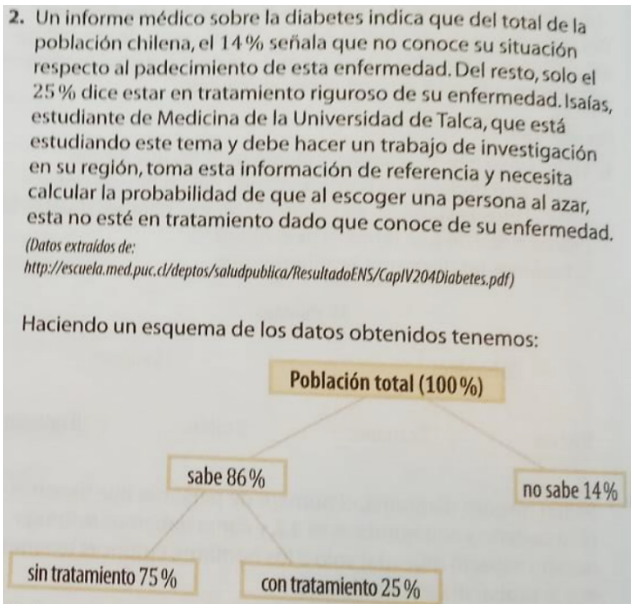
En la imagen, se observa la conclusión del ejemplo mostrado en la Figura 41, la cual es poco precisa al mencionar; "*es exactamente lo que la teoría de las probabilidades nos dice.*", pero ¿qué nos dice? Esta podría ser una de las interrogantes que los estudiantes se planteen al leer esta afirmación, ya que se asume que el estudiante sabe, a priori, la respuesta, por lo tanto, la conclusión muestra ambigüedad. Y con respecto a la generalización de probabilidad condicional, se observa, que inicia con la condición; *Si dos sucesos A y B son dependientes, entonces…* es posible calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$. Pero de esto, se puede deducir que, para sucesos independientes, entonces no se puede aplicar la fórmula. Lo que lleva a una incorrecta interpretación. A esto se suma, el uso de la conjunción "*y*" para expresar la probabilidad conjunta desplazando la intersección como notación elemental, y por último, no se restringe la probabilidad del suceso condicionante como $P(B) > 0$.

- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

De acuerdo, a lo presentado en el campo anterior MCO4, respecto a la presentación de la probabilidad condicional, se pudo apreciar una evidente articulación de este concepto con el de "*sucesos dependientes*", mediante el ejemplo tratado y la definición propuesta, los que se mostraron en las Figuras 42 y 43. Seguido de esto, los autores presentan un problema adaptado, a partir de datos verídicos como se muestra en la Figura 44 (parte inicial del problema).

Figura 44

Articulación de la probabilidad condicional con porcentajes, texto 3°


2. Un informe médico sobre la diabetes indica que del total de la población chilena, el 14 % señala que no conoce su situación respecto al padecimiento de esta enfermedad. Del resto, solo el 25 % dice estar en tratamiento riguroso de su enfermedad. Isaías, estudiante de Medicina de la Universidad de Talca, que está estudiando este tema y debe hacer un trabajo de investigación en su región, toma esta información de referencia y necesita calcular la probabilidad de que al escoger una persona al azar, esta no esté en tratamiento dado que conoce de su enfermedad.

(Datos extraídos de: http://escuela.med.puc.cl/deptos/saludpublica/ResultadoENS/CapIV204Diabetes.pdf)

Haciendo un esquema de los datos obtenidos tenemos:

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 330), 2011, Cal y Canto.

4.2.3.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 3°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

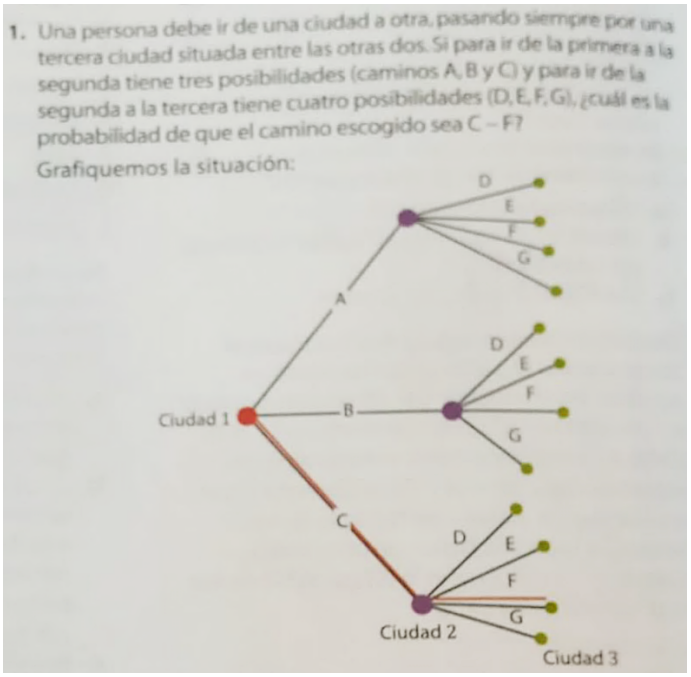
A continuación, se describen los conceptos en el orden que aparecen en el texto 3°.

- Sucesos Independientes

El tratamiento y definición del concepto de independencia se presenta previo al concepto de probabilidad condicional, por lo que se evidencia, como un conocimiento previo a este concepto en estudio. También, se debe recordar que este concepto se trató anteriormente en el texto, de manera intuitiva. En la Figura 45, se muestra la introducción al contenido "Sucesos Independientes", mediante un ejemplo que plantea las distintas maneras que tiene una persona para trasladarse de una ciudad a otra, las cuales se grafican en un diagrama de árbol.

Figura 45

Introducción al concepto de independencia entre sucesos, en el texto 3°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 320), 2011, Cal y Canto.

Aquí se puede apreciar el tratamiento inductivo e intuitivo del concepto de independencia, el cual se articula con el concepto de combinaciones. A continuación de esto, en su resolución se anuncia:

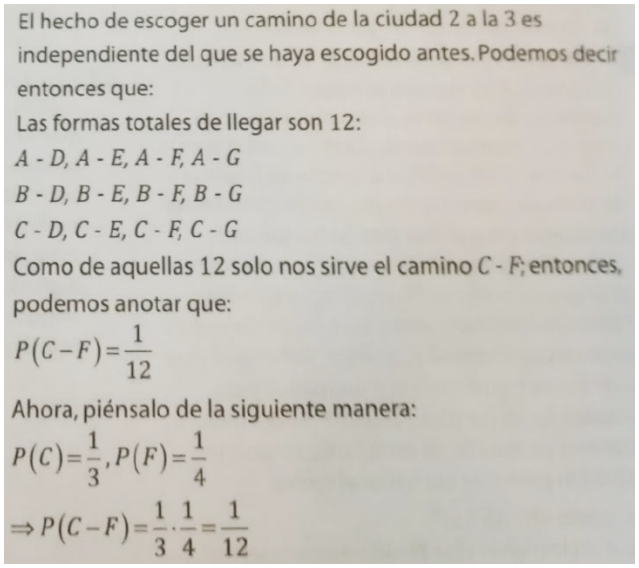
> *"El hecho de escoger un camino de la ciudad 2 a la 3 es independiente del que se haya escogido antes" (p. 320)*

Esta aseveración indica, que el estudiante ya entiende o posee la noción de independencia, pues no hay mayor explicación al respecto. Teniendo en cuenta, que el concepto se trató anteriormente en el texto, de manera intuitiva.

En la Figura 46, se muestra el desarrollo de este ejemplo con la intención de describir la forma en cómo se considera y ejemplifica el concepto de independencia.

Figura 46

Ejemplificación del concepto de independencia en el texto 3°


El hecho de escoger un camino de la ciudad 2 a la 3 es independiente del que se haya escogido antes. Podemos decir entonces que:

Las formas totales de llegar son 12:

A - D, A - E, A - F, A - G

B - D, B - E, B - F, B - G

C - D, C - E, C - F, C - G

Como de aquellas 12 solo nos sirve el camino *C - F*; entonces, podemos anotar que:

$$P(C-F)=\frac{1}{12}$$

Ahora, piénsalo de la siguiente manera:

$$P(C)=\frac{1}{3}, P(F)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(C-F)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 320), 2011, Cal y Canto.

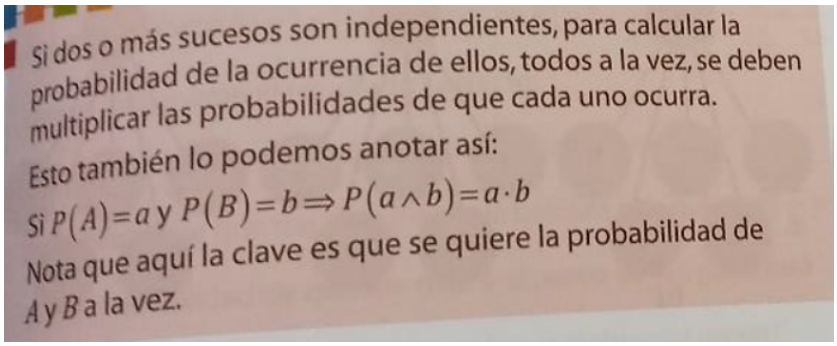
En esta resolución, se aprecia netamente un procedimiento secuencial de pasos, donde no se profundiza mayormente en la idea de independencia y su implicancia en la probabilidad de sucesos independientes, sino más bien en cómo calcular las probabilidades de los sucesos, que se asumen como independientes. Por otro lado, se observa el uso de "guion" para expresar las posibilidades o sucesos del espacio muestral, lo que puede tender a una confusión en la lectura, ya que se puede interpretar como una "resta", en vez de, una "conexión". Y por último, cuando se plantean las probabilidades por separado, es decir; $P(C) = \frac{1}{3}$ y $P(F) = \frac{1}{4}$, en esta última, no se hace referencia al camino que se toma previamente, que sería el "C", más bien se plantea como una conjetura que debe ser evidente para el o la estudiante. Finalmente, se concluye el producto entre ambas probabilidades con la intención de comparar su resultado con el anterior, verificando que son iguales, pero sin mencionar que aquello se traduce o interpreta como la independencia de sucesos, en otras palabras, se deja al estudiante la tarea de concluir y relacionar más a fondo la implicancia del concepto de independencia.

A continuación de este ejemplo, se plantea otro de forma análoga al anterior, siguiendo la misma idea de presentación, es decir, mediante un lenguaje proposicional y un diagrama de árbol, sin mayor explicación ni razonamiento en la idea de *independencia* y del *cálculo de la probabilidad de sucesos independientes,* sino más bien procedimental.

Finalmente, se formaliza el concepto como se muestra en la Figura 47.

Figura 47

Formalización del concepto de Independencia, en el texto 3°.


Si dos o más sucesos son independientes, para calcular la probabilidad de la ocurrencia de ellos, todos a la vez, se deben multiplicar las probabilidades de que cada uno ocurra.

Esto también lo podemos anotar así:

Si $P(A)=a$ y $P(B)=b \Rightarrow P(a \wedge b)=a \cdot b$

Nota que aquí la clave es que se quiere la probabilidad de A y B a la vez.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 320), 2011, Cal y Canto.

Aquí la formalización del concepto, indica que para calcular la probabilidad de sucesos independientes, estos deben ocurrir, *todos a la vez*; lo cual restringe y condiciona erróneamente la probabilidad de estos sucesos. Incluso después, se reitera que la clave de la proposición expuesta, es querer obtener *la probabilidad de dos sucesos independientes que ocurren a la vez.* Lo que se contradice con los ejemplos anteriormente expuestos, donde los sucesos ocurren de manera secuencial (uno después del otro). Además, se utiliza el símbolo "∧" como conjunción "y", el cual no es idóneo ni representativo de la intersección de dos sucesos, para la formalización del concepto a diferencia del símbolo "∩".

Por otro lado, se observa que no se incluye ni se menciona el concepto de "sucesos mutuamente excluyentes", dejando la posibilidad a la confusión expuesta en el marco teórico; de creer que sucesos independientes son lo mismo que sucesos excluyentes.

En conclusión, en esta sección los autores intentan ejemplificar el concepto de manera gráfica y procedimental con indicaciones específicas, dejando al estudiante, la tarea de deducir y concluir con respecto al concepto de independencia y su implicancia con el cálculo de la probabilidad de sucesos independientes, por ende, el razonamiento intuitivo no se percibe como un recurso esencial para la presentación del concepto de independencia en este

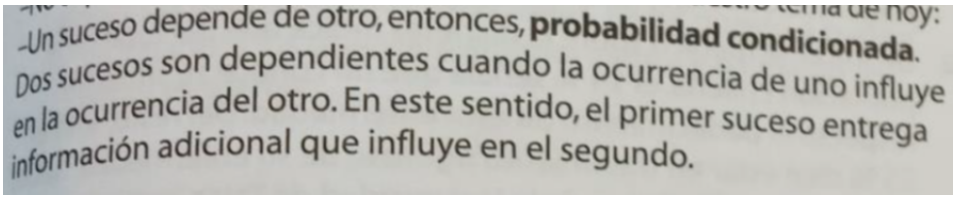
texto 3°. Concluyendo, en una definición restrictiva que se contradice con los ejemplos expuestos, al plantear que sólo es posible calcular la probabilidad de sucesos independientes que ocurren a la vez.

- Probabilidad condicional

El tratamiento del concepto de probabilidad condicional, se plantea en general, como una consecuencia de la "dependencia de sucesos", como se mencionó y describió anteriormente en el campo MCO4 sobre la presentación del concepto. En la Figura 48, se muestra el tratamiento intuitivo con el cual se da inicio y se impone el concepto de probabilidad condicional.

Figura 48

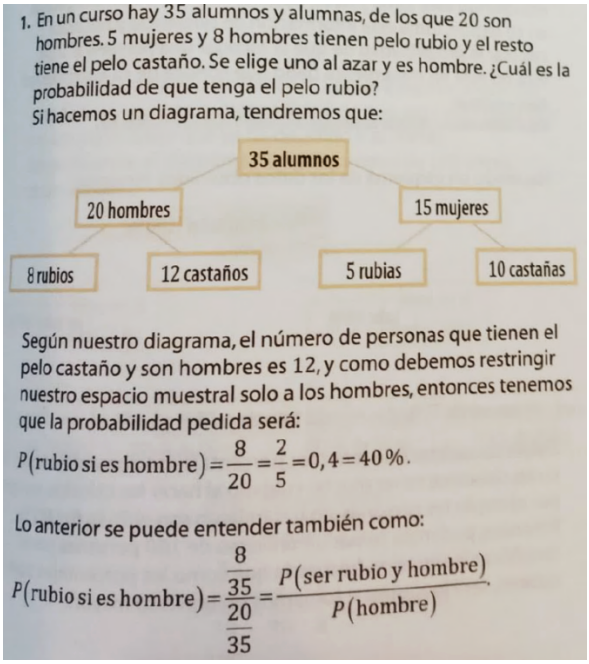
Tratamiento intuitivo del concepto de probabilidad condicional en el texto 3°


Un suceso depende de otro, entonces, **probabilidad condicionada**.
Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329), 2011, Cal y Canto.

En este planteamiento intuitivo de la probabilidad condicional, se observa como los autores muestran la relación directa con el concepto de dependencia entre sucesos, mediante la proposición: "*Un suceso depende de otro, entonces, probabilidad condicionada*", dejando de manifiesto y sin mayor cuestionamiento que el concepto en estudio se desprende y es posible debido a la dependencia de sucesos, en otras palabras, se impone el concepto sin dar la posibilidad, a priori, de cuestionar o analizar cómo surge el concepto en estudio y porqué se desprende de la dependencia de sucesos.

Luego se plantea un primer ejemplo, el cual ya se mostró en el campo MCO4, mediante la Figura 42, la cual se desea exponer nuevamente para visualizar con más claridad y comodidad las descripciones que se harán al respecto.



1. En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres. 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?
Si hacemos un diagrama, tendremos que:

Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo castaño y son hombres es 12, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\,\%.$$

Lo anterior se puede entender también como:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329), 2011, Cal y Canto.

Como primera ejemplificación del concepto, se aprecia un lenguaje condicional en el planteamiento de la pregunta, que es poco usual, es decir, que no se utiliza la conjunción “si” ni el adjetivo “dado” para condicionar la pregunta, sino que se condiciona, mediante la descripción de un suceso que ocurre previamente. A continuación, se presenta la pregunta descrita:

> *“Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?”*

Aquí la pregunta por sí sola, no plantea condicionalidad, es por esto que el suceso condicionante corresponde a la frase; *“Se elige uno al azar y es hombre.”*, aun

así de este modo, carece de lenguaje condicional, pues el sentido no es determinante.

Mediante el diagrama, es posible visualizar la relación entre los datos y la condicionalidad entre sucesos, de manera más clara. Luego de este diagrama, la explicación dada es ambigua, ya que menciona a los "hombres de pelo castaño", debiendo mencionar a los hombres rubios, pues los cálculos siguientes están referidos a éstos y a la pregunta del problema.

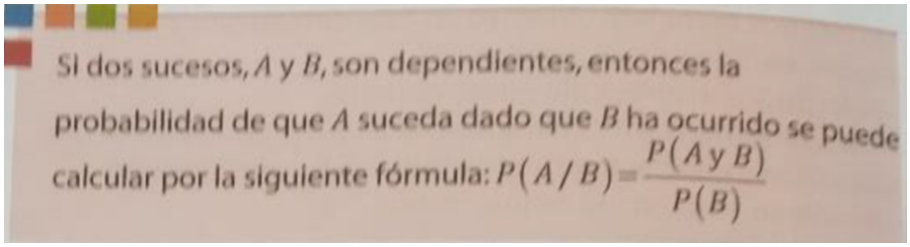
Con respecto a los cálculos de las probabilidades, se observa que allí se considera un lenguaje intuitivo condicional y conjuntista mediante el uso de las conjunciones "si" e "y", respectivamente, para indicar los sucesos involucrados. En vez de, optar por la simbología de letras mayúsculas para representar los sucesos, optan por describirlos en palabras. Es decir, los autores dan énfasis y exclusividad al lenguaje intuitivo (natural) para el tratamiento inicial del concepto en estudio.

Por otro lado, los autores hacen mención a la restricción que se debe hacer del espacio muestral, en este caso sólo a hombres. En base a esto, se plantean dos maneras de calcular la probabilidad condicional, la primera tiene relación con su concepción cardinal y la segunda tiene que ver con la definición formal del concepto, las cuales se presentan sin fundamentar la diferencia que existe entre ellas, sino más bien se consideran como métodos similares, lo que tiende a confusión.

Finalmente, se formaliza el concepto, el cual se muestra en la Figura 49 donde se puede apreciar al inicio, como los autores condicionan la definición a casos dependientes, excluyendo la relación que existe con el concepto de independencia.

Figura 49

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 3°


Si dos sucesos, A y B, son dependientes, entonces la probabilidad de que A suceda dado que B ha ocurrido se puede calcular por la siguiente fórmula: $P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 330), 2011, Cal y Canto.

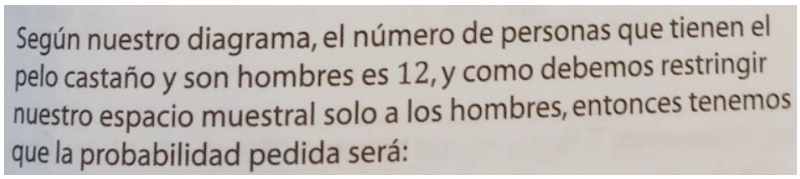
Por lo tanto, se observa la definición planteada como una proposición, la cual tiene como consecuencia la probabilidad condicional. Se combinan ambos lenguajes, intuitivo y algebraico, pero en el caso de este último se utiliza la conjunción "y" para representar la intersección entre los sucesos A y B, en vez de considerar el símbolo "∩", careciendo de formalización y clara interpretación de la fórmula. Sumado a esto, los autores no restringen la definición al cumplimiento de que la probabilidad del suceso condicionante sea mayor a cero, es decir, en este caso que $P(B) > 0$. También, no se indica el espacio muestral en el cual se define la probabilidad condicional.

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

En este texto 3°, no se observa el planteamiento de las propiedades elementales de la probabilidad condicional, a lo más se insinúan como en el caso del ejemplo inicial del concepto, donde se hace referencia a la restricción del espacio muestral, parte que se muestra en la Figura 50.

Figura 50

Propiedad implícita de la probabilidad condicional en el texto 3°


Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo castaño y son hombres es 12, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329), 2011, Cal y Canto.

Aquí se puede apreciar, la referencia que hacen los autores a la propiedad de la restricción del espacio muestral, mediante la frase:

> "y *como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres,…*" (p. 329)

Pero queda inconclusa, ya que no indica a qué conjunto queda reducido. A esto se suma, que luego no se formaliza como una propiedad básica de la probabilidad condicional.

Las demás propiedades descritas en el marco teórico, no se presentan en esta unidad del texto 3°, por ende, no se pueden presentar las descripciones.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

En base al tratamiento expuesto por los autores, se observa que no tratan la "relación causal" ni "relación diagnóstica" entre sucesos, pues no se plantea tanto en la introducción como en los ejemplos, preguntas que apunten a la relación entre estos como causa y efecto, o por lo menos, que impliquen un cuestionamiento causal. Sino más bien, se establece la relación de dependencia entre sucesos, lo que conduce a una concepción sesgada de la relación condicional, pues sólo se plantea en un sentido, es decir, como "relación causal" implícita, lo que lleva a la concepción errónea que plantea Gras y Totohasina

(1995) de creer que en la probabilidad condicional P(A/B) siempre el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.

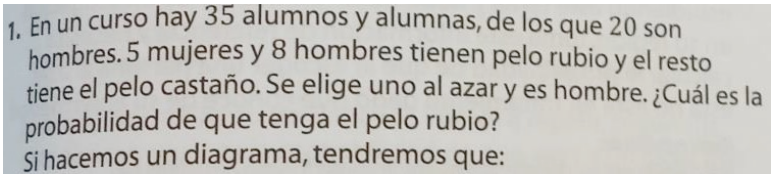
En la Figura 48, anteriormente mostrada, se puede apreciar como se establece el concepto de dependencia, haciendo hincapié en el sentido causa-efecto (relación causal), de manera implícita, mediante la siguiente frase:

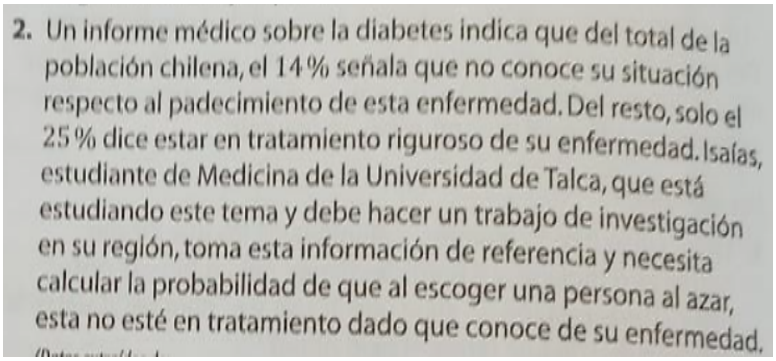
> *"En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo." (p. 329, texto 3°)*

Del mismo modo, en los ejemplos planteados se observa la "relación causal" entre los sucesos, donde se aprecia claramente el sentido de dependencia, donde la intención principal es relacionar este concepto con la condicionalidad y dejarlo establecido, más que plantear el cuestionamiento o indagar entre la relación causa-efecto o su inversa (relación diagnóstica), entre los sucesos.
En la Figura 51, se muestra el planteamiento de los dos primeros ejemplos que presenta el texto 3°, en el tratamiento del concepto, donde se aprecia el sentido de cada pregunta y la relación causal (dependencia) que se establece entre los sucesos.

Figura 51

Relación causal implícita en los ejemplos del concepto en el texto 3°


1. En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres. 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?
Si hacemos un diagrama, tendremos que:



2. Un informe médico sobre la diabetes indica que del total de la población chilena, el 14 % señala que no conoce su situación respecto al padecimiento de esta enfermedad. Del resto, solo el 25 % dice estar en tratamiento riguroso de su enfermedad. Isaías, estudiante de Medicina de la Universidad de Talca, que está estudiando este tema y debe hacer un trabajo de investigación en su región, toma esta información de referencia y necesita calcular la probabilidad de que al escoger una persona al azar, esta no esté en tratamiento dado que conoce de su enfermedad.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329 y 330), 2011, Cal y Canto.

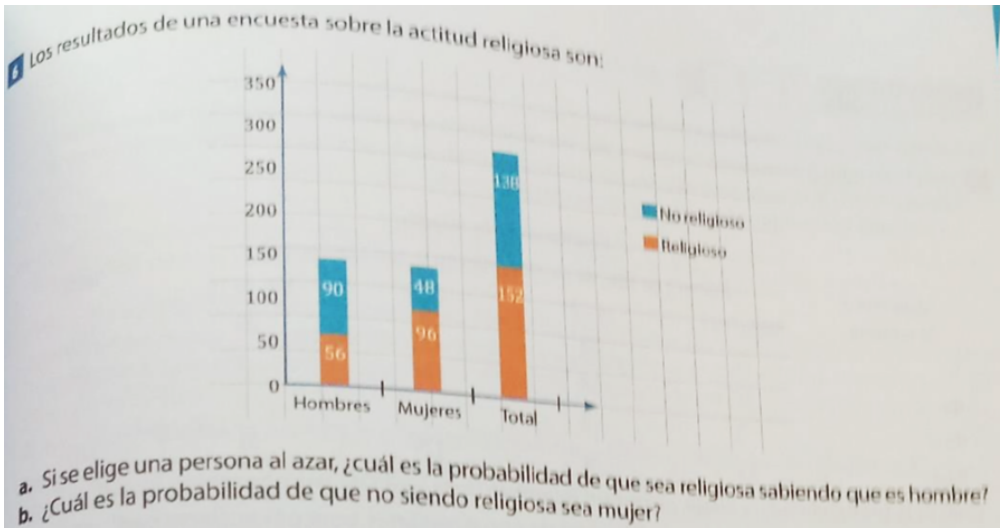
- **MTC4: Condicionalidad y Falacia del eje temporal**

Como se pudo observar y evidenciar en los campos anteriores, el tratamiento de la probabilidad condicional, está más bien, dirigido a la relación causal implícita entre los sucesos, es decir, está en base a la concepción de dependencia. Es por esto, que en los tres ejemplos planteados por los autores sólo se aprecia la relación causa-efecto y un orden temporal natural de los sucesos, es decir, el suceso condicionante ocurre posterior al suceso condicionado y no a la inversa.

Luego, siguiendo con la revisión de la unidad en la sección de ejercicios, se pudo hallar un problema, el cual se muestra en la Figura 52, donde se puede apreciar cierta relación con la “Falacia del eje temporal”, mediante el planteamiento de las preguntas.

Figura 52

Presencia implícita de la Falacia del eje temporal en el texto 3°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 333), 2011, Cal y Canto.

En este problema, al comparar ambas preguntas, se puede percibir, de cierta manera, que se invierte el orden temporal de los sucesos, ya que en la primera pregunta (a) se plantea el orden:

- *…que sea religiosa sabiendo que es hombre?*

En cambio, en la segunda pregunta (b) este orden se ve invertido, pero con respecto a la mujer, es decir:

- *…que no siendo religiosa sea mujer?*

Esta última indicación, se puede también interpretar como; *…que sea mujer sabiendo que no es religiosa?* De este modo, al comparar ambas preguntas se puede ver un cambio en el orden temporal de los sucesos, pues el problema así lo permite, a diferencia de los ejemplos planteados en el tratamiento del concepto. Si bien, no se invierte el orden temporal de la primera pregunta, es posible darse cuenta de que la segunda pregunta sí lo invierte, considerando a la "mujer" como

suceso condicionado, a diferencia de la primera pregunta, donde el “hombre” es el suceso condicionante.

Lo recién descrito, no conduce a un tratamiento de la “falacia del eje temporal”, ya que es sólo un ejercicio a resolver por el estudiante.

Los demás ejercicios, sólo están dirigidos a una relación causal implícita, que por lo visto, no implican un tratamiento de la “falacia del eje temporal” como apoyo a la comprensión del concepto en estudio.

En definitiva, se puede concluir que los autores no consideran esta dificultad de razonamiento de la “Falacia del eje temporal” como un recurso necesario para el tratamiento del concepto.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

Con respecto al espacio muestral, se observa en todo el tratamiento del concepto, que no se define ni se precisa el espacio en el cual se da cumplimiento a la probabilidad condicional. Pues sólo es posible deducir, mediante los datos utilizados en los ejemplos, que el espacio muestral puede ser continuo y discreto, ya que se utilizan porcentajes y luego estos se representan por una cantidad finita discreta. Por otro lado, se puede intuir que el espacio no requiere ser equiprobable. Pero estas deducciones dejan inconclusa la definición del espacio muestral, por lo tanto, no aseguran que el estudiante logre concluir e interpretar correctamente las características y condiciones del espacio.

Sumado a lo anterior, con respecto a la concepción cardinal de la probabilidad condicional, tampoco se hace mención a ella en ningún caso. Pues a través de los ejemplos y de la definición planteada, se puede percibir solamente el

planteamiento del concepto en términos de las probabilidades de la intersección y del suceso condicionante.

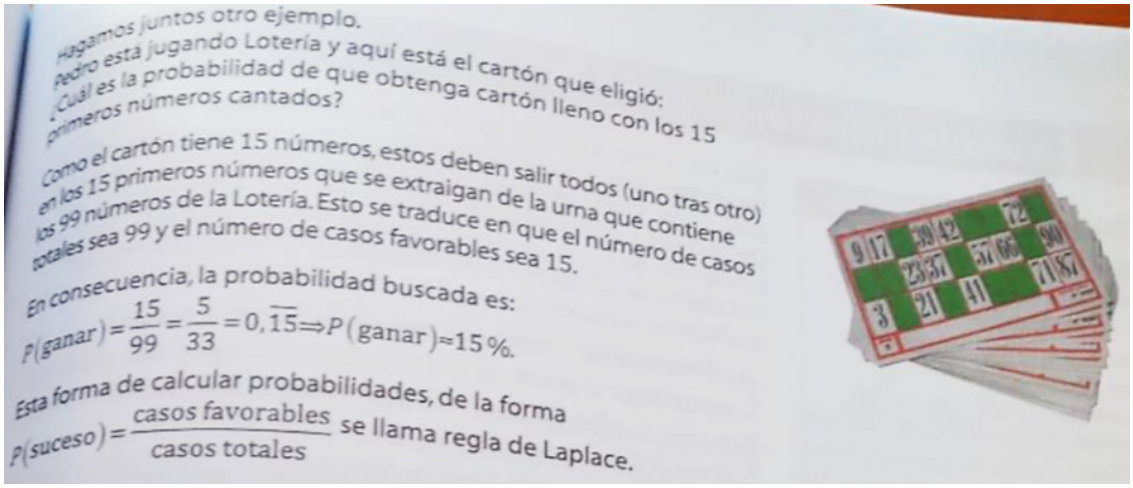
- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

A diferencia del texto 2°, donde se relacionan y comparan, de manera explícita y sistemática los tres conceptos de este campo; en el texto 3°, se tratan estos conceptos de manera separada, es decir, como una secuencia de contenidos a lo largo de la unidad, pero que no establecen un hilo conductor entre ellos ni tampoco alguna comparación que permita relacionar o diferenciar las características elementales entre estos conceptos, o sea, entre la probabilidad simple, probabilidad condicional y probabilidad conjunta.

De acuerdo a lo descrito, se muestran los registros de los tres conceptos que presenta el texto 3°, en el orden establecido por los autores. Comenzando por la Figura 53, donde se considera la probabilidad simple o marginal, específicamente, el segundo ejemplo como parte de su tratamiento intuitivo, el cual finaliza con la formalización del concepto mencionado.

Figura 53

Probabilidad simple como conocimiento previo en el texto 3°



Hagamos juntos otro ejemplo.
Pedro está jugando Lotería y aquí está el cartón que eligió:
¿Cuál es la probabilidad de que obtenga cartón lleno con los 15 primeros números cantados?

Como el cartón tiene 15 números, estos deben salir todos (uno tras otro) en los 15 primeros números que se extraigan de la urna que contiene los 99 números de la Lotería. Esto se traduce en que el número de casos totales sea 99 y el número de casos favorables sea 15.

En consecuencia, la probabilidad buscada es:

$$P(\text{ganar}) = \frac{15}{99} = \frac{5}{33} = 0,\overline{15} \Rightarrow P(\text{ganar}) \approx 15\,\%.$$

Esta forma de calcular probabilidades, de la forma

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

se llama regla de Laplace.

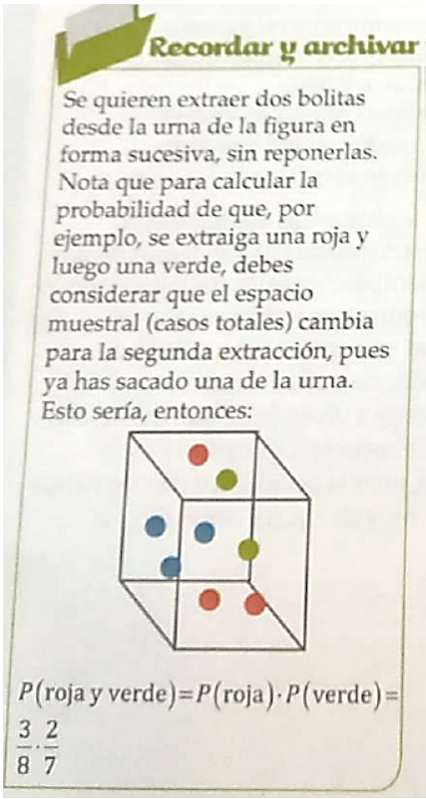
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 295), 2011, Cal y Canto.

Este concepto de probabilidad simple, es considerado en la sección de "conocimientos previos" de la unidad, a modo de recordar su aplicación, pero no con la intención de comparar o relacionar directamente con la probabilidad condicional.

Luego en la Figura 54, se muestra el ejemplo que exponen los autores como un recordatorio de la aplicación de la regla del producto (probabilidad conjunta), siendo la única referencia que hacen de esta regla general, a lo largo de toda la unidad. Por tanto, no se exhibe el contraste de este concepto con el de probabilidad condicional, sino más bien, se plantea para facilitar la comprensión del concepto de independencia, dando la posibilidad a la confusión entre probabilidad conjunta y condicional.

Figura 54

Única referencia a la probabilidad conjunta en el texto 3°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 320), 2011, Cal y Canto.

La única relación que se puede identificar, de manera excepcional, es el planteamiento de la probabilidad conjuntista en la fórmula de la probabilidad condicional, utilizando la conjunción “y”, en vez del símbolo de la intersección “∩ " como se mostró en los campos anteriores.

En definitiva, se puede decir que los autores no consideran el sesgo; *“confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta”,* pues no se observa que se establezca un contraste entre ambos conceptos, en especial, en el caso de la conjunción “y” en los enunciados de los problemas.

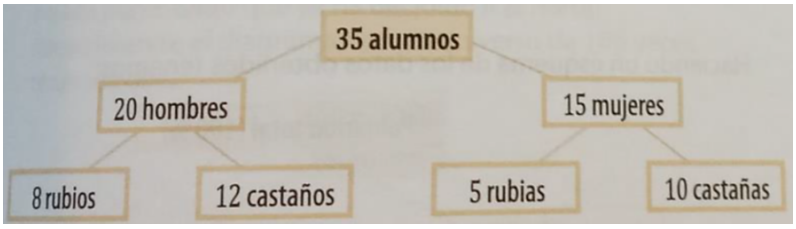
- **MTC7: Uso de representaciones de la probabilidad condicional**

Las representaciones que se identifican en el tratamiento del concepto, corresponden al lenguaje intuitivo, lenguaje algebraico y diagrama de árbol. Con respecto a las dos primeras, se describieron en gran parte en los campos anteriores, donde se pudo dar cuenta de lo predominante del lenguaje intuitivo tanto en los ejemplos como en la formalización del concepto.

Por otro lado, el uso del diagrama de árbol también es considerado, sin excepción, en los tres ejemplos expuestos por los autores, de los cuales dos de ellos se pasan a describir.

Figura 55

Diagrama de árbol en la introducción al concepto en el texto 3°



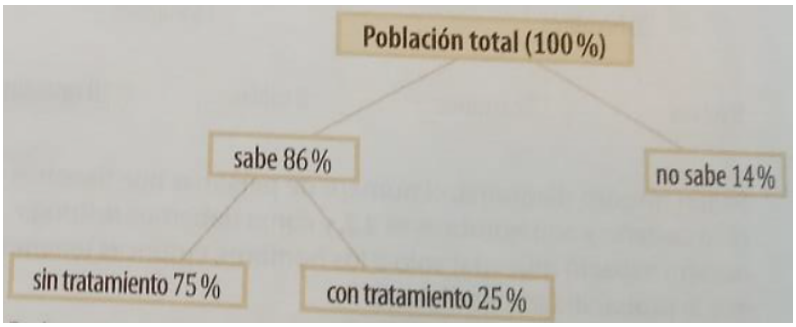
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 329), 2011, Cal y Canto.

En este diagrama de árbol, se organiza la información del primer ejemplo planteado de la introducción al concepto, el cual tiene relación con el color de pelo de los estudiantes de un curso. En este diagrama se puede observar la relación condicional entre los datos, siendo los sucesos condicionantes; los "hombres" y "mujeres", por separado, y los sucesos condicionados, aquellos referidos al "color de pelo". Con respecto a las ramas del diagrama, no se indican las probabilidades correspondientes a cada suceso.

En la Figura 56, se muestra el diagrama de árbol del segundo ejemplo que hace referencia al conocimiento o desconocimiento que posee un grupo personas, respecto al padecimiento de diabetes y si está o no con tratamiento.

Figura 56

Segundo diagrama de árbol en el tratamiento del concepto del texto 3°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 330), 2011, Cal y Canto.

En este segundo diagrama, se organiza la información al igual que en el diagrama anterior, pues se puede visualizar la condicionalidad entre los sucesos, especialmente, en el caso de las personas que saben de su enfermedad, pues ahí el suceso condicionante es “sabe” y los condicionados por este son, “sin tratamiento” y “con tratamiento”. Pero en el caso de los que “no saben”, está faltando la rama que se desprende de este suceso con la información correspondiente, es decir, “sin tratamiento 100%”.

En resumen, las representaciones consideradas para el tratamiento del concepto son las mencionadas anteriormente. Otras representaciones como gráficos de barra, diagramas de conjuntos y tablas de frecuencia sólo es posible encontrar en las actividades propuestas del texto. Por lo tanto, estas no se consideran para el tratamiento de la probabilidad condicional.

4.2.4.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 4°.

Cabe mencionar, que si bien este texto 4° corresponde a los mismos autores del texto 3°, con bastante similitud en las características físicas; es considerado como primera edición, ya que posee cambios sustanciales en comparación con la edición del texto 3°.

- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática 3° medio
Tipo: Texto del estudiante
Curso: 3° educación media
Periodo: 2013 - 2014

- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: Primera edición
Publicación: 2012 - 12 - 03
Editorial: Cal y Canto Ltda.

- **MCG3: Datos de Autoría**

En Tabla 4.17 se organiza y describe la información de este campo.

Tabla 4.17.

Datos de autoría del texto 4°

Autor	Grados académicos	Universidad de procedencia	Obras

Olga Saiz Maregatti	- Profesora de Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile, 1993	- ¡Eureka! Matemáticas 1, 2 y 3, editorial Castillo (Cuadernos de trabajo para secundaria) - Texto del estudiante 3° medio, 2011 y 2012.
Viktor Blumenthal Gottlieb	- Licenciado en Ciencias, mención Matemática	Pontificia Universidad Católica de Chile	- Matemáticas 3, editorial Castillo (Cuaderno de proyectos y actividades) - Texto del estudiante 3° medio, 2011 y 2012.

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 496 páginas cuyas dimensiones son de 27 x 21 cm

- **MCG5: ISBN**

ISBN 978-956-339-060-5

4.2.4.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 4°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

La Tabla 4.18 describe la distribución y organización temática del texto 4°.

Tabla 4.18.

Estructura temática del texto 4°

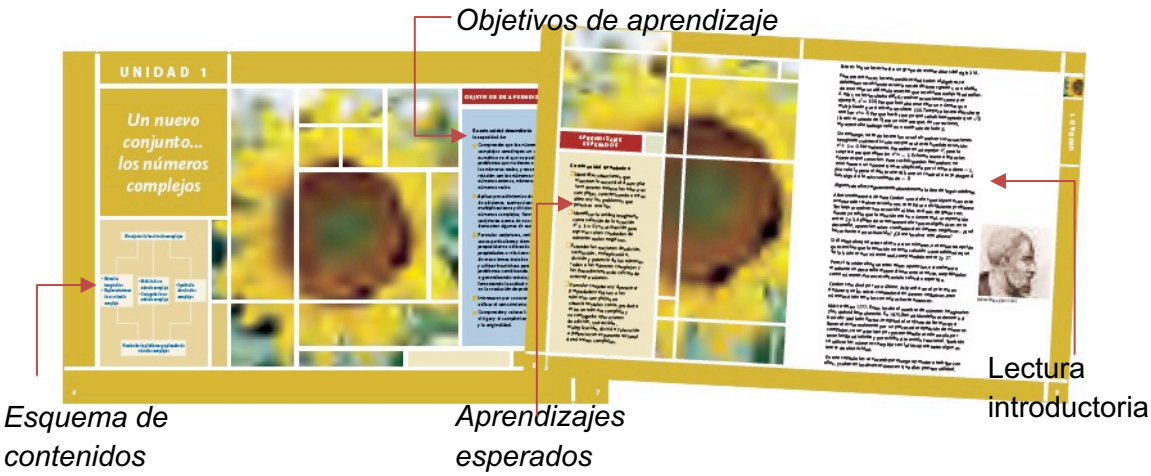
Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	Cierre del texto
- N° unidad - Título - Esquema de contenidos - Objetivos de aprendizaje - Aprendizajes esperados - Lectura introductoria	- Conocimientos previos - Presentación y desarrollo de contenidos - Formalización de conceptos - Ejercicios misceláneos (individual y grupal) - Actividad de metacognición (revisión de lo aprendido)	- Ejercicios de refuerzo (individual y grupal) - Taller grupal - Evaluación de la unidad - Autoevaluación de aprendizaje - Evaluación de síntesis	- Solucionario - Índice temático - Glosario - Bibliografía

Al comparar la estructura temática de este texto 4° con el texto 3°, se evidencia en gran parte, que siguen la misma organización de los contenidos. Las modificaciones estructurales, se pueden apreciar principalmente en el inicio de la unidad, donde en este último texto no se considera mostrar los contenidos a tratar, los objetivos se resumen a “Objetivos de aprendizaje” y en vez de una historieta, se opta por un texto más formal y de contenido. Otra modificación sustentable, es la incorporación de un “Glosario”, el cual no estaba contemplado en el texto anterior (texto 3°).

En la Figura 57, se puede visualizar la estructura temática del inicio de cada unidad del texto 4°, la cual pretende entregar una visión global de lo que se va a tratar en cada unidad, al igual como se evidenció en el texto 3°.

Figura 57

Estructura temática del inicio de unidad en el texto 4°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 2), 2012, Cal y Canto.

Esta imagen la presenta el texto, también para mostrar su estructura temática. Se evidencia, que se sigue contemplando cuatro páginas para el inicio de cada unidad.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

Tabla 4.19.

Organización de las unidades y contenidos del texto 4°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas
1	Un nuevo conjunto… los números complejos	- Números imaginarios - Números complejos - División de números complejos y las propiedades de las operaciones en C	06 – 73

		- Módulo y conjugado de un complejo - Representación gráfica, mediante vectores	
2	Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática	- Concepto de ecuación cuadrática - Tipos de ecuaciones cuadráticas y métodos de resolución - Concepto de función cuadrática - Análisis de la función cuadrática - Problemas de aplicación a la vida diaria	74 – 149
3	Plano cartesiano y Homotecia… un nuevo paso en geometría	- Plano cartesiano y sus elementos - Distancia entre dos puntos y sus aplicaciones - Homotecia - Aplicaciones de la homotecia	156 - 235
4	Rectas en el plano… una mirada analítica	- Ecuación de una recta - Pendiente y coeficiente de posición - Rectas y soluciones de sistemas de ecuaciones	240 – 316
5	Probabilidad y estadística… una mirada con mayor profundidad	- Sucesos dependientes… probabilidad condicionada - Función de probabilidad y función de distribución - Gráfica de función de distribución	320 - 398

	- Esperanza, varianza y desviación estándar de una función de distribución - Distribución binomial

La cantidad de páginas utilizadas en total para la unidad 5, “Probabilidad y estadística…”, es de 78 páginas, un poco más que las utilizadas por el texto 3°, pues en este se ocuparon 61 páginas. En otras palabras, en el texto 4° se ocupan 17 páginas más que el texto anterior.

En la Tabla 4.20, se describe la organización temática de la unidad de probabilidades del texto 4°, considerando los contenidos a tratar, en paralelo, con los aprendizajes esperados que presenta el texto al inicio de la unidad, los cuales son en realidad una adecuación de los contenidos mínimos obligatorios que establece el marco curricular 2009.

Tabla 4.20.

Organización temática de la unidad de probabilidades del texto 4°

N°/ Título unidad	Secciones / Contenidos	Aprendizajes esperados	Páginas

5 Probabilidad y estadística… una mirada con mayor profundidad	• Conocimientos previos		324 – 330
	• Sucesos dependientes… probabilidad condicionada	• Resolver problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades	331 – 337
	• Función de probabilidad y función de distribución • Gráfica de función de distribución	• Utilizar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecer la relación existente con la función de distribución.	338 – 342 349 – 352
	• Esperanza, varianza y desviación estándar de una función de distribución	• Aplicar e interpretar los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta. • Determinar la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones.	343 – 352
	• Distribución binomial	• Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos	353 – 367

	aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales. • Usar el modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno.	
➢ Ejercicios de refuerzo (individual y grupal) ➢ Taller grupal ➢ Evaluación de la unidad ➢ Autoevaluación de aprendizaje		368 – 398

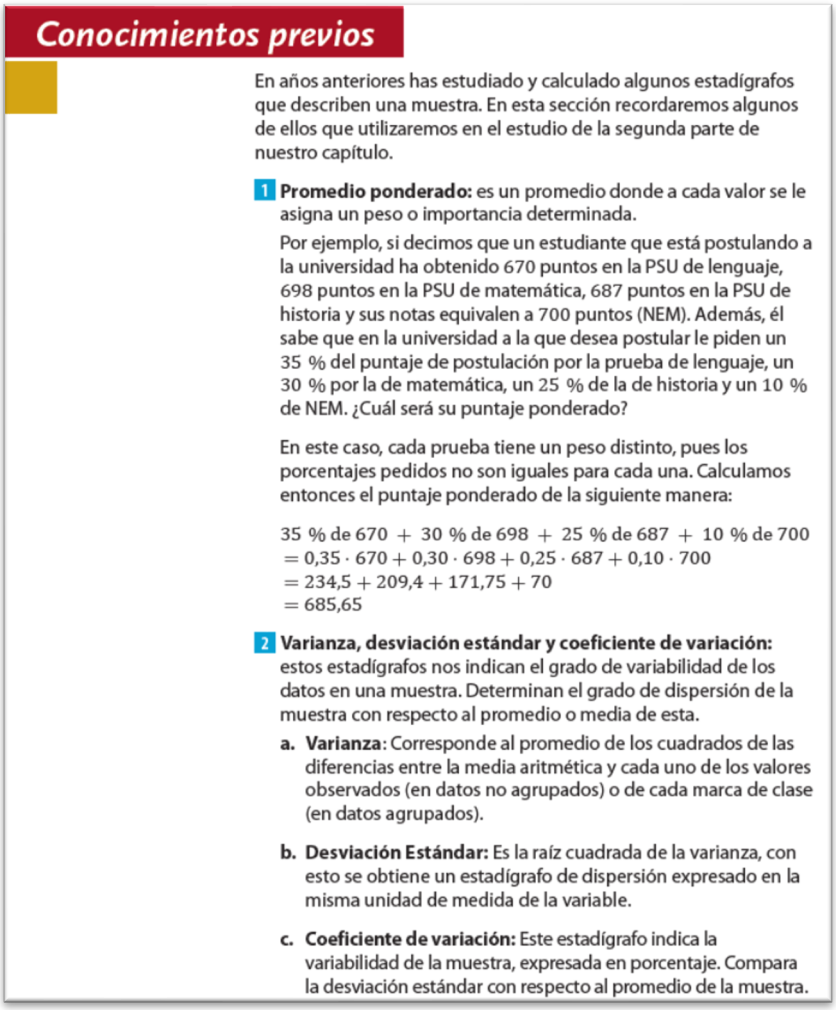
Al comparar esta tabla con la tabla 4.15 del texto 3°, se pueden apreciar ajustes en los contenidos, siendo algunos de ellos; el considerar la probabilidad condicional como primer contenido a tratar, incorporar la función de probabilidad y la función de distribución, la distribución binomial y los conceptos de valor esperado. A cambio, de quitar otros como; la probabilidad experimental y teórica, la Ley de los Grandes Números, entre otros, descritos anteriormente en el texto 3°

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

En la sección, “Conocimientos previos”, sólo se consideran aquellos conceptos necesarios para el estudio de la variable aleatoria y sus medidas de dispersión como la varianza, esperanza y desviación estándar. En la Figura 58, se muestra la sección mencionada, a modo de evidenciar en ella la ausencia de los conocimientos previos para la probabilidad condicional.

Figura 58

Sección conocimientos previos de la unidad de probabilidades en el texto 4°



Conocimientos previos

En años anteriores has estudiado y calculado algunos estadígrafos que describen una muestra. En esta sección recordaremos algunos de ellos que utilizaremos en el estudio de la segunda parte de nuestro capítulo.

1 **Promedio ponderado:** es un promedio donde a cada valor se le asigna un peso o importancia determinada.

Por ejemplo, si decimos que un estudiante que está postulando a la universidad ha obtenido 670 puntos en la PSU de lenguaje, 698 puntos en la PSU de matemática, 687 puntos en la PSU de historia y sus notas equivalen a 700 puntos (NEM). Además, él sabe que en la universidad a la que desea postular le piden un 35 % del puntaje de postulación por la prueba de lenguaje, un 30 % por la de matemática, un 25 % de la de historia y un 10 % de NEM. ¿Cuál será su puntaje ponderado?

En este caso, cada prueba tiene un peso distinto, pues los porcentajes pedidos no son iguales para cada una. Calculamos entonces el puntaje ponderado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &35\ \%\text{ de }670\ +\ 30\ \%\text{ de }698\ +\ 25\ \%\text{ de }687\ +\ 10\ \%\text{ de }700 \\ &= 0{,}35 \cdot 670 + 0{,}30 \cdot 698 + 0{,}25 \cdot 687 + 0{,}10 \cdot 700 \\ &= 234{,}5 + 209{,}4 + 171{,}75 + 70 \\ &= 685{,}65 \end{aligned}$$

2 **Varianza, desviación estándar y coeficiente de variación:** estos estadígrafos nos indican el grado de variabilidad de los datos en una muestra. Determinan el grado de dispersión de la muestra con respecto al promedio o media de esta.

a. **Varianza**: Corresponde al promedio de los cuadrados de las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los valores observados (en datos no agrupados) o de cada marca de clase (en datos agrupados).

b. **Desviación Estándar:** Es la raíz cuadrada de la varianza, con esto se obtiene un estadígrafo de dispersión expresado en la misma unidad de medida de la variable.

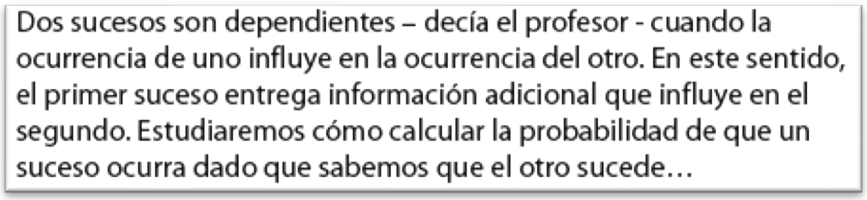
c. **Coeficiente de variación:** Este estadígrafo indica la variabilidad de la muestra, expresada en porcentaje. Compara la desviación estándar con respecto al promedio de la muestra.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 324), 2012, Cal y Canto.

Por otro lado, en la sección correspondiente al tratamiento de la probabilidad condicional, se identifican solamente dos conocimientos previos, los cuales se optan por mostrar en las Figuras 59 y 60, ya que no requieren ser resumidos en una tabla por ser sólo dos los conceptos.

Figura 59

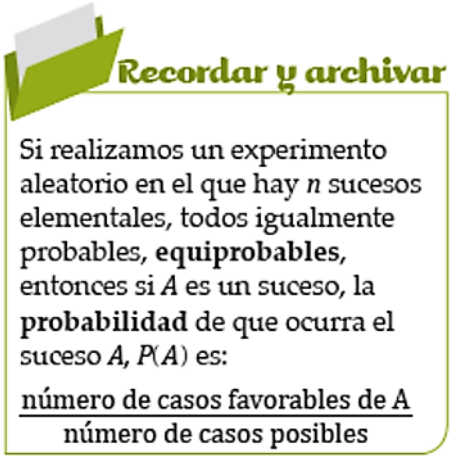
Dependencia como conocimiento previo de la probabilidad condicional texto 4°


Dos sucesos son dependientes – decía el profesor - cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo. Estudiaremos cómo calcular la probabilidad de que un suceso ocurra dado que sabemos que el otro sucede…

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 331), 2012, Cal y Canto.

Figura 60

Regla de Laplace como conocimiento previo de la probabilidad condicional



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2012, Cal y Canto.

Esta definición corresponde a la regla de Laplace, la cual está planteada correctamente, pues plantea las condiciones del espacio muestral para el cumplimiento de la regla de la probabilidad y especifica, además, como el "número de casos…".

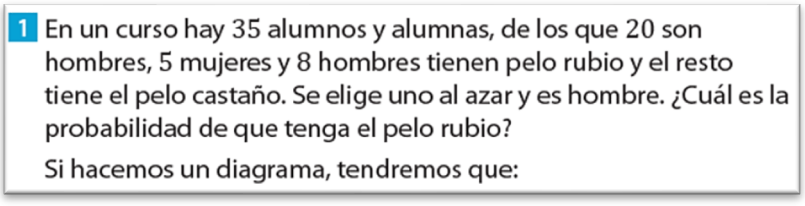
En resumen, son sólo estos dos conceptos los que se indican como conocimientos previos para la probabilidad condicional, haciendo a lo más una mención de ellos como recordatorio para el estudiante sin plantear una ejercitación al respecto. Consecuencia de esto, se aprecia una ausencia de los conocimientos claves y necesarios para iniciar el estudio de la probabilidad condicional, entre ellos, los tipos de espacios muestrales, la unión e intersección de dos sucesos, por mencionar algunos.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

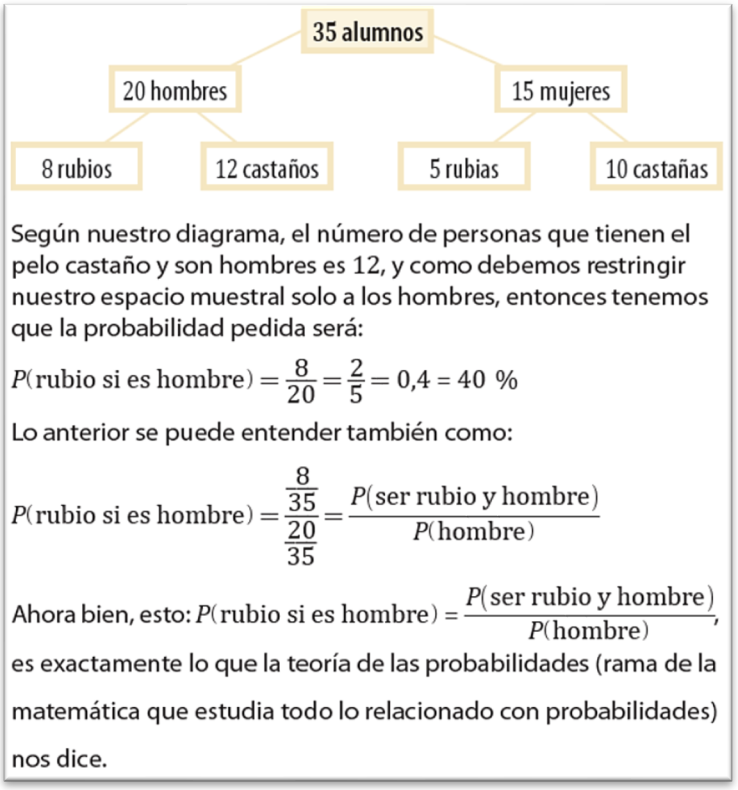
Se inicia la presentación del concepto, manteniendo la misma idea del texto 3°, es decir, mediante un relato con un contexto no probabilístico, sino más bien un diálogo entre jóvenes con la intención de familiarizarse con la idiosincrasia del estudiante. Seguido de esto, los autores consideran el mismo ejemplo presentado en el texto 3° para ejemplificar la probabilidad condicional, el cual se muestra nuevamente en la Figura 61, pero en esta oportunidad se exhibe en su totalidad.

Figura 61

Presentación inicial de la probabilidad condicional en el texto 4°


1 En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres, 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?

Si hacemos un diagrama, tendremos que:



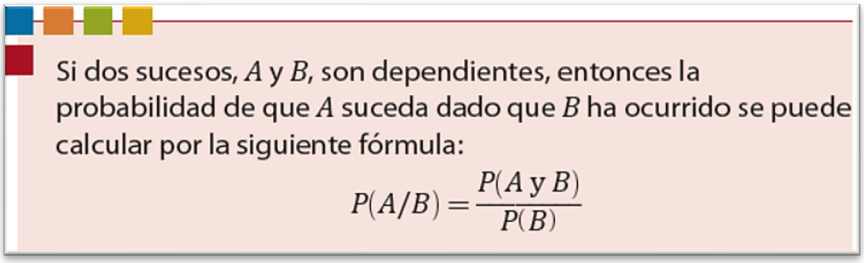
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 331 y 332), 2012, Cal y Canto.

Por lo tanto, como se presenta aquí el mismo ejemplo del texto 3°, antes de la formalización del concepto y del cual ya se hizo la descripción correspondiente en el campo MCO4 del apartado 4.2.3.2. Entonces, sólo queda por enfatizar que los autores prescinden de la notación algebraica dando prioridad al lenguaje intuitivo (común) en el planteamiento de las probabilidades.

En la Figura 62, se muestra la formalización del concepto en estudio, siendo la misma que se presentó en el texto 3°.

Figura 62

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 4°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2012, Cal y Canto.

Al igual que en la descripción anterior, esta formalización ya fue descrita en el texto 3°, por ende, se vuelve a reiterar que esta generalización inicia con la condición; *Si dos sucesos A y B son dependientes, entonces…* es posible calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$. Pero esto, conduce a la concepción errónea, que para sucesos independientes n se puede aplicar la fórmula, lo que lleva a una incorrecta interpretación. A esto se suma, el uso de la conjunción "*y*" para expresar la probabilidad conjunta desplazando la intersección como notación elemental, y por último, no se restringe la probabilidad del suceso condicionante "B" como $P(B) > 0$.

Cabe mencionar, que el uso de la simbología para expresar probabilidad condicional, no es utilizado en el tratamiento del concepto ni se hace referencia a él, pero luego en los ejercicios propuestos de más adelante, se incorpora la simbología; intersección " ∩ " y condición "/", sin hacer referencia o recuerdo previo a su lectura e interpretación como lenguaje probabilístico. Lo que no genera un hilo conductor entre el lenguaje intuitivo o natural y el lenguaje simbólico o formal.

En resumen, los autores presentan la probabilidad condicional al inicio de la unidad sin anteponer conocimientos previos para el concepto, a excepción, de los dos mencionados anteriormente, en los cuales no se enfatiza. De esto, se puede deducir que los autores restringen la comprensión del concepto, considerando además el mismo tratamiento del texto 3° sin hacer mejoras para este texto 4°.

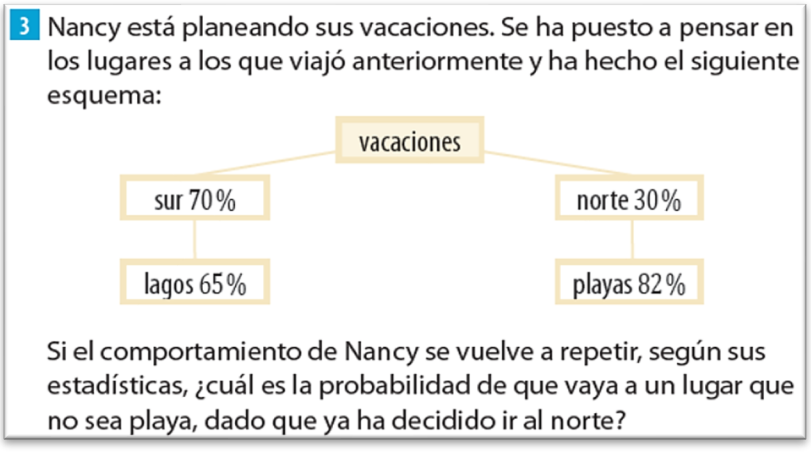
- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

Al igual que en el campo anterior, los autores mantienen los mismos ejemplos del texto 3°, por lo tanto, se evidencian las mismas articulaciones descritas en aquel texto. Es decir, que la probabilidad se articula con el concepto de "*sucesos dependientes*" y el cálculo de porcentajes.

En esta ocasión, se escoge otro ejemplo diferente al escogido en el texto 3°, el cual se muestra en la Figura 63.

Figura 63

Articulación de la probabilidad condicional con porcentajes, en el texto 4°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 333), 2012, Cal y Canto.

4.2.4.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 4°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

Con respecto al concepto de "sucesos independientes", no es posible presentar descripciones al respecto, ya que no se incorpora en el texto a diferencia del texto 3°, en el cual sí se considera como conocimiento previo a la probabilidad condicional. De esto, se puede decir que los autores desarticulan ambos conceptos, apuntando sólo a una parte del concepto en estudio, lo que implica una comprensión sesgada del mismo.

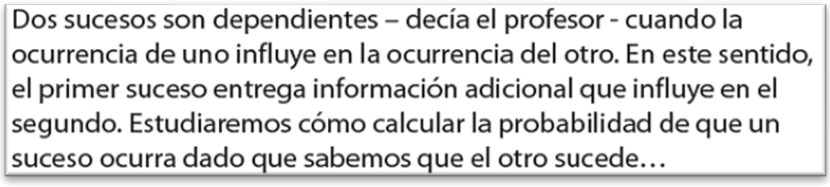
- Probabilidad condicional

En este texto 4°, si bien los autores mantienen, en general, la estructura y metodología del texto 3°, se puede apreciar en la introducción al concepto (el relato) que se incorpora, en esta ocasión, sólo la definición intuitiva de "sucesos dependientes", quitando la proposición impuesta en el texto anterior (*Un suceso depende de otro, entonces, probabilidad condicionada*).

En la Figura 64, se muestra el tratamiento intuitivo con el cual se da inicio al concepto de probabilidad condicional, de manera implícita.

Figura 64

Acercamiento intuitivo del concepto de probabilidad condicional en el texto 4°


Dos sucesos son dependientes – decía el profesor - cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo. Estudiaremos cómo calcular la probabilidad de que un suceso ocurra dado que sabemos que el otro sucede…

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 331), 2012, Cal y Canto.

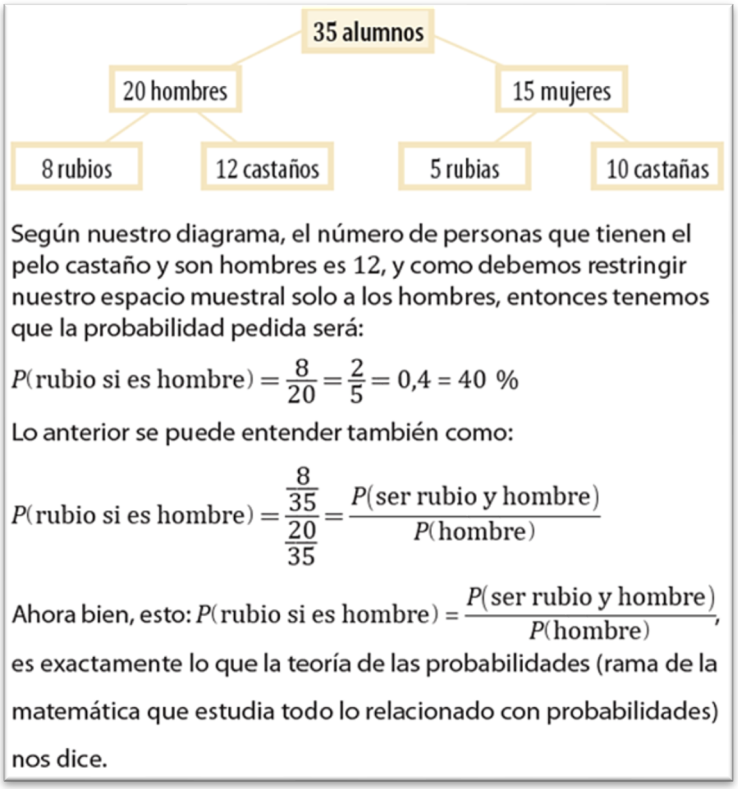
En este planteamiento intuitivo de la probabilidad condicional, se observa como los autores la insinúan y relacionan con el concepto de dependencia sin necesidad de explicitarla.

Luego se plantea un primer ejemplo, el mismo descrito en el texto 3°, el cual ya se mostró completo en el campo MCO4, del apartado anterior.

En la Figura 65, se muestra nuevamente el ejemplo, pero sólo considerando el desarrollo de este, con la intención de recordar y evidenciar que se propone un tratamiento inductivo e intuitivo del concepto.

Figura 65

Tratamiento intuitivo del concepto de probabilidad condicional en el texto 4°



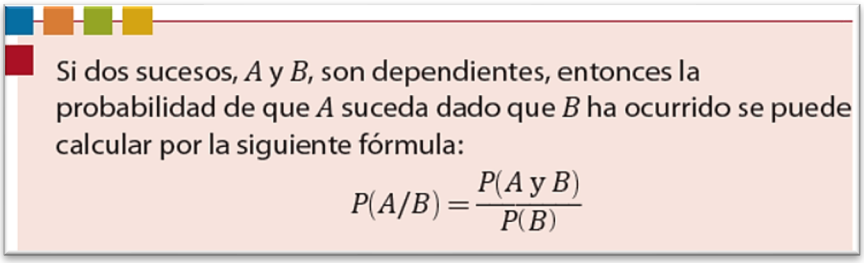
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2012, Cal y Canto.

Se observa primero, de manera implícita, la concepción cardinal de la probabilidad condicional, al considerar el cálculo de esta en términos de las posibilidades de los sucesos. Y segundo, se aprecia nuevamente el cálculo, pero en términos de las probabilidades de los sucesos, lo que conduce a la formalización del concepto en estudio.

Para no reiterar las descripciones, se pueden consultar en el campo MTC1 del apartado 4.2.3.3 (texto 3°).

Finalmente, se formaliza el concepto, mediante el mismo planteamiento que el texto 3°, el cual se mostró anteriormente en la Figura 54, donde se puede apreciar la misma intención de los autores; condicionar la definición a casos dependientes, excluyendo la relación que existe entre probabilidad condicional y el concepto de independencia. Se presenta nuevamente la imagen con la formalización del concepto, por ende, no se enumera la figura. Esto, con la intención de apoyar las descripciones que se realizan al respecto.

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 4°


Si dos sucesos, A y B, son dependientes, entonces la probabilidad de que A suceda dado que B ha ocurrido se puede calcular por la siguiente fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Por ser la misma definición que el texto 3°, se plantean las mismas descripciones sobre la definición planteada, es decir, como una proposición, la cual tiene como consecuencia la probabilidad condicional. Se combinan ambos lenguajes, intuitivo y algebraico, pero en el caso de este último se utiliza la conjunción "y" para representar la intersección entre los sucesos A y B, en vez de considerar el

símbolo "∩", careciendo de formalización y clara interpretación de la fórmula. Nuevamente, no se restringe la definición al cumplimiento de la probabilidad del suceso condicionante, $P(B) > 0$ y también, no se indica el espacio muestral en el cual se define la probabilidad condicional.

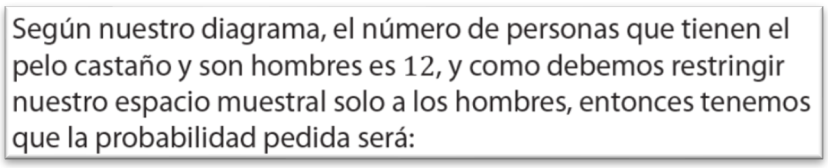
Cabe mencionar que los autores, luego de finalizar el tratamiento de la probabilidad condicional, continúan el diálogo presentado al inicio para dar término a la situación planteada, pero que no pone en contexto al contenido sino más bien, es para familiarizarse con el estudiante.

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

En este texto 4°, al igual que en el texto 3°, no se observa el planteamiento de las propiedades elementales de la probabilidad condicional, pues se plantea la misma propuesta de información y metodología del texto anterior (3°), con respecto al tratamiento del concepto. Por lo tanto, se encuentra nuevamente con la mención a la restricción del espacio muestral, del ejemplo planteado inicialmente, la cual se muestra en la Figura 66, pero obtenida del texto 4°.

Figura 66

Propiedad implícita de la probabilidad condicional en el texto 4°


Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo castaño y son hombres es 12, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2012, Cal y Canto.

De lo anterior expuesto, se puede concluir que los autores vuelven a no considerar las propiedades básicas de la probabilidad condicional, por ende, no

se aprecian mejoras sustanciales para esta sección del texto 4°, desde lo tratado en el texto 3°.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

Nuevamente, los autores consideran la misma propuesta del texto 3° con respecto a la presentación de la información y la metodología utilizada, es decir, no realizan cambios ni mejoras sustanciales con respecto al tratamiento de los sucesos de la probabilidad condicional, para el texto 4°, específicamente, con las relaciones "causal y diagnóstica". Por lo tanto, las descripciones para este campo se reiteran con respecto a las realizadas en el texto 3°, las cuales indican, que los autores consideran sólo una "relación causal implícita" entre los sucesos, lo que promueve a la confusión de creer que siempre el suceso condicionante es la causa y el condicionado la consecuencia.

Por lo anterior expuesto, se asumen las mismas descripciones realizadas en el campo MTC3 del texto 3°, ya que se observa la misma información y tratamiento del concepto que en este texto 4°. Por lo tanto, no se escriben nuevamente las observaciones para evitar redundar en las mismas, invitando al lector a consultar el apartado 4.2.3.3 del texto 3°, para la descripción de este campo.

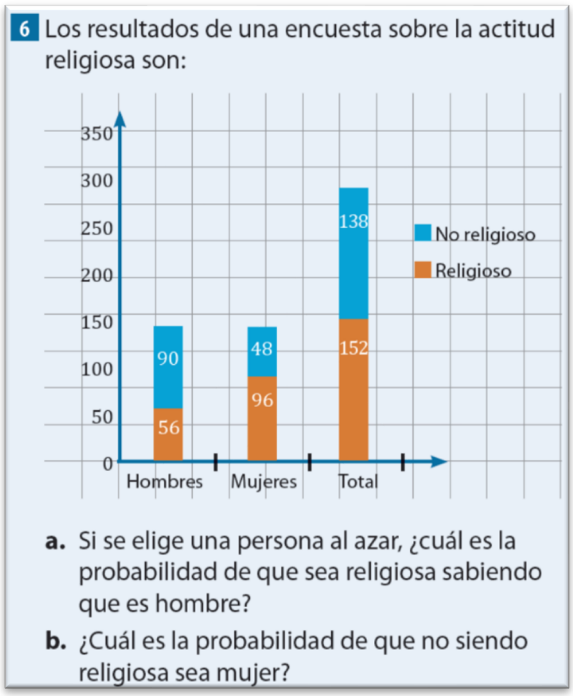
- **MTC4: Condicionalidad y Falacia del eje temporal**

Al igual que el campo anterior, también aquí se reiteran las descripciones del texto 3°, pues como se pudo evidenciar, la información y el tratamiento del concepto son los mismos para el texto 4°, por ende, no se observa la incorporación de otros conceptos o mejoras que apunten a la "Falacia del eje temporal". Por lo tanto, los autores reiteran el planteamiento para este texto 4°, el cual enfatiza en la "relación causal" como único tratamiento y concepción de la probabilidad condicional.

A modo de evidencia, se presenta en la Figura 67, el mismo problema exhibido en el texto 3°, el cual se identifica como la única instancia en donde se puede apreciar cierta consideración a la "Falacia del eje temporal".

Figura 67

Única instancia donde se presenta la Falacia del eje temporal en el texto 4°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 335), 2012, Cal y Canto.

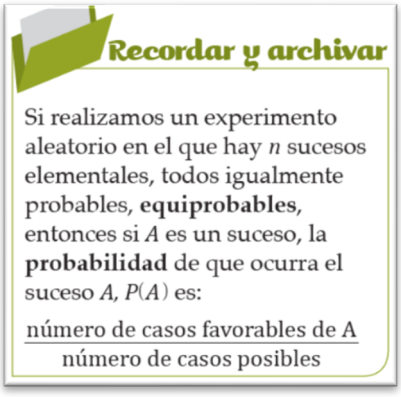
Como este problema ya fue descrito en el texto 3°, sólo cabe reiterar que al comparar ambas preguntas, es posible apreciar el orden temporal invertido de los sucesos, por lo tanto, en este problema se considera de manera implícita la intención del razonamiento condicional con respecto a la falacia del eje temporal.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

Se observa nuevamente, como en el texto 3°, que el espacio muestral no se define ni se precisa en el tratamiento ni en la formalización del concepto, en este texto 4°, debido al mismo planteamiento del tratamiento del concepto, por lo tanto, se consideran las mismas descripciones realizadas en este campo, pero del texto 3°, las cuales indican mediante los datos de los ejemplos planteados, que el espacio muestral puede ser continuo o discreto, pero esta concepción más bien hay que deducirla. A esto, el texto 4° incorpora en forma paralela a la formalización del concepto de probabilidad condicional, un recuadro como recordatorio de la Regla de Laplace, el cual se muestra en la Figura 68, de donde se puede deducir; la incidencia que puede tener la definición del espacio muestral (finito y equiprobable) sobre la definición del espacio de la probabilidad condicional.

Figura 68

Regla de Laplace como apoyo a la formalización del concepto, en el texto 4 °



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 335), 2012, Cal y Canto.

La intención del recuadro, es recordar la “Regla de Laplace” y compararla con la formalización de la probabilidad condicional. De este modo, es posible observar la definición del espacio muestral de esta regla, sin establecer relación con el

espacio de la probabilidad condicional, dejando abierta la posibilidad a creer que el espacio muestral de la probabilidad condicional debe ser, igualmente, finito y equiprobable. Lo que llevaría a la *concepción cardinal* del concepto y no a su concepción en términos de las probabilidades.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

No se presencia un tratamiento que compare y relacione las características entre la probabilidad condicional, simple y conjunta, donde se considere la confusión de creer que "la probabilidad condicional es lo mismo que la probabilidad conjunta", como mejora a la interpretación del concepto, sobre todo en los planteamientos de los enunciados. Lo que se observa al respecto, es solamente el uso de la conjunción "y" para expresar la probabilidad conjunta en la igualdad de la fórmula de la probabilidad condicional, pero no se fundamenta ni se hace referencia a ello. En la Figura 69, se muestra esta descripción.

Figura 69

Referencia única e implícita de la probabilidad conjunta en el texto 4°

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$$

Ahora bien, esto: $P(\text{rubio si es hombre}) = \dfrac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$,

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2012, Cal y Canto.

Con respecto a la probabilidad simple, a diferencia del texto 3°, la cual se presenta en la sección de conocimientos previos; aquí en el texto 4° no se considera como un contenido previo ni se asigna un espacio en el texto para tratarla, sino más bien se incorpora como un recordatorio a su definición, recuadro que se describió en el campo anterior y se muestra en la Figura 68.

En resumen, en este texto 4° los autores no presentan el contenido de la probabilidad conjunta (probabilidad de la intersección), por ende, no se establece un contraste o relación alguna con la probabilidad condicional, a excepción de la notación utilizada en la fórmula, descrita anteriormente. Del mismo modo, ocurre con la probabilidad simple, ya que sólo se hace mención a esta, mediante un recordatorio de su definición, pero no se profundiza en la relación con la probabilidad condicional. En consecuencia, los sesgos de razonamiento relacionados con la confusión entre probabilidad condicional y conjunta, no se consideran en este texto y por lo tanto, posibilitan su existencia en la comprensión de los y las estudiantes.

- **MTC7: Uso de representaciones de la probabilidad condicional**

Las representaciones en este texto 4°, también son las mismas que el texto 3°, pues por todo lo descrito anteriormente, se evidencia su reiteración aquí en el tratamiento del concepto, por lo tanto, corresponden al lenguaje intuitivo, lenguaje algebraico y diagrama de árbol. Como son los mismos ejemplos que el texto 3°, las descripciones son las mismas, por lo que se pueden consultar en el campo MTC7 del texto anterior.

4.2.5.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 5°.

Antes de continuar con las descripciones de los campos, se debe tener en cuenta que el presente texto es una reedición del texto anterior, por lo que se evidencia, al hacer la revisión exhaustiva del texto 5° y compararla con la exhibida en el texto 4°; que se mantiene la misma estructura, presentación y tratamiento de los contenidos, con variaciones no sustanciales. Por esta razón, se decide en algunos campos, no presentar las descripciones correspondientes, ya que se estarían reiterando por segunda e incluso tercera vez, las descripciones de los textos 3° y 4°. Sólo se presentará la información, en aquellos campos que

ameriten nuevas descripciones, por el contrario, se sugerirá consultar la información en los textos respectivos. Por último, mencionar que este texto 5° abarca un periodo de 5 años de vigencia en la educación media, es decir, de 2015 a 2019 sin cambios ni mejoras.

- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática 3° medio

Tipo: Texto del estudiante

Curso: 3° educación media

Periodo: 2015 - 2019

- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: 4ta Reedición

Publicación: 2015 - 03 - 02

Editorial: Cal y Canto Ltda.

- **MCG3: Datos de Autoría**

Como se mencionó al inicio de este apartado, este es uno de los campos donde se reitera la información del texto 3° y 4°, correspondiente a los mismos autores,

sin evidenciar cambios sustanciales en sus datos. Por esta razón, se sugiere consultar las descripciones en el apartado 4.2.4.1, en el campo MCG3, del texto 4°.

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 496 páginas cuyas dimensiones son de 27 x 21 cm

- **MCG5: ISBN**

ISBN 978-956-339-171-8

4.2.5.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 5°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

La Tabla 4.21 describe la distribución y organización temática del texto 5°.

Tabla 4.21.

Estructura temática del texto 5°

Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	*Cierre del texto
- N° unidad - Título - Esquema de contenidos - Aprendizajes esperados - Lectura introductoria	- Conocimientos previos - Presentación y desarrollo de contenidos - Formalización de conceptos - Ejercicios misceláneos (individual y grupal)	- Ejercicios de refuerzo (individual y grupal) - Taller - Evaluación de la unidad	- Solucionario - Índice temático - Glosario - Bibliografía

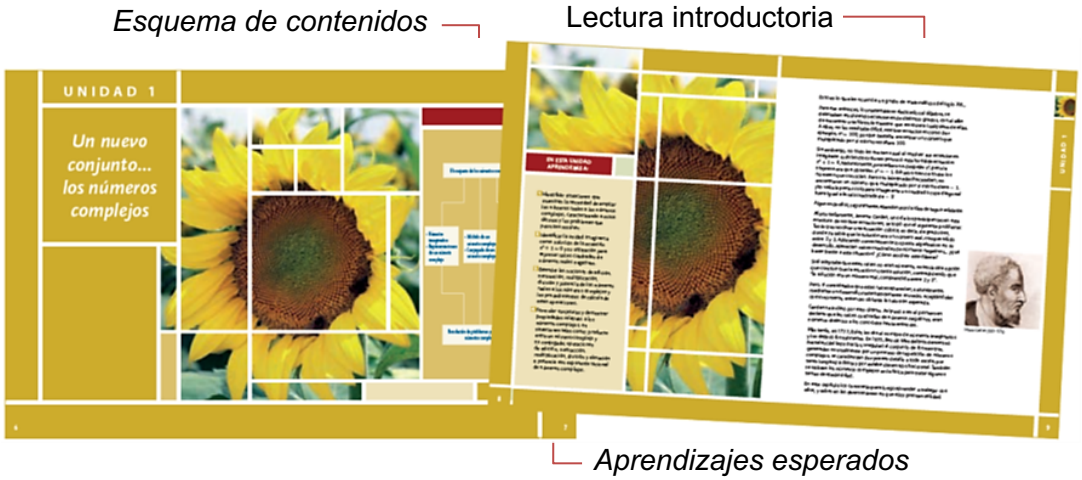
	- Actividad de metacognición (revisión de lo aprendido)	- Autoevaluación de aprendizaje - Evaluación de síntesis

Al comparar la estructura temática de este texto 5° con el texto 4°, se evidencia, que la única variación realizada por los autores, fue quitar los objetivos de aprendizaje de la presentación a la unidad.

En la Figura 70, se puede visualizar la estructura temática del inicio de cada unidad del texto 5° y corroborar la similitud con el texto 4°, además del cambio mencionado en el párrafo anterior.

Figura 70

Estructura temática del inicio de unidad en el texto 5°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 2), 2015, Cal y Canto.

Esta imagen, prácticamente es la misma que presenta el texto 4° referente a su estructura inicial de cada unidad, con la diferencia que en la primera página no

se registran los aprendizajes esperados, pues se cambian a la tercera página, donde se aprecia la ausencia de los objetivos y la presencia del texto introductorio que es el mismo para cada unidad del texto 5°.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

Al comparar ambos textos, 4° y 5°, se observa que la organización de las unidades y contenidos entre ambos, es exactamente la misma. Por lo tanto, se sugiere una vez más, consultar la información en el apartado 4.2.4.2, Tabla 4.19, del texto 4°. Con respecto a la cantidad de páginas utilizadas en total para la unidad 5, también es la misma, es decir, de 78 páginas, por ende, no hay variación. Esto se debe, a que los autores calzan los nuevos cambios a la distribución de las páginas establecidas en el texto 4°, por cada unidad.

Del mismo modo, que lo descrito anteriormente, la organización temática de la unidad de probabilidades del texto 5° es la misma que el texto 4°. Por tanto, se debe consultar por esta información en el apartado 4.2.4.2, Tabla 4.20.

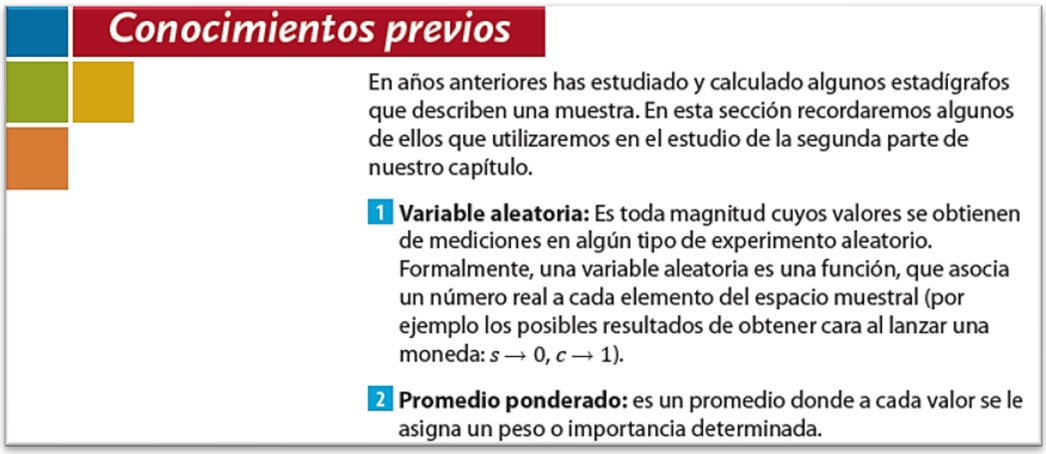
Cabe mencionar que, como única variación general, es el título de la sección de probabilidad condicional, es decir, sólo se considera este nombre sin agregar "sucesos dependientes".

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

En la sección, "Conocimientos previos", se agrega con respecto al texto 4°, el contenido de "variable aleatoria" y la "Regla de Laplace". En la Figura 71, se evidencia la primera observación, la cual da cuenta de la no incorporación de conocimientos previos.

Figura 71

Sección conocimientos previos de la unidad de probabilidades en el texto 5°



Conocimientos previos

En años anteriores has estudiado y calculado algunos estadígrafos que describen una muestra. En esta sección recordaremos algunos de ellos que utilizaremos en el estudio de la segunda parte de nuestro capítulo.

1 **Variable aleatoria:** Es toda magnitud cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio. Formalmente, una variable aleatoria es una función, que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral (por ejemplo los posibles resultados de obtener cara al lanzar una moneda: $s \rightarrow 0$, $c \rightarrow 1$).

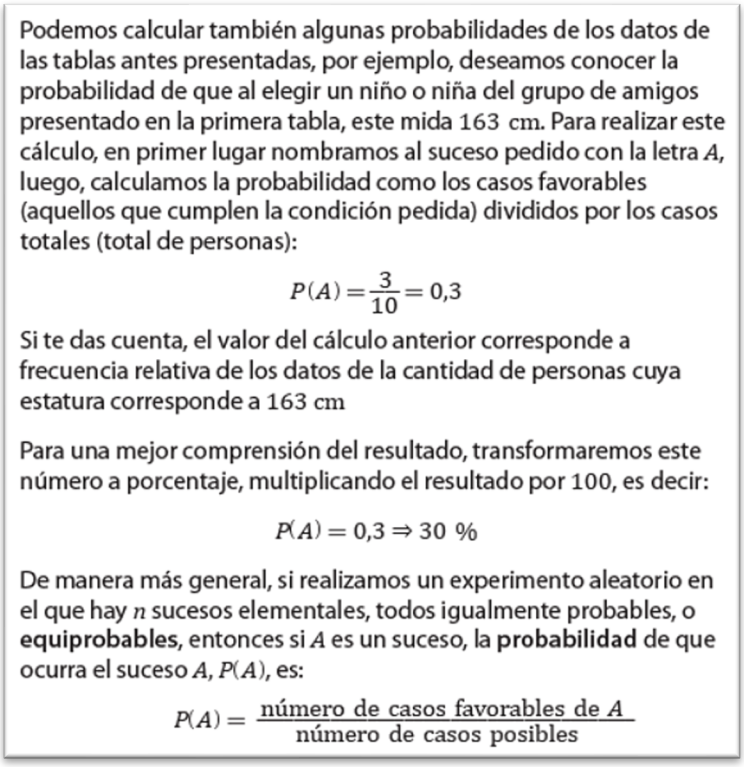
2 **Promedio ponderado:** es un promedio donde a cada valor se le asigna un peso o importancia determinada.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 324), 2015, Cal y Canto.

En la Figura 72, se muestra la incorporación de la “Regla de Laplace” como conocimiento previo, el cual es necesario para la comprensión de la probabilidad condicional.

Figura 72

Regla de Laplace como conocimiento previo en el texto 5°



Podemos calcular también algunas probabilidades de los datos de las tablas antes presentadas, por ejemplo, deseamos conocer la probabilidad de que al elegir un niño o niña del grupo de amigos presentado en la primera tabla, este mida 163 cm. Para realizar este cálculo, en primer lugar nombramos al suceso pedido con la letra A, luego, calculamos la probabilidad como los casos favorables (aquellos que cumplen la condición pedida) divididos por los casos totales (total de personas):

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Si te das cuenta, el valor del cálculo anterior corresponde a frecuencia relativa de los datos de la cantidad de personas cuya estatura corresponde a 163 cm

Para una mejor comprensión del resultado, transformaremos este número a porcentaje, multiplicando el resultado por 100, es decir:

$$P(A) = 0{,}3 \Rightarrow 30\ \%$$

De manera más general, si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, o **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A, $P(A)$, es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables de } A}{\text{número de casos posibles}}$$

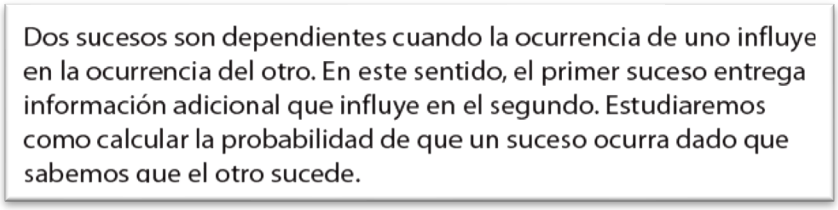
Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 326), 2015, Cal y Canto.

En esta imagen se aprecia, la presentación intuitiva y luego formal de la probabilidad simple, como conocimiento previo para los contenidos a tratar en la unidad, entre ellos la probabilidad condicional. A diferencia del texto 4°, aquí se profundiza, mediante el ejemplo planteado.

Por otro lado, en la sección correspondiente al tratamiento de la probabilidad condicional, se identifica en esta oportunidad sólo el conocimiento de "dependencia entre sucesos", siendo el mismo que se describió en los textos 3° y 4°, pero con una pequeña variación en la redacción. En la Figura 73, se muestra este contenido actualizado.

Figura 73

Dependencia de sucesos como conocimiento previo en el texto 5°


Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo. Estudiaremos como calcular la probabilidad de que un suceso ocurra dado que sabemos que el otro sucede.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 331), 2015, Cal y Canto.

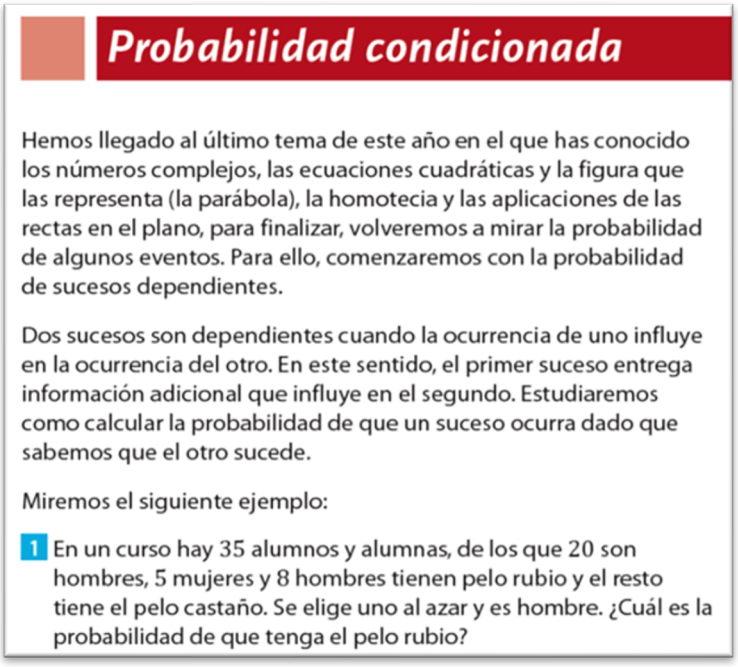
La modificación de este conocimiento con respecto al texto anterior, es que no se pone en contexto con una situación en particular, por lo tanto, la definición es la misma.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

Como primera observación de la presentación del concepto, en este texto 5°, se identifica sólo "probabilidad condicional" como título de la sección, a diferencia del texto 4°, donde se incluía "sucesos dependientes". Como segunda observación, es que la introducción al concepto se reduce a una breve síntesis del autor, la cual hace referencia a los contenidos vistos en las unidades anteriores conectando con el contenido a tratar. De esto se puede decir, que la intención de los autores para este texto, es acotar la cantidad lectura y enfatizar netamente en el tratamiento del contenido, a diferencia del texto 4°. En la Figura 74, se muestra la introducción al concepto donde se puede apreciar el mismo ejemplo presentado en los textos 3° y 4°.

Figura 74

Introducción al concepto de probabilidad condicional en el texto 5°



Probabilidad condicionada

Hemos llegado al último tema de este año en el que has conocido los números complejos, las ecuaciones cuadráticas y la figura que las representa (la parábola), la homotecia y las aplicaciones de las rectas en el plano, para finalizar, volveremos a mirar la probabilidad de algunos eventos. Para ello, comenzaremos con la probabilidad de sucesos dependientes.

Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo. Estudiaremos como calcular la probabilidad de que un suceso ocurra dado que sabemos que el otro sucede.

Miremos el siguiente ejemplo:

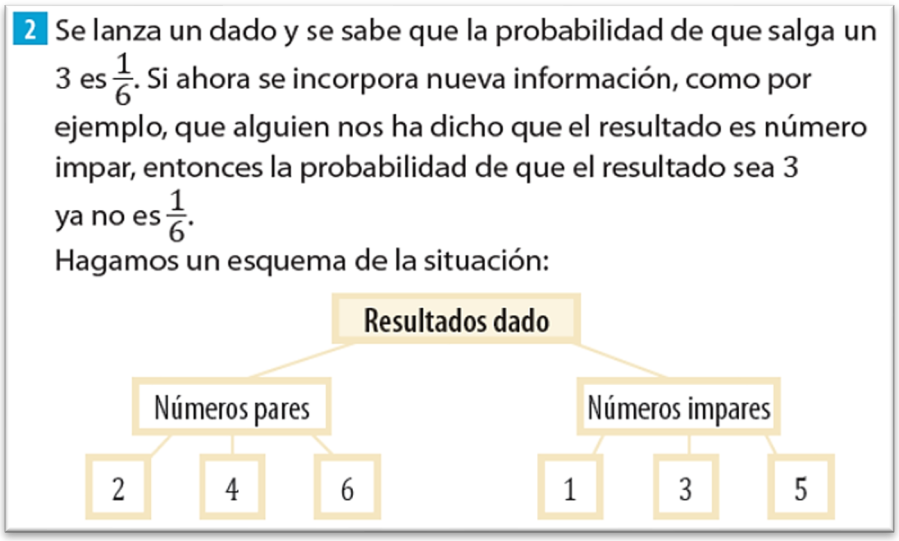
1 En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres, 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 331), 2015, Cal y Canto.

Seguido de esto, se aprecia el mismo tratamiento del concepto que los textos ya mencionados, principalmente, en la metodología de tipo inductiva, considerando los mismos ejemplos, a excepción de uno que se incorpora en el tratamiento, el cual se muestra en la Figura 75. Aquí se considera sólo su planteamiento, pues más adelante se retoma para profundizar en él.

Figura 75

Ejemplo nuevo para el tratamiento del concepto en el texto 5°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2015, Cal y Canto.

Como se puede apreciar, este es el segundo ejemplo que se plantea, previo a la formalización de la probabilidad condicional, por ende, los autores refuerzan la inducción al concepto comparado a los dos textos anteriores.

En definitiva, los cambios que realizan los autores en esta sección, están relacionados con reducir el texto (la lectura), enfatizando más en el tratamiento del concepto y a reforzar la ejemplificación previa a la formalización.

- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

Se evidencian las mismas articulaciones descritas en los textos 3° y 4°. Es decir, que la probabilidad se articula con el concepto de "*sucesos dependientes*" y el cálculo de porcentajes. Por lo tanto, la información de este campo para el texto

5°, es posible encontrarla en cualquiera de los dos textos recién mencionados, en sus apartados correspondientes; 4.2.3.2 o 4.2.4.2 y los campos respectivos.

4.2.5.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 5°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

Al igual que en el texto 4°, con respecto al tratamiento del concepto de "independencia entre sucesos", en este texto 5° nuevamente no se incorpora este contenido, por lo que no es posible presentar descripciones al respecto.

- Probabilidad condicional

Como se ha podido evidenciar, los cambios que han realizado los autores con respecto al tratamiento del concepto en el texto 5°, no han sido sustanciales, ya que no han influido en el tratamiento medular del concepto ni en la metodología, sino más bien se pueden interpretar como ajustes en torno al tratamiento. Uno de estos ajustes, es la incorporación de un cuarto ejemplo en la inducción al concepto, el cual se decide mostrar en dos partes, mediante las Figuras 76 y 77 para un mejor orden de las descripciones.

Figura 76

Nuevo ejemplo incorporado en el tratamiento del concepto en el texto 5°

2 Se lanza un dado y se sabe que la probabilidad de que salga un 3 es $\frac{1}{6}$. Si ahora se incorpora nueva información, como por ejemplo, que alguien nos ha dicho que el resultado es número impar, entonces la probabilidad de que el resultado sea 3 ya no es $\frac{1}{6}$.

Hagamos un esquema de la situación:

Como vemos, ahora nuestro espacio muestral se restringe a solo 3 posibilidades dado que el resultado lo debemos obtener entre los números impares 1, 3 y 5, es decir nuestro espacio muestral es ahora 3 y queremos determinar la probabilidad de obtener el número 3, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2015, Cal y Canto.

Este tratamiento del concepto, es previo a la formalización del mismo, por ende, tiene carácter inductivo con un planteamiento explicativo, ya que en vez de plantear una pregunta al problema y mostrar cómo se realizaron los procedimientos, se opta más bien por explicar y fundamentar el comportamiento de los sucesos de un experimento aleatorio y la implicancia en sus resultados. A esto se suma, el uso intuitivo de conceptos como la probabilidad simple, noción de dependencia y restricción del espacio muestral.

También se puede apreciar, una primera resolución que tiene relación con la concepción cardinal de la definición de probabilidad condicional, ya que esta se calcula en términos de las posibilidades de los sucesos. Por último, mencionar que el uso de lenguaje intuitivo en la igualdad: *"(número 3 entre números impares*

en un dado)", es ambiguo, a diferencia del utilizado en los otros ejemplos, porque este no expresa un lenguaje condicional evidente, que permita al estudiante interpretar con claridad la condicionalidad entre los sucesos.

En la Figura 77, se muestra la resolución del problema, pero en términos de las probabilidades de los sucesos, lo que conduce a la formalización de la probabilidad condicional.

Figura 77

Resolución del problema en términos de probabilidades, en el texto 5°

Pero lo que necesitamos es calcular la probabilidad de obtener el número 3 de entre seis posibilidades, pero sabiendo que el resultado es impar. Lo anterior lo calculamos determinando el cociente entre la probabilidad de obtener el número 3 en un dado y la probabilidad de obtener un número impar en un dado, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(\text{número 3 entre resultados posibles en un dado})}{P(\text{números impares en un dado})}$$

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2015, Cal y Canto.

Luego de esto, se presenta la definición formal de la probabilidad condicional, siendo la misma información que la propuesta por los textos 3° y 4°, al igual que los ejemplos que le continúan. Por lo tanto, para no reiterarla se puede consultar en el apartado 4.2.4.2 del texto 4°, en el campo respectivo.

En resumen, los autores incorporan un nuevo ejemplo al tratamiento del concepto, siguiendo la misma metodología del texto 4°, de plantear primero el concepto con una concepción cardinal y luego ampliarlo a una concepción

probabilística, para lograr generalizarlo, pero priorizando el uso de un lenguaje intuitivo más que algebraico y conjuntista.

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

De acuerdo a lo descrito en el campo anterior y a lo observado en la sección del concepto, se evidencia nuevamente al igual que en el texto 4°, la ausencia de las propiedades elementales de la probabilidad condicional. Quedando de manifiesto, sólo la presencia implícita de la restricción del espacio muestral como propiedad, mediante los ejemplos propuestos. En la Figura 78, se muestra esta mención, identificada en el ejemplo 2, descrito en el campo anterior.

Figura 78

Propiedad implícita la probabilidad condicional en el texto 5°

Como vemos, ahora nuestro espacio muestral se restringe a solo 3 posibilidades dado que el resultado lo debemos obtener entre los números impares 1, 3 y 5, es decir nuestro espacio muestral es ahora 3 y queremos determinar la probabilidad de obtener el número 3, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° medio* (p. 332), 2015, Cal y Canto.

Por lo tanto, los autores no consideran para este texto, mejoras con respecto a las propiedades elementales de la probabilidad condicional, por ende, no se aprecian cambios sustanciales en esta etapa del tratamiento.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

Se reiteran las mismas observaciones descritas en los textos 3° y 4°, es decir, nuevamente los autores no realizan cambios ni mejoras sustanciales hacia el tratamiento de los sucesos de la probabilidad condicional, en este caso con respecto a las relaciones "causal y diagnóstica". Como se mencionó en los textos anteriores, sólo se considera la "relación causal implícita" entre los sucesos, lo que promueve a la confusión de creer que siempre el suceso condicionante es la causa y el condicionado la consecuencia.

Por lo anterior expuesto, se asumen las mismas descripciones realizadas en el campo MTC3 del texto 3°, ya que se observa la misma información y tratamiento del concepto que los textos 4° y 5°. Por lo tanto, no se escriben nuevamente las observaciones para evitar redundar en las mismas, invitando al lector a consultar el texto 3°, para la descripción de este campo.

- **MTC4: Condicionalidad y Falacia del eje temporal**

Aun incluyendo un nuevo ejemplo al tratamiento del concepto, se reiteran de igual forma, las descripciones de los textos 3° y 4°, pues como se ha podido evidenciar, no se observa la incorporación de otros conceptos o mejoras que apunten a la "Falacia del eje temporal". Por lo tanto, los autores reiteran el planteamiento para este texto 5°, el cual enfatiza en la "relación causal" como único tratamiento y concepción de la probabilidad condicional.

En el apartado 4.2.4.3, en la Figura 66, se muestra un problema reiterado, en el cual se identifica la única instancia en donde se considera la "Falacia del eje temporal".

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

Se observa en todo el tratamiento del concepto, en especial en los ejemplos, la incorporación de la concepción cardinal de la probabilidad condicional, de manera implícita, pues como se describió en la conclusión del campo MTC1 de este apartado; la intención de los autores es plantear un tratamiento inductivo, exhibiendo dos posibilidades de concebir el concepto; primero, mediante la ejemplificación de la concepción cardinal y luego en términos de las probabilidades, para lograr generalizarlo, priorizando el uso de un lenguaje intuitivo más que algebraico y conjuntista. A esto se suma, que no se precisa ni se define el espacio muestral para el cumplimiento de la probabilidad condicional, al igual que en el texto 4°.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

Al igual que el texto 4°, no se presencia un tratamiento que compare y relacione las características entre la probabilidad condicional, simple y conjunta, donde se considere la confusión de creer que "*la probabilidad condicional es lo mismo que la probabilidad conjunta*", como mejora a la interpretación del concepto, sobre todo en los planteamientos de los enunciados. Lo que se corrobora al respecto, es solamente el uso de la conjunción "y" para expresar la probabilidad conjunta en la igualdad de la fórmula de la probabilidad condicional, pero no se fundamenta ni se hace referencia a ello.

Con respecto a la probabilidad simple, no se considera como un contenido previo ni se asigna un espacio en el texto para tratarla.

En resumen, en este texto 5° los autores no presentan el contenido de la probabilidad conjunta (probabilidad de la intersección), por ende, no se establece un contraste o relación alguna con la probabilidad condicional, a excepción de la notación utilizada en la fórmula. En consecuencia, los sesgos de razonamiento

relacionados con la confusión entre probabilidad condicional y conjunta, no se consideran en este texto, por lo tanto, posibilitan su existencia en la comprensión de los y las estudiantes.

- **MTC7: Uso de representaciones para la probabilidad condicional**

Las representaciones en este texto 5°, también son las mismas que el texto 3° y 4°, por tanto, se evidencia su reiteración en el tratamiento del concepto, correspondiendo al lenguaje intuitivo, lenguaje algebraico y diagrama de árbol. Como son los mismos ejemplos que el texto 4°, las descripciones son las mismas, por lo que se pueden consultar en el campo MTC7 del texto anterior, a excepción del ejemplo 2, descrito en el campo MTC1 de este apartado.

4.2.6.1. Aplicación de la matriz MCGn para la caracterización del texto 6°.

El presente texto, corresponde a la entrada en vigencia de las nuevas Bases Curriculares para 3° y 4° año de educación media. El texto tiene la particularidad de contener los contenidos matemáticos correspondientes a ambos cursos, en otras palabras, tanto los estudiantes de 3° medio como de 4° medio deben ocupar este mismo texto de estudio. Por esta razón, en los campos donde se analiza la probabilidad condicional o los conceptos asociadas a ella, sólo se considera el curso de 3° medio. En los demás campos de descripción general del texto se identifican ambos cursos.

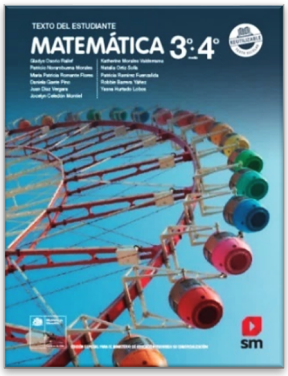
- **MCG1: Título, curso y periodo curricular**

Título: Matemática 3° y 4° medio

Tipo: Texto del estudiante

Curso: 3° y 4° educación media

Periodo: 2020 - 2023



- **MCG2: Edición, publicación y editorial**

Edición: Primera edición

Publicación: 2019 - 12 - 20

Editorial: SM S.A.

- **MCG3: Datos de Autoría**

En Tabla 4.22 se organiza y describe la información de este campo.

Tabla 4.22.

Datos de autoría del texto 6°

Autor	Grados académicos	Universidad de procedencia
Robbie Barrera Yáñez	- Licenciado en Educación de Física y Matemática - Profesor de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile, 2013
María Patricia Romante Flores	- Licenciada en Educación de Física y Matemática - Profesora de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile, 2014
	- Licenciado en Educación Matemática y Computación	Universidad de Santiago de Chile

Patricio Norambuena Morales Gladys Osorio Railef	- Licenciada en Educación de Física y Matemática - Profesora de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile, 2014
Katherine Morales Valderrama Juan Díaz Vergara	- Licenciada en Educación Matemática y Computación - Licenciado en Educación de Física y Matemática - Profesor de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile Universidad de Santiago de Chile, 2012
Natalia Ortiz Solís	- Licenciada en Educación Matemática y Computación - Profesora de Estado en Matemática y Computación	Universidad de Santiago de Chile
Daniela Gaete Pino	- Licenciada en Educación de Física y Matemática - Profesora de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile, 2014
Patricia Ramírez Fuenzalida	- Licenciada en Educación de Física y Matemática - Profesora de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile, 2017
Yasna Hurtado Lobos	- Licenciada en Educación de Física y Matemática - Profesora de Estado en Física y Matemática	Universidad de Santiago de Chile
	- Profesora de Estado de Matemática y Computación	Universidad de Santiago de Chile, 2010

Jocelyn
Celedón Montiel

Como se puede observar en esta tabla, el texto posee once autores, siendo uno de los textos de educación media con mayor cantidad de participantes en la Autoría, de todo el periodo de 2009 a 2023. A esto se suma, que tanto autoras como autores poseen sus estudios iniciales en la Universidad de Santiago de Chile, institución a la cual está ligado también este estudio.

- **MCG4: Presentación física**

El texto contiene 258 páginas cuyas dimensiones son de 27,5 x 21 cm

- **MCG5: ISBN**

978-956-363-723-6

4.2.6.2. Aplicación de la matriz MCOn para la caracterización de los contenidos matemáticos en el texto 6°.

- **MCO1: Estructura temática del texto**

La Tabla 4.23 describe la distribución y organización temática del texto 6°.

Tabla 4.23.

Estructura temática del texto 6°

Inicio de unidad	Desarrollo de unidad	Cierre de unidad	Cierre del texto

- N° unidad - Título - Actividad introductoria (contextualizada) - Objetivos de aprendizaje	- Conocimientos previos (Evaluación diagnóstica) - Inicio y desarrollo de Lección - Cierre de Lección (Evaluación intermedia)	- Síntesis - Repaso - Evaluación de la unidad	- Glosario 3° medio - Solucionario 3° medio - Rúbricas de actividades 3° medio - Glosario 4° medio - Solucionario 4° medio - Rúbricas de actividades 4° medio - Bibliografía 3° y 4° medio

A diferencia de los textos anteriores con este texto 6°, se visualiza primero al inicio de la unidad sólo los objetivos de aprendizaje, pues no se incluyen los contenidos. Luego en el desarrollo de la unidad, se presentan los conocimientos previos como una reactivación de los mismos, mediante una "Evaluación Diagnóstica". A continuación de esto se presentan las Lecciones, siendo dos por cada unidad con su respectiva "Evaluación Intermedia", evidenciándose una disminución considerable en la cantidad de ejercicios.

En la Figura 79, se puede visualizar la estructura temática del inicio de cada unidad del texto 6°, la cual pretende entregar una visión global de lo que se va a tratar en cada unidad.

Figura 79

Estructura temática del inicio de unidad en el texto 6°

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 4), 2019, SM S.A.

Esta imagen también la presenta el texto, para mostrar su estructura temática con respecto al inicio de la unidad, destinando sólo dos hojas por cada unidad para su introducción, a diferencia de los textos anteriores que eran 4 hojas.

- **MCO2: Organización de las unidades y contenidos**

En la Tabla 4.24, se presenta la organización de las unidades y contenidos correspondientes a **3° medio**.

Tabla 4.24.

Organización de las unidades y contenidos de 3° medio del texto 6°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas
1	La toma de decisiones en situaciones de incerteza	- Medidas de dispersión - Comparación de conjuntos de datos - Probabilidad condicionada - Probabilidad total	08 – 31
2		- Función exponencial	32 – 55

	Modelamiento matemático para describir y predecir	- Crecimiento y decrecimiento exponencial - Función logarítmica - Relación entre las funciones exponencial y logarítmica	
3	Relaciones métricas en la circunferencia	- Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia - Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia - Cuerdas en la circunferencia - Secantes y tangentes en la circunferencia	56 - 79
4	Un último peldaño algebraico: los números complejos	- Conjuntos de los números complejos - Representación de números complejos - Módulo y conjugado de un número complejo - Adición y sustracción de números complejos - Multiplicación de números complejos - División de números complejos	80 – 105

Dos diferencias a resaltar en este texto 6° con respecto a los textos anteriores analizados, es la designación del eje temático de Estadística y Probabilidades como primera unidad del texto y la disminución en la cantidad de contenidos y ejercicios planteados, pues como se pudo observar en los apartados anteriores, este eje siempre se ubicó en la última unidad de los textos descritos de 3° medio junto con gran cantidad de ejercicios misceláneos.

Con respecto a la cantidad de páginas utilizadas en total para la unidad 1, “La toma de decisiones en situaciones de incerteza” de 3° medio, resultan ser 23 páginas. De esto, se puede decir que hay una reducción del 71% de las páginas del texto 5° con respecto al texto 6°, lo cual indica una disminución considerable.

En la Tabla 4.25, se presenta la organización de las unidades y contenidos correspondientes a **4° medio.**

Tabla 4.25.

Organización de las unidades y contenidos de 4° medio del texto 6°

N° unidad	Título unidad	Contenidos	Páginas

1	La toma de decisiones en situaciones Financieras y Económicas	- Porcentajes en el comercio - Presupuestos y planificación - Remuneraciones y descuentos legales - Ahorro e inversiones - Créditos	106 – 135
2	Modelamiento matemático para describir y predecir	- Crecimiento y decrecimiento potencial - Función potencia de exponente positivo - Función potencia de exponente negativo	136 – 161
3	La toma de decisiones en situaciones de incerteza	- Valor esperado y varianza de una variable aleatoria - Distribución binomial - Variable aleatoria continua - Distribución normal - Distribución normal estándar - Estimación de la media de una población - Aproximación normal a la binomial	162 - 191
4	Geometría con coordenadas	- Distancia entre puntos en el plano cartesiano - Rectas en el plano - Distancia de un punto a una recta	192 - 219

		- Ecuación de la circunferencia - Posición relativa a las circunferencias	

En resumen, se observa que los contenidos respecto a los cuatro ejes temáticos de 3° medio, son más acotados, partiendo de la premisa que, en un solo texto de 258 páginas se unen dos cursos, 3° y 4° medio

En la Tabla 4.26, se describe la organización temática de la unidad 1 de 3° medio, donde se contempla el concepto de probabilidad condicional. En esta tabla, a diferencia de las presentadas en los textos anteriores con respecto a la misma temática, se incorpora una columna que presenta los objetivos planteados por los autores para cada contenido descrito en la unidad, apuntando de manera específica a lo que se pretende lograr por cada uno. Por esta razón, la columna de "Objetivos de aprendizaje" incluida en las tablas de los textos anteriores, se cambia en la Tabla 4.26, por "Objetivos específicos", pues se percibe mayor especificación al respecto.

Tabla 4.26.

Organización temática de la unidad de probabilidades de 3° medio del texto 6°

N°/ Título unidad	Secciones / Contenidos	Objetivos específicos	Páginas

1 La toma de decisiones en situaciones de incerteza	• Evaluación Diagnóstica		10
	• Medidas de dispersión	• Analizar los datos de situaciones usando medidas de dispersión y tomar decisiones a partir de ello.	11 – 14
	• Comparación de conjuntos de datos	• Comparar dos o más conjuntos de datos utilizando medidas de tendencia central, de dispersión y posición para tomar decisiones.	15 – 18
	• Evaluación intermedia		19
	• Probabilidad condicionada	• Comprender el concepto de probabilidad condicionada y aplicarlo en la toma de decisiones.	20 – 23
	• Probabilidad total	• Comprender el teorema de la probabilidad total y aplicarlo en la toma de decisiones.	24 – 26
	• Evaluación intermedia		27
	➢ Síntesis		28
	➢ Repaso		29
	➢ Evaluación de la unidad		30 – 31

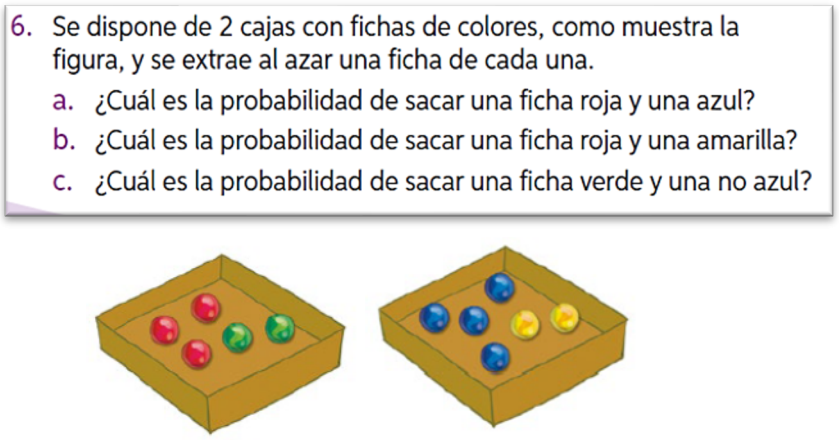
En esta tabla se puede apreciar que los contenidos se agrupan en dos partes, lo que se traduce a la Lección 1; "*Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos*" y a la Lección 2; "*Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionadas*".

- **MCO3: Conocimientos previos de la probabilidad condicional**

En la introducción a la unidad (p. 8), se plantean preguntas para reactivar conocimientos previos sobre las medidas de tendencia central. Luego en la página 10 se propone una "Evaluación diagnóstica", donde se incorpora un problema relacionado con la "*Regla del producto*". En la Figura 80, se muestra el problema planteado.

Figura 80

Problema diagnóstico sobre la regla del producto en el texto 6°



Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 10), 2019, SM S.A.

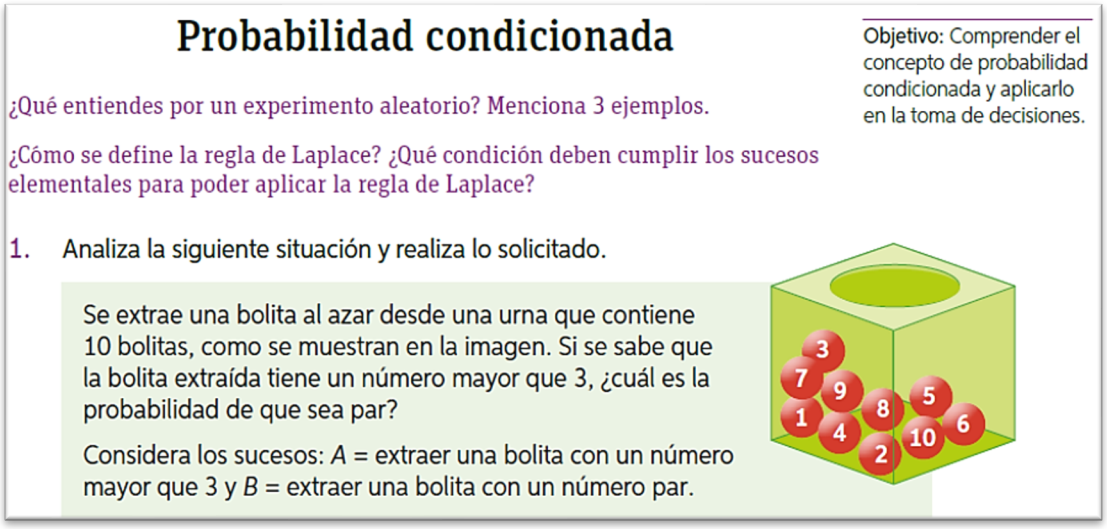
En definitiva, los autores inician la unidad con una reactivación de ciertos conocimientos previos más que referirse al contenido mismo o recordarlo,

planteando sólo un problema relacionado con probabilidad, para ser resuelto por el o la docente y/o los(as) estudiantes.

Por otro lado, en la sección de la probabilidad condicional (p.20), se presentan preguntas al inicio, las cuales apuntan a la reactivación de algunos conocimientos previos. Esto se muestra en la Figura 81, donde además se exhibe el problema que sigue a continuación más el objetivo a lograr.

Figura 81

Reactivación de conocimientos previos en sección de probabilidad condicional



Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

Aquí se puede apreciar, que la primera pregunta apunta a la noción que posee el estudiante sobre "experimento aleatorio" y de qué manera lo ejemplifica. La segunda se refiere, a cómo el estudiante define la "Regla de Laplace", y por último, la tercera pregunta, apunta a la característica de los "sucesos elementales" para el cumplimiento de Laplace. Todo lo anterior, está dirigido a reactivar aquellos conocimientos previos para el inicio del tratamiento de la probabilidad condicional, pero en ningún caso se hace referencia al contenido en

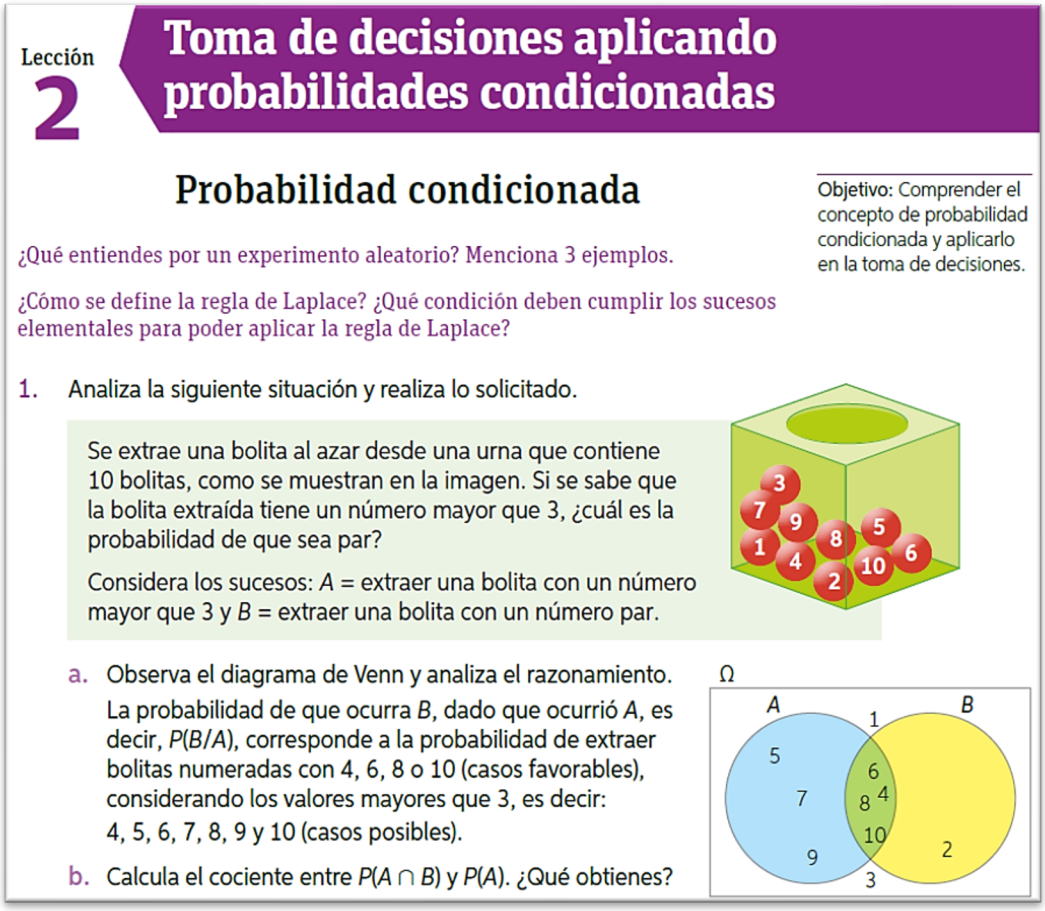
sí. Seguido esto, la situación planteada se relaciona con dependencia de sucesos, por ende, con condicionalidad, por lo que se introduce el concepto sin hacer previamente un refuerzo de los conocimientos previos.

- **MCO4: Presentación de la Probabilidad condicional**

En la Figura 82, se muestra el momento inicial de la presentación del concepto en estudio, previo a su formalización.

Figura 82

Presentación inicial de la probabilidad condicional en el texto 6°



Lección 2

Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionadas

Probabilidad condicionada

Objetivo: Comprender el concepto de probabilidad condicionada y aplicarlo en la toma de decisiones.

¿Qué entiendes por un experimento aleatorio? Menciona 3 ejemplos.

¿Cómo se define la regla de Laplace? ¿Qué condición deben cumplir los sucesos elementales para poder aplicar la regla de Laplace?

1. Analiza la siguiente situación y realiza lo solicitado.

Se extrae una bolita al azar desde una urna que contiene 10 bolitas, como se muestran en la imagen. Si se sabe que la bolita extraída tiene un número mayor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea par?

Considera los sucesos: A = extraer una bolita con un número mayor que 3 y B = extraer una bolita con un número par.

a. Observa el diagrama de Venn y analiza el razonamiento.
La probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A, es decir, $P(B/A)$, corresponde a la probabilidad de extraer bolitas numeradas con 4, 6, 8 o 10 (casos favorables), considerando los valores mayores que 3, es decir: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 (casos posibles).

b. Calcula el cociente entre $P(A \cap B)$ y $P(A)$. ¿Qué obtienes?

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

Aquí se puede apreciar, partiendo por el título de la Lección 2, que esta engloba el concepto de probabilidad condicional, iniciando su presentación, de manera intuitiva y deductiva, pues se aborda anticipadamente el concepto, incluyendo el uso de su simbología sin esperar a la formalización. En la situación expuesta, se pretende que el o la estudiante piense por sí mismo y concluya a partir de la información dada sobre la extracción de una bola al azar, analizando información adicional y un razonamiento condicional al respecto. Por consiguiente, no se plantea una ejemplificación que conduzca a deducir el concepto en estudio como en los textos analizados anteriormente, sino más bien esta tarea se traspasa al estudiante y/o al profesor.

Por otra parte, se incorpora en su presentación lo pictórico y gráfico, como apoyo al lenguaje verbal y simbólico del problema planteado, a diferencia de los textos anteriores analizados, donde a lo más se incorpora en algunos, un esquema como diagrama de árbol.

En la Figura 83, se muestra la formalización del concepto que plantea el texto 6° como consecuencia de lo descrito anteriormente.

Figura 83

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 6°

La probabilidad condicionada $P(B/A)$ es la probabilidad de que ocurra un suceso B dado que ocurrió otro A y se calcula con la siguiente expresión:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ con } P(A) \neq 0$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

En esta formalización del concepto que plantean los autores, se observa inicialmente una definición intuitiva y luego algebraica. También se puede

observar en la fórmula, el uso de la simbología conjuntista y la restricción de la probabilidad del suceso condicionante "A" como $P(A) \neq 0$, lo cual es correcto.

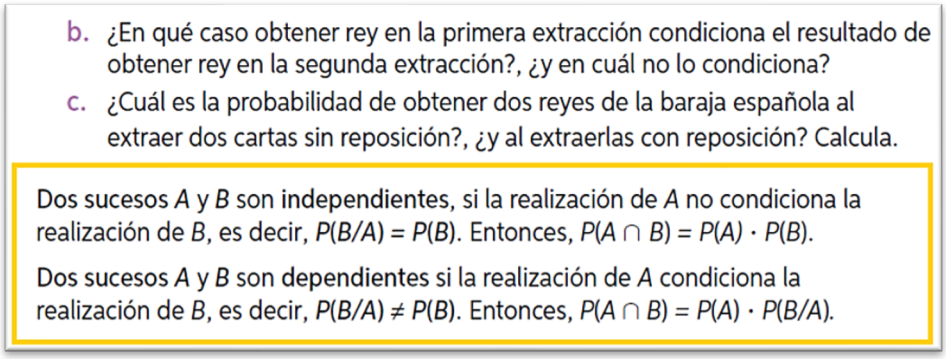
- **MCO5: Articulación de la probabilidad condicional**

De acuerdo a lo presentado en los campos MCO3 y MCO4, se pudo observar que, si bien las preguntas apuntaban a los conceptos de experimento aleatorio, Regla de Laplace y sucesos elementales, no se logra establecer una articulación con estos conceptos, a diferencia del problema planteado con respecto al diagrama de Venn, donde se puede apreciar una clara articulación entre el lenguaje conjuntista y el lenguaje condicional.

Otra articulación que se puede encontrar con el concepto, es la que se muestra en la Figura 84, donde los autores presentan los conceptos de independencia y dependencia de sucesos como una deducción del problema (2), previamente planteado, pero no resuelto por los autores.

Figura 84

Articulación de la probabilidad condicional con independencia y dependencia



b. ¿En qué caso obtener rey en la primera extracción condiciona el resultado de obtener rey en la segunda extracción?, ¿y en cuál no lo condiciona?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes de la baraja española al extraer dos cartas sin reposición?, ¿y al extraerlas con reposición? Calcula.

Dos sucesos *A* y *B* son **independientes**, si la realización de *A* no condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) = P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos *A* y *B* son **dependientes** si la realización de *A* condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) \neq P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 21), 2019, SM S.A.

En esta imagen se muestran dos preguntas del problema (2), previo al recuadro de conceptos, mediante las cuales se induce a un razonamiento condicional y por ende, a un cuestionamiento sobre la influencia que puede tener un suceso sobre otro. Esto conduce a vincular de manera intuitiva la probabilidad condicional con el concepto de independencia y dependencia entre sucesos, en otras palabras, se evidencia una articulación entre estos dos conceptos el concepto en estudio.

Un último concepto que se articula con la probabilidad condicional, es la "Probabilidad Total", la cual se presenta después de finalizado el concepto en estudio. En la Figura 85, se muestra el concepto mencionado sobre el cual trata la Lección 2, de la unidad 1 de "Estadística y Probabilidades".

Figura 85

Articulación de la Probabilidad total con la Probabilidad condicional

Lección 2

Probabilidad total

Objetivo: Comprender el teorema de la probabilidad total y aplicarlo en la toma de decisiones.

¿Qué expresión permite calcular la probabilidad condicionada?

Cuando los sucesos son independientes, ¿qué sucede con la expresión anterior?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Se sabe que la probabilidad de que cierto autobús sufra un accidente durante un día lluvioso es 0,07 y durante un día seco 0,004. En un periodo de 20 días el tiempo ha sido el siguiente:

Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom

a. ¿Cuántos días ha llovido?, ¿cuántos han sido días secos?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?

b. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzca un accidente? Analiza el siguiente procedimiento.

- Se definen los siguientes sucesos:

  A = Sufrir un accidente

  $\overline{A}$ = No sufrir un accidente

  B = Día lluvioso

  C = Día seco

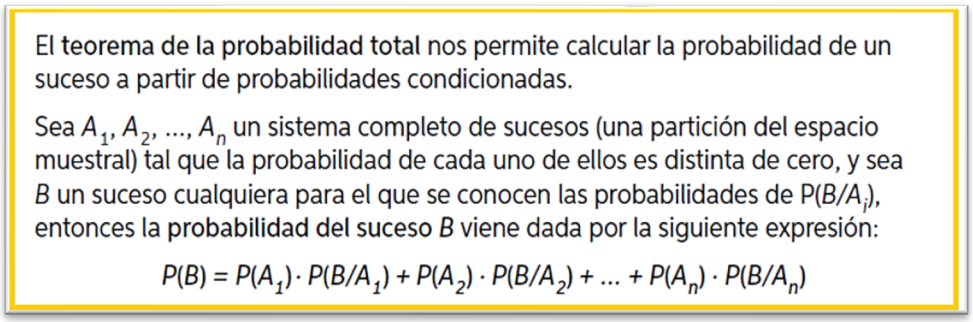
Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 24), 2019, SM S.A.

Mediante las preguntas planteadas al inicio del tema, los autores dejan de manifiesto que la probabilidad condicional y la independencia entre sucesos, corresponden a conocimientos previos de la “Probabilidad total”. Luego, con la situación que se plantea junto a las preguntas asociadas, es posible evidenciar cómo se va articulando la probabilidad condicional con el concepto en cuestión, principalmente con la pregunta “b”, ya que se definen cuatro sucesos que se relacionan entre sí, pudiendo determinar si la ocurrencia de un suceso afecta o no en la ocurrencia del otro.

Finalmente, se formaliza este concepto en cuestión, luego de continuar desarrollando el problema planteado. En la Figura 86, se muestra esta formalización, la que da cuenta de la vinculación entre ambos conceptos.

Figura 86

Formalización de la Probabilidad total a partir de la Probabilidad condicional



El teorema de la probabilidad total nos permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas.

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos (una partición del espacio muestral) tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 25), 2019, SM S.A.

4.2.6.3. Aplicación de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto de probabilidad condicional y el análisis de las dificultades de razonamiento condicional en el texto 6°.

- **MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia**

A continuación, se describen los conceptos en el orden que se exhiben en el texto 6°.

- Probabilidad condicional

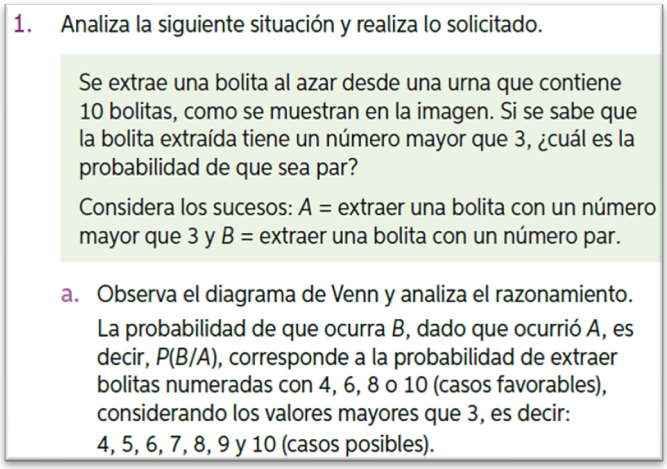
Como se pudo apreciar, en el apartado anterior 4.2.6.2 con respecto a la presentación del concepto en estudio, esta inicia con preguntas de reactivación de conocimientos previos, luego se presenta una situación para ser analizada y resuelta por el estudiante, mediante la cual se incorpora el concepto de probabilidad condicional en forma intuitiva, para finalmente pasar a su

formalización. Esto se pudo visualizar en la Figura 80 del campo MCO4. Estas descripciones dan cuenta de un tratamiento intuitivo, no así inductivo, pues a pesar de comenzar con una situación particular, esta no se plantea a partir de un conocimiento previo o idea preestablecida, que conduzca a construir y concluir el nuevo conocimiento en cuestión.

En la Figura 87, se selecciona el momento del tratamiento inicial del concepto, el cual da cuenta de un tratamiento intuitivo.

Figura 87

Tratamiento intuitivo de la probabilidad condicional en el texto 6°



1. Analiza la siguiente situación y realiza lo solicitado.

Se extrae una bolita al azar desde una urna que contiene 10 bolitas, como se muestran en la imagen. Si se sabe que la bolita extraída tiene un número mayor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea par?

Considera los sucesos: A = extraer una bolita con un número mayor que 3 y B = extraer una bolita con un número par.

a. Observa el diagrama de Venn y analiza el razonamiento.

La probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A, es decir, $P(B/A)$, corresponde a la probabilidad de extraer bolitas numeradas con 4, 6, 8 o 10 (casos favorables), considerando los valores mayores que 3, es decir: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 (casos posibles).

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

Se puede decir que el tratamiento intuitivo del concepto, está presente en el ítem "a", a partir de una situación particular previa, en donde se plantea directamente un caso de condicionalidad entre sucesos, del cual los autores desprenden un razonamiento probabilístico condicional para que sea analizado por el o la estudiante. Mediante este razonamiento, es posible deducir de manera más evidente la definición intuitiva del concepto en estudio, pero es un trabajo que debe ser realizado por el estudiante con supervisión del profesor(a).

En la Figura 88, se muestra nuevamente la formalización del concepto en estudio, con la intención de apoyar el análisis y las descripciones que se darán a continuación respecto de su tratamiento.

Figura 88

Formalización del concepto de probabilidad condicional en el texto 6°

La probabilidad condicionada $P(B/A)$ es la probabilidad de que ocurra un suceso B dado que ocurrió otro A y se calcula con la siguiente expresión:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ con } P(A) \neq 0$$

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

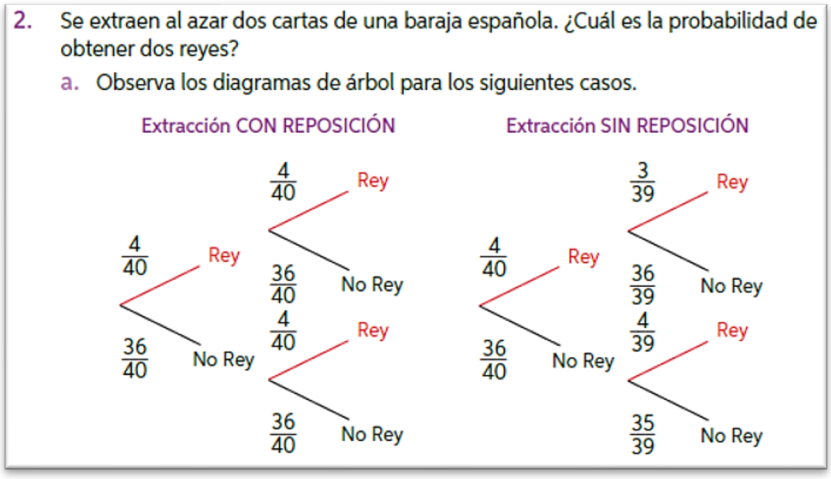
En este recuadro, es posible evidenciar la definición intuitiva del concepto en estudio, *"La probabilidad condicionada P(A/B) es la probabilidad de que ocurra un suceso B dado que ocurrió otro A",* la que luego se generaliza con la expresión algebraica, en términos de las probabilidades con la restricción $P(A) \neq 0$, la cual es correcta.

- Independencia entre sucesos

En la Figura 89, se exhibe el problema 2, planteado a continuación de la formalización del concepto y que tiene como propósito guiar al estudiante, mediante sus propios análisis y conclusiones, a establecer una concepción previa de independencia y dependencia entre sucesos, para luego relacionar ambas con su formalización.

Figura 89

Problema introductorio a la formalización de Independencia y Dependencia



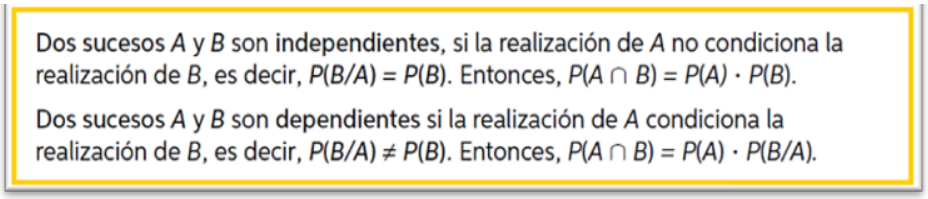
Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

En este problema, se plantea la extracción de dos cartas al azar, sin especificar de qué manera se sacan, lo que luego se intuye de los diagramas de árbol que se presentan, en donde se observa la descripción de dos casos; “con reposición” y “sin reposición”. Si bien esto, conduce a representar situaciones de eventos independientes y dependientes, no son los únicos casos, por ende, se deja la posibilidad al estudiante de “*Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias.*” Cabe mencionar que este problema no presenta solución ni respuestas por parte de los autores, ya que sólo se dejan las preguntas planteadas al estudiante, las cuales se mostraron anteriormente en el campo MCO5 junto a la formalización de los conceptos.

En la Figura 90, se presenta la formalización del concepto de independencia y dependencia entre sucesos.

Figura 90

Formalización de los conceptos de Independencia y Dependencia en el texto 6°


Dos sucesos A y B son independientes, si la realización de A no condiciona la realización de B, es decir, $P(B/A) = P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos A y B son dependientes si la realización de A condiciona la realización de B, es decir, $P(B/A) \neq P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 21), 2019, SM S.A.

En este recuadro, es posible observar la definición intuitiva de independencia; *"Dos sucesos A y B son independientes, si la realización de A no condiciona la realización de B*" y de dependencia; "*Dos sucesos A y B son dependientes si la realización de A condiciona la realización de B*", siendo ambas definiciones correctas, al igual que cada proposición correspondiente a ellas.

Por último, mencionar que los autores(as), no incorporan el concepto de los eventos mutuamente excluyentes, por ende, se deja la posibilidad a creer erróneamente que, "*eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes*".

- **MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional**

En este texto 6°, no se observa a lo largo de toda la unidad, el planteamiento de las propiedades elementales de la probabilidad condicional.

- **MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos**

Los autores no plantean ejemplos, de ningún tipo, para mostrar la aplicación y funcionalidad del concepto en diversas situaciones, sino más bien proponen

problemas y actividades para que sean resueltas por el o la estudiante y/o el docente. Por esta razón, sólo se analizarán los problemas planteados y sus preguntas asociadas, además de la formalización del concepto.

En la Figura 91, se muestra un problema, donde es posible identificar la condicionalidad y relación causal entre los sucesos planteados, mediante la observación de la tabla de contingencia y el análisis de las preguntas asociadas.

Figura 91

Relación causal entre sucesos mediante una situación particular

3. La siguiente tabla de contingencia muestra la cantidad de participantes en una corrida de cierta localidad según las siguientes categorías:

Las tablas de contingencia son aquellas en las que se resume y organiza la información según dos o más criterios.

	Masculino	Femenino	Total
Adolescente	25	15	40
Adulto	125	70	195
Sénior	75	90	165
Total	225	175	400

Si se elige una persona al azar, calcula:

a. La probabilidad de que sea una corredora, sabiendo que pertenece a la categoría sénior.

b. La probabilidad de que sea de la categoría adulto, sabiendo que es un corredor.

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 21), 2019, SM S.A.

Aquí se plantean dos preguntas, en donde se puede apreciar la relación causal y, por ende, condicional entre los sucesos planteados. Por ejemplo, en la primera pregunta "*a*", es posible apreciar que el suceso condicionado, llamémoslo A (sea una corredora), es el efecto del suceso condicionante, llamémoslo B (pertenece a la categoría sénior), ya que al calcular la $P(A/B)$ resulta ser distinto de la $P(A)$,

en otras palabras, B es la causa debido a que, al saber que la persona pertenece a la categoría sénior, la probabilidad del suceso A cambia. De manera similar, ocurre con los sucesos de la pregunta "b", teniendo en cuenta que, en esta se cambia el orden de ocurrencia de los sucesos, ya que ahora el suceso condicionado es; *que sea de la categoría* y el suceso condicionante es; *que es un corredor.*

Por el contrario, no es posible encontrar una relación diagnóstica, ya que al intercambiar los sucesos, es decir, querer estimar la probabilidad de la causa condicionada por el efecto, esto no ocurre, pues resulta una relación causal en este intercambio, lo que se comprueba al comparar las probabilidades, pues resultan ser distintas. Por ejemplo, si se intercambia el orden de los sucesos de la pregunta "a" se obtiene: "La probabilidad de que pertenezca a la categoría sénior, sabiendo que es corredora", siendo su probabilidad (18/35), en cambio al considerar la pregunta tal cual, se obtiene que la probabilidad es (6/11).

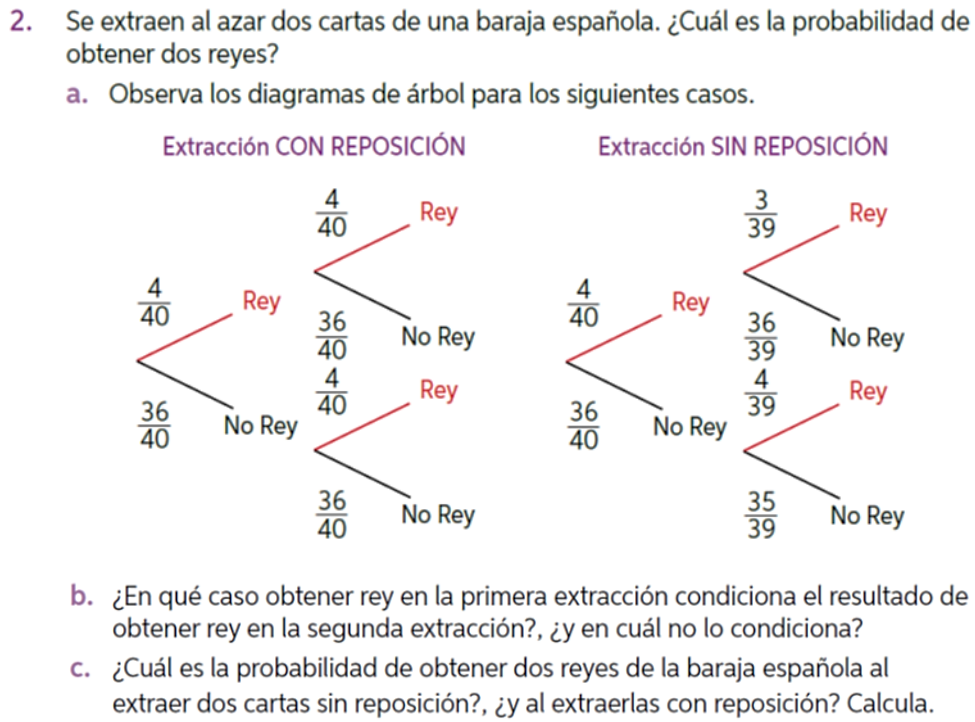
En resumen, los autores consideran la relación causal entre sucesos, pero de manera implícita, es decir, dejan impuesta la idea de que el *suceso condicionante es siempre la causa y el suceso condicionado el efecto*, lo cual tiende a una confusión, al no considerar la relación diagnóstica entre sucesos.

- **MTC4: Condicionalidad y Falacia del eje temporal**

Con respecto a la falacia del eje temporal, es posible identificar un problema planteado, relacionado con los conceptos de independencia y dependencia, donde se podría decir que se considera, *el orden temporal natural de los sucesos*, pues como se puede ver en la Figura 92, se representan dos casos; *"Extracción con reposición"* y *"Extracción sin reposición",* lo que se interpreta como sucesos que ocurren uno seguido del otro (sucesiones de experiencias), pero luego no se representa ni se cuestiona el caso en el que, el orden temporal de los sucesos pueda estar invertido.

Figura 92

Presencia del orden temporal natural entre los sucesos en el texto 6°



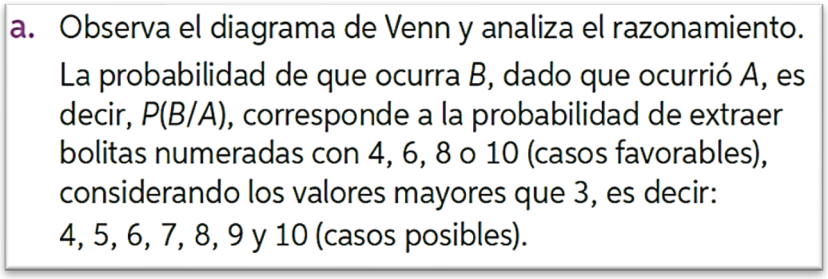
Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (pp. 20 y 21), 2019, SM S.A.

Al leer el enunciado del problema, se puede apreciar ambigüedad en su planteamiento, ya que no especifica de qué manera se sacan las cartas, es decir, no se menciona si se sacan al mismo tiempo o una después de la otra, sino que se debe deducir a posterior y con respecto a la pregunta inicial, esta apunta a determinar la probabilidad conjunta de los sucesos. Luego, referente a las dos preguntas planteadas *a* y *b,* la primera cuestiona la condicionalidad de los sucesos relativos a la dependencia/no dependencia entre ellos y la segunda, requiere determinar la probabilidad de ambos casos, representados en el diagrama de árbol.

En resumen, no se considera la *falacia del eje temporal* como aporte al tratamiento del concepto, pues sólo se observa el orden temporal natural de los sucesos de manera implícita, no así, el orden temporal invertido, el cual está ausente.

- **MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal**

En este texto 6°, no se define ni se hace mención alguna del espacio muestral de la probabilidad condicional, es por esto que no es posible presentar descripciones al respecto. Y en relación a la concepción cardinal, se observa al inicio de la sección en la situación planteada, la cual se mostró en la Figura 85, que se hace alusión a esta noción de manera puntual e implícita. Se muestra nuevamente, sólo la sección donde se hace mención, de manera implícita, a la concepción cardinal, por lo tanto, se opta por no enumerar la imagen.



a. Observa el diagrama de Venn y analiza el razonamiento.
La probabilidad de que ocurra *B*, dado que ocurrió *A*, es decir, *P*(*B*/*A*), corresponde a la probabilidad de extraer bolitas numeradas con 4, 6, 8 o 10 (casos favorables), considerando los valores mayores que 3, es decir: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 (casos posibles).

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2012, SM S.A.

Aquí es posible observar, cómo se hace alusión a la noción de la probabilidad condicional como una concepción cardinal, pues al asociar los datos de los sucesos con los conceptos; "*casos favorables*" y "*casos posibles*", se relaciona con la cardinalidad de los sucesos.

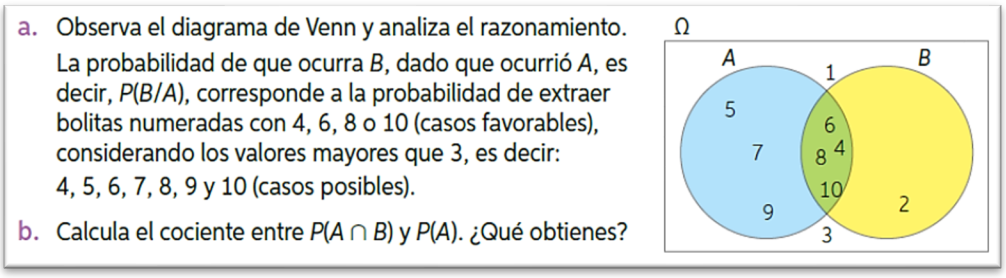
En resumen, los autores no consideran para el tratamiento de la probabilidad condicional, el definir el espacio muestral y lo que conlleva este, con respecto a la concepción del concepto en términos de la cardinalidad y la probabilidad de los sucesos.

- **MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta**

No se presencia un tratamiento en el texto 6°, que contraste la probabilidad condicional y conjunta, donde se considere la confusión de; "*creer que la probabilidad condicional es lo mismo que la probabilidad conjunta*", esto con el fin de mejorar la interpretación y comprensión del concepto en estudio, sobre todo en los planteamientos de los enunciados. Lo que se observa al respecto, es la relación implícita e intuitiva entre probabilidad condicional y simple, presente en el razonamiento que se muestra en la Figura 93, donde además se puede apreciar un diagrama de Venn que representa la intersección de los sucesos *A* y *B*.

Figura 93

Relación implícita e intuitiva entre probabilidad condicional y probabilidad simple



Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (p. 20), 2019, SM S.A.

Aquí la relación implícita se puede deducir, en el momento donde se incluye la información entre paréntesis, es decir, cuando se menciona; *casos favorables,* lo

que se debiera relacionar con $\#(A \cap B)$ y los *casos posibles* lo que se relaciona con la $\#B$ (suceso condicionante). Pero esto no se menciona, ya que se deja la tarea al estudiante de analizar el razonamiento, por lo tanto, existe la posibilidad de que el estudiante cometa el sesgo de interpretar el cálculo de la probabilidad condicional como la $P(B/A) = \frac{\#A}{\#B}$, lo cual es un error, o como la concepción cardinal de la probabilidad condicional; $P(B/A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$ sin tener en cuenta el espacio muestral en donde se define, lo que induce a error.

Con respecto a la probabilidad conjunta, no se observa una comparación o contraste con la probabilidad condicional sino más bien se aprecia una relación implícita entre ambos conceptos, ya que el cálculo de la P(B/A) se vincula, por una parte, a la cardinalidad de la intersección de ambos sucesos, esto es, $\#(A \cap B)$, siendo las bolitas numeradas 4, 6, 8 o 10 las correspondientes a la intersección. Esto, además se representa en el diagrama de Venn, mostrado en la Figura 91, donde se puede visualizar con mayor claridad la intersección de ambos sucesos. Luego, en la pregunta "b" se plantea calcular el cociente entre la probabilidad de la intersección $P(A \cap B)$ y la del suceso condicionante $P(B)$, lo implica relacionar ambos conceptos con el de la probabilidad condicional, en vez de diferenciarlos.

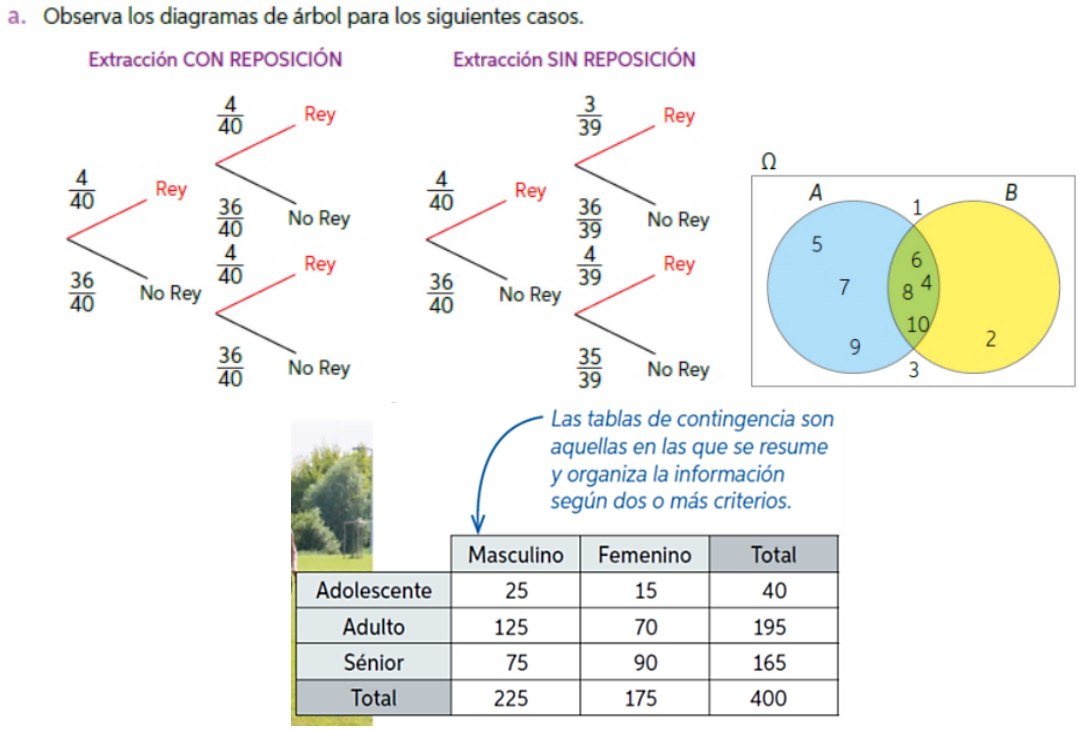
En resumen, no se considera contrastar la probabilidad conjunta y la probabilidad simple con la probabilidad condicional, sino por el contrario, se establecen relaciones implícitas para ser analizadas por el estudiante, las cuales inducen a los sesgos; de no saber diferenciar entre probabilidad conjunta y el concepto en estudio, como también a establecer la concepción cardinal de la probabilidad condicional, sin tener en cuenta el espacio muestral que la sustenta.

- **MTC7: Uso de representaciones para la probabilidad condicional**

En este texto 6°, se evidencia la inclusión de distintas representaciones a diferencia de los textos anteriores examinados, donde se consideraron a lo más una o dos, aparte de lo intuitivo y simbólico, para el tratamiento del concepto. En este texto, es posible observar por cada problema planteado para la aplicación y el tratamiento del concepto; el diagrama de Venn, el diagrama de árbol o la tabla de contingencia. En la Figura 94, se muestra un recuento de estas representaciones utilizadas en el texto 6°, para el desarrollo de la probabilidad condicional.

Figura 94

Representaciones para el desarrollo del concepto en estudio en el texto 6°



	Masculino	Femenino	Total
Adolescente	25	15	40
Adulto	125	70	195
Sénior	75	90	165
Total	225	175	400

Nota. Adaptado de *Matemática 3° y 4° medio* (pp. 20 y 21), 2019, SM S.A.

En resumen, se puede observar que los autores se preocupan por variar en el uso de las representaciones, partiendo por lo intuitivo y lo simbólico, para luego sumar el diagrama de Venn, el de árbol y la tabla de contingencia.

4.3. Síntesis del Capítulo

En este apartado, se pretende resumir la información analizada y descrita en los campos anteriores, de los 6 textos de estudios. La información recabada se registra en dos matrices de resumen y cotejo, siendo la primera la que sintetiza los conocimientos asociados al concepto y la segunda matriz, reúne las dificultades del razonamiento condicional. A continuación de cada matriz, se presenta una tabla de tendencia en porcentajes, de la matriz de resumen y cotejo correspondiente, lo que permitirá realizar las conclusiones en el capítulo 5, además de establecer el perfil del texto con respecto al tratamiento del concepto y las dificultades de razonamiento condicional.

Algunos elementos notables de la muestra son:

1. Todos los textos examinados corresponden a 3° medio, excepto el texto 6°, en el cual se incorpora 3° y 4° medio.
2. Entre los 6 textos de estudio, se contemplan tres periodos curriculares, siendo los textos 1° y 2°, del término del ajuste curricular 2005; los textos 3°, 4° y 5° corresponden al ajuste curricular 2009, desde el 2012 al 2019 y por último, el texto 6°, correspondiente al ajuste curricular 2019, el cual sigue vigente a la fecha.
3. Se mantiene una preferencia por los autores con el título de profesor en educación matemática y el grado de licenciado, sin estudios de postgrado. Sólo un autor de todos los textos, posee la especialización en estadística con el postgrado de Magíster en Estadística, correspondiente al 2° texto.

4.3.1. Resumen y Cotejo de contenidos

Como primer resumen de este capítulo, se presenta la Tabla 4.22, como la Matriz de Resumen y Cotejo de los contenidos y conceptos más esenciales Mrc, relacionados con el tratamiento de la probabilidad condicional, valorizando la presencia de cada uno en los textos examinados, como Completo e Incompleto y comparando, a la vez, la información resumida.

Tabla 4.22.

Matriz de Resumen y Cotejo de Descripción de contenidos Mrc

Campos y Aspectos		Texto 1°	Texto 2°	Texto 3°	Texto 4°	Texto 5°	Texto 6°
1. Vigencia del Texto		09 10	11	12	13 14	15 19	20 23
2. Curso		3°	3°	3°	3°	3°	3° y 4°
3. Conocimientos previos del concepto	3.1. Definición de espacio muestral	C	C				
	3.2. Espacio muestral finito equiprobable		C				
	3.3. Espacio muestral infinito numerable						
	3.4. Espacio muestral discreto/continuo						
	3.5. Regla de Laplace	C	I	I	C	C	I
	3.6. Teoría de Conjuntos		C				
	3.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
4. Presentación del concepto	4.1. Deductiva						C
	4.2. Inductiva	C	C	C	C	I	I
	4.3. Uso de lenguaje intuitivo	C	C	C	C	C	C
	4.4. Uso de lenguaje matemático	C	C	I	I	I	C

	4.5. Ejemplificación	C	C	C	C	C	
	4.6. Uso de representaciones	I	I	I	I	I	C
	4.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
5. Definición del concepto	5.1. Definición intuitiva	C	C	C	C	C	C
	5.2. Definición matemática	I	I	I	I	I	I
	5.3. Concepción probabilística $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$	I		I	I	I	C
	5.4. Concepción cardinal $P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}, con\ B \neq 0$		C				
	5.5. Definición del espacio muestral del concepto		I				
	5.6. $P(B) > 0$ para definir $P(A/B)$	I	C				C
	5.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
6. Propiedades básicas del concepto	6.1. Para todo suceso A, $0 \leq P(A/B) \leq 1$						
	6.2. $P(\Omega) = 1$ por lo que $P(\Omega/\mathrm{B}) = 1$						
	6.3. $P(\phi/\mathrm{B}) = 0$						
	6.4. El espacio muestral de $P(A/B)$ queda restringido a B.	I	I	I	I	I	
	6.5. $P(A/B)$ puede ser mayor, menor o igual a $P(A)$						
	6.6. Otro (especificar al final de la parrilla)						
7. Representaciones del concepto	7.1. Área de una sección rectangular						
	7.2. Diagrama de árbol	I		I	I	I	C
	7.3. Gráfico de barras			I	I		
	7.4. Diagrama de Venn						C
	7.5. Tablas de contingencia						C

	7.6. Resolución de Problema verbal	C	C	C	C	C	C
	7.7. Otro (especificar al final de la parrilla)						
8. Definición de independencia y sucesos mutuamente excluyentes	8.1. Definición intuitiva de independencia	I	I	I			C
	8.2. Definición matemática de independencia	C	C	C			C
	8.3. Ejemplificación de independencia	C	C	C			
	8.4. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes	C	I				
	8.5. Probabilidad de la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes.	C	C				
9. Definición de dependencia	9.1. Definición intuitiva de dependencia		I	C	C	C	C
	9.2. Definición matemática de dependencia	C	C				C
	9.3. Ejemplificación de dependencia	C	C	C			

Se desea recordar que, al registrar en la celda la letra “C”, quiere decir que el aspecto o descripción del contenido, está presente en el texto sin errores ni ausencias de conceptos. Si se registra “I”, quiere decir que el aspecto está presente, pero con errores o ausencias conceptuales. Y finalmente, si está en blanco la celda, corresponde a la ausencia del aspecto o descriptor, en el texto.

4.3.1.1. Tendencia de la Permanencia de los Contenidos en los Textos

Con la información de la matriz Mrc anterior, se pretende establecer la tendencia de la permanencia de cada **descriptor completo/incompleto** en los textos seleccionados, a lo largo de los tres periodos contemplados en este estudio, de 2009 a 2023.

En la Tabla 4.23, se puede apreciar la tendencia de la permanencia de los descriptores en porcentaje, como resultado de las observaciones cotejadas en la matriz anterior Mrc.

Observaciones:

i) En el caso de aquel descriptor, en donde resulte 0, esto se interpreta como la ausencia del descriptor, en todos o algunos de los textos.

ii) En el caso de aquel descriptor, en donde la suma de los porcentajes entre ambas categorías, no resulte 100. Esto se interpreta, como la ausencia del descriptor en algún(os) de los textos textos.

Tabla 4.23.

Tendencia de la Permanencia de los Descriptores en los textos de estudio

Variable Obser-vada	Descriptores	Permanencia del Descriptor (%)	
		Completo (C)	Incompleto (I)
3. Conocimientos previos del concepto	3.1. Definición de espacio muestral	33	0
	3.2. Espacio muestral finito equiprobable	0	0
	3.3. Espacio muestral infinito numerable	0	0
	3.4. Espacio muestral discreto/continuo	0	0
	3.5. Regla de Laplace	50	50
	3.6. Teoría de Conjuntos	17	0
	3.7. Otro (especificar al final de la parrilla)		
4. Presentación del concepto	4.1. Deductiva	17	0
	4.2. Inductiva	67	33
	4.3. Uso de lenguaje intuitivo	100	0
	4.4. Uso de lenguaje matemático	50	50
	4.5. Ejemplificación del concepto	83	17
	4.6. Uso de representaciones	17	83
	4.7. Otro (especificar al final de la parrilla)		

5. Definición del concepto	5.1. Definición intuitiva del concepto	100	0
	5.2. Definición matemática del concepto	0	100
	5.3. Concepción probabilística $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$	17	67
	5.4. Concepción cardinal $P(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$, con $B \neq 0$	17	0
	5.5. Definición del espacio muestral del concepto	0	17
	5.6. $P(B) > 0$ para definir $P(A/B)$	33	17
	5.7. Otro (especificar al final de la parrilla)		
6. Propiedades básicas del concepto	6.1. Para todo suceso A, $0 \leq P(A/B) \leq 1$	0	0
	6.2. $P(\Omega) = 1$ por lo que $P(\Omega/B) = 1$	0	0
	6.3. $P(\phi/B) = 0$	0	0
	6.4. El espacio muestral de $P(A/B)$ queda restringido a B.	0	83
	6.5. $P(A/B)$ puede ser mayor, menor o igual a $P(A)$	0	0
	6.6. Otro (especificar al final de la parrilla)		
7. Representaciones del concepto	7.1. Área de una sección de un rectángulo	0	0
	7.2. Diagrama de árbol	17	67
	7.3. Gráfico de barras	0	17
	7.4. Diagrama de Venn	17	0
	7.5. Tablas de contingencia	17	0
	7.6. Resolución de Problema verbal	100	0
	7.7. Otro (especificar al final de la parrilla)		
8. Definición de independencia y sucesos	8.1. Definición intuitiva de independencia	17	50
	8.2. Definición matemática de independencia	67	0
	8.3. Ejemplificación de independencia	50	0

	8.4. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes	17	17
	8.5. Probabilidad de la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes.	33	0
9. Definición	9.1. Definición intuitiva de dependencia	67	17
	9.2. Definición matemática de dependencia	50	0
	9.3. Ejemplificación de dependencia	50	0

1. Los espacios muestrales asociados a la probabilidad condicional como son: el espacio muestral finito equiprobable, el espacio muestral infinito numerable y el espacio muestral discreto/continuo, no son considerados en los textos de estudio como un conocimiento necesario para el tratamiento del concepto, por lo que se evidencia una ausencia de ellos en los textos, durante todo el periodo 2009 a 2023.
2. La regla de Laplace, está presente en todos los textos, verificándose sólo en tres ellos (1°, 4° y 5°) su planteamiento correcto, sin errores ni ausencias de conceptos. Por el contrario, en los otros tres textos (2°, 3° y 6°) se evidencia su presencia con errores y ausencias como, por ejemplo, no definir su espacio muestral.
3. La teoría de conjuntos, no se considera en los textos, a excepción del texto 1°, como un conocimiento previo, para iniciar el tratamiento de la probabilidad condicional.
4. El tratamiento del concepto se mantiene como inductivo en los textos, a excepción del texto 6°. Lo que se relaciona directamente con el uso correcto del lenguaje intuitivo, en todas las muestras. A diferencia del lenguaje matemático, que se presenta en los 6 textos, pero sólo en tres de ellos sin errores conceptuales.
5. La ejemplificación del concepto, está presente en los textos con un énfasis en la aplicación del mismo, a excepción del texto 6° donde no se presentan

ejemplos, sino que problemas de planteamiento para ser resueltos por el o la estudiante.

6. El uso de distintas representaciones, considerando las más elementales para el concepto (aparte del lenguaje intuitivo y simbólico), como son: el diagrama de Venn, el diagrama de árbol y/o la tabla de contingencia, no se consideran todas estas en los textos, a excepción del texto 6°, el cual sí incorpora las tres representaciones, en su tratamiento del concepto.
7. La definición intuitiva de la probabilidad condicional se presenta en todos los textos sin errores ni ausencias conceptuales, a diferencia de la definición matemática, la cual se presenta en todos los textos con errores y ausencias conceptuales.
8. La concepción algebraica de la probabilidad condicional, es decir, la $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *con* $P(B) > 0$, se presenta sin errores ni ausencias conceptuales sólo en el texto 6°, en cambio, en los demás textos se evidencia la presencia de esta expresión, pero incompleta, a excepción del texto 2° donde no se presenta esta concepción, ya que se da la preferencia a la expresión cardinal de la probabilidad condicional.
9. En ningún texto, se considera definir el espacio muestral de la probabilidad condicional, al momento de formalizar el concepto.
10. La restricción $P(B) > 0$, de la expresión algebraica del concepto, en términos de las probabilidades, se omite o no se incluye como parte de la expresión misma, excepto en dos de los textos (2° y 6°).
11. 4 de las 5 propiedades consideradas como elementales del concepto, siendo ellas: Para todo suceso A, 0≤P(A/B)≤1; P("Ω")=1, entonces P("Ω/B")=1; P("ϕ/B")=0 y P(A/B) puede ser mayor, menor o igual a P(A), no se presentan en ninguno de los textos. A diferencia de la propiedad; *El espacio muestral de* $P(A/B)$ *queda restringido a* B, la cual se menciona o insinúa en los textos, pero no se establece como una propiedad del concepto. A excepción del texto 6° donde está ausente.

12. La *Resolución de un Problema verbal,* es considerada como una representación del concepto, la cual es incluida por todos los textos, a diferencia del *Área de una sección de un rectángulo,* representación que no se incluye en ningún texto. Las representaciones como el diagrama de árbol, el diagrama de Venn y la tabla de contingencia, son incluidas en su conjunto solamente en el texto 6°, a excepción del diagrama de árbol, el cual se incluye en los otros textos con ciertas ambigüedades en su representación.
13. La definición intuitiva de independencia no se logra incluir en los textos en forma completa (a excepción del texto 6°), dando cuenta de ausencias y poca precisión en su definición. A diferencia de su formalización matemática, la cual es presentada por 4 de los textos en forma correcta, siendo tres de ellos, los que cuentan con una ejemplificación correcta del concepto de independencia.
14. La *definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes,* no presenta una tendencia a ser incluida por los textos, excepto por el texto 1°, el cual también incluye, la probabilidad de la unión de estos dos sucesos, al igual que el texto 2°.
15. La definición intuitiva de dependencia, está presente en 4 de los últimos textos del periodo contemplado, sin ausencias ni errores conceptuales. Esto se diferencia con la permanencia de su definición matemática, la cual está presente de manera correcta en 3 de los textos, pero sólo en el texto 6°, coinciden estar presentes ambas definiciones.
16. La ejemplificación del concepto de dependencia no toma un papel predominante en los textos, ya que sólo en 3 de ellos se evidencia su presencia sin errores ni ausencias de conceptos, en la aplicación del concepto.

4.3.2. Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento condicional

En la Tabla 4.24, se resume la información observada y analizada en los textos de estudio, referente a las dificultades de razonamiento condicional.

Tabla 4.24.

Matriz de Resumen y Cotejo de las Dificultades de Razonamiento Mrd

Campos y Acciones		Texto 1°	Texto 2°	Texto 3°	Texto 4°	Texto 5°	Texto 6°
MTC1	1.1. Tratamiento intuitivo de independencia	P	P	MP			P
	1.2. Tratamiento intuitivo de probabilidad condicional	P	P	P			P
	1.3. Relación intuitiva probabilidad condicional - independencia	P	P				P
	1.4. Relación formal probabilidad condicional - independencia	P	P				P
	1.5. Diferencia eventos independientes - eventos excluyentes	MP					
	1.6. Aplicación de independencia a **no sólo** sucesiones de experiencias			MP			
MTC2	2.1. Reducción del espacio muestral al suceso condicionante	MP	MP	MP	MP	MP	MP
MTC3	3.1. Relación condicional entre sucesos	P	P	P	P	P	P
	3.2. Relación causal entre sucesos	I	I	I	I	I	I
	3.3. Relación diagnóstica entre sucesos						
MTC4	4.1. Orden temporal natural entre sucesos	P	P	P	P	P	P
	4.2. Orden inverso de la temporalidad de los sucesos.			MP	MP	MP	

MTC5	5.1. Diferencia espacio muestral finito equiprobable – espacio muestral infinito numerable						
	5.2. Diferencia espacio muestral discreto – espacio muestral continuo			MP	MP	MP	
	5.3. Diferencia concepción cardinal – concepción probabilística, de la probabilidad condicional						
MTC6	6.1. Diferencia probabilidad simple – probabilidad condicional	P	P				
	6.2. Diferencia probabilidad conjunta – probabilidad condicional		P		MP		

Al igual que en la matriz anterior, aquí también se desea recordar que al registrar en la celda la letra "P", esto quiere decir, que la acción o descripción del campo MTCn está presente en el texto sin errores ni ausencias en el tratamiento del concepto. Si se registra "MP", quiere decir que la acción está medianamente presente, es decir, con errores y/o ausencias conceptuales. Y finalmente, si está en blanco la celda, corresponde a la ausencia de la acción o descriptor, en el texto.

Los campos MTCn corresponden a los campos genéricos de la matriz para el tratamiento del concepto, de los cuales se recuerda el nombre de cada uno.

MTC1: Definición de probabilidad condicional e independencia

MTC2: Propiedades de la probabilidad condicional

MTC3: Relación causal y condicional entre los sucesos

MTC4: Condicionalidad y falacia del eje temporal

MTC5: Espacio muestral y concepción cardinal

MTC6: Probabilidad condicional, simple y conjunta

MTC7: Representaciones de la probabilidad condicional

4.3.2.1. Tendencia de la Presencia de las Dificultades de Razonamiento

Con la información de la matriz Mrd anterior, se pretende establecer la tendencia de la presencia/no presencia de las dificultades de razonamiento condicional, como resultado de las observaciones y análisis de los textos.

En la Tabla 4.25, se puede apreciar la tendencia en porcentaje, a lo largo de estos tres periodos, que se engloban desde el 2009 al 2023.

Tabla 4.25.

Tendencia de los Descriptores de las Dificultades de Razonamiento Mrd

Campos y Acciones		Tendencia de Presencia (%)	Tendencia de Medio Presente (%)
MTC1	1.1. Tratamiento intuitivo de independencia	50	17
	1.2. Tratamiento intuitivo de probabilidad condicional	67	0
	1.3. Relación intuitiva probabilidad condicional - independencia	50	0
	1.4. Relación formal probabilidad condicional - independencia	50	0
	1.5. Diferencia eventos independientes-eventos excluyentes	0	17
	1.6. Aplicación de independencia a **no sólo** sucesiones de experiencias	0	17
MTC2	2.1. Reducción del espacio muestral al suceso condicionante	0	100
MTC 3	3.1. Relación condicional entre sucesos	100	0
	3.2. Relación causal entre sucesos	0	100
	3.3. Relación diagnóstica entre sucesos	0	0
MTC 4	4.1. Orden temporal natural entre sucesos	100	0
	4.2. Orden inverso de la temporalidad de los sucesos.	0	50

MTC 5	5.1. Diferencia espacio muestral finito equiprobable – espacio muestral infinito no equiprobable	0	0
	5.2. Diferencia espacio muestral discreto – espacio muestral continuo	0	50
	5.3. Diferencia concepción cardinal – concepción probabilística, de la probabilidad condicional	0	0
MTC6	6.1. Diferencia probabilidad simple – probabilidad condicional	33	0
	6.2. Diferencia probabilidad conjunta – probabilidad condicional	17	17

1. Tanto el tratamiento intuitivo del concepto de independencia como el de la probabilidad condicional, evidencian una tendencia a estar presentes en 4 de los 6 textos, de forma completa y sin errores ni omisiones, a excepción del texto 3° con respecto al concepto de independencia. Esto se refiere, a que los textos introducen ambos conceptos, de manera intuitiva, mediante el planteamiento de ejemplos o situaciones particulares que tratan ambos conceptos.
2. La relación intuitiva entre probabilidad condicional e independencia (*dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro*), al igual que la relación formal entre ambos conceptos $(Si\ P(B/A) = P(B)\ entonces\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B))$, no presentan una notoria tendencia en los textos, ya que se evidencia la presencia sólo en la mitad de ellos, siendo el periodo de 2012 a 2019 el que no incorpora ambos tratamientos.
3. Los textos no consideran plantear la diferencia entre eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes, esto quiere decir, que el sesgo; *creer que eventos independientes son lo mismo que eventos mutuamente excluyentes,* permaneció durante todo el periodo de 2009 a 2023, pues no se consideró esclarecer la diferencia entre ambos conceptos.

4. El sesgo de *creer que la independencia es sólo aplicable a sucesiones de experiencias*, también se ha establecido de manera implícita, durante el periodo contemplado por este estudio, ya que no se evidencia la presencia de ejemplos o problemas que impliquen no tan sólo sucesiones de eventos (con reposición/sin reposición), para la aplicación y comprensión del concepto de independencia.
5. Si bien se presenta una tendencia en todos los textos, de considerar la *reducción del espacio muestral al suceso condicionante,* esta acción no se establece como una propiedad elemental de la probabilidad condicional ni se profundiza en ella, ya que en algunos casos se insinúa o se menciona sólo para guiar el procedimiento de algún ejemplo.
6. La *relación condicional entre sucesos* al igual que el *orden temporal natural entre sucesos*, evidencian una completa presencia en los 6 textos, dando cuenta de la correspondencia que se establece entre la condicionalidad y el orden temporal natural entre los sucesos, pues esta acción es a la que más se recurre para ejemplificar el concepto, dejando de lado, invertir el orden temporal de los sucesos.
7. La *relación causal* entre los sucesos, se presenta en todos los textos, pero en forma implícita, sin especificar la causa y el efecto, por esto, se da la tendencia de MP, lo que pudo implicar durante el periodo de vigencia de los textos; la concepción errónea de que, siempre *el suceso condicionante es la causa y el suceso condicionado es el efecto.*
8. La relación diagnóstica entre sucesos no es considerada en ninguno de los textos, por lo tanto, se confirma la implicancia al sesgo anterior.
9. En ninguno de los textos se establece la diferencia entre espacio muestral finito equiprobable y espacio muestral infinito numerable, al igual que, la diferencia entre espacio muestral discreto y espacio muestral continuo, sólo se evidencia su presencia en 3 de los textos con inconsistencias y poca precisión.

10. No se considera en ningún texto plantear la diferencia entre la concepción cardinal y concepción probabilística, lo que implica a creer que ambas nociones son lo mismo.

CAPITULO 5

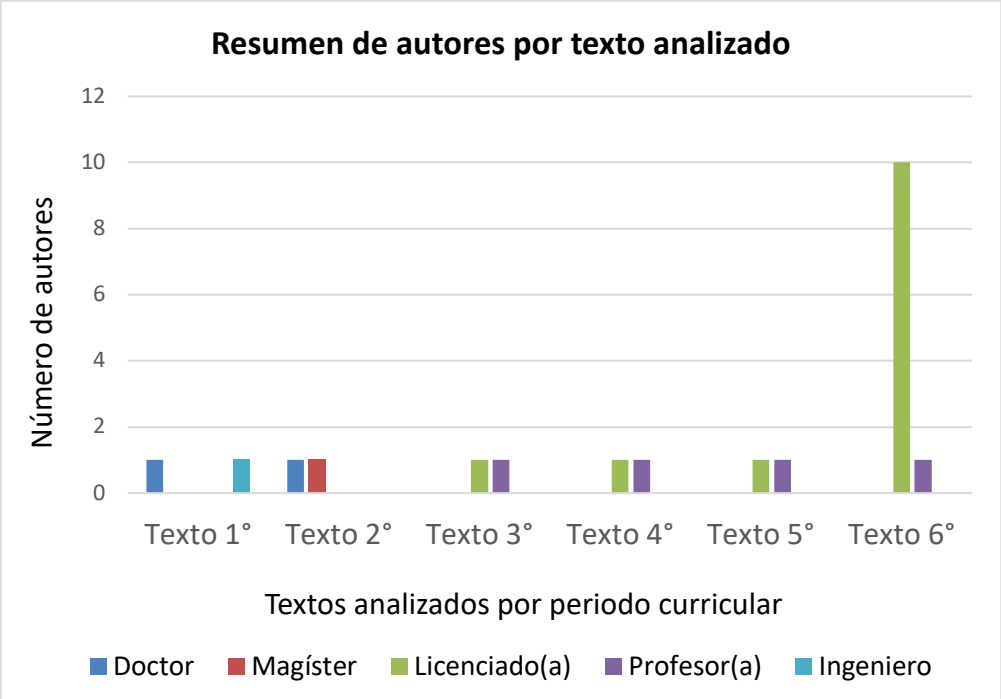
Resultados y Conclusiones

5.1. Resultados de autoría y editorial.

En este apartado, se pretende exponer y comparar los resultados con respecto a la información académica de los autores y de las editoriales de los textos, pues a partir de esta información es posible contextualizar los resultados relativos al contenido.

En el Gráfico 5.1, se presenta la información global de los autores con respecto a cada texto analizado.

Gráfico 5.1.



Aquí se puede observar, que los textos 3°, 4° y 5° mantienen los autores con el mismo grado académico, pues corresponden a los mismos autores durante los tres periodos en vigencia. Con respecto al texto 6°, se puede evidenciar una diferencia considerable en el número de autores comparado a los demás textos, prevaleciendo el grado de licenciado(a). Por último, se puede decir que durante

cuatro periodos de vigencia curricular, a partir del texto 3°, se mantuvo la participación de autores con el grado de licenciado(a) y profesor(a), por tanto, se puede concluir, que se ha visto una preferencia de autoría, marcada por estos grados académicos.

5.2. Triangulación.

Tabla 5.26.

Triangulación de Descripción de Contenidos y Dificultades de Razonamiento

Descripción de Contenidos (Aspectos)	Dificultades de Razonamiento (Acción)	Permanencia de Aspecto (Completo%)	Presencia de Acción (Presente%)
8.1. Definición intuitiva de independencia	Mrd(1.1)	17	50
5.1. Definición intuitiva del concepto	Mrd(1.2)	100	67
8.2. Definición matemática de independencia	Mrd(1.3)	67	50
5.2. Definición matemática del concepto	Mrd(1.4)	0	50
8.5. Definición intuitiva de sucesos mutuamente excluyentes	Mrd(1.5)	17	0
8.3. Ejemplificación de independencia	Mrd(1.6)	50	0

6.2. $\boldsymbol{P}(\Omega) = \mathbf{1}$ por lo que $\boldsymbol{P}(\Omega/\mathrm{B}) = \mathbf{1}$ 6.3. $\boldsymbol{P}(\phi/\mathrm{B}) = \mathbf{0}$ 6.4. El espacio muestral de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B})$ queda restringido a $\boldsymbol{B}$. 4.5. Ejemplificación del concepto	Mrd(2.1)	0 0 0 83	0
4.5. Ejemplificación del concepto 4.6. Uso de representaciones	Mrd(3.1) Mrd(3.2) Mrd(3.3) Mrd(4.1) Mrd(4.2)	0 17	100 0 0 100 0
3.2. Espacio muestral finito equiprobable 3.3. Espacio muestral infinito numerable	Mrd(5.1)	0 0	0
3.4. Espacio muestral discreto/continuo 5.3. Concepción probabilística $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) > \mathbf{0}$	Mrd(5.2)	0 17	0
5.4. Concepción cardinal $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = \frac{\#(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})}{\#(\boldsymbol{B})}$ con $\#\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$	Mrd(5.3)	17	0

3.5. Regla de Laplace 3.6. Teoría de Conjuntos 4.5. Ejemplificación del concepto 9.1. Definición intuitiva de dependencia 9.2. Definición matemática de dependencia 9.3. Ejemplificación de dependencia	Mrd(6.1) Mrd(6.2)	50 17 83 67 50 50	33 17

5.2.1. Conclusiones de la triangulación.

A partir de los datos obtenidos en la triangulación, en base a las Dificultades de Razonamiento y a los Aspectos de Contenidos, relativos al concepto de probabilidad condicional, es posible concluir que en ambas fuentes a lo largo del período 2009 a 2023, muestran los siguientes resultados:

1. MTC1-Mrd(1.j). Definición de probabilidad condicional e independencia
   - Los textos de estudio analizados, no marcan una tendencia evidente a considerar la relación intuitiva y matemática entre independencia y probabilidad condicional, como un aporte a la definición de ambos conceptos.
   - Los textos convergen en gran medida a considerar sólo el tratamiento intuitivo de la probabilidad condicional, como un aporte a su correcta definición intuitiva.
   - Se evidencia una convergencia entre los textos, a no plantear la diferencia entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes, lo que se relaciona con la tendencia, de 5 textos, a la ausencia y/o incorrecta definición de sucesos mutuamente excluyentes.
   - Para la ejemplificación del concepto de independencia, los textos tienden a no considerar la aplicación de este concepto a eventos que no se suceden.

2. MTC2-Mrd(2.j): Propiedades de la probabilidad condicional

- La propiedad relativa al espacio muestral, específicamente, relacionada con la *reducción del espacio muestral al suceso condicionante,* no se plantea en los textos como una propiedad elemental de la probabilidad condicional, al igual que las otras propiedades que se describen como elementales del concepto y que tienen relación con la probabilidad del espacio muestral, pues se evidencia una tendencia marcada a no exponerlas en los textos.
- La ejemplificación del concepto, si bien está presente en la mayoría de los textos, se concluye que en esta, no se consideran las propiedades elementales, sobre todo no se aborda en forma completa la reducción del espacio muestral al suceso condicionante.

3. MTC3 y MTC4; Mrd(3.j)-Mrd(4.j): Relación causal y condicional entre los sucesos/ Condicionalidad y falacia del eje temporal

- Los 6 textos plantean una completa y correcta relación condicional entre sucesos, es decir, que la condicionalidad expuesta, a través de los ejemplos y ejercicios se logra tratar sin inconvenientes, lo que se relaciona directamente con el correcto tratamiento del "orden temporal natural" entre los sucesos, exceptuando su orden inverso. Esto constata, lo mínimo y escueto del uso de las dificultades de razonamiento.
- Los textos analizados muestran una clara tendencia a no considerar la relación causal junto con la relación diagnóstica como un recurso válido para la comprensión e interpretación de la relación condicional, que se da entre sucesos en distintos contextos. La relación causal que se percibe en los textos, está exhibida de manera implícita, lo que induce a creer erróneamente que el suceso condicionante siempre es la causa y el condicionado el efecto.

- Del mismo modo, se evidencia la no consideración de la *falacia del eje temporal* en todos los textos, pues no se encuentran planteamientos de ejemplos o ejercicios que propongan invertir el *orden temporal natural* que se da generalmente entre los sucesos.

4. MTC5-Mrd(5.j): Espacio muestral y concepción cardinal
   - Los textos no muestran una tendencia a definir ni especificar el espacio muestral de la probabilidad condicional, sólo es posible observar una tendencia en el énfasis al significado de la probabilidad condicional de forma intuitiva y algebraica. De este modo, se deja la posibilidad a creer que el espacio muestral de la probabilidad condicional no debe cumplir condiciones o que debe ser el mismo que el de la regla de Laplace, como en algunos textos se pudo evidenciar.
   - También se concluye que, no se consideran como un conocimiento necesario y clave para el tratamiento del concepto; los espacios muestrales finito equiprobable, infinito numerable, discreto y/o continuo, pues en ningún texto se mencionan, lo que conlleva a no diferenciar entre sus características y a no poder relacionar el espacio muestral con la concepción correspondiente de probabilidad condicional; concepción cardinal y/o probabilística.
   - La concepción probabilística $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *con* $P(B) > 0$*,* se incorpora en los textos, pero con inconsistencias, a excepción del texto 6° donde no presenta errores ni ausencias. Aun así, al contar con su presencia, no es posible, relacionarla o contrastarla con la concepción cardinal del concepto, ya que esta no se incorpora en los textos, a excepción del texto 2° donde se considera correctamente, pero no coincide con la presencia de la otra expresión de la probabilidad condicional.

5. MTC6-Mrd(6.j): Probabilidad condicional, simple y conjunta

- Si bien los conceptos relacionados con la probabilidad simple y la probabilidad conjunta, siendo la regla de Laplace y la probabilidad de sucesos dependientes, respectivamente; están presentes en la mayoría de los textos analizados, no se evidencia una notoria tendencia a plantear; la diferencia entre probabilidad simple y probabilidad condicional, y entre probabilidad conjunta – probabilidad condicional. Esto se traduce a que, hay una clara tendencia a tratar los conceptos relacionados con la probabilidad condicional, en forma separada sin relacionarlos completamente ni contrastarlos.

5.3. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos y Preguntas.

Se procede primero a responder las preguntas de investigación y luego a fundamentar el cumplimiento de los objetivos.

5.3.1. Conclusiones específicas respecto a las preguntas de investigación.

En este apartado corresponde dar respuesta a las preguntas planteadas al inicio de este estudio.

- **Pregunta general:** ¿Cómo se ha difundido la probabilidad condicional y qué tratamiento se le ha dado en los libros de texto ministeriales utilizados en Chile entre 2009 y 2023?

En base a los resultados obtenidos, de las descripciones y análisis realizados en el capítulo 4 y de la información resumida en las matrices de resumen y cotejo junto a sus tablas asociadas, es posible dar respuesta a esta pregunta. Por lo tanto, se puede decir que la probabilidad condicional se ha difundido en los textos ministeriales chilenos, como un conocimiento requerido e indispensable para el aprendizaje y desarrollo de los y las estudiantes de 3° año medio, durante el periodo de 2009 a 2023. Y lo que respecta a su tratamiento, es que se ha podido

evidenciar una tendencia en los textos, a un tratamiento inductivo del concepto con énfasis en lo intuitivo de su significado y aplicación.

Respecto de las interrogantes específicas:

P1. ¿Cuál es el significado de la probabilidad condicional que se propone en los textos ministeriales durante el periodo de 2009 a 2023?
El significado de la probabilidad condicional, que resulta del análisis de los textos de estudio, contemplados en el periodo 2009 a 2023; es definido en forma intuitiva y simbólica, es decir, que la formalización utilizada a la cual tienden los textos examinados, combina ambos grados de formalización al momento de definir la probabilidad condicional, es decir, primero se expresa en lenguaje intuitivo y luego en lenguaje simbólico o algebraico.

P2. ¿Cuáles son los cambios en el tratamiento de la probabilidad condicional en los libros de texto ministeriales, a lo largo del periodo contemplado?
Esta respuesta se obtiene, a partir, de la observación de las matrices de resumen y cotejo presentadas al final del capítulo 4, donde se pueden evidenciar pocos cambios y mejoras en el tratamiento del concepto, a lo largo del periodo. Estos corresponden a:

- La concepción cardinal de la probabilidad condicional se considera al inicio del periodo, en el texto 2°, pero luego no se continúa con ella en los siguientes textos.
- La ejemplificación del concepto es considerada desde el inicio del periodo hasta el término del ajuste curricular 2009, luego en el texto 6°, actualmente vigente, ya no se considera dar ejemplos de la aplicación del concepto.
- Se da mayor énfasis, a las representaciones para la probabilidad condicional, en el periodo del ajuste curricular 2019, es decir, en el texto

6°, siendo estas: el diagrama de Venn, el diagrama árbol y la tabla de contingencia.

P3. ¿Se consideran los conocimientos previos que son claves para el tratamiento de la probabilidad condicional?

La respuesta aquí, es posible verla con mayor detalle en la matriz de resumen y cotejo Mrc, en el apartado 4.3.1. Donde es posible evidenciar, que los conocimientos elementales para iniciar el tratamiento de la probabilidad condicional, no son considerados en su mayoría por los textos, entre ellos; los tipos de espacios muestrales asociados al concepto, siendo algunos los que se consideran al inicio del periodo, sólo por dos textos, y luego no se incluyen, quedando un vacío al respecto.

P4. ¿Se plantean las propiedades básicas de la probabilidad condicional?

Se evidencia que, de las 5 propiedades consideradas en este estudio, como básicas de la probabilidad condicional, sólo 1 se presenta en los textos examinados, siendo esta; *"El espacio muestral de* $P(A/B)$ *queda restringido a* B*",* pero sin profundizar en ella ni establecerla como propiedad del concepto. Las demás propiedades no son consideradas, a lo largo de todo el periodo.

P5. ¿Cuáles son las representaciones que se utilizan en los textos para trabajar la probabilidad condicional?

En general, la representación que se utiliza por todos los textos, es la "Resolución de un problema verbal" y el diagrama de árbol, pero este último se presenta con ciertas ambigüedades y falta de precisión. Las otras representaciones (área de una sección rectangular, gráfico de barras, diagrama de Venn y Tablas de contingencia) no son consideradas en su plenitud por los textos, a excepción del texto 6°, que incluye el diagrama de Venn, diagrama de árbol y tabla de contingencia.

P6. ¿Se presenta la probabilidad condicional en los textos de estudio, de manera que se eviten errores en la comprensión del mismo?

En la Tabla 4.22 (matriz Mrc), es posible evidenciar que todos los textos del periodo, presentan errores o ausencias de conceptos en la definición matemática del concepto, al igual que la expresión algebraica de la probabilidad condicional, la cual presenta en la mayoría de los textos la ausencia de la restricción $P(B)>0$. Y por último, no se presenta la concepción cardinal del concepto, en paralelo a la expresada en términos de probabilidades, lo que induce a cometer el error de creer que ambas concepciones son lo mismo.

P7. ¿Se realiza un tratamiento intuitivo y formal del concepto de probabilidad condicional para facilitar la comprensión de sus elementos?

Es posible evidenciar que, en 4 de los textos, se realiza un tratamiento intuitivo consistente, no así con el tratamiento formal del concepto, el cual presenta inconsistencias en todos los textos examinados, lo que condice con las falencias del uso del lenguaje matemático en 3 de los textos. Por lo tanto, si bien, ambos tratamientos están presentes en los textos de estudio; la comprensión de la probabilidad condicional se ve favorecida, más por el tratamiento intuitivo de algunos textos, que por el tratamiento formal.

P8. ¿Se consideran las dificultades de razonamiento condicional como aporte al tratamiento del concepto de probabilidad condicional?

En general, se evidencia que sólo una de las dificultades de razonamiento condicional, es considera por 4 de los textos, como aporte al tratamiento del concepto, siendo esta dificultad relativa a, la *Comprensión intuitiva de la probabilidad condicional e independencia.* Las demás dificultades, evidencian no ser consideradas por los autores como un aporte al concepto, en un gran porcentaje.

5.3.2. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos

Corresponde en este apartado determinar si se cumplieron los objetivos propuestos.

- **Objetivo general**

El objetivo general "Caracterizar el tratamiento de la probabilidad condicional en los libros de texto ministeriales mediante un análisis conceptual y de contenido durante el período de 2009 a 2023 en Chile", ha sido alcanzado en plenitud, logrando establecer tendencias con respecto a la presentación y el tratamiento del concepto por cada texto y en conjunto, las que se establecieron en **caracterizaciones,** como resultado de la síntesis de la información recabada, en el apartado 4.3.

En relación a los objetivos específicos:

- **Objetivo OE1:**

Se logró comparar los tratamientos del significado de la probabilidad condicional de los textos ministeriales durante el periodo de 2009 a 2023 en Chile, determinando una tendencia en los textos, sobre la permanencia de los conceptos asociados al significado, durante el periodo descrito. Esto se evidencia en los apartados del 4.3.2 y 4.3.2.1 donde se sintetiza la información relacionada, principalmente, con el tratamiento del concepto. Por ejemplo, el tratamiento intuitivo del concepto de probabilidad condicional resulta tener una permanencia correcta (sin errores ni ausencias conceptuales) en 4 textos de los 6 examinados.

- **Objetivo OE2:**

Este objetivo, dirigido a identificar posibles errores conceptuales o procedimentales en el tratamiento de la probabilidad condicional, se logra en su

plenitud. Comenzando en el apartado 4.2, en los campos genéricos donde se pudieron describir los conceptos y procedimientos del tratamiento del concepto, identificando errores, inconsistencias y ausencias en el desarrollo de la probabilidad condicional.

- **Objetivo OE3:**

Con respecto a este objetivo, el cual apunta a detectar cuáles han sido los conceptos que sustentan el tratamiento de la probabilidad condicional en los textos ministeriales del periodo 2009 a 2023 en Chile. Se pudieron hallar estos conceptos, en el apartado 4.3, mediante las descripciones y los análisis de los contenidos y procedimientos. Los que luego se registraron en la matriz de resumen y cotejo, del apartado 4.3 donde se resumen los conceptos más elementales para el tratamiento de la probabilidad condicional. Obteniendo como tendencia en el sustento del tratamiento, a los conceptos; regla de Laplace, definición intuitiva y matemática del concepto, condicionalidad entre sucesos e independencia entre sucesos. Estos son los conceptos que figuran con una tendencia notoria en el tratamiento de la probabilidad condicional, en los textos examinados. Dando cuenta, de la ausencia de otros conceptos elementales para el tratamiento del concepto, entre ellos, la definición del espacio muestral de la probabilidad condicional, concepto que no se incluye en ninguno de los textos.

- **Objetivo OE4:**

Este objetivo indica, analizar los tipos de representaciones que se utilizan en el tratamiento del concepto, el cual se cumple a cabalidad, mediante el campo MTC7 de cada apartado de la matriz MTCn para el tratamiento del concepto y el análisis de las dificultades de razonamiento. Por tanto, se encuentra que las representaciones más utilizadas en los textos son: el lenguaje intuitivo, lenguaje matemático, el diagrama de árbol y el diagrama de Venn, no exentos de errores y/o ausencias conceptuales.

- **Objetivo OE5:**

Con respecto a este objetivo, el cual pretende analizar si los textos ministeriales consideran los distintos tipos de dificultades con que se puede enfrentar el estudiante ante la utilización de la probabilidad condicional. Este se logra satisfactoriamente, lo que se puede evidenciar en los apartados 5.3 y 5.3.1, en los cuales se realiza la triangulación entre los contenidos descritos y las dificultades de razonamiento, y las conclusiones.

- **Objetivo OE6:**

En base a los resultados obtenidos, de las descripciones y análisis de los textos, se ha podido evidenciar cómo se ha favorecido mínimamente la comprensión de los distintos elementos del significado de la probabilidad condicional, durante la vigencia de los textos. Esto se puede visualizar con más detalle en el apartado 5.3 de Triangulación. Los conceptos que se han visto favorecidos en su comprensión, han sido la definición intuitiva de la probabilidad condicional y dependencia, la definición matemática de independencia, lo que se relaciona con el énfasis en la ejemplificación del concepto, específicamente en la resolución de problemas, en el uso de lenguaje intuitivo y en un tratamiento inductivo e intuitivo de la probabilidad condicional.

5.4. Conclusiones generales.

En base a los resultados obtenidos y descritos en los apartados anteriores, es posible concluir que; este estudio evidencia la escasa presencia de las dificultades de razonamiento condicional, en el tratamiento del concepto en estudio, en una muestra de 6 textos ministeriales chilenos que comprenden el periodo de 2009 a 2023. Sumándose a esto, la identificación de errores, inconsistencias y ausencias conceptuales en la presentación y desarrollo del concepto.

La posibilidad de contar con un autor, especialista en el área de Estadística y Probabilidades, y que considere las dificultades de razonamiento condicional, para la construcción futura de este eje temático en 3° medio; permitirá reducir los sesgos asociados al tratamiento de la probabilidad condicional, favoreciendo la comprensión y aplicación del concepto, entre otros contenidos asociados.

Uno de los principales aportes de esta tesis, está en la Metodología que se siguió, la cuál puede ser tomada como modelo para la investigación de otros conceptos matemáticos, siempre conservando un diseño descriptivo – interpretativo, que pretende buscar elementos que permitan dar un sustento a las decisiones futuras, con la intención de regular las propuestas de enseñanza y aprendizaje de un contenido específico, poniendo atención a los fenómenos que resultan de la revisión de textos de estudio.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación (2012). *Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012.* [Archivo PDF]. *https://archivos.agenciaeducacion.cl/Informe_Nacional_Resultados_Chile_PISA_2012.pdf*

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Evaluaciones Nacionales e Internacionales de Aprendizaje, Periodo 2004-2018*.

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *PISA 2018: Entrega de resultados.* [Archivo PDF]. *https://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf*

Andréu, J. (1998). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada.* [Archivo PDF]. http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2018/02/Andreu.-analisis-de-contenido.-34-pags-pdf.pdf

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la Educación Estadística?. *Blaix15*, 2-13. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Grupo de Educación Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302

Batanero, C. (2006). *Razonamiento Probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo.* [Archivo PDF]. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf

Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. (2013). *Definiciones de la Probabilidad Condicional por futuros Profesores.* Investigación en Educación Matemática XVII, 237-244.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El Discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Gedisa editorial.

Díaz, C. e Inmaculada de la Fuente. (2005). Razonamiento sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, 59, 245-260. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/epsilon_condicional.pdf

Díaz, C. e Inmaculada de la Fuente. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Revista Electrónica de Metodología Aplicada, 12*(1), 1-15.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Boletim de Educacao Matemática, 26(44), 1207-1225.*

Fontaine, L. y Eyzaguirre, B. (1997). *El Futuro en riesgo. Nuestros textos escolares.* Centro de Estudios Públicos.

Fontaine, L. y Eyzaguirre, B. (1997). *Por qué es importante el texto escolar.* [Archivo PDF]. https://www.estudiospublicos.cl/index.php/cep/article/%20view/1053/1810

Huerta, P. y Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática AIEM,* 11, 87-106.

Huerta, P. y Lonjedo, M. A. (2003). *Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria.* XI Jornada sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM.

Isoda, M. y Katarigi, S. (2014). *Pensamiento matemático: Cómo Desarrollarlo en la sala de clases.* Centro de Investigación Avanzada en Educación CIAE, Universidad de Chile.

Ministerio de Educación (2005). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media. Actualización curricular 2005*. Gobierno de Chile. [Archivo PDF]. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/269/MONO-213.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media. Actualización curricular 2009.* Gobierno de Chile. [Archivo PDF]. https://peib.mineduc.cl/wp-content/uploads/2018/05/Objetivos-fundamentales-y-contenidos-mi%CC%81nimos-obligatorios-de-la-educacio%CC%81n-Actualizacio%CC%81n-2009-.pdf

Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Curriculum y Evaluación UCE. Gobierno de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Curriculum y Evaluación UCE. Gobierno de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *Revista de didáctica de las matemáticas,* 5, 37-44.

Ortiz de Haro, J. J., (2015), Los problemas de probabilidad en los libros de texto de bachillerato. [Archivo PDF]. http://www.estadis.net/3/actas/COM/31.%20LOS%20PROBLEMAS%20DE%20PROBABILIDAD%20EN%20LOS%20LIBROS%20DE%20TEXTO%20DE%20BACHILLERATO.pdf

Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana 49*(1), 53-64.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66

Vidal Cortés, R. A. (2009). *Las raíces y radicales en libros de texto en chile (1969 – 2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas*. [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Chile].