UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación



Estudio Exploratorio sobre la Formación de Profesores de Matemática para la Enseñanza de Inferencia Estadística a través de Intervalos de Confianza: Una Aproximación desde el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático a los Errores en la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza por parte de Futuros Profesores de Matemática

NICOLÁS EDUARDO MUÑOZ MORALES

PROFESORA GUÍA: ROSA MYRIAM MONTAÑO ESPINOZA

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

SANTIAGO, CHILE

2023

© Nicolás Eduardo Muñoz Morales, 2023

Todos los derechos reservados

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar los tipos de errores conceptuales y procedimentales presentes en la construcción e interpretación de intervalos de confianza por parte de profesores de matemática en formación, para proponer instancias de apoyo y mejora en los procesos de formación docente en el área de inferencia estadística que propicien la mejora de resultados en la evaluación nacional diagnostica de la formación inicial docente. Para lograrlo, se utilizó una metodología mixta con un diseño concurrente sin predominancia de un enfoque sobre otro y se utilizaron tres instrumentos de recolección de datos cualitativos y cuantitativos que permitieron el cruce de información una vez que fueron aplicados considerando la faceta epistémica del modelo del conocimiento didáctico del profesor de matemática. Los resultados dan cuenta de percepciones poco favorables respecto del nivel de preparación para la enseñanza de determinados conceptos y procedimientos asociados a la construcción e interpretación de intervalos de confianza, así como también dan cuenta de una algoritmización en dichos procesos.

Palabras Clave: Educación estadística – Inferencia estadística – Intervalos de confianza – Conocimiento didáctico matemático – Formación de profesores

Abstract

The objective of this research is to analyze the types of conceptual and procedural errors present in the construction and interpretation of confidence intervals by mathematics teachers in training, to propose instances of support and improvement in teacher training processes in the area of statistical inference that promote the improvement of results in the national diagnostic evaluation of initial teacher training. To achieve this, a mixed methodology was used with a concurrent design without predominance of one approach over another, and three qualitative and quantitative data collection instruments were used that allowed the exchange of information once they were applied considering the epistemic facet of the mathematics teacher's didactic knowledge model. The results show unfavorable perceptions regarding the level of preparation for teaching certain concepts and procedures associated with the construction and interpretation of confidence intervals, as well as an algorithmization in these processes.

Keywords: Statistical education – Statistical inference – Confidence intervals – Mathematical didactic knowledge – Teacher training

Tabla de contenido

ntrodu	ıcción	2
Capítu	o 1: Problema de Investigación	3
1.1	Antecedentes	3
1.2	Educación Estadística en Chile	5
1.3	Pregunta de Investigación	9
1.4	Supuesto	9
1.5	Objetivos	9
1.5	1 Objetivo General	9
1.5	2 Objetivos Específicos	. 10
Capítu	lo 2: Marco Teórico	10
2.1	Conocimiento Profesional del Profesor de Matemática	10
2.1	1 Modelo del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	. 11
2.1	2 Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)	. 12
2.1	3 Modelo de la Proficiencia	. 13
2.1	4 Modelo del Cuarteto del Conocimiento (KQ)	. 14
2.1	5 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)	. 15
2.1	6 Comparación de las diversas perspectivas teóricas	. 16
2.2	Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)	17
2.3	Aspectos Disciplinares y Didácticos sobre la Construcción e Interpretación de Intervalos	de
Confi	anza	21
2.3	1 Enfoques para la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza	. 21
2.3	2 Análisis sobre la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza	. 23
2.3	3 Errores en la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza	. 29
Capítu	lo 3: Marco Metodológico	3 3

3	.1	Aspectos Metodológicos Generales	33
	3.1.1	1 Enfoque	34
	3.1.2	2 Diseño	34
	3.1.3	3 Muestra	35
3	.2	Elaboración de Instrumentos	35
	3.2.1	1 Cuestionario KPSI sobre Intervalos de Confianza	35
	3.2.2	2 Cuestionario de Conocimientos sobre Construcción e Interpretación de Intervalos de confianza	36
	3.2.3	3 Escala Likert de Dificultad Sobre Intervalos de Confianza	41
3	.3	Procesamiento de la Información	41
Сар	oítulo	o 4: Resultados y Análisis	41
4	.1	Resultados primer instrumento	42
	4.1.1	Resultados obtenidos respecto del estudio de los conceptos y procedimientos durante el proceso	de
	form	nación inicial	42
	4.1.2	Resultados obtenidos respecto del nivel de conocimiento alcanzado sobre los conceptos	, y
	proc	cedimientos durante el proceso de formación inicial	43
4	.2	Resultados segundo instrumento	45
4	.3	Resultados tercer instrumento	46
4	.4	Análisis cruzado de resultados	47
	4.4.1 conf	Sobre conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos fianza 47	de
	4.4.2 conf	Sobre los conocimientos disciplinares asociados a la construcción e interpretación de intervalos fianza 49	de
4	.5	Análisis pregunta abierta	52
	4.5.1	1 Respuesta número 1	53
	4.5.2	2 Respuesta número 2	54
	4.5.3	Respuesta número 3 y 4	55
	454	4 Respuesta número 5	57

4.5.5	Respuesta número 6 y 7	58
4.5.6	Respuesta número 8	59
Capítulo 5	: Conclusiones	60
Referencia	as	64
Apéndices	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	72
Instrume	ento 1	72
Instrume	ento 2	74
Instrume	ento 3	76
Índice	de tablas	
	Resumen resultados obtenidos en la ENDFID en los años 2019, 2020 y 2021 por nas regulares.	
Índice (de ilustraciones	
Ilustración 2	2-1: Categorías del Conocimiento propuestas por Shulman (1987)	12
	2-2: Dimensiones y Categorías del Modelo del Conocimiento Matemático para la 009, p.16)	
	2-3: Categorías del Modelo de la Proficiencia elaborado a partir de lo expuesto er	
Ilustración 2	2-4: Categorías y subdominios del modelo MTSK (Carrillo et al., 2012)	16
llustración 2	2-5: Facetas y Niveles del Conocimiento del Profesor (Godino, 2009, p.21)	19
llustración 2	2-6: Reestructuración del CDM propuesta por Pino-Fan et al. (2015, p.98)	20
llustración 2	2-7: Prácticas, objetos y procesos matemáticos (Godino, 2009, p.22)	21
Ilustración 2	2-8: "Objetos matemáticos ligados al intervalo de confianza" (Olivo, 2008, p.15)	27
	2-9: Componentes que Caracterizan el Razonamiento Inferencial Informal (Estrella	• •
	2-10: Tipos de errores asociados al trabajo con intervalos de confianza elaborado en del Mar et al. (2019)	•

Ilustración 2-11: Prácticas Matemáticas Involucradas en la Solución de un Ejercicio de Intervalo	de
Confianza (Batanero et al., 2020b, p.694)	.31
Ilustración 2-12: Errores identificados por Roldan-López et al. (2020a) en la aplicación de 6 ítems	de
selección múltiple sobre intervalos de confianza.	.32
Ilustración 3-1: Proceso de análisis de resultados	.41
Ilustración 4-1: Respuesta N°1 a pregunta abierta	.53
Ilustración 4-2: Respuesta N°2 a pregunta abierta	.54
Ilustración 4-3: Respuesta N°3 a pregunta abierta	.55
Ilustración 4-4: Respuesta N°4 a pregunta abierta	.56
Ilustración 4-5: Respuesta N°5 a pregunta abierta	.57
Ilustración 4-6: Respuesta N°6 a pregunta abierta	.58
Ilustración 4-7: Respuesta N°7 a pregunta abierta	.58
Ilustración 4-8: Respuesta N°8 a pregunta abierta (parte 1)	.59
Ilustración 4-9: Respuesta N°8 a pregunta abierta (parte 2)	.60

Índice de Gráficos

Gráfico 4-1: Resultados sobre el estudio de conceptos y procedimientos relacionados con la construcció
e interpretación de intervalos de confianza durante formación inicial4
Gráfico 4-2: Resultados sobre el grado de preparación para la enseñanza de conceptos y procedimiento
obre construcción e interpretación de intervalos de confianza4
Gráfico 4-3: Porcentaje de respuestas correctas en cada ítem del cuestionario de conocimientos sobr
construcción e interpretación de intervalos de confianza4
Gráfico 4-4: Resultados sobre el grado de dificultad que futuros profesores de matemática atribuyen
conceptos y procedimientos relacionados con la construcción de intervalos de confianza4

Introducción

Durante los últimos años la educación estadística ha experimentado un notable avance, siendo incluso mayor que el de otras ramas de la matemática (Batanero, 2018). Lo anterior ha logrado que esta área del conocimiento adquiera un lugar cada vez más relevante en el contexto educativo escolar y universitario a nivel global. Ruz et al. (2018) señalan que el estar educado estadísticamente se ha vuelto de gran valor para la mejora de la calidad de vida de las personas. Durante este periodo de desarrollo han surgido avances en la conceptualización pedagógica y la creación de estrategias innovadoras con el objetivo de mejorar la enseñanza y aprendizaje de la estadística, no obstante aún quedan temas por investigar dentro de los cuales se encuentra la formación de profesores. Esta investigación pretende abordar de forma exploratoria la formación del profesorado de matemática para la enseñanza de inferencia estadística a través de intervalos de confianza, en este sentido, Batanero (2018) señala que la formación de profesores se debe atender desde las facetas del conocimiento didáctico matemático necesarias para llevar a cabo la enseñanza de la estadística, pues puede que estos no estén familiarizados con su enseñanza desde una perspectiva informal, además de que se debe incluir el conocimiento matemático, filosófico, psicológico y didáctico.

La educación estadística en Chile ha experimentado cambios significativos durante los últimos años, especialmente con la incorporación de nuevos contenidos de inferencia estadística en la formación escolar lo que exige a su vez docentes más preparados para su enseñanza. No obstante, los resultados de mediciones nacionales sobre la formación del profesorado en esta área han alertado de dificultades en la comprensión de temas como los intervalos de confianza y los test de hipótesis. En este contexto, este estudio pretende analizar que tipos de errores están presentes en el trabajo con intervalos de confianza a fin de recomendar mejoras para los procesos de formación docente, cumpliendo de esta forma con uno de los indicadores del perfil de egreso del programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile en el que esta investigación se realiza como parte del proyecto de graduación.

A fin de lograr lo anterior, esta investigación se estructura en cuatro capítulos. El primer capítulo da cuenta de la problemática que se aborda en este estudio a partir de una revisión de antecedentes internacionales y nacionales que proporcionan una contextualización a esta. En el segundo capítulo se presenta el sustento teórico a partir del cual se aborda la problemática de estudio y que posteriormente se utiliza para el análisis de resultados y la elaboración de conclusiones. El tercer capítulo presenta el sustento metodológico de la investigación. Finalmente el cuarto capítulo corresponde al análisis de resultados obtenidos con los instrumentos diseñados para esta investigación.

Capítulo 1: Problema de Investigación

El propósito de este capítulo consiste en establecer el contexto para el desarrollo de este trabajo de graduación en el ámbito de la educación estadística, centrándose específicamente en la formación de profesores de matemática tanto en su dimensión disciplinar como en su dimensión didáctica. Para lograr lo antes mencionado, se lleva a cabo una exhaustiva revisión de literatura con la intención de identificar y exponer una problemática de estudio alineada coherentemente con las líneas de trabajo definidas por el programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile, actuando de esta forma como respuesta a uno de los dominios planteados en su perfil de egreso. Posteriormente, a partir de la problemática se articula una pregunta y un supuesto de investigación que orientan y sirven como guía principal para el estudio. Además, se formula un objetivo general y un conjunto de objetivos específicos que brindan estructura para el diseño y ejecución de la investigación.

1.1 Antecedentes

En los últimos años la relevancia de la enseñanza de la estadística ha ido en aumento, impulsada por la necesidad imperante de que los ciudadanos adquieran habilidades para leer, interpretar y tomar decisiones fundamentadas en la gran cantidad de información a la que están expuestos a través de diversos medios, ya sean digitales o escritos. (Costa et al., 2011; Friz et al., 2011; Estrella, 2014; Juárez et al. 2014; Ramos, 2019; Ferrari et al. 2020; Ferreira et al., 2021; Guven et al., 2021). A pesar de la relevancia de esta disciplina, persiste su inclusión en los currículos de matemática, lo que no solo reduce las oportunidades de los docentes para fomentar el desarrollo del pensamiento estadístico entre los estudiantes (Zapata-Cardona et al., 2017) sino que además puede ocasionar tensiones en la formación de profesores responsables de guiar los procesos de enseñanza de la estadística debido a las diferencias epistemológicas entre ambas disciplinas (Giaconi et al., 2022).

De acuerdo con Friz et al. (2011) y con Ferrari et al. (2020) ante la emergencia de la estadística como una disciplina cada vez más relevante para la sociedad, surge la necesidad de modificar los procesos de formación de los estudiantes en las escuelas y por consiguiente la de estudiar la formación en esta área de los responsables de enseñarla. En este sentido, Gonçalves et al. (2011) hace aproximados 12 años alertó, aunque no por primera vez, sobre lo insuficiente e inapropiadas que resultan las formas tradicionales de incluir los contenidos de estadística y probabilidad en la formación inicial docente. Por otro lado, años más tarde, Juárez et al. (2014) y Zapata-Cardona et al. (2017) señalan que la formación estadística de los profesores es insuficiente ya que durante su formación profesional cuentan con pocos cursos en esta área. Al respecto, los primeros autores resaltan la importancia que tiene para los procesos de cambio en la enseñanza de la estadística en las escuelas, por un lado, la percepción del profesor respecto de la utilidad de la estadística para sus estudiantes, y por otro su preparación en el área. Lo anterior, se reafirma en la investigación realizada por Ruz et al. (2019) quiénes indican que para lograr progresos en el área de la educación estadística la clave son los profesores. En concordancia con lo anterior, a continuación, se

sintetizan los aportes de diversas investigaciones que abordan tanto las percepciones y comprensión de los docentes sobre la estadística, como la formación que reciben tanto en el aspecto disciplinar como en el didáctico.

En primer lugar, del Hernández et al. (2013) manifiestan la necesidad de crear comunidades que fomenten el apoyo para avanzar en la formación de los estudiantes y en el propio aprendizaje del docente, mientras que Zapata-Cardona et al. (2017) destacan que los procesos de formación inicial docente deben incluir a la estadística como una herramienta de investigación y resolución de problemas reales, mientras que la formación continua se debe realizar a partir de la reflexión de la propia práctica docente. Al respecto, Zapata-Cardona (2020) considera que el desarrollo profesional del profesor se ve potenciado por la colaboración entre ellos y los investigadores en educación estadística, a la vez que Ferrari et al. (2020), recomiendan continuar con la investigación sobre la formación estadística de los profesores de matemática, de modo tal que se generen cursos que permitan aumentar el conocimiento y las técnicas didácticas para mejorar los procesos de enseñanza de esta disciplina.

En segundo lugar, la investigación realizada por Friz et al. (2011) da cuenta de la influencia que tienen los mecanismos de enseñanza y aprendizaje experimentados en la escuela, en la comprensión que los futuros profesores tienen sobre la estadística. En este sentido, Juárez et al. (2014) señalan que diversas investigaciones en educación estadística revelan que tanto docentes como estudiantes perciben esta disciplina como una materia que implica el memorizar fórmulas y procedimientos para la resolución de un problema, lo que es reafirmado por Zapata-Cardona et al. (2017) al mencionar que los profesores en ejercicio perciben la estadística como una ciencia desarticulada, instrumental y técnica. Por otro lado, Ramos (2019) señala que un factor que influye en la preparación del profesor para la enseñanza de la estadística son sus actitudes desfavorables respecto de la disciplina, las que además pueden ser transmitidas a los estudiantes a través del currículo oculto. Al respecto, Navarro-Asencio et al. (2021) sostienen que los futuros maestros no tienen actitudes positivas hacia la estadística y la consideran poco útil, por ello destacan la importancia de conocer y corregir estas apreciaciones negativas a fin de evitar sus efectos negativos como son su transmisión a los estudiantes y aumentar la cantidad de docentes que integren la investigación a su carrera profesional. Finalmente, Gorham et al. (2019) sostienen que la comprensión desarrollada por los docentes respecto de la estadística se ha estudiado con menor detalle en comparación con la desarrollada por los estudiantes escolares, en concordancia, Arican et al. (2020) señalan la necesidad de investigar respecto de la comprensión de la estadística desarrollada por los docentes para ayudarles a evaluar su habilidad para enseñar esta disciplina.

Por último, respecto de la formación del profesor que debe enseñar estadística, Lovett et al. (2018) comentan que muchos de los docentes en ejercicio y en formación tuvieron escasa preparación en el área durante su formación escolar, lo que coarta sus oportunidades para desarrollar un entendimiento profundo de la disciplina. En este sentido señalan que la investigación respecto del conocimiento estadístico del profesor se ha enfocado principalmente en aquellos que se desempeñan en el nivel primario y que existe

escasa investigación, salvo contenidos muy específicos, respecto del conocimiento del profesor de secundaria. Desde otro punto de vista, Bailey et al. (2020) señalan que el pensamiento estadístico involucrado en la vida diaria suele estar invisibilizado y es el profesor, a través de su propia comprensión de la importancia de este pensamiento, quién debe trabajar para eliminar dicha invisibilización, mientras que Ferreira et al. (2021) sostienen que la relevancia de lograr la alfabetización estadística de los profesores se debe a su rol como mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística. Pese a lo anterior, Guven et al. (2021) afirman que los niveles de alfabetización estadística de los profesores en formación son generalmente bajos, sumado a que Ruz et al. (2021) señalan que el conocimiento de los futuros docentes es generalmente pobre en el área de la estadística y la probabilidad. Retomando a Lovett et al. (2018), su investigación da cuenta que las debilidades de los profesores de matemática en formación incluyen aspectos de la inferencia estadística como son la variabilidad, las distribuciones muestrales, los intervalos de confianza y el p-valor. Por su parte, en su estudio Arican et al. (2020) concluyen que la mayoría de los profesores experimentan dificultades al elaborar inferencias sobre la población a partir de muestras, lo que se relaciona con el poco desarrollo del razonamiento inferencial de los docentes, o bien, en palabras de Lugo-Armenta et al. (2021) debido a que las nociones involucradas en la inferencia estadística son difíciles de entender para maestros y estudiantes. En este contexto, Giaconi et al. (2022) indican que la inclusión de la inferencia estadística en diversos currículos escolares alrededor del mundo trae consigo la necesidad de analizar cómo se forma a los profesores en esta área, ya que, para enseñarlo en la escuela se debe fortalecer su enseñanza en las aulas universitarias.

A la luz de los antecedentes presentados, podemos afirmar que existe una necesidad de investigar en torno a la formación del profesor de matemática, particularmente sobre su formación disciplinar y didáctica en el área de estadística, así como también respecto de sus percepciones y comprensiones de esta disciplina. Por otro lado, es necesario que estas investigaciones se lleven a cabo en aquellas áreas en las cuales los profesores en ejercicio y en formación presentan mayor dificultad, que, de acuerdo con los autores, corresponde al área de inferencia estadística. Por lo tanto, con la intención de delimitar y plantear una problemática coherente con el contexto chileno, en la siguiente sección se realiza una descripción del desarrollo de la educación estadística en Chile, poniendo particular énfasis en la inferencia estadística.

1.2 Educación Estadística en Chile

La inclusión de la estadística al currículo escolar chileno se remonta a fines de la década de los noventa con la integración del eje estadística y probabilidades, el cual fue adquiriendo distintos nombres con el transcurrir del tiempo y dependiendo del nivel de escolaridad en el cual se estuviese trabajando (del Pino et al., 2012). Así mismo, de acuerdo con Ruz et al. (2019) en los últimos años se ha promovido la inclusión de la estadística en el currículo escolar de matemática desde los niveles iniciales hasta terminar la escolaridad con conceptos de inferencia, por lo que es necesario analizar cómo ha respondido la política pública a esta tendencia. Actualmente, la estadística forma parte del currículo desde primero a sexto año básico dentro del eje "Datos y Probabilidades" (Ministerio de Educación, 2018) y desde séptimo básico a

cuarto medio dentro del eje "Probabilidad y Estadística" (Ministerio de Educación, 2015; 2019), en ambos casos dentro de la asignatura de matemática. No obstante, la última actualización curricular para la formación diferenciada científico humanista en tercero y cuarto medio, incorporó como asignatura electiva "Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial" incluyendo dentro de la formación escolar la inferencia estadística, particularmente con intervalos de confianza y test de hipótesis (Ministerio de Educación, 2021b), trayendo consigo nuevos desafíos para los responsables de enseñar estos conocimientos, en el caso de los futuros profesores durante su formación inicial deben adquirir conocimientos y habilidades disciplinares y didácticas que les permitan llevar a cabo esta tarea (Ruz et al., 2021), mientras que en aquellos casos que se encuentran en ejercicio gatilla una búsqueda de programas de formación continua para actualizar sus conocimientos (Lugo-Armenta et al., 2021). El éxito de esta nueva implementación curricular está condicionado no solo al conocimiento disciplinar y didáctico de los docentes, sino que además a su voluntad e interés por enseñarlos (Ruz et al., 2022).

Al incorporar la enseñanza de la estadística dentro de la asignatura de matemática se generan dificultades debido a las distintas naturalezas de las disciplinas, así lo señalan del Pino et al. (2012) destacando que tanto estudiantes como docentes esperan que el foco de la estadística esté en los cálculos y el resultado, tal como ocurren en matemática, aun cuando el foco de los modelos estadísticos es, entre otros, el estudio de la variabilidad y la interpretación en el contexto de los datos. Por esto, la formación del profesor de matemática en el área de estadística y su didáctica toma un rol protagónico al momento en que éstos llevan a cabo el proceso de enseñanza en las escuelas. En este sentido, Estrella (2014) hace casi 10 años ya cuestionaba la formación inicial docente, preguntándose si los profesores están preparados para el desafío de enseñar estadística y cómo las instituciones formadoras se encargaban de entregar los conocimientos disciplinares y didácticos del área a los futuros docentes, interrogante que ante la última actualización curricular vuelven a tener sentido. Además, la autora también señala que es el Ministerio de Educación el responsable de gestionar y proveer de actualizaciones disciplinares y didácticas a los docentes en ejercicio, mientras que las universidades son las encargadas de integrar en sus mallas cursos de formación disciplinar y de la respectiva didáctica especifica.

Respecto de la formación inicial del profesor de matemática, Ruz et al. (2021) señalan que los actuales cursos de probabilidad y estadística deben ser reformulados para mejorar la formación del futuro docente, en este sentido, recomiendan en primer lugar reorganizar la formación en el área considerando que hay de 1 a 3 cursos durante toda su formación y que estos tienden a tener un enfoque matemático, perdiendo de vista la importancia de la variabilidad y el contexto que son características propias de un pensamiento estadístico. En segunda instancia, señalan que se debe promover el conocimiento del contenido y el conocimiento para enseñar el contenido de forma simultánea, ya que, solo un tercio de las universidades propone un curso sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Por último, recomiendan utilizar enfoques modernos para desarrollar el pensamiento estocástico (estadística y probabilidad), dentro de los que se incluye a modo de ejemplo la organización de la enseñanza a partir del proceso de solución de problemas (GAISE o PPDAC) o la inclusión de la inferencia estadística a partir de la simulación de

muestreos que permitan estudiar la variabilidad sin conocimientos matemáticos profundos. Por otro lado, Arican et al. (2020) señalan que los formadores universitarios deben trabajar en ampliar los conocimientos estadísticos de los profesores en formación para que estos puedan desarrollar una comprensión significativa respecto de la disciplina, así mismo, Giaconi et al. (2022) sostienen que para implementar la enseñanza de la inferencia estadística formal e informal los profesores deben ser capaces de enseñar estos conocimientos a sus estudiantes, por lo que el desafío no es solo para los futuros docentes, sino que también para sus formadores.

Por otro lado, el Ministerio de Educación a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) y aprobado por el Consejo Nacional de Educación (CNED) publican el año 2021 los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática, documento cuyo objetivo es contribuir en el fortalecimiento de la formación docente además de servir como instrumento para la mejora de la calidad de la docencia (Ministerio de Educación, 2021a). En estos estándares encontramos, entre otras cosas, los estándares disciplinarios para probabilidades y estadística en cuya descripción señala:

El/la docente egresado/a (...) vincula la estadística descriptiva e inferencial, expresando conclusiones y reportando e interpretando el nivel de confianza. Promueve en sus estudiantes la realización de estudios estadísticos que requieren recolectar datos de una muestra, representarlos y analizar su variabilidad, para realizar inferencias sobre la población. Diseña instancias de evaluación, autoevaluación y coevaluación que evidencien el ejercicio de una ciudadanía crítica que toma decisiones informadas y basadas en evidencias. (Ministerio de Educación, 2021a, p. 87)

A fin de lograr lo anterior, de un total de 11 estándares del conocimiento disciplinar solo 3 hacen alusión explicita respecto de la inferencia estadística (estándar 2, estándar 3 y estándar 10), de estos, únicamente el estándar 10 hace referencia a elementos de inferencia estadística formal como son los intervalos de confianza, el estándar señala lo siguiente:

Construye intervalos de confianza e interpreta su significancia estadística para el análisis crítico de información y para la realización de inferencias respecto de una población, en el contexto de proyectos colaborativos con áreas como las ciencias sociales, ciencias de la salud y educación. (Ministerio de Educación, 2021a, p. 88)

Por otro lado, de un total de 5 estándares de la didáctica disciplinar solo 2 de ellos hacen mención de la inferencia estadística (estándar 12 y estándar 16), de estos, únicamente el estándar 12 es específico de la inferencia señalando lo siguiente: "Implementa discusiones en clase para monitorear los diversos niveles de razonamiento y las dificultades que presentan sus estudiantes al interpretar los intervalos de confianza en problemas de inferencia estadística." (Ministerio de Educación, 2021a, p.89)

A partir de lo anterior, en primer lugar podemos decir que los profesores tanto en ejercicio como en formación se enfrentan al desafío de enseñar inferencia estadística en la escuela, particularmente con la nueva actualización curricular, deben estar preparados no solo para la enseñanza de intervalos de confianza y test de hipótesis, sino que para aplicar estos procedimientos en contextos reales de modo que los estudiantes puedan resignificar los datos de acuerdo al contexto y desarrollar su pensamiento estadístico. En segundo lugar, podemos identificar que la política pública, a través de los estándares para la formación docente, del profesor de matemática en inferencia estadística pone su énfasis en la

construcción e interpretación de intervalos de confianza, por lo surge la interrogante si en el proceso formativo adquieren los conocimientos disciplinares y didácticos que les faculten para llevar a cabo su enseñanza en el nivel escolar. Un primer acercamiento para responder se obtiene a partir de los resultados de la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (ENDFID), evaluación que se encuentra basada en los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para la Formación Inicial Docente.

Al revisar los resultados¹ obtenidos por los estudiantes de programas regulares de formación inicial docente en el área de matemática para la educación media que realizaron la ENDFID de conocimientos disciplinarios y didácticos en los años 2019, 2020 y 2021, se destaca en la Tabla 1-1 una disminución en los puntajes promedio a nivel nacional, sumado a una evidente disminución en el porcentaje de respuestas correctas en el área de datos y azar (estadística y probabilidad) acompañado de resultados deficientes y a la baja en cuanto al estándar 21 referido a la preparación del futuro docente para llevar a cabo la enseñanza de la inferencia estadística, en ambos casos sin lograr llegar a un 50% de respuestas correctas. Si bien los resultados resultan alarmantes, hay que considerar el contexto en los cuales se han realizado las evaluaciones, el año 2019 el país enfrentó una crisis social sin precedente afectando la correcta aplicación de la evaluación, por otro lado en los años 2020 y 2021 el país se encontraba enfrentando los efectos de la pandemia causada por el virus SARS-CoV-2, no obstante, no podemos atribuir los bajos resultados únicamente a las circunstancias contextuales.

	2019	2020	2021
Cantidad de estudiantes que realizan la evaluación	378	482	560
Puntaje Promedio Nacional	95.8	95.7	93.8
Puntaje Mínimo institucional	64.7	69.9	80.5
Puntaje Máximo Institucional	112.1	112.9	107.8
Porcentaje de respuestas correctas en datos y azar	47.4%	47.6%	44.8%
Porcentaje de respuestas correctas en el estándar 21	35.6%	34.9%	32.5%

¹ Fuente: Informes de resultados nacionales de la ENDFID recuperados de:

Año 2019 https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/08/Informe-Nacional-END-2019 rect.pdf

Año 2020 https://cpeip.cl/wp-content/uploads/2022/10/Informe-Nacional-Cohorte-2020 compressed-1.pdf

Año 2021 https://cpeip.cl/wp-content/uploads/2022/10/Informe-Nacional-Cohorte-2021 compressed.pdf

Tabla 1-1: Resumen resultados obtenidos en la ENDFID en los años 2019, 2020 y 2021 por estudiantes de programas regulares.

En síntesis, los antecedentes presentados en la sección 1.1 dan cuenta de la necesidad de continuar la investigación en cuanto a la formación del profesor en el área de estadística y sobre sus percepciones respecto de la disciplina, particularmente aquellos tópicos que resultan tener mayor dificultad como son los de inferencia estadística. Por su parte, en el contexto chileno, la política educativa a través de las actualizaciones curriculares ha integrado la inferencia estadística formal en la formación escolar, desafiando a los profesores en ejercicio, en formación y a los programas de formación a integrar conocimientos disciplinares y didácticos para preparar a los docentes para la enseñanza de esta disciplina. En este sentido, los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática vienen a responder a estos nuevos desafíos en cuanto a la formación de profesores capacitados para la enseñanza, entre otras, de la estadística inferencial, sin embargo los deficientes resultados obtenidos en la ENDFID en el área de datos y azar, particularmente en el estándar 21, en los últimos años, da cuenta de una desarticulación entre los estándares y los programas de formación, lo que a su vez implica que los profesores de matemática aún no cuentan con una preparación suficiente para la enseñanza de la inferencia en la escuela. Por lo tanto, ante esta situación, es necesario indagar respecto de la formación estadística de los profesores de matemática en Chile, específicamente sobre los conocimientos y habilidades adquiridos en sus programas de formación para llevar a cabo la enseñanza de la inferencia estadística, particularmente a través de los intervalos de confianza, en el nivel escolar.

1.3 Pregunta de Investigación

¿Qué tipo de errores cometen los profesores de matemática en formación al construir e interpretar intervalos de confianza que provocan porcentajes de logro insatisfactorios en el descriptor referido a su preparación para la enseñanza de inferencia estadística de la evaluación nacional diagnostica de formación inicial docente?

1.4 Supuesto

Los profesores en formación cometen errores conceptuales y procedimentales al momento de construir e interpretar intervalos de confianza lo que provoca resultados insatisfactorios en la evaluación nacional diagnostica de la formación inicial docente, particularmente, en el descriptor referido a su preparación para la enseñanza de inferencia estadística.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

Analizar los tipos de errores conceptuales y procedimentales presentes en la construcción e interpretación de intervalos de confianza por parte de profesores de matemática en formación, para proponer instancias

de apoyo y mejora en los procesos de formación docente en el área de inferencia estadística que propicien la mejora de resultados en la evaluación nacional diagnostica de la formación inicial docente.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Identificar nivel de dificultad que profesores de matemática en formación atribuyen a los conceptos y
 procedimientos involucrados en la construcción e interpretación de intervalos de confianza de acuerdo
 con su preparación en el área.
- Clasificar conceptos y procedimientos involucrados en la construcción e interpretación de intervalos de confianza de acuerdo con el nivel de dificultad que futuros profesores de matemática les atribuyen de acuerdo con su preparación en el área.
- Describir las estrategias que futuros profesores de matemática utilizan para la construcción e interpretación de intervalos de confianza en diferentes situaciones y contextos.
- Diseñar un conjunto de sugerencias que permitan trabajar y corregir los errores identificados en la construcción e interpretación de intervalos de confianza por parte de futuros profesores de matemática.

Capítulo 2: Marco Teórico

El propósito de este capítulo es describir la perspectiva teórica desde la cual se aborda el problema de investigación planteado en el capítulo anterior respecto de la preparación del profesor de matemática para la enseñanza de inferencia estadística a través de intervalos de confianza. Esta descripción se realiza mediante tres secciones en las cuales se abordan las siguientes temáticas: en primer lugar, los distintos modelos que estudian el conocimiento profesional del profesor de matemática, la segunda sección responde a una descripción del modelo del conocimiento del profesor desde el cual se aborda la problemática de estudio y posteriormente se describen aspectos disciplinares y didácticos sobre la construcción e interpretación de intervalos de confianza y las dificultades identificadas respecto de estos procesos.

2.1 Conocimiento Profesional del Profesor de Matemática

De acuerdo con Pino-Fan et al. (2015) y Lázaro et al. (2022) uno de los temas que más ha interesado en la educación matemática durante los últimos años es la formación de los profesores, en este sentido, caracterizar el conocimiento que un profesor de matemática debe tener para llevar a cabo su trabajo de forma eficaz es de los temas que más se ha investigado, sin embargo, no existe consenso respecto de un único marco teórico que cumpla este propósito (Pino-Fan et al., 2014; Pino-Fan, 2015; González et al., 2018). En suma, de acuerdo con Godino (2009), los distintos modelos teóricos que se utilizan para describir los conocimientos que los profesores requieren para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes, son necesarios para organizar y evaluar la eficacia de programas de formación docente, por tanto, al estudiar los conocimientos del profesor para la enseñanza de intervalos de confianza, también se evalúa la eficacia de sus programas de formación en este aspecto.

A fin de poder seleccionar un referente teórico que permita cumplir con el objetivo de describir los tipos de errores conceptuales y procedimentales presentes en la construcción e interpretación de intervalos de confianza por parte de profesores de matemática en formación, se realiza en primer lugar una descripción de algunos modelos para el conocimiento profesional del profesor de matemática considerando que, tal como señala Godino (2009), un profesor debe ser capaz de organizar el proceso de enseñanza, diseñar actividades, seleccionar recursos y comprender como se ve condicionado el aprendizaje por diversos factores.

2.1.1 Modelo del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK²)

La enseñanza comienza con un profesor que comprende lo que ha de ser enseñado y como debe ser enseñado, para luego realizar una serie de actividades que provee a los estudiantes de una serie de instrucciones y oportunidades de aprendizaje, y termina con nueva comprensión por parte del estudiante y del profesor (Shulman, 1987). A partir de esta concepción de la enseñanza, Shulman propone un modelo que considera al menos siete categorías (ver llustración 2-1) sobre el conocimiento del profesor. De estas categorías, aquella de mayor interés para el autor es el conocimiento pedagógico del contenido, puesto que es aquella que identifica los conocimientos distintivitos requeridos para la enseñanza, es además la categoría que puede permitir la distinción entre la comprensión desarrollada por un especialista del contenido y un pedagogo (Shulman, 1987).

Por otro lado, como fuentes de estos conocimientos Shulman (1987) plantea que existen al menos 4:

- Formación en los conocimientos de la disciplina: hace referencia al conocimiento de los contenidos, el saber, las habilidades y lo que deben lograr los estudiantes.
- Materiales y estructuras del proceso educativo institucionalizado: considera elementos tales como los currículos, evaluaciones, jerarquización en las instituciones, normativas, entre otras.
- **Literatura educativa especializada:** refiere a toda investigación que se dedique a la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Sabiduría obtenida de la práctica misma.

De acuerdo con Godino (2009) y Pino-Fan et al. (2015) este modelo es pionero en reconocer el carácter específico del conocimiento requerido para la enseñanza, al tiempo que ha tenido un rol preponderante en el desarrollo de propuestas de investigación e implementación curricular en la formación de profesores, esto es reafirmado por González et al. (2018) para quienes el modelo de Shulman es uno de los que más impacto ha tenido en el estudio del pensamiento del profesor. En palabras de Lázaro et al. (2022) este modelo propone que el profesor además de conocer su especialidad debe conocer principios y estrategias de gestión de clase, así como también la organización materiales y programas que se utilizan como

-

² Sigla en inglés para Pedagogical Content Knowledge

herramientas de intercambio del conocimiento. Por su parte, Ruz (2021) comenta que, gracias a la amplitud de esta propuesta otras más específicas, sobre el profesor de matemática, han podido ser desarrolladas.

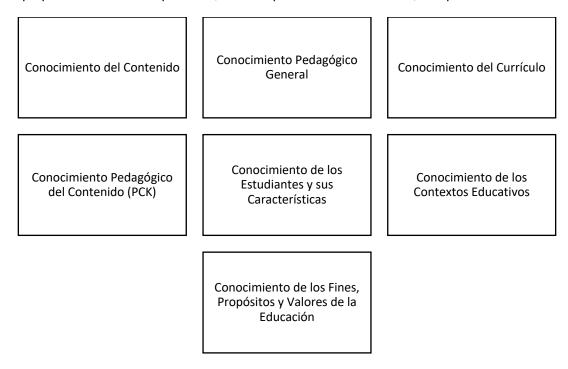


Ilustración 2-1: Categorías del Conocimiento propuestas por Shulman (1987).

2.1.2 Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT³)

De acuerdo con Lázaro et al. (2022) en este modelo se da importancia a la matemática y su didáctica, así como también a la relación entre objetos y lo que les subyace, complementado con la experiencia del profesor de su propio conocimiento. En este sentido, Hill et al. (2008) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como aquel que es utilizado por los docentes para lograr la instrucción y crecimiento de sus estudiantes y consideran que parte importante para conceptualizar un conocimiento es delimitar sus fronteras y relaciones con otros constructos, lo que los lleva a proponer el modelo que se muestra en la Ilustración 2-2, destacando que Godino et al. (2011) señalan que las categorías pertenecientes al conocimiento pedagógico del contenido son descomposiciones del modelo propuesto por Shulman en 1987 y descrito en la subsección anterior, no obstante, Hill et al. (2008) conceptualizan algunas de estas categorías de la siguiente forma:

- Conocimiento común del contenido: es aquel que se utiliza en la enseñanza así como también en otras profesiones matemáticas.
- Conocimiento especializado del contenido: es aquel que faculta a los docentes para abordar tareas específicas de la enseñanza como por ejemplo representar ideas matemáticas, dar explicaciones matemáticas sobre reglas y procedimientos, entre otros.

.

³ Sigla en inglés para Mathematical Knowledge for Teaching

 Conocimiento del contenido y los estudiantes: es el conocimiento del contenido entrelazado con el conocimiento respecto de cómo los estudiantes piensan, conocer y aprenden contenidos específicos.

Por su parte, el **conocimiento en el horizonte matemático** corresponde a aquel que puede guiar actos y responsabilidades de enseñanza como el hacer juicios sobre la importancia de la matemática, el anticipar y hacer conexiones, el detectar distorsiones matemáticas o interpretaciones erróneas, entre otras (Pino-Fan et al., 2015).

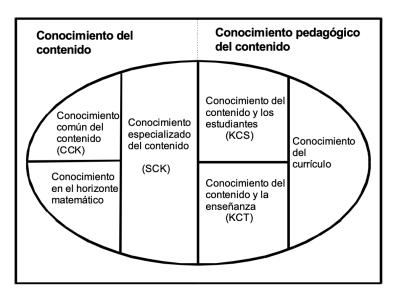


Ilustración 2-2: Dimensiones y Categorías del Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Godino, 2009, p.16)

2.1.3 Modelo de la Proficiencia

Schoenfeld et al. (2008) proponen un modelo de siete dimensiones para la proficiencia en la enseñanza de la matemática (ver Ilustración 2-3) que según Lázaro et al. (2022) se enfoca en los aspectos psicosociales del profesor, puesto que sus categorías se enfocan principalmente en la labor del docente en aula. Si bien en Schoenfeld et al. (2008) es posible encontrar una descripción detallada de cada una de las categorías, a continuación, se da cuenta de algunas de ellas a fin de poder contrastar con otros modelos en una subsección posterior.

- El conocimiento de las matemáticas escolares en profundidad y amplitud permite a los docentes priorizar y organizar el contenido, además de permitir la respuesta flexible por parte del docente a las preguntas de los estudiantes (Schoenfeld et al., 2008).
- El conocer a los estudiantes como personas que piensan se refiere a la comprensión que debe desarrollar el docente respecto de cómo los estudiantes dan sentido a la matemática y como se construye conocimiento sobre dicho sentido (Schoenfeld et al., 2008).

• El reconocer a los estudiantes como personas que aprenden quiere decir que el docente debe estar consciente de las teorías de aprendizaje y como estas se relacionan con las actividades de clase y las interacciones con los estudiantes (Schoenfeld et al., 2008).

Conocimiento de las Conocimiento de los Conocimiento de los matemáticas escolares en estudiantes como personas estudiantes como personas profundidad y amplitud pensantes que aprenden Desarrllo de las normas de Diseño y gestión de entornos clase como parte de la Contrucción de relaciones de aprendizaje enseñanza para la que apoyen el aprendizaje comprensión Reflexión sobre la propia práctica

Ilustración 2-3: Categorías del Modelo de la Proficiencia elaborado a partir de lo expuesto en Schoenfeld et al. (2008)

2.1.4 Modelo del Cuarteto del Conocimiento (KQ⁴)

Rowland et al. (2005) a partir de su investigación propone un modelo con cuatro categorías que sirve como herramienta comprensiva para pensar acerca de las formas en las que el conocimiento de un contenido se aplica en el aula. Cada categoría Rowland et al. (2005) la caracterizan de la siguiente forma:

- Fundamentos: se refiere al conocimiento, comprensión y preparación del docente para su aprendizaje y preparación para su rol en el aula. Es aquello que los docentes aprenden en su formación personal y en su formación profesional. Además, las creencias en esta categoría se conceptualizan desde tres miradas: creencias sobre la naturaleza de la matemática, sobre los propósitos de la educación matemática y sobre las mejores condiciones en las que los estudiantes aprenden matemática.
- Transformaciones: se refiere a las transformaciones que un profesor hace de su propio conocimiento para ser enseñado. Rowland et al. (2005) destacan lo propuesto por Shulman en 1987 como base de esta categoría.

.

⁴ Sigla en inglés para Knowledge Quartet

- Conexiones: guarda relación con las decisiones tomadas respecto del contenido matemático, considera la coherencia de la planificación y la secuenciación de contenidos en y entre clases incluyendo el orden de tareas y ejercicios.
- Contingencia: refiere a las eventualidades que pueden surgir dentro de una sala de clases considerando la habilidad de responder a las ideas de los estudiantes y la habilidad de desviar la clase aun cuando esta se encuentra preparada
 - 2.1.5 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK⁵)

Carrillo et al. (2012) sostienen que el modelo MKT presenta problemas en la delimitación de sus subdominios, por ello plantean un modelo (ver Ilustración 2-4) con el propósito de permitir la diferenciación entre el conocimiento pedagógico general, el conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas y el conocimiento especializado de otras profesiones vinculadas con la matemática.

Las categorías y subdominios propuestos por Carrillo et al. (2012) son:

Conocimiento Matemático (MK)

- Conocimiento de los temas (KOT): corresponde al conocimiento de conceptos y procedimientos con su respectiva fundamentación teórica.
- Conocimiento de la estructura matemática (KSM): corresponde al conocimiento de las ideas principales, las propiedades y las conexiones entre temas previos o venideros.
- Conocimiento acerca de la matemática (KAM): corresponde al conocimiento de las formas de producir matemática, como se comunica y se razona en esta disciplina, seleccionar representaciones, entre otros aspectos.

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)

- Conocimiento de las características del aprendizaje en matemática (KFLM): considera teorías sobre como aprenden los estudiantes en respuesta a la necesidad de entender como estos piensan cuando realizan actividades matemáticas.
- Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT): es aquel que faculta al docente para seleccionar material, representaciones, procedimientos, ejemplos o textos para el aprendizaje de un contenido específico.
- Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemática (KMLS): es aquel que considera el currículo, las progresiones de un año a otro, los estándares mínimos facultando al docente a mirar más allá de su contexto institucional específico.

_

⁵ Sigla en inglés para Mathematics Teachers' Specialised Knowledge

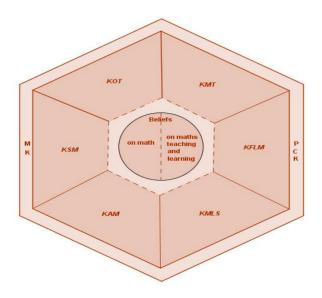


Ilustración 2-4: Categorías y subdominios del modelo MTSK (Carrillo et al., 2012)

2.1.6 Comparación de las diversas perspectivas teóricas

En primer lugar, una mirada general respecto de los modelos descritos en las subsecciones anteriores es planteada por Godino, quien señala:

Los modelos de "conocimiento matemático para la enseñanza" elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego. En una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemática (Godino, 2009, p.19)

En segundo lugar, y de forma más específica, Pino-Fan et al. (2014; 2015) sostienen que en el modelo MKT no hay criterios claros para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza, tampoco se cuenta con apoyos para que los profesores desarrollen sus subdominios y no hay claridad de como estos se relacionan entre sí. Por otro lado, respecto del modelo KQ, Pino-Fan et al. (2015) sostiene que uno de sus inconvenientes es el uso que se le ha dado, enfocándose principalmente en el conocimiento profesores en acción, es decir, en aula. Por último, respecto del modelo de la proficiencia propuesto por Schoenfeld et al. (2008) son sus propios autores quienes señalan que su modelo es una primera aproximación y requiere refinamiento.

Finalmente, González et al. (2018) realiza una revisión y comparación entre el modelo PCK, MKT, MTSK, de la proficiencia y el CDM (modelo que se describe en la siguiente sección) encontrando las siguientes similitudes y diferencias:

- En todos los modelos mencionados se coincide en que para enseñar matemática es necesario más conocimiento que el netamente disciplinar.
- El profesor tiene un rol activo con conocimiento de la matemática, sus alumnos y las formas en las que se aprende matemática en todos los modelos.

- El profesor debe ser capaz de resolver las actividades del curso donde enseña de acuerdo con todos los modelos.
- Salvo el modelo PCK, todas las propuestas coinciden con la necesidad de un conocimiento especializado del contenido matemático.
- Los modelos PCK, MKT y MTSK perciben el conocimiento de los estudiantes desde una perspectiva netamente cognitiva, mientras que el modelo de la proficiencia y el CDM proponen una visión más integral que considera afectos, valores, actitudes, entre otras características.
- Las propuestas del PCK, MKT y MTSK no hacen explicita la necesidad de gestionar las relaciones entre el profesor, el estudiante y el contenido matemático.

A partir de lo anterior, es posible notar que los modelos descritos en las subsecciones precedentes son aportes significativos en la labor de describir el conocimiento profesional del profesor de matemática, sin embargo, cada uno de ellos tiene detalles por mejorar para poder cumplir esta tarea. En suma, a partir de las diferencias encontradas por González et al. (2018), el modelo que proporciona una perspectiva que integra aspectos clave para describir el conocimiento profesional del profesor resulta ser el CDM.

Considerando que esta investigación se trata de la formación estadística del futuro profesor, es importante considerar lo planteado por Godino et al. (2011) para quienes los problemas básicos de la estadística se relacionan con la inferencia y con la toma de decisiones en contextos de incerteza, lo que a su vez involucra prácticas específicas de esta disciplina y, por lo tanto, surgen representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos propios de esta, por lo que en consideración de una epistemología específica, es necesario el desarrollo o adaptación de los modelos existentes para la educación estadística. En concordancia, en la siguiente sección se describe el modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) que de acuerdo con Ruz (2021) integra y extiende las ideas de los modelos descritos en esta sección, mientras que, Lázaro et al. (2022) sostienen que también se utiliza para el desarrollo de competencias profesionales y la evaluación de procesos formativos, por lo que este enfoque teórico reúne características afines con los objetivos de esta investigación.

2.2 Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

En 2009 Godino propone el modelo del conocimiento didáctica-matemático para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas, con base en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) propuesto y desarrollado por Godino, Batanero y Font en 2007 (Godino, 2009). En palabras de uno de sus autores:

El EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas. Con dicho fin incluye, a) Un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales; b) Un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas; c) Un modelo instruccional sobre bases socio- constructivistas; d) Un modelo sistémico – ecológico que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática. (Godino, 2009, p.20)

Por otro lado, dado que la didáctica se ocupa de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo que incluye, el contenido, los estudiantes, el profesor, medios tecnológicos, y un contexto institucional y social específico, se vuelve necesario identificar las distintas facetas que intervienen en dicho proceso y los distintos niveles desde los cuales se puede realizar un análisis didáctico (Godino, 2009). De acuerdo con lo anterior, en la Ilustración 2-5 se muestra una representación poliédrica en la cual se distinguen seis facetas implicadas en los procesos de instrucción matemática, así como también cuatro niveles de análisis que se consideran en este modelo.

De acuerdo con Godino (2009, p.21) las facetas de su propuesta se caracterizan de la siguiente forma:

- Faceta epistémica: considera los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional dentro de los cuales se consideran los problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos.
- Faceta cognitiva: considera el conocimiento de los estudiantes y la progresión de su aprendizaje
- Faceta afectiva: considera las actitudes, emociones, creencias y valeres de cada individuo con relación a los objetos y al proceso de enseñanza aprendizaje.
- Faceta interaccional: corresponde a los patrones de interacción entre el docente y los estudiantes.
- Faceta mediacional: incluye los recursos tecnológicos y la asignación de tiempo a las distintas acciones y procesos.
- Faceta ecológica: corresponde a las relaciones con el entorno social, político, económico, entre otras áreas, que soporta y condiciona el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, los cuatro niveles de análisis que propone Godino (2009, p.21-22) caracteriza como sigue:

- **Nivel de prácticas:** considera tanto la perspectiva matemática como didáctica y corresponde a las acciones realizadas para resolver tareas que promueven el aprendizaje.
- Nivel de configuraciones: considera una descripción tanto de objetos como procesos que intervienen en la realización de las prácticas, así como también aquellos que surgen a partir de estas.
- **Nivel de normas:** corresponde al conjunto de reglas y hábitos que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que además afectan a todas las facetas.
- Nivel de idoneidad: corresponde a las potenciales mejoras que se pueden realizar al proceso de enseñanza y aprendizaje que permitan incrementar su idoneidad didáctica.

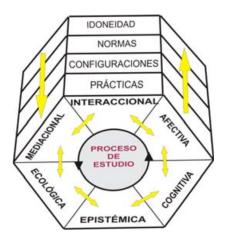


Ilustración 2-5: Facetas y Niveles del Conocimiento del Profesor (Godino, 2009, p.21)

A pesar de lo planteado por Ruz (2021) respecto de la integración de otros modelos en el CDM, Pino-Fan et al. (2015, p.96) hace notar lo siguiente respecto a la propuesta de Godino:

No queda claro cuáles son los vínculos, si es que los hay, entre el MKT (y otros modelos del conocimiento del profesor) y el CDM. Además, no se ve claramente la relación e interacción entre cada una de las categorías incluidas en el modelo CDM. Por tanto, se hace necesario el desarrollo de "refinamientos" y matizaciones" que amplíen el modelo CDM, y que faciliten su entendimiento y uso.

Debido a lo anterior, Pino-Fan et al. (2015) proponen una reestructuración del CDM (ver Ilustración 2-6), teniendo en cuenta los aportes de algunos de los modelos descritos en la sección anterior, de modo tal que interprete y caracterice el conocimiento del profesor considerando una dimensión matemática, una didáctica y otra meta didáctico-matemática.

En esta reestructuración, Pino-Fan et al. (2015) plantean las siguientes descripciones respecto de las categorías en la dimensión matemática:

- El **conocimiento común del contenido** es el conocimiento sobre un objeto matemático que permite resolver problemas del currículo para un nivel especifico.
- El **conocimiento ampliado del contenido** es aquel que faculta al profesor para plantear nuevos retos y vincular lo que se está estudiando con otras nociones matemáticas posteriores.

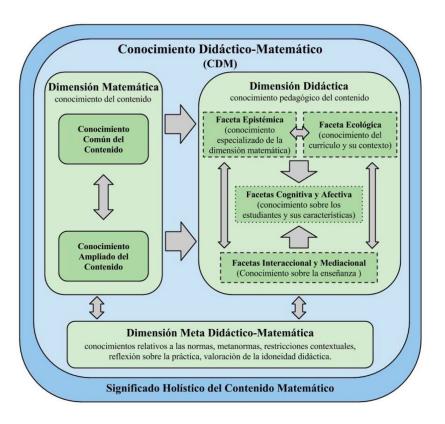


Ilustración 2-6: Reestructuración del CDM propuesta por Pino-Fan et al. (2015, p.98)

Asimismo, Pino-Fan et al. (2015) señala que en el marco del EOS, para cada faceta y nivel de análisis propuesto en el CDM se han elaborado y refinado nociones específicas que permiten el análisis detallado de las prácticas matemáticas y didácticas, de las cuales se infieren subcategorías de conocimientos. En este sentido, describen la **faceta epistémica** como aquella relacionada con el conocimiento matemático para la enseñanza, es decir, aquel que permite al docente resolver tareas con distintos procedimientos, vincular objetos matemáticos del mismo o de distinto nivel educativo, proporcionar justificaciones y argumentos e identificar los conocimientos puestos en juego al momento de resolver una tarea matemática (Pino-Fan et al., 2015). Por otro lado, cabe mencionar que el CDM aborda esta faceta desde un punto de vista antropológico y semiótico, es decir, concibe a la matemática como una actividad humana que adquiere significados a partir de la acción de personas frente a situaciones o problemas específicos (Godino, 2009), en concordancia, y considerando que la estadística se puede concebir también bajo un punto de vista antropológico y semiótico, las categorías del conocimiento del profesor que se obtienen del EOS también son aplicables a la estadística, es decir, el CDM se puede aplicar para caracterizar el conocimiento pedagógico estadístico (Godino et al., 2011).

En virtud de lo anterior, la faceta epistémica permite describir los posibles errores conceptuales y procedimentales que pueden ocurrir al momento de construir e interpretar intervalos de confianza, por ello se tienen en cuenta las siguientes categorías de análisis (ver Ilustración 2-7) propuestas por el EOS para esta faceta en particular y que Godino et al. (2011) describen de la siguiente forma:

- Lenguajes: son los términos, expresiones, símbolos u otras representaciones.
- Conceptos: vienen dados por su definición o descripción.
- Proposiciones: son las propiedades o atributos de los conceptos.
- **Procedimientos:** corresponden a las operaciones, algoritmos o técnicas.
- Argumentos: herramienta utilizada para validar y explicar las proposiciones y procedimientos.

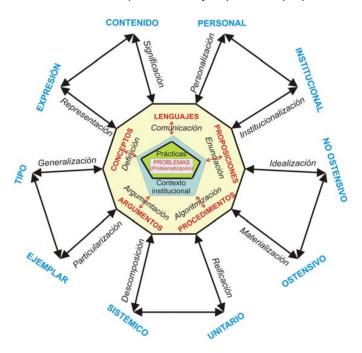


Ilustración 2-7: Prácticas, objetos y procesos matemáticos (Godino, 2009, p.22)

2.3 Aspectos Disciplinares y Didácticos sobre la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza

Para lograr comprender, clasificar y proponer soluciones a los errores que se cometen al construir e interpretar intervalos de confianza, es necesario tener conocimiento sobre cómo se realizan formalmente estos procedimientos, por tanto, en esta sección se propone una descripción de los intervalos de confianza como objetos matemáticos, incluyendo las diferentes perspectivas desde las cuales se pueden construir y su respectiva interpretación. Además, se realiza un análisis que otorga contextualización respecto de cómo se integra este objeto matemático en el currículo chileno, tanto en la formación escolar como en la formación de futuros docentes. Finalmente, se realiza una síntesis respecto de diversas investigaciones que abordan la problemática de la comprensión e interpretación de intervalos de confianza.

2.3.1 Enfoques para la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza

De acuerdo con Batanero et al. (2020a) actualmente existen distintas aproximaciones para la estimación por intervalos y que difieren en su mecanismo de cálculo y en su base filosófica. Dentro de estas

aproximaciones, se encuentran el método frecuencial, la estimación bayesiana y el método del remuestreo. En lo siguiente se caracteriza cada uno de estos enfoques a fin de otorgar una perspectiva ampliada de los procedimientos que se pueden utilizar para la realización de inferencias a través de intervalos y la forma de interpretar los resultados dependiendo del enfoque en el que se trabaje.

2.3.1.1 Método Frecuencial

Iniciado por Neyman, en el método frecuencial la estimación de un parámetro θ (fijo, desconocido y que comúnmente se refiere a la media, proporción o desviación estándar), se realiza a través de una variable aleatoria que se caracteriza usualmente por X indicando lo que se está midiendo en una observación, el estimador $\hat{\theta}$, cambia dependiendo de la muestra (Batanero et al. 2020a). De acuerdo con Rivadulla (1991, como se citó en Olivo, 2008) Neyman sugiere utilizar la desviación estándar del estimador ($S_{\hat{\theta}}$) para medir la precisión de la estimación a través de un intervalo en el que se presume se encuentra el verdadero valor del parámetro y que tiene la siguiente estructura:

$$\left[\hat{\theta} - k_1 S_{\widehat{\theta}}, \hat{\theta} + k_2 S_{\widehat{\theta}}\right]$$

Para la construcción del intervalo que permite la estimación Mayo (1981, como se citó en Batanero et al., 2020a) propone los siguientes pasos:

- Escoger un nivel de confianza 1 − α siendo α ∈]0,1[que permita obtener los valores de k₁ y k₂ de la distribución del estadístico.
- Escoger una muestra aleatoria de tamaño *n*, independientes de la variable que se observa para determinar el valor del estimador.
- Suponer que el verdadero valor del parámetro se encuentra en el intervalo con una confianza en la estimación de 1α .

Además, Mayo (1981, como se citó en Batanero et al., 2020a) también enfatiza que la probabilidad $1-\alpha$ se refiere al porcentaje de intervalos construidos a partir de distintas muestras que sí contendrán al parámetro. Por su parte, Morey et al. (2016) enfatizan la diferencia existente entre el procedimiento para crear el intervalo y el intervalo resultante en sí mismo, señalando que un procedimiento de estimación con una confianza del $100(1-\alpha)\%$ es aquel que genera, en esa misma proporción, intervalos que contengan al parámetro, mientras que los intervalos de confianza son los resultados obtenidos de dicho procedimiento.

2.3.1.2 Estimación Bayesiana

De acuerdo con Morey et al. (2016) esta alternativa para la estimación por intervalos no es tan popular como la propuesta por Neyman debido a que las personas no comprenden la diferencia entre los intervalos de confianza y los intervalos de credibilidad, y como los intervalos resultantes no se pueden interpretar de la misma forma. En la estimación bayesiana el parámetro a estimar se considera aleatorio y caracterizado por una distribución de probabilidades $(p(\theta))$ a priori, que representa la credibilidad asignada por el

investigador a los diferentes valores posibles para el parámetro. (Batanero et al., 2020a). De acuerdo con Bolstad (2013, como se citó en Roldan-López et al., 2020a) la distribución a posteriori del parámetro se obtiene a partir de la distribución a priori y de los datos experimentales haciendo uso del teorema de Bayes, de modo tal que la expresión que entrega la distribución a posteriori es:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}$$

Siendo $p(y|\theta)$ la verosimilitud de los datos para un valor del parámetro y $p(y) = \int p(y|\theta)p(\theta)dy$ un valor constante al integrar sobre todo el recorrido de y. Una vez que se conoce $p(\theta|y)$ se construyen intervalos de credibilidad que se interpretan como la probabilidad que el parámetro esté entre los valores resultantes y cuya definición es la siguiente: "si $\theta \in \Theta$ es una cantidad desconocida, $\mathcal{C} \subset \Theta$ es una región del $100(1-\alpha)\%$ de credibilidad para θ si $P(\theta \in \mathcal{C}|x) \geq 1-\alpha$, siendo $1-\alpha$ el nivel de credibilidad." (Cepeda-Cuervo et al., 2008, p.215).

2.3.1.3 Método del Remuestreo

Otra alternativa para la estimación a través de intervalos son los métodos de remuestreo que, de acuerdo con Roldan-López et al. (2020a), se basan en que toda la información necesaria del parámetro es posible encontrarla en los datos. Dentro de este enfoque se encuentran dos técnicas similares, el método de bootstrap conceptualizado por Efron en 1979 y el método de jacknife propuesto por Quenouille en 1949, en ambos casos se utiliza una muestra inicial a partir de la cual se extraen submuestras con reposición en el primer caso y sin reposición en el segundo. Si bien son métodos similares, Engel (2010) señala que el método bootstrap tiene el potencial para hacer más accesibles las ideas de la estadística inferencial, además de proporcionar formas en las que estimar parámetros, aproximar distribuciones muestrales u obtener estimaciones por intervalos aun cuando se tienen los datos, pero no la distribución subyacente. Por su parte, Batanero et al. (2020a) indican que en este enfoque la confianza se interpreta como los límites entre los que se espera varíen las medias de las re-muestras y no el parámetro.

2.3.2 Análisis sobre la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza

De acuerdo con Batanero et al. (2020a) para que un docente pueda asegurar la enseñanza correcta de intervalos de confianza es indispensable que cuente conocimientos matemáticos, estadísticos, recursos materiales, conocimiento curricular y conocimiento sobre las dificultades y errores previsibles de los estudiantes. En este sentido, esta subsección presenta tres aspectos mencionados por los autores, en particular, se realiza una descripción sobre lo curricular, lo disciplinar y lo didáctico relacionado con la construcción e interpretación de intervalos de confianza.

2.3.2.1 Aspectos Curriculares

Olivo et al. (2008) indica que los intervalos de confianza son un tema que se estudia en todos los cursos de estadística en el nivel universitario y en algunos países en la educación preuniversitaria. Tal es el caso

de Chile que, desde la perspectiva curricular y en el contexto de la formación de profesores, la enseñanza y aprendizaje de los intervalos de confianza, específicamente su construcción e interpretación, se puede abordar desde dos aristas diferentes, pero relacionadas una con la otra. Por un lado, se puede analizar lo que se espera que los profesores de matemática enseñen a los estudiantes de acuerdo con lo exigido por los planes y programas del Ministerio de Educación. Por otro lado, lo que se espera que los futuros docentes aprendan durante su formación inicial para posteriormente llevar a cabo la enseñanza de acuerdo con los estándares para la formación docente. Cada una de estas aristas abre la puerta a diversos análisis que pueden concluir en investigaciones de las más variadas indoles, no obstante, de acuerdo con el contexto de esta investigación, a continuación, se describe cada una de ellas a fin de otorgar contextualización al posterior análisis de datos.

Actualmente la enseñanza de intervalos de confianza en el currículo escolar chileno se realiza en los niveles de tercero o cuarto medio a través de la asignatura electiva Probabilidades y Estadísticas Descriptiva e Inferencial, que integra contenidos de intervalos de confianza en su cuarta unidad a través de 2 actividades (Ministerio de Educación, 2021b). La primera actividad se plantea como una introducción al contenido y se proponen los siguientes indicadores para evaluar los aprendizajes:

- "Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza" (Ministerio de Educación, 2021b, p.165).
- "Resuelven problemas en los que deben hacer una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza" (Ministerio de Educación, 2021b, p.165).

Además, se sugiere al docente poner énfasis en aspectos tales como: diferenciar entre la estadística descriptiva e inferencial y debatir respecto del error de estimación. Por su parte, la actividad número 2 se plantea como una instancia práctica del contenido proponiendo los siguientes indicadores de evaluación de aprendizajes:

- "Determinan intervalos de confianza, utilizando información contextualizada" (Ministerio de Educación, 2021b, p.170).
- "Resuelven problemas en los que deben realizar una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza" (Ministerio de Educación, 2021b, p.170).

Además, se sugiere en este caso enfatizar los siguientes aspectos: interpretación del significado de intervalos de confianza de acuerdo con el contexto, interpretación del error de estimación y la relación entre el nivel de confianza, el tamaño de muestra y el error de estimación (Ministerio de Educación, 2021b).

Por otro lado, desde el punto de vista de la formación de profesores, actualmente los programas de formación docente deben cumplir con un conjunto de estándares disciplinares y didácticos específicos para

cada especialidad, particularmente en la especialidad de matemática y respecto de la estimación por intervalos, se señala lo siguiente:

Construye intervalos de confianza e interpreta su significancia estadística para el análisis crítico de información y para la realización de inferencias respecto de una población, en el contexto de proyectos colaborativos con áreas como las ciencias sociales, ciencias de la salud y educación (Ministerio de Educación, 2021a, p.88).

En suma, la versión anterior a estos estándares señalaba en el estándar número 21 (evaluado en la evaluación nacional diagnostica de la formación inicial docente) que el futuro profesor debe ser capaz de construir e interpretar intervalos de confianza, además de ser capaz de conducir el aprendizaje de estos en consideración de las dificultades y errores típicos de los estudiantes, lo que se ve reflejado en los siguientes indicadores (Ministerio de Educación, 2012, p.132):

- Conoce la distribución t-Student y sabe construir intervalos de confianza para la media con varianza desconocida.
- Conoce algunas concepciones equivocadas de los alumnos en temas de intervalos de confianza y define estrategias para cambiarlas.
- Describe y ordena los contenidos necesarios del currículo para que los alumnos aborden el tema de intervalos de confianza.
- Diseña y es capaz de conducir actividades para que los alumnos construyan intervalos de confianza para la media de una población normal conocida la varianza.
- Diseña y analiza actividades de evaluación del aprendizaje de los alumnos en el tema de intervalos de confianza.

2.3.2.2 Aspectos Disciplinares

Olivo et al. (2008) señalan que los intervalos de confianza son un objeto matemático complejo que involucra distintos conceptos, procedimientos y propiedades, además de ser un tema basal para otros contenidos estadísticos como por ejemplo el diseño de experimentos y los métodos no paramétricos. Al respecto autores como Gorgas et al. (2009) y Wackerly et al. (2010) proponen en sus obras construcciones de intervalos de confianza basados en el enfoque frecuencial. Por un lado, Gorgas et al. (2009) sostienen que la estimación a través de intervalos permite precisar la incerteza de una estimación puntual, para ello, una vez que se tiene dicho estimador, se determinan el límite inferior (L_1) y superior (L_2) de modo tal que cada uno de estos límites varían dependiendo de las distintas muestras tomadas de la variable aleatoria y por tanto también son aleatorios, de esta forma se puede establecer la siguiente probabilidad:

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$$

Donde θ es el parámetro que se desea estimar y $1-\alpha$ es el nivel de confianza, que, según los autores, se debe interpretar como la probabilidad que una muestra específica produzca un intervalo que contiene al parámetro. Por su parte, Wackerly et al. (2010) señalan que un intervalo de confianza tiene dos propiedades deseables, contiene al parámetro que se quiere estimar y su amplitud es pequeña. Además, proponen el método del pivote como estrategia para la construcción de intervalos de confianza, método

que consiste en encontrar una cantidad pivote con las siguientes características: ser función de las medidas muestrales y del parámetro desconocido, siendo este la única incógnita y por otro lado que su distribución de probabilidad no dependa del parámetro. En general, si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado del parámetro θ y cuya desviación estándar es $\sigma_{\hat{\theta}}$, entonces la variable $T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \sim N(0,1)$ actúa como pivote y se puede utilizar para la construcción de un intervalo del $100(1-\alpha)\%$ de confianza para θ de la siguiente forma:

$$\begin{split} P(z_1 < T < z_2) &= 1 - \alpha \\ P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}} < \hat{\theta} - \theta < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}} - \hat{\theta} < -\theta < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}} - \hat{\theta}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}} < \theta < \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}\right) &= 1 - \alpha \end{split}$$

Así, $\left[\hat{\theta}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}\right]$, $\hat{\theta}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}$ es un intervalo del $100(1-\alpha)\%$ de confianza para θ donde z_{1} y z_{2} corresponden a los percentiles de la distribución del pivote, en este caso de la normal, asociados al nivel de confianza señalado. En particular, si el parámetro a estimar es μ de una variable $X\sim N(\mu,\sigma^{2})$ entonces el intervalo de confianza (cuando σ^{2} es conocida) es $\left[\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, puesto que $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^{2}}{n}\right)$ y $T=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{2}}\sim N(0,1)$.

Por otro lado, Batanero (2011a) señala que uno de los elementos fundamentales para la inferencia estadística son los conceptos, al respecto, Olivo (2008) señala que en la construcción de intervalos de confianza intervienen distintos conceptos que se relacionan, de acuerdo con el autor, como muestra la Ilustración 2-8. Algunos de los conceptos que intervienen en la construcción e interpretación de intervalos de confianza se definen a continuación:

- Población: Conjunto de sujetos u objetos en los que puede presentarse una característica susceptible de ser estudiada.
- Muestra: Parte de la población que, idealmente, se extrae con métodos que permitan considerarla representativa.
- Parámetro: "Característica de la población que se busca estimar" (Lacourly, 2011, p.107).
- Estimador: "Función de los valores muestrales" (Lacourly, 2011, p.107).
- Distribución de la variable en la población: "Distribución de los valores de la variable de interés" (Lacourly, 2011, p.107).
- Distribución muestral: "Distribución de probabilidad de un estimador sobre todas las muestras posibles del mismo tamaño" (Lacourly, 2011, p.107).

- Nivel de confianza: coeficiente que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones, en las cuales el intervalo si contendrá el verdadero valor del parámetro (Olivo et al., 2008). Generalmente se denota como 1 – α.
- Nivel de significancia: Corresponde al complemento del nivel de confianza, es decir, α .
- Nivel de riesgo: corresponde a la mitad del nivel de significancia, es decir, $\frac{\alpha}{2}$.
- Valor crítico: corresponde a los percentiles de la distribución del pivote asociados al nivel de confianza.
- Error estándar: Corresponde a la desviación estándar del estimador.
- Error de estimación: Corresponde al producto entre el error estándar y el valor crítico de la distribución muestral.

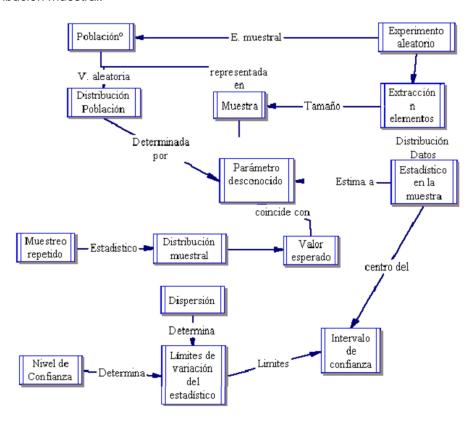


Ilustración 2-8: "Objetos matemáticos ligados al intervalo de confianza" (Olivo, 2008, p.15)

A pesar de lo anterior, Álvarez et al. (2013) señalan que construir únicamente un intervalo de confianza para la estimación resulta poco preciso. En este sentido, los autores sostienen que un intervalo de confianza ayuda en la toma de decisiones en contextos de incerteza cuando se utiliza de forma análoga a las pruebas de hipótesis, es decir, cuando se plantea un supuesto respecto del parámetro previo a la construcción del intervalo de confianza y luego, con el resultado obtenido, verificar si este pertenece o no al intervalo para aceptar o rechazar el supuesto.

2.3.2.3 Aspectos Didácticos

Batanero (2011b) sostiene que el desarrollo del razonamiento inferencial debe promoverse y construirse desde la formación preuniversitaria, para que los estudiantes sean capaces de abordar en la universidad temas como los intervalos de confianza de forma adecuada, al respecto, Batanero et al. (2020a) sostienen que con la finalidad de disminuir la dificultad conceptual que implica la enseñanza de inferencia estadística, la tendencia en los procesos de enseñanza es incluir lo que se denomina como "inferencia informal" donde se refuerza la simulación y visualización con el apoyo de software. Al respecto, Borovcnik (2019) realiza una observación sobre el uso del título "inferencia informal" señalando, por un lado, que se puede utilizar como una etiqueta que refiere a los esfuerzos realizados por simplificar, visualizar o simular los modelos hipotéticos detrás de la inferencia estadística, mientras que también se refiere a una aproximación educativa que reduce la inferencia estadística netamente a lo observado de los datos y desarrollando métodos que solo se basen en ellos, en este sentido, Sánchez et al. (2018) sostienen que la enseñanza de la inferencia informal, como propuesta educativa, se basa en la promoción del razonamiento a partir de los datos y no en procedimientos formales. En este contexto, Tobías-Lara et al. (2019) reportan que diversos estudios indican que el razonamiento inferencial formal se asocia con el uso de métodos y procedimientos formales como las pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Por su parte el razonamiento inferencial informal se relaciona con la intuición de los estudiantes al realizar actividades de inferencia, al realizar análisis descriptivos y exploratorios sobre los datos, entre otras actividades previas a la inferencia formal, no obstante, señalan también que ambas formas de razonar corresponden a métodos de argumentación que permiten avalar inferencias, y, por otro lado, que la diferencia entre ambos yace en los tipos de procedimientos que se utilizan para solucionar las tareas de inferencia y en cómo se interpretan los resultados.

De acuerdo con Zieffler et al. (2008) el razonamiento inferencial informal es la forma en la que los estudiantes utilizan su conocimiento estadístico informal para plantear argumentos que avalen inferencias acerca de poblaciones desconocidas basados en muestras observadas, proceso que incluye las siguientes características:

- Razonamiento acerca de posibles características de la población (forma, centro, dispersión)
 basado en una muestra.
- Razonamiento sobre las posibles diferencias entre dos poblaciones basándose en las diferencias observadas en dos muestras.
- Razonamiento respecto de si una muestra en particular es o no probable de acuerdo con una expectativa específica.

Por otro lado, Estrella (2011) propone 3 componentes que caracterizan el razonamiento inferencial informal (ver Ilustración 2-9), a su vez, Batanero (2011) propone las siguientes etapas para la construcción de este razonamiento:

- Muestreo: como una introducción a la inferencia y como puente entre la estadística y la probabilidad.
- Comprensión Intuitiva de la Inferencia: a través de la comprensión de la variabilidad de un estadístico en distintas muestras y de la distinción entre distribución de la variable en la población, distribución de los datos en la muestra y distribución del estadístico.
- Introducción de inferencia bayesiana elemental.

Por su parte, Pérez et al. (2019) sostiene que el razonamiento inferencial informal se trata del uso de elementos y argumentos estadísticos para realizar inferencias, pero sin hacer uso de técnicas propias de la estadística inferencial, en este sentido, Álvarez-Arroyo et al. (2021) proponen las siguientes sugerencias a fin de favorecer la comprensión de los aspectos más complejos de los intervalos de confianza:

- Uso de representación gráfica de la distribución muestral del estadístico para evitar errores en la obtención de valores críticos asociados al nivel de confianza.
- Construcción de intervalos de confianza a partir de diversas muestras extraídas de una misma población con recursos informáticos para evitar la falacia fundamental de la confianza y mejorar la interpretación.

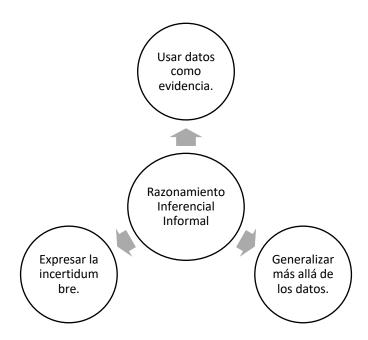


Ilustración 2-9: Componentes que Caracterizan el Razonamiento Inferencial Informal (Estrella, 2013, p.11)

2.3.3 Errores en la Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza.

A pesar de que la estimación por intervalos resulta más sencilla de comprender desde el punto de vista del estudiante, su comprensión y aplicación no siempre es adecuada (Batanero et al., 2020a). Al respecto, Morey et al., (2016) dan cuenta de 3 falacias que se identifican al momento de interpretar intervalos de confianza:

- Falacia fundamental de la confianza: corresponde al hecho de interpretar el nivel de confianza como la probabilidad que un intervalo de confianza (fijo) contenga al parámetro.
- Falacia de la precisión: corresponde a relacionar la anchura de un intervalo de confianza con la precisión de nuestro conocimiento sobre el parámetro.
- Falacia de la probabilidad: corresponde a asumir que los valores dentro del intervalo son más probables para el valor real del parámetro que los que guedan fuera del intervalo.

Con la finalidad de identificar cuáles son los tipos de errores cometidos al construir e interpretar intervalos de confianza que han sido reportados, a continuación, se incluyen algunos estudios y sus principales resultados que posteriormente sirven para aplicarlos en la construcción de instrumentos y categorías de análisis.

En primer lugar, la investigación realizada por del Mar et al. (2019) con futuros profesores respecto de posibles errores que podrían cometer los estudiantes al estudiar inferencia estadística, reporta cuatro tipos de errores dentro de los cuales se identifican casos específicos sobre intervalos de confianza (ver llustración 2-10). Particularmente los autores reportan que los errores más mencionados por los futuros docentes son los procedimentales, de interpretación y luego los conceptuales, no obstante, señalan también que los dos primeros sobrepasan a los dos restantes dejando en evidencia que los profesores en formación consideran dichos puntos como más complejos y que el foco de estos son el aprendizaje de procedimientos más que la comprensión profunda de los objetos.

Errores de selección o planteamiento

oAl identificar la distribución muestral oAl identificar el tipo de intervalo

Errores conceptuales

oConfundir
estadístico y
parámetro
oComprensión
incorrecta del TLC
oInterpretación
incorrecta del nivel
de confianza
oConfusión entre
nivel de confianza y
de significación

Errores procedimentales

oAl identificar los datos
oAl estandarizar u operar con desigualdades
oAl calcular probabilidades
oAl establecer límites del intervalo

Errores de interpretación

oAl no contextualizar el resultado oDel nivel de confianza oAl considerar fijos los extremos del intervalo oAl considerar el parámetro dentro del intervalo oAceptar el intervalo sin comprobar que contiene a la media verdadera

Ilustración 2-10: Tipos de errores asociados al trabajo con intervalos de confianza elaborado a partir de lo expuesto en del Mar et al. (2019)

Por su parte, la investigación de Batanero et al. (2020b) realizada con estudiantes de psicología y bachillerato, propone un análisis semiótico de un ejercicio de intervalos de confianza, reconociendo siete

prácticas matemáticas (ver Ilustración 2-11), además de utilizar las siguientes categorías para clasificar las soluciones propuestas por los estudiantes:

- Resolución correcta: "es aquella que lleva a una expresión final correcta del intervalo, con o sin redondeo" (Batanero et al., 2020b, p.695).
- Resolución parcialmente correcta: es aquella en la que no se llega a la expresión final del intervalo de confianza (Batanero et al., 2020b).
- Resolución incorrecta: "es aquella en que la expresión del intervalo es incorrecta o no se deducen correctamente los datos necesarios para el cálculo a partir del enunciado del problema" (Batanero et al., 2020b, p.695).

Además, de su estudio identifican los siguientes tipos de errores en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas:

- Suma y resta a la media el valor crítico antes de multiplicar por el error típico.
- Suma y resta a la media el valor crítico multiplicado por el tamaño de muestra.
- Determinar incorrectamente el nivel de riesgo.
- Redondeos incorrectos.
- Tomar valor crítico negativo.
- Intercambiar extremos del intervalo.

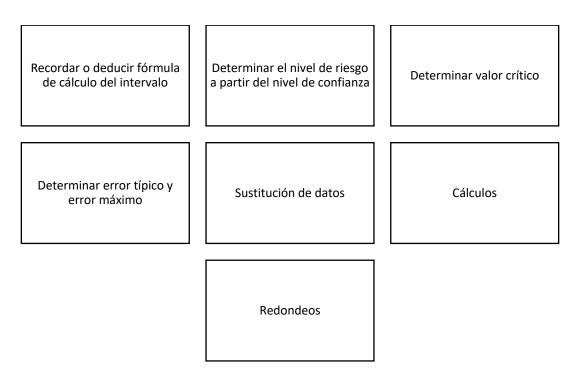


Ilustración 2-11: Prácticas Matemáticas Involucradas en la Solución de un Ejercicio de Intervalo de Confianza (Batanero et al., 2020b, p.694)

Por su parte, Roldán-López et al., (2020a) a partir de su investigación realizada con estudiantes universitarios y preuniversitarios, señalan la existencia de errores de comprensión (ver Ilustración 2-12) a partir de la aplicación de 6 ítems de selección múltiple. Dentro de sus principales conclusiones, se destacan las siguientes:

- Los errores identificados se transmiten en diferentes tipos de enseñanza.
- Los errores de interpretación pueden no derivar del conocimiento matemático sino que de la enseñanza recibida.
- Para mejorar los resultados de los estudiantes en inferencia se debe incidir en la formación de los docentes en el tema.
- La interpretación y propiedades de los intervalos de confianza son tan importantes como su cálculo.

Errores identificados en otras investigaciones

- •Reducir confianza reduce precisión
- •El intervalo siempre contiene a la media poblacional
- •Interpretación bayesiana del intervalo
- •Reducir confianza aumenta amplitud
- •Aumento de muestra aumenta amplitud
- Extremos constantes
- Disminuir desviación estándar no afecta al intervalo

Errores identificados en su propio trabajo

- •Amplitud dependiente de la media muestral
- •Aumento de muestra aumenta la confianza
- Disminuir desviación estándar aumenta el intervalo
- Calculo del intervalo cuando se conoce el parámetro
- •Relacionar presición solo con la confianza
- •Media muestral como extremo del intervalo
- •Intervalo contiene un % de veces la media muestral

Ilustración 2-12: Errores identificados por Roldan-López et al. (2020a) en la aplicación de 6 ítems de selección múltiple sobre intervalos de confianza.

Además, Roldan-López et al. (2020b) realizan otra investigación con estudiantes de bachillerato e ingeniería, que busca proporcionar información sobre la comprensión que los estudiantes tienen sobre las propiedades del intervalo de confianza a partir de las ideas de comprensión y conflicto semiótico del EOS, para ello, utilizan un cuestionario de seis ítems a partir de los que se identifican los siguientes conflictos semióticos:

- Reducir el nivel de confianza reduce la precisión
- La amplitud depende de la media muestral
- Disminuir la desviación típica aumenta el intervalo

- El intervalo siempre contiene a la media poblacional
- Interpretación bayesiana del intervalo
- Aumentar la muestra aumenta la amplitud
- Aumentar la muestra aumenta siempre la confianza
- Le media muestral es un extremo del intervalo
- Calcular el intervalo cuando se conoce el parámetro
- Ligar la precisión solo con la confianza
- Reducir la confianza aumenta el intervalo
- Disminuir la desviación típica no cambia el intervalo
- Los extremos del intervalo son constantes
- El intervalo contiene un porcentaje de veces a la media muestral

En las investigaciones mencionadas previamente, es posible identificar que existen errores que se repiten a pesar de las distintas muestras utilizadas, en este sentido, una explicación a estos errores viene dada por Batanero et al. (2020a) quienes indican que la comprensión de la lógica que subyace a la construcción de intervalos de confianza (bajo el enfoque frecuencial) implica que los estudiantes entiendan el muestreo como un proceso estocástico, además de dar una explicación a la falacia fundamental de la confianza en el deseo de los estudiantes de acotar el valor del parámetro de forma determinista. Por su parte, Yáñez et al. (2009) atribuye la dificultad a la cantidad y complejidad de los conceptos elementales para la construcción de intervalos de confianza y de su respectiva integración.

Capítulo 3: Marco Metodológico

El propósito de este capítulo es describir el sustento metodológico a partir del cual se llevó a cabo esta investigación en el campo de la educación estadística. Se divide en dos secciones, la primera de ellas corresponde a los aspectos metodológicos generales de la investigación que incluye el enfoque, alcance, muestra y diseño. Por su parte, la segunda sección corresponde a una descripción sobre la elaboración de los instrumentos utilizados en la investigación y como estos se vinculan con el marco teórico descrito en el capítulo anterior.

3.1 Aspectos Metodológicos Generales

De acuerdo con Hurtado (2020) una investigación se define como el proceso intelectual y experimental que se apoya de diversos métodos de aplicación sistemática con la finalidad de dar a conocer más de un tema o dar soluciones a una problemática específica. En este sentido, el autor señala que toda investigación debe enmarcarse en un enfoque y que la elección de este va a depender de elementos como el contexto, los recursos, los objetivos y el problema de estudio. En la siguiente subsección se describe y justifica la elección del enfoque seleccionado para el desarrollo de esta investigación.

3.1.1 Enfoque

Otero (2018, p.2) plantea lo siguiente respecto de los enfoques en investigación científica:

Hoy la investigación científica cuenta con dos enfoques esenciales que durante el siglo XX lograron su posicionamiento desde diferentes campos del que hacer investigativo y llegado el siglo XXI se puede asegurar que se inicia con una tercera opción que ya venía siendo probada, demostrada y que consiste en un enfoque mixto, un híbrido de estudios cuantitativos y cualitativos de la investigación científica.

Respecto del enfoque mixto Hernández et al. (2014) señalan que la naturaleza compleja de los fenómenos de investigación que se abordan en distintas ciencias es uno de los motivos por los cuales se ha incrementado la necesidad de utilizarlo. Por su parte, Sánchez et al. (2020) sostienen que el enfoque mixto se diferencia de otros enfoques metodológicos por la adhesión a la calidad de los métodos investigativos, en este sentido, Otero (2018) señala que el enfoque mixto representa un proceso sistemático, empírico y crítico de la investigación, donde convergen la visión objetiva y subjetiva para dar respuesta a problemas humanos. Por su parte, Hernández et al. (2014) indican que este enfoque permite obtener mayor perspectiva y profundidad sobre el fenómeno de estudio, a la vez que incrementa la validez del estudio.

En el campo de la educación, Núñez (2017) destaca las potencialidades del enfoque mixto como batería metodológica, mientras que Bagur-Pons et al. (2021, p.17) señalan que: : "La investigación en ciencias de la educación comprende fenómenos complejos, dinámicos y multidimensionales que requieren ser abordados desde diferentes perspectivas metodológicas". A pesar de lo anterior, García-García et al. (2022) dan cuenta que de un total de 70 investigaciones analizadas, en el área de la educación estadística, solo 4 de ellas hacen uso de un enfoque metodológico mixto. A raíz de lo antes mencionado, el desarrollo de esta investigación sobre educación estadística se llevó a cabo bajo un enfoque metodológico mixto, cuyo diseño y muestra se describen en las siguientes subsecciones.

3.1.2 Diseño

De acuerdo con Hernández et al. (2014) en el desarrollo de una investigación con enfoque mixto en primer lugar se escoge un diseño general y posteriormente se realizan las especificaciones de un diseño particular. En este sentido, Otero (2018) señala que el enfoque mixto busca responder a los problemas de investigación a través de los diseños concurrentes, secuenciales, de conversión o de integración dependiendo de los objetivos planteados. En términos generales, esta investigación se desarrolló considerando una ejecución concurrente en el sentido de Hernández et al. (2014) y de Bagur-Pons et al. (2021), es decir, tanto los datos cualitativos como cuantitativos se recolectaron y analizaron aproximadamente en el mismo periodo de tiempo. Además cabe mencionar que no se consideró predominancia de un enfoque sobre el otro, pues los enfoques cualitativo y cuantitativo intervienen en la fase de análisis e interpretación de los resultados. Por otro lado, el diseño específico que orientó el desarrollo de esta investigación es el diseño de triangulación concurrente puesto que se busca poder efectuar validaciones cruzadas entre los datos cualitativos y cuantitativos (Hernández et al., 2014).

3.1.3 Muestra

La muestra con la que se contó para el desarrollo de este estudio fue de voluntarios y se trabajó con ella bajo una relación idéntica, es decir, toda la muestra participó tanto para la recolección de datos cuantitativos como para la recolección de datos cualitativos (Bagur-Pons et al., 2021). Además, se utilizaron dos criterios de selección para la muestra:

- Ser estudiante te pedagogía en matemática.
- Haber cursado al menos un curso de inferencia estadística durante su proceso de formación inicial.

Con base en los criterios mencionados, la muestra obtenida fue de 16 docentes de matemática en formación de dos instituciones de educación superior y que poseen las siguientes características:

- 8 participantes se identifican con el sexo masculino y 8 se identifican con el sexo femenino.
- 8 participantes son estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa (PMIE) de la Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH).
- 8 participantes son estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación (PEMC) de la Universidad de Santiago de Chile (USACH).
- 7 participantes al momento de participar en la investigación habían realizado únicamente un curso de inferencia estadística, mientras que los 9 restantes habían realizado dos cursos.
- 3 de los participantes se encontraban próximos a concluir sus estudios de pregrado y se encontraban trabajando en establecimientos escolares al momento de su participación en la investigación.

3.2 Elaboración de Instrumentos.

En las siguientes subsecciones se realiza una descripción de los instrumentos elaborados para la recolección de información cualitativa (instrumento 1 y 3) y cuantitativa (instrumento 2). Además, se detalla la relación de cada uno de los ítems en cada instrumento con el marco teórico descrito en el capítulo anterior.

3.2.1 Cuestionario KPSI sobre Intervalos de Confianza

Con la finalidad de identificar las percepciones de los futuros profesores respecto de su formación y preparación para la enseñanza de inferencia a través de intervalos de confianza, el primer instrumento utilizado en esta investigación fue un cuestionario de tipo KPSI (ver Instrumento 1). Este tipo de cuestionarios permiten la reflexión sobre conocimientos y habilidades para un tema en concreto además de proporcionar información respecto de lo que una persona sabe o no sabe (Gonzaga, 2016). Por otro lado, Sanahuja et al. (2020) indican que este tipo de instrumentos se pueden usar al finalizar un tema o unidad para evidenciar y reflexionar en torno a los aprendizajes adquiridos. En virtud de lo antes mencionado, se utilizó este tipo de instrumento con los siguientes propósitos:

- Identificar que conceptos o procedimientos los futuros profesores han estudiado respecto de intervalos de confianza
- Identificar la percepción que tiene futuros docentes sobre su preparación para la enseñanza de intervalos de confianza.

La construcción del instrumento es simple pues consta de afirmaciones o preguntas que se centran en el tema de interés (Sosa et al., 2018), en este sentido, el KPSI construido para los propósitos antes descritos consta de 16 conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza de acuerdo con lo mencionado en la sección 2.3.3 y que se dividen de la siguiente forma de acuerdo con las prácticas, objetos y procesos matemáticos de la faceta epistémica del CDM:

Los conceptos y procedimientos 1, 2 y 3 guardan relación con la parte conceptual de los objetos matemáticos pues se relacionan con los procesos de representación y generalización que permiten obtener expresiones y tipos para los casos específicos a los que hacen referencia, como por ejemplo expresión para el intervalo de confianza de la media o la proporción. Por su parte, los conceptos y procedimientos 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se relacionan con diversos procedimientos asociados a intervalos de confianza y que pueden ser tratados desde la perspectiva de los procesos de algoritmización, como por ejemplo cálculo del nivel de confianza o de riesgo a partir de un intervalo específico. Los conceptos y procedimientos 10, 11 y 16 se relacionan con los procesos de argumentación y por tanto con los argumentos como objetos matemáticos, como por ejemplo la interpretación del nivel de confianza. Por último, los conceptos y procedimientos 12, 13, 14 y 15 tienen relación directa con las proposiciones pues se refieren a propiedades que poseen distintos conceptos respecto del intervalo de confianza y su efecto sobre el mismo, como por ejemplo la relación entre el ancho del intervalo y el tamaño de muestra utilizado para su construcción.

3.2.2 Cuestionario de Conocimientos sobre Construcción e Interpretación de Intervalos de confianza

El segundo instrumento utilizado corresponde a un cuestionario tipo test de 8 preguntas de selección única con cuatro posibles alternativas de las cuales una y solo una era la opción correcta y un ítem abierto de construcción e interpretación de un intervalo de confianza. Los ítems 1, 2 y 6 están tomados de Roldan-López et al. (2020b) mientras que los ítems 3, 5 y 5 fueron adaptados de la investigación del mismo autor. Los ítems 7 y 8 son de creación propia al igual que la pregunta abierta. A continuación, se presentan los motivos por los cuales fueron seleccionados estos ítems para esta investigación en coherencia con el marco teórico descrito en el capítulo anterior.

3.2.2.1 *Îtem 1*

Este ítem fue seleccionado puesto que evalúa la comprensión sobre la definición de un intervalo de confianza para la media bajo el enfoque frecuencial, en este sentido, la opción correcta es la alternativa b). Las otras alternativas planteaban errores que se asocian a prácticas y objetos matemáticos de la categoría de conceptos que se describen a continuación:

- La alternativa a) señala que es la media muestral la que se encuentra dentro del intervalo aproximadamente un 90% de las veces. Se espera que sea seleccionada por aquellos docentes en formación que tienen dificultad en la comprensión conceptual de los objetos, particularmente en el proceso cognitivo de representación al no comprender que la media muestral siempre es parte del intervalo de confianza al estar centrado en ella.
- La alternativa c) señala que el intervalo de confianza posee extremos constantes lo que corresponde a un error puesto que el intervalo de confianza para la media en su construcción teórica posee extremos variables. Se espera que esta alternativa sea seleccionada por aquellos docentes que no distinguen la construcción teórica de la construcción específica de un intervalo asociado a una muestra en particular, siendo un error asociado a los procesos cognitivos de generalización y de representación.
- La alternativa d) hace referencia a la interpretación bayesiana de un intervalo de confianza en este sentido se espera que sea seleccionada por aquellos docentes que poseen un error asociado al proceso matemático de definición misma de intervalo de confianza bajo el enfoque frecuencial.

3.2.2.2 *Ítem 2*

Este ítem fue seleccionado puesto que evalúa la comprensión respecto de la relación que existe entre el tamaño de la muestra y el ancho del intervalo, siendo b) la alternativa correcta. Las otras alternativas planteaban errores en la categoría de proposiciones que se describen a continuación:

- La alternativa a) planteaba la existencia de relación entre el tamaño de muestra y el nivel de confianza al indicar, erróneamente, que aumentando la muestra se debe tener mayor confianza de que el intervalo contendrá al parámetro. Se espera que esta alternativa sea seleccionada por aquellos docentes en formación que no posean claridad de las propiedades y relaciones entre diversos elementos que componen el intervalo.
- La alternativa c) presentaba la inexistencia de relación entre el tamaño de muestra y el ancho del intervalo al declarar que ambos intervalos poseen igual precisión. Al igual que la alternativa anterior, se espera que esta opción sea seleccionada por docentes que poseen dificultades en la comprensión de las propiedades y relaciones entre los diversos elementos que componen el intervalo.
- La alternativa d) presentaba la relación entre ancho del intervalo y tamaño de muestra, pero de forma inversa, por lo que se espera que esta alternativa sea seleccionada por aquellos docentes en formación que poseen conocimiento de la relación entre estos dos elementos que componen el intervalo de confianza, pero no han logrado institucionalizar dicho conocimiento.

3.2.2.3 *Îtem 3*

Este ítem se seleccionó pues evalúa la relación existente entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo, no obstante, se modificó para que en sus alternativas una y solo una fuese la correcta, en este sentido, se

fijó como alternativa correcta la letra c). Los errores en procesos matemáticos y cognitivos de las otras alternativas se presentan a continuación:

- La alternativa a) presenta la relación entre nivel de confianza y precisión que es opuesta a la real, pues lo correcto es indicar que al disminuir la confianza aumenta la precisión. De forma análoga, la alternativa b) indica la misma relación errónea pues señala que a menor confianza más ancho será el intervalo. Se espera que alguna de estas alternativas se seleccionada por aquellos docentes en formación que presentan dificultades en los procesos cognitivos de personalización e institucionalización al adquirir de forma errónea los conocimientos relacionados con los elementos de los intervalos de confianza y sus propiedades.
- La alternativa d) corresponde a una modificación de lo propuesto originalmente en el ítem y señala la no existencia de relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo. Se espera que esta opción sea seleccionada por aquellos docentes en formación que no han logrado comprensión respecto del proceso matemático de enunciación.

Este ítem fue seleccionado pues evalúa la comprensión de la relación existente entre la desviación estándar poblacional y el ancho del intervalo, no obstante, se modificó una de las alternativas para asegurar que solo una de las opciones fuese la correcta, en este contexto, la opción correcta corresponde a la alternativa d). Los errores presentes en las otras alternativas se describen a continuación:

- La alternativa a) señala la no existencia de relación entre la desviación estándar de la población y
 el ancho del intervalo. Se espera que esta opción sea seleccionada por aquellos docentes que no
 han logrado desarrollar el proceso matemático de enunciación al no comprender las relaciones
 existentes entre diversos conceptos que intervienen en el intervalo de confianza.
- La alternativa b) plantea una relación inversa a la correcta al indicar que al disminuir la desviación estándar aumenta el ancho del intervalo. De forma similar, la alternativa c) plantea una relación inversa al indicar que si la desviación estándar aumenta la anchura disminuye. Se espera que estas alternativas sean seleccionadas por aquellos docentes en formación que no han logrado institucionalizar el conocimiento relativo a la relación entre desviación estándar poblacional y ancho del intervalo.

3.2.2.5 *Ítem 5*

Este ítem fue seleccionado pues sirve para evaluar la comprensión conceptual del intervalo de confianza desde el punto de vista frecuencial, sin embargo, fue necesaria la modificación de una de las alternativas para garantizar que una y solo una de las opciones fuese la correcta, en este sentido, la opción correcta es la alternativa c). Los errores planteados en las otras alternativas se describen a continuación:

- La alternativa a) plantea que el ancho del intervalo depende de la media muestral, siendo esta una concepción errónea puesto que la media muestral es el centro del intervalo. Se espera que esta alternativa sea seleccionada por aquellos docentes en formación que presentan dificultades en el proceso matemático definición.
- La alternativa b), al igual que la alternativa a), plantea un error de concepto al indicar que la media muestral es un extremo del intervalo, por lo que se espera de igual forma que sea seleccionada por aquellos docentes que tienen dificultades con el proceso matemático de definición.
- La alternativa d) señala la inexistencia de relación entre la desviación estándar poblacional y el ancho del intervalo, indicando que aquellos docentes que seleccionan esta alternativa no han logrado comprender el objeto desde el punto de vista de las proposiciones evidenciando así dificultades en los procesos de enunciación e institucionalización.

Este ítem fue seleccionado pues evalúa la comprensión del propósito de los intervalos de confianza, en este sentido, la alternativa correcta es la d). Las otras alternativas permiten evidenciar las siguientes dificultades:

- La alternativa a) y la alternativa b) plantean intervalos concretos para la estimación lo cual en el
 contexto de la pregunta no tiene sentido puesto que se conoce la media poblacional. Estas
 alternativas revelan dificultades en el proceso matemático de definición pues indica que aquellos
 que seleccionan estas opciones no comprenden que el intervalo de confianza se utiliza para
 estimar parámetros desconocidos.
- La alternativa c) presenta un error conceptual pues indica que el valor del parámetro siempre debe estar contenido en los intervalos contenidos lo cual revela que no existe comprensión del error al estimar con intervalos de confianza, lo que se relaciona con dificultades en los procesos de definición.

3.2.2.7 *Ítem* 7

Este ítem es de creación propia y busca identificar errores de carácter conceptual asociados a intervalos de confianza a partir de un intervalo específico dado, en este sentido, la alternativa correcta es la a). Por su parte, los errores asociados a las otras alternativas son:

- La alternativa b) indica el porcentaje de error en una sola cola sin embargo el intervalo dado es bilateral. Se espera que esta opción sea seleccionada por aquellos docentes que no han logrado desarrollar los procesos de argumentación relacionados con la construcción de intervalos de confianza.
- La alternativa c) señala una afirmación incorrecta pues no se asocia a lo que se desea estimar con
 el intervalo construido, en este sentido se espera que los docentes que seleccionen esta opción
 presenten dificultades relacionadas con el proceso matemático de comunicación.

• La alternativa d) representa una interpretación bayesiana del intervalo y por tanto se espera que sea seleccionada por aquellos docentes que tienen dificultades con los procesos de definición.

Al igual que el ítem anterior, este es de creación propia y evalúa la comprensión conceptual de la construcción teórica de intervalos de confianza para la media poblacional, en este sentido la alternativa correcta es c). Los errores al seleccionar las otras opciones se presentan a continuación:

- La alternativa a) plantea correctamente que el intervalo posee extremos aleatorios. Se espera que
 esta opción sea seleccionada por aquellos profesores en formación que no han desarrollado
 comprensión respecto de la naturaleza aleatoria de los intervalos, demostrando dificultades con el
 proceso matemático de definición y el proceso cognitivo de significación.
- La alternativa b) relaciona correctamente el nivel de confianza con el nivel de significación, por lo
 que se espera que esta alternativa sea seleccionada por aquellos docentes que no logran enlazar
 contenidos de intervalos de confianza con otros elementos de inferencia como es el nivel de
 significancia, indicando dificultad en los procesos de enunciación y definición.
- La alternativa d) plantea correctamente que las variables aleatorias utilizadas para la construcción del intervalo dependen de la variable \overline{X} , por lo que se espera que esta alternativa sea seleccionada por docentes que si bien comprenden la naturaleza aleatoria de los intervalos, no comprenden que la media muestral de una muestra específica es distinta a la distribución de probabilidades de la variable aleatoria de las medias muestrales, lo que refleja dificultad en los procesos de definición y representación.

3.2.2.9 Pregunta Abierta

Este ítem de elaboración propia plantea la necesidad de construir e interpretar un intervalo de confianza para la media de una población con varianza desconocida en un contexto específico. Se espera que los futuros docentes sean capaces de:

- Definición de variable asociada a la pregunta
- Identificar los datos que les plantea el enunciado.
- Deducir, a partir de los datos, la fórmula para la construcción del intervalo.
- Determinar los valores críticos asociados al nivel de confianza utilizando una distribución adecuada.
- Sustituir los datos y construir el intervalo de confianza específico.
- Interpretar el resultado en el contexto del ejercicio.

A partir de lo anterior, se analizó cada respuesta dada en relación con las prácticas, procesos y objetos matemáticos de la faceta epistémica del modelo del conocimiento didáctico matemático.

3.2.3 Escala Likert de Dificultad Sobre Intervalos de Confianza

El tercer instrumento utilizado para la recolección de datos corresponde a un cuestionario con una escala Likert de dificultad que mide el grado de facilidad o complejidad que los futuros profesores atribuyen a los conceptos o procedimientos asociados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza, para ello se adaptó la redacción de los 16 conceptos y procedimientos utilizados en el instrumento 1 a fin de poder contrastar la información obtenida entre ambos cuestionarios.

3.3 Procesamiento de la Información

El análisis de los resultados obtenidos con los tres instrumentos anteriores se realizó siguiendo la estructura que se observa en la Ilustración 3-1, específicamente se realizó un análisis descriptivo de los tres instrumentos utilizados, posteriormente se cruzó información obtenida con el instrumento 1 y 2, y finalmente información entre los 3 instrumentos de acuerdo con los ítems del cuestionario de conocimientos disciplinares. Paralelamente, se realizó un análisis de pregunta abierta de acuerdo con las prácticas matemáticas esperadas y analizando las respuestas de acuerdo con los componentes de la faceta epistémica del CDM.

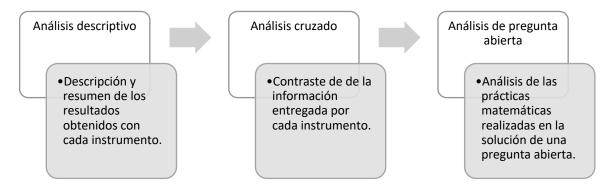


Ilustración 3-1: Proceso de análisis de resultados

Capítulo 4: Resultados y Análisis

En este capítulo se plantea el análisis de las respuestas obtenidas a partir de los diversos instrumentos descritos en el capítulo anterior y de acuerdo con lo planteado en la sección 3.3, en este sentido, el capítulo se divide en cinco secciones: en la primera se presenta el análisis de las respuestas obtenidas en el cuestionario KPSI descrito en la subsección 3.2.1, la segunda sección da cuenta del análisis que se realiza a partir de las respuestas al cuestionario de conocimientos descrito en la subsección 3.2.2, por su parte la tercera sección presenta los resultados del cuestionario sobre percepción de dificultad, la cuarta sección corresponde al análisis cruzado de la información obtenida a partir de los instrumentos utilizados y finalmente en la sección cinco se presenta el análisis de preguntas abiertas.

4.1 Resultados primer instrumento

El primer instrumento, correspondiente al cuestionario KPSI, se analizó dividiendo en dos los resultados obtenidos a partir de él. En primer lugar, se realiza una descripción respecto del estudio de dieciséis conceptos o procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza durante la formación inicial de los participantes de la investigación. Posteriormente, se realiza una descripción respecto de la percepción que los participantes tienen respecto del grado de conocimiento alcanzado sobre los mismos conceptos o procedimientos durante su formación inicial. Además, cabe mencionar que la confiabilidad general de la segunda parte del instrumento calculada a través del coeficiente alfa de Cronbach es de 0.9458.

4.1.1 Resultados obtenidos respecto del estudio de los conceptos y procedimientos durante el proceso de formación inicial

El gráfico Gráfico 4-1 resume los resultados obtenidos respecto del estudio durante el proceso de formación inicial de los participantes de cada uno de los conceptos o procedimientos incluidos en el cuestionario KPSI, donde la barra azul representa el porcentaje de la muestra que sí estudio el concepto o procedimiento durante su proceso de formación inicial, mientras que, la barra anaranjada, representa el porcentaje complementario, es decir, aquellos participantes que no estudiaron durante su formación inicial el concepto o procedimiento indicado. A partir de este gráfico es posible señalar lo siguiente:

- El 100% de los participantes declara haber estudiado la construcción de intervalos de confianza para la media de una población conociendo la varianza poblacional. Por su parte, procedimientos similares como la construcción de intervalos de confianza para la media con varianza poblacional desconocida o para la proporción son estudiados durante la formación inicial por la mayoría de los participantes.
- La interpretación bayesiana de los intervalos de confianza corresponde al concepto menos estudiado durante la formación inicial, a pesar de esto, las investigaciones mencionadas en la sección 2.3.3 señalan que es uno de los errores más frecuentes bajo el enfoque frecuencial.
- A pesar de que la mayoría de los conceptos y procedimientos incluidos en el cuestionario obtienen altos porcentajes de acuerdo respecto de su estudio en formación inicial, resulta importante profundizar en aquellos que se indican que no han sido estudiados con porcentajes superiores al 30% como son determinar el nivel de riesgo ya sea a partir de un intervalo dado o del nivel de confianza, determinar el valor crítico para la construcción del intervalo o la relación entre el error estándar y de estimación con la precisión de un intervalo.

En términos generales los resultados obtenidos a partir de un primer análisis al cuestionario KPSI permiten señalar que la mayoría de los participantes de esta investigación han estudiado los conceptos y procedimientos asociados a la construcción de intervalos de confianza durante su formación inicial.

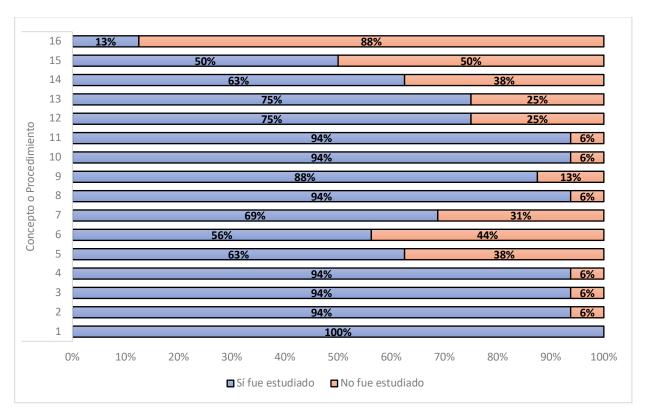


Gráfico 4-1: Resultados sobre el estudio de conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza durante formación inicial.

4.1.2 Resultados obtenidos respecto del nivel de conocimiento alcanzado sobre los conceptos y procedimientos durante el proceso de formación inicial

El Gráfico 4-2 resume los resultados obtenidos respecto del nivel de preparación para la enseñanza de distintos conceptos y procedimientos sobre construcción e interpretación de intervalos de confianza con el que los futuros profesores de matemática consideran que cuentan. En este gráfico la leyenda se relaciona con la codificación utilizada para medir el grado de preparación y que se interpreta de la siguiente forma:

- La porción verde (0) de la barra representa el porcentaje de participantes que señalan no conocer nada respecto del conocimiento o procedimiento indicado.
- La porción azul (1) representa al porcentaje de docentes que no conocen el procedimiento o concepto, pero que señalan ser capaces de estudiarlos por su cuenta para posteriormente enseñarlo en el sistema escolar.
- La porción amarilla (2) de la barra representa el porcentaje de participantes que conocen el procedimiento o concepto señalado, pero no pueden aplicarlo en ejercicios por su cuenta.

- La porción gris (3) de la barra representa el porcentaje de aquellos profesores en formación que si conocen el concepto o procedimiento y pueden aplicarlo por su cuenta en la resolución de ejercicios.
- La porción anaranjada (4) representa aquellos docentes en formación que conocen y aplican los conceptos o procedimientos en ejercicios por su cuenta, pero no consideran ser capaces de llevar a cabo su enseñanza.
- La porción roja (5) corresponde a aquellos participantes que señalan tener conocimiento, poder aplicar y llevar a cabo la enseñanza en el nivel escolar de los conceptos o procedimientos indicados.

A partir de este gráfico es posible señalar lo siguiente:

- La mayoría de los conceptos y procedimientos presentan porcentajes de respuestas que señalan el nulo conocimiento de ellos, pero sin capacidad de poder estudiarlos por su propia cuenta, lo que alerta sobre la capacidad de los futuros profesores para gestionar procesos de aprendizaje autónomos durante su formación y desarrollo profesional.
- Llama la atención que en los diversos conceptos y procedimientos el porcentaje de participantes que señala conocer los conceptos y procedimientos, además de poder aplicarlos en ejercicios por su cuenta y llevar a cabo su enseñanza en el sistema escolar, no supera en ningún caso el 25%, lo que nos advierte no solo de la formación disciplinar de los futuros docentes, sino que también de su formación en la didáctica específica.
- En la mayoría de los conceptos y procedimientos los participantes declaran poder aplicarlos en ejercicios por su cuenta, aun cuando algunos indican no sentirse preparados para la enseñanza de estos, sin embargo, esto no ocurre en aquellos casos en los que se refiere a nivel de riesgo e interpretación bayesiana, lo que nos lleva a pensar que estos temas requieren mayor trabajo durante los procesos formativos de los futuros profesores de matemática.
- Los conceptos y procedimientos que presentan un mayor porcentaje de participantes que indican
 estar preparados para su enseñanza en el sistema escolar corresponden a la construcción de
 intervalos de confianza para la media y la proporción, así como también la interpretación de estos
 y del nivel de confianza, que son justamente aquellos que se encuentran incluidos en los
 documentos curriculares escolares actuales.

En términos generales, los resultados obtenidos con esta parte del primer instrumento revelan que en su mayoría los futuros profesores adquieren conocimientos suficientes para realizar ejercicios de inferencia relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza, no obstante, dicho conocimiento los participantes lo perciben como insuficiente para llevar a cabo la enseñanza de este en el nivel escolar. Lo anterior invita a reflexionar respecto de los procesos formativos en didáctica de la estadística de los futuros profesores de matemática, particularmente respecto de la inferencia a través de intervalos de confianza.

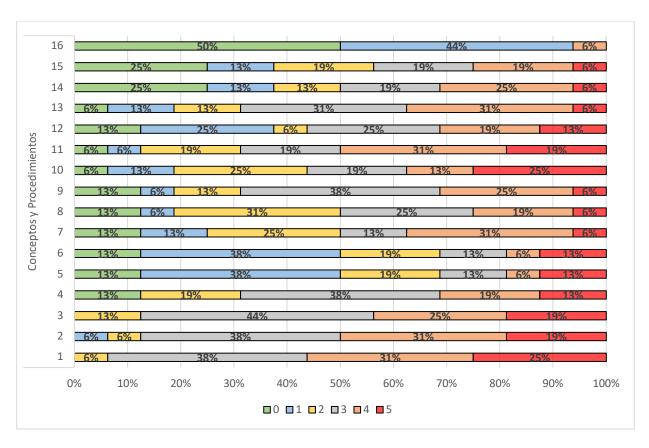


Gráfico 4-2: Resultados sobre el grado de preparación para la enseñanza de conceptos y procedimientos sobre construcción e interpretación de intervalos de confianza.

4.2 Resultados segundo instrumento

En esta sección se realiza el análisis de las respuestas obtenidas en el cuestionario de conocimiento disciplinar, específicamente de las 8 preguntas de selección única que eran parte de dicho instrumento. En primer lugar, el ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. ilustra el porcentaje de respuestas correctas (en verde) obtenidas en cada ítem, siendo posible observar que los ítems con mayor porcentaje de aciertos son el ítem 2, 5 y 7, mientras que los ítems con menor porcentaje de aciertos son el 1, 3 y 8. Un análisis ítem por ítem se describe en la sección 4.4.

Por otro lado, al calcular la confiabilidad del cuestionario a través del coeficiente KR20 se obtuvo una confiabilidad general de 0,4932 lo que además permitió identificar aquellos ítems que no permiten una correcta discriminación entre individuos, particularmente, el ítem 5 posee una correlación negativa (-0,0824) evidenciando que no es un buen ítem para medir lo que se desea con el cuestionario. Al suprimir este ítem y volver a calcular la confiabilidad, el resultado general aumenta a 0,5603 y se vuelve a identificar un ítem con correlación negativa, en este caso el ítem 7 con una correlación de -0,1428 por lo que también es posible indicar que no es un ítem que permita la discriminación. Finalmente, al suprimir los ítems 5 y 7 del cuestionario y calcular la confiabilidad, el coeficiente KR20 sube a 0,6742 y no se obtienen ítems con correlaciones negativas.

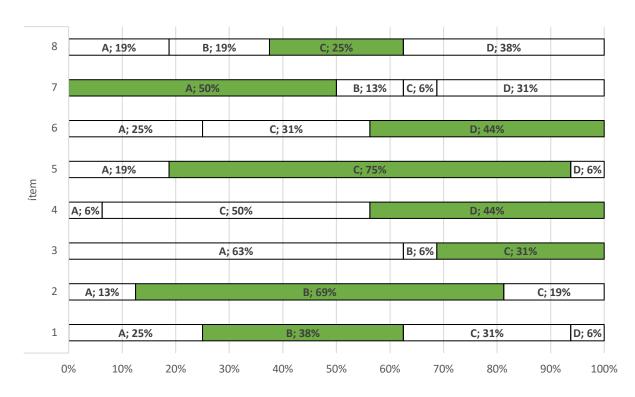


Gráfico 4-3: Porcentaje de respuestas correctas en cada ítem del cuestionario de conocimientos sobre construcción e interpretación de intervalos de confianza.

4.3 Resultados tercer instrumento

El último instrumento utilizado entrega información respecto del grado de dificultad que los futuros docentes de matemática atribuyen a distintos conceptos y procedimientos asociados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza. La confiabilidad de este instrumento obtenida a través del alfa de Cronbach corresponde a 0.8484 y los resultados generales se pueden apreciar en el Gráfico 4-4 a partir del cual se puede señalar lo siguiente:

- De los dieciséis conceptos y procedimientos incluidos en el instrumento, nueve de ellos son catalogados como difíciles o muy difíciles por los participantes de esta investigación, destacando entre estos la interpretación bayesiana de los intervalos de confianza como aquel procedimiento con mayor nivel de dificultad asignado por los futuros docentes, seguido por aquellos procedimientos relacionados con la determinación del nivel de riesgo asociado a un intervalo de confianza.
- Únicamente cuatro de los conceptos y procedimientos son considerados con un nivel de dificultad bajo por los participantes del estudio, encontrándose entre estos el determinar el nivel de confianza de un intervalo dado, interpretar dicho nivel de confianza y su relación con la precisión del intervalo, así como también la relación entre el tamaño de muestra y la precisión del intervalo.

 Finalmente, tres conceptos y procedimientos no son catalogados como fáciles o difíciles, entre ellos se encuentran el recordar las fórmulas para intervalos de confianza para la media y el cálculo del error de estimación de un intervalo de confianza.

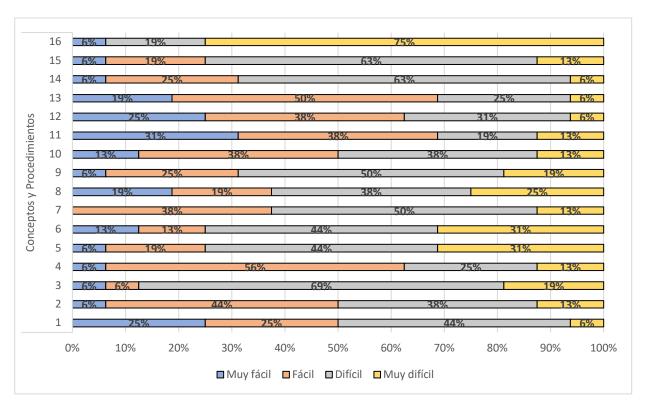


Gráfico 4-4: Resultados sobre el grado de dificultad que futuros profesores de matemática atribuyen a conceptos y procedimientos relacionados con la construcción de intervalos de confianza.

4.4 Análisis cruzado de resultados

A fin de lograr mayor profundidad en el análisis de los resultados obtenidos con los distintos instrumentos utilizados en esta investigación a continuación se presenta un cruce de información en primer lugar entre el cuestionario KPSI y el cuestionario de dificultas y posteriormente entre el cuestionario de conocimientos disciplinares y los otros dos instrumentos antes mencionados.

4.4.1 Sobre conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza

A partir de los resultados obtenidos tanto en el primer como en el tercer instrumento respecto de los dieciséis conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza, es posible señalar lo siguiente:

 La construcción de intervalos de confianza para la media (con o sin varianza conocida) y para la proporción son procedimientos que la mayoría de los participantes estudió durante su proceso de formación inicial, no obstante, el porcentaje de estos que señala tener un grado de conocimiento que le permita aplicarlos en ejercicios por su cuenta y llevar a cabo su enseñanza en el sistema escolar no supera el 25% en ningún caso lo que puede estar relacionado con el nivel de dificultad que atribuyen a cada uno de estos procedimientos, pues son considerados difíciles o muy difíciles por la mitad de los participantes en el caso de la media y por más de la mitad en el caso de la proporción. Lo anterior revela la necesidad de profundizar en la enseñanza de aspectos didácticos respecto de los intervalos de confianza a fin de que los futuros profesores se sientan preparados para enseñar en el sistema escolar estos temas.

- Determinar el valor crítico necesario para la construcción de intervalo de confianza es un procedimiento estudiado por una gran mayoría de los participantes, al igual que determinar el nivel de confianza a partir de un intervalo dado, sin embargo, este último es considerado fácil o muy fácil por un 62% de los participantes mientras que el primero es considerado difícil o muy difícil en un porcentaje equivalente. Por otro lado, ambos procedimientos obtienen bajos porcentajes de participantes que indican estar preparados para su enseñanza en el sistema escolar, con 6% y 13% respectivamente, a pesar de esto, la mayoría de los participantes si señala ser capaz de aplicar dichos procedimientos en ejercicios por su cuenta, evidenciando el carácter práctico del conocimiento adquirido y no una comprensión completa del este.
- Determinar el nivel de riesgo a partir de un intervalo o de un nivel de confianza dado es de los procedimientos con mayor porcentaje de participantes que señalan no haberlo estudiado durante su formación inicial, lo que coincide tanto con el grado de conocimiento que señalan tener siendo la categoría predominante el no conocerlo, pero si poder estudiarlo por su cuenta y con el nivel de dificultad atribuido pues 75% de los participantes lo considera difícil o muy difícil. Lo anterior puede significar que los estudiantes para profesor de matemática efectivamente no estudian el nivel de riesgo durante su formación inicial o bien lo estudian con otro nombre o muy superficialmente.
- El cálculo del error estándar y el error de estimación son procedimientos que fueron estudiados por la mayoría de los participantes del estudio pero que aun así son considerados difíciles o muy difíciles por más del 50% de estos. Por otro lado, el grado de conocimiento alcanzado corresponde principalmente a poder aplicarlo en ejercicios por su cuenta y con bajos porcentajes de futuros docentes que consideran estar preparados para su enseñanza en el sistema escolar. Estos resultados nuevamente revelan el carácter práctico de los conocimientos adquiridos por los futuros profesores y la poca profundidad con que se trabajan durante su formación inicial.
- La interpretación de un intervalo de confianza y del nivel de confianza con el que este se construye revela el grado de apropiación conceptual que poseen los futuros profesores de matemática respecto de estos objetos, en este sentido, más de un 90% de los participantes señaló haber estudiado dichas interpretaciones y entre un 50% y un 70% considera esta práctica matemática muy fácil o fácil. A pesar de lo anterior, respecto de la interpretación de un intervalo de confianza un 25% de los participantes señalan que no puede realizarlo en ejercicios por su cuenta mientras que otro 25% indica que puede aplicarlo en ejercicios y además llevar a cabo su enseñanza en el

sistema escolar. Por su parte, la interpretación del nivel de confianza posee mayor porcentaje de participantes que señala poder realizarlo en ejercicios por su cuenta, pero no enseñarlo en el contexto escolar y un 19% que si lo puede enseñar. Si bien los resultados descritos no son bajos, dan cuenta de la necesidad de aumentar las instancias de interpretación de intervalos de confianza y del nivel de confianza, sin despreocupar su construcción y otros procedimientos inherentes a estos.

- En la precisión de un intervalo intervienen elementos de este tales como el nivel de confianza, el tamaño de la muestra, el error estándar y el error de estimación. En los resultados de esta investigación la relación entre cada uno de los elementos mencionados y la precisión del intervalo fue estudiada por al menos el 50% de los participantes, siendo el de menor porcentaje la relación existente entre el error de estimación y la precisión del intervalo. Respecto de los niveles de dificultad, la relación de la precisión con el nivel de confianza y con el tamaño de muestra son las que se consideran más fáciles mientras que la relación entre la precisión y el error estándar o de estimación son considerados difíciles por los participantes. A pesar de lo anterior, los resultados respecto del grado de conocimiento alcanzado son similares entre las distintas relaciones que se pueden establecer, predominando en todas ellas la posibilidad de aplicación en ejercicios por cuenta propia, pero con porcentajes de participantes que pueden llevar a cabo su enseñanza en el nivel escolar que no superan el 13%. Lo anterior permite establecer una necesidad de mayor desarrollo conceptual, puesto que al comprender estas relaciones se pueden modificar elementos para construir intervalos más adecuados al contexto de un estudio e incluso promover interpretaciones más profundas respecto de los intervalos construidos.
- Finalmente, la interpretación bayesiana es la parte conceptual que la mayoría de los participantes señala no haber estudiado durante su formación inicial lo que se condice con ser el proceso conceptual que obtiene un mayor nivel de dificultad asociado siendo considerado muy difícil por un 75% de los participantes a la vez que un 50% señala no conocer nada al respecto y un 44% señala que podría estudiarlo por su cuenta. Los resultados revelan que aun cuando la literatura señala que la interpretación bayesiana es uno de los errores más comunes al interpretar intervalos de confianza, la formación de profesores parece no considerarlo dentro de sus programas formativos haciendo necesaria la reflexión en torno a este tema.
 - 4.4.2 Sobre los conocimientos disciplinares asociados a la construcción e interpretación de intervalos de confianza

En esta subsección de presenta el análisis cruzado de información respecto de los tres instrumentos utilizados en esta investigación de acuerdo con cada uno de los ítems utilizados en el cuestionario de conocimiento disciplinar.

4.4.2.1 Item 1

Considerando que este ítem evalúa la comprensión sobre la definición de un intervalo de confianza para la media bajo el enfoque frecuencial, que es uno de los procedimientos con mayor porcentaje de participantes que señala haberlo estudiado durante su formación inicial, el porcentaje de respuestas correctas obtenido es solo de un 38%, lo que puede deberse a que un 50% de los participantes consideran que la construcción de intervalos de confianza para la media lo consideran un procedimiento difícil por lo que la apropiación conceptual de la definición puede no haberse logrado completamente durante su estudio, lo que se respalda por los porcentajes de respuestas incorrectas, destacando que:

- 25% de los participantes selecciona la alternativa a), pues en esta alternativa se planteaba el conflicto semiótico existente al no comprender que la media muestral siempre es parte del intervalo de confianza.
- 31% de los participantes selecciona la alternativa c), permitiendo identificar la existencia de un conflicto respecto de la naturaleza aleatoria del intervalo desde su construcción teórica, ya que en esta opción se indicaba que los extremos son constantes.

Los resultados obtenidos con este ítem dan cuenta de la necesidad de reforzar la comprensión conceptual de los intervalos e ir más allá del simple aprendizaje de procedimientos de construcción.

En este ítem se evaluaba la relación existente entre el ancho del intervalo y el tamaño de muestra, obteniendo un 69% de respuestas correctas lo que coincide con ser una de las relaciones más estudiadas por los participantes de esta investigación y que en su mayoría la consideran una relación fácil o muy fácil. A pesar de esto solo un 6% de los participantes sostienen que tienen un grado de conocimiento suficiente para enseñarlo en el sistema escolar, esto permite señalar que se debe proporcionar a los futuros docentes conocimientos didácticos que aumenten su grado de preparación para la enseñanza de su conocimiento disciplinar.

En este ítem se evaluaba la relación entre el nivel de confianza y el ancho de un intervalo, que de acuerdo con los resultados del primer instrumento fue estudiado por un 75% de los participantes, no obstante, es uno de los ítems con menor porcentaje de acierto del cuestionario, obteniendo un 31% de respuestas correctas. El resultado anterior es más sorprendente al ver que un 63% de los participantes señaló considerar esta relación fácil o muy fácil a la vez que un 25% señaló poder aplicarlo en ejercicios por su cuenta sumado a un 13% que además sostuvo que podría llevar a cabo su enseñanza en el sistema escolar. Por otro lado, la alternativa con mayor porcentaje de selección corresponde a la letra a), con un 63% de las respuestas, en la que se señalaba que al reducir el nivel de confianza la precisión del intervalo aumentaba, siendo esta la relación opuesta a la real.

Los resultados obtenidos con esta pregunta revelan que a pesar de ser estudiado y considerado fácil por más de la mitad de los participantes, la comprensión conceptual de la relación entre el nivel de confianza y el ancho del intervalo debe ser reforzada en el caso de los futuros docentes que participaron de esta investigación, más aún, reforzar las diferencias entre ancho del intervalo y precisión del mismo se vuelve fundamental a fin de lograr una comprensión conceptual entre las relaciones existentes entre los tres elementos involucrados (nivel de confianza, ancho y precisión).

En este ítem se evaluaba la relación entre la desviación estándar poblacional y el ancho del intervalo, alcanzando un 44% de respuestas correctas, mientras que un 50% selecciona una alternativa que plantea una relación inversa y un 6% selecciona la opción que indica inexistencia de relación. Los resultados obtenidos en esta pregunta se vinculan directamente con los resultados obtenidos respecto de la relación entre la precisión de un intervalo y el error estándar, pues este último se compone tanto del tamaño de muestra como de la desviación estándar. En este sentido, no sorprende que la mayoría de los participantes haya errado en la pregunta, pues los resultados del tercer instrumento dan cuenta que la mayoría de los participantes considera que la comprensión de la relación entre precisión y error estándar es algo difícil o muy difícil de conseguir, mientras que en el instrumento uno, revela que 38% no conoce nada respecto de esta relación y 13% señala conocerla, pero no poder aplicarla por su cuenta en diversos ejercicios. Nuevamente los resultados revelan que es necesario desarrollar instancias de comprensión conceptual paralelamente a instancias de trabajo procedimental a fin de lograr mayor apropiación de los conocimientos disciplinares, a su vez, considerando que el porcentaje de futuros docentes participantes que declara estar preparado para la enseñanza en el nivel escolar de esta relación no supera el 10% también se evidencia la necesidad de generar conocimientos didácticos que promuevan esta apropiación.

De forma similar al ítem número 1, este ítem evaluaba la comprensión conceptual de intervalos de confianza para la media, sin embargo, a diferencia del primero este obtiene un porcentaje de respuesta correcta superior alcanzando el 75%. Esta diferencia de resultado se puede explicar por la correlación negativa entre el ítem y el cuestionario que fue mencionada en la sección 4.2 por lo que no se profundiza en el análisis de esta pregunta.

Este ítem evaluaba la comprensión conceptual respecto del propósito con el cual se construyen intervalos de confianza y obtuvo un 44% de respuestas correctas. En este caso, destaca que un 31% de respuestas se obtuvo en aquella alternativa que señalaba que el parámetro a estimar siempre debe estar dentro del intervalo construido, lo que revela falta de comprensión conceptual del propósito de construcción de los intervalos de confianza, lo que es coherente con lo obtenido en los instrumentos uno y dos respecto de la construcción de intervalos de confianza.

4.4.2.7 *İtem* 7

Este ítem evaluaba la interpretación conceptual de un intervalo de confianza a partir de un contexto específico y obtuvo un 50% de respuestas correctas, sin embargo, como se mencionó en la sección 4.2 la discriminación del ítem no era suficiente, no obstante, llama la atención que un 31% de los participantes seleccionara la alternativa que proporcionaba una interpretación bayesiana del intervalo dado, aun cuando esto es lo que menos se ha estudiado durante su formación inicial y al que se le atribuye mayor dificultad. En este sentido, el resultado anterior revela que parte de los futuros profesores de matemática no logra interpretar de manera apropiada un intervalo de confianza bajo el enfoque frecuencial lo que puede deberse a falta de profundidad en la comprensión teórica tanto de la construcción como de la interpretación del nivel de confianza.

Este ítem evaluaba la comprensión respecto de la construcción teórica de un intervalo de confianza para la media y obtuvo un 25% de respuestas correctas. En este caso el bajo porcentaje de respuestas correctas puede deberse a problemas de comprensión lectora, puesto que la pregunta señalaba que aspectos no eran correctos respecto de la construcción teórica del intervalo, en particular, sorprende que un 38% de los participantes señalara que las variables aleatorias con las que se construye el intervalo dependieran de la media muestral evidenciando una confusión entre el estadístico y la distribución de probabilidades de la media muestral.

En este ítem nuevamente se ver reflejado el hecho de que la construcción de intervalos de confianza para la media no sea un procedimiento considerado fácil por la mayoría de los participantes y más bien se encuentre igualmente distribuido el nivel de dificultad a partir de las respuestas obtenidas en el instrumento tres lo que a su vez contrasta con el instrumento uno al no contar con gran cantidad de docentes que se consideren preparados para la enseñanza de esto en el nivel escolar.

4.5 Análisis pregunta abierta

Para realizar el análisis de las respuestas obtenidas al ítem abierto la atención se centra en los pasos mencionados en la sección 3.2.2.9, que son:

- Identificar los datos que les plantea el enunciado.
- Deducir, a partir de los datos, la fórmula para la construcción del intervalo.
- Determinar los valores críticos asociados al nivel de confianza utilizando una distribución adecuada.
- Sustituir los datos y construir el intervalo de confianza específico.
- Interpretar el resultado en el contexto del ejercicio.

A continuación, se analizan las 8 respuestas obtenidas a este ítem de acuerdo con lo mencionado previamente.

4.5.1 Respuesta número 1

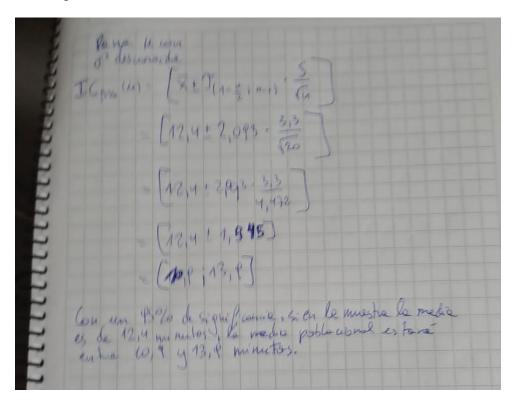


Ilustración 4-1: Respuesta N°1 a pregunta abierta.

En este caso respecto de los elementos que deberían estar presentes notamos lo siguiente:

- No hay una definición de variable que facilite la construcción del intervalo solicitado.
- No hay identificación previa de datos, sin embargo, si existe identificación del tipo de intervalo que se debe construir (para la media con varianza poblacional desconocida) y de la expresión asociada a este.
- No hay cálculo explícito de los valores críticos necesarios para la construcción del intervalo, pero si son obtenidos de forma correcta y reemplazados en la expresión en los lugares correspondientes.
- No hay una correcta interpretación y respuesta en contexto pues en primer lugar señala que el intervalo es de una significancia del 95% lo cual es incorrecto, por otro lado sostiene que la media poblacional estará entre 10,9 y 13,9 lo cual podría no ser cierto evidenciando falta de comprensión del carácter aleatorio de los intervalos de confianza.

En términos generales, esta respuesta evidencia que este futuro docente puede hacer uso de los intervalos de confianza mas no logra realizar interpretaciones apropiadas, lo que de acuerdo con el modelo del conocimiento didáctico matemático nos permite identificar dificultades en el proceso matemático de comunicación y argumentación lo que a su vez evidencia que los procesos cognitivos de significación, personalización, particularización y descomposición no se han desarrollado adecuadamente respecto del

objeto matemático en estudio. Por otro lado, el proceso matemático de algoritmización se evidencia desarrollado aun cuando hay pasos o etapas que han sido yuxtapuestas con otras. Finalmente, el no definir la variable asociada a la pregunta evidencia falta de desarrollo del proceso cognitivo de generalización y representación asociado al proceso matemático de definición.

4.5.2 Respuesta número 2

Eyercido desarrollo

$$\overline{X} = 12_1 u \text{ min}$$
 $\overline{n} = 20 \text{ estudiantes}$
 $\overline{S} = 3_1 3 \text{ min}$
 $\overline{\alpha} = 0.05 \left(95\% \text{ Conpianga}\right)$

Varianga poblacional desconocida.

Ilustración 4-2: Respuesta N°2 a pregunta abierta

En este caso es posible señalar lo siguiente:

- No hay una definición de variable que facilite la construcción del intervalo solicitado
- Existe una identificación de datos previo a la construcción del intervalo y que permite el reconocimiento de la expresión que ha de ser utilizada para realizar lo solicitado en la pregunta.

- Se evidencia un claro procedimiento de reemplazamiento de los datos en la expresión utilizada, no obstante el cálculo del valor crítico se hace en paralelo a la sustitución de los datos, lo que puede llevar a errores de cálculo.
- La interpretación en este caso es apropiada en bajo el enfoque frecuencial.

En este caso la respuesta propuesta por el participante muestra un desarrollo del proceso de algoritmización y comunicación pues proporciona un procedimiento coherente y una respuesta contextualizada acorde con el enfoque frecuencial. No obstante, la falta de definición de una variable asociada a la pregunta, evidencia la falta de desarrollo de los procesos de representación y generalización asociados al proceso matemático de definición.

4.5.3 Respuesta número 3 y 4

X: tiempo medio que tardan los estudiantes en realizar una prueba.

$$\bar{X} = 12,4$$
 $n = 20$ $s = 3,3$ $1 - \alpha = 95\%$ $\alpha = 0,05$ $\alpha/2 = 0,025$ $\overline{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 12,4 \pm 1,96 \left(\frac{3,3}{\sqrt{20}}\right)$

Conclusión: Con un nivel de confianza del 95%, se puede afirmar que el tiempo medio que tardan los estudiantes en realizar una prueba, se encuentra en el intervalo [10,95; 13,84].

Ilustración 4-3: Respuesta N°3 a pregunta abierta

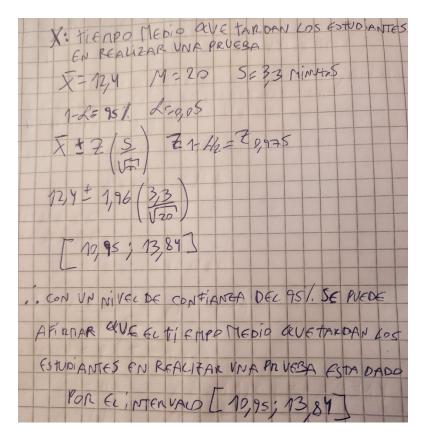


Ilustración 4-4: Respuesta N°4 a pregunta abierta

En estas respuesta se identifican los siguientes elementos:

- Existe definición de la variable asociada a la pregunta, sin embargo no seleccionan la distribución adecuada de acuerdo con el contexto de la pregunta, escogiendo en este caso la distribución normal en vez de la distribución t-Student.
- A pesar de la selección equivoca de la distribución que se usa para la construcción del intervalo, los participantes identifican correctamente los datos incluidos en el enunciado y posteriormente los reemplazan en la expresión utilizada para la construcción.
- En el caso del valor crítico utilizado para la construcción del intervalo, en el contexto de la distribución normal está bien calculado y en sus desarrollos se incluye parcialmente un procedimiento a través del cual se obtiene, sin embargo, no es correcto para el contexto de la pregunta.
- Finalmente, la interpretación en el contexto del enfoque frecuentista es apropiada, sin embargo al construir el intervalo con una distribución inapropiada, el resultado final es incorrecto.

En aspectos generales, las respuestas dadas por estos participantes evidencian en primer lugar problemas con el proceso matemático de definición y a su vez con los procesos cognitivos de representación y generalización puesto que no utilizan la distribución de probabilidades adecuada de acuerdo con el

contexto de la pregunta. Además, se identifica que el proceso de algoritmización está presente, sin embargo sin diferenciaciones entre procedimientos en ambos casos.

4.5.4 Respuesta número 5

$$N=20$$
 957. confianza

 $X=12.4 \text{ min}$ $L_{0}K=1.96$
 $S=3.3 \text{ min}$
 $S=3.3 \text{ min}$
 $S=1.4 \text{ min}$

Ilustración 4-5: Respuesta N°5 a pregunta abierta.

En este desarrollo identificamos en primer lugar que no hay definición de una variable aleatoria que permita seleccionar una distribución de probabilidades adecuada al contexto para la construcción del intervalo pedido, más aún, no se identifica en ningún lugar del desarrollo a que distribución está haciendo referencia al calcular el "k" indicado en la expresión del intervalo. Por otro lado, si existe identificación de los datos, sin embargo esto no es utilizado para decidir que expresión debe utilizarse para la construcción del intervalo y se construye uno erróneo. Finalmente, destaca en este desarrollo la interpretación del resultado, si bien comienza adecuadamente respecto del enfoque frecuencial, al no tener una variable definida, la contextualización dada no es la apropiada para lo solicitad. En general esta respuesta evidencia dificultades en los procesos de definición, comunicación y algoritmización.

4.5.5 Respuesta número 6 y 7

$$\frac{n}{z} = 20$$

 $\frac{\pi}{z} = 12,4$
 $\sigma = 3,3$
 $Z\frac{\alpha}{2} = 1,96$
 $IC = [12,4 \mp 1,96 \cdot \frac{3,3}{\sqrt{20}}]$
 $IC = [12,4 \mp 1,446]$
 $IC = [10,954,13,846]$

Es decir, con una confianza del 95%, el tiempo que toman los estudiantes en la prueba psicológica se encuentran entre los 10,95 y 13,85 minutos.

Ilustración 4-6: Respuesta N°6 a pregunta abierta

En este caso es posible apreciar que no hay un proceso de algoritmización y enunciación diferenciado, pues la identificación de datos, cálculo de valor crítico y la construcción del intervalo se encuentra todo junto sin diferenciación. Además se evidencia falta de desarrollo del proceso de definición, pues no existe definición de variable que apoye la selección de distribución de probabilidades adecuada para la construcción del intervalo, por su parte, la respuesta en contexto si bien comienza de forma adecuada, no es del todo correcta, en parte pues no refiere a la variable que se está consultando con la pregunta, evidenciando dificultades con el proceso de comunicación.

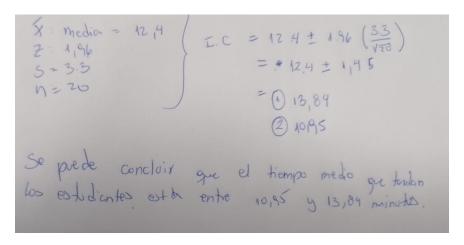


Ilustración 4-7: Respuesta N°7 a pregunta abierta

En este caso se evidencian dificultades en los mismos procesos que en el caso anterior, sin embargo, aquí la respuesta final no es apropiada pues no alude en ningún momento a la confiabilidad utilizada, indicando como certeza que el tiempo medio está entre los valores extremos del intervalo, lo que hace más evidente la dificultad de comprensión en cuanto a la definición del objeto matemático.

4.5.6 Respuesta número 8

En esta respuesta el participante otorga una respuesta que ha sido dividida en 2 partes debido a la extensión de la mismas.

Una solución

Sea

X: tiempo que los estudiantes de una determinada escuela emplean en realizar una prueba psicoloógica (en minutos)

Asumiendo los supuestos necesarios

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

De la muestra aleatoria se obtiene:

n = 20

 $\bar{x} = 12.4 \, minutos$

s = 3.3 minutos

Debido a que se desconoce la desviación estándar poblacional y con la finalidad de estimar la media poblacional de los tiempos que los estudiantes emplean en realizar la prueba psicológica utilizamos lo siguiente:

$$[\bar{x} - t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} * \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} * \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

Donde:

n = tamaño de muestra

 $\bar{x} = promedio\ muestral$

s = desviación estandar muestral

 $t_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}$: $Percentil_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)*100}$ de una distribución T – student con (n-1) grados de libertad

Ahora, bajo el nivel de confianza del 95% utilizamos la siguiente relación para determinar el valor de α

$$1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

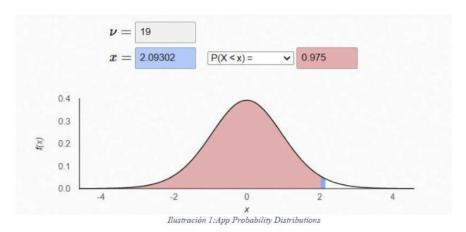
Ilustración 4-8: Respuesta N°8 a pregunta abierta (parte 1)

En la primera parte de la respuesta propuesta por este participante evidenciamos en primer lugar la definición de la variable de estudio asociada a la pregunta y de la distribución de probabilidades de dicha variable, evidenciando desarrollo del proceso de definición. Posteriormente, identifica los datos de la muestra y a partir de ellos la expresión del intervalo que debe construir, evidenciando comprensión tanto del proceso de definición como de argumentación. Además, calcula de forma independiente los valores críticos para la construcción del intervalo. Luego, en la parte 2, con apoyo de software estadístico obtiene el valor crítico haciendo uso de una distribución adecuada para finalmente reemplazar los datos en la expresión del intervalo. Finalmente, plantea una respuesta apropiada con el contexto de la pregunta y de

acuerdo con el enfoque frecuencial. En general, esta respuesta evidencia desarrollo de los diversos procesos matemáticos y cognitivos asociados a las prácticas matemáticas consideradas en el CDM.

Como
$$\alpha = 0.05$$
 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

De este modo
$$t_{(20-1,0.975)} = t_{(19,0.975)} = 2.09302$$



Por consiguiente:

$$[12.4 - 2.09302 * \frac{3.3}{\sqrt{20}}, 12.4 + 2.09302 * \frac{3.3}{\sqrt{20}}]$$

$$[10.85555, 13.94445]$$

En conclusión, podemos decir que con un 95% de confianza el tiempo medio que los estudiantes de determinada escuela emplean en realizar una prueba psicológica esta entre 10.856 y 13.944 minutos aproximadamente.

Ilustración 4-9: Respuesta N°8 a pregunta abierta (parte 2)

Capítulo 5: Conclusiones

Al tratarse de un estudio exploratorio y con una muestra reducida las conclusiones que a continuación se plantean no pretenden generalizar la realidad de toda la población de profesores en formación, sin embargo, se espera que estas contribuyan de manera significativa a la mejora de procesos de formación docente y a su vez a mejorar los procesos de enseñanza de intervalos de confianza tanto en el contexto escolar como en el universitario.

Por otro lado, considerando que los antecedentes expuestos en el primer capítulo resaltaban la necesidad de continuar con la investigación respecto de la formación del futuro profesor de matemática y sus percepciones en áreas que presentan mayor dificultad para estos, este estudio presenta una aproximación inicial respecto de la formación disciplinar y las percepciones de futuros profesores de matemática sobre la enseñanza de inferencia a través de intervalos de confianza, no obstante es necesario continuar profundizando y analizando esta problemática con muestras más grandes, con focos específicos en

determinadas dificultades identificadas sobre construcción e interpretación de intervalos de confianza e integrando perspectivas didácticas específicas para la enseñanza de inferencia. Ahora bien, con relación a los objetivos específicos planteados para esta investigación, es posible establecer las siguientes conclusiones:

En primer lugar, sobre el nivel de dificultad que futuros profesores de matemática atribuyen a diversos conceptos y procedimientos involucrados en la construcción e interpretación de intervalos de confianza según su preparación en el área, los resultados obtenidos en el cuestionario KPSI sobre estudio en formación inicial y preparación para la enseñanza, así como en el cuestionario de dificultad, dan cuenta de una relación entre, el haber estudiado durante su formación inicial un concepto o procedimiento y su nivel de preparación para la enseñanza de estos, no obstante, los resultados de estos instrumentos también permiten concluir que no es suficiente el estudio durante la formación inicial para garantizar una correcta preparación para la enseñanza de dichos conceptos o procedimientos, o bien, para garantizar que los futuros profesores les atribuyan niveles bajos de dificultad. Lo anterior revela que es necesario continuar profundizando en el estudio sobre el conocimiento del profesor de matemática respecto de su preparación para la enseñanza de inferencia estadística, específicamente a través de los intervalos de confianza, a fin de lograr identificar cual es el conocimiento disciplinar y didáctico que permite dotarles de una percepción positiva sobre su preparación para la enseñanza de esta disciplina así como también para que los niveles de dificultad que le atribuyen a diversas prácticas matemáticas sean en su mayoría bajos. Sin embargo, es importante destacar que para lograr desarrollar un conocimiento profundo que cambie estas percepciones desfavorables es necesario aumentar la cantidad de créditos que se dedican en los programas de formación inicial a la enseñanza de estadística y su didáctica, pues en general los futuros profesores cuentan con uno o dos cursos de estadística lo que representa aproximadamente un 4,3% del total de créditos de su malla completa, además en la mayoría de los casos cuentan únicamente con un curso de la didáctica específica lo que también resulta ser insuficiente.

En segundo lugar, respecto de la clasificación de los conceptos y procedimientos de construcción e interpretación de intervalos de confianza respecto con el nivel de dificultad atribuido por los participantes de esta investigación, es posible indicar que de los dieciséis ítems que se incluyeron en los instrumentos de recolección de datos, nueve fueron catalogados como difíciles o muy difíciles, cuatro como fáciles o muy fáciles y tres que obtuvieron la misma cantidad de participantes que los considera con fáciles, así como difíciles. Si bien predomina una visión difícil respecto de los conceptos y procedimientos asociados a la construcción e interpretación de intervalos de confianza, esta clasificación puede resultar errónea debido al pequeño tamaño de muestra al que se tuvo acceso para esta investigación, por tanto se recomienda realizar más investigaciones que profundicen en el nivel de dificultad con el cual futuros profesores de matemática perciben diversos conceptos y procedimientos asociados a la construcción e interpretación de intervalos de confianza, así como también en los factores que influyen en dicha percepción y como mejorarla de modo que no se perciba como algo complejo para evitar que esto sea posteriormente transmitido a los estudiantes.

En tercer lugar, la pregunta abierta incorporada en el segundo instrumento de recolección de datos, permite señalar que en general los docentes en formación que participaron de esta investigación utilizan estrategias similares a pesar de provenir de instituciones de educación superior diferentes. Dentro de estas estrategias se encuentran el identificar datos, reemplazar en expresiones algebraicas preestablecidas para casos específicos e interpretaciones superficiales respecto de un intervalo de confianza específico, no obstante, estas estrategias demuestran una mecanización del proceso de construcción de intervalos de confianza, dejando a un lado el razonamiento inferencial que se debe desarrollar a partir de estos, lo que se evidencia también en las conclusiones superficiales o erradas en algunos casos. En suma, algunas respuestas dadas a esta pregunta dejan ver la escaza comprensión conceptual adquirida para la construcción de intervalos de confianza al seleccionar una distribución de probabilidades incorrecta de acuerdo con el contexto de la pregunta. Por lo anterior, se recomienda profundizar en el estudio de estrategias utilizadas para la construcción de intervalos de confianza y su respectiva interpretación a través de instrumentos que incorporen más preguntas abiertas que permitan analizar los procedimientos de respuesta.

Finalmente, en cuanto al último objetivo específico de esta investigación, a partir de los resultados obtenidos se proponen las siguientes sugerencias:

- Realizar estudios de profundización respecto del conocimiento (disciplinar y didáctico) que adquieren los profesores de matemática en formación para la enseñanza de la inferencia estadística en contextos escolares y superiores, considerando las distintas facetas del conocimiento didáctico matemático del profesor, de esta forma se podrán identificar necesidades formativas del futuro profesorado que se pueden plantear como instancias de formación continua o mejoras para los programas de formación inicial.
- Monitorizar durante el proceso formativo en estadística la percepción de los futuros docentes respecto de su preparación para la enseñanza de esta con la finalidad de considerar dichas percepciones al momento de planificar e implementar cursos de la didáctica específica que entreguen conocimientos y herramientas que permitan a los docentes mejorar dichas percepciones y de esta forma los procesos de enseñanza de inferencia estadística.
- Articular la formación disciplinar y didáctica a fin de garantizar que los futuros profesores no solo posean un sólido conocimiento conceptual y procedimental de los diversos temas de estadística inferencial, sino que también sean capaces de adecuar dicho conocimiento al contexto de sus estudiantes y utilizando marcos conceptuales de la didáctica que faciliten el proceso de aprendizaje de estos. Además, se recomienda integrar a lo anterior el uso y aplicación de herramientas tecnológicas que favorezcan la comprensión de los conceptos y procedimientos de la inferencia y promuevan un trabajo enfocado en la interpretación de dichos conocimientos en vez de una memorización de técnicas o algoritmos.
- Proponer cursos de formación continua enfocados en la comprensión conceptual y procedimental de los temas de inferencia estadística que permitan a los profesores en ejercicio actualizar sus

conocimientos y a los profesores noveles aumentar su percepción sobre su preparación para la enseñanza de inferencia.

Las conclusiones y recomendaciones planteadas previamente dan cumplimiento al objetivo general de esta investigación y se espera que contribuyan de forma positiva a la mejora de los resultados obtenidos por profesores en formación a la evaluación nacional diagnóstica de la formación inicial docente. Por su parte, como respuesta a la pregunta de investigación planteada en el primer capítulo, es posible indicar que, a raíz de los resultados obtenidos con la muestra utilizada en este estudio, los errores que cometen profesores en formación al momento de construir e interpretar intervalos de confianza son en su mayoría procedimentales y en menor proporción conceptuales, sin embargo, ambos se encuentran relacionados con la percepción de dificultad y nivel de preparación que los docentes consideran respecto de diversos conceptos y procedimientos asociados a la inferencia utilizando intervalos de confianza.

Para finalizar estas conclusiones y considerando que esta investigación se enmarca en el trabajo de graduación del programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile, es posible señalar que con ella se contribuye a generar y liderar procesos de inducción, orientación y acompañamiento para el mejoramiento de procesos, resultados e impactos en el desarrollo profesional docente, permitiendo establecer proyecciones tales como nuevas investigaciones que profundicen en el uso del modelo del conocimiento didáctico matemático para estudiar la preparación de futuros docentes para la enseñanza de la estadística, investigaciones que propongan marcos conceptuales para la didáctica específica que favorezcan la enseñanza de estadística inferencial en contextos escolares y superiores, así como la mejora de los procesos de formación docente.

Referencias

- Álvarez-Arroyo, R., Roldán López, A. y Del Mar, M. (2021). Propuestas para la mejora de la interpretación del intervalo de confianza en estudiantes preuniversitarios y universitarios. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 106, 97-106. http://funes.uniandes.edu.co/23586/
- Álvarez, I., Fernández, F. y Andrade, L. En Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.). (2013). ¿Confía en los intervalos de confianza?. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación matemática* (pp. 278-289). http://funes.uniandes.edu.co/18342/1/%C3%81lvarez2013Conf%C3%ADa.pdf
- Arican, M. y Kuzu, O. (2020). Diagnosing Preservice Teachers' Understanding of Statistics and Probability: Developing a Test for Cognitive Assessment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 771-790. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-019-09985-0
- Bagur-Pons, S., Rosselló-Ramon, M. R., Paz-Lourido, B., & Verger, S. (2021). El enfoque integrador de la metodología mixta en la investigación educativa. *RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 27(1). DOI: https://doi.org/10.30827/relieve.v27i1.21053
- Bailey, J., Cowie, B. y Cooper, B. (2020). "Math outside of maths": Pre-service teachers' awareness of mathematical and statistical thinking across teachers' professional work. *Australian Journal of Teacher Education*, 45(1). https://ro.ecu.edu.au/ajte/vol45/iss1/1
- Batanero, C. (2011a). Students and Teachers' Knowledge of Sampling and Inference. En Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) *Teaching statistics in school-mathematics-challenges for teaching and teacher educaction: a joint ICMI/IASE study (pp.235-246). Springer. DOI:* https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0
- Batanero, C. (2011b, junio, 26-30). *Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Brasil. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/conferencia CIAEM Batanero.pdf
- Batanero, C. (2018). Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos. En A. Ávila (Coord). Rutas de la educación matemática. https://www.researchgate.net/publication/335527780 TREINTA ANOS DE INVESTIGACION DIDA CTICA SOBRE EL ANALISIS INFERENCIAL DE DATOS
- Batanero, C., Díaz-Batanero, C., del Mar, M. y Roldán-López, A. (2020a). Interval estimation: methodological approaches andd understanding difficulties. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *36*(3), 269-291. https://www.seio.es/beio/BEIOVol36Num3.pdf

- Batanero, C., Roldán-López, A. y Álvarez R. (2020b). Dificultades en la construcción de intervalos de confianza por estudiantes de Bachillerato y de Psicología. *Revista Paradigma*, 41, 685-705. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p685-705.id771
- Borovcnik, M. (2019). Informal and "informal" inference. En J.M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.) *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. http://www.ugr.es/local/fgm126/civeest.html
- Carrillo, J., Climent, N., M Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. (2012). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En *Proceedings of the CERME*, 8, 2985-2994. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17 papers.html
- Cepeda-Cuervo, E., Aguilar, W., Cervantes, V., Corrales, M., Díaz, I. y Rodríguez, D. (2008). Intervalos de confianza e intervalos de credibilidad para una proporción. *Revista Colombiana de Estadística, 31*(2), 211-228. https://www.redalyc.org/pdf/899/89912222006.pdf
- Costa, A. y Mendes, A. (2011). A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de profesores e de formadores. *Boletim de Educação Matemática*, 24(39), 367-386. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2291222099003
- del Mar, M., Batanero, C. y Gea, M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en inferencia estadística?. *Bolema*, 33(64), 672-693. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11
- del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64. DOI: https://doi.org/10.7764/PEL.49.1.2012.5
- Engel, J. (2010). On teaching bootstrap confidence intervals. En C. Reading (Ed.) Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Actas de la Octava Conferencia Internacional de Enseñanza de la Estadística, Liubliana, Eslovenia. https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8 4B2 ENGEL.pdf?1402524970
- Estrella, M. S. (2014). *Un imperativo moral: la enseñanza de la estadística no puede dejarse al azar.* En Andrade, L. (Ed.), Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, 67-77. Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica. http://funes.uniandes.edu.co/6530/
- Estrella, M. S. (2023, julio, 15). Estadística temprana: desarrollo del razonamiento inferencial informal en el aula escolar. Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad. http://funes.uniandes.edu.co/32564/
- Ferrari, C. y Corica, A. R. (2020). La Formación de Profesores en Matemática: Análisis sobre las Praxeologías Estadísticas que se proponen estudiar. *Journal of Research in Mathematichs Education*, 10(1), 62-87. DOI: https://doi.org/10.17583/redimat.2021.4281

- Ferreira, E. y Teixeira, L. (2021). Statistics education from de perspective of statistical literacy: Reflections taken from studies with teachers. *The Mathematics Enthusiast*, *18*(3), 612-640. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1538
- Friz, M., Sanhueza, S. y Figueroa, E. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de Matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la Estadística. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13(2), 113-131. https://redie.uabc.mx/vol13no2/contenido-frizsanhueza.html
- García-García, J., Carmona, J., Fernández, N. y Arredondo, E. (2022). Tendencias actuales en educación estadística. Aportaciones desde el acta latinoamericana de matemática educativa (2015-2021). *Revista de Educación Estadística*, 1(1), 1-22. DOI: https://doi.org/10.29035/redes.1.1.8
- Giaconi, V., Montenegro, H., Rojas, F., Catalán, M. y Guíñez, F. (2022). Tensiones al enseñar inferencia estadística en la formación inicial docente. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(3), 71-86. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5595
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5(20), 13-31, http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1063
- Godino, J., Ortiz, J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. En Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education.* (pp. 271-282). Springer. *DOI*: https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0 27
- Gonçalves, W. N. y Severino, A. (2011). Entrecruzando Fronteiras: a Educação Estadística na formação de Professores de Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 897-911. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222113014
- Gonzaga, L. (2016). Cuestionario KPSI Inventario de conocimiento y estudio previo. En Gonzaga, L. Más allá de la calificación instrumentos para evaluar el aprendizaje. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/55608339/libro mas alla bajalibre.pdf?1516668277=&response-contentdisposition=inline%3B+filename%3DMas alla de la calificacion Instrumentos.pdf&Expires=170622 4607&Signature=hCXAX4fRyI465YN2ndcas1JZAFJLvxqW4OPE9r2wj7Cjqyx6i2fUWAoRNT1nrExzM bdd-CoKANj9iugecbgapFjCGfgZTGILB04QLRUsqDBsTwIUyNrz9XvmJ6NTRVLET1dputc-NUOM0On4uAOl3z~aDbLlb50x5FXOD5W7dUoXqsZFWoAl7plKTpUBQ0d6zOWFxplGt3LBLCpFUb msPKcSyznsFzpT3VdX~v~HzDrlrQdevOk3LlB6KlX4ZeEcnRreNBZt9yCl4tsxR2mjjQPrRj6TBOUHFs ws0LdotoLLmpQeDxSfUalLB9x8gETM6Olka-ol0FtJPgmZvX1mgg &Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA#page=98

- González, J. y Muñoz, D. (2018). Modelos de Análisis del Conocimiento Matemático y Didáctico para la Enseñanza de los Profesores. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *54*, 25-45. http://funes.uniandes.edu.co/17207/
- Gorgas, J., Cardiel, N. y Zamorano, J. (2009). Estadística básica para estudiantes de ciencias. (s.n.).
- Gorham, T. y Chamberlin, S. (2019). Pre-service teacher statistical misconceptions during teacher preparation program, *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 461-484. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1469
- Guven, B., Baki, A., Uzun, N., Ozmen, Z.M. y Arslan, Z. (2021). Evaluating the Statistics Courses in Terms of the Statistical Literacy: Didactic Pathways of Pre-Service Mathematics Teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2). DOI: https://doi.org/10.29333/iejme/9769
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6a ed.). Mc Graw Hill.
- Hernández, S., Ruiz, B., Pinto, J. E. y Albert, J. A. (2013). Retos para la Enseñanza y la Formación de Profesores de Estadística en México. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 20(2), 257-273, http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-24332013000200011&Ing=en&tlng=es
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400. https://www.semanticscholar.org/paper/Unpacking-Pedagogical-Content-Knowledge%3A-and-of-Hill-Ball/9a72f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60
- Hurtado, F. (2020). Fundamentos Metodológicos de la Investigación: El Génesis del Nuevo Conocimiento. Revista Scientific, 5(16), 99-119. https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2020.5.16.5.99-119
- Juarez, J. y Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles educativos*, 36(146), 14-29. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci arttext&pid=S0185-26982014000400002&Ing=es&tIng=es
- Lacourly, N. (2011). Introducción a la Estadística. JC Sáez Editor.
- Lázaro, W. y Álvarez, I. (2022). Indicadores del Conocimiento Profesional del Profesor de Estadística. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini y A. Fan (Eds.) *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Actas del Undécimo Congreso Internacional de Enseñanza de la Estadística, Rosario, Argentina*. http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_11_2022

- Lovett, J. y Lee, H. (2018). Preservice Secondary Mathematics Teachers' Statistical Knowledge: A Snapshot of Strengths and Weaknesses, *Journal of Statistics Education*, 26(3), 214-22, DOI: https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1496806
- Lugo-Armenta, J. y Pino-Fan, L. (2021). Inferential Statistical Reasoning of Math Teachers: Experiences in Virtual Contexts Generated by the COVID-19 Pandemic, *Education Sciences*, 11(7), 363, DOI: https://doi.org/10.3390/educsci11070363
- Ministerio de Educación, (2021a). Estándares de la Profesión Docente: Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/Categoria-p/pedagogias/
- Ministerio de Educación, (2021b). Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial 3° y 4° medio Formación Diferenciada. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Diferenciado-Humanista-Cientifico/Matematica/Probabilidades-y-estadistica-descriptiva-e-inferencial/
- Ministerio de Educación. (2012). Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/09/Est%C3%A1ndares_Media.pdf
- Ministerio de Educación. (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/
- Ministerio de Educación. (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/
- Ministerio de Educación. (2019). Bases Curriculares Tercero y Cuarto Medio. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/
- Morey, R., Hoekstra, R., Rouder, J. y Lee, M. (2016). The fallacy of placing confidence in confidence intervals. *Psychon Bull Rev*, 23, 103-123, DOI: https://doi.org/10.3758/s13423-015-0947-8
- Navarro-Asencio, E., Asencio-Muñoz, I., Arroyo-Resino, D. y Ruiz-De Miguel, C. (2021). Evaluación de las actitudes hacia la estadística de maestros en formación. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 27(2), DOI: https://doi.org/10.30827/relive.v27i2.18398
- Núñez, J. (2017). Los métodos mixtos en la investigación en educación: hacia un uso reflexico. *Cadernos De Pesquisa, 47*(164), 632-649. DOI: https://doi.org/10.1590/198053143763
- Olivo, E. (2008). Significado del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TesisEusebioOlivo.pdf

- Olivo, E., Batanero, C. y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 20(3), p. 5-32. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v20n3/v20n3a2.pdf
- Otero, A. (2018). Enfoques de Investigación. https://www.researchgate.net/publication/326905435 ENFOQUES DE INVESTIGACION
- Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109. http://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512015000100007&script=sci abstract
- Pino-Fan, L., Font, V. y Godino, J. (2014). El Conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Pautas y Criterios para su Evaluación y Desarrollo. *Matemática Educativa: La formación de profesores,* 137-151. http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014 Extracto-sin-portada.pdf
- Ramos, L. (2019). La educación estadística en el nivel universitario: retos y oportunidades. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria, 13*(2), 67-82. https://doi.org/10.19083/ridu.2019.1081
- Roldán-López, A., Batanero, C. y Álvarez R. (2020a). Comprensión del intervalo de confianza: un estudio comparado con estudiantes universitarios y preuniversitarios. *Paranaense de educação matemática,* 9(19), 52-73, DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.52-73
- Roldán-López, A., Batanero, C. y Álvarez, R. (2020b). Conflictos semióticos relacionados con el intervalo de confianza en estudiantes de bachillerato e ingeniería. *Educação Matemática Debate, 4*(10), 1–25. DOI: https://doi.org/10.24116/emd.e202010
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5
- Ruz, F. (2021). Formación estadística de futuros profesores de matemática chilenos [tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/68578/75285.pdf?sequence=4&isAllowed=y
- Ruz, F., Chance, B. y Contreras, J. (2022). Exploring How Chilean Pre-service Teachers' Attitudes Towards Stochastics Vary by Content Topic. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20,* 1767-1789. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-021-10235-5
- Ruz, F., Chance, B., Medina, E. y Contreras, J. (2021) Content Knowledge and Attitudes Towards Stochastics and its Teaching in Pre-service Chilean Mathematics Teachers. *Statistics Education Research Journal*, 20(1), DOI: https://doi.org/10.52041/serj.v20i1.100

- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. *Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 135-154. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a07
- Ruz, F., Ruiz-Reyes, K., Molina-Portillo, E., & Díaz-Levicoy, D. (2018). Ways to strengthen the statistical literacy, reasoning and thinking in the mathematics teachers training. Recuperado de: https://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_10_2018
- Sanahuja, A., Sánchez-Tarazaga, L. y Ruiz-Bernardo, P. (2020). Estrategias de autorregulación de la enseñanza: estudio piloto sobre las competencias de los profesionales de comunicación y lenguaje y de educación especial. Revista de educación, innovación y formación, 3, 175-193, http://hdl.handle.net/10201/100742
- Sánchez, M., Martín, M., Sá, P. y Costa, A. (2020). Reflexiones en torno a la investigación con métodos mixtos. *Revista Baiana de Enfermagem, 34*, DOI: https://doi.org/10.18471/rbe.v34.31851
- Sánchez, N. y Ruiz, B. (2018). Elementos de inferencia informal presentes en libros de texto de matemáticas en el tema de estadística. Un estudio exploratorio. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 11(1), 80-85. http://funes.uniandes.edu.co/22778/
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008) Towar a theory of profiency in teaching mathematics. En Wood, T. y Tirosh, D. (Eds.). *International handbook of mathematics teacher education, 2,* 321-354. https://www.researchgate.net/publication/265405915 Toward a theory of proficiency in teaching mathematics
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22, https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf
- Sosa, C. y Ortiz, J. (2018). Los KPSI en el desarrollo de la unidad didáctica "la coordinación de funciones en nuestro cuerpo". *Revista de Educación en Biología, 1,* 517-524. http://www.congresos.adbia.org.ar/index.php/congresos/article/view/402
- Tobías-Lara, M. y Gómez-Blancarte, A. (2019). Assessment of informal and formal inferential reasoning: a critical research review. *Statistics Education Research Journal*, *18*(1), 8-25. DOI: https://doi.org/10.52041/serj.v18i1.147
- Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. (7a ed.). Cengage Learning.
- Yañez, G. y Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González, M. T. Gonzáles y J. Murillo (Eds.) *Investigación en educación matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII simposio de la SEIEM.*https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/depc/Yanez_Behar_R.pdf

- Zapata-Cardona, L. (2020). Colaboraciones entre Profesores de Estadística e Investigadores: Aportes al Desarrollo Profesional. Boletim de Educação Matemática, 34(68), 1285-1303. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a21
- Zapata-Cardona, L. y González, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática*, 29(1), 61-89. DOI: https://doi.org/10.24844/EM2901.03
- Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7(2) Zieffler.pdf

Apéndices

Instrumento 1

INSTRUMENTO N°1: CUESTIONARIO KPSI SOBRE LA PREPARACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE INTERVALOS DE CONFIANZA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA CHILENOS

Estimado/a profesor/a en formación:

A través del siguiente cuestionario se pretende obtener información respecto de dos variables sobre su preparación para la enseñanza de intervalos de confianza. Dichas variables son las siguientes:

- Estudio durante su formación inicial: corresponde a la presencia o ausencia, en los cursos de estadística realizados hasta la fecha, de los conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza indicados en el cuestionario, por lo que corresponde a una variable dicotómica con las siguientes codificaciones:
 - 0= No lo he estudiado.
 - 1= Sí lo he estudiado.
- Nivel de conocimiento alcanzado: corresponde a que tan preparado considera que se encuentra para la enseñanza de los conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza indicados en el cuestionario, considerando que quizá hay algunos de ellos que no fueron parte de su formación formal, pero sí los conoce por su estudio autónomo. Las codificaciones de esta variable son las siguientes:
 - o 0= No conozco nada respecto del concepto o procedimiento.
 - 1= No lo conozco, pero lo puedo estudiar para llevar a cabo su enseñanza en el sistema escolar.
 - 2= Conozco el concepto o procedimiento, pero no puedo aplicarlo en ejercicios por mi cuenta.
 - o 3= Conozco el concepto o procedimiento y puedo aplicarlo en ejercicios por mi cuenta.
 - 4= Conozco el concepto o procedimiento y puedo aplicarlo en ejercicios por mi cuenta, pero no puedo llevar a cabo su enseñanza en el nivel escolar.
 - 5= Conozco el concepto o procedimiento, puedo aplicarlo en ejercicios por mi cuenta y puedo llevar a cabo su enseñanza en el nivel escolar.

	Concepto o Procedimiento		Estudio durante su formación inicial		Nivel de conocimiento alcanzado						
		0	1	0	1	2	3	4	5		
1.	Construcción de intervalos de confianza para la media con varianza poblacional conocida.										
2.	Construcción de intervalos de confianza para la media con varianza poblacional desconocida.										
3.	Construcción de intervalos de confianza para la proporción.										
4.	Determinar el nivel de confianza a partir de un intervalo de confianza dado.										
5.	Determinar el nivel de riesgo a partir de un intervalo de confianza dado.										
6.	Determinar el nivel de riesgo a partir del nivel de confianza.										
7.	Determinar el valor crítico para la construcción del intervalo.										
8.	Calcular el error estándar de un intervalo de confianza.										
9.	Calcular el error de estimación de un intervalo de confianza.										
10.	Interpretar un intervalo de confianza de acuerdo con su contexto de construcción.										
11.	Interpretar el nivel de confianza de un intervalo dado.										
12.	Relación entre nivel de confianza y precisión del intervalo.										
13.	Relación entre tamaño de la muestra y precisión del intervalo.										
14.	Relación entre error estándar y precisión del intervalo.										
15.	Relación entre error de estimación y precisión del intervalo.										
16.	Interpretación bayesiana del intervalo.										

Instrumento 2

INSTRUMENTO N°2: Test de Conocimientos sobre Construcción e Interpretación de Intervalos de Confianza.

Ítem 1:

Se calcula un intervalo del 90% de confianza para la media μ de una población. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Si se toman muchas muestras, la media muestral \bar{x} caerá dentro del intervalo de confianza aproximadamente el 90% de las veces.
- b) El intervalo de confianza es un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 90% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media.
- c) El intervalo de confianza es un intervalo con extremos constantes, dentro del cual cae la media poblacional el 90% de las veces
- d) La probabilidad de que μ caiga dentro de un intervalo de confianza calculado a partir de una muestra es de 0.90

Ítem 2:

Se calcula un intervalo de confianza al 90% utilizando el valor medio \overline{x} a partir de una muestra de 10 casos. Si se incrementa el tamaño de muestra a 1000, y se calcula un nuevo intervalo del 90% de confianza, entonces:

- a) Se debe tener más confianza de que μ caerá en el segundo intervalo
- b) Se sabe que el segundo intervalo será 10 veces más estrecho
- c) Se espera que ambos intervalos tengan la misma precisión
- d) El segundo intervalo es 10 veces más ancho que el primero

Ítem 3:

Si se mantienen todos los demás datos fijos y se reduce el nivel de confianza, entonces:

- a) El intervalo de confianza será menos preciso
- b) El intervalo de confianza será más ancho
- c) El intervalo de confianza será más estrecho
- d) El intervalo de confianza será igual de preciso

Ítem 4:

Se calculan intervalos de 95% de confianza con muestras de 100 elementos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del intervalo no cambia
- b) Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del intervalo aumenta
- c) Si la desviación estándar de la población aumenta, la anchura del intervalo disminuye
- d) Si la desviación estándar de la población aumenta, la anchura del intervalo aumenta

Ítem 5:

Se ha tomado una muestra de tamaño 100 para calcular un intervalo de 95% de confianza para la velocidad media de los autos que pasan por una carretera. Se sabe que la desviación estándar poblacional es de 20km/h, entonces:

- a) El ancho del intervalo depende de la media muestral
- b) La media muestral es un extremo del intervalo
- c) Cabe la posibilidad que el verdadero valor de μ no esté contenido en el intervalo
- d) El ancho del intervalo no depende de la desviación estándar

Ítem 6:

Se sabe que la altura media μ de los árboles en una zona forestal es de 6.5 metros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Un posible intervalo para μ es [6.25, 8.4]
- b) Un posible intervalo para μ es [6.75, 8.4]
- c) Cualquier intervalo que se construya asociado a una muestra aleatoria debe contener al valor 6.5
- d) En este contexto, no tiene sentido un intervalo de confianza, pues se conoce la media poblacional μ

Ítem 7:

Con el objetivo de estimar la proporción de tomates que están infectados con una plaga en un predio agrícola, se seleccionó una muestra aleatoria de tomates y se construyó el siguiente intervalo del 95% de confianza [0.06, 0.18]. Al respecto se puede afirmar que:

- a) La proporción muestral obtenida es de 0.12
- b) Hay una probabilidad de 0.05 de que el verdadero valor de la proporción de tomates infectados en el predio supere el 18%
- c) Con 95% de confiabilidad es posible afirmar que en el predio no hay tomates infectados
- d) La probabilidad que la proporción poblacional esté entre 0.06 y 0.18 es 0.95

Ítem 8:

La construcción de un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para μ se basa en obtener una probabilidad, cuya expresión final está dada por $P(U < \mu < V) = 1-\alpha$. Al respecto no es posible afirmar que:

- a) U y V son variables aleatorias
- b) El nivel de significación es α
- c) El valor crítico es $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- d) U y V dependen de \overline{X}

Pregunta Abierta:

Todos los estudiantes de una determinada escuela deben realizar una prueba psicológica. Para conocer el tiempo medio que los estudiantes emplean en realizar dicha prueba, se seleccionó una muestra aleatoria de 20 estudiantes. Si el tiempo medio que emplearon los 20 estudiantes para contestar la prueba fue de 12,4 minutos y la desviación estándar fue de 3,3 minutos, obtenga un intervalo del 95% de confianza para la media de los tiempos que tardan los estudiantes de la escuela en realizar la prueba e interprete su resultado.

Instrumento 3

INSTRUMENTO N°3: CUESTIONARIO LIKERT SOBRE LA DIFICULTAD ATRIBUIDA POR FUTUROS
PROFESORES DE MATEMÁTICA CHILENOS A CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS
RELACIONADOS CON LA CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA

Estimado/a profesor/a en formación:

A través del siguiente cuestionario se pretende obtener información respecto del grado de dificultad que usted atribuye a distintos conceptos y procedimientos relacionados con la construcción e interpretación de intervalos de confianza, para ello considere la siguiente codificación:

- 1: Muy fácil
- 2: Fácil
- 3: Difícil
- 4: Muy Difícil

Concepto o Procedimiento		Grado de dificultad					
		2	3	4			
Recordar la fórmula para la construcción de intervalos de confianza para la med con varianza poblacional conocida.	dia						
Recordar la fórmula para la construcción de intervalos de confianza para la med con varianza poblacional desconocida.	dia						
Recordar la fórmula para la construcción de intervalos de confianza para proporción.	la						
4. Determinar el nivel de confianza a partir de un intervalo de confianza dado.							
5. Determinar el nivel de riesgo a partir de un intervalo de confianza dado.							
6. Determinar el nivel de riesgo a partir del nivel de confianza.							
7. Determinar el valor crítico para la construcción del intervalo.							
8. Calcular el error estándar de un intervalo de confianza.							
9. Calcular el error de estimación de un intervalo de confianza.							
10. Interpretar un intervalo de confianza de acuerdo con su contexto de construcció	ón.						
11. Interpretar el nivel de confianza de un intervalo dado.							
12. Relación entre nivel de confianza y precisión del intervalo.							
13. Relación entre tamaño de la muestra y precisión del intervalo.							
14. Relación entre el error estándar y precisión del intervalo.							
15. Relación entre el error de estimación y precisión del intervalo.							
16. Interpretación bayesiana del intervalo.							