UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la educación media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Jorge Zambrano Canales

Profesor/a guía:

Lorena Espinoza Salfate

Tesis para optar al grado de
Magíster en Educación Matemática

Santiago – Chile
2023

RESUMEN

El trabajo de graduación se sitúa en la problemática general de la enseñanza y el aprendizaje de la noción de límite en la enseñanza media chilena, particularmente de límite de sucesiones, y plantea específicamente un estudio para comprender sus causas y detectar problemáticas y fenómenos didácticos asociados. A partir de los resultados de este estudio, se construye una secuencia didáctica basada en los hitos epistemológicos vividos históricamente en la génesis de su construcción matemática, considera las exigencias curriculares actuales, y se hace cargo de los problemas detectados de tal modo que permita abordar y resolver aspectos complejos del proceso de aprendizaje de estudiantes del electivo de matemáticas: límites, derivadas e integrales de tercero año medio.

Se postula que para la comprensión profunda de la noción de límites de sucesiones y su cálculo, es necesario que las y los estudiantes se encuentren con problemas que le den sentido y significado a dicha noción, y que dispongan de herramientas que les permitan matematizar la idea de “estar tan cerca como se quiera”. Para ello, se propone realizar un proceso de enseñanza aprendizaje que, partiendo del abordaje y resolución de problemas, utilice la noción de distancia para que las y los estudiantes exploren la convergencia o no de sucesiones. Además, se plantea que es necesario que puedan comprender las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

De este modo el objetivo de este estudio es caracterizar las formas en que las comprensiones y el pensamiento matemático de los estudiantes se enriquecen al vivir un proceso de enseñanza aprendizaje entorno a los límites de sucesiones que tiene como referencia hitos epistemológicos enfrentados en su construcción histórica, enfrentándolos a problemas significativos que requieren de los límites para ser resueltos, que les da la oportunidad de construir/disponer de herramientas para modelar y estudiar el comportamiento de sucesiones en el infinito a través de la noción de distancia, y que articula herramientas aritméticas, algebraicas y gráficas.

Para realizar el estudio, así como la construcción de la secuencia didáctica, se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) como marco teórico y metodológico. En función de sus herramientas y principios didácticos, se establece una metodología cualitativa con un diseño exploratorio-descriptivo.

De este modo, la investigación evidencia que, para la comprensión de límites de sucesiones y su cálculo, la resolución de problemas significativos, así como el concepto de distancia y las relaciones entre lo gráfico, lo numérico y lo algebraico, son fundamentales para su comprensión.

Los instrumentos que se construyen para analizar los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre las compresiones de límites de sucesiones son: cuestionario previo, secuencia didáctica, cuestionario posterior y Tabla para el análisis de las evidencias audiovisuales recogidas durante el proceso. Se espera que los estudiantes en el electivo de matemáticas límites, derivadas e integrales de tercero año medio, luego de desarrollar la secuencia didáctica evidencien una comprensión significativa de la noción de límites de sucesiones y su cálculo.

Posterior a la aplicación de los instrumentos previamente validados por jueces, se realiza un análisis de la evidencia levantada tanto a priori como a posteriori, y se contrastan evidenciando que la secuencia didáctica basada en los principios didácticos asumidos y el concepto de distancia promueve que los estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento matemático y comprendan la noción de límite de sucesiones. En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo, desarrollando un análisis sobre el logro del objetivo general y específicos de la investigación, la problemática y se confirma el supuesto de trabajo.

Palabras claves: Límite de sucesión, Teoría Antropológica de lo didáctico, Relación entro los procesos aritmético, gráfico y algebraico, Noción de distancia.

ABSTRACT

The graduation thesis is situated within the broader issue of teaching and learning the concept of limits in Chilean secondary education, particularly the limits of sequences. It specifically proposes a study to understand its causes and detect problems and didactic phenomena associated with it. Based on the results of this study, a didactic sequence is constructed, grounded in the epistemological milestones historically experienced in the genesis of its mathematical construction. It considers current curriculum demands and addresses detected problems in such a way as to tackle and resolve complex aspects of the learning process for students in the elective mathematics course: limits, derivatives, and integrals in the third year of high school.

It is postulated that for a deep understanding of the notion of limits of sequences and their calculation, it is necessary for students to encounter problems that give meaning to this notion and to have tools that allow them to mathematize the idea of 'getting as close as you want.' To achieve this, a teaching-learning process is proposed that, starting from the approach and resolution of problems, utilizes the notion of distance for students to explore the convergence or divergence of sequences. Additionally, it is suggested that they need to comprehend the relationships between graphical, numerical, and algebraic processes.

Thus, the objective of this study is to characterize how students' understandings and mathematical thinking are enriched through experiencing a teaching-learning process centered around the limits of sequences, which refers to epistemological milestones faced in their historical construction. They are confronted with significant problems that require limits for resolution, providing them the opportunity to build/avail tools to model and study the behavior of sequences towards infinity through the notion of distance, and which articulates arithmetic, algebraic, and graphical tools.

For conducting the study, as well as constructing the didactic sequence, the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1999) is used as a theoretical and methodological framework. Based on its tools and didactic principles, a qualitative methodology with an exploratory-descriptive design is established.

The research demonstrates that, for understanding limits of sequences and their calculation, solving significant problems, as well as the concept of distance and the relationships between graphical, numerical, and algebraic aspects, are fundamental for comprehension.

The instruments constructed to analyze students' learning processes regarding their understandings of limits of sequences are: a pre-questionnaire, didactic sequence, post-questionnaire, and a table for analyzing audiovisual evidence collected during the process. It is expected that students in the mathematics elective course on limits, derivatives, and integrals in the third year of high school, after completing the didactic sequence, will demonstrate a significant understanding of the notion of limits of sequences and their calculation.

Following the application of instruments previously validated by judges, an analysis of the evidence gathered, both prior and posterior, is conducted, and they are contrasted, showing that the didactic sequence based on assumed didactic principles and the concept of distance promotes students' development of mathematical thinking skills and comprehension of the notion of limits of sequences. The last chapter presents the conclusions of the work, conducting an analysis of the achievement of the general and specific objectives of the research, the issues, and confirming the working hypothesis.

Keywords: Limit of sequence, Anthropological Theory of Didactics, Relationship between arithmetic, graphical, and algebraic processes, Notion of distance.

Dedicatoria

Le dedico este trabajo a toda mi familia…

Jorge Zambrano Alvear

Judith Canales Madariaga

Bastian Zambrano Canales

Javiera Zambrano Canales

Santiago, mayo 2024

Agradecimientos

Le quiero agradecer a mi madre y padre por todo lo que me han ofrecido durante todos estos años, además de soportarme en esas noches cuando dedicaba el tiempo en distraerme de los estudios en conversar con amigos. Gracias por todo los amo mucho.

También agradecer a mi hermano por sus constantes llamadas y mensajes, por dedicar su tiempo en saber en como estoy o cómo va la tesis, siempre serás muy importante y sabes que estaré para ti, te amo.

Quiero agradecer a mi hermanita, la pequeña de la familia. Gracias por aguantar mis bromas, en escuchar música juntos y jugar de vez en cuando video juegos. Espero que cumplas tus metas y que el próximo año puedas seguir estudiando, te amo.

Quiero agradecer profundamente a la profesora Lorena Espinoza, que me brindo todo su apoyo y confío en mí. Gracias por todos sus consejos tanto académicos como para la vida, por estar ahí cada vez que necesitaba guía y dedicar su tiempo para esta investigación.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 12
CAPÍTULO 1 14
1.1 FORMULACIÓN DEL PROYECTO Y DISCUSIÓN BIBLIOGRÁFICA: 14
1.1.1 Importancia entre gráfica y álgebra para la enseñanza de límite 14
1.1.2 Comprensión cognitiva de límite 15
1.1.3 La importancia del concepto de límite en la historia de las matemáticas y sus consecuencias 16
1.1.4 Necesidades de nuevas propuestas para la enseñanza de límite de sucesiones 17
1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN: 17
1.2.1 SUPUESTO DE TRABAJO: 18
1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO 18
1.3.1 Objetivo general 18
1.3.2 Objetivo Específico 19
CAPÍTULO 2 19
2.1 MARCO TEÓRICO: 19
2.1.1 La Antropología de lo Didáctico (TAD) 20
2.2 Estudio epistemológico de la obra matemática de límite 26
2.3 Formalización de límite de sucesión 31
2.4 Análisis del Currículum nacional entorno a la noción de límite 34
2.4.1 Parte 1: patrón Infinito (12 Hrs) 35
2.4.2 Segunda Parte: Comprendiendo La Paradoja De Zenón 40
2.4.3 Tercera Parte: Argumentando Con La Noción De Límites En Diferentes Contextos 45
CAPÍTULO 3 53
3.1 METODOLOGÍA: 53
3.1.1 Tipo de Metodología 53
3.2 Sujetos de la muestra 54
3.3 Fases de Estudio 54
3.3.1 Fases 1 del Estudio: Cuestionario previo 55
3.3.2 Fases 2 del Estudio: Implementación de la Secuencia Didáctica en el aula 57
3.3.2.1 Secuencia Didáctica Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones 58

3.3.2.2 Secuencia Didáctica Parte 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones. 61
3.3.2.3 Secuencia Didáctica Parte 3: Calculando límites de sucesiones. 63
3.3.3 Fases 3 del Estudio: Cuestionario Posterior 66
4.1 Análisis a posteriori 69
4.1.2 Análisis a posteriori: Cuestionario previo 71
4.1.2.1 Respuestas Estudiantes 71
4.1.3 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica 75
4.1.3.1 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica ($\boldsymbol{S1}$) 75
4.1.3.2 Análisis de evidencia en videos: $\boldsymbol{S1}$ 81
4.1.3.2 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica ($\boldsymbol{S2}$) 90
4.1.3.2 Análisis de evidencia en videos: $\boldsymbol{S2}$ 97
4.1.3.3 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica ($\boldsymbol{S3}$) 104
4.1.3.3 Análisis de evidencia en videos: $\boldsymbol{S3}$ 108
4.1.4 Análisis a posteriori: Cuestionario Posterior 113
Capítulo 5 118
5.1 Conclusiones 118
5.2 ¿Se cumplió el objetivo general? 119
5.3 Pregunta de investigación y supuesto de trabajo 121
5.4 Propuesta de continuación a la Secuencia Didáctica posterior a su implementación 123
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS: 124
ANEXOS 127
Autorización estudiante 137

Índice de imágenes

Imagen 1 27
Imagen 2 27
Imagen 3 28
Imagen 4 29
Imagen 5 29
Imagen 6 36
Imagen 7 37
Imagen 8 38
Imagen 9 41
Imagen 10 41
Imagen 11 43
Imagen 12 46
Imagen 13 47
Imagen 14 47
Imagen 15 48
Imagen 16 49

Índice de Tablas

Tabla 1 39
Tabla 2 44
Tabla 3 50
Tabla 4 56
Tabla 5 59
Tabla 6 61
Tabla 7 64
Tabla 8 67
Tabla 9 71
Tabla 10 76
Tabla 11 81
Tabla 12 82
Tabla 13 84
Tabla 14 90
Tabla 15 97
Tabla 16 104
Tabla 17 108
Tabla 18 113

INTRODUCCIÓN

La presente investigación evidencia la dificultad que presentan estudiantes de enseñanza media para la comprensión y el cálculo de límites de sucesiones, y la importancia del concepto de distancia para su aprendizaje, así como las relaciones entre los procesos gráfico, numérico y algebraico en la enseñanza de límites.

En primera instancia se presenta una revisión de literatura recientes y su correspondiente análisis, se realiza dividiendo la sección en las temáticas: Importancia entre gráfica y álgebra para la enseñanza de límites; comprensión cognitiva de límites; y la importancia del concepto de límite en la historia de las matemáticas y sus consecuencias. Posterior a esta revisión, se presenta la pregunta y supuesto de investigación, además del objetivo general y los específicos.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico: La Antropología de lo Didáctico (TAD). Se explican las principales modelizaciones de esta teoría y que son de interés para el desarrollo del trabajo: qué es un Tipo de Tarea o Problema Matemático, así como qué son las Técnicas, Tecnologías y Teorías Matemáticas en el contexto de este Enfoque, y que dan cuenta de qué están hechas las matemáticas. Además, los seis momentos didácticos que caracterizan todo proceso de construcción matemática, así como los procesos de aprendizaje y difusión de las matemáticas en las sociedades según esta teoría. Luego se realiza un estudio de los hitos epistemológicos más relevantes de la obra matemática construida entorno a los límites, donde el concepto de la distancia entre los valores de una sucesión y número es cada vez más pequeña tiene un lugar fundamental. Posteriormente, y considerando este análisis como referencia, se realiza un análisis curricular que permite poner de manifiesto que el concepto de distancia aparece de manera precaria en los documentos, priorizando por un estudio intuitivo que no modela la noción de estar cerca esencial para la comprensión y explicación de límites de sucesiones. En función de los hallazgos obtenidos en esta parte del trabajo, se construye la secuencia didáctica que fomenta su aprendizaje, partiendo del estudio de problemas que le dan sentido al aprendizaje de esta noción, y en que la noción de distancia es la base para la comprensión de límite de sucesiones, así como la coordinación entre las representaciones gráficas, el cálculo numérico y algebraico.

En el capítulo 3 se explica la metodología que para esta investigación es de enfoque exploratorio – cualitativo. Se indica los sujetos de la muestra que para el caso de la intervención se realizó en un curso de tercero medio en el electivo de estadística. Luego se explica las fases del estudio que organizan en distintos momentos y con diferentes herramientas el análisis de los resultados de la aplicación del Cuestionario previo, la implementación de la secuencia didáctica en el aula y del cuestionario posterior.

En el siguiente capitulo se efectúan los análisis respectivos tanto previos como posteriores. Se analiza la evidencia escrita por los estudiantes en el cuestionario previo, en la implementación de la secuencia didáctica, en el cuestionario posterior y evidencias audiovisuales escritas mediante tablas para sus explicaciones y resúmenes. Estos análisis indican que la resolución de problemas significativos, el concepto de distancia en el cálculo de límites de sucesiones y la comprensión de las relaciones entre lo gráfico, lo numérico y lo algebraico son fundamentales para justificar sus respuestas.

En el último capítulo se realizan las conclusiones donde se responde si se cumplieron el objetivo general y específicos del trabajo, se responde la pregunta y supuesto de investigación. Además, se plantea una posible propuesta para continuar con el estudio de límites de sucesiones, luego de la implementación de la secuencia didáctica en el aula y su respectivo análisis.

CAPÍTULO 1

1.1 FORMULACIÓN DEL PROYECTO Y DISCUSIÓN BIBLIOGRÁFICA:

En la mayoría de los países, la enseñanza de límite se incorpora desde la educación media, ya no es un concepto que se enseñe solamente en el nivel universitario. En el año 2020 se incorporó en el curriculum nacional chileno la noción de Limite, Derivada e Integrales para la educación media, dado lo anterior el concepto de límite es relativamente nuevo para la enseñanza en tercero y cuarto medio, la investigación de está en Chile es relativamente nueva. Por esto, se propone en esta investigación como se relaciona la obra matemática de límite de sucesiones utilizando la noción de distancia, numérica, la gráfica y algebraica para su comprensión.

Los artículos indican que los estudios están enfocados en tres áreas: importancia entre gráfica y álgebra para la enseñanza de límite, comprensión cognitiva de límite y, la importancia del concepto de límite en la historia de las matemáticas y sus consecuencias. Se empezará con el primer punto nombrado anteriormente.

1.1.1 Importancia entre gráfica y álgebra para la enseñanza de límite

El proceso del desarrollo conceptual no solo consiste en vincular la representación algebraica y la gráfica a nivel de procedimiento, sino que también ayudar a los estudiantes a pensar en el concepto visualmente, para posteriormente interpretar y explicar manipulaciones algebraicas (Shiyyab, 2020; Takači et al., 2015; Zulnaidi et al., 2020), más aún para el entendimiento de límite.

Rojas Maldonado (2019) indica que: *"las definiciones de dominio e imagen de una función, lo cual es esencial para el desarrollo del contenido de límite de una función" (p.24)*, esto es esencial en el análisis de gráficas para identificar qué sucede en un punto de la gráfica, así como que sucede en las coordenadas de las abscisas y ordenadas en dicho punto. Aunque la importancia de la gráfica es fundamental para la enseñanza de límite, Öztürk y Sönmez (2020) indican que el nivel abstracto es importante en el rol de límite en matemáticas y la capacidad de generalizar para aplicar en la definición de límite. Además, Fonseca y Henriques (2018) exteriorizan que la capacidad de reconocer y representar límites, en sus diferentes representaciones, es un requisito para su posterior comprensión.

Dado todo lo anterior, para la enseñanza de límite es importante vincular la representación gráfica desde el concepto algebraico y viceversa, y no solo intuir qué es el concepto de limite mediante la manipulación de graficas (Öztürk y Sönmez, 2020). Por último, Fonseca y Henriques (2018) revelan que para la comprensión de la definición formal de límite se deben utilizar distintas representaciones y aplicaciones de problemas, con el fin de aprender este concepto.

Los antecedentes presentados hasta ahora relevan la dificultad para el aprendizaje de límites al infinito, cuando solo se enfoca en un solo concepto matemático (sea gráfico o algebraico), es de esto, que para esta investigación se toma los primeros "inicios" para la obra matemática limite en sucesiones, que es la noción de distancia y su relación con la gráfica para la comprensión de límites de sucesiones.

1.1.2 Comprensión cognitiva de límite

Las investigaciones indican que se presentan dificultades en los contenidos de cálculos de límite, no solo en el concepto en sí de este. También existen dificultades para comprender conceptos básicos que sustentan el cálculo, para estudiantes de secundaria y pregrado (Takači et al. 2015; Zulnaidi et al., 2020; Espinoza, Bosch y Gascón, 2003). En particular, el concepto infinito desde el nivel escolar hasta universitario representa una dificultad para los estudiantes, y esto significa que, al calcular el valor del límite, como de límite de izquierda o derecha, resulta para ellos infinito por no internalizar el concepto infinito (Öztürk y Sönmez, 2020).

No solo hay dificultades en el cálculo de límites de si no también va de la mano con los conceptos. Como indica Kamid et al. (2020), la detección temprana de la concepción errónea podría facilitar la enseñanza para un aprendizaje apropiado. Sin embargo, se debe tener en cuenta que la comprensión del concepto matemático no es fácil, ya que cada uno tiene una comprensión individual, es decir, cada estudiante tiene diferentes habilidades para comprender los conceptos matemáticos (Saputra et al., 2021).

Por otro lado, la enseñanza de la noción informal de límite a los estudiantes trae consecuencias en ciertas propiedades y su definición formal (Fernández-Plaza et al., 2013; Fonseca y Henriques, 2018). La importancia de la preimagen-imagen es clave en la estructura cognitiva para el concepto matemático, para el análisis en la gráfica en la intuición del cálculo de límite, pero esto puede ser

contradictorio, ya que también es importante la parte algebraica para el entendimiento de límite (Fonseca y Henriques, 2018).

Hay que considerar también las dificultades para los docentes, los que pueden enfocarse más en lo algebraico y procedimientos para la enseñanza de límite, lo que trae consigo el desarrollo negativo de la comprensión profunda en las nociones de los conceptos matemáticos de los estudiantes (Bastias et al., 2021), dado esto, también es relevante destacar la relación entre lo gráfico y lo algebraico, no solo enfocarse en una representación. Además, se incorporará como se mencione en la parte 1.1.2 el concepto noción de distancia con la relación de la gráfica y viceversa, para luego relacionar lo anterior con el concepto algebraico.

1.1.3 La importancia del concepto de límite en la historia de las matemáticas y sus consecuencias

Es evidente que el concepto de límite es la base para la enseñanza de cálculo (Bastias et al., 2021; Öztürk y Sönmez, 2020). Si existen dificultades en este concepto, esto traerá consecuencia en la aplicación de derivadas al examinar funciones y realizar bosquejos de gráficas, lo que además es una de las partes más difíciles de la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Takači et al., 2015).

Además, la comprensión del concepto de límite es lo básico para construir los conceptos posteriores de cálculo u otros conceptos matemáticos, dando énfasis en lo crucial que resulta el entendimiento de estos conceptos para el desarrollo de continuidad, derivadas e integrales (Bastias et al., 2021; Öztürk y Sönmez, 2020; Saputra et al., 2021; Takači et al., 2015).

Saputra et al. (2021) enfatiza en que, si el concepto de límite no hubiera tenido una buena comprensión, el área de análisis matemático no hubiera existido, es realmente relevante la comprensión del concepto de función de límites y las consecuencias de no saber su importancia dentro de la matemática en general.

Es por esto que, el principio de la noción de la obra matemática: Limite, los primeros en utilizar este concepto implícitamente (Newton, Leibniz) y para sus cálculos fue utilizando la noción de distancia y la gráfica para comprender que sucedía en dicho problema, por ejemplo: cálculo de área bajo la curva.

1.1.4 Necesidades de nuevas propuestas para la enseñanza de límite de sucesiones

Según lo investigado y analizado en la literatura, se puede destacar que el concepto de límite es complejo y esto trae consigo dificultades en su enseñanza. Por otro lado, la enseñanza de este concepto se debe abordar desde distintos registros para su comprensión, no solo en gráficos para su visualización intuitiva o procesos de manipulación algebraica para su cálculo (Fonseca y Henríquez, 2018), sino que además de lo numérico, utilizando la noción de distancia, y realizar una conexión entre estos tres registros de representación.

Por otro lado, se debe enfatizar que la comprensión de límite es la base del cálculo, sin una buena base del concepto analizado, las consecuencias pueden resultar en dificultades para el aprendizaje futuro de los conceptos o análisis matemáticos, y no solo en esta ciencia si no también en física, química, entre otras (Bastias et al., 2021; Öztürk y Sönmez, 2020; Saputra et al., 2021; Takači et al., 2015).

La literatura indica la necesidad de investigar desde el origen de esta obra matemática: limite. Pero; ¿por qué desde el origen? Ya que en el capítulo 2.2 se presenta las primeras nociones implícitas de límite, donde el concepto de noción de distancias es fundamental para la comprensión de límite, específicamente para esta tesis en límite de sucesiones, sino también la relación de este concepto con la gráfica, para la intuición y su comprensión.

Por todo lo anterior, se propone una secuencia didáctica para la comprensión de la noción de límites de sucesiones y su cálculo, mediante la resolución de problemas, la noción de distancia, y la comprensión de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos, en estudiantes del electivo de matemáticas: límites, derivadas e integrales de tercero año medio.

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN:

Desde la problemática planteada según la revisión de la literatura, surge la necesidad de realizar una intervención en la enseñanza de límites de sucesiones en la enseñanza media. Para abordar lo anterior, se propone una secuencia didáctica basada en la Teoría Antropológico en lo didáctico, con base en sus principios didácticos. Esta teoría postula que toda construcción u obra matemática responde a un tipo de cuestiones o problemas de la noción de distancia, la relación de esta con la

gráfica de la sucesión para su cálculo, para la enseñanza de límites de sucesiones en estudiantes en el electivo de matemática límites, derivada e integrales de tercero año medio, dado por lo anterior la pregunta de esta investigación es:

¿De qué manera las comprensiones y el pensamiento matemático de los estudiantes enriquecen al vivir un proceso de enseñanza aprendizaje entorno a los límites de sucesiones desde una secuencia didáctica que tiene como referencia hitos epistemológicos enfrentados en su construcción histórica, enfrentándolos a problemas significativos que requiere de los límites para ser resueltos, que les da la oportunidad de utilizar de herramientas para estudiar el comportamiento de sucesiones en el infinito a través de la noción de distancia, y que articula herramientas aritméticas, algebraicas y gráficas?

1.2.1 SUPUESTO DE TRABAJO:

Una secuencia didáctica basada en hitos epistemológicos esenciales en la construcción de la noción de límite de sucesión y desarrollada en torno a la resolución de problemas y el concepto de distancia utilizado en procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promueve la comprensión profunda de esta obra matemática por parte de estudiantes de enseñanza media, y permite que otorguen sentido y significado a las técnicas de cálculo.

1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO

A continuación, se presentará el objetivo general y específicos de esta investigación. Cabe destacar que los objetivos específicos fueron determinados de manera que permitan lograr el objetivo general.

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar las comprensiones que logran estudiantes de enseñanza media al desarrollar un proceso de aprendizaje entorno a los límites de sucesiones centrado en la resolución de problemas que toman como referencia hitos epistemológicos vividos en su construcción, que utiliza el concepto de distancia y las relaciones entre procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promoviendo la comprensión profunda de las técnicas de cálculo de límites de sucesiones, su sentido y significado.

1.3.2 Objetivo Específico

1. Identificar y delimitar problemáticas específicas en la enseñanza de los límites de sucesiones en enseñanza media que dificultan su aprendizaje por parte de las y los estudiantes.

2. Construir una secuencia didáctica que recoja aspectos esenciales de la génesis epistemológica de la noción de límite de sucesiones, utilice la noción de distancia y articule los procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promoviendo el aprendizaje de esta noción en estudiantes de enseñanza media.

3. Identificar las comprensiones de límite de sucesiones que tienen estudiantes de tercero año medio en el electivo de matemáticas límite, derivada e integrales, antes de la implementación de la secuencia didáctica, mediante el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

4. Identificar y describir reflexiones de estudiantes durante el proceso de estudio de la secuencia didáctica implementada en el aula.

5. Identificar las comprensiones de límites de sucesiones y de procedimientos de cálculo que logran estudiantes de tercero año medio, en el electivo de matemáticas límites, derivadas e integrales, mediante la implementación de una secuencia didáctica que gira en torno al concepto de distancia y el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

CAPÍTULO 2

2.1 MARCO TEÓRICO:

Para esta investigación de límites de sucesiones: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje, se sustentará en la metodología de la Teoría Antropología de lo Didáctico (desde ahora hablaremos de ella como TAD)

2.1.1 La Antropología de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico nace desde la noción de Transposición Didáctica elaborada por Yves Chevallard en 1985. Esta noción planteó que las matemáticas se difunden en las sociedades de una manera distinta a la seguida en su proceso de construcción. Los matemáticos reorganizan los resultados de su producción para darlos a conocer a la comunidad. Este fenómeno planteó la necesidad de investigar y comprender los sucesivos procesos de transformación que sufren los conocimientos matemáticos para llegar a ser enseñados y aprendidos en la escuela. Se hizo necesario disponer de herramientas y principios para comprender las prácticas matemáticas institucionalizadas, y esta teoría de Chevallard llega a su cúspide en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante TAD, que estudia los efectos y consecuencias del tipo de actividades matemáticas que se proponen a las y los estudiantes en las instituciones escolares. Crear, enseñar, aprender y difundir matemáticas son distintos tipos de trabajo matemático que en principio es necesario investigar sin hacer distinciones marcadas en su inicio. La actividad matemática es considerada como una actividad humana de estudio de campos de problemas que resultan útiles para las personas e instituciones sociales en distintos momentos del desarrollo de la humanidad (Bosch, M. y Gascón, J.; 2009).

La noción de la Praxeología

Para enfocarnos en esta teoría es importante comprender la noción de praxeología, que es la unión de dos términos griegos: *logos* que es el “saber” y *praxis* que es toda la práctica o “saber hacer”. Una praxeología está compuesta por cuatro categorías de elementos: Tipo de tareas T, técnicas o maneras de hacer t, tecnología θ y teorías Φ (Chevallard, Y., 1999; Bosch, M., y Gascón, J.; 2009). Estas categorías permiten describir y comprender una práctica humana, en particular una práctica matemática. Estas prácticas varían según las instituciones donde se desarrollen. A continuación, se desarrollará una explicación de cada uno de los componentes de una praxeología.

Tipos de tareas

Primero que todo se debe tener en cuenta que si una tarea t forma parte un tipo de tareas T, lo escribiremos como $t \in T$. Todo tipo de tarea, su objetivo es preciso, como por ejemplo si se desea ir al tercer piso de un edificio, se podría ir por ascensor (t_1) o utilizar escalera (salida de emergencia) sería una segunda forma (t_2). Por el ejemplo anterior, se puede concluir que puede haber un conjunto de

$t_i \in T$, con $i \in N$ que pueden cumplir un mismo objetivo (Chevallard, Y. 1999). Es importante recalcar que puede haber distintos tipos de tarea T_n con distintas tareas t_i para cada objetivo que se pretende estudiar.

Técnicas

La técnica $\hat{o}$ viene del griego *tekhnê*, que significa saber hacer. Observemos que dado tipos de tareas T va a estar asociada por una o varias $\hat{o}$ para desarrollar un tipo de tareas T. Cuando se realice una tarea T por una técnica $\hat{o}$ se va a asignar por un "bloque" [T/$\hat{o}$], a este se le nombra bloque práctico técnico y se denomina en general saber-hacer (Chevallard, Y. 1999)

Se debe tener en cuenta lo siguiente para cuando se trabaje en ciertas tareas T con una determinada $\hat{o}$:

- Una $\hat{o}$ tiende a fallar cuando se está desarrollando una tarea T, es más la $\hat{o}$ tiende a fracasar y este proceso se llamará alcance de técnica

- Una $\hat{o}$ no es necesariamente algebraica, aunque existen casos poco frecuentes. Es importante que la $\hat{o}$ responda con "*sentido*" la tarea T.

- Se debe tener en cuenta que en una institución I reconocen una o pocas $\hat{o}$ que están institucionalmente, sin embargo, en otras instituciones estas $\hat{o}$ podrán ser reconocidas (Chevallard, Y. 1999).

Tecnologías

Una tecnología θ su principal objetivo es justificar "racionalmente" la técnica $\hat{o}$, es decir, es asegurar que las tareas del tipo T se puedan ser realizadas por una técnica $\hat{o}$. Se debe tener en cuenta que esta justificación de la técnica mediante la tecnología dependerá de cada institución si es racional o no para dicha institución (Chevallard, Y. 1999).

Se debe tener en cuenta las siguientes observaciones sobre la tecnología θ:

- En una institución I, con un tipo de tareas T, la técnica estará acompañada frecuentemente de una tecnología θ

- De que existe una I y que sea la única como reconocida, entonces la técnica en virtud será "autotecnología", es decir, es que dicha técnica es reconocida por I, es más es la única que "*funciona*" para resolver dicha tarea T

- La función de la tecnología θ es de explicar, aclarar las técnicas que se estén utilizando para resolver tipos de tarea T

- Por último, otra función de la tecnología es en la *producción* de técnicas. (Chevallard, Y. 1999).

Teorías

Cuando la tecnología se quiere "formalizar", se pasa a un nivel superior de justificación, explicación es la teoría Φ, que justifica la tecnología del papel que corresponde a la técnica. Es más, en la teoría frecuentemente como demostraciones "abstractas" de la tecnología y técnica (Chevallard, Y. 1999).

Saber-hacer y saberes

Dado tipo de tarea T, por al menos una técnica $\hat{o}$, y esta técnica está justificada por una tecnología θ y por una teoría Φ, cuando esto ocurra se indicará por el bloquee $\left[\frac{T}{\hat{o}} / \frac{\theta}{\Phi}\right]$, que constituye una praxeología *puntual*. Dado este bloque podemos *organizar la praxeología* está constituida por un bloque práctico-técnico, $\left[\frac{T}{\hat{o}}\right]$ constituye con saber-hacer y por un bloque tecnológico-teórico $\left[\frac{\theta}{\Phi}\right]$ se identifica con el saber (Chevallard, Y. 1999).

Analizar las prácticas docentes

Chevallard (1999) indica que "*¿Cómo realizar las tareas del tipo T? Y también, o sobre todo: ¿cómo realizar mejor las tareas de este tipo? Estas interrogaciones exigen una producción de técnicas y, por tanto, de praxeologías".* Para realizar mejores tareas de tipo T, se debe tener en cuenta y preguntarse qué producciones de técnicas se necesitan para estudiar o re-estudiar la técnica para dicha tarea ($\hat{o}_T$), con una técnica apropiada que permita que las tareas $t \in T$ de la praxeología que corresponda. De lo anterior, se genera la praxeología puntual $O_T = \left[\frac{T}{\hat{o}} / \frac{\theta}{\Phi}\right]$ que construye o reconstruye los tipos de tareas (Chevallard, Y. 1999)

Se consideran dos tipos de objetivos de estudio. El primer objeto *"la realidad matemática que…"* es específicamente la praxeología matemática u organización matemática (OM_θ), la OM_θ describe y analiza el estudio del tema θ dada una tarea tipo T . El segundo objeto "*la manera que…*" este se va denominar como una organización didáctica (OD_θ), la OD_θ describe y analiza la práctica en una clase de matemática del tema θ dada una tarea tipo T. Se entenderá OD_θ el conjunto de tipos de tarea, técnicas, tecnologías, que se estudia en una determinada institución. Para estudiar la tecnología de una determinada tipa de tareas ($\hat{o}_T$) hay que tener en cuenta en *crear* una respuesta, para esto hay que determinar una organización praxeológica $O = [T/(\hat{o}/(\theta/\Phi)]$. (Chevallard, Y. 1999).

Es importante que el rol entre profesor-estudiante en que el estudiante desempeñe desde sus conocimientos en resolver los problemas matemáticos, es decir, el docente debe tomar el rol de "ausencia" pero en momentos precisos ser un profesor guía para el estudiante, esto quiere decir que el estudiante tendrá toda la libertad para independizarse del conocimiento matemático. (Chevallard, Y. 1999).

A continuación, se expondrá los momentos didácticos de la organización praxeológica, organización didáctica que se articula en tipos de tareas.

Momentos didácticos

Es importante para trabajos de investigación situaciones de estudios como plan de estudios cualitativos o cuantitativos. En estos tipos de situaciones lo llamaremos *momentos didácticos*, no importa el camino

que se tome (cualitativo o cuantitativo) el “gesto de estudio” debería ser cumplido. Estos momentos didácticos están divididos en seis instantes claves, son ampliamente arbitrarios para el análisis de estudio. (Chevallard, Y. 1999).

Momento del Primer Encuentro

Para cada tipo de tareas T_n, dado que en entornos matemáticos y didácticos se pueden descubrir nuevos tipos de tareas, hay un primer momento en el que se abordan las cuestiones problemáticas que darán origen a la construcción matemática. En este primer instante el organizador del proceso de estudio (estudiante o docente) plantea un tipo de problema o cuestión inicial que dará origen a la construcción del conocimiento matemático de interés. Se trata de que cada conocimiento matemático que se está aprendiendo en la organización matemática responda a una necesidad; este será la razón de ser de cada construcción matemática. Este primer momento no determina del todo cómo se va a construir el objeto, esté se irá construyendo en el transcurso del proceso y se irá modificando en el proceso de estudio, según sean las respuestas dadas por las y los estudiantes. Este asunto juega un papel importante para el aprendizaje, ya que se orienta en general en las relaciones entre la institución y el objeto encontrado (Chevallard, Y. 1999).

Momento Exploratorio

Se explora el tipo de tareas o problemas T_n con el propósito de elaborar técnicas que permitan abordarlo y resolverlo. En este momento, se presentan dificultades al enfrentarse a la actividad matemática, estas dificultades son parte para el proceso de la elaboración de técnicas. Al estudiar problemas permite crear técnicas (no es necesariamente la que se espera), sino que estas se “*transformen*” hasta que de alguna manera casi rutinaria se logren resolver los problemas (Chevallard, Y. 1999). Puede aparecer más de una técnica, y no todas ser igualmente eficaces. Una técnica que fue útil para resolver un tipo de problemas específico puede fracasar frente a un problema similar pero desarrollado bajo otras condiciones de realización.

Momento del Trabajo de las técnicas

En este momento del estudio se realiza un trabajo intenso e intensivo de las técnicas elaboradas para resolver los problemas iniciales, con el propósito de alcanzar un dominio profundo de las mismas. Se

ponen a prueba y pueden sufrir modificaciones para hacerlas más efectivas y fiables. Aparece la necesidad de establecer un entorno tecnológico-teórico $\left[\frac{\theta}{\Phi}\right]$, que permita describir, explicar y hacer inteligible las técnicas que se han elaborado desde el momento exploratorio del tipo de tarea o problema. Se hace necesario discutir sobre la eficacia y pertinencia de las técnicas como herramientas de solución. Existe una relación entre el entorno tecnológico-teórico y el trabajo de las técnicas, que están siendo elaborados desde el momento exploratorio, o se están creando. Este momento en general es la primera etapa de estudio; es común que se estudie varios tipos de tareas (Chevallard, Y. 1999).

Momento Tecnológico Teórico

En el proceso de trabajo de las técnicas surge de manera natural la necesidad de explicar y justificar la adecuación de las técnicas a los problemas que se están estudiando. Por qué algunas técnicas funcionan y otras fracasan, en qué se parecen y en qué se diferencian; qué argumentos las justifican. Se busca enriquecer las técnicas volviéndolas más eficaces y fiables, pero por sobre todo se requiere comprender qué características las hace más eficientes y por qué. En este momento se pone a prueba desde la técnica hasta lo más particular de tareas adecuadas, tanto cualitativamente como cuantitativamente. (Chevallard, Y. 1999).

Momento de la Institucionalización

En este momento se institucionaliza el objeto que se está estudiando la organización matemática elaborada, habiendo concurrido la construcción, además los elementos que entrarán son de manera definitiva. El momento de institucionalización, es en primer lugar, la construcción que va en proceso por un movimiento que compromete el porvenir para que el saber sea propio del estudiante. Esta fase de institucionalización es donde contribuye para el tipo de problema, relevando la organización matemática local $[T_i \,/\, \hat{o}_i \,/\, \theta \,/\, \Phi]$. Aquí, se estudia en los distintos tipos de tareas T_i, esta serie de problemas están asociados a la tecnología θ, donde se debería estudiar en orden (Chevallard, Y. 1999).

Momento de la Evaluación

En el momento de la evaluación, que se articula con el momento de institucionalización, se pone a prueba cuánto se han apropiado de los elementos de la OM las y los estudiantes, y también cuánto vale matemáticamente lo construido. Se debe hacer un "balance", es decir, una reflexión donde, cualquiera que sea el observador, se analiza lo que se ha aprendido (Chevallard, Y. 1999).

2.2 Estudio epistemológico de la obra matemática de límite

Para la construcción de la secuencia didáctica que se propone en esta investigación, y en función del marco teórico asumido, es de vital importancia comprender la génesis de la noción matemática en construcción por parte de las y los estudiantes. El estudio de la historia del surgimiento del límite, en resumen, desde los primeros hitos en que la noción de límite aparecía implícita en el trabajo de los griegos (Arquímedes), y posteriormente en los trabajos de Newton, Leibniz, Cauchy y Weierstrass.

Los primeros inicios: la intuición

El concepto de límite surge de la necesidad de cómo muchos "objetos matemáticos" resolver un problema, al inicio como intuición y con el tiempo varios matemáticos empezaron a utilizar esta intuición e intentar definirla a su "modo".

Los primeros acontecimientos de esta intuición de límite surgen en el siglo V a.C. donde el problema que se quería resolver en aquel momento era calcular el área del círculo. Para esto, Arquímedes utilizó el método de agotamiento, el proceso que impulsó Arquímedes fue inscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, donde al aumentar cada vez más los lados de los polígonos (Imagen 1), estas figuras "*tenderían a acercarse"* a la forma de la circunferencia (Bastias et al., 2011; Schubring, 2006), y así concluir el área del círculo. Claramente en este proceso y el hecho de tender los polígonos regulares es unos de los primeros registros donde se utiliza implícitamente el concepto de límite.

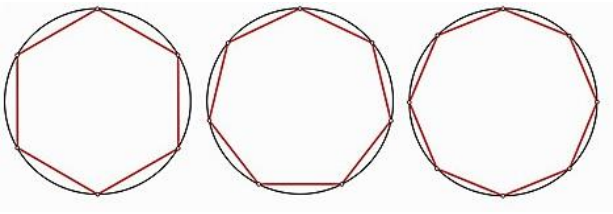


Imagen 1

Con el paso del tiempo no solo se estudiaba la geometría plana si no también germinó la necesidad de estudiar sólidos para el estudio de volumen. Cavalieri en 1640 se preguntó si dado dos sólidos podrían sus volúmenes ser iguales, para esto utilizó el método de la geometría de los indivisibles, este concepto fue estudiado por Demócrito de Abdera y Aristóteles de Estagira entre el siglo V y IV a.C. hoy en día este método se le conoce como el "*Principio de Cavalieri*". (Barrios, J.1993)

El teorema Principio de Cavalieri indica lo siguiente: *"Si dos sólidos tienen alturas iguales, y si las secciones están hechas por planos, paralelos a la base y a distancia iguales a ella, están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esta proporción"*. En la imagen 2 se muestra como Cavalieri argumenta su teorema, donde los tres sólidos al tener la misma altura y sus secciones paralelas a las bases son iguales, concluyó que tiene el mismo volumen. (Barrios, J.1993; Schubring, 2006)

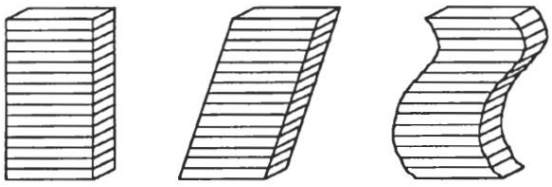
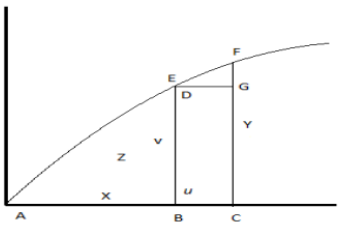


Imagen 2

La llegada del concepto de función y el surgimiento del "infinitesimal"

En el siglo XVII el surgimiento del concepto de función marcó un cambio fundamental para el significado de límite, esto por el hecho de poder comparar y graficar dos variables, y gracias a esto Newton y Leibniz utilizan el concepto infinitesimal como algo muy pequeño que nunca es cero, en caso de Newton la relación entre el tiempo y velocidad, y Leibniz el área bajo la curva en relación entre las dos variables, además ellos son considerados como los fundadores del cálculo infinitesimal.

Newton es considerado el primero en introducir el concepto "infinitesimal", con esto el resolvió problema de cambio instantáneo: problemas de movimiento, de variación y de área a través de anti-derivación. En 1665-1666 desarrolló el cálculo de fluxiones que hoy en día se le conoce como derivadas. Uno de los problemas que investigaba Newton asociada implícitamente el concepto de límites, era calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Por otro lado, utilizó las infinitesimales previas al cálculo fluxional, determinó el área utilizando suma de infinitesimales o elementos indivisibles de área (Imagen 3) (Mancera Pachón, J. L. 2013; Schubring, 2006; Valdivé, C., y Garbin, S. 2008)

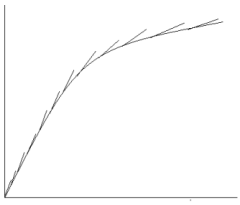


Calculo del área a través de la antiderivación.

Imagen 3

Por otro lado, Leibniz en 1675 estudiaba figuras analíticas donde relacionaba entre la ordenada y la abscisa que se podría expresar mediante una ecuación. Hablaremos de dos problemas que se planteó Leibniz donde utilizó el concepto infinitesimal: Sucesiones numéricas y área bajo la curva. En las sucesiones numéricas resolvió el caso de los números de denominadores con números triangulares, donde un número triangular cuenta los objetos dispuestos en un triángulo equilátero. Leibniz demostró que, si la sucesión de denominadores de números triangulares posee infinitos términos, la suma se puede aproximar a 2 (Mancera Pachón, J. L. 2013; Schubring, 2006).

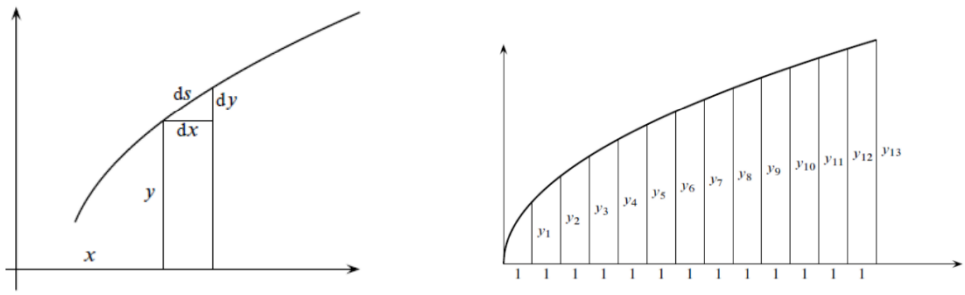
Leibniz estudio curvas para el cálculo de área, para esto él la curva se compone de partes y que esas partes son diferencias infinitesimales entre dos términos consecutivos de una curva (Imagen 4) donde estas coinciden con la tangente en cada punto.



Representación de una curva a partir de líneas ordenadas.

Imagen 4

Con lo anterior, calculo el área bajo la curva donde consideraba la curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Primero formó un triángulo característico, utilizando Pitágoras concluyó que la tangente se forma por la sucesión de abscisas $x_1, x_2, \ldots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son considerados como los "vértices", con esto deduce que las operaciones para hallar las cuadraturas y tangentes eran operaciones inversas (Imagen 5) (Mancera Pachón, J. L. 2013)



Triángulo característico.

Aproximación de una cuadratura.

Imagen 5

Formalización de Límites al infinito: Límite de sucesiones y de función

Dado los estudios que realizaron Newton y Leibniz del concepto infinitesimal, aproximadamente en el año 1770 Euler y D´Alembert empiezan a formalizar el concepto de límite y a rechazar los argumentos geométricos para el cálculo infinitesimal.

Por un lado, Euler trabaja con funciones exponenciales y logarítmica como series a partir del conjunto de números reales. Para obtener los desarrollos en series, Euler utilizó el concepto de infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Estas series infinita realizó una relación a partir de $a^w = 1 + y$ con $a > 1$, donde w es un número infinitamente pequeño y a partir de esto obtuvo la serie para el número e. (Lucero Chaves, J. E. 2021; Valdivé, C., y Garbin, S. 2008)

D'Alembert describe la noción de límite mediante dos magnitudes, no pueden coincidir, es decir, ambas magnitudes son tan cercanas como se puede desear. Además, sugiere que la noción de límites es la base del cálculo (Bastias et al., 2021). Otro estudio de D´Alembert convierte a una secante en una tangente cuando los dos puntos de la secante se vuelven uno y usa el concepto de límite de forma algebraica, otorgando así significado simbólico al concepto infinitesimal. (Lucero Chaves, J. E. 2021; Valdivé, C., y Garbin, S. 2008)

Por último, hablaremos de Cauchy y Weierstrass que son considerados los que construyeron la aritmética puramente formal al análisis matemático y la formalización del concepto de límites de función.

Cauchy entre los años 1821 - 1829 reconstruyó el análisis a partir de la aritmética, para esto el concepto de función y límite jugaron un papel importante. Para Cauchy el concepto de límite es aritmético en vez de como se había analizado hasta este momento geométrico, gracias a este pensamiento incorpora definiciones de función continua, convergencia, derivada e integrales. Además, toma las bases de D'Alembert, donde define límite mediante sucesión para aplicar los sucesivos valores que toma una variable, además es el primero en formalizar el concepto de límite como "objeto matemático", ya que el concepto de límite se asociaba a procesos de aproximación. (Lucero Chaves, J. E. 2021; Medina, 2001).

La definición de límite para Cauchy es: "*Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás"* (Cauchy, 1821, p.4, citado por Valdivé, C., y Garbin, S. 2008). Para la explicación de lo anterior, Cauchy presenta dos ejemplos: primero menciona que un número irracional es el límite de diversas fracciones, y segundo recordando el trabajo de Arquímedes, dice que el área del círculo como límite, converge a las áreas de los polígonos inscritos cuando los lados de los polígonos crecen más y más. (Lucero Chaves, J. E. 2021)

Los avances matemáticos de D'Alembert y Cauchy ayudaron a formalizar el concepto actual de límite, pero dada la completitud de los números reales, Weierstrass define el concepto de límite, desde un "Número real" para el concepto de "conjunto infinito", que es la base del "infinito actual" (Bastias et al., 2021; Medina, 2001). Además, presenta la siguiente definición de límite: "Si dado cualquier ε existe n_0 tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$ (Heine – Weierstrass, en Boyer, 1992, p.696, citado por Medina, 2001).

Dado el estudio epistemológico, podemos constatar que la noción de límites al infinito surge a propósito del estudio de ciertos tipos de problemas, que la noción de distancia es relevante para el aprendizaje y entendimiento de los límites, en particular de los límites de sucesiones, así como su relación con el gráfico, los cálculos numéricos y las manipulaciones algebraicas. A continuación, se formalizarán los conceptos de distancia, sucesión y límite de sucesión, que es la base de la construcción de la secuencia didáctica.

2.3 Formalización de límite de sucesión

Antes de formalizar la obra matemática de límite de sucesión, se va a definir primero la distancia de forma general, luego sucesión y límite de sucesión.

Definición de distancia en espacio métrico:

Se va a definir la distancia en espacio métrico, luego se va a demostrar que la función distancia en $\mathbb{R}$ es también espacio métrico.

Definición: Sea X un conjunto no vacío y ρ una función real definida sobre $X\,x\,X$, que cumple las siguientes tres propiedades:

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$ y $\rho(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x,y \in X$

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para todo $x,y,z \in X$ (desigualdad triangular)

La función ρ se llama métrica o distancia en X; y X junto con la métrica ρ, se llama espacio métrico donde se denota por (X,ρ) (Burkill; 1970; p. 17; A Second Course in Mathematical Analysis)

Para esta investigación se propone utilizar la noción de distancia para comprender y calcular límites de sucesiones, vamos a asumir $X = \mathbb{R}$ con $\rho(x,y) = |x-y|$

Demostración:

Primero definamos la función: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\rho(x,y) = |x-y|$

(i) $\rho(x,y) > 0$ para todo $x,y \in X$ y $\rho(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

Veamos que $\rho(x,y) = |x-y|$ por definición de valor absoluto $|x-y| > 0$ entonces$\rho(x,y) > 0$ para todo $x,y \in X$

Ahora demostremos $\rho(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

Demostración ⇒

Veamos que $\rho(x,y) = |x-y| = 0$ por definición de valor absoluto $|x-y| = 0$ si y solo si $x = y$

Demostración $\Leftarrow$

Asumamos $x = y$ entonces $\rho(x,y) = \rho(x,x) = |x-x| = |0| = 0$

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x, y \in X$

Demostración $\Rightarrow$

Sea $\rho(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = \rho(y,x)$ para todo $x, y \in X$. La demostración $\Leftarrow$ es análoga

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular)

Demostración:

Veamos que:

$\rho(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z|$ por desigualdad triangular de valor absoluto se tiene que

$|x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$ por lo tanto, queda demostrado que

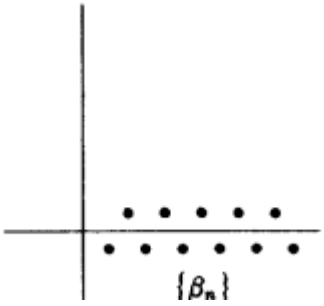
$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$

Por lo tanto, $\rho(x,y) = |x-y|$ es métrica (o distancia) sobre X es decir $(\mathbb{R}, \rho)$ es un espacio métrico.

Ahora se va a definir sucesión y límite de sucesión en $\mathbb{R}$

Spivak (1996) define sucesión: *"Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo domino es* $\mathbb{N}$*".* Se debe tener en cuenta que también a la sucesión se le suele designar por el símbolo $\{a_n\}$

Además, para una sucesión como cualquier otra función, se puede trazar la gráfica, por ejemplo: $\beta_n = (-1)^n$ su gráfica



Spivak, 1996, p. 614; Cálculo Infinitesimal; segunda edición.

Imagen 6

Ahora, por último, definamos límite de sucesión: *"Una sucesión* $\{a_n\}$ *converge hacia* l *(en símbolos* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* N *tal que, para todos los números naturales* n*, si* $n > N$*, entonces* $|a_n - l| < \varepsilon$*"*(Spivak, 1996, p. 614; Cálculo Infinitesimal; segunda edición)

2.4 Análisis del Currículum nacional entorno a la noción de límite

Para poder comprender las complejidades del aprendizaje y la enseñanza de los límites, en particular de los límites de sucesiones, es necesario realizar, además del estudio epistemológico y revisión de literatura, un estudio de carácter curricular para poder establecer qué aspectos de los límites se deben enseñar/aprender en la educación media, y cómo se realiza su correspondiente proceso de enseñanza.

A continuación, se realizará un análisis de las Bases Curriculares y el Programa de Estudio entorno a los límites en el marco del Electivo: Límites, derivadas e integrales para estudiantes de tercero y cuarto medio de la educación chilena. Con especial foco se analizarán las actividades propuestas al docente para la enseñanza de límite de sucesiones, los propósitos de la unidad y las orientaciones didácticas propuestas. Además, se presentará una tabla de resumen de los Tipos de Tareas o Problemas y Técnicas que se presentan en cada unidad, así como la Tecnología y Teoría, para luego concluir de forma general sobre características y fenómenos didácticos encontrados.

Propósito de la Unidad 2: Reconocer un patrón infinito y la noción de límite

Observemos que el propósito de la unidad 2 es el siguiente: "*Los estudiantes utilizan sus conocimientos de regularidades y patrones en esta unidad, para acercarse de manera intuitiva a la noción de límite. Trabajan con sucesiones naturales para generalizar al caso real e incluir en su vocabulario los términos de continuidad, convergencia y divergencia. Asimismo, trabajan el límite desde contextos geométricos, ordenamientos y situaciones concretas que han sido modificadas para generar las nociones básicas de este concepto." (Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio).* De manera preliminar, el enfoque particular de las actividades propuestas por el programa de estudios límites, es acercarse de manera intuitiva a la noción y luego de varias actividades hasta utilizar el álgebra para resolver los problemas de límites al infinito.

2.4.1 Parte 1: patrón Infinito (12 Hrs)

PROPÓSITO:

La primera actividad propuesta por el programa es:" *Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma **intuitiva y visual**. Se comienza con patrones **geométricos sencillos** y la noción del último elemento de un **patrón infinito**. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición." (Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio).* A continuación, se presentarán algunos problemas y preguntas que propone el programa de estudio de límites de sucesiones, para luego realizar un análisis sobre el enfoque que se le da a cada actividad y para terminar con una tabla de resumen, sobre las tareas y técnicas que se realizan.

Problemas Propuestos

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.

   a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
   b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
   c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el "último elemento" de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
   d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el "último elemento" de la sucesión.
   e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
   f. ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar", el "infinito" y los números naturales?
   g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
   h. ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.

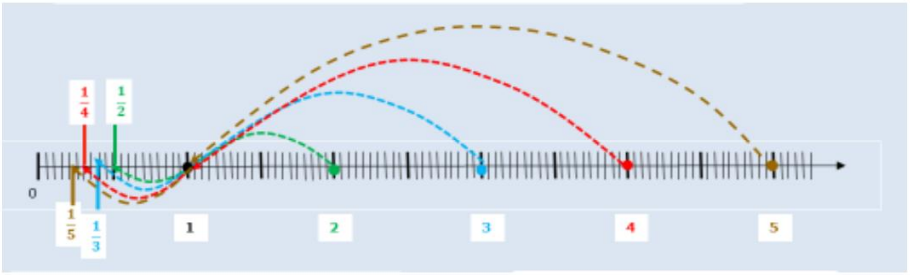
Imagen 7

Análisis didáctico

La actividad anterior utiliza lo "visual" (geométrico) para intuir un patrón, una tarea que proponen es utilizar un método "numérico" entre menor a mayor en los elementos de la sucesión. Observemos que en la pregunta f., la tarea es intuir "convergencia o divergencia" de la sucesión, se introduce implícitamente el concepto "sin alcanzar" (divergencia) con el infinito, sin introducir la técnica de distancia que es esencial, ya visto en el análisis epistemológico que es lo que da sentido a la obra matemática límites, específicamente límites de sucesiones para esta investigación. Además, en la pregunta g., la tarea es graficar y en ningún momento se aprovecha analizar el gráfico para compararlo con los patrones de la sucesión propuesta (numérico) en las preguntas anteriores (b., c., y d.).

Por lo tanto, la técnica de noción de distancia no se incorpora a las tareas propuestas para un análisis para el "infinito" y que sucede entre el punto y la sucesión, tampoco en la relación de la gráfica y la sucesión. Es por esto, que se propone una secuencia didáctica que relacione el concepto de distancia con la gráfica para el entendimiento del límite de sucesión.

2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



a. ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?
b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que modela esta transformación.

c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?
d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

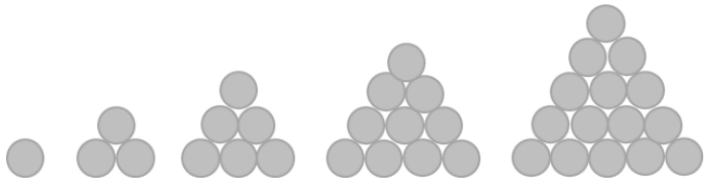
Imagen 8

Análisis didáctico

Observemos que en la pregunta b. no es intuitiva ni visual, la tarea de esta pregunta es algebrizar y esto contradice lo que se propone en un inicio el programa de estudio sobre límite. En la pregunta c. se propone como tarea entre la imagen en la recta numérica, utilizando la técnica del valor mínimo, aquí se podría haber sacado provecho utilizando el concepto de distancia que hay entre cada elemento respecto a la sucesión, y luego preguntar a qué número se va acercando, ¿qué sucede la distancia respecto a lo anterior?, con esto ya se estaría incorporando el concepto de distancia para luego relacionando que sucede al infinito.

Por lo tanto, aún no está implícito el concepto de distancia para el análisis de límite de sucesiones y su relación a la gráfica, para el entendimiento que sucede la sucesión y los elementos cuando son cada vez más grande, si la distancia es cada vez más pequeña o cada vez más grande cuando se analiza hacia el infinito. Es por esto, que se propone una secuencia didáctica que relacione el concepto de distancia con la gráfica para el entendimiento de límite de sucesión, y que sucede en la distancia entre la sucesión y los elementos cada vez más grande de la sucesión, si esta distancia es cada vez más pequeña o cada vez más grande.

La imagen muestra cinco “pilas” de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
b. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.
c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar “el último valor”.

Imagen 9

Análisis didáctico

Al igual que las dos actividades anteriores, aún no se incorpora la noción de distancia como técnica para el análisis de la sucesión y los elementos cada vez más grande de la sucesión. Ahora, si se analiza la tarea de qué sucede la sucesión cuando n tiende al infinito, ¿es significado realizar lo anterior, sin conocimiento previo del concepto de distancia?, dado por el análisis epistemológico es esencial el concepto de distancia, es decir, la distancia entre la sucesión y los elementos cada vez más grande de la sucesión, se podría realizar la tarea de: ¿qué ocurre en dicha distancia?, para así al momento de encontrarse con esta actividad se utilice la técnica del concepto de distancia, para concluir que la distancia entre la sucesión y los elementos cada vez más grande de la sucesión, se hace cada vez más grande, por lo tanto, cuando n tiende al infinito la sucesión es cada vez más grande (tienda al infinito). Pero sin el conocimiento previo del cómo “utilizar” el concepto de distancia para el análisis para cuando n tiende al infinito no se tendrá en cuenta que esta distancia es más grande y además no se relaciona con el registro del gráfico de la sucesión. Es por esto, que se propone una secuencia didáctica que relacione el concepto de distancia con la gráfica para el entendimiento de límite de sucesión, y que sucede cuando la distancia entre la sucesión y los elementos de la sucesión es cada vez más grande, esta distancia es cada vez más pequeña o va creciendo.

A continuación, se muestra una tabla de resumen de las tareas y técnicas que se presentan en cada actividad analizada anteriormente.

Tabla 1

Tipos de Tareas/Problemas	**Técnicas**	**Tecnología/Teoría**
$T1$: Elaboran expresión algebraica de la sucesión	t_1: Algebraica t_2: Aritmética t_3: Gráfica	ϑ_1: Cuentan y algebrizan para determinar la sucesión θ: Sucesión aritmética
$T2$: Determinar el valor cual "tiende la sucesión"	t_1: Aritmética	ϑ_1: Graficar y comparar resultados θ: ausente
$T3$: Determinar el término general de la sucesión	t_1: Gráfico t_2: Algebraico	ϑ_1: Cuentan y algebrizan para determinar la sucesión θ: Sucesión aritmética
$T4$: Determinar si existe un valor que tiende la sucesión	t_1: Valor mínimo t_2: Algebraico	ϑ_1: Graficar y comparar resultados θ: ausente
$T5$: Determinar el límite de la sucesión	t_1: Algebraico t_2: Gráfico	ϑ_1: Graficar y comparar resultados θ: ausente

Conclusiones generales:

La primera parte de actividades recomendadas por el programa del Mineduc es que identifiquen si una sucesión es divergente, utilizando para ello la representaciones gráficas, algebraicas y aritméticas. En este punto hay un fuerte deseo de determinar la sucesión en su expresión algebraica y después verificar esto con desarrollos aritméticos ¿Por qué no realizar el proceso primero aritmético y luego algebraico? Es más intuitivo y práctico para los estudiantes utilizar el registro aritmético (concepto de distancia) mediante el razonamiento de que cada vez que n va aumentando, a qué número se acercan, o no, los valores de la sucesión (un número racional).

Por otro lado, no se introduce qué significado tiene la expresión "para n cada vez más grande" cuando se está estudiando si una sucesión es convergente o divergente; cuestión que plantean estas actividades, ¿Por qué introducir directamente qué sucede en la sucesión cuando n es infinito? Tal como se expuso anteriormente, existe abundante evidencia que muestra las importantes dificultades que enfrentan los estudiantes para alcanzan una comprensión del significado de infinito (Öztürk y Sönmez, 2020).

2.4.2 Segunda Parte: Comprendiendo La Paradoja De Zenón

Propósito:

La segunda actividad propuesta por el programa es: *"Los estudiantes argumentan sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie. La pregunta que orienta la actividad es si será posible que Aquiles alcance a la tortuga. Para contestar y extender una situación infinitamente en el tiempo, elaboran tablas y modelan la situación a fin de conjeturar y dar respuestas. Se espera que piensen con perseverancia y que identifiquen proactivamente aquellos conceptos sobre el límite que les permiten responder a la situación planteada." (Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio).* A continuación, se presenta un problema que está compuesto por tres actividades que propone el programa de estudio de límites de sucesiones, para luego realizar un análisis sobre el enfoque de la actividad en general y para terminar con una tabla de resumen, sobre las tareas y técnicas que se realizan.

Problemas propuestos:

AQUILES Y LA TORTUGA

1. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: La paradoja del filósofo griego Zenón de Elea (490-430 a. Cr.) cuenta "la carrera de Aquiles con la tortuga", en la cual se conjetura acerca de la posibilidad de dividir una distancia física real del espacio en infinitas partes, y de la posibilidad de dividir un lapso real de tiempo en infinitas partes.

Conexión interdisciplinaria: **Filosofía.** OA a, 3° y 4° medio.

a. ¿Qué es una paradoja? Busca definiciones en el internet con tu compañero y contrasten esta definición con ejemplos de paradojas.
b. Construyan paradojas propias en contextos diversos, como la vida, el tiempo, la filosofía, la matemática, las ciencias u otras áreas.
c. Investiguen sobre otras paradojas famosas de la historia.

Imagen 10

b. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las distancias entre la tortuga y Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera. Conjetura acerca del límite de la sucesión de los anchos de los intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Distancia entre ellos al final del intervalo de tiempo en m	10						

c. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las posiciones absolutas de la tortuga y de Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera, y en referencia al punto de partida de Aquiles.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Posición de la tortuga al final del intervalo de tiempo en m	110						
Posición de Aquiles al final del intervalo de tiempo en m	100						

d. Conjetura acerca de la siguiente estrategia: "El tiempo puede avanzar en unidades que se disminuyen en un porcentaje de la unidad anterior, paso por paso, y así no puede sobrepasar un cierto lapso".
e. Estima las siguientes magnitudes, bajo el supuesto de que el proceso de acercamiento se repite iteradamente:
   - Tiempo total
   - Recorrido total de la tortuga
   - Recorrido total de Aquiles
   - Distancia entre la tortuga y Aquiles
f. ¿Cómo se escribe el tiempo total de la corrida en forma decimal?
g. ¿Cómo se representa el tiempo de la corrida en forma de una fracción?

Imagen 11

2. Traspaso de la situación de intervalos discretos de tiempo al modelo continuo del tiempo.

   a. Con las condiciones de la carrera, determina cada elemento de las funciones del desplazamiento:

      Tortuga *T*: $X_T(t) = v_T \cdot t + X_0$

      Aquiles *A*: $X_A = v_A \cdot t$

      v_T: velocidad de la tortuga

      v_A: velocidad de Aquiles

   Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, 3° y 4° medio.

   b. Elabora los gráficos esquemáticos del desplazamiento de la actividad anterior. (Eje horizontal *t*, eje vertical desplazamiento *X(t)*, X_0 adelanto de la tortuga, τ tiempo en el momento del alcance).

   c. Determina gráficamente el tiempo que pasa hasta que Aquiles alcance a la tortuga.

   d. Determina gráficamente el recorrido de Aquiles y de la tortuga cuando Aquiles alcanza a la tortuga.

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Consideren la siguiente tabla de sucesión de los intervalos de tiempo que pasan desde la partida.

Número *n* del intervalo de tiempo	1	2	3	4	4	5	6
Intervalo de tiempo en *s*	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$

   a. Desarrollen la expresión algebraica de los intervalos de tiempos con potencias de base "10": $t_n = 10^n$

b. Calculen la suma de los primeros 8 tiempos de la actividad anterior y represéntenla como número decimal.

c. Suponiendo que haya infinitos intervalos de tiempo construidos mediante la expresión de la actividad b, y recordando la transformación de números decimales periódicos, ¿con que fracción se puede expresar el número decimal que representa la suma de los tiempos t_n?

d. Representando la suma de los intervalos de tiempos como serie, ¿por qué es una serie geométrica?

e. Expresen la serie 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ... como serie geométrica con los términos t_1 y q.

f. Determinen el límite de la serie.

g. En un sistema de coordenadas, elaboren un gráfico que representa discretamente el recorrido de Aquiles según el tiempo, basándose en los tiempos: 10s; 11s; 11,1s; 11,11s;... Expliquen el tipo del gráfico que resulta.

h. Se considera la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{1}{n}$ y una "carrera" en la recta numérica, haciendo "saltos" de un término de la sucesión hasta el próximo término. Suponiendo que haya avanzado con un millón de saltos hasta el término $a_{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$, ¿se puede decir que "ahora faltan menos saltos hasta el límite 0 que al inicio de la carrera"? Argumenten y comuniquen la respuesta a un compañero.

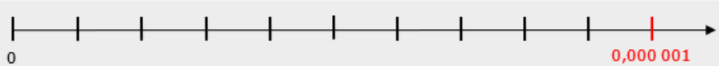


Imagen 12

Análisis didáctico:

En este caso la tarea principal es sobre la paradoja de Zenón, donde se enfoca en distintas tareas y una principal es de algebrizar el problema, se puede observar en la actividad 2.a, ya están las funciones respecto a la velocidad de la tortuga y Aquiles (estas desarrolladas por el lector en la actividad 1, aquí se está asumiendo ya que se desarrolló el problema para llegar dichas funciones), dando enfoque en el desarrollo algebraico para determinar la serie geométrica, además de determinar el límite de la serie.

Por otro lado, se realiza otro tipo de tarea que es registrar datos en tabla para la intuición de que sucede en el infinito, luego otra tarea que es graficar para determinar el límite de la serie geométrica, realizando intersección entre la función que representa el recorrido de Aquiles y de la tortuga. Se utiliza la noción de distancia, para verificar que tan pequeña lo que ha recorrido Aquiles respecto a la distancia que ha recorrido la tortuga, y esta distancia es cada vez más pequeña, pero no relacionan estos tres registros para el análisis del límite de la sucesión y que sucede con la gráfica con dicho valor.

Tabla 2

Tarea	Técnica	Tecnología/Teoría
T: Determinar la serie geométrica	t_1: Algebraico t_2: Aritmético t_3: Serie geométrica	ϑ_1: Tablas de valores ϑ_2: Representar la suma de valores en expresión geométrica θ: Sucesión geométrica
$T_{4,2}$: Determinar límite de la serie	t_1: Expresar la serie geométrica en suma infinita t_2: Algebraico t_3: Gráfico	ϑ_1: Tablas de valores θ: Sucesión geométrica
T: Buscar información de la paradoja de Zenón	t_1: Definición t_2: Construcción paradoja (registro natural)	ϑ_i:Ausente θ: Ausente
T: Límite de sucesión mediante la paradoja de Zenón	t_1: Aritmética. t_2: Tabla de valores. t_3: Distancia	ϑ_1: Tablas de valores θ: Sucesión geométrica

Conclusiones:

Claramente hay un fuerte uso del enfoque de la paradoja de Zenón para comprender el cómo calcular límite de serie mediante desarrollos algebraicos y relacionando sus conclusiones mediante la gráfica de la serie. Aunque, en un momento utilizan la noción de distancia, aun así, no es suficiente para que los estudiantes utilicen esta herramienta para realizar cálculos o argumentos para determinar el límite de alguna sucesión o serie, es decir, verificar que la distancia entre la sucesión y los elementos cada

vez más grande de la sucesión, se van acercando a un número, o bien cada vez la distancia entre sus términos o valores es más pequeña.

Por lo tanto, como resultado de este análisis curricular, para esta investigación será clave relacionar los valores que toma la sucesión con la idea de distancia, en particular la distancia entre valores de la sucesión y un número al que se acercan. Es decir, se relacionarán el cálculo aritmético con la representación gráfica para concluir el valor del límite de la sucesión cuando n es cada vez más grande (cuando n tiende al infinito).

2.4.3 Tercera Parte: Argumentando Con La Noción De Límites En Diferentes Contextos

Propósito

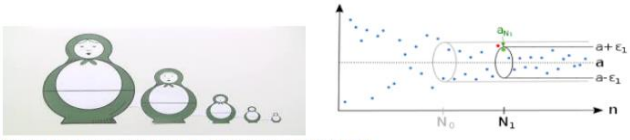
La tercera y última actividad propuesta por el programa respecto a límite de sucesiones es: "*Los estudiantes piensan con perseverancia para desarrollar el concepto de límite de sucesiones y series numéricas. Elaboran proactivamente representaciones de ellas en la recta numérica y el sistema de coordenadas para proyectar y conjeturar hacia el infinito. Además, se espera que expliquen pictóricamente lo que significa el límite; que transfieran la representación pictórica al nivel simbólico, que planteen una conjetura acerca de un posible límite y la confirmen o rechacen con el cálculo de límite". (Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio).*

A continuación, se presentarán algunos problemas y preguntas que propone el programa de estudio de límites de sucesiones, para luego realizar un análisis sobre el enfoque que se le da a cada actividad y para terminar con una tabla de resumen, sobre las tareas y técnicas que se realizan.

Problemas propuestos:

COMPRENDIENDO EL CONCEPTO DE LÍMITE

1. Observa y describe las dos imágenes a tu compañero.



a. ¿Qué piensas que quieren decir estas imágenes?
b. ¿Cómo las puedes relacionar con la palabra "límite"?
c. ¿Cómo se vinculan con "sucesión" o "serie"?
d. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: "Para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño que sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon". ¿Qué imagen corresponde mejor al párrafo? Explica cada elemento a tu compañero.

Imagen 13

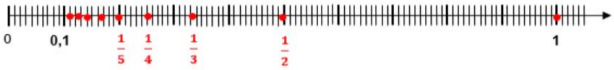
Análisis didáctico

Se introduce la tarea de calcular límite, una de las técnicas para calcularlo es mediante "definición de límite de sucesión". En la pregunta d. específicamente utilizan la técnica de intervalo de épsilon y observar el gráfico para su interpretación (segunda técnica), se relaciona la gráfica con el concepto de límite. Aún con lo anterior, no se relaciona el concepto de distancia y la gráfica para la interpretación de límite de sucesión. Observemos que sí, se relaciona la distancia entre épsilon y el elemento a, se podría concluir que épsilon se puede tomar tan pequeño como uno quisiera, y el límite de la sucesión converge a a. En esta investigación se propone el entendimiento de la distancia de la sucesión con elementos de estás, si es que la distancia es cada vez más grande o cada vez más pequeña.

¿QUÉ ENTENDEMOS POR CONVERGENCIA?

1. La imagen muestra números de una sucesión marcados con puntos rojos en el segmento de la recta numérica entre 0 y 1.

   a. Los números se acercan al número 0,1, disminuyendo la diferencia entre dos términos seguidos. ¿Por qué el número 0,1 no puede ser el límite de la sucesión? Encuentra la expresión general de la sucesión.



   b. Se considera el segmento entre 0,1 y 0. ¿Cuál es la posición n_0 de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda?

c. A continuación, se representa más aumentos de la recta numérica. Determina la posición n_0 de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda.

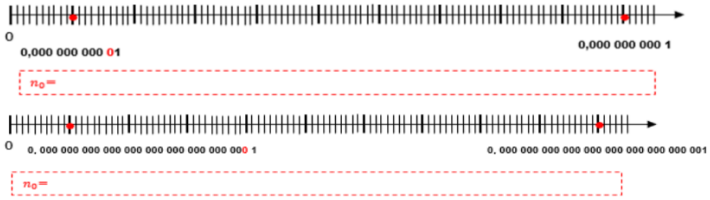


Imagen 14

d. Si se sigue observando los números $\frac{1}{n}$ con una "lupa imaginaria" con más y más aumentos, llegando a más posiciones n_o, contesta las siguientes preguntas y explica las respuestas de forma verbal.

   i. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \leq n_0\}$?

   ii. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \geq n_0\}$?

   iii. Los números representados por $a_n = \frac{1}{n}$, ¿pueden disminuir a números negativos?

   iv. ¿Por qué el número 0 es límite de la sucesión?

   v. Llegando los puntos a cada posición n_0 nueva y desplazando hacia "0", ¿quedan menos números a recorrer?

e. Se considera un "intervalo ε" alrededor del límite 0 "$[\,0-\varepsilon\,,0\,+\,\varepsilon\,]$" y se elige un valor de $\varepsilon = 0{,}0000000005$. ¿A partir de qué número n_0 todos los términos a_n están dentro de $[\,0-\varepsilon\,,0\,+\,\varepsilon\,]$?

f. Verifica que, para cada ε > 0 y muy cercano a 0, ocurre la misma situación: a partir de un cierto n_0 todos los términos a_n están en el intervalo $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$.

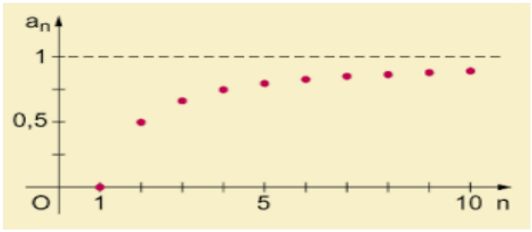
g. Verifica que para un "límite falso", por ejemplo "$\frac{1}{100}$", no ocurra la situación.

Imagen 15

Análisis didáctico

En la actividad anterior, se propone visualizar en la recta numérica (primera tarea) para luego introducir la sucesión $\frac{1}{n}$, dado esas tareas intuir cuando n tiende al infinito es 0 (segunda tarea, intuir límite de la sucesión). Lo anterior se podría utilizar la técnica de la gráfica para intuir el límite es intuitivo concluir que el límite de la sucesión de $\frac{1}{n}$ es 0 cuando n tiende al infinito. En esta investigación se utilizará esta sucesión como límite de referencia para el cálculo de límite.

2. La imagen muestra un gráfico de puntos que representa una sucesión (b_n).



   a. Determina el término general b_n.
   b. Conjetura acerca del límite de la sucesión.
   c. Determina algebraicamente $\lim_{n\to\infty} b_n$.

3. Determina algebraicamente el límite de la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{2-3n^2}{(2n+1)^2}$.
4. Elaboración de sucesiones a partir de un límite dado.
   a. Elabora el término general de una sucesión con expresión fraccionara (c_n) que tiene el límite $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2}$
   b. Elabora un término general de una sucesión con expresión fraccionara (d_n) que no tenga límite.

Imagen 16

Análisis didáctico:

Observamos que la tarea es algebrizar el cálculo de límites, se utiliza la técnica de gráfico para intuir a qué tiende el límite en la primera actividad, luego la tarea es determinar el término general de la sucesión, para luego calcular este de forma algebraica (técnica). Luego se proponen otras actividades que es determinar una sucesión cuyo límite es un valor dado y una sucesión que no tenga límite. En estas actividades se podría nuevamente dar la iniciativa de utilizar el concepto de distancia para

determinar qué sucesión converge a un valor de límite dado, es decir, la distancia entre el límite L y la sucesión debe ser cada vez más pequeña entonces es convergente, y para la siguiente actividad la sucesión y los elementos de estas, su distancia es cada vez más grande, entonces es divergente.

En esta investigación, se propone analizar distintos casos para identificar cuándo una sucesión es convergente y para cuando no, utilizando las técnicas de gráfico y el concepto de distancia para concluir si existe el límite o no.

¿CUÁNDO NO EXISTE EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN?

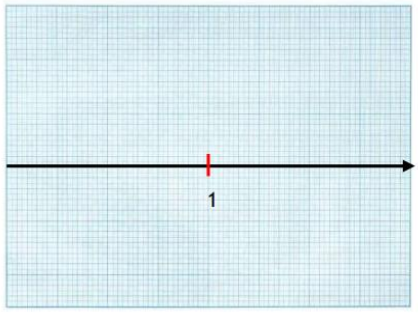
1. Determina algebraicamente el límite de las sucesiones o argumenta la inexistencia de las siguientes sucesiones.

   a. (a_n) con $a_n = \frac{(2n+1)^2}{1-3n^2}$.

   b. (b_n) con $b_n = \frac{(3n-1)^2}{3n-1}$.

2. Se considera la sucesión (c_n) con $c_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$.

   a. Marca los primeros 8 elementos en la recta numérica.



   b. Conjetura acerca de la existencia del límite de (c_n)

   c. Verifica la conjetura, determinando $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ y considerando números pares e impares.

   d. Si la ecuación de la sucesión se cambia a $d_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$, ¿qué efecto tiene el cambio? Argumenta la respuesta.

Imagen 17

Análisis didáctico:

Esta última actividad su tarea es establecer cuándo un límite no existe, utilizando técnica algebraica o argumentar la inexistencia, dado lo último cómo se va a argumentar la inexistencia si hasta el momento en todas las actividades propuesta por el programa de estudio de límite, si el enfoque en el concepto de distancia ha sido escaso para la explicación de cuando el límite existe o no. Se utiliza sucesiones oscilantes de que sucede en el infinito preguntando ¿está sucesión su límite existe?, utilizando la técnica recta numérica para la intuición para verificar que el límite es L o $-L$, como son distintos por lo tanto no existe. Para esta investigación llamaremos límite de referencia cuando el exponente de n en el numerador es mayor que el exponente de n en el denominador entonces el límite no existe, pero esto justificando con el concepto de distancia para su explicación del porque sucede esto.

Tabla 3

Tipos de Tareas/Problemas	**Técnicas**	**Tecnología/Teoría**
$T_{1,1}$: Definición de límite de sucesión	$t_{1,2}$: Representación pictórica y gráfica $t_{1,2}$: Sucesión y serie $t_{1,3}$: Definición límite de sucesión (registro natural)	ϑ_1: Que ocurre con la sucesión si es menor o mayor un número θ: Definición de sucesión de límites
T: Comprensión y determinar el número que converge la sucesión	t_1: Gráfico t_2: Aritmético t_3: Algebraico	ϑ_1: Factorización θ: Productos notables/Factorización

T: Determinar el término general de la sucesión que representa la gráfica	t_1: Gráfico t_3: Algebraico	ϑ_i: Ausente θ:Ausente
T: Existencia de límite de la sucesión	t_1: Gráfico t_2: Algebraico	ϑ_1:Determinar expresión algebraica θ: Productos notables/Factorización
T: Determinar algebraicamente el límite de la sucesión	t_1: Algebraico	ϑ_1:Ausente
T: Elaborar una sucesión que su límite sea un número dado o que sea divergente	t_1: Algebraico	ϑ_1:Determinar expresión algebraica θ:Ausente
$T_{5,1}$: Determinar existencia de límite de sucesión, dada su términogeneral	t_1: Algebraico t_2: Gráfico t_3: n: par o impar t_4: Comparar sucesiones	ϑ_1:Determinar expresión algebraica θ: Productos notables/Factorización

Conclusiones:

Nuevamente todas las actividades están enfocadas en el uso del registro algebraico para el cálculo de límite de sucesiones o series, dejando de lado la noción de distancia para el cálculo de límite. Además, nuevamente una deficiencia en el tratamiento de la relación entre el registro gráfico y algebraico para la explicación de la convergencia. Además, no se utiliza esta relación para las sucesiones no convergentes; en este caso solo se orienta en la parte algebraica para el cálculo. Por lo tanto, lo que más predomina en todas las actividades propuestas en el programa de estudio límite, derivada e integrales es la técnica algebraica, la que le sigue es lo visual en la recta numérica y en algunos momentos la gráfica de sucesión.

Problemática

Dado al análisis del Currículum, específicamente en el programa HC: Límite, derivadas e integrales, la enseñanza de los límites comienza con un cuestionamiento intuitivo desde lo gráfico, que no se modeliza matemáticamente, y luego abruptamente se introduce el cálculo algebraico sin vincular con lo gráfico, pero si vinculan estos cálculos con la recta numérica, como por ejemplo en la imagen 15.

Además, no aparecen problemas que le den sentido y significado al estudio de los límites; se puede observar que las actividades se centran en que los estudiantes determinen el término general de la sucesión para luego calcular el límite al infinito. Al mismo tiempo, no se construyen técnicas matemáticas adecuadas que permitan estudiar el comportamiento de una sucesión en el infinito; la técnica basada en factorizaciones deja implícito el problema de disponer de herramientas que permitan determinar si es o no convergente, y de ser convergente, a qué número lo hace.

Por otro lado, en ninguna actividad se da el enfoque en la noción de distancia que es primordial para determinar convergencia o divergencia y el cálculo de límites de sucesiones, como se explicó en la epistemología de límite al infinito. Esta obra matemática nace desde la distancia entre los términos de una sucesión y un número, y qué sucede con la distancia entre ellos cuando n es cada vez más grande. Como se pudo observar, este programa se enfoca además en el registro geométrico para la intuición de límites: recortes rectangulares “infinitos”, en ningún momento se retoma la primera utilización implícita de límite que es la aproximación del cálculo de área de la circunferencia y el número π, realizado por Arquímedes, que en esta investigación retoma este problema como introductorio en la secuencia didáctica para la intuición de límite de sucesiones. Finalmente, el profesor es quien expone el conocimiento y el papel de los estudiantes es replicarlo (Paradigma de enseñanza de las matemáticas dominante).

Es por esto por lo que es necesario que se realice una secuencia didáctica que parta del estudio de problemas que den sentido y significado al estudio de los límites, utilice fuertemente la noción de distancia (registro aritmético), su relación con el registro gráfico y por último el cálculo de límites utilizando como base estos tres registros, para la utilización algebraico como un recurso para el cálculo de límites de sucesiones. Es por ello por lo que la problemática de esta investigación es:

La comprensión de límite es compleja para los estudiantes y genera conflictos cognitivos. Su enseñanza se aborda utilizando solo uno o dos registros de representación, y sin articularlos. La noción de distancia no se aplica de forma aritmética, si no más bien algebraica y la gráfica solo es de uso intuito y visual, sin relacionarla con otro registro.

CAPÍTULO 3

3.1 METODOLOGÍA:

En el siguiente capítulo se define la metodología que se utilizará para alcanzar los objetivos planteados en el capítulo anterior. Ello incluye el diseño metodológico, sujetos de la muestra y la estructuración de las fases de estudio.

3.1.1 Tipo de Metodología

Esta investigación está enfocada en una metodología cualitativa, dado que se centra en caracterizar las comprensiones mediante el concepto de distancia en el desarrollo entre las relaciones de los procesos gráficos, numéricos y algebraicos en los estudiantes en el electivo de matemática límites, derivada e integrales de tercero año medio, para el cálculo de límites de sucesiones. Para lograr este objetivo es a través de la descripción del desarrollo de las comprensiones mediante el concepto de distancia en el desarrollo entre las relaciones de los procesos gráficos, numéricos y algebraicos cuando los estudiantes abordan cálculo de límites de sucesiones. Para ello, se analizan las respuestas de los estudiantes en la secuencia didáctica que desarrollan clase a clase. Dado por Hernández et al. (2014) este tipo de metodología se ajusta al objetivo planteado ya que la perspectiva descriptiva permite a los estudiantes interpretar sus respuestas, mediante el concepto de distancia en el desarrollo entre las relaciones de los procesos para las comprensiones entre lo gráfico, numérico y algebraico para el cálculo de límites de sucesiones.

Dado todo lo anterior el diseño de esta investigación es de alcance exploratorio- descriptivo, exploratorio dado que en la literatura actual no se han realizado investigaciones de límites de función de sucesiones basado en la Teoría antropológica de lo didáctico, y descriptivo dado que se busca caracterizar las comprensiones mediante el concepto de distancia en el desarrollo de las entre las

relaciones de los procesos gráficos, numéricos y algebraicos en los estudiantes en el electivo de matemática límites, derivada e integrales de tercer año medio, para el cálculo de límites de sucesiones.

3.2 Sujetos de la muestra

Para esta investigación se trabajó con 8 estudiantes del electivo Estadística y Probabilidades tercero año medio del Liceo Teniente Dagoberto Godoy n°3, esta investigación se enfoca en una secuencia didáctica para los futuros estudiantes del electivo límites, derivada e integrales, se tomó la decisión de intervenir en estos estudiantes por la fecha en que se realizó (primera y segunda semana de diciembre), los estudiantes del electivo anteriormente mencionado ya se le habían enseño límite de sucesiones, cabe recalcar que para la enseñanza de cálculo de límites de sucesiones mediante el concepto de distancia, no es necesario conocimientos del electivo de límites, derivadas e integrales para poder desarrollarla.

Además, se realizaron todos los protocolos éticos de la investigación, es decir, la autorización formal de parte del director(a) del establecimiento, además de solicitar a los apoderados de los estudiantes involucrados firmar un consentimiento de estudio, destacando el resguardo de información e identidades de los estudiantes. Ambos formatos se encuentran adjuntos en el anexo.

3.3 Fases de Estudio

La estructuración del estudio está formada por tres fases:

Fase 1: Aplicación de un cuestionario previo para determinar el grado de apropiación de los conocimientos previos necesarios para enfrentar adecuadamente el aprendizaje de los límites de sucesiones.

Fase 2: Implementación en el aula de la secuencia didáctica previamente construida con observaciones de campo y video grabaciones.

Fase 3: Aplicación de un cuestionario posterior para determinar el grado de apropiación de los objetivos de aprendizaje esperados y la comprensión de los límites de sucesiones y su cálculo.

Se realizó una observación de clases al momento de la implementación de la secuencia didáctica en el aula, levantando notas de campo y registro audiovisual de las 5 clases de 50 minutos cada una. Además, se formaron grupos de entre 3 y 4 estudiantes, estos elegidos al azar, para observar y registrar sus interacciones.

Por último, la secuencia didáctica se construyó siguiendo los principios didácticos y características ya expuestas. Su estructura contempla tres partes: (1) Explorando los comportamientos de sucesiones; (2) Estableciendo hipótesis sobre límites de sucesiones; y (3) Cálculo de límites de sucesiones. En cada parte de la secuencia didáctica se construyó un cierre para que la profesora/el profesor lo gestionaran en el aula. Este cierre contempla una presentación en power point que contiene varias preguntas abiertas que serán orientadoras para realizar el cierre con la participación central de las y los estudiantes. Más adelante se presentan las respuestas escritas formuladas por los estudiantes.

Todos los instrumentos construidos en este trabajo fueron validados por jueces, tanto los cuestionarios como la secuencia didáctica, realizándose todos los ajustes requeridos.

3.3.1 Fases 1 del Estudio: Cuestionario previo

A continuación, se explicarán las tareas, técnicas, tecnología-teórico de los conocimientos necesarios para abordar la secuencia didáctica.

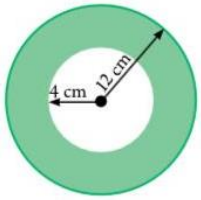
Los conocimientos previos necesarios para abordar la secuencia didáctica están explicados en la siguiente tabla:

Tabla 4

<table>
<tr><th>Tipo de problema</th><th>Técnicas matemáticas</th><th>tecnología-teórico</th><th>Propósito investigativo</th></tr>
<tr><td>T_1: ¿A qué distancia se encuentra el número -2 con el número 4?</td><td>τ: Implícita el concepto de distancia</td><td>ϑ_1: “la distancia entre los números -2 y 4, se encuentra a 6 dígitos”

ϑ_2: $|-2-4|=6$

θ: Definición de distancia en los números Reales</td><td>Es necesario verificar el concepto de distancia, ya que en la secuencia didáctica será la herramienta con el cual los estudiantes deberán justificar sus respuestas, respectos a sus cálculos sobre límites de sucesiones</td></tr>
<tr><td>T_2: Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico</td><td>τ: Identificar par ordenado</td><td>-</td><td>Este propósito es para verificar en la secuencia hipótesis de límites, identificando puntos ordenados a qué número tiene o tendrá algún tope la sucesión</td></tr>
<tr><td>T_3: Dada la siguiente sucesión $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, \ldots$ donde su término general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:
<table><tr><th>n</th><th>a_n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>3</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr><tr><td>4</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr><tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr><tr><td>n</td><td>$\frac{1}{n}$</td></tr></table>Gráfique la sucesión anterior.</td><td>τ: Graficar sucesión</td><td>ϑ_1: Graficar</td><td>En la secuencia didáctica, el gráfico será un recurso para verificar sus cálculos, y además de interpretar el gráfico de alguna sucesión para establecer posible convergencia.</td></tr>
</table>

T_4: Calcule el área sombreada de la siguiente figura geométrica:  	τ: Cálculo de área sombreada	ϑ_1: "El área sombreada, es el cálculo entre el área de mayor radio y la diferencia con el área de menor radio"	En la secuencia didáctica como inicio del problema es retomar el primer encuentro implícito del concepto de límites, visto en el capítulo de epistemología.
T_5: Factorice la siguiente expresión algebraica: $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$	τ: Factorizar y simplificar expresión algebraica	ϑ_1: Cuadrado de binomio ϑ_2: Cociente de expresiones algebraicas	En la tercera parte de la secuencia didáctica, los estudiantes pueden utilizar esta herramienta para realizar cálculos de límites de sucesiones.
T_6: Explique con sus palabras si 0.9999… es o no es 1	τ: Implícita: Concepto de infinito	ϑ_1: "Expresar el número decimal infinito a fracción, dando así 1" θ: implícita: noción de infinito	Identificar el concepto infinito implícitamente
T_6: Explique con sus palabras qué es para ti el concepto de límite de sucesión	τ: Definición de límite de sucesión	ϑ_1: "Es el valor que tiende los términos de la sucesión" θ: Definición implícita de límite de sucesión	Identificar noción de límite de sucesión

3.3.2 Fases 2 del Estudio: Implementación de la Secuencia Didáctica en el aula

La secuencia didáctica se desarrolló basándose en el análisis epistemológico, se parte del estudio del problema del cálculo del área de la circunferencia por aproximaciones infinitas de polígonos regulares inscritos, realizado por Arquímedes, se continúa con problemas de estudio de comportamientos, estos

se trabajan utilizando la noción de distancia y relacionando sus cálculos con el grafico de la sucesión recordemos que en el apartado de los hitos epistemológicos la importancia del concepto de distancia para la justificación de límites de sucesiones o series, trabajados por Leibniz, Euler y Cauchy.

Por otro lado, la lectura actual da la importancia de los registros gráficos y algebraicos, y no solo estos dos registros (Fonseca y Henriquez, 2018), sino además en esta propuesta se incorpora el registro numérico y el concepto de distancia, para la compresión y el cálculo de límites de sucesiones. Con esto, desde el estudio intuitivo se deriva la necesidad de disponer de un modelo matemático que permita calcular si los valores de la sucesión se acercan, o se alejan, en el infinito. Para esto se trabaja con la noción de distancia para estudiar comportamientos infinitos, relacionando sus estudios con los comportamientos gráficos.

En el análisis curricular, no aparecen problemas que le den sentido y significado al estudio de los límites, dado esto en la secuencia didáctica se parte con el problema de área de circunferencia mediante polígonos regulares inscritos como inicio implícito de límite, y además, en el programa curricular no se aborda de una manera adecuada el concepto de distancia para la comprensión de límite de sucesiones, en la segunda parte de las secuencia didáctica el estudiante juega un rol protagónico en su aprendizaje; deben realizar hipótesis, contrastarlas, discutirlas, validarlas y formalizarlas, con la orientación del docente.

Por último, en la tercera parte los estudiantes calcularán límites de sucesiones utilizando técnicas vistas (se explicará en el capítulo 3.3.1.3 y 3.3.2.3) donde podrán utilizar todas las técnicas vistas en las dos primeras partes de la secuencia didáctica.

Dado todo lo anterior, a continuación, se explicará las tareas, técnicas, tecnología-teórico que se abordará en la secuencia didáctica, y que esta es compuesta por tres partes llamados por: explorando el comportamiento de sucesiones, establecer hipótesis sobre límites de sucesiones y calculando límites de sucesiones (Anexo).

3.3.2.1 Secuencia Didáctica Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones

En la primera parte de la secuencia didáctica, se trabaja con el estudio del problema del cálculo del área de la circunferencia por aproximaciones infinitas de polígonos regulares inscritos, luego se

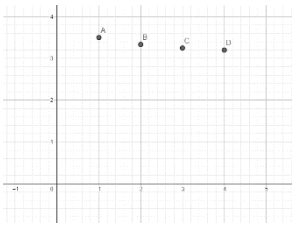
continúa con problemas de estudio de comportamientos, estos se trabajan utilizando la noción de distancia y relacionando sus cálculos con el grafico de la sucesión.

En esta primera parte, se trabaja el primer y el segundo momento, luego de finalizar las respuestas escritas de los estudiantes, la profesora encargada del curso cierra la primera parte, formalizando el concepto de *"Que hay sucesiones en las que sus términos se van acercando a un valor numérico l y que, en estos casos, la **distancia** entre sus elementos y ese valor numérico es cada vez más pequeña".*

A continuación, se realizará una tabla con las preguntas de dos problemas de un total de cuatro, ya que las otras dos tienen el mismo propósito (anexo)

Tabla 5

Tipo de problema (Tareas)	Técnicas matemáticas	tecnología-teórico	Propósito investigativo
T_1: ¿Qué sucede con la diferencia del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscritos? T_2: ¿Qué concluye usted respecto el área de los polígonos regulares inscritos y la de la circunferencia?	τ: Cálculo de áreas sombreada τ: Implícito: Concepto de infinito	ϑ_1: "El área de los polígonos regulares se va acercando al área de la circunferencia" ϑ_2: "Cada vez que aumente la cantidad de lados de los polígonos regulares, el área de esta tiende al área de la circunferencia" ϑ_3: "Si los lados de los polígonos regulares son cada vez más pequeños, el área de está tiende al área de la circunferencia" θ: Implícita: concepto de límite θ: Implícita: Límite de sucesión	**Primer momento**: Explorar el comportamiento geométrico, para el análisis de límite de algún comportamiento sucesivo.

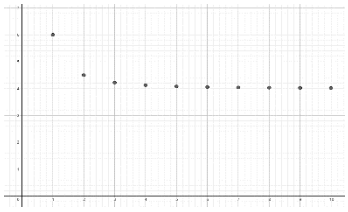
Observen la siguiente sucesión $\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n+4}{n+1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas. T_1: Encuentren los términos de la sucesión para $n = 1; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el número 3? ¿Y entre los distintos términos de la sucesión y el número 6? ¿Y con el número 10? T_2: Ahora grafique la sucesión. ¿De qué manera el gráfico de la sucesión permite visualizar y verificar la respuesta que dieron a la pregunta a)? T_3: Una de sus compañeras dice que, en algún momento, para un término de n, la gráfica de la sucesión tocará el número 3 Otra compañera indica que para ningún término de n la gráfica tocará el número 3. ¿Qué piensan ustedes? Justifique.	τ: Implícita: Concepto de distancia para la justificación de límite de sucesiones τ: graficar sucesiones τ: implícita: Sucesiones convergente o divergente	ϑ_1: "la distancia entre los términos de la sucesión y el número 3 es cada vez más pequeña, en vez que para los números 6 y 10, es cada vez más grande" ϑ_2:  ϑ_3:" Para ningún término de n, la gráfica tocará el número 3" θ: Implícita: Justificar convergencia con definición de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	**Primer Momento:** Que hay sucesiones en las que sus términos se van acercando a un valor numérico l y que, en estos casos, la *distancia* entre sus elementos y ese valor numérico es cada vez más pequeña. Que hay sucesiones en las que sus términos no se acercando a un valor numérico l determinado; en estos casos la distancia entre sus elementos y un valor numérico es cada vez más grande. **Segundo Momento:** Cuando la distancia entre los elementos de una sucesión y un valor l es cada vez más pequeña, entonces la sucesión tiene un tope o "límite", y es convergente a dicho valor. Cuando la distancia entre los elementos de una sucesión y un valor l es cada vez más grande, entonces la sucesión no tiene un tope o límites, y no es convergente.

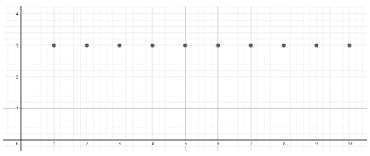
3.3.2.2 Secuencia Didáctica Parte 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones.

En la segunda parte de la secuencia didáctica, se trabaja el segundo momento y el tercer momento, luego de finalizar las respuestas escritas de los estudiantes, la profesora encargada del curso en el cierre de la clase la profesora, formalizará el concepto de definición de límite de sucesión mediante noción de **distancia** vista en la primera parte de la secuencia y en esta segunda parte. Es decir: $a_n = l \iff |a_n - l| < \varepsilon$.

A continuación, se realizará una tabla con las preguntas de cinco problemas de un total de siete, ya que las otras dos tienen el mismo propósito (anexo)

Tabla 6

Tipo de problema (Tareas)	Técnicas matemáticas	tecnología-teórico	Propósito investigativo
Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{4n^2+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:  T_1: Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico. T_2: Dado su análisis en la pregunta anterior ¿Por qué concluyó que ese es o no es el	τ: Interpretación de gráfico τ: Distancia entre términos de la sucesión y candidato de ser límite.	ϑ_1: "Observando el gráfico posible candidato a límite el número 4" ϑ_2:" la distancia entre los términos de la sucesión y número 4 es cada vez más pequeña" θ: límite de sucesión mediante el concepto de distancia θ: Convergencia de sucesión	**Segundo Momento:** Reconocen, desde la gráfica, sucesiones que tienen un comportamiento convergente, y lo diferencian de sucesiones que tienen un comportamiento divergente. **Tercer Momento:** En el caso de sucesiones que sean convergentes, proponen hipótesis sobre el valor hacia el cual convergen, o sea el valor que es su límite.

límite de la sucesión y no otro valor?			
Dada la siguiente sucesión $3, 3, 3 \ldots, 3, \ldots$ donde su representación gráfica es:  T_1: Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico. T_2: Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyó que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro valor? T_3: Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ con $a \epsilon R$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifique	τ: Interpretación de gráfico τ: La distancia entre los términos de la sucesión y el candidato a límite es pequeña (o cero)	ϑ_1: "Observando el gráfico posible candidato a límite el número 3" ϑ_2:" la distancia entre los términos de la sucesión y número 3 es cada siempre 0" ϑ_3:" la distancia entre los términos de la sucesión y la constante a es siempre 0" θ: límite de sucesión constante mediante el concepto de distancia θ: Límite de una sucesión constante θ: Convergencia de sucesión constante	**Tercer Momento:** Establecen el valor hacia el cuál convergen las *sucesiones constantes*, en cuyo caso el límite es la constante y se anota: $a = a, con\ a \epsilon R$.
T_1: Dado al estudiar de los problemas anteriores, podría identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifique	τ: La distancia entre los términos de la sucesión y el candidato a límite es pequeña τ: Si los términos de la sucesión en el denominador crecen más rápido que los términos del numerador, converge a 0	ϑ_1: "ocurre que los términos de la sucesión en el denominador siempre son más grandes que el numerador, entonces es convergente" ϑ_2: "si ocurre que los términos de la sucesión en el numerador son más	**Tercer Momento:** En el caso de sucesiones que sean convergentes, proponen hipótesis sobre el valor hacia el cual convergen, o sea el valor que es su límite.

	τ: Si los términos de la sucesión en el numerador crecen más rápido que los términos del denominador, la sucesión no es convergente τ: Si los términos de la sucesión en el numerador y en el denominador crecen de igual manera, entonces la sucesión converge a un número distinto de 0	grandes que el denominador, entonces la sucesión no es convergente"	
T_1: Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifique	τ: La distancia entre los términos de la sucesión y el candidato a límite es pequeña τ: Si los términos de la sucesión en el denominador crecen más rápido que los términos del numerador, converge a 0	ϑ_1: "como los términos de la sucesión en el denominador siempre son más grandes que el numerador, entonces la sucesión converge a 0" θ: Definición de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	**Tercer Momento:** Establecen el valor hacia el cuál converge la sucesión cuyo término general es 1/n, en cuyo caso es 0, y se anota: $\frac{1}{n} = 0$

3.3.2.3 Secuencia Didáctica Parte 3: Calculando límites de sucesiones.

En la tercera parte de la secuencia didáctica, se trabaja el cuarto momento y quinto momento, luego de finalizar las respuestas escritas de los estudiantes, la profesora encargada del curso en el cierre de la clase establece que el límite de la suma de dos sucesiones convergentes es igual a la suma de los

límites de cada sucesión. Es importante que comprendan que esto ocurre, si y sólo si, cuando los límites de ambas sucesiones existen, es decir:

Si $a_n = l$ y $b_n = h$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = l + h$

A continuación, se realizará una tabla con los problemas, se tomarán en cuenta sólo dos problemas de los cuatro en total, mientras que los otros dos problemas tienen el mismo fin que los que se van a analizar (anexo).

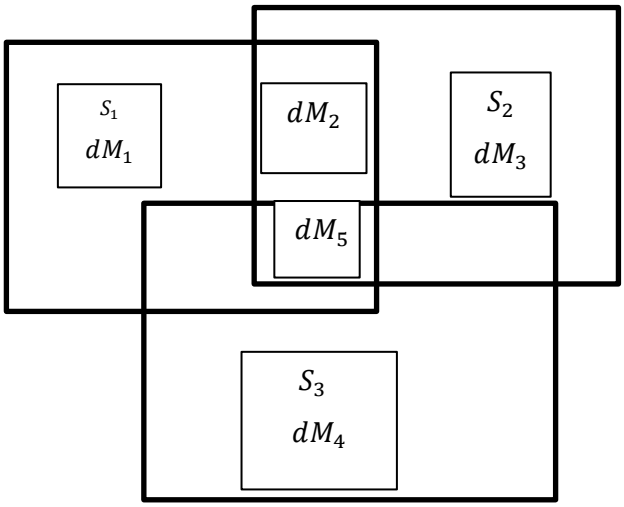
Tabla 7

Tipo de problema (Tareas)	Técnicas matemáticas	tecnología-teórico	Propósito investigativo
Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión $\frac{6n+2}{n}$. Para esto observa lo siguiente: $\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{1}{n}$ T_1: ¿Cómo podrías usar esta equivalencia algebraica para calcular el límite? Una compañera realizó lo siguiente: $\frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n}$ $= \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ Otra compañera realizó lo siguiente $\frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n}$ $= \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$	τ: Factorizar expresiones algebraicas τ: Justificar mediante el concepto de distancia τ: Para valores de n la sucesión se va acercando cada vez al candidato de límite	ϑ_1: "La distancia entre los términos de la sucesión y candidato a límite 0, es cada vez más grande. Por otro lado, la distancia entre los términos de la sucesión y candidato a límite 6, es cada vez más pequeña" ϑ_2: "Para los valores de n cada vez más grande, los términos de la sucesión se van acercando al número 6, por lo tanto, el límite de la sucesión converge a 6" θ: Definición de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	**Cuarto Momento:** Elaboren técnicas para calcular límites de sucesiones utilizando los límites de sucesiones establecidos en la parte II de la secuencia.

T_2: ¿Qué opinas? ¿Quién tendrá razón? Justifique			
T_1: Calcule el límite de la siguiente sucesión: $\frac{-7n^5+2}{n^5}$	τ: Factorizar expresiones algebraicas τ: Utilizan el método del problema anterior τ: Para valores de n la sucesión se va acercando cada vez al cierto número	ϑ_1:" utilizando el método anterior, al factorizar nos queda que: $-7+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^5}$. Por lo visto la clase anterior, el límite de una sucesión constante, es la misma constante y la otra sucesión converge 0, por lo tanto, el límite de la sucesión es -7" ϑ_2:" para valores n muy grandes, los términos de la sucesión se van acercando cada vez más a -7" θ: Definición de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	**Quinto Momento:** Elaboren técnicas para calcular límites de sucesiones utilizando los límites de sucesiones establecidos en la parte II de la secuencia. Realicen equivalencias algebraicas para calcular límites de sucesiones.

En la primera parte de la secuencia (S_1) es cuando los estudiantes empiezan explorar el concepto de distancia ($primer\ momento: distancia\ (dM_1)$), el propósito de esta parte de la secuencia es la exploración de sucesiones mediante el concepto distancia entre la sucesión y los elementos de estas, es decir, que va sucede cuando n es cada vez más grande, ¿la distancia es cada vez más pequeña o cada vez más grande?, luego usar esta técnica para justificar en la segunda parte de la secuencia (S_2), donde aquí ya se teoriza el concepto, para luego utilizar estas herramientas vista en las otras dos partes de la secuencia, tanto numérico y gráfico ($segundo\ momento: distancia\ (dM_2)\ y\ tercer\ momento\ (dM_3)$), el propósito de S_2 es realizar hipótesis y determinar límite de sucesión, además de justificar límites "conocidos", entonces es importante que la secuencia S_1, los estudiantes comprendan el concepto de distancia para justificar límite de sucesión, que esta es la base para la parte S_2. Para el desarrollo de la tercera parte de la secuencia didáctica (S_3), el propósito es de calcular límite de sucesiones utilizando álgebra o justificando mediante el

concepto de límite para el cálculo, donde justifican utilizando las tecnología-teoría, aprendidas en s_1 y S_2 ($cuarto\ momento$: $distancia\ (dM_4)\ y\ quinto\ momento\ (dM_5)$, en el siguiente cuadro se resumen las conexiones entre las tres partes de la secuencia didáctica.



Como se puede observar, dM_5 se considera en la intersección entre las tres partes, ya que se justifica el cálculo algebraico, donde los estudiantes podrán usar cualquier de las técnicas aprendidas para justificar el cálculo de límites de sucesiones, estas sean gráfico, numérico y algebraico, y para la justificación utilizan el concepto de distancia, es decir, la distancia entre los distintos términos de la sucesión y posible límite es cada vez más pequeña.

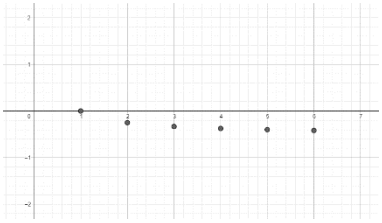
3.3.3 Fases 3 del Estudio: Cuestionario Posterior

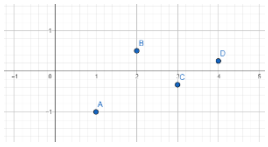
El cuestionario posterior se trabaja el sexto momento, es decir el momento de la evaluación, los estudiantes podrán justificar sus respuestas utilizando cualquier de los registros enseñados en la secuencia didáctica, donde lo esencial es utilizar el concepto de distancia para su justificación.

A continuación, se realizará una tabla con los problemas, indicando que parte de la secuencia se está evaluando, indicada con el apartado de propósito, cabe recalcar que el estudiante podrá usar cualquiera de las técnicas aprendidas en las tres partes de la secuencia didáctica.

Tabla 8

Tipo de problema (Tareas)	Técnicas matemáticas	tecnología-teórico	Propósito investigativo
T_1: Explique con sus palabras qué es para ti el concepto límite de sucesión	τ: Definición de límite de sucesión	ϑ_1: "Es el valor que tiende los términos de la sucesión" θ: Definición implícita de límite de sucesión	Identificar noción de límite de sucesión Comparación cuestionario previo y post. Secuencia didáctica para evaluar: S_1, S_2, S_3
T_2: Calcule: $\frac{3+27n}{81n^2-1}$	τ: Factorizar expresiones algebraicas τ: Para valores de n la sucesión se va acercando cada vez al cierto número	ϑ_1:" utilizando el método anterior, al factorizar nos queda que: $\frac{3}{81n^2-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{27}{81n-1}$ Luego la sucesión converge a 0, ya que en el denominador el término de la sucesión crece más rápido." ϑ_2:" para valores n muy grandes, los términos de la sucesión se van acercando cada vez más a 0" θ: Definición de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	Secuencia didáctica para evaluar: S_3
T_3: Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$. Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?	τ: Concepto de distancia para la justificación de límite de sucesiones τ: Sucesión convergente	ϑ_1: "la distancia entre los términos de la sucesión y el número 3 es cada vez más pequeña, entonces la sucesión es convergente a dicho número"	Secuencia didáctica para evaluar: S_1

		θ: Justificar convergencia de límite de sucesión, mediante el concepto de distancia	
T_4: Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$ 	τ: Interpretación de gráfico τ: Distancia entre términos de la sucesión y candidato de ser límite.	ϑ_1:" la distancia entre los términos de la sucesión y número 0,5 es cada vez más pequeña" θ: límite de sucesión mediante el concepto de distancia θ: Convergencia de sucesión	Secuencia didáctica para evaluar: S_2
T_5: Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**.	τ: Concepto de distancia para la justificación de límite de sucesiones τ: Sucesión no convergente τ: Factorizar expresiones algebraicas τ: Para valores de n la sucesión va creciendo cada vez más.	ϑ_1:" para valores n muy grandes, los términos de la sucesión van creciendo cada vez más, entonces la sucesión no es convergente" ϑ_2:" los términos de la sucesión en el numerador crecen más rápido que en el denominador, por lo tanto, la sucesión no es convergente." θ: límite de sucesión mediante el concepto de distancia θ: Convergencia de sucesión	Secuencia didáctica para evaluar: S_1, S_2, S_3

T_6: Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **Justifique** si tiene límite o no.	τ: Concepto de distancia para la justificación de límite de sucesiones τ: Interpretación de gráfico	ϑ_1:" Graficando los términos de la sucesión, se puede observar que va a converger a 0."  ϑ_2:" los términos de la sucesión en el denominador van creciendo cada vez más, en cambio en el numerador va cambiando entre -1 y 1, por lo tanto, la sucesión cada vez se va acercando a 0".	Secuencia didáctica para evaluar: S_1, S_2, S_3

CAPITULO 4

4.1 Análisis a posteriori

En este apartado se van a exponer las respuestas de los estudiantes y también las intervenciones de la profesora que se realizó durante la clase, y las preguntas abiertas, cuando se presentaba la formalización del concepto. Cabe destacar que a la docente se le explico las tres partes de la secuencia didáctica mediante reuniones presenciales y virtuales. Además, se le explico que debía ser una profesora guía y no intervenir en los procesos de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica. Por último, se realizaron tres presentaciones (anexo), una por cada cierre de cada parte de la secuencia didáctica para formalizar los conceptos.

La anotación que se ocupará a continuación es:

P: Profesora

E_i: Estudiante i-nesimo

R_i: Respuesta al problema con i el problema a resolver

C: Comentarios generales

Además, en las clases se formaron grupos al azar, aun así, las respuestas eran de forma individual. Estos grupos están formados de la siguiente forma:

grupo 1: $E_1, E_2\ E_3$

grupo 2: E_4, E_5, E_6

grupo 3: E_7, E_8

En cada apartado de la secuencia didáctica se expondrá las respuestas de cada estudiante y luego la intervención de la profesora de las clases grabadas, es decir, Inicio, desarrollo y cierre de clase.

4.1.2 Análisis a posteriori: Cuestionario previo

Este apartado de análisis, se rige el siguiente objetivo específico:

Identificar las comprensiones de límite de sucesiones que tienen estudiantes de tercero año medio en el electivo de matemáticas límite, derivada e integrales, antes de la implementación de la secuencia didáctica, mediante el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

Dada las respuestas que se muestran a continuación, se realizaron dos clases de repaso, que se consideraba fundamental para realizar las tres partes de la secuencia didáctica, estos repasos fueron: graficar sucesiones, factorización, cálculo de área sombreada e interpretación de gráfico.

4.1.2.1 Respuestas Estudiantes

Tabla 9

E_i	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
E_1	A una distancia de 6	No identifica los puntos	No grafica	No calcula el área	No factoriza	Si ya que la diferencia es mínima y es menor probable que altere un resultado	No responde
E_2	A 6 unidades de distancia	Identifica los puntos	No grafica	No recuerdo la fórmula para calcular el área de un círculo, pero debería calcular el área de uno de 4cm de radio y el área de uno de	Intenta factorizar	Si es, ya que al pasarlo a fracción sería 1	No conozco el concepto

				12 cm, para luego restarlos y obtener el área sombreada			
E_3	6 números de distancia	Identifica los puntos	-	No calcula	No factoriza	No sería uno porque si le agregamos 1 daría como resultado 1,999	No responde
E_4	6 números de distancia	Identifica los puntos	-	Si calcula el área sombreada	No factoriza	No, porque aún faltan algunos decimales para que sea exacto, aunque si lo aproximan ahí sería uno, pero aún no sería un 1 exacto	Es uno dividido por el dato que se muestra por eso será decimal
E_5	6 espacios de distancias	Si identifica los puntos	-	No calcula el área	No factoriza	Por parecer ser 1 tiene que pasar por números negativos primeros y para que sea 0,999… no tiene fin, no seria 1	Que puede ser un término para otra etapa
E_6	El -2 se encuentra a 6 números del -4	Si identifica los puntos	-	Confunde el radio con el diámetro, el proceso para calcular el área sombreada es correcta	Si factoriza, pero no simplifica	En algunos casos podría considerarse 1, por ejemplo, en construcciones donde una medida nunca será perfecta,	Para mí, sería como un “tope” o “máximo” que se le pone a ciertos números o áreas geométricas

						por lo que se utiliza lo más cercano a ella. Entonces sí se considera que 0,999… es 1	
E_7	La distancia que hay del -2 al 4 es de 6	Identifica los puntos	-	No calcula el área sombreada	Si factoriza y simplifica	No, ya que son en sí números infinitos y van a continuar siendo infinitos sin llegar a un número entero.	Para mi concepto de límite de sucesión es que hay un cierto límite en este caso en los números y de la sucesión es que cuando llegan a un límite los números $n$reemplaza o toma los valores grandes.
E_8	El -2 del 4 se encuentra a una distancia 6	Si identifica los puntos	-	No calcula el área sombreada	Factoriza y simplifica	Dado que entre dos números distintos hay infinitos números racionales	Es el valor al que tienden los términos de la sucesión cuando n toma valores muy grandes
C	No hay problema respecto al calcula distancia entre dos números	No hay problema en identificar par ordenado en la gráfica	Claramente hay deficiencia en graficar sucesiones. Se repasa cómo	Si algunos tienen la idea de cómo calcular el área sombreada, no recuerdan la fórmula de la circunferencia. Como en la	Ninguna respuesta se realizó una apta factorización y simplificación. Se repesa factorización: cuadrado de	El concepto infinito está en juego en este problema, donde la mayoría concluye que no puede ser 1, ya que hay	Se habla de términos para valores muy grandes de n. Además de que hay un “tope” que alcanza la sucesión

			graficar sucesiones	secuencia no es importante el cálculo en sí, se le recuerda la fórmula y la pueden revisar al momento de implementar la secuencia didáctica.	Binomio y suma por su diferencia	infinitos decimales, esto que no concluyen que en algún momento en el infinito el 0,999… es igual a 1	Estas respuestas intuitivas de límite de sucesión son interesantes asumiendo que no conocen el concepto. Recordando que son estudiantes del electivo de estadística y probabilidades.

Conclusiones:

Dado a las respuestas de los 8 estudiantes en el cuestionario previo, se repasó los siguientes: concepto de sucesión, graficar sucesiones y factorización. Es esencial para esta secuencia didáctica que los estudiantes comprendan el concepto de sucesión, ya que en las tres partes de la secuencia se utiliza dicho concepto. La gráfica es la base de la primera y segunda parte de la secuencia didáctica, esto es para intuir y establecer límites de sucesiones respectivamente. Y la factorización es para el cálculo de límites de sucesiones, para la tercera parte de la secuencia didáctica. El repaso de estos contenidos se realizó en 2 clases antes de la intervención de la secuencia didáctica.

Recordemos que este cuestionario previo responde el siguiente objetivo:

Identificar las comprensiones de límite de sucesiones que tienen estudiantes de tercero año medio en el electivo de matemáticas límite, derivada e integrales, antes de la implementación de la secuencia didáctica, mediante el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

Observemos que el concepto de límite de sucesión el 16% aproximadamente indica que se imaginan que es un tope, máximo o mínimo de la sucesión, donde estos estudiantes el concepto de límite tendrá

un fin en algún momento y el mismo porcentaje para el problema de $0{,}999\ldots$ en fracción es igual a 1, donde el infinito es un concepto que no es propio de cada estudiante. Podemos concluir que antes de la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes el concepto infinito y límite de sucesión es deficiente.

A continuación, se realizará los análisis y la tabla de las respuestas de los estudiantes de la implementación de la secuencia didáctica.

4.1.3 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica

Este apartado de análisis, se rige el siguiente objetivo específico:

Identificar y describir reflexiones de estudiantes durante el proceso de estudio de la secuencia didáctica implementada en el aula.

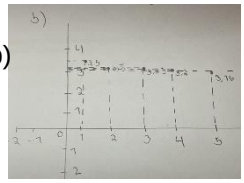
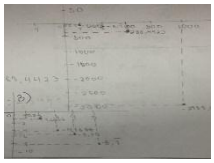
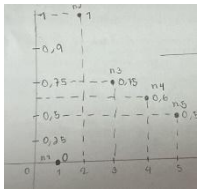
El análisis de la secuencia didáctica se dividirá en las tres partes que se expuso en el análisis que se realizó en el análisis a priori. Además, en cada apartado se evidenciará las respuestas de la secuencia didáctica y su respectiva evidencia de video en tablas, para concluir de forma general. A continuación, se analizará la secuencia didáctica (S_1)

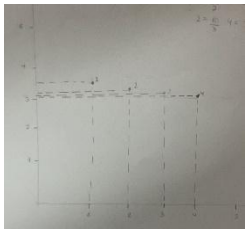
4.1.3.1 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica (S_1)

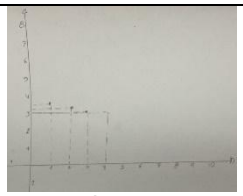
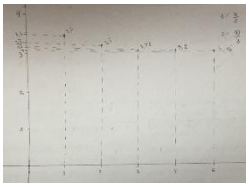
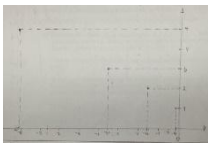
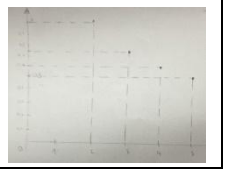
A continuación, se expondrán las respuestas de los estudiantes de un total de 5 clases registradas en audiovisual, donde se realizó su respectiva tabla con los comentarios de los E_I y la P. Primero se evidenciarán las respuestas de la secuencia didáctica y luego las audiovisuales.

Respuestas Estudiantes: (S_1)

Tabla 10

Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones				
E	R_1	R_2	R_4	R_5
E_1	a) Todos valen menos que la aproximación de π b) Todos son números mayores que 0	a) Mientras más alto es el número divisor, más esta del 3 y en los resultados decimales del 10 y al 6, dan números múltiplos de 3 b)  c) Según el gráfico expuesto, ningún valor de n tocará el número 3	a) Solo realiza los cálculos, no concluye b)  c)No realiza conclusión	a) Solo realiza los cálculos, no concluye b)  c)No realiza conclusión
E_2	a) Se hace menor a medida que aumenta la cantidad de lados b) El área de las circunferencias es siempre la misma, pero lo de los polígonos regulares aumenta si tiene más lados, mientras más lados, más cercana es el área del polígono regular al	a) Mientras más grande sea n, menor será la distancia a 3 b) no realiza gráfico c)no responde	a) Que mientras más grande el valor de n, es mayor la distancia al 0. Lo mismo sucede con el 3 y el 5 b) no realiza gráfico c)Que la compañera que indica para ningún	No responde

	área de la circunferencia		término de n, la gráfica tocará al número 0 está en lo correcto, ya que la sucesión se aleja cada vez más del 0	
E_3	Solo realiza cálculos	Solo realiza cálculos	Solo realiza Cálculos	Solo realiza cálculos
E_4	a) Que entre más lados el número más se va alejando b) Yo concluyo que los números entre más lados los números son menores, quiero decir que disminuye	a) Entre más grande sea el número que se resta (3,6,10) el número final se aleja más o se distancia más. b)  c)no responde	Solo realiza cálculos	a) La distancia entre el número cero es la misma ya que al restar por cero da el mismo resultado b) c)Se puede concluir que estamos de acuerdo con el segundo compañero ya que ningún término de la sucesión es cero, pero solo se acerca mucho.
E_5	a) Se mantienen en la misma distancia (no se esparce totalmente) b) Que si o si tendrán los mismos lados	a) Mientras más alto el valor, el resultado será negativo y se aleja más del 10	Solo realiza cálculos	Solo realiza cálculos

		b)  c)no responde		
E_6	a) La diferencia de la circunferencia y el polígono va a ir disminuyendo cuando el polígono tenga más lados. b) Cuando un polígono regular tiene más lados, la diferencia entre la circunferencia y el polígono será menor	a) Se puede concluir, que mientras más alto es el número, más grande será la distancia entre el valor de la sucesión y el número b)  c)No responde	a) Cuando se compara con el cero la sucesión queda igual mientras más alta es la sucesión mayor distancia hay b)  c)Estamos de acuerdo que no tocará el cero porque se aleja	a) Cuando se compara el valor de la sucesión con el número cero esto queda igual. Y comparando con 3 y 5 mientras más pequeño es el valor de la sucesión la distancia será mayor b) c)Estamos de acuerdo en que el valor no tocará el número cero, pero el valor se acercará mucho al cero, mientras más alto sea el valor de la sucesión
E_7	a) Entre más lados tenga el polígono, más pequeña será su diferencia con el área de la circunferencia	a) Mientras más grandes sea el número con el que restamos los valores de la sucesión, mayor será la distancia entre ellos y los	a) La distancias entre el número 0 y los valores de la sucesión dan como resultado los	a) Realiza cálculos b) 

	b) Mientras más lados tenga un polígono, el área de estos se va acercando más a 3,14 que es π	distintos valores que nos dieron (3, 6 y 10) b) c)no responde	mismos valores de sucesión. Respecto a las distancias entre el número 3 y 5 los valores de sucesión, entre más pequeño sea el valor de la sucesión más grande sea la distancia. b) no realiza gráfico c)Estamos de acuerdo con el otro compañero porque ningún término de la sucesión es 0, se acerca mucho al 0 pero no lo toca	c)no responde
E_8	a)Solo realiza cálculos b) La circunferencia de los círculos son iguales, en cambio el área de los polígonos varía entre sí mismos.	a) Podemos concluir que en cada sucesión va aumentando su valor en la distancia b) no realiza gráfico c)no responde	a) Se puede concluir en la sucesión en la que se indica en el gráfico es que entre más valores n en x en y los valores de la distancia de los números negativos será más baja	Solo realiza cálculos.

			b) no realiza gráfico c)no responde	
C	a) el 50% responde adecuadamente. Resumiendo, concluyen que entre más lados tenga el polígono regular, más se va acercando a el área de la circunferencia, o la distancia del área entre ellas se va disminuyendo b) 50% Responde adecuadamente. Interesante que 2 respuestas se enfocan en la aproximación del área del polígono regular al área de la circunferencia que esta es el número π	a) el 33% responde lo esperado, que la distancia entre los términos de la sucesión y el número 3 es más pequeña comparada con los números 6 y 10. Obstáculo: definición de distancia números muy pequeños (negativos) o números muy grandes (distancia más lejana) b) 50% realiza el gráfico correspondiente. La mayoría no responde, lo más probable por tiempo o solo un compañero realiza el gráfico y concluyen compartiendo sus opiniones. c) El 8% responde lo esperado	a)el 50% concluye que la distancia entre los términos de la sucesión y los números 0, 3 y 5, es cada vez más grande. b) El 16% realiza el gráfico y nadie realiza conclusiones. c)El 25% concluyen que la compañera que indica que ninguno valor para n la gráfica tocará el número 0	a) el 8% indica que la distancia entre los términos de la sucesión y el 0 es igual, pero para la distancia entre el número 3 y 5 es cada vez más grande. b) el 41% realiza el gráfico y nadie realiza conclusiones. c) el 16% concluye que para ningún término de la sucesión la gráfica tocará el número 0, pero la distancia es cada vez más pequeña.

Conclusiones

Observemos que en esta parte de la secuencia (S_1) al estudiar la distancia entre los elementos de la sucesión cada vez más grande respecto a un valor dado, concluyen que la distancia es más pequeña (50% pregunta 1, 8% pregunta 2 y 25% pregunta 3) e indican que nunca se topará, que es lo que se esperaba, ya que el concepto de límite se formaliza al finalizar la s_1, donde la profesora encargada presentará mediante unas diapositivas la definición mediante distancia.

4.1.3.2 Análisis de evidencia en videos: S_1

En la S_1 como es el inicio y exploración, para el cálculo de límites de sucesiones, se realizó tres clases para realizar el cierre en este apartado.

En la tabla que se presentará a continuación es de las tres clases que se realizó la parte s_1, donde se muestran el inicio, el desarrollo y cierre, además los comentarios realizados por la profesora y estudiantes. Al final se realizará una conclusión del cierre de la s_1.

Clase 1: Se enfoca en el primer encuentro: Aproximación del área de la circunferencia a través de área de polígonos regulares.

Tabla 11

Momento	P	$E;P$	C
Inicio	Explica el primer problema, la aproximación del área de la circunferencia a través de polígono regulares.	En general se preocupan de preguntar sobre la fórmula de la circunferencia y si es necesario calcular el perímetro	En este momento los estudiantes estaban incómodos por ser grabados, es por esto por lo que en la primera clase la interacción entre profesora y estudiante fue escasa.
Desarrollo	Explica cómo calcular el área de cada polígono regular inscrito en la circunferencia.	Dudas generales de la fórmula de los polígonos inscritos	Los estudiantes se enfocan demasiado tiempo en realizar los cálculos.
Cierre	Se realizan los cálculos en la pizarra para comparar los resultados de los grupos	Los estudiantes comparan sus resultados y empiezan a responder los problemas de la secuencia didáctica	En este momento empiezan a realizar comentarios grupales de lo que va pasando sobre la circunferencia y los polígonos regulares.

Clase 2:

Tabla 12

Momento	P	$E; P$	C
Inicio	Se recuerda sobre el problema del área de la circunferencia y que está ya no se debe responder se deben enfocar en los siguientes problemas.	No realizan comentarios	Primer encuentro de sucesión y un número para la introducción del concepto distancia para la justificación del cálculo de límite de sucesiones.
Desarrollo	Se mantiene constantemente respondiendo dudas (cálculo de distancia). Se realiza un recordatorio sobre la distancia entre números.	E_4 : debo calcular la distancia entre los valores de la sucesión y el número tres, luego el seis y el 10 P: si, exactamente calcular esa distancia entre los distintos valores. E_4: Debes compararlo con el número 3 y luego con el número 6 por último, con el 10 E_5: …entre más grande el número, el número más se va alejando, o sea del valor, pero hay números negativos P: recuerdan qué el valor debe ser la distancia entre dos números E_4: positivos P: si, recuerden que el valor absoluto es siempre positivo	Los estudiantes observan que va sucediendo *"algo extraño"* entre los términos de la sucesión y los distintos números, que algunos se van alejando y para otro se va acercando.

		E_4: Entonces, entre más grande sea el valor, más distantes van a hacer. E_5: Aquí podemos concluir que la distancia de la sucesión 100 y 1000, hay una distancia de 0,001 P:…me estás diciendo algo bien particular, calculaste la distancia de cada término al 3 observarlas, y puedes elegir una conclusión particular. Luego vas a observar la distancia obtenida con el 6 y después observar la distancia obtenida con el 10… luego realizar una conclusión general para esos tres casos. E_7: La distancia entre las sucesiones va aumentando más, mediante la sucesión sea más grande E_3: la distancia va disminuyendo con el número 3, pero si el número es mayor que 3 la distancia va aumentando. Cuando vi que si el número es 4 o 6 la distancia aumenta.	
Cierre			En este apartado no se realiza cierre, ya que para la siguiente clase se debe terminar los problemas de la última parte de la S_1

Clase 3:

Tabla 13

Momento	P	$E; P$	C
Inicio	En esta clase sólo tendrán 20 minutos para terminar los siguientes dos problemas, para luego realizar el cierre de la clase.	No realizan comentarios	
Desarrollo	La profesora constantemente se va moviendo dentro del aula, respondiendo dudas sobre cálculos, además de guiar a que es lo que están observando (los estudiantes) de la distancia entre los términos de las sucesiones y los distintos números.	E_2: este es mayor que ese, entre más grande sea el número, más grande será la distancia. E_1: si eso me di cuenta E_2: Me di cuenta de que los decimales van siendo más pequeños. E_1: si verdad, la distancia antes era 0,99999, después 0,3333 y después 0,0000… y no llegaba a tocar al número.	Se debe destacar que los estudiantes preguntaban mucho sobre cálculos y estas dudas no se han considerado ya que no van al caso del objetivo de este trabajo. En este momento, la exploración de las sucesiones a través del concepto de distancia, los estudiantes en general observan mediante el gráfico y sus cálculos, que los términos de las sucesiones y los números, que solo uno o ninguno se va acercando, y para los otros solo se alejan.
Cierre	Se realiza una exposición de tres problemas: el del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscrito en ella y dos sucesiones (uno convergente y otro no)	P: Si tuviera otro polígono regular, en la misma circunferencia, pero ahora de 96 lados. ¿Cómo sería la diferencia del área de este polígono y la circunferencia? Respecto al	En el problema del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscritos en ella, algunos estudiantes intuitivamente observaban que a medida que los lados

	Se realiza preguntas donde los estudiantes van respondiendo, según lo que respondieron, pero también algunos cambian sus respuestas (verbales, en estos momentos los estudiantes, se les comentó que no pueden cambiar sus respuestas en la secuencia)	diferencia el área de la circunferencia y el polígono de 12 lados, sabrían si sería igual, mayor o menor E_2: Como la circunferencia es igual todo el tiempo, como el polígono tiene más lado va a estar más cercana al área de la circunferencia. P: ¿por qué podemos decir que el área de ese polígono va a estar más cercana a la circunferencia? E_4: El área del polígono va a ser más grande, ya que tiene más lados y abarca más el sector. P: ¿Cómo lo verificaron ustedes? E_7: con la diferencia entre el área de la circunferencia y el polígono P: ¿Es necesario realizar el cálculo del polígono de 96 lados para concluir lo anterior?… Ustedes están concluyendo que tengo más lado el polígono ¿Qué sucede? E_2: es más chica la diferencia P: ¿Qué sucede con la diferencia entre el área de la circunferencia y los sucesivos polígonos	aumentaban en los polígonos regulares, el área de esta se va acercando a la circunferencia. Para verificar lo anterior calcularon la "diferencia" entre sus áreas, que implícitamente la distancia que hay entre el área de la circunferencia y el polígono regular. Para los problemas de los términos de las sucesiones y los números, pudieron observar que los cálculos realizados y el gráfico, la distancia entre la sucesión y el número 3 en el primer problema es cada vez más pequeña, por otro lado, el siguiente problema para ningún número la distancia entre los términos de la sucesión se va acercando, si no que se van alejando cada vez más. Antes de la formalización del concepto se realiza el primer y segundo momento mencionados en el análisis a-prori. La profesora formaliza el concepto: *"Para todo valor real $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número natural N tal que todos los términos de la sucesión, a partir de un cierto valor natural n mayor que N, la distancia entre*

		regulares inscritos en ella, cuando la cantidad de lados van aumentando? E_4: Se hace más pequeña cada vez P: podemos decir que tanto más pequeña va a ser esa diferencia E_7: Yo pienso que más lado, va a ser más chica, pero no sé qué tan chica puede ser P:…retomando el problema 2 de la secuencia… Si se desea analizar la distancia entre los valores de la sucesión y el número 30 ¿Qué concluyen ustedes sin realizar cálculos? E_2: la distancia es mayor E_8: va a ser mayor la distancia P: En base a lo anterior ¿Para cuáles de los 4 números la distancia entre los valores de la sucesión es cada vez más pequeña o cada vez más grande? E_2: En el 3 es más pequeña y el 10 es mayor	*los términos de la sucesión y un número l es cada vez más pequeña, cuando esto suceda diremos que la sucesión es* ***convergente****, o también podemos decir que tiene* ***tope****, o que la sucesión* ***tiende a*** *l o que la sucesión* ***tiene límite****.* *Algebraicamente se tiene*: $\|a_n - l\| < \epsilon$" A continuación, se vuelve a retomar los problemas, ahora los estudiantes hablan sobre el tope o convergencia de la sucesión, es decir, utilizan la distancia para justificar los problemas.

		P: Observando el gráfico de la sucesión, que podemos comentar respecto a la distancia entre los distintos valores de la sucesión y los números 3, 6 y 10 E_7: la distancia va disminuyendo al 3 P: y la distancia entre el 6 E_2: es mayor la distancia A continuación, ya se formalizo la obra matemática de límite de sucesión mediante el concepto de distancia y se retoma las siguientes preguntas: P: Reconsiderando el problema de Arquímedes…¿Qué podrían concluir respecto al área de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia, cuando la cantidad de lados aumenta cada vez más? Es decir, tendrá un tope E_2: si el 0 P: Por qué crees tú que es 0 E_2: ya que la diferencia se va acercando al 0 es decir, va a dar 0,00…	

		P: ¿Cuál sería el límite de las áreas de los polígonos respecto a la circunferencia? Todos: el 0 P: qué indica el 3 en este problema Todos: es el tope de la sucesión P: ¿ustedes creen que la gráfica tocará el número 3? Todos: no tocará el número 3 El otro problema, no es convergente P: si esta distancia aumenta, que podemos decir de esta sucesión E_1: No tiene límite E_7: está más lejos del 0, no lo tocará E_4: no es convergente E_8: que no tiende al 0 P: ¿Qué concepto recatamos hoy? E_3: convergente estar más cerca del número	

		E_7: épsilon P: ¿Qué representa el número épsilon? E_5: Representa un número pequeño P: ¿Qué otro concepto apareció? E_6: Límite P: ¿Qué era el límite? E_8: es el tope P: ¿Qué le voy calculando la sucesión para encontrar este tope? E_7: la diferencia E_2: la distancia	

Conclusiones

Observamos al momento de formalizar el concepto de distancia para estimar límite de sucesiones, los estudiantes empiezan analizar los problemas y relacionan sus respuestas en la secuencia, y por lo formalizado de la docente, donde comenta que si la distancia entre los distintos valores de la sucesión y un número dado, y esta distancia es cada vez más pequeña entonces hay tope, dejando claro que gráficamente no lo tocará nunca dicho número. Por ejemplo, en caso el problema de Arquímedes, indicador que el si los lados de los polígonos sean cada vez más, la diferencia entre el área de dicho polígono con la del círculo se va aproximando a 0, y en los siguientes problemas indican que existe límite de la sucesión cuando la distancia es pequeña y no existe cuando la distancia es cada vez más grande, comparando las respuesta en la secuencia se enfocaban en responder que la distancia es

cada vez más grande cuando los números van creciendo, como por ejemplo en el problema dos, visto en la tabla parte 1

En esta parte de la secuencia el estudiantado juega un rol protagónico para su aprendizaje, donde se trabaja con la noción de distancia para estudiar comportamientos infinitos, relacionando sus estudios con los comportamientos gráficos y estas herramientas serán fundamentales para las siguientes partes de la secuencia didáctica.

Dado lo anterior, es el núcleo de la secuencia didáctica, es decir, la base de todo lo que viene a continuación que es la S_2 y S_3, recordar la intersección de las tres partes de la secuencia vista en la fase preliminar.

4.1.3.2 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica (S_2)

A continuación, se expondrán las respuestas de los estudiantes que se realizó solo en una clase donde se registró en audiovisual, su respectiva tabla con los comentarios de los E_i y la P. Primero se evidenciarán las respuestas de la secuencia didáctica y luego las audiovisuales.

Tabla 14

Parte 2: Estableciendo hipótesis sobre límites de sucesiones							
E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
E_1	a) Es convergente porque podemos ver el comportamiento si los puntos tienden ir al 0	a) Si es convergente porque tiende a ir al -3,5 pero no lo subirá. b) Podemos analizar al observar el gráfico que al llegar a cierto	a) Este gráfico no es convergente porque… (deja la respuesta a media) b) no responde	No responde	No responde	No responde	No responde

	b)Por el comportamiento de los puntos que tienden ir hacia el 0 pero no lo sobrepasan	punto tienden a formar una línea recta					
E_2	a) Si, hacía el 0 b) Porque comienza a acercarse de a poco, deja de generar mayores distancias. El 0 es el número más cercano	a) Si, hacía el -3,5 b) Ya que la distancia al -3,5 es cada vez menor, ya no existe mayor variación no demuestra cálculos	a) No, es una sucesión divergente, no tiene límite b) Concluyó que no tiene límite, porque las distancias no se acercan a un número en específico, solo crece sin parar.	a) Sí, el 3 b) Ya que todos los términos de la sucesión corresponden al 3	A medida que se utilicen "n" más grandes, los términos deben poseer menor distancia entre ellos y estar cada vez más cerca de un número específico	Si, el 0, ya que, a medida que n corresponda a números más grandes, los términos serán cada vez más similares a 0, pero nunca 0	Sí, a, porque todos los términos de la sucesión corresponden a "a"
E_3	a) La sucesión tiende a 0 b) Porque cada vez es más mínima la diferencia entre los números que suceden, sin	a) tiende al 3,5 b) Porque nuevamente las distancias entre los números que suceden se van haciendo cada vez más pequeñas, en	a) Es una sucesión no convergente b) Porque según la gráfica, no parece tener límite,	a) Tiende al número 3 b) Porque se mantiene siempre en el mismo número, siendo el 3 el límite	Que la distancia entre los números de la sucesión vaya disminuyendo	Si existe un límite, el cual se encuentra en 0 o en los decimales de este (ej:	Si la sucesión siempre es a, entonces el resultado de a será a, siendo a, el límite de sucesión.

	sobrepasar el número 0	la recta, por ejemplo, la distancia entre el número de sucesión 4 y 10 es casi ínfima	la distancia entre los números que suceden parece ser prácticamente la misma siempre, ni más, ni menos.			$\frac{1}{10000000} = 0.0000001$)	
E_4	a) La sucesión es convergente ya que cada vez se va acercados a su límite b) Ya que el número se está acercando al límite que sería 0	a) Es convergente porque su tope sería el -3,5 b) Porque que los números se están acercando a un límite y después se quedan ahí haciendo como una línea	a) No, no es convergente, ya que los números se alejan más b) Porque no tiene un límite los números solos se alejan más	a) Si es convergente, ya que tienen un límite que sería 3 b) Porque los números tienen un límite y no sobrepasan este.	Si el denominador el "n" esta elevado a 2 es convergente, y si los números de arriba el primero es negativo y el segundo positivo - a+b	No es convergente porque "n" no está elevado a "2"	Si es convergente ya que tiene un límite que sería "a"
E_5	a) Es convergente porque la distancia se hace más pequeña	a) Si es convergente porque llega hasta cierto punto el cual es su tope	a) No es convergente b) No lo es porque la distancia va	a) Es convergente b) Es convergente porque la	Ver si el "n" está al n^2 sabemos si es converge	No es convergente	Es convergente porque la distancia es igual y tiene

	b) Porque como muestra el gráfico, ninguna distancia se pasa del 0, puede tocarlo, pero no sobre pasar	b) Porque los puntos llegan hasta cierto punto y se mantiene una cierta distancia sin sobrepasar	aumentando y no tiene límite	distancia es igual para todos los puntos y puede estar en el límite (puede tocarlo)	nte o no (n^2= es converge nte n= no es converge nte)		límite (se mantiene)
E_6	a) La sucesión es convergente, tiende a 0 b) Porque los valores de la sucesión cada vez se acercan más a su límite, que es 0, la distancia cada vez se hace más pequeña	a) La sucesión es convergente, tiende a -3,5 b) Porque los valores de la sucesión cada vez se acercan más al -3,5, es decir, que la distancia va disminuyendo	a) La sucesión no es convergente b) Porque lo valores de la sucesión cada vez van aumentando la misma cantidad, por lo que no tiene límite	a) La sucesión es convergente, tiende a 3 b) Porque todos los valores de la sucesión tocan el número 3	Si el denominador tenga n^2 es converge nte	No, porque el denominador no está elevado al cuadrado	Si, ya que todos los valores serán iguales. (llegaron a su límite)
E_7	a) La sucesión tiende o converge a 0 b) Porque los puntos de la sucesión van acercándose	a) La sucesión si es convergente, y su límite sería, aproximadamente, -3,5 b) Porque los puntos en	a) La sucesión no es convergente, no tiende a ningún número, por lo tanto,	a) Es convergente, su límite es 3 b) Porque se muestra que los	Si el "n" en el denominador está elevado a 2, entonces es	No, porque el "n" esta elevado a 2 ni el número de arriba	Sí, porque la sucesión es constante, es decir, llega a su límite.

	más al 0, pero no pasa más allá de él. Entonces, el número 0 es su "tope" o límite	algún momento se mantienen más o menos constantes, y eso pasa cuando se van acercando al -3,5, es decir, lo que no los deja pasar o su límite sí sería -3,5	no tiene límite b) Porque los puntos de la sucesión cada vez se van alejando más de un número, y seguirán así porque no tienen límite	puntos se mantienen en 3, es decir, ya que llego a su límite.	converge nte. También, cuando converge, los números de arriba son negativos y después se suman, cuando no converge son positivos y se restan	está en negativo	
E_8	a) En el gráfico la sucesión que converge es el 10 ya que es su tope. b) Es el número ya que llegando al número 10 no sigue pasando ya que es su límite	a) El comportamiento si es convergente ya que tiene tope, tiene un límite. b) Su límite de sucesión está entre el -3 y el -4	a) No es convergente ya que se va alejando del tope y del 0 b) No tiene límite puede seguir subiendo sin tener límite	a) Si es convergente ya que su tope o límite es el 3 y aunque pongan más valores se mantiene igual b) El 3 es su límite ya que los puntos se mantienen en el tope	No responde	No responde	No responde

C	a) El 81% concluye que la sucesión es convergente al número 0, pero dos estudiantes indican que es convergente, porque la distancia es cada vez más pequeña b) el 75% indican que la sucesión converge o tiende al número 0, porque la distancia es cada vez más pequeña.	a) el 83% indica que si es convergente y la mayoría indica que tiende al número -3,5 b) el 75% responde lo esperado, dos estudiantes indican que el límite está entre el -3 y -4. Cinco estudiantes comentan que la distancia entre la sucesión y el número –3,5 es cada vez más pequeña. Por último, dos estudiantes indican que se imaginan una recta que los términos no lo sobrepasaron.	a) El 75% de los estudiantes indican que la sucesión no es convergente. b) El 75% responde lo esperado. Algunos indican que la distancia va aumentando cada vez más y no hay un número que se acerque a la sucesión.	a) El 100% indica que la sucesión converge al número 3 b) el 100% responde lo esperado. Algunas respuestas de los estudiantes son: Ya que el tope de la sucesión se mantiene en 3, entonces este es el límite.	El 16% indica que la distancia entre los términos de la sucesión y el número concreto debe ser cada vez más pequeña	El 27% indica que la sucesión si es convergente al 0, ya que cuando n es cada vez más grande se va acercando cada vez más al 0	El 63% indica que la sucesión es convergente y este es a

Conclusiones

Los estudiantes resuelven los problemas mediante el concepto de distancia (anexo) para responder los primeros cuatro problemas que es lo que se esperaba, el 78% aproximadamente responde utilizando el concepto de distancia para identificar si el límite de sucesión es convergente o divergente. Además, observemos que se apoyan desde la gráfica para identificar el posible límite de la sucesión. En la pregunta 2, al momento de analizar la gráfica los estudiantes comentan que existe el límite ya que hay un tope, y que este es -3,5 o esta entre el -4 y el $-3{,}5$ estudiantes indican que el límite es $-3{,}5$ porque la distancia de este número y los valores cada vez más grande de la sucesión, es cada vez más pequeña. Se concluye que el concepto de distancia es la técnica para justificar si el límite de la sucesión existe o no.

Aparece aquí un **obstáculo didáctico** en el momento de identificar cuándo el límite existe "algebraicamente" al analizar el denominador y el numerador respecto al exponente de n, donde se indica si el denominador es n^2 entonces existe el límite, pero si es $\frac{1}{n}$ el límite no existe por el análisis anterior. Este obstáculo podría haber ocurrido por la experiencia vivida alrededor de los problemas propuestos en la secuencia didáctica parte 2, en donde las sucesiones que resultaban convergentes el exponente mayor en el denominador era dos, mientras que, cuando eran divergentes, el exponte del denominador era uno.

Por otro lado, podría ser que los estudiantes concluyan que, por ejemplo: $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$, ya que $3 > 2$ por lo tanto ocurre que $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$. Este es un obstáculo didáctico reportado en la literatura y es muy frecuente encontrarlo en los procesos de aprendizaje vinculados a los números racionales (Brousseau, 1997; Espinoza et al, 2009). Dicho obstáculo se abordó al momento del cierre de la clase; esto se identificará al momento de analizar las evidencias audiovisuales.

A continuación, se presentará la evidencia audiovisual, donde se realizará comentarios respectivos de la profesora y estudiantes, y al final las conclusiones del cierre de la clase.

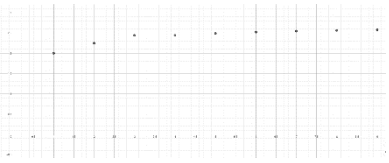
4.1.3.2 Análisis de evidencia en videos: S_2

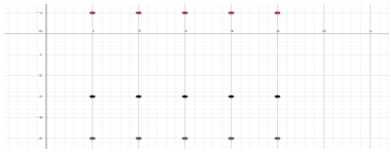
En la tabla que se presentará a continuación es la única clase que se realizó la parte S_2, donde se muestran el inicio, el desarrollo y cierre, además los comentarios realizados por la profesora y estudiantes. Al final se realizará una conclusión del cierre de la S_2.

Tabla 15

Momento	P	$E;P$	C
Inicio	Se realiza lluvias ideas para recordar que la distancia entre los términos de la sucesión y un posible límite cada vez es más pequeña es convergente, y si ocurre que es cada vez más grande no es convergente	Las respuestas fueron de forma general, que, si la distancia entre los términos de la sucesión y el candidato a límites es cada vez más pequeña, entonces la sucesión es convergente	En general es lo que se esperaba, que los estudiantes utilicen el concepto de distancia para justificar sus respuestas en esta parte de la secuencia.
Desarrollo	La profesora constantemente se va moviendo dentro del aula, respondiendo dudas sobre cálculos, además de guiar a observar los gráficos y los posibles candidatos a límites de la sucesión.	E_2: Profesora cuándo la sucesión tiene límite, si o si tiene que tocarlo en algún momento P: no es necesario E_8: Esta como igual se mantiene acá, puse la regla aquí y le cuesta mantenerse, pero no se acerca acá P: pero… ¿no se acerca dónde? E_8: al tope P: este es el eje E_8: entonces este sería su tope como por acá P: entonces ¿quién sería? Se quedan callados los del grupo 4	Algunos realizaron rectas o pusieron regla en el gráfico para verificar si la sucesión “tendría tope”. Aunque en las respuestas de la S_2 la mayoría argumentaba utilizando el concepto de distancia.

		P: miremos lo que hizo (E_{11}), qué fue lo que pusiste imaginariamente E_8: Una recta P: Ya que va pasando con los términos de la sucesión E_6: Se queda igual P: Quién sería el número tentativo para que sea el tope E_8: sería la mitad (Apunta en la gráfica que está entremedio) E_8: profesora en este otro problema no es convergente P: ¿por qué crees que no es convergente? E_8: no tiene tope, es decir no se mantiene… P: qué es lo que te confunde E_8: que se mantiene no sube ni baja P: en el gráfico indica que los puntos se mantienen infinitamente	
Cierre	Se realiza una exposición de tres sucesiones convergentes, una sucesión no convergente, la sucesión constante y determinar cuándo una sucesión podría ser convergente observando la sucesión. Se realiza preguntas donde los estudiantes van respondiendo, según lo que respondieron, pero también algunos cambian sus respuestas (verbales, en estos momentos los	P: ¿Existe el límite de esta sucesión? (primer problema) E_8: …si tiene límite P: ¿por qué crees que tiene límite? E_8: Porque en realidad entre el 8, o más o menos en el 9 y el 10, ya la… la pelotita, el círculo se va manteniendo, pero ya no puede ser… no puede seguir avanzando, se va haciendo más pequeña la diferencia P: Todos están de acuerdo con su compañera E_2: Si, el 0	Al momento de mostrar el gráfico, un estudiante indica que la sucesión es convergente, ya que se puede observar que no va a pasar de cierto número, y que este será su tope. Mientras que otros estudiantes, indican que la distancia es cada vez más pequeña y esta se va acercando a cero. En el segundo problema, cuando el candidato a límite está entre medio de dos números (entre -3 y -4), un estudiante indica que si

	estudiantes, se les comentó que no pueden cambiar sus respuestas en la secuencia)	P: ¿quién sería el 0? E_2: el límite es el 0 P: ¿Existe un límite para esta sucesión? (problema 2) Todos: si existe P: Quién me podría decir E_1: Es -3,5 P: ¿Por qué dices que el límite es 3,5? E_1: la distancia a ese número se empieza ver una estabilidad p: Como tu miraste E_{11} E_8: me imaginaba una línea, y no pasaba de esa línea P:…sabemos que existe límite entre -3 y -4 ¿se podrá encontrar exactamente qué número es el límite de dicha sucesión? Varios: Sí se podría P: ¿Cómo se podría encontrar ese número? E_2: Probando con números más grande P: ¿Existe el límite de esta sucesión? (problema 3) Todos: no P: ¿Por qué no? E_6: no tiene tope, o sea no tiene límite P: ¿Cómo otra forma se podría decir, de argumentar que no existe el límite? E_2: La distancia no se mantiene P: Siempre las distancias son distintas, pero que pasa con esa distancia	tiene límite y este es -3,5, indica que es el candidato ya que al reemplazar por valores de n muy grandes, se va acercando a dicho número. En el caso de sucesiones no convergentes, se observa de inmediato que la distancia entre los términos de la sucesión y algún candidato a límite siempre va aumentando o que para un valor de n muy grandes la sucesión va creciendo. Para que los estudiantes analicen que no hay otras sucesiones convergentes, se les muestra el siguiente gráfico  Como se puede leer en las respuestas de los estudiantes, las respuestas estaban entre una mitad que si es convergente y la otra indican que no era convergente. La respuesta de E_1 que no sabe qué responder ya que no, puede indicar si hay una estabilidad o no en el gráfico, entonces para dicho estudiante debe saber cuál es la sucesión para confirmar si existe límite o no. Ahora cuando se indica que existe el límite, indican al

		E_2: no se acerca a nadie P: ¿Cómo serán los términos de esta sucesión, cada vez más qué…? E_2: es cada vez más grande P: Podrían ustedes establecer si existe el límite sí o no, sin conocer su sucesión sólo conociendo su gráfico (la sucesión que se habla es: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$) Varios: si E_2: tengo dudas, porque podría seguir creciendo y no tener un comportamiento estable P: Qué pasará observando este gráfico E_6: No sé, porque observando el gráfico los datos van aumentando P: Si existe el límite de esta sucesión…. Ahora que saben que existe el límite, observen nuevamente el gráfico, podrían indicar qué número converge la sucesión E_2: a 2,7 E_1: a 2,6 Se muestra en la presentación el límite de la sucesión que es el número e P: ¿Qué debería suceder la distancia entre los términos de la sucesión y el número e? E_1: Debería ser cada vez más pequeña P: Existe el límite de estas sucesiones (gráfico)	observar solo la gráfica posibles candidatos a límite. Luego, se les pregunta qué debería pasar entre los términos de la sucesión y el número e, indican inmediatamente que la distancia entre los términos de la sucesión y el número e debe ser cada vez más pequeña. El tercer problema que se analiza es el gráfico de tres sucesiones constantes:  Indican que la sucesión se mantiene o que la distancia es 0 entre los términos de la sucesión y el candidato a límite. Donde E_4 indica que, si es convergente las tres sucesiones, y que estas convergen a distintos límites, una sucesión tendría límite -1, otro 3 y el último 5. Después, se indica qué sucede si es de forma general, es decir, si la sucesión es constante cuál es su límite, donde indican que debe ser la misma constante. En el caso de la sucesión $\frac{1}{n}$ "clásica" una de las primeras que se analizan para la enseñanza de límite de sucesiones. Muy interesante que indican que la sucesión va aumentando y por eso no es convergente, donde el

		Varios: Si E_1: todos se mantienen, no tienen como en el ejemplo del gráfico que no era convergente E_2: no hay distancia entre el número y la sucesión P: ¿Cuál es la distancia de los términos de la sucesión y el candidato al límite? E_2: la distancia es 0 E_1: si es convergente, y cada uno tiene límites distintos, una sucesión tendría límite -1, otro 3 y el último 5. P: Cómo será el límite de la sucesión constante (a) Todos: será a P: ¿Existe el límite de la siguiente sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$... donde su término general es $\frac{1}{n}$? Varios: si Varios: no E_8: no tiene límite, porque va aumentando P: Si va aumentando el n E_2: el 1 se mantiene E_1: Si tiene límite, porque… todas son fracciones, es decir que nunca van a ser el 0 justo y nunca será negativo P: ¿Cuál es el tu candidato, tú dices que es 0? E_1: si P: Quién más cree que el límite sea 0	obstáculo aquí es que si n aumenta entonces la sucesión no es convergente, al no tener algún candidato a límite u observar su gráfico. En este momento la profesora cambia la pregunta, dónde ya un estudiante indica que es convergente y que su límite es 0. Además, se muestra su gráfico para que verifiquen que ocurre que se va acercando a 0, para valores n cada vez más grande. Luego, se les muestra los cuatros sucesiones vista en el cierre de la clase para que analicen y si habrá otra técnica para argumentar si es convergente o no la sucesión: $a_n = \frac{-4n+2}{n^2}$; $b_n = \frac{-7n^2+3}{2n^2}$; $c_n = \frac{6n^2-4}{3n-2}$; $d_n = \frac{1}{n}$ Antes de “indicar esta técnica” primero se realizó preguntas para que ellos respondieron las condiciones, luego de estas respuestas la profesora indica cuando una sucesión es convergente o no, mediante: Si en el denominador el “n**” es de exponente mayor que el “**n**”** (numerador), entonces la **sucesión converge** y **su límite será 0**

		E_4: Si, porque se va dividiendo un número más grande y se va haciendo más pequeño P: Ahora retomando las sucesiones anteriores, podríamos indicar cuándo será convergente o no convergente Los estudiantes durante 5 minutos estuvieron pensando y preocupándose del signo de la sucesión para determinar si era o no convergente, luego una compañera dijo lo siguiente E_2: Cada vez que el denominador sea mayor que el denominador (n) va a converger P: Entonces cada vez que el término n es cada vez más grande entonces, donde se va a ir $\frac{1}{n}$ E_2: a 0 P: Qué pasa con esta de acá E_1: el resultado del denominador es más pequeña que el de arriba P: Ahora con esta sucesión que nos dio un número específico, que característica tiene esa fracción E_4: los dos n están elevado a 2 P: aaaa… es decir que crecen de la misma forma, tanto el denominador como el numerador	Si tanto en el denominador como en el numerador el "n" son de igual exponente, entonces la **sucesión converge**. Si en el numerador el "n" **es de exponente mayor que el** "n" del numerador, entonces la **sucesión es no convergente o no tiene límite**. Lo anterior, es para justificar al momento de factorizar la sucesión al calcular límite de la sucesión algebraicamente, en la S_3, sin embargo, además también podrán justificar mediante el concepto de la distancia Por último, se formaliza el concepto, primero se recuerda la "definición" vista en la clase anterior, donde se le explica: La definición anterior será equivalente a que si el término general de la sucesión a_n, cuando n tiende al infinito (∞) será igual a…¿a qué debería ser igual? Será igual al **número** l En otras palabras, el término general de la sucesión tiene límite cuando n tiende al infinito, si para todo valor $\epsilon > 0$, existe un valor N natural tal que, a partir de un $n > N$, se tiene que la distancia entre l y a_n es menor que ϵ, es decir: $\|a_n - l\| < \epsilon \; si \; y \; solo \; si \; a_n = l$

Conclusiones

En esta parte de la secuencia didáctica el estudiante juega un rol protagónico en su aprendizaje; deben realizar hipótesis, contrastarlas, discutirlas, validarlas y formalizarlas, con la orientación del docente.

Durante el cierre de la clase en los problemas que estaban en la secuencia S_2 utilizaban el argumento si la distancia es cada vez más pequeña entre el candidato de límite respecto a los valores dados en la sucesión, entonces el límite existe y si en el caso que la distancia es cada vez más grande el límite no existe. Aquí, ya se está incorporando el concepto de distancia para justificar límite de sucesión y, además, de analizar el gráfico para "hipotetizar" posible candidato de límite o intuir cual es.

Cuando se analiza el límite de la sucesión $\frac{1}{n}$ los estudiantes estaban en dudas si era convergente o divergente (explicado en el apartado de análisis de respuesta de S_2) entonces la docente realiza pregunta claves para que los estudiantes analicen que este límite existe y es 0, que lo intuitivo es que el denominador es cada vez más grande y se va acercando este a 0, y se relaciona con el gráfico de la sucesión para "hipotetizar" el valor del límite de la sucesión $\frac{1}{n}$, y al momento de identificar el límite de la sucesión que es 0, los estudiantes indican que la distancia entre el número 0 y los valores cada vez más grande de la sucesión, es cada vez más pequeña, por lo tanto el límite es 0. Cuando se presenta la sucesión constante, es intuitivo indicar que el límite de la sucesión es la constante, en este caso también indican que la distancia es 0 siempre para cualquier valor dado en la sucesión y la constante.

En la presentación se muestra el gráfico sin mostrar la sucesión (la sucesión de Euler), donde los estudiantes estaban dudando si existe el límite, ya que en un momento está estable, pero la duda de ellos es que si para n cada vez más grande se mantendrá así, es muy interesante que duden si la gráfica se mantendrá en un tope o no, ya que necesitan ver con claridad que se mantenga la gráfica a un número específico, es decir, que solo se quedan con la parte visual de lo que se muestra la gráfica y no se analiza que sucede después, al menos que se le entregue la sucesión para ir verificando que sucede cuando n es cada vez más grande. Luego se les indica que el límite si existe, intuitivamente "estiman" el número del posible límite $(2.7\ o\ 2{,}6)$. Después se les muestra la sucesión y el límite de este que es el número e, cuando se realiza la pregunta ¿qué debería suceder la distancia entre los términos de la sucesión y el número e? indican inmediatamente que la distancia es cada vez más pequeña cuando los valores de n son cada vez más grandes.

Al finalizar se identifican límites “conocidos” para la parte S_3 que puedan utilizar si lo desean la técnica algebraica para calcular límites de sucesiones, y veremos a continuación si utilizan esta técnica o si el concepto de distancia predomina para el cálculo de límite de sucesiones.

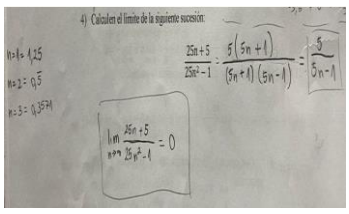
Hasta este momento de la segunda parte de la secuencia didáctica, los estudiantes incorporan técnicas realizan hipótesis observando la gráfica donde utilizan la técnica la noción de distancia para justificar el posible candidato a límite de una sucesión, y se incorpora una nueva técnica que es con límites “conocidos” de sucesiones, para determinar el límite de sucesiones. Con todo esto, los estudiantes en la tercera parte de la secuencia didáctica podrán justificar sus cálculos algebraicos para calcular límites de sucesiones.

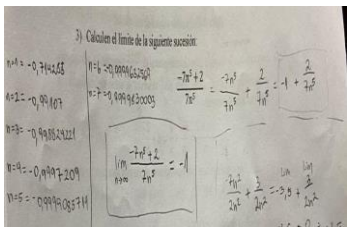
4.1.3.3 Análisis a posteriori: Secuencia didáctica (S_3)

A continuación, se expondrán las respuestas de los estudiantes que se realizó solo en una clase donde se registró en audiovisual, su respectiva tabla con los comentarios de los E_i y la P. Primero se evidenciarán las respuestas de la secuencia didáctica y luego las audiovisuales.

Tabla 16

Parte 3: Calculando límites de sucesiones				
E	R_1	R_2	R_3	R_5
E_1	a)Se dan valores cada vez más grandes para n. b) la compañera que responde que el límite es 6, a mi criterio, está correcto	El compañero que tiene razón es el 1, porque la sucesión tiende al 0	No responde	No responde
E_2	a) es más rápido el cálculo	a) Para un cálculo más rápido	Realiza el problema mediante factorización el resultado es -1	Resuelve el problema factorizando y dándose valores para n.



	b) La segunda estudiante tiene razón, el límite es 6. No puede ser 0, ya que el numerador siempre es mayor que el denominador.	b) El primer estudiante tiene razón, el límite es 0, ya que el denominador del término general es mayor que el numerador		
E_3	No responde	No responde	No responde	No responde
E_4	a) Usando la última fórmula ya que es más fácil de calcular (antes se da valores para n para comprobar) b) La que tiene razón sería la segunda compañera ya que al reemplazar "n" por distinto números que serían (1, 2, 3, 4, 5, etc) y esto resultados dieron que cada vez se acercan al 6 por ello se puede deducir que la segunda compañera tiene razón	a) Se reemplaza n por número de 1 al 7 y calcule b) Yo opino que el primer compañero tiene razón ya que la sucesión llega a un punto que no sigue adelante se queda en el número cero y cada vez se va acercando más o sea el límite de la sucesión sería cero	No responde	No responde
E_5	b) Mientras el numero sea más alto más se va acercando al número 6, o sea la razón la tiene la compañera 2, el límite es 6	No responde	No responde	El límite es 0, porque el denominador es más alto la distancia es más pequeña

E_6	a) Con los resultados de la expresión algebraica se puede ver que mientras más alto el número "n" menor será la distancia con 6, y 6 sería su límite Resuelve dándose valores para n, después de factorizar. b) La compañera 2 tiene la razón porque al ir aumentando los valores de "n" el número cada vez se acerca más a 6, por lo que 6 sería su límite	a) Los resultados se puede ver como los valores van disminuyendo a medida que "n" aumenta b) El compañero 1 tiene la razón ya que al ir aumentando "n" el número se acerca a 0, por lo tanto 0 es el límite	No responde	El denominador cada vez aumenta, límite es 0
E_7	a) Podemos usar la forma simplificada para ver los resultados van disminuyendo y acercándose a 6 con un "n" más grande Resuelve dándose valores a n cada vez más grande b) La compañera "dos" tiene la razón porque reemplazando el"n" por un número más grande con la forma	a) Calculamos con números grandes usando la equivalencia algebraica, así nos damos cuenta de que la sucesión tiende a 0 b) Tiene la razón el primer compañero, porque es la equivalencia algebraica podemos ver que el 3 se va dividiendo en más partes.	No responde	No responde

	simplificada, da que el límite es 6, porque no pasa más abajo del número.			
E_8	No responde	No responde	No responde	No responde
C	El 66% responde lo esperado. De ellos el 87% reemplazando el valor de n para cada vez más grande para verificar que compañero tiene razón	El 66% responde lo esperado. De ellos el 87% reemplazando el valor de n para cada vez más grande para verificar que compañero tiene razón	Solo un estudiante responde y realiza el problema factorizando y reemplazando valores para n	Solo un estudiante responde y realiza el problema factorizando y reemplazando valores para n

Conclusiones

Los estudiantes utilizan el concepto de distancia para calcular los límites, los primeros dos casos donde se dan valores a n para ver que sucede en el límite, luego estiman dicho valor y utilizan la noción de distancia para justificar. Solo una estudiante realiza los cálculos algebraicos factorizando y en el último problema verificó su resultado dando valores a n cada vez más grande.

Se presenta un **obstáculo matemático** específicamente factorizar, recuerde que se repasó este contenido después de realizar el cuestionario previo, se puede analizar que los estudiantes no manejan bien este concepto, que esto provoca que al cálculo de límites de sucesiones algebraicamente no se realice y esto en la siguiente obra matemática se encontraría un obstáculo matemático en límite de función. Estos problemas sin utilizar la tarea de factorización, los estudiantes lo realizan mediante el concepto de distancia, límites de referencia en la S_2 o dándose valores a n cada vez más grande.

Podemos concluir que predomina el concepto de distancia para justificar el cálculo de límite de sucesiones y también dando valores a n cada vez más grande, justificando este resultado con la noción de distancia, volviendo a destacar que el obstáculo matemático de factorizar los estudiantes al momento de manipular algebraicamente cálculo de límites de sucesiones no podrán dar un resultado

acorde, es por esto que se recomienda profundizar manejos algebraicos (productos notables) para no se presente dicho obstáculo.

4.1.3.3 Análisis de evidencia en videos: S_3

A continuación, se expondrán las respuestas de los estudiantes que se realizó solo en una clase donde se registró en audiovisual, su respectiva tabla con los comentarios de los E_i y la P. Primero se evidenciarán las respuestas de la secuencia didáctica y luego las audiovisuales.

Tabla 17

Momento	P	$E; P$	C
Inicio	Se recuerda lo visto en la S_2 para responder la S_3, realizando preguntas.	P: Recuerda la sucesión constante, ¿es convergente? Varios: si es convergente P: ¿y a que converge? Varios: a la misma constante P: y ¿cómo podemos justificar las sucesiones convergentes? E_1: el concepto de distancia	
Desarrollo	La profesora guía y explica la equivalencia algebraica, y que expliquen al cual de las dos formas resueltas es la correcta	E_1: no sé qué uso tiene, es solamente que es más rápido, esta equivalencia los separa… E_2: si aquí queda dividido por el n y el otro no E_1: ...Esto es igual (la expresión algebraica) y estos son resultados distintos (problema 1) … entonces lo estamos resolviendo y cada vez que reemplazamos, este se va achicando y el otro se mantiene	Claramente el obstáculo de factorizar en estos momentos se hace presente, ya que solo se realiza pregunta sobre la equivalencia algebraica, y como aún está presente lo anterior, no responde los siguientes problemas ya que se observa que desean realizar igual como esta en la secuencia, para esto la profesora vuelve a recordar que pueden

			ocupar todos los conocimientos que han aprendido hasta ahora.
Cierre		P: ¿Quién tiene la razón y por qué? (problema 1) E_1: la segunda estudiante, porque el denominador siempre va ser mayor que el numerador. P: Alguien más piensa que esta estudiante está correcta Varios: si P: que pasa cuando n va infinito E_2: va siendo más pequeño P: y el otro límite cuanto es E_1: es 6, por qué es una sucesión constante P: Si calculo la distancia entre la sucesión y candidatos a límites, como por ejemplo si calculo la distancia con el 6 E_5: La distancia al 0 es cada vez más grande, en vez que la distancia entre el 6 será más pequeña P: ahora con todo lo anterior, cuál sería el límite de la sucesión Varios: El límite es 6	Se justifican los primeros dos problemas mediante el concepto de distancia y apoyando esto con el gráfico de la sucesión que se desea saber si es convergente. De la siguiente forma: *Primero analicemos la distancia entre lo distintos términos de la sucesión* $\frac{6n+2}{n}$ *y los posibles límites 0 y 6* *Para* $n = 1000$ *se tiene que:* $\left\lvert\frac{6 \cdot 1000 + 2}{1000} - 0\right\rvert$ $= 6{,}002$ $\left\lvert\frac{6 \cdot 1000 + 2}{1000} - 6\right\rvert = 0{,}002$ *Con lo anterior ¿pueden comentar cuál de los dos es el límite de la sucesión* $\frac{6n+2}{n}$*?* *Antes observemos su gráfico y concluyamos juntos* *¿Ahora podemos concluir cuál es el límite de la sucesión?*

		P: cuál sería el argumento de que el límite de la sucesión es 6 E_1: la distancia entre el número 6 y la sucesión es cada vez más pequeña P: Cuál es el candidato a límite del segundo problema E_2: es 0 P: Por qué crees que es 0 E_4: ah… me confundí no es 0 P: …alguien más piensa que el límite es 0 E_1: a medida que n va aumentando, el denominador es mayor que el numerador, entonces se va a ir acercando a 0 P: qué sucede con esta sucesión que vimos en la clase pasada E_1: como el denominador y el numerador el n es igual, el límite es distinto de 0 P: Cuanto es el límite de la sucesión vista la clase pasada. Varios: -3,5 P: ¿Por qué es -3,5?... ¿lo podríamos realizar algebraicamente? Como nadie responde se muestra cómo se realiza la parte de factorización (equivalencia algebraica) P: ¿Siempre se podrá realizar el método que hemos visto hoy día? E_1: Si es que no se puede factorizar y simplificar va a ser difícil	*¿Qué compañera estaba en lo correcto?* *La compañera de la opción 2* $= \lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 6$ Se realiza el mismo procedimiento con el otro problema, para justificar que la equivalencia algebraica se puede calcular el límite de una sucesión. Para finalizar la profesora cierra de la siguiente forma: *¿Siempre se podrá realizar el método que hemos visto para calcular límites de sucesiones?* *Sabemos que el límite de la siguiente sucesión es no convergente:* $n = \infty\ (no\ convergente)$ *¿Qué piensa si realizamos:*$(n-n)$ *?* *¿Existe este límite? ¿Por qué?* *Si existe:* $(n-n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ *¿Qué pasó aquí? ¿Qué piensan ustedes?* *Ahora si realizamos lo siguiente:* $\lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} n$

		P: Qué debería cumplir las sucesiones para que se cumpla la propiedad E_1: deben ser convergentes	*En el caso anterior no existe el límite. Si no lo llegas a ver, pensemos juntos.* *Podrías indicar algunas hipótesis para realizar la siguiente manipulación:* $(a_n + b_n) = a_n + b_n$ *¿Qué debería cumplir las sucesiones a_n y b_n para que se cumpla lo anterior?* *Veamos el límite de la sucesión $\frac{6n+2}{n}$ que ya sabemos que existe el límite y este es 6* *Observemos que:* $6 = 6 \quad ; \quad \frac{2}{n} = 0$ $= \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$ *Con lo anterior, puede concluir que debe ocurrir para que se pueda utilizar lo siguiente:* $(a_n + b_n) = a_n + b_n$ *Debe ocurrir que las sucesiones:* $a_n = l \quad ; \quad b_n = h$

			Es decir, ambas sucesiones deben existir el límite para utilizar la propiedad *Concluyendo entonces la propiedad se utiliza si ocurre:* $Si\ a_n = l\ \ y\ b_n = h$ $entonces$ $a_n + b_n = a_n\ \ + \lim_{n\to\infty} b_n$ $a_n + b_n\ = l + h$

Conclusiones

Observemos que la factorización es un obstáculo para el cálculo de límites de sucesiones algebraicamente, aun así, los estudiantes justificaban mediante el concepto de distancia o dándose valores a la sucesión cada vez más grande, y al encontrar dicho número que converge la sucesión, concluían que el límite de la sucesión con dicho número la distancia es cada vez más pequeña, por lo tanto, ese es el límite. Ahora si al momento de reemplazar valores cada vez más grande en la sucesión y este iba aumentando, entonces el límite no existe, concluyendo que la distancia entre los valores de la sucesión y cualquier número dado iba ir aumentando.

Al momento de presentar que la suma de límites de sucesiones es límite de cada sucesión por sí sola, siempre cuando los límites de cada una existan, al dar un ejemplo algunos se dieron cuenta que para utilizar esta propiedad los límites deben existir por separado. Se presentó esto, ya que es importante cuando se puede utilizar esta propiedad para el cálculo de límites de sucesiones.

Se concluye que al momento de que solo las respuestas sean algebraicas en el cálculo de límites de sucesiones, se repase factorización para que se utilice esta técnica, es más los estudiantes comprenden que sin esta técnica, al momento de calcular limites desde sucesiones más complejo es necesario realizar dicha técnica para su cálculo. Para esta investigación lo fundamental es la utilización del concepto de distancia para la intuición, estiman posible límite y justificar el cálculo de límites de sucesiones.

4.1.4 Análisis a posteriori: Cuestionario Posterior

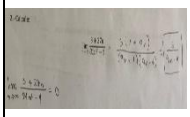
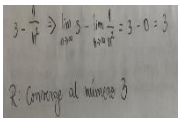
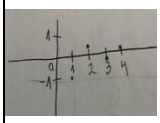
Este apartado de análisis, se rige el siguiente objetivo específico:

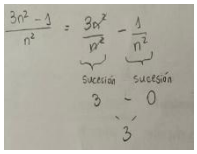
Identificar las comprensiones de límites de sucesiones y de procedimientos de cálculo que logran estudiantes de tercero año medio, en el electivo de matemáticas límites, derivadas e integrales, mediante la implementación de una secuencia didáctica que gira en torno al concepto de distancia y el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

A continuación, se mostrará en una tabla las respuestas de cada estudiante y luego conclusiones.

Tabla 18

Cuestionario Posterior						
E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
E_1	Es el número en el que converge la sucesión, cuando el número de la sucesión es tan alto y provoca que su resultado se aislé a un solo número y sus distintos decimales	Antes del cálculo: según lo que entendí, debería de converger al número 0 porque el denominador crece más rápido que el numerador. Se dan valores para n cada vez más grandes para verificar lo anterior.	Antes del cálculo: Creo que no es convergente, porque el numerador crece más rápido que el denominador, pero no estoy segura No converge a ninguno de los números señalados, converge al 9, pero hasta el número de la sucesión (1000)	Converge al número (-0,5), la distancia entre los números de la sucesión se hace cada vez más pequeñas, y por ejemplo el (n=1000) da como resultado -0,4995	La sucesión no tiene límite, porque el numerador crece el triple de rápido que el denominador Resuelve dándose valores para n.	Si tiene límite, el cuál es el número 0 porque cada vez se va dividiendo el 1 por un número aún más alto, haciendo que la diferencia entre los números de la sucesión sea cada vez más mínima

			se mantienen el 8.			
E_2	Es el valor máximo o mínimo que puede alcanzar una sucesión	Factoriza y el límite es 0 	Factoriza y el límite es 3 	Si converge. Variable con igual exponente en denominador y numerador Converge a -0,5 Se da un valor para n=999999999999 Para verificar	No tiene límite, es una sucesión divergente, ya que el numerador es mayor que el denominador. Esta sucesión seguirá creciendo infinitamente	Si tiene límite, el 0 Realiza grafico 
E_3	Es el límite de una sucesión	No responde	No responde	No responde	No responde	No responde
E_4	Límite de sucesión es un número que es límite es decir que los demás números no pueden sobrepasar de él, solo se acercan más	No responde	El número que converge la sucesión es el 3 ya que al calcularlo con distintos números los resultados se acercaban al 3 y no lo traspasaron entonces es convergente porque tenía un límite	El número que converge es el -0,5 porque los números se acercan a él pero no lo sobrepasa	No tiene límite de sucesión ya que los intervalos siguen subiendo entonces no hay un límite	No hay límite de sucesión ya que no hay un número que tenga un límite
E_5	Que existe una sucesión donde puede	Límite es 0, ya que sabemos que el	El número que converge la sucesión al límite	No sobrepasa el límite, después de una pequeña	No tiene límite, entre más alto es el valor de n	patrón (+ - + - + - +)

	o no tener límite (tope)	denominador es más alto que el del numerador, entonces hace la distancia más pequeña	es 3 porque los números se aproximan al 3 pero no se pasan del 3 y tampoco lo tocan	distancia los números se mantienen consecutivos (realiza una recta)	mayor es la distancia	
E_6	Límite de sucesión es un valor que se obtiene de una sucesión el cual llega a un límite, pero no siempre	Su límite es 0, resuelve dándose valores a n	La sucesión converge a 3, factoriza. 	La sucesión converge a -0.5, porque reemplazando los datos y viendo el gráfico vemos que los valores se acercan a -0.5	No tiene límite, se puede ver al reemplazar los datos	No tiene límite, porque tiene valores en negativo por lo que en un gráfico esta sucesión bajaría y subiría
E_7	Es cuando una sucesión tiene "tope", límite o tiende a cierto número. Por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{n}$, donde n puede tomar cualquier número hacia el infinito, tiene como límite 0, porque el 1 se va	Entonces, el límite es 0, porque mientras el numerador se queda constante, el denominador se hace grande, lo podemos ver en el cálculo de grandes números	La sucesión converge a 3, porque al reemplazar en la forma números grandes como el 100 o el 1000, se ve que los resultados no pasan del 2.999…, es decir, que su límite es 3.	La sucesión converge a -0.5, porque reemplazando se ve que los números no pasan del -0.5	La sucesión no tiene límite, ya que, reemplazando por números grandes, los resultados siguen creciendo y no hay ningún número que los limite.	No tiene límite, ya que la sucesión se comporta de forma extraña y los números no tienen un "tope"

	dividiendo cada vez en más partes. Estos resultados no pasan del 0, porque el 0 es su límite					
E_8	Para mí el límite de sucesión son ciertos datos dado para un gráfico en el cual, dado los datos a medida que va avanzando debe ir siendo más pequeña la distancia, en el cual hay límite	No responde	Si converge ya que va cada vez aumenta más y la distancia se hace aún más grande y en su término general el denominador es n^2 y el denominador es $3n^2$ en el cual los dos irán aumentando de la misma manera	No converge ya que se va alejando cada vez más del 0 y va aumentando su distancia, y no tiene un límite	En este caso el numerador crecerá mucho más que el denominador en el cual no existirá límite ya que no será menor la distancia si no que mayor ya que porque el numerador es tan grande que se va alejando de 0 por lo que no hay un límite mientras que el denominador a la vez también avanza	Si converge, tiene un límite porque si pongo una línea imaginaría todos aun así se mantienen en el 1 aun siendo negativo.
C		El 38% de las respuestas, realizaron sus cálculos reemplazando los términos de	El 38% de las respuestas, realizaron sus cálculos reemplazando los términos de la	El 50% resuelve el problema dándose valores cada vez más grandes a n.	El 62% resuelve el problema dándose valores cada	El 12% comenta que la sucesión es convergente porque se va acercando a 0

		la sucesión con valores más grandes. El 25% lo resuelve comentando que el denominador se hace cada vez más grande respecto al numerador, por lo tanto, converge a 0 El 12% lo resuelve factorizando y después dando valores a n. El 25% restante no responde	sucesión con valores más grandes. El 12% comenta como el denominador y el numerador crecen de la misma forma, entonces el límite es distinto de 0, luego se dan valores para n para calcular el límite que es 3 El 25% lo realiza factorizando El 25% no responde o realiza mal el cálculo.	El 38% lo realiza con noción de distancia El 13% lo realiza observando el gráfico	vez más grande para n El 25% comenta que la distancia es cada vez más grande entre la sucesión y para cualquier valor	para un n cada vez más grande Otro 12% realiza el gráfico de la sucesión e identifican que la sucesión se va acercando a 0 El 76% indica que no es convergente ya que se comporta de una forma extraña o la sucesión tiene un patrón entre números positivos y negativos

Conclusiones:

Analizando las respuestas de los estudiantes:

En la primera pregunta podemos ver un contraste entre el análisis a priori que se preguntó: *"Explique con sus palabras qué es para ti el concepto límite de sucesión"*. Donde se dejó en claro que los estudiantes no responden o indicaba que era un mínimo o que es un resultado positivo. Ahora podemos

observar que indican que es un tope, que además no es necesario que exista siempre o que la distancia entre el límite y la sucesión es cada vez más pequeña.

La pregunta 2 hasta la 4 se puede observar que los estudiantes daban valores cada vez más grande para n así indicar si la sucesión es convergente o no, luego verificaron lo anterior algunos estudiantes mediante el concepto de distancia. Además, solo un estudiante utilizo el método algebraico en todas las preguntas, dos en la pregunta 2. En la pregunta 2 y 4, comentan dependiendo el exponente de n en la sucesión si es mayor o no en el denominador o numerador, dependiendo de esto si el límite existe o no. Es importante destacar que, para verificar sus conclusiones, utilizaban la técnica del concepto de distancia.

Por último, en la pregunta 5 (verificar si el límite de la sucesión existe $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$) es interesante que el 76% de los estudiantes concluyan que el límite no existe porque la sucesión se comporta extraña, es decir, graficando sube y baja, que al reemplazar por valores a n el resultado es positivo y después negativo. Aunque el 24% identifica el límite de la sucesión es 0, donde la mitad indica que es este número ya que al dar valores cada vez más grande, se va acerca 0 y la otra mitad, indica que al graficar se va acercando a 0.

Se recomienda después de la realización de esta secuencia didáctica, es realizar cálculo de límites de sucesiones mediante proceso algebraico, al calcular el límite verificar mediante el concepto de distancia y relacionar este resultado con la gráfica de la sucesión, para así relacionar los tres registros.

Capítulo 5

5.1 Conclusiones

En este capítulo final, se van a desglosar las conclusiones entre el objetivo general, la pregunta de investigación y el supuesto de trabajo y propuestas para la continuación en esta investigación.

5.2 ¿Se cumplió el objetivo general?

Recordemos el **objetivo general** de esta investigación:

Caracterizar las comprensiones que logran estudiantes de enseñanza media al desarrollar un proceso de aprendizaje entorno a los límites de sucesiones centrado en la resolución de problemas que toman como referencia hitos epistemológicos vividos en su construcción, que utiliza el concepto de distancia y las relaciones entre procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promoviendo la comprensión profunda de las técnicas de cálculo de límites de sucesiones, su sentido y significado.

Los **objetivos específicos** son:

1. Identificar y delimitar problemáticas específicas en la enseñanza de los límites de sucesiones en enseñanza media que dificultan su aprendizaje por parte de las y los estudiantes.

2. Construir una secuencia didáctica que recoja aspectos esenciales de la génesis epistemológica de la noción de límite de sucesiones, utilice la noción de distancia y articule los procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promoviendo el aprendizaje de esta noción en estudiantes de enseñanza media.

3. Identificar las comprensiones de límite de sucesiones que tienen estudiantes de tercero año medio en el electivo de matemáticas límite, derivada e integrales, antes de la implementación de la secuencia didáctica, mediante el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

4. Identificar y describir reflexiones de estudiantes durante el proceso de estudio de la secuencia didáctica implementada en el aula.

5. Identificar las comprensiones de límites de sucesiones y de procedimientos de cálculo que logran estudiantes de tercero año medio, en el electivo de matemáticas límites, derivadas e integrales,

mediante la implementación de una secuencia didáctica que gira en torno al concepto de distancia y el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

Se puede afirmar que los objetivos específicos se cumplen. Observemos que se construye una secuencia didáctica en aspectos esenciales desde la epistemología de la noción de límite de sucesiones, donde el concepto de distancia es la base para el entendimiento de límites de sucesiones, donde se relaciona con los registros gráfico, numérico y algebraico, para estimar y calcular límites de sucesiones.

Luego se analizó las comprensiones de los estudiantes antes de la implementación de la secuencia didáctica, donde se concluyó que las compresión de límite de sucesión y el concepto de infinito no eran acertadas, con el cuestionario posteriori se pudo observar la diferencia del concepto de límite de sucesión, donde los estudiantes concluyen que cuando la distancia entre los términos de la sucesión y un número que sea límite de está, es cada vez más pequeña cuando los valores de n es cada vez más grande.

También se identificó y describió las reflexiones de los estudiantes, donde con el transcurso que se avanzaba de la secuencia $S_1, S_2 y\ S_3$, los estudiantes se incorporó el concepto de distancia para justificar o verificar estimaciones y cálculo de límites. Además, de si se dan valores cada vez más grande a n en la sucesión debería ir acercándose cada vez más a un número y si esto ocurriera entonces el límite existe, y esto lo verificaban con el concepto de distancia, por otro lado, si la distancia fuera más grande, entonces el límite no existe.

El último objetivo específico, se identifica que los estudiantes utilizan la técnica dándole valores a n cada vez más grande en la sucesión para estimar el posible límite de la sucesión y verificar o justificar este posible límite utilizando el concepto de distancia, sin embargo solo una lo calcula mediante la técnica de algebrización, relacionan estos procesos con la técnica de gráfico y por último analizando límites de referencia (si el exponente es mayor en el denominador que el numerador, si los exponente son iguales o si el numerador su exponente es mayor que el denominador). Con todo lo anterior el predominante es darse valores a n y luego verificar utilizando el concepto de distancia.

Por lo tanto, al cumplirse los objetivos específicos, dado que esto está escogido para aportar el cumplimiento del objetivo general, se puede afirmar el logro del objetivo general. Se puede observar

que los estudiantes caracterizan el desarrollo de límites de sucesiones utilizando el concepto de distancia para su comprensión y cálculo, además resuelven problemas que les permite dar sentido al estudio de los límites, y lo relacionan con lo gráfico, dando valores a n a la sucesión, y con lo algebraico, utilizando límites de referencia.

5.3 Pregunta de investigación y supuesto de trabajo

Recordemos la pregunta de investigación:

"¿Cómo se desarrollan las comprensiones de límites de sucesiones y su cálculo, mediante el concepto de distancia, en el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos, en estudiantes de tercero año medio, a partir de una secuencia didáctica basada en la Teoría Antropológico de lo didáctico?"

Dando los análisis posteriori y del objetivo general realizado en el apartado anterior, podemos concluir que los estudiantes calculan los límites de sucesiones mediante el concepto de distancia y este lo relacionan con la técnica gráfica, donde estiman posible límite, luego verifican si este mediante el concepto de distancia entre el posible límite y la sucesión dándose valores cada vez más grande, donde concluyen si la distancia es cada vez más pequeña entonces el límite existe y si la distancia es cada vez más grande el límite no existe. Esto ocurre cuando se estaba desarrollando la secuencia didáctica específicamente en la parte S_2 y S_3, verificando esto en el cuestionario a posteriori. Por lo tanto, podemos concluir que los estudiantes desarrollan las comprensiones de límites de sucesiones y su cálculo, mediante el concepto de distancia, en el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos.

Por otro lado, recordemos el supuesto de trabajo:

"Una secuencia didáctica basada en hitos epistemológicos esenciales en la construcción de la noción de límite de sucesión y desarrollada en torno al concepto de distancia utilizado en procesos gráficos, numéricos y algebraicos, promueve la comprensión profunda de esta obra matemática por parte de estudiantes de enseñanza media, y permite que otorguen sentido y significado a las técnicas de cálculo."

Dado los análisis a posteriori en la implementación de la secuencia didáctica, los hitos epistemológicos fueron esenciales para desarrollar las tres partes de la secuencia, dando énfasis a la génesis de límites al infinito que es el concepto de distancia como técnica y teoría para la enseñanza de límites de sucesiones a los estudiantes. El núcleo de la construcción de la secuencia didáctica es a partir de hitos epistemológicos: el problema de Arquímedes y el concepto de distancia a partir de los análisis matemáticos de Newton, Leibniz y Cauchy y la gráfica para la intuición de límite de sucesiones.

Unos de los hitos fundamentales fue retomar el problema de Arquímedes, dando énfasis a la diferencia entre las áreas de los polígonos de lados n inscritos en la circunferencia y el área de la circunferencia, donde los estudiantes identificaron que cuando los lados de los polígonos sean cada vez más grandes, la diferencia del área es cada vez más pequeña y que cuando los lados n de los polígonos sea muy grande está diferencia es 0. Además de los problemas de analizar que sucede en las sucesiones cuando n es cada vez más grande, relacionando esta con su respectiva gráfica, los estudiantes comprendieron que cuando ocurra que la distancia entre un número y la sucesión cuando n es cada vez más grande, la distancia es cada vez más pequeña, entonces va a existir un tope, converge o existe límite. Por lo tanto, los hitos epistemológicos fueron esenciales para la comprensión de límite de sucesiones para la comprensión profunda de esta obra matemática por parte de los estudiantes de enseñanza media, y permite que otorguen sentido y significado a las técnicas de cálculo.

5.4 Problemática

Por último, recordemos que la problemática de esta investigación es:

¿De qué manera las comprensiones y el pensamiento matemático de los estudiantes enriquecen al vivir un proceso de enseñanza aprendizaje entorno a los límites de sucesiones desde una secuencia didáctica que tiene como referencia hitos epistemológicos enfrentados en su construcción histórica, enfrentándolos a problemas significativos que requiere de los límites para ser resueltos, que les da la oportunidad de utilizar de herramientas para estudiar el comportamiento de sucesiones en el infinito a través de la noción de distancia, y que articula herramientas aritméticas, algebraicas y gráficas?

Se debe tener en cuenta que el objetivo general, los objetivos específicos y el supuesto de investigación es para responder a la problemática. Observemos que en los análisis a posteriori, en el cuestionario posterior, se concluyó que los estudiantes utilizan la técnica de distancia para responder los cálculos

de límites y/o justificar sus resultados con esta técnica para cuando se dan valores para n cada vez más grandes en la sucesión, y algunos lo relacionan con la gráfica de la sucesión. Por lo tanto, los estudiantes desarrollan cálculos de límites de sucesiones, mediante el concepto de distancia en el desarrollo de las relaciones entre los procesos gráficos, numéricos y algebraicos en estudiantes en el electivo de matemática límites, derivada e integrales de tercero año medio, para el cálculo de límites de sucesiones a partir de una secuencia didáctica basada en la teoría antropológica de lo didáctico.

Se puede concluir que las comprensiones de los estudiantes, y el desarrollo de su pensamiento matemático se incrementa cuando tienen la oportunidad de vivir unas experiencias basadas en hitos epistemológicos, además de incorporar técnica de la noción de distancia, donde comprenden que al utilizar esta herramienta es una manera de justificar o calcular límites de sucesiones, donde también al momento de visualizar el gráfico de sucesiones ellos estiman hipótesis para posible límites de la sucesión. Asimismo, utilizan estas dos técnicas para justificar el límite de una sucesión, como por ejemplo en la pregunta 5 (del cuestionario posterior).

5.4 Propuesta de continuación a la Secuencia Didáctica posterior a su implementación

Para la continuación de la secuencia didáctica construida, luego de su implementación en el aula y los resultados obtenidos, se propone retomar el cálculo de área bajo la curva, por ejemplo: calcular el área encerrada por una función lineal en un intervalo dado, realizando rectángulos bajo la gráfica de base 1 y largo y, luego rectángulos sobre la gráfica de base 1 y largo y, preguntar si estas áreas son iguales y si no lo son qué sucede si realiza n rectángulos y este n tiende al infinito ¿las áreas por debajo la gráfica serán iguales a las áreas sobre la gráfica? Este ejemplo es para introducir luego límites de funciones cuando x tiende a un número, se podría ejemplificar con función cuadrática en un intervalo $[a, b]$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Brousseau, G, (1997), Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990. (N. Balacheff, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bastias, D. A., Pino-Fan, L. R., Medrano, I. G., y Castro, W. F. (2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 179-205.

Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In Investigación en educación matemática XIII (pp. 89-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Buss Thofehrn, M., López Montesinos, M. J., Rutz Porto, A., Coelho Amestoy, S., Oliveira Arrieira, I. C. D., y Mikla, M. (2013). Grupo focal: una técnica de recogida de datos en *investigaciones cualitativas. Index de Enfermería, 22(1- 2), 75-78.*

Burkill, J. C., & Burkill, H. (2002). A second course in mathematical analysis. Cambridge University Press.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Espinoza, L. (1998). Organizaciones matemáticas y didácticas entorno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio (PhD dissertation). Uni-versitat Autònoma de Barcelona.

Espinoza, L., Bosch, M., Gascón, J., (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas entorno a los límites de funciones (Le professeur comme directeur de processus d'étude: analyse d'organisations didactiques spontanées), Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 23. Num. 1, 79-136.

Espinoza, L., Barbé, J., Gálvez, G., (2009). Estudio de Fenómenos Didácticos vinculados a la Enseñanza de la Aritmética en la Educación Básica Chilena, *Enseñanza de las Ciencias*; 27(2), pp. 157 – 168.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710.

Fonseca, V., y Henriques, A. (2018). Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*, 1030-1049.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a. ed.). McGRAW HILL

Kamid, K. A., Syaiful, S., y Lita Liani, W. K. (2020). Investigation into First-Year College Students' Misconceptions about Limit Concept: A Case Study Based on Cognitive Style. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(4), 1445-1452.

Lima, E. L. (1997). *Análisis real*. IMCA.

Öztürk, T., y Sönmez, N. (2020). Investigation of Pre-Service Science Teachers' Graphical and Algebraic Understanding of the Concept of Limit. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *11*(3), 733-761.

Rojas Maldonado, E. R. (2019). Diseño de estrategia de apertura para la interpretación gráfica-analítica a través de Desmos como preparación para el aprendizaje del cálculo diferencial. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *10*(19).

Saputra, A. W., y Minggi, I. (2021). The Identification of the Concept Understanding on Limit of Functions Based on Students' Learning Styles in Mathematics Department at FMIPA UNM. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1899, No. 1, p. 012130).

Shiyyab, M. (2020). Innovative Graphing Skills Through Interrogation of Silent Ingredients. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, *15*(12), 32-55.

Spivak M. (1992). *Cálculo Infinitesimal.* (2a. ed.) Editorial Reverté.

Takači, D., Stankov, G., y Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, *82*, 421-431.

Zulnaidi, H., Oktavika, E., y Hidayat, R. (2020). Effect of use of GeoGebra on achievement of high school mathematics students. *Education and Information Technologies*, *25*(1), 51-72.

ANEXOS

Cuestionario previo

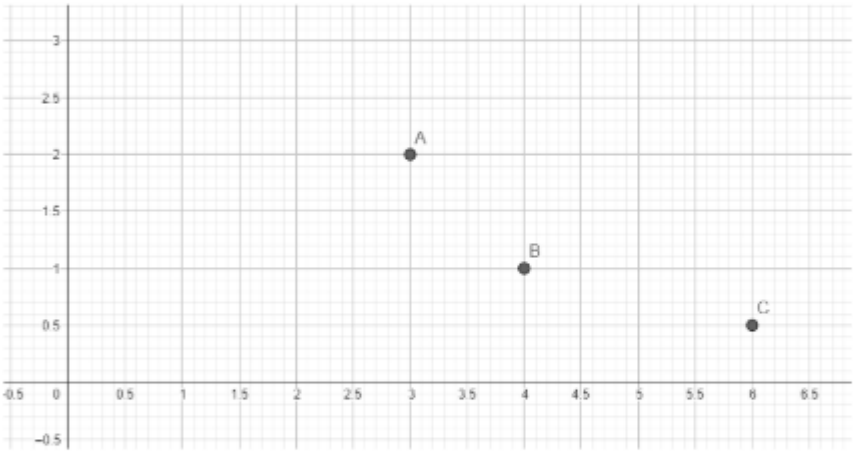
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número -2 con el número 4?

2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico

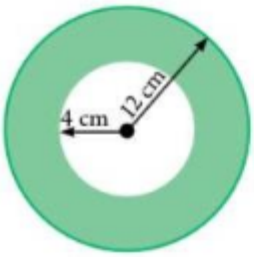


3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

Secuencia didáctica parte 1

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

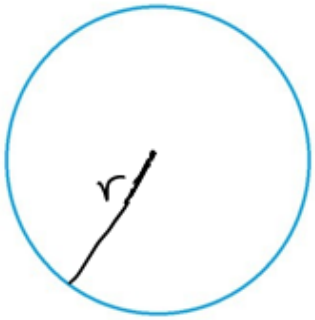
"Propuesta didáctica para la enseñanza de los límites en la educación media"

Estudiante: Jorge Zambrano Canales

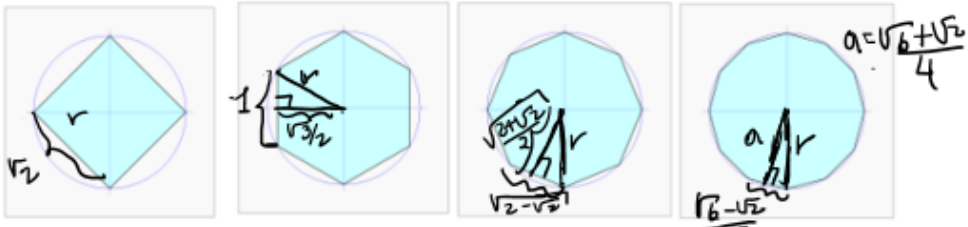
Profesora guía: Lorena Espinoza

Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones

1) Arquímedes en el siglo IV a.C. realizó una aproximación del área de la circunferencia, por medio del cálculo de áreas de polígonos regulares que sabia calcular. Esta actividad se trata de pensar como lo hizo Arquímedes.
Dada la siguiente circunferencia de radio $r = 1$ y vamos a utilizar $\pi = 3{,}14$



Consideremos los siguientes polígonos regulares **inscritos en esta circunferencia**, en que la distancia desde el centro hasta cada uno de sus vértices del polígono mide lo mismo que el radio de la circunferencia:



Cuadrado (cuadrilátero regular). Hexágono regular. Octágono regular. Dodecágono regular.

Recuerde que el área de un **polígono regular** es: $A = \frac{p \cdot a}{2}$ donde p es el perímetro del polígono regular y a es la apotema. Además, considere las siguientes aproximaciones:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \ ; \ \sqrt{3} = 1{,}73 \ ; \ \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}84 \ ; \ \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}76 \ ; \ \sqrt{6} = 2{,}44$$

a) ¿Qué sucede con la diferencia del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscritos?
b) ¿Qué concluye usted respecto el área de los polígonos regulares inscritos y la de la circunferencia?

1) Observen la siguiente sucesión $\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n+4}{n+1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

   a) Encuentren los valores de la sucesión para $n = 1; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos valores de la sucesión y el número 3? ¿Y entre los distintos valores de la sucesión y el número 6? ¿Y con el número 10?

   b) Ahora grafiquen la sucesión. ¿De qué manera el gráfico de la sucesión permite visualizar y verificar la respuesta que dieron a la pregunta a)?

   c) Una de sus compañeras dice que, en algún momento, para un valor de n, la gráfica de la sucesión tocará el número 3. Otra compañera indica que para ningún valor de n la gráfica tocará el número 3. ¿Qué piensan ustedes? Justifique.

2) Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$. Explique y realice las siguientes actividades.

   a) Encuentren los valores de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

   b) Ahora grafiquen la sucesión. ¿De qué manera el gráfico de la sucesión permite visualizar y verificar la respuesta que dieron a la pregunta a)?

   c) Una de sus compañeras dice que algún momento para un valor de n la gráfica tocará el valor 0. Otra compañera indica que para ningún valor de n la gráfica tocará el valor 0. ¿Qué piensas tú? Justifique

3) Observe la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{8}, a_3 = \frac{9}{15}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

   a) Encuentren los valores de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

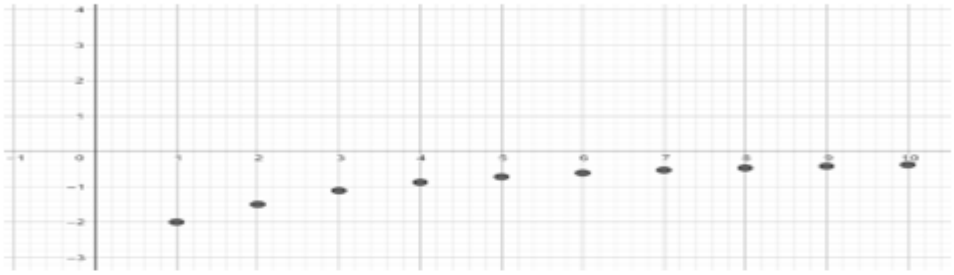
   b) Ahora grafiquen la sucesión. ¿De qué manera el gráfico de la sucesión permite visualizar y verificar la respuesta que dieron a la pregunta a)?

   c) Uno de sus compañeros dice que algún momento para un valor de n la gráfica tocará el valor 0. Otro compañero indica que para ningún valor de n la gráfica tocará el valor 0. ¿Qué piensas tú? Justifique

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

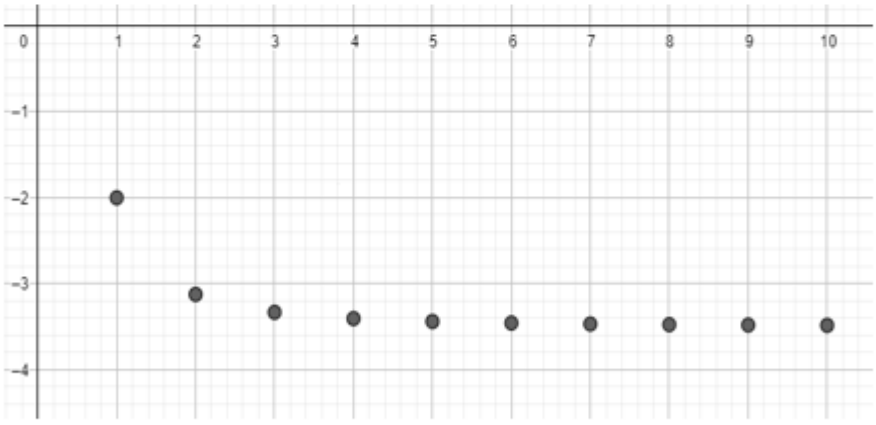
1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:



a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

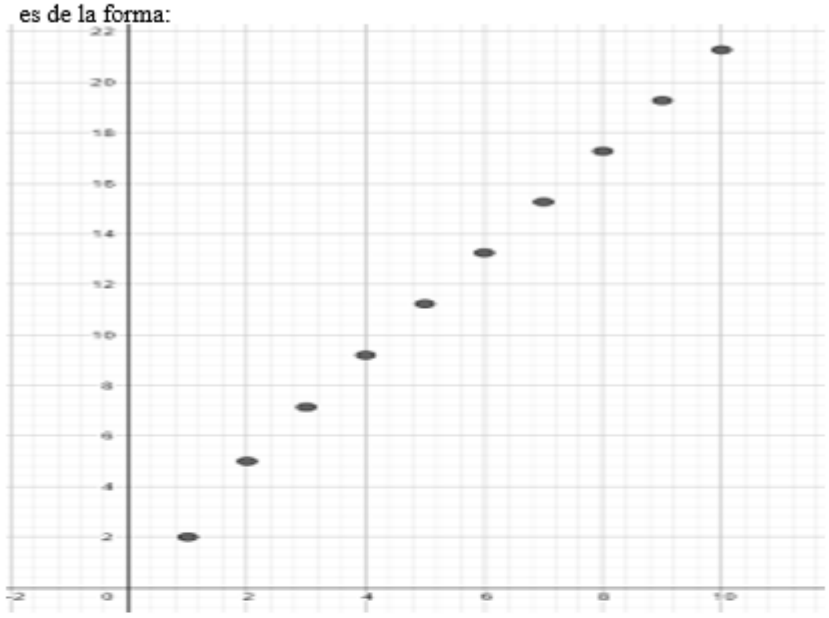
2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3} \ldots$ donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

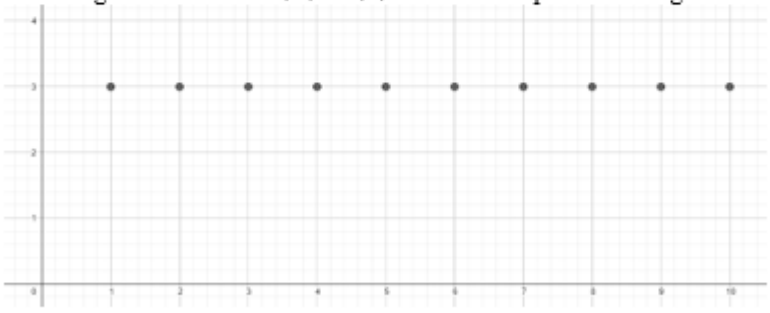
3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{6n^2-4}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

4) Dada la siguiente sucesión $3, 3, 3 \ldots, 3, \ldots$ donde su representación gráfica es:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a, con\ a \epsilon \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen

Secuencia didáctica parte tres

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Parte 3: Calculando límites de sucesiones

1) Sabemos que la sucesión cuyo término general es: $\frac{6n+2}{n}$ **tiene límite**, y lo que nos interesa ahora es calcularlo. Para esto, observen la siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$$

a) ¿Cómo podrían usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas.

1. Una compañera realizó lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

2. Otra compañera hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$$

b) ¿Qué opinan? ¿Quién tendrá razón? Expliquen y justifiquen sus respuestas.

2) Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión cuyo término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$ donde sabemos que **tiene límite**. Para esto, observa lo siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$$

a) ¿Cómo podrías usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Un compañero realizo lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

2. Otro compañero hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 3$$

b) ¿Qué opinas? ¿Quién tendrá razón? Justifiquen

3) Calculen el límite de la siguiente sucesión:

$$\frac{-7n^5 + 2}{7n^5}$$

4) Calculen el límite de la siguiente sucesión:

$$\frac{25n + 5}{25n^2 - 1}$$

Cuestionario posterior

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

CUESTIONARIO POSTERIOR

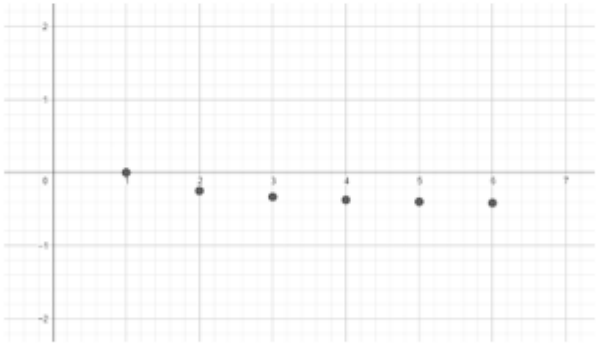
1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión

2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1}$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$. Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**.

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no.

Autorización estudiante

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y
ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los limites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Victoria Bastías Rojas a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los limites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

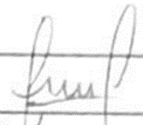
Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Vanesa Alejandra Rojas Carpenter
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	14.206.968-7
Fecha de Nacimiento	17/10/1980
Teléfono	990152736
Correo electrónico	VanesaRojas.Carpenter@gmail.Com
Comuna	La Prado
Región	Metropolitana

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	22/11/2022

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Victoria Paz Bastías Rojas
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	22.015.707-5
Fecha de Nacimiento	09/01/2006
Establecimiento educacional	Liceo Teniente Dagoberto Godoy N°3

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

Sí (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Victoria Paz Bastías Rojas

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto Sí X	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto** No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable Nombre: Jorge Zambrano Canales	**Datos Comité de Ética Institucional** Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Victoria Bastías

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

FIRMA

Ciudad, 22 de noviembre de 2022

11

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Maite Zamorano Tapia. a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Eliana Tapia Sánchez
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	12.859.014-5
Fecha de Nacimiento	02/07/1975
Teléfono	981671519
Correo electrónico	eliana.tapia.75@Gmail.com
Comuna	La Prado
Región	Metropolitana.

Firma por consentimiento	Eliana Tapia

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	22-11-2022

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Maite Zamorano Tapia
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	22.066.030-8
Fecha de Nacimiento	31/03/2006
Establecimiento educacional	Liceo de Pobleto Godoy Nº3

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

Sí (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Maite Zamorano Tapia

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto**
Sí X	No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Jorge Zambrano Canales	Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Maite Zamorano

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

Maite

FIRMA

Ciudad, 22 de 11 de 2022

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina Nº 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Isidora Fuentes a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Ruth del Pilar Chavez Huenquilef
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	14.199.621-5
Fecha de Nacimiento	18 - Sept. - 1981
Teléfono	94909 1182
Correo electrónico	~~RUTH~~ CHAVEZH@GMAIL.COM.
Comuna	LO PRADO.
Región	Metropolitana.

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	23-11-2022

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Isidora Catalina Fuentes Chavez
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	22.109.055-1
Fecha de Nacimiento	05-05-2006
Establecimiento educacional	Liceo Tte Dagoberto Godoy N°3

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

☑ (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Isidora Fuentes.

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto**
Sí X	No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Jorge Zambrano Canales	Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales	Isidora Fuentes Chaiver
INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE	**NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE**
FIRMA	**FIRMA**

Ciudad, _____ de _____ de _____

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la Investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Florencia González Pérez a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	John González Arias
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	12.575.959-9
Fecha de Nacimiento	30 Enero 2022
Teléfono	963608319
Correo electrónico	Gonzalez Arias John @ Gmail.com
Comuna	Pudahuel
Región	Metropolitana

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha 23/11/2022	

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Florencia Gonzalez Pizarro
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	21.875.563-1
Fecha de Nacimiento	01 Julio 2005
Establecimiento educacional	Diego Portales

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Si (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Florencia González Pérez

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto Sí ✓	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto** No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable Nombre: Jorge Zambrano Canales	**Datos Comité de Ética Institucional** Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Florencia González Pérez

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

Florencia

FIRMA

Ciudad, 22 de 11 de 2022.

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Yeisy Antonella Huerta Chacón a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Pamela Antonieta Chacón Améstica
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	11 479 855 - K
Fecha de Nacimiento	30/12/1968
Teléfono	97102578
Correo electrónico	anto. pame. 68 @ gmail. com
Comuna	lo prado
Región	Metropolitana

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	22 / 11 / 2022

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Kelsy Antonella Huerta Chacón
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	21990956-3
Fecha de Nacimiento	09 / 11 / 2005
Establecimiento educacional	Liceo Teniente Bayoberto Godoy lo prado.

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N° 675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

[Si] (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

[✓] Sí, quiero participar

Nombre: Keisy Antonella Huerta Chacón

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto**
Sí X	No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Jorge Zambrano Canales	Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Kheisy Huerta Chacón

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

Kheisy H.

FIRMA

Ciudad, 22 de 11 de 2022

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la Investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Israel González Castro a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Paola Andrea Castro Pinto
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	11.626212 - 6
Fecha de Nacimiento	22/01/1970
Teléfono	999429685
Correo electrónico	Paolita46.c@gmail.com
Comuna	Estación Central
Región	Metropolitana

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	VIERNES 25 DE NOV.

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	ISRAEL JOHNS GONZÁLEZ CASTRO
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	22.010.970-4
Fecha de Nacimiento	02/01/2006
Establecimiento educacional	LICEO TENIENTE DAGOBERTO GODOY N°3

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

Si (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Israel Gonzalez Castro

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto Sí ✓	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto** No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable Nombre: Jorge Zambrano Canales	**Datos Comité de Ética Institucional** Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

FIRMA

Ciudad, _____ de _____ de _____

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docentes Guías de la Investigación: Dra. Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Lissette briceño a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

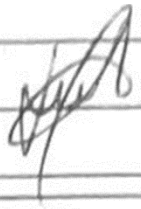
Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	JESENIA SOLANGE SOLO SANTOS
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	16.384.385-4
Fecha de Nacimiento	
Teléfono	
Correo electrónico	
Comuna	LO PRADO
Región	METROPOLITANA

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Lizsette Millaray Barrio Soto
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	21 942148-6
Fecha de Nacimiento	18 Septiembre
Establecimiento educacional	Liceo Teniente Hugo Godoy #3

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

[S] (Si/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

[✓] Sí, quiero participar

Nombre: Liseth Briceño

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto**
Sí X	No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Jorge Zambrano Canales	Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Lissette Briceño

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

FIRMA

Ciudad, _____ de _____ de _____

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

CARTA DE CONSENTIMIENTO Y
CESIÓN DE DERECHOS DE IMAGEN Y VOZ DE NIÑAS, NIÑOS Y ADOLESCENTES

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Docentes Guías de la investigación: Dra. Lorena Espinoza

Investigador: Jorge Zambrano Canales

Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

A través de la presente autorizo a Catalina Rios Navarrete a participar del Proyecto de Tesis llamado "El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje", a cargo del profesor Jorge Andrés Zambrano Canales.

Además, a través de la presente autorizo que se pueda hacer uso del registro visual, audiovisual, audio y voz que exista de la participación del/la menor de edad bajo mi tutela en las grabaciones de 6 clases. De completa conformidad, acepto que las grabaciones en video, puedan ser utilizadas con fines pedagógicos e investigativos en el Proyecto anteriormente mencionado.

El presente consentimiento, cuenta con la aprobación explícita de el/la menor a mi cargo (asentimiento).

A continuación, se solicita completar la siguiente información del apoderado/a o tutor/a y de el/la menor de edad. **En el caso del apoderado/a o tutor/a se solicita firmar por diferenciado el consentimiento de la cesión de imagen y voz, dejando así la opción a optar por una o por las dos opciones.**

	Datos del apoderado(a) o tutor(a)
Nombres y Apellidos (Legal)	Estela Peralillo Gomez
Nombre Social (si corresponde)	—
RUT	9.118.261-0
Fecha de Nacimiento	5/6/1965
Teléfono	967251839
Correo electrónico	—
Comuna	Padahuel norte
Región	Santiago

Firma por consentimiento	

Firma por cesión de imagen y voz	
Fecha	

	Datos de el/la menor de edad
Nombres y Apellidos (legal)	Catalina Macnamara Peñailillo
Nombre Social (si corresponde)	—
RUT	21.632.160-K
Fecha de Nacimiento	6/8/2004
Establecimiento educacional	Liceo teniente dagoberto godoy

	Datos del investigador
Nombres y Apellidos (legal)	Jorge Andrés Zambrano Canales
Nombre Social (si corresponde)	
RUT	17928666-1
Firma Investigador	

ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy estudiante del Magister en Educación Matemática. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones, y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en el problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones para conocer sobre límites de sucesiones mediante el concepto de distancia. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Jorge Zambrano Canales, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N° 675 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

☑ (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☑ Sí, quiero participar

Nombre: Catalina Mac-namara

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto Sí ✓	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto** No _____

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Jorge Zambrano Canales al +56957840104.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

Investigador Responsable Nombre: Jorge Zambrano Canales	**Datos Comité de Ética Institucional** Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación.

Jorge Zambrano Canales

INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

Catalina M.

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

Catalina M.

FIRMA

Ciudad, _____ de _____ de _____

Universidad de Santiago de Chile | Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N° 875 | Santiago | Chile
Segundo piso | oficina N° 200 | Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl | www.vridei.usach.cl

Carta de autorización de la directora

COMITÉ DE
ÉTICA INSTITUCIONAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

CARTA DE AUTORIZACIÓN DEL (LA) DIRECTOR(A) DEL ESTABLECIMIENTO DONDE SE DESARROLLARÁ LA INVESTIGACIÓN

Autorizo el desarrollo del proyecto de investigación titulado El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje, dirigido por el investigador don Jorge Zambrano Canales en este establecimiento.

Como director(a) estoy al tanto de la naturaleza y de los objetivos de esta investigación, en la cual se recopilará información a través de la revisión o desarrollo de los siguientes elementos: secuencia didáctica, grabación de clases, cuestionario previo y posterior de la implementación de la secuencia didáctica.

Asimismo, la participación de los/as participantes o sujetos de investigación es LIBRE Y VOLUNTARIA e independiente de esta autorización.
También entiendo que la participación de las personas que pertenecen a la institución que dirijo (pacientes, funcionarios(as), dependientes, estudiantes, docentes) conlleva un manejo confidencial de la información recabada, sin que se identifique ni a las personas ni a las organizaciones en los documentos o publicaciones derivadas del estudio.
La información obtenida será utilizada solo con fines de esta investigación, estará bajo la custodia del investigador responsable por 5 años y luego será destruida. No obstante, lo anterior,
No (sí o no) acepto que se señale el nombre de la organización en los resultados de la investigación.
Sí (sí o no) me interesa conocer los resultados de la investigación.
Consiento actuar como ministro de fe en la firma del consentimiento o en designar un delegado al efecto.

Entiendo que ante cualquier duda o consultas respecto de la investigación se puede contactar al investigador responsable Jorge Zambrano Canales al +56957840104 y ante algún reclamo referido a la vulneración de los derechos de los participantes, se puede dirigir al Dr. Jairo Vanegas López, Presidente del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. E.mail: comitedeetica@usach.cl

La presente Carta de Autorización se firma en tres ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a), otro en poder del (la) Director(a) y una última copia es remitida al Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

Para formalizar el permiso en este estudio, firmo a continuación
Atentamente,

LICEO TENIENTE DAGOBERTO GODOY
DIRECCIÓN
LO PRADO

Clara Elizabeth Pérez Quintero
clara.perez@redcrecemos.cl
NOMBRE DEL DIRECTOR(A)
CORREO ELECTRÓNICO - TELÉFONO 9-61479884

FIRMA

Ciudad Santiago Día 25 del mes de noviembre del año 2022

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vridei.usach.cl

Respuestas por estudiante cuestionario previo, secuencia didáctica y cuestionario posterior:

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guia de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E1

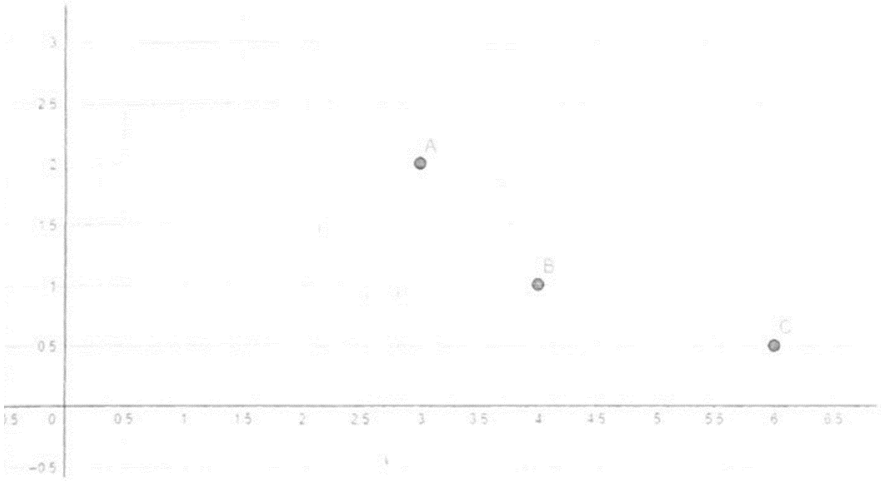
Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número -2 con el número 4?

a una distancia de 6

2 - Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico

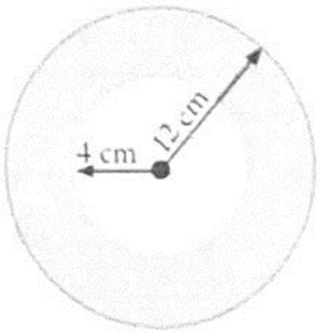


3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

Si ya que la diferencia es mínima y es menos probable que altere un resultado

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ ... $(\sqrt{2})^2 = 1,9881$

Hexágono $3,14 - 1,9881 = 1,1519$

$$\frac{6 \cdot \frac{1,73}{2}}{2} = \frac{5,19}{2} = 2,595$$

$3,14 - 2,595 = 0,54$

octógono (8 lados)

$0,76 \cdot 8 = 6,08$?

$\frac{1,84}{2} = 0,92$

$$\frac{5,5936}{2} = 2,7968$$

$3,14 - 2,79$ ...

$= 0,343$

Dodecágono (12 lados)

$$\text{base} = \frac{2,44 + 1,41}{2} = \frac{3,85}{2} = 1,925$$

$$\text{apótema} = \frac{2,44 - 1,41}{4} = \frac{1,03}{4} = 0,2575 \cdot 12 = 3,09$$

$$\frac{12 \cdot \frac{1,03}{4}}{2} = 3,09 \rightarrow \frac{3,09 \cdot 1,925}{2} = 2,9741 \cong 2,97$$

$3,14 - 2,97$

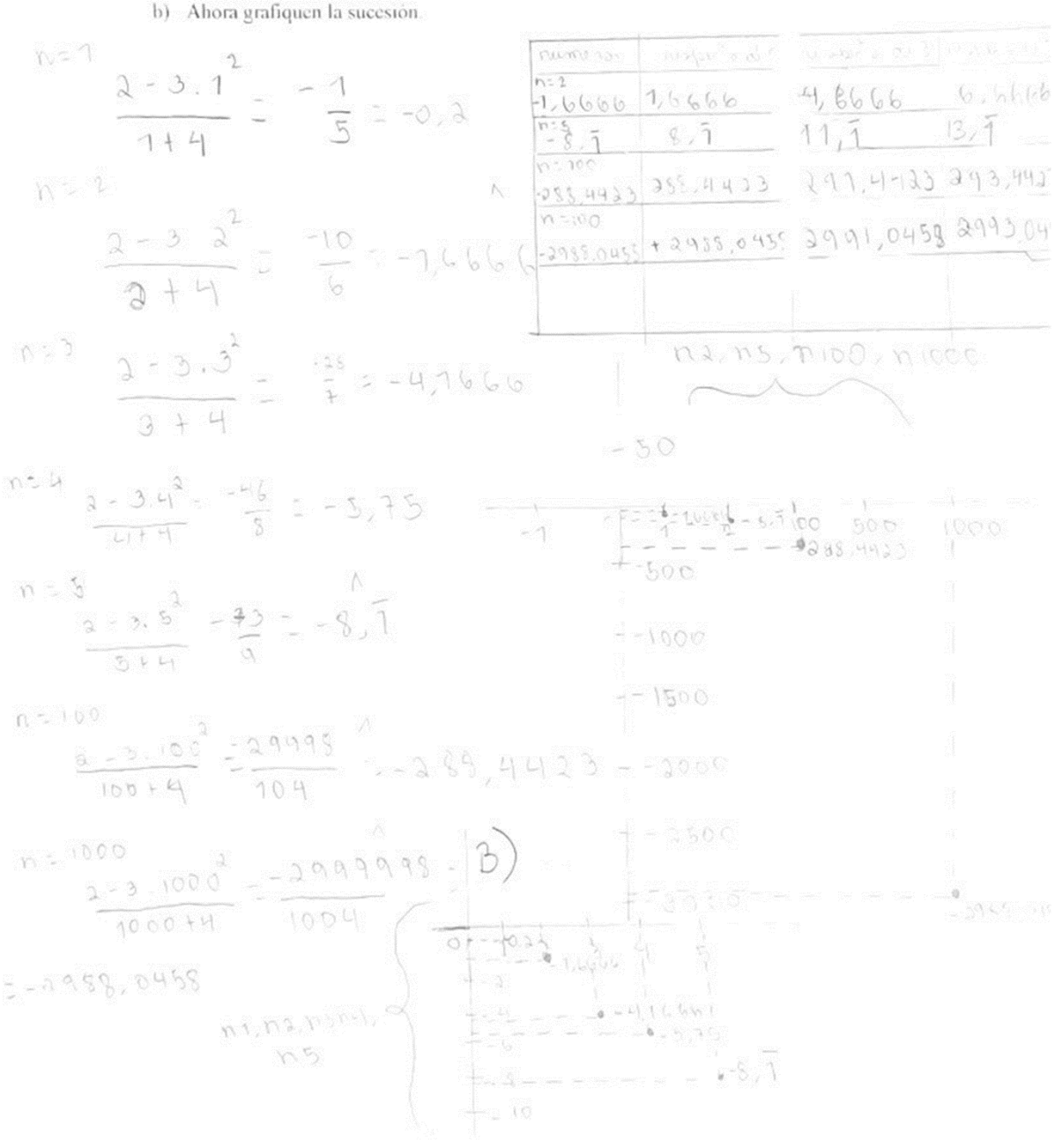
$= 0,17$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Licenia Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{-1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$ Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2, n = 5, n = 100, n = 1000$ ¿Que pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

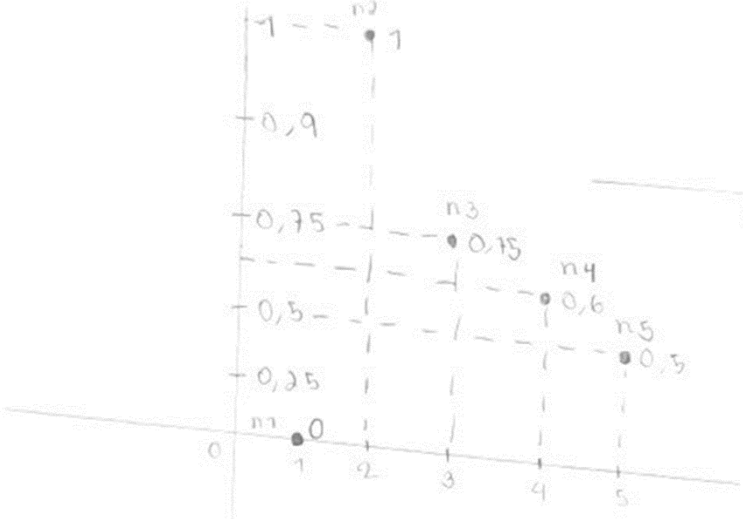


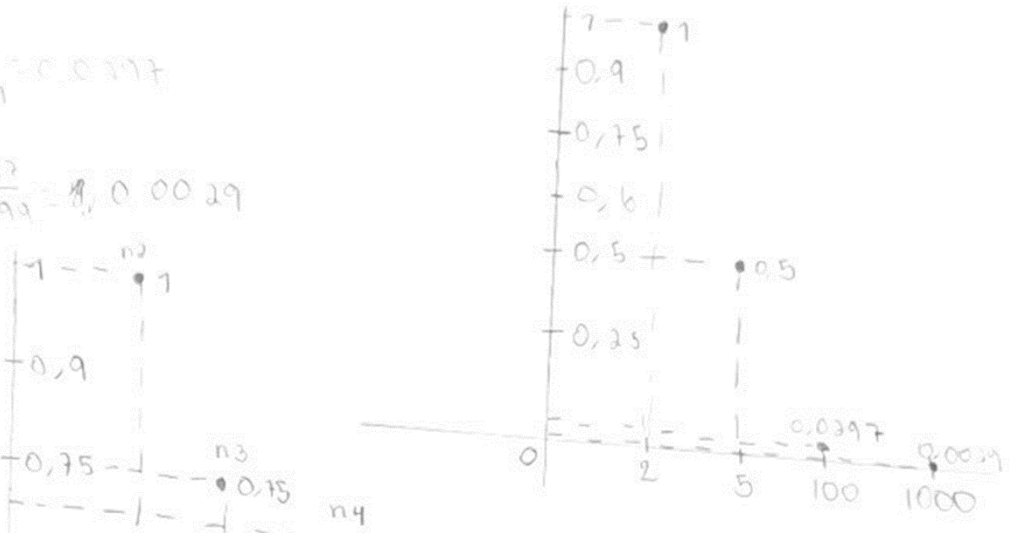
Observe la siguiente sucesion que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{8}, a_3 = \frac{9}{15}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{3n-1}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Que pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el numero 0? ¿Y para los numeros 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

n2 = 1	1	2	4
n5 = 0,5	0,5	2,5	4,5
n100 = 0,0297	0,0297	2,9703	4,9703
n1000 = 0,0029	0,0029	2,9971	4,9971





2

fórmula $\frac{3n+4}{n+1}$

n = 1

$\frac{3 \cdot 1 + 4}{1+1} = \frac{7}{2} = 3,5$ (4)

n = 100

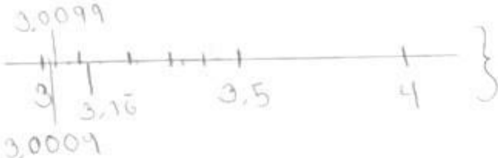
$\frac{3 \cdot 100 + 4}{100+1} = \frac{304}{101} = 3,0099$ (2)

n = 5

$\frac{3 \cdot 5 + 4}{5+1} = \frac{19}{6} = 3,1\overline{6}$ (3)

n = 1000

$\frac{3 \cdot 1000 + 4}{1000+1} = \frac{3004}{1001} = 3,0009$ (1)



} respecto al 3

n 1 = $\frac{7}{2}$ = 3,5
n 2 = $\frac{10}{3}$ = 3,3
n 3 = $\frac{13}{4}$ = 3,25
n 4 = $\frac{16}{5}$ = 3,2
n 5 = $\frac{19}{6}$ = $3,1\overline{6}$

a)

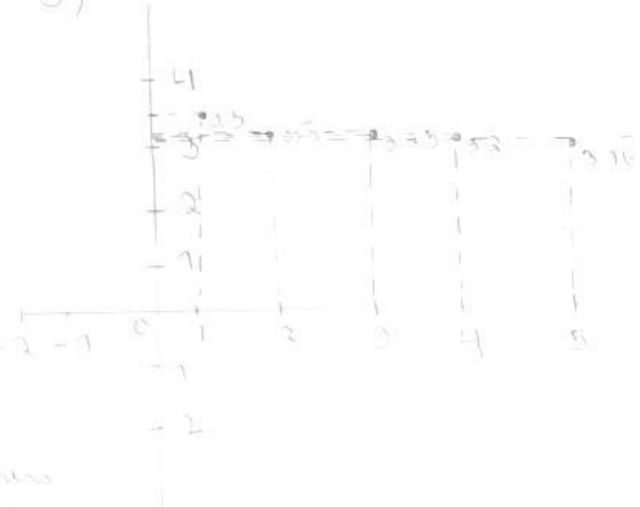
3 − 3,5 = 0,5
3 − $3,1\overline{6}$ = $0,1\overline{6}$
3 − 3,0099 = 0,0099
3 − 3,0009 = 0,0009

6 − 3,5 = 2,5
6 − $3,1\overline{6}$ = 2,8333
6 − 3,0099 = 2,9901
6 − 3,0009 = 2,9991

10 − 3,5 = 6,5
10 − $3,1\overline{6}$ = 6,8333
10 − 3,0099 = 6,9901
10 − 3,0009 = 6,9991

(Mientras más alto es el número divisor, más cerca está del 3 y en los resultados decimales del 10 y el 6, son números múltiplos de 3)

b)



c) Según el gráfico ... [illegible]

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma

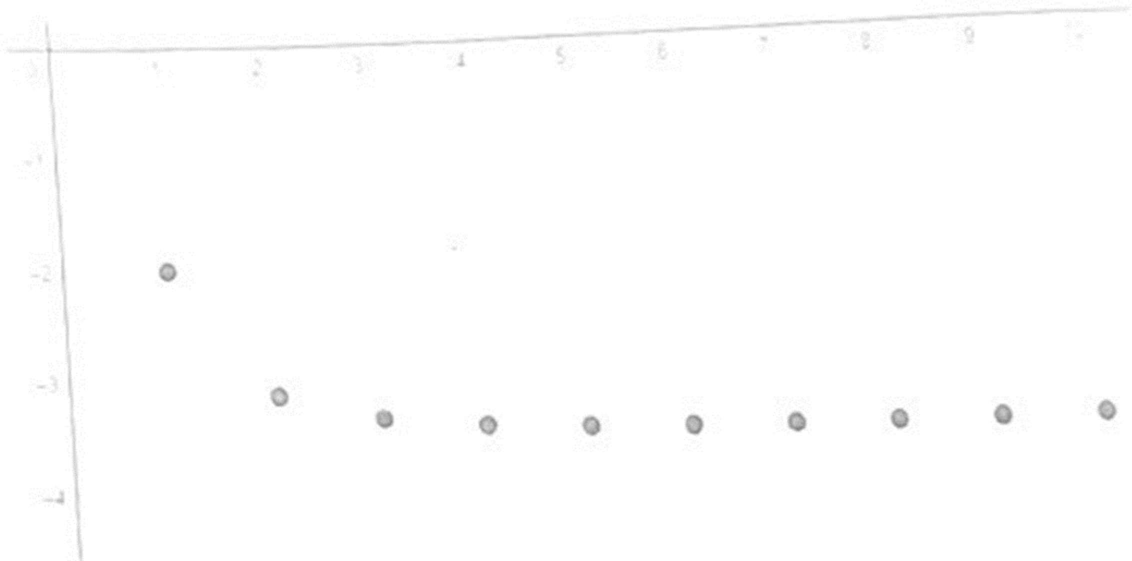
a) Propongan, si es que es posible, hacia que numero tiende o converge la sucesion observando el comportamiento en el gráfico

Es convergente porque [illegible] el comportamiento de los puntos tienden a ir al 0

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

por el comportamiento de los puntos que tienden a ir hacia el 0 pero no lo sobrepasan

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su grafico es de la forma



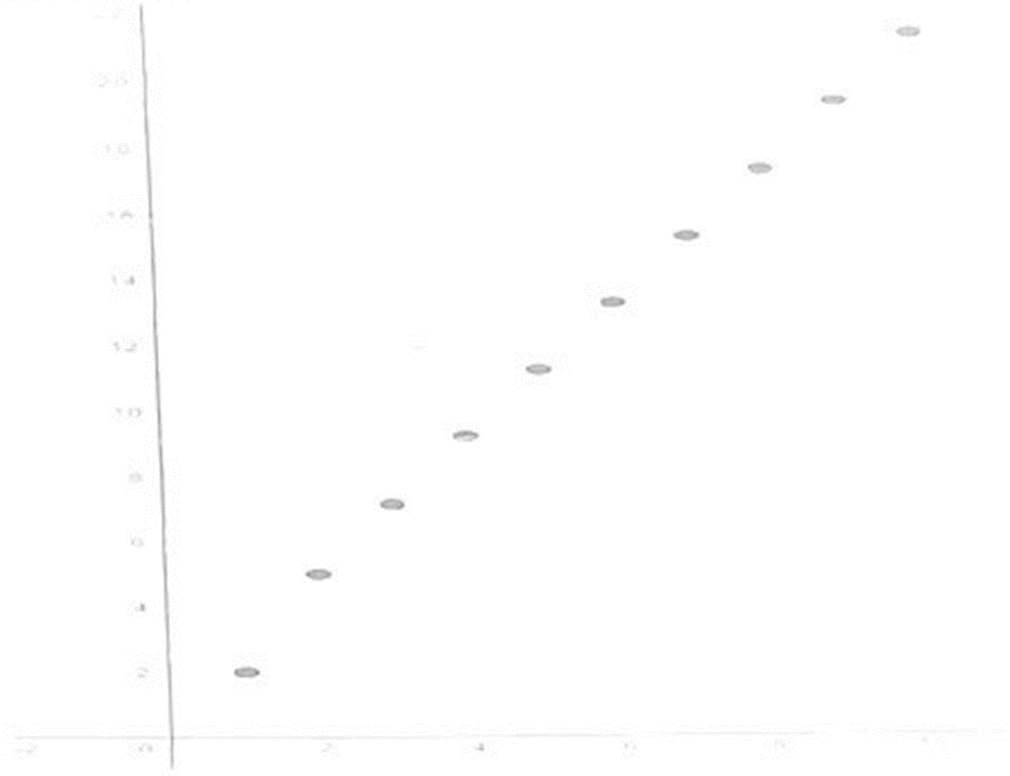
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Si es convergente porque tiende a ir al $\ell = -3,5$ pero no lo alcanza

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el limite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

podemos analizar al observar el gráfico que al llegar a cierto punto tienden a formar una [illegible]

3) Dada la siguiente sucesion $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{6n^2-4}{3n-2}$ y su grafico es de la forma



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesion observando el comportamiento en el grafico

Esta sucesión no es convergente porque

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Parte 3: Calculando límites de sucesiones

1) Sabemos que la sucesión cuyo termino general es $\frac{6n+2}{n}$ **tiene límite**, y lo que nos interesa ahora es calcularlo. Para esto, observen la siguiente manipulación algebraica de la expresión

$$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$$

a) ¿Cómo podrían usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Una compañera realizó lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

2. Otra compañera hizo algo diferente. Observemos lo que realizó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$$

b) ¿Qué opinan? ¿Quién tendrá razón? Expliquen y justifiquen sus respuestas

2) Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión cuyo término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$ donde sabemos que **tiene límite**. Para esto, observa lo siguiente manipulación algebraica de la expresión

$$\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$$

a) ¿Cómo podrías usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Un compañero realizo lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

2. Otro compañero hizo algo diferente. Observemos lo que realizó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 3$$

b) ¿Qué opinas? ¿Quién tendrá razón? Justifiquen

3) Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{-7n^5 + 2}{7n^5}$$

4) Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{25n + 5}{25n^2 - 1}$$

DESAFIO

Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{n^2 + 1}{(n+1)^2}$$

n5 = $\frac{26}{36} = 0,7\overline{2}$

n10 = $\frac{101}{121}$

n7 = 0,5

numero menor / numero mayor } Cuando al numerador le sumo un número mas y se lo sumo al mismo número en el denominador

10,001
10,201

1000000

100 000

n = 100.000 =

$$\frac{100000000049}{100002000001} = 0,999980000 3999$$

La sucesión tiende al 1

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E1

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

Es el número en el que converge la sucesión, cuando el número de la sucesión es tan alto y grande que su resultado se aiste a un solo número y sus distintos decimales

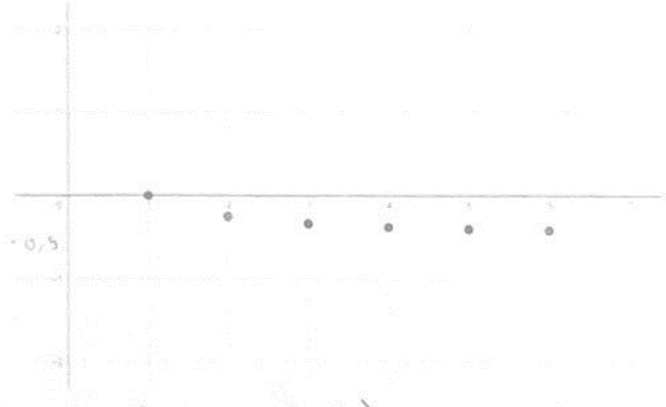
2.- Calcule:

n7: 30

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1}$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$
Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



Converge al número (-0,5), la distancia ent...

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Carales

5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**.

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no.

Si tiene límite, el cual es el número 0 porque cada vez se va dividiendo el 1 por un número aún más alto, haciendo que la diferencia entre los números de sucesión sea cada vez más mínima

Preguntas abiertas

2- calcula $\frac{3+27n}{81n^2-1}$ *antes del calculo según lo que entendí, debería de converger al número 0 porque el denominador crece más rápido que el numerador

$n1 = \frac{30}{6,560} = 0,0045$

$n5 = \frac{135}{164,025} = 0,0008$

$n10 = \frac{273}{636,100} = 0,0004$

$n10000 = \frac{270.009}{686100000000} = 0,00004$

3- $\frac{3n^2-1}{n^2}$ *antes del calculo: creo que no converge, porque el numerador crece más rápido que el denominador, pero no estoy seguro☺

$n1 = \frac{8}{1} = 1$

$n5 = \frac{224}{25} = 8,96$

$n10 = \frac{899}{100} = 8,99$

$n100 = \frac{89.999}{10,000} = 8,9999$

no converge a ninguno de los números señalados, ni 2, ni 3, ni 4, converge al 9, pero hasta el número de sucesión (1000) se mantienen el 8 y sus decimas 9999... por la resta del numerador

$n1000 = \frac{8999.999}{1.000.000} = 8,999999$

5- determina si existe el límite $\frac{n^3+1}{n^2-1}$

$n1 = \frac{2}{0}$ = (no se divide, así que diré que es 21)

$n5 = \frac{126}{24} = 5,25$

$n10 = \frac{1001}{99} = 10,\overline{1}$

$n100 = \frac{1000001}{9,999} = 100,01010$

$n50 = \frac{125001}{2499} = 50,0204$

la sucesión no tiene límite porque el numerador crece al triple de rapidez que el denominador

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E2

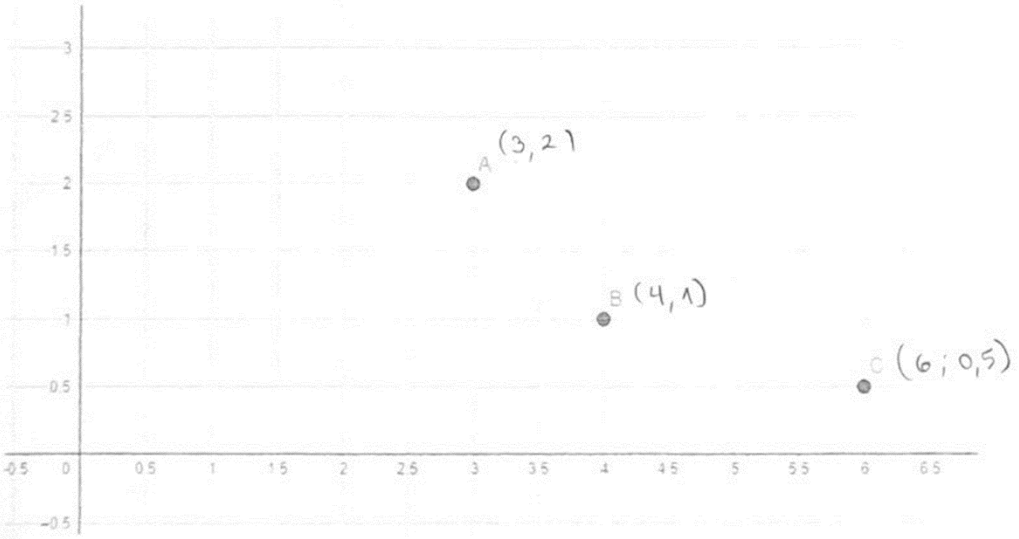
Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número -2 con el número 4?

a 6 unidades de distancia

2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su término general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

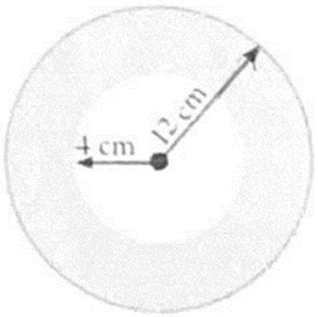
n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

desconozco cómo graficar la tabla

4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



no recuerdo la fórmula para calcular el área de un círculo, pero debería calcular el área de uno de 4cm de radio y el área de uno de 12cm, para luego restarlos y obtener el área sombreada.

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

sí es, ya que al pasarlo a fracción, sería $\frac{9}{9}$, que es 1

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

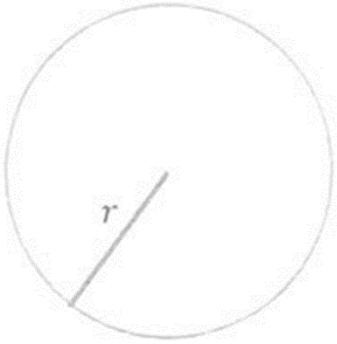
no conozco el concepto

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E2

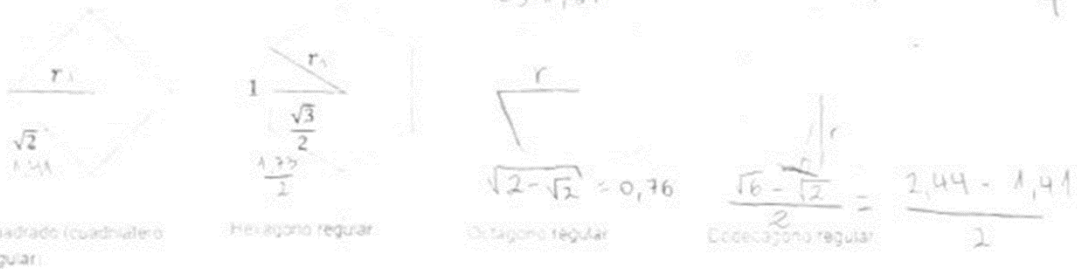
Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones

1) Arquimedes en el siglo IV a C realizó una aproximación del área de la circunferencia, por medio del calculo de áreas de polígonos regulares que sabía calcular. Esta actividad se trata de pensar como lo hizo Arquimedes.
Dada la siguiente circunferencia de radio $r = 1$ y vamos a utilizar $\pi = 3{,}14$



Consideremos los siguientes polígonos regulares **inscritos en esta circunferencia**, en que la distancia desde el centro hasta cada uno de sus vértices del polígono mide lo mismo que el radio de la circunferencia.

$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ es 1,84 $\quad a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{2{,}44+1{,}41}{4}$



Recuerde que el área de un **polígono regular** es $A = \frac{p\,a}{2}$ donde p es el perímetro del polígono regular y a es la apotema. Además, considere las siguientes aproximaciones:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \;;\; \sqrt{3} = 1{,}73 \;;\; \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}84 \;;\; \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}76 \;;\; \sqrt{6} = 2{,}44$$

a) ¿Qué sucede con la diferencia del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscritos? se hace menor a medida que aumenta la cantidad de lados

b) ¿Qué concluye usted respecto el área de los polígonos regulares inscritos y la de la circunferencia?

el área de las circunferencias es siempre la misma, pero la de los polígonos regulares aumenta si tiene más lados, mientras más lados, más cercana es el área del polígono regular al área de la circunferencia

rado:

circunferencia $= \pi \cdot 1^2 = 3,14 \cdot 1 = \boxed{3,14}$

A quadrado $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,41^2 = \boxed{1,9881}$

Hexágono:

A circunferencia = $\boxed{3,14}$

A hexágono $= \frac{1 \cdot 0,865}{2} \Rightarrow 0,4325 \cdot 6 = \boxed{2,595}$

Octágono:

A circunferencia = 3,14

A octágono $= \frac{0,76 \cdot 0,92}{2} \Rightarrow 0,3496 \cdot 8 = \boxed{2,7968}$

Dodecágono:

A circunferencia = 3,14

A dodecágono $= \frac{0,515 \cdot 0,9625}{2} = 0,24784375 \cdot 12 = \boxed{2,974125}$

2) a) $n = 1 = \underbrace{\frac{7}{2}}_{3,5}$, $n = 5 = \underbrace{\frac{19}{6}}_{3,1\overline{6}}$, $n = 100 = \underbrace{\frac{304}{101}}_{3,00990099}$, $n = 1000 = \underbrace{\frac{3004}{1001}}_{3,000999000}$

$n = 300 = \frac{904}{301} = 3,003322259$, $n = 3000 = \frac{9004}{3001} = 3,000333222$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión.

$\cdot 2 \cdot 2$
$\frac{2}{4} = \frac{-10}{6}$

$3 \cdot 5 \cdot 5$
$\frac{-75}{+4} = \frac{-73}{9}$

$\frac{2 - 3 \cdot 100 \cdot 100}{100 + 4} =$

$n=2$	$\frac{-10}{6}$
$n=5$	$\frac{-73}{9}$
$n=100$	$\frac{-29998}{104}$
$n=1000$	$\frac{-2999998}{1004}$

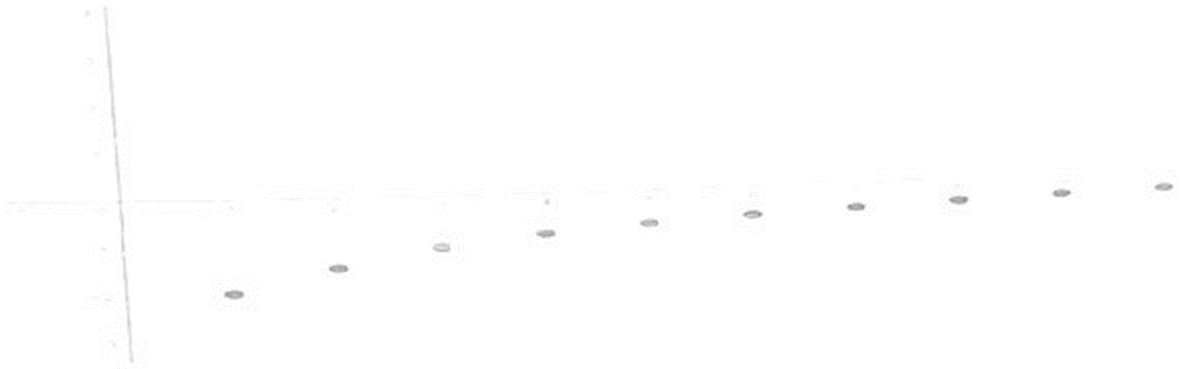
a) que mientras más grande el valor de n, es mayor la distancia al 0. Lo mismo sucede con el 3 y el 5

c) que la compañera que indica que para ningún término de n, la gráfica tocará al número 0 está en lo correcto, ya que la sucesión se aleja cada vez más de 0.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma



a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

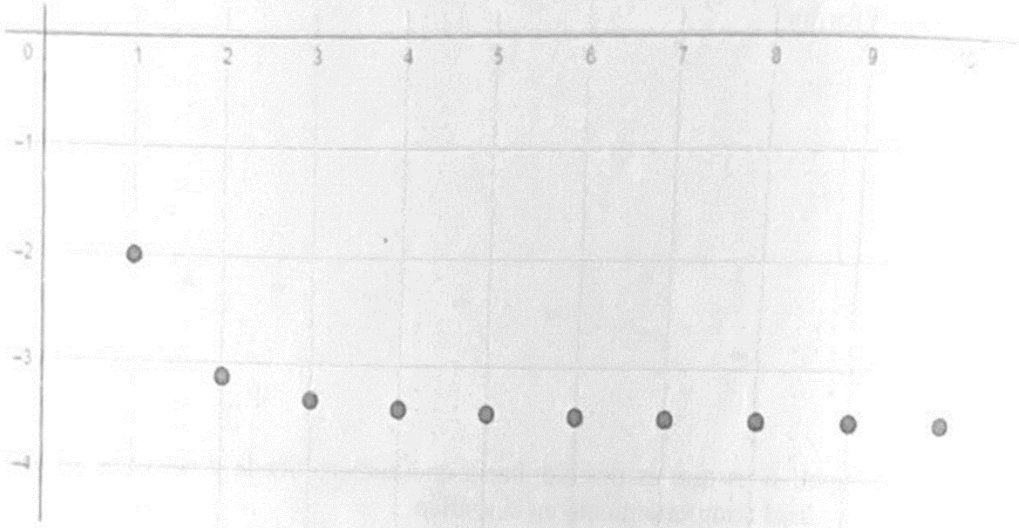
Sí, hacia el 0

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque comienza a acercarse de a poco, deja de generar mayores distancias. El 0 es el número más cercano.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su grafico es de la forma:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

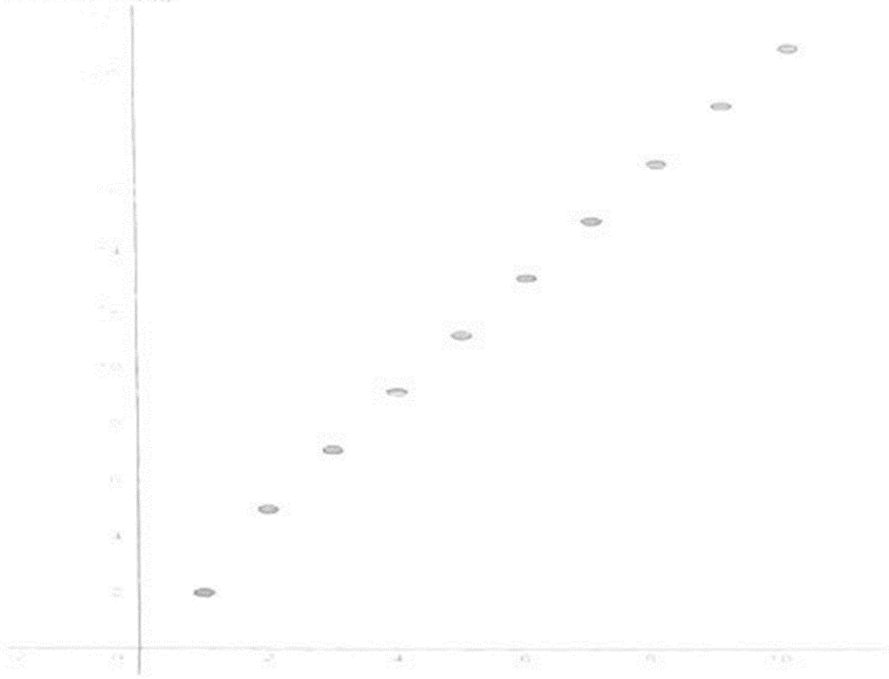
Sí, hacia el -3,5

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Ya que la distancia al -3,5 es cada vez menor, ya no existe mayor variación

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía: [illegible]
Investigador: Jorge [illegible]

3) Dada la siguiente sucesion $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{6n^2-4}{3n+2}$ y su grafico es de la forma:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

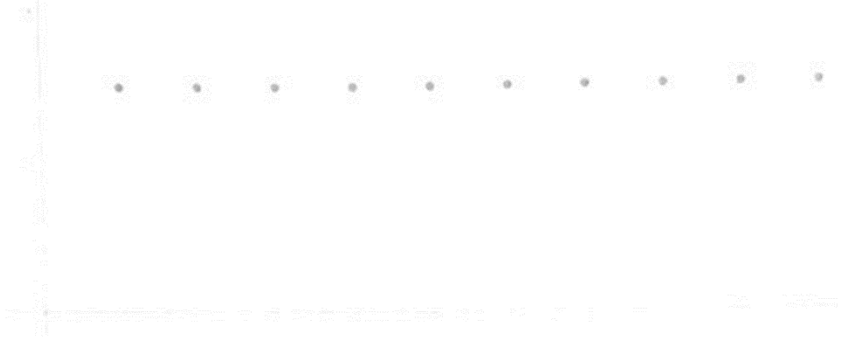
no, es una sucesión divergente, no tiene límite

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

concluyo que no tiene límite, porque los distancias no se acercan a un número en específico, solo crece sin parar

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ..., 3, ... donde su representación grafica es



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Sí, el 3

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

ya que todos los términos de la sucesión corresponden al 3

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja Justifiquen

a medida que se utilicen "n" más grandes, los términos deben poseer menor distancia entre ellos y estar cada vez más cerca de un número específico

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen

Sí, el 0, ya que, a medida que n corresponda a números más grandes, los términos serán cada vez más similares a 0, pero nunca 0.

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a, con\ a \epsilon \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen

Sí, a, porque todos los términos de la sucesión corresponden a "a"

Parte 3: Calculando límites de sucesiones

1) Sabemos que la sucesión cuyo término general es $\frac{6n+2}{n}$ **tiene límite**, y lo que nos interesa ahora es calcularlo. Para esto, observen la siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$$

4, 7, (6,5)(6,4)(6,3)(6, 28)(6,25)

a) ¿Cómo podrían usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas: es más rápido el cálculo

1. Una compañera realizó lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \times$$

2. Otra compañera hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6 \quad \checkmark$$

b) ¿Qué opinan? ¿Quién tendrá razón? Expliquen y justifiquen sus respuestas: La segunda estudiante tiene razón, el límite es 6, no puede ser 0, ya que el numerador siempre es mayor que el denominador

2) Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión cuyo término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$ donde sabemos que **tiene límite**. Para esto, observa lo siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$$

(1,5), 1, (0,75), (0,6), (0,5), (0,43), (0,375), (0,3̄), (0,3), (0,27), (0,25), (0,23)

a) ¿Cómo podrías usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas: para un cálculo más rápido

1. Un compañero realizo lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0 \quad \checkmark$$

2. Otro compañero hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 3 \quad \times$$

b) ¿Qué opinas? ¿Quién tendra razón? Justifiquen

el primer estudiante tiene razón, el límite es 0, ya que el denominador es mayor que el numerador
↳ del termino general

3) Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{-7n^5+2}{7n^5}$$

n=1 = -0,714285
n=2 = -0,99107
n=3 = -0,99882421
n=4 = -0,9997209
n=5 = -0,99990857 14
n=6 = -0,9999632560
n=7 = -0,9999830003

$$\frac{-7n^5+2}{7n^5} = \frac{-7n^5}{7n^5} + \frac{2}{7n^5} = -1 + \frac{2}{7n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-7n^5+2}{7n^5} = -1$$

4) Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{25n+5}{25n^2-1} = \frac{5(5n+1)}{(5n+1)(5n-1)} = \frac{5}{5n-1}$$

n=1 = 1,25
n=2 = $0,\overline{5}$
n=3 = 0,3571

$$\lim_{n\to\infty} \frac{25n+5}{25n^2-1} = 0$$

DESAFIO

Calculen el limite de la siguiente sucesión

$$\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$

$n^2 + 2n + 1$

n=1 =
n=50 = 0,9615532
n = 100000 = 0,9999800

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2} = 1$$

[3,]

3) $\frac{3n^2 - 1}{n^2} = \frac{3n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \boxed{3 - \frac{1}{n^2}}$

4) $n = 100\,000\,000 = -0,99999995$

$n = 999\,999\,999\,999\,999 = -0,5$

5) $n = 99\,999 \Rightarrow \frac{999\,970\,000\,300\,000}{9\,999\,800\,000} = 99\,999,0001$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E2

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

es el valor máximo o mínimo que puede alcanzar una sucesión

2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1} = \frac{3(1+9n)}{(9n+1)(9n-1)} = \frac{3}{9n-1}$$

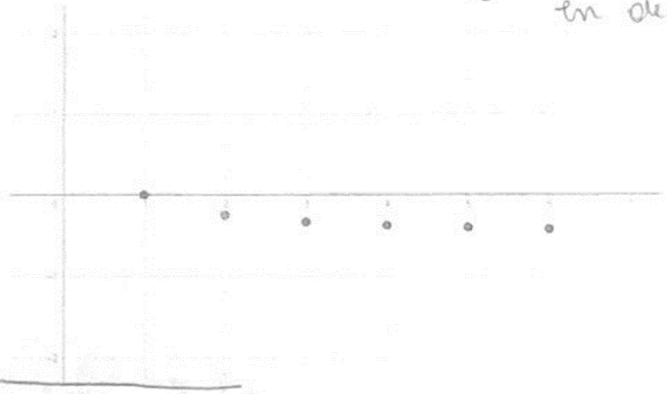
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1} = 0$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$
Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?

$$3 - \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3 - 0 = 3$$

R: Converge al número 3

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a qué número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$ → sí converge (variable con = exponente en denominador y numerador



Converge al -0,5

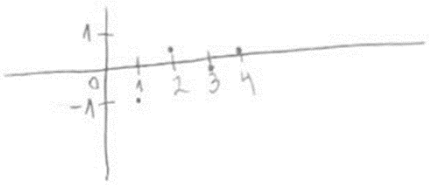
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**.

no tiene límite.
es una sucesión divergente, ya que el numerador es mayor que el denominador. Esta sucesión seguirá creciendo infinitamente.

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no. $\frac{(-1)^n}{n}$? → siempre 1 o -1?

sí tiene límite, el 0



Preguntas abiertas

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo que mejor entendiste?

que si el término general tiene un n con mayor exponente en el denominador, la sucesión tendrá límite 0, si n es mayor en el numerador, la sucesión no tendrá límite, y si n tiene igual exponente en el numerador y denominador, la sucesión tendrá límite distinto de 0.

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo más te complicó entender?

qué es el épsilon

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es relevante? ¿Por qué?

distancia, porque gracias a esta podemos justificar el límite de una sucesión.

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es irrelevante? ¿Por qué?

ninguno, todos tienen relevancia, son maneras diferentes de concluir lo mismo

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Loreto Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E3

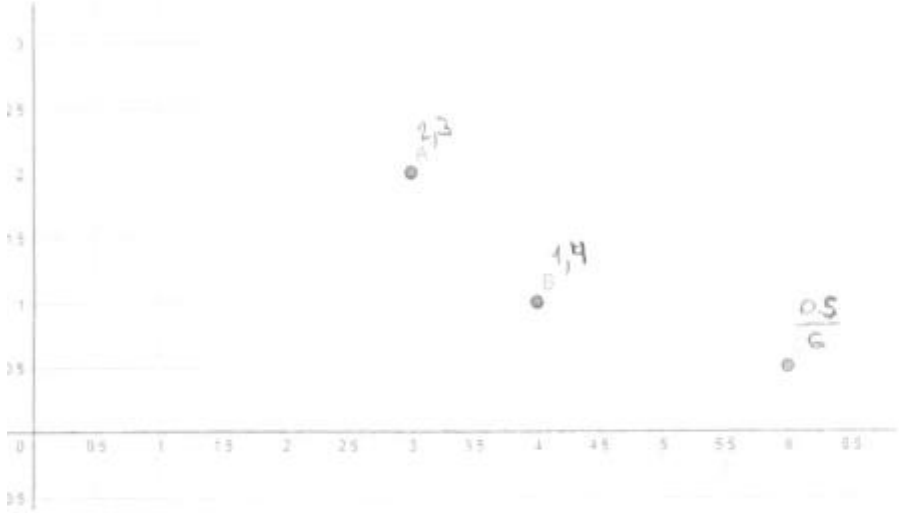
Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el numero 4?

R// 6 números de distancia

2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico

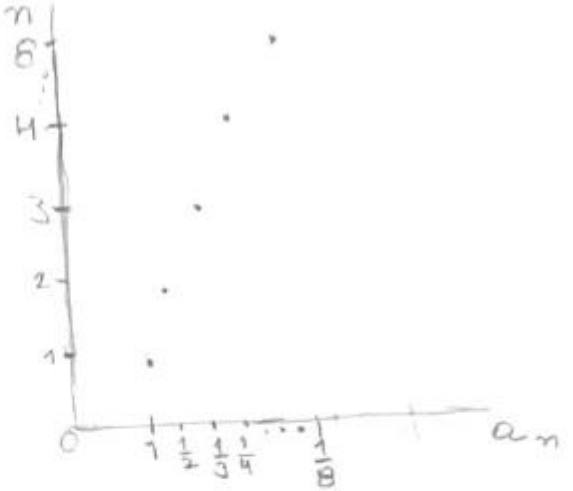


3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

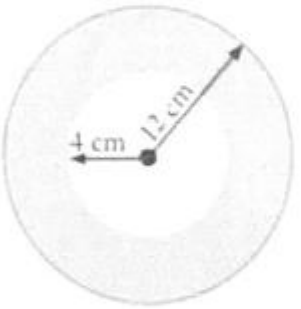
n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guia de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



$= 48\ cm$

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

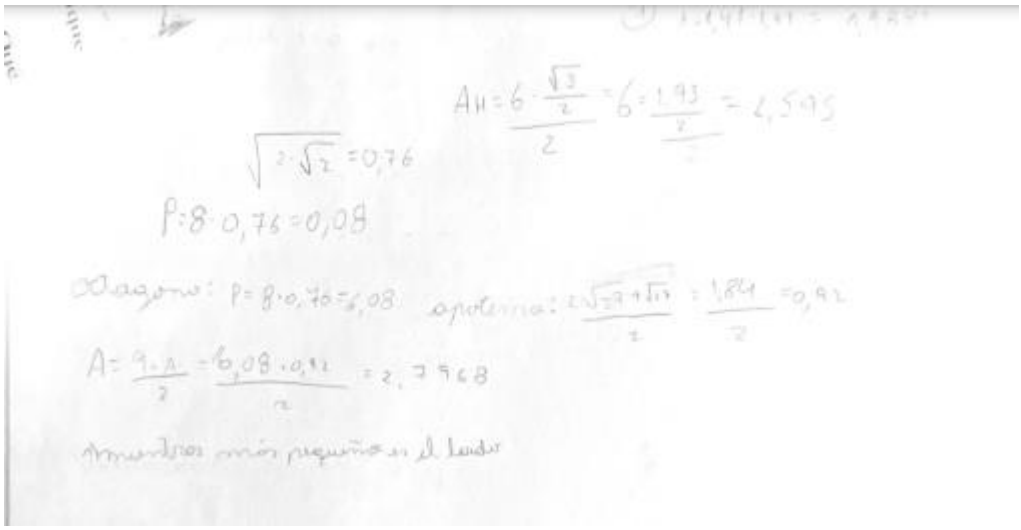
$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$x^2 + 2x = 0 + 1 = \frac{1}{-1} = -1$ //
$x^2 - 1 = -1$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

No seria uno porque si le agregamo 1 daria como resultado 1.9999

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión



$$A_H = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 6 \cdot \frac{\frac{1,93}{2}}{2} = 2,595$$

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = 0,76$$

$$P = 8 \cdot 0,76 = 0,08$$

Hagono: $P = 8 \cdot 0,76 = 6,08$ apotema: $\frac{2\sqrt{2 \cdot 9 + \sqrt{17}}}{2} = \frac{1,84}{2} = 0,92$

$$A = \frac{9 \cdot 1}{2} = \frac{6,08 \cdot 0,92}{2} = 2,7968$$

mientras más pequeño es el lado

día 2

Término general

$$\frac{3N+4}{N+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3N+4}{3+1} = \frac{3 \times 1 + 4}{1+1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\frac{10}{3} = \frac{3N+4}{N+1} = \frac{3 \times 2 + 4}{2+1} = \frac{10}{3} = 3,\overline{3}$$

$$\frac{13}{4} = \frac{3 \times 3 + 4}{3+1} = \frac{17}{4} = 3,25$$

$$N = 5 = \frac{3 \times 5 + 4}{5+2} = \frac{19}{6} = 3,9666$$

$$N = 100 = \frac{3 \times 100 + 4}{100+1} = \frac{304}{101} = 3,0099$$

$$N = 1000 = \frac{3 \times 1000 + 4}{1000+1} = \frac{3004}{1001} = 3,0009$$

Obtenga la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ donde su término general es $\frac{n}{n+1}$. Realizar las siguientes actividades y explique su respuesta:

a) Encuentre los términos de la sucesión para $n = 2, n = 5, n = 100, n = 1000$. ¿Qué puede concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 3? ¿Y para los números 1 y 5?

b) Ahora grafique la sucesión

$N^2 \quad \frac{2 - 3 \cdot 2^2}{2 + 4} = \frac{-10}{6} = -1,6$

$N^5 \quad \frac{2 - 3 \cdot 5^2}{5 + 4} = \frac{2 - 75}{9} \quad \frac{25 \cdot 3}{75} = \frac{-73}{9} = -12,16$

$b^{100} \quad \frac{2 - 3 \cdot 100^2}{100 + 4} = \frac{2 - 30000}{100 + 4} = \frac{-29998}{104} = -288,4423$

$N^{1000} \quad \frac{2 - 3 \cdot 1000^2}{1000 + 4} = \frac{2 - 3 \cdot 1000000}{1000 + 4} = \frac{-2999998}{1004} = -2988,0458$

Distancia de 0

$-1,6$ del $0 = 1,6$ de distancia

$-12,16$ del $0 = 12,16$ de distancia

$-288,4423$ del $0 = 288,4423$ de distancia

$-2988,0458$ del $0 = 2988,0458$ de distancia

Distancia del 3 y 5

$-1,6$ del $5 = 6,6$
del $3 = 4,6$

$-12,16$ del $5 = 17,16$
del $3 = 15,16$

$-288,4423$ del $5 = 293,4423$
del $3 = 291,4423$

$-2988,0458$ del $5 = 2993,0458$
del $3 = 2991,0458$

Observe la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{9}, a_3 = \frac{5}{13}, \ldots$ donde su término general es $\frac{5n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2, n = 5, n = 100, n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

$\frac{3 \cdot 2 - 3}{2^2 - 1} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{3 \cdot 5 - 3}{5^2 - 1} = \frac{12}{24} = 0,5$

$\frac{3 \cdot 100 - 3}{100^2 - 1} = \frac{297}{9999} = 0,0297$

$\frac{3 \cdot 1000 - 3}{1000^2 - 1} = \frac{2.997}{999.999}$

$0,002$

Relacion del 0 - 3 - 5

1 Del 0 = 1

0,5 Del 0 = 0,5

0,0297 Del 0 = 0,0297

0,002 Del 0 = 0,002

1 Del 3 = 2

0,5 Del 3 = 2,5

0,0297 Del 3 =

Observa la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{9}, a_3 = \frac{7}{19}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2, n = 5, n = 100, n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

$$\frac{3 \cdot 2 - 3}{2^2 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{3 \cdot 5 - 3}{5^2 - 1} = \frac{12}{24} = 0,5$$

$$\frac{3 \cdot 100 - 3}{100^2 - 1} = \frac{297}{9999} = 0,0297$$

$$\frac{3 \cdot 1000 - 3}{1000^2 - 1} = \frac{2.997}{999.999}$$

$$0,002$$

Relación del 0 - 3 - 5

1 del 0 = 1

0,5 del 0 = 0,5

0,0297 del 0 = 0,0297

0,002 del 0 = 0,002

1 del 3 = 2

0,5 del 3 = 2,5

0,0297 del 3 =

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{5}{2}, \frac{13}{6}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma

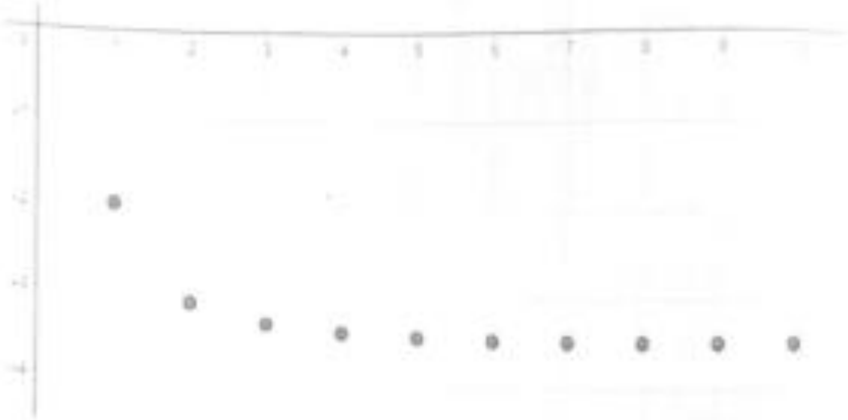
a) Propongan, si es que es posible, hacia que número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

La sucesión tiende al cero

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque cada vez se van haciendo la diferencia entre los números que suceden, sin sobrepasar el número 0

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{11}{8}, \frac{11}{3} ...$ donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma



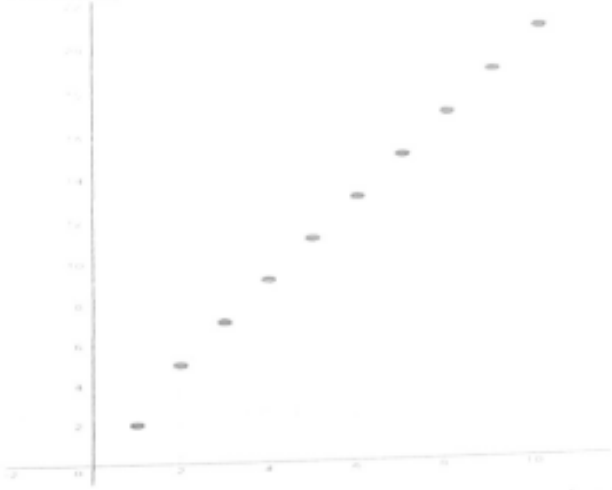
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

Tiende al 4,5

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque nuevamente las distancias entre los números que suceden se van haciendo cada vez más pequeñas en la recta por ejemplo, la distancia entre el número de sucesión 9 y 10 es casi ínfima

3) Dada la siguiente sucesion $2, 5, \frac{10}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{2n^2-4}{3n-2}$ y su grafico es de la forma



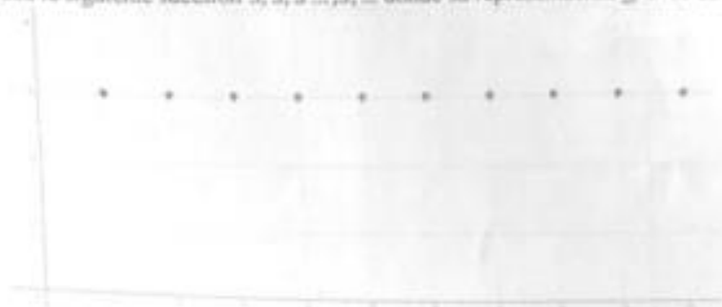
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué numero tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Es una sucesión no convergente

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque según la gráfica, no parece tener un límite, la distancia entre los puntos de una sucesión parece no permanecer la misma siempre, ni más ni menos.

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ..., 3, ... donde su representación gráfica es



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Tiende al número 3

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el limite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque se mantiene siempre en el mismo número, siendo el 3 el límite.

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

Que la distancia entre los números de sucesión vayan disminuyendo.

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el limite de esta sucesión? Justifiquen

Si existe un límite, el cual se encuentra en 0 o en los decimales de este (ej: $\frac{1}{10.000.000} = 0.000000$

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a$, con $a \in \mathbb{R}$ ¿Existe el limite para esta sucesión? Justifiquen

Si la sucesión siempre es a, entonces el resultado de a será a, siendo a el límite de sucesión.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la Investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Fuenzalida Canales

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

es el límite de una sucesión

2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1}$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$. Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$

5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**.

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no.

Preguntas abiertas

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo que mejor entendiste?

lo que tengo en mi cabeza, son fórmulas, [illegible] no recuerdo bien, 5 segundos, 8 memoria, [illegible]

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo más te complicó entender?

el límite de sucesión, ya que no lo llegué a comprender bien, y a que no comprendo bien las matemáticas [illegible]

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es relevante? ¿Por qué?

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es irrelevante? ¿Por qué?

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

E4

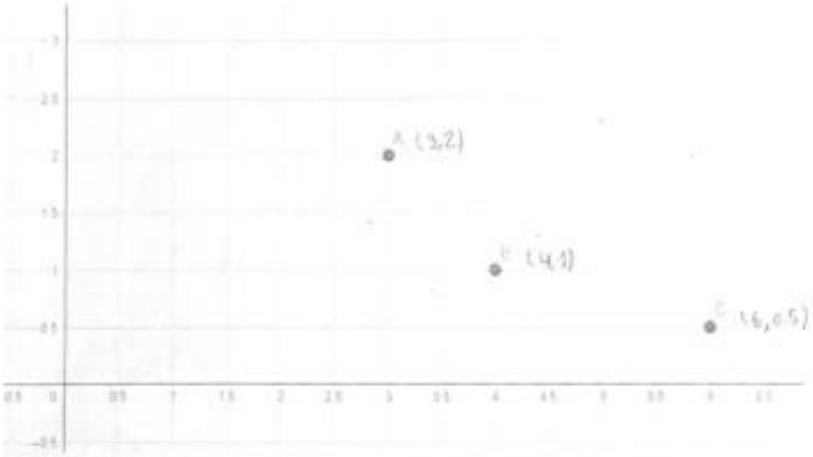
Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el número 4? → la suma de distancia

$-2 - 4 = -6$

2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



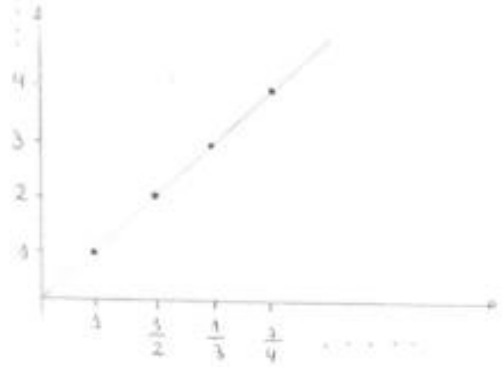
(x, y)
A (3, 2)
B (4, 1)
C (6, 05)

3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

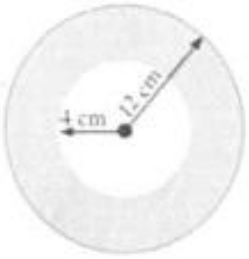
n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guia de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica



$\pi \cdot r^2$

$3,14 \cdot 12^2 = 452,16\ cm$

$3,14 \cdot 4^2 = 50,24\ cm$

$452,16 - 50,24 = 405,92$

405,92 es el área sombreada

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

$x^2 \cdot x^{-2} = x$ $\quad \frac{x^2}{x^2} = x$ $\quad x+2x = 3x$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

No, porque aún faltan algunos decimales para que sea exacto, aunque se lo aproximan ahí sería uno pero aún no sería un 1 exacto.

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

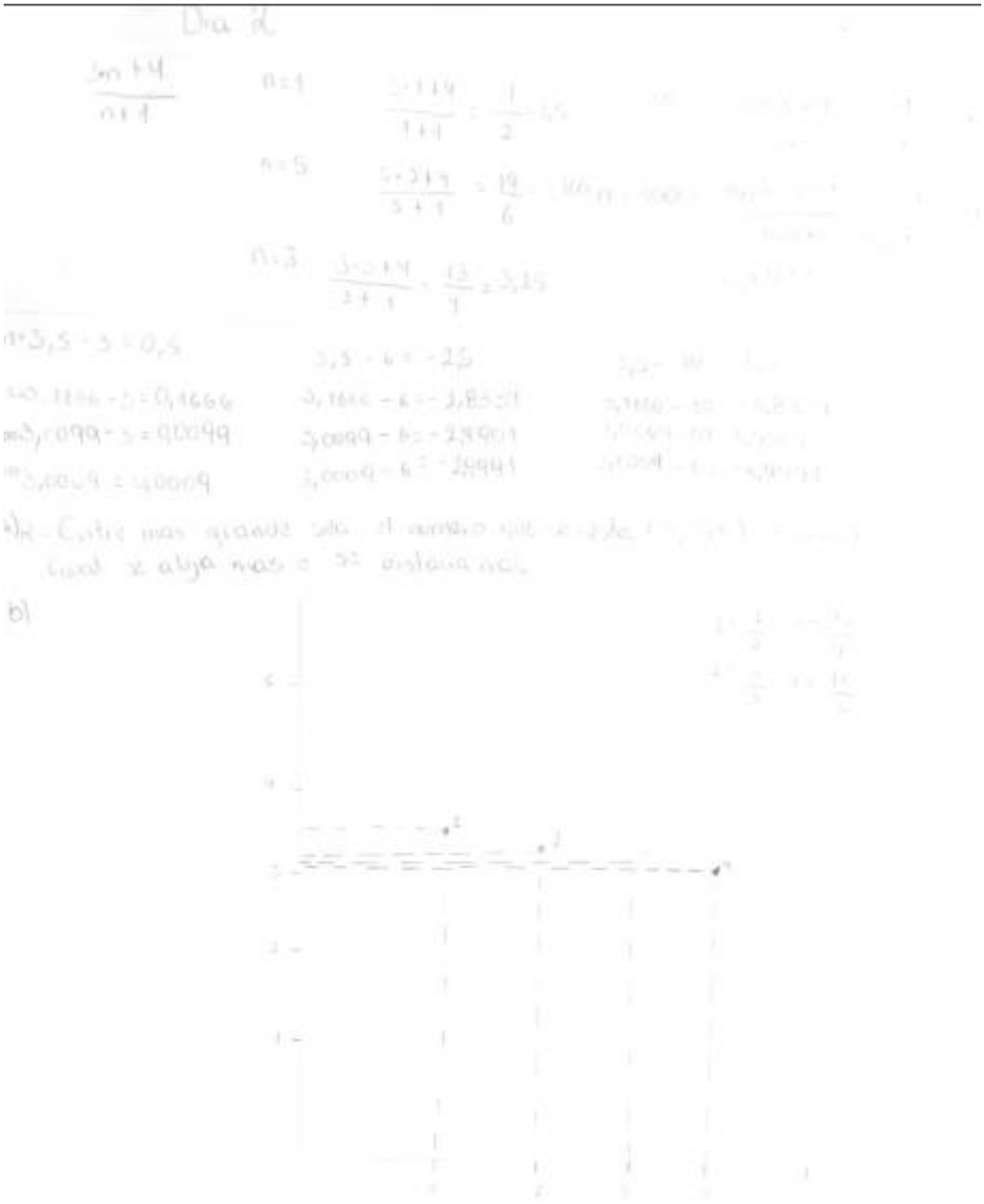
Es uno dividido por el dato que se muestra pa eso será decimal.

Lado	Datos	Diferencia de areas = $A_\theta - A_{poligono}$
4	$A_\theta = 1{,}9881$ $Lado = \sqrt{2}$	$A_{Dif} = 3{,}14 - 1{,}9881 = 1.1519$
6	$A_\theta = 2{,}595$ $Lado = 1$	$A_{Dif} = 3{,}14 - 2{,}595 = 0.545$
8	$A_\theta = 2{,}7968$ $Lado = 0{,}76$	$A_{Dif} = 3{,}14 - 2{,}7968 = 0{,}3432$
12	$A_\theta = 2{,}97$ $Lado = 0{,}515$	$A_{Dif} = 3{,}14 - 2{,}97 = 0.17$

a) Que entre mas lados el numero mas se va alejando

b) Yo concluyo que los numeros entre mas lados los numeros son menores, quiero decir que disminuye

$\overset{1}{4\ lados} = 1.1519$, $\overset{2}{6\ lados} = 0.545$, $\overset{3}{8\ lados} = 0{,}3432$, $\overset{4}{12\ lados} = 0{,}15$



Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{4}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

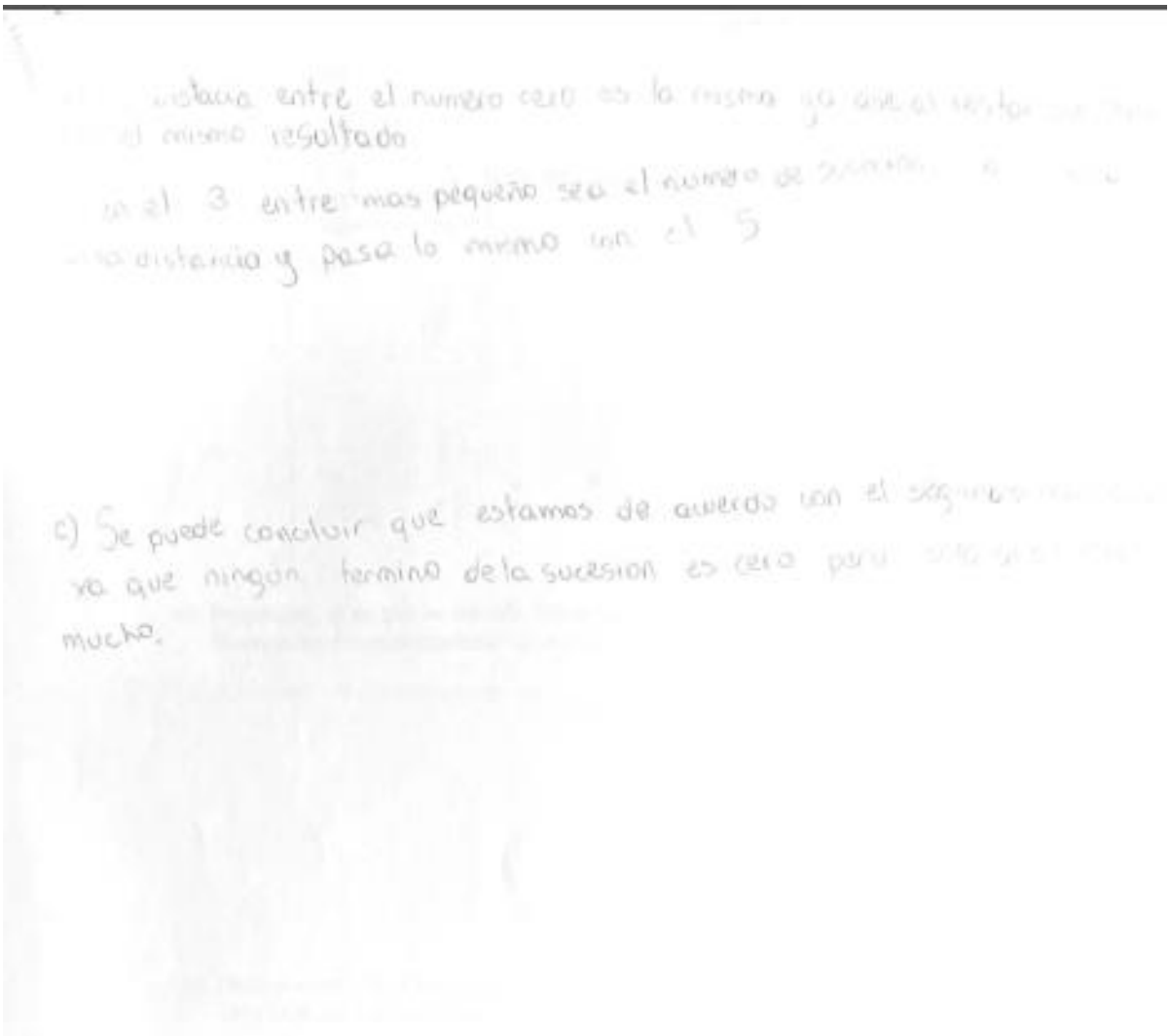
a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2$, $n = 5$, $n = 100$, $n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

Observe la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{8}, a_3 = \frac{9}{15}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n+3}{n^2+1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión



PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:

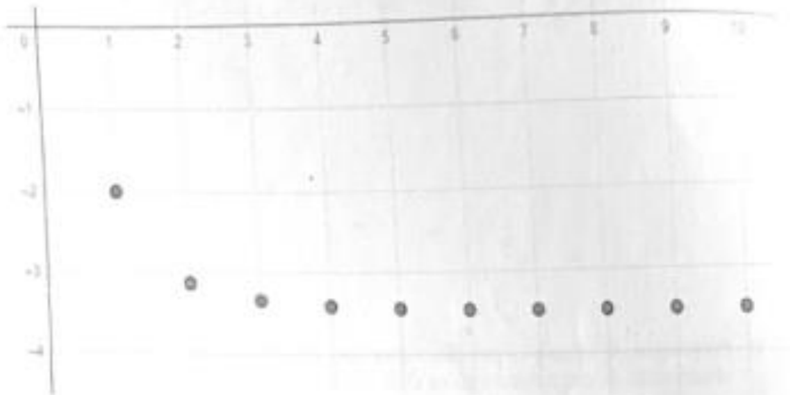
a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

R// La sucesion es convergente ya que cada vez se va [illegible]

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R// Ya que el numero se esta acercando al limite que [illegible]

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{11}{8}, \frac{11}{3} \ldots$ donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma:



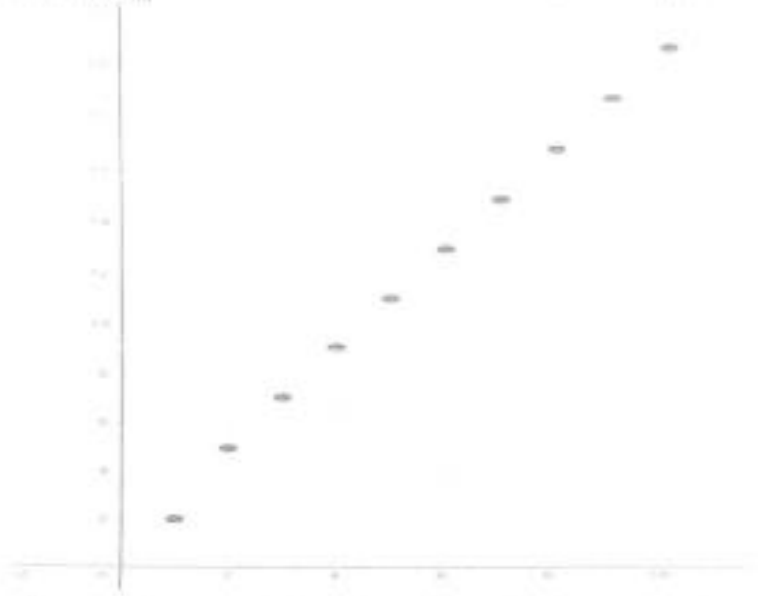
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

R/Es convergente porque su tope seria el (-3,5),

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R//Porque que los numeros se estan acercando a un limite y despues se quedan hay haciendo como una linea

3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{10}{3}, \ldots$ donde su término general es $\frac{nn^2-4}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

No, No es convergente, ya que los numeros se alejan más

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque no tiene un limite los numero solo se alejan mas

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ... ,3, ... donde su representación gráfica es:

a) Proponga, si es que es posible, hacia qué numero tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el grafico

R// Si es convergente ya que tiene un limite que sera 3.

b) Dado su analisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el limite de la sucesión y no otro numero? Justifiquen

R// Porque los numeros tienen un limite y no sabe cuan este.

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

R// Si al determinar el "n" este elevado a 2 es convergente, ya los numeros de antes el primero es negativo y el segundo positivo

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su analisis en la pregunta 5) ¿Existe el limite de esta sucesión? Justifiquen

R// No es convergente porque el "n" no esta elevado a "2"

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a, con\ a \in \mathbb{R}$ ¿Existe el limite para esta sucesión? Justifiquen

R// Si es convergente ya que tiene un limite que sera "a"

Parte 3: Calculando límites de sucesiones

1) Sabemos que la sucesión cuyo término general es $\frac{6n+2}{n}$ **tiene límite**, y lo que nos interesa ahora es calcularlo. Para esto, observen la siguiente manipulación algebraica de la expresión

$$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$$

a) ¿Cómo podrían usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Una compañera realizó lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

2. Otra compañera hizo algo diferente. Observemos lo que realizó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$$

b) ¿Qué opinan? ¿Quién tendrá razón? Expliquen y justifiquen sus respuestas

2) Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión cuyo término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$ donde sabemos que **tiene límite**. Para esto, observa lo siguiente manipulación algebraica de la expresión

$$\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$$

a) ¿Cómo podrías usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Un compañero realizó lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

2. Otro compañero hizo algo diferente. Observemos lo que realizó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 3$$

b) ¿Qué opinas? ¿Quién tendrá razón? Justifiquen

$6 + \frac{2}{n}$ n=1 $6 + 2 = 8$ [illegible]

n=2 $6 + 1 = 7$

n=3 $6 + 0{,}666 = 6{,}666$

n=4 $6 + 0{,}5 = 6{,}5$

n=5 $6 + 0{,}4 = 6{,}4$

n=7 $6 + 0{,}2857 = 6{,}2857$

a) Usando la ultima formula ya que es más facil de calcular $\left(6 + \frac{2}{n}\right)$

b) La que tiene razon seria la segunda compañera ya que al replazar n por distinto numeros que serian (1,2,3,4,5,etc) y esto resultados [illegible] vez se acercan al 6 por ello se puede deducir que la segunda compañera tiene razon

2) $\frac{3}{(n+1)}$

n=1 $\frac{3}{(1+1)} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

n=2 $\frac{3}{(2+1)} = \frac{3}{3} = 1$

n=3 $\frac{3}{(3+1)} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

n=4 $\frac{3}{(4+1)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

n=5 $\frac{3}{(5+1)} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

n=6 $\frac{3}{(6+1)} = 0{,}42857$

3) a) Se remplazo n por numero de 1 al 7 y calcule

b) Yo opino que el primer compañero tiene razon ya que la sucesion llega a un punto que no sigue adelante se queda en el numero cero y cada vez se va acercando mas oseа el limite de sucesion seria [illegible]

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Casales

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

Limite de sucesion es un numero que es limite osea que los demas numeros no pueden sobrepasar de el, solo se acercan mas

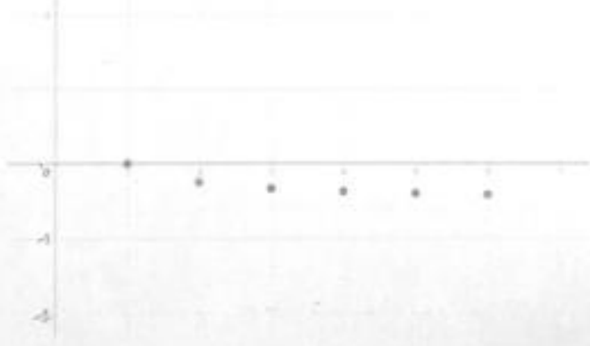
2.- Calcule:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 + 27n}{81n^2 - 1}$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$
Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) **converge** la sucesión señalada?

El numero que converge la sucesion es el 3 ya que al calcularlo con distintos numeros los resultados se acercaban al 3 y no lo traspasaban entonces es convergente porque tenia un limite

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, **justifique** a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



El numero que converge es el 0,5 porque los numeros se acercan a el pero no lo sobrepasa

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Escuela Chile de la Investigación Ciencia Experiencia
Investigador: Jorge Zambrano Catalán

5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^2+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique**

No tiene limite de sucesion ya que los intervalos siguen subiendo entonces no hay un limite

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no.

No hay limite de sucesion ya que no hay un numero que tenga un limite

Preguntas abiertas

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo que mejor entendiste?

En todo muy bien lo de limite de sucesion y como remplazar las "n"

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo más te complicó entender?

Lo que me complico es como simplificar la sucesio y como ver si tiene un limite asucesion sin calcular.

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es relevante? ¿Por qué?

Yo enwentro qué todo es relevante ya que todo se complementa

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es irrelevante? ¿Por qué?

No hay concepto irrelevante

$\frac{3n^2-1}{n^2}$ =

$N1 = \frac{3\cdot1^2-1}{1^2} = \frac{2}{1}$ $N4 = \frac{11}{16} = 2,9375$ $N6 = \frac{107}{36} = 2,9722$

$N^2 = \frac{11}{4} = 2.75$ $N5 = \frac{74}{25} = 2,96$

$N3 = \frac{26}{9} = 2,8888$

$N=100$ $\frac{29,999}{10,000} = 2,9999$

4) $\frac{1-n}{2n}$

$n=1$ $\frac{1-1}{2\cdot1} = \frac{0}{2} = 0$ $n3 = \frac{1-3}{2\cdot3} = \frac{-2}{6} = -0.3333$

$n=2$ $\frac{1-2}{2\cdot1} = \frac{-1}{4} = -0.25$ $n4 = \frac{-3}{8} = -0.375$

$N100 = \frac{-99}{2\cdot100} = \frac{90}{200} = 0,4$ $N5 = \frac{-4}{10} = -0.4$

5) $\frac{n^3+1}{n^2-1}$ =

$N1 \frac{2}{0} = 0A$

$N2 = \frac{9}{3} = 36$

1000

$N3 = \frac{28}{8} = 3,5$ $N5 = \frac{136}{24} = 5,6$

$N4 = \frac{65}{15} = 40$ $N100 = \frac{1,000,001}{9.999} = 100,010101$

6) $1 = 0,5$

$b = -0,2333$

$4 = 0,25$

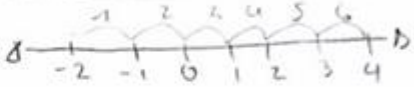
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

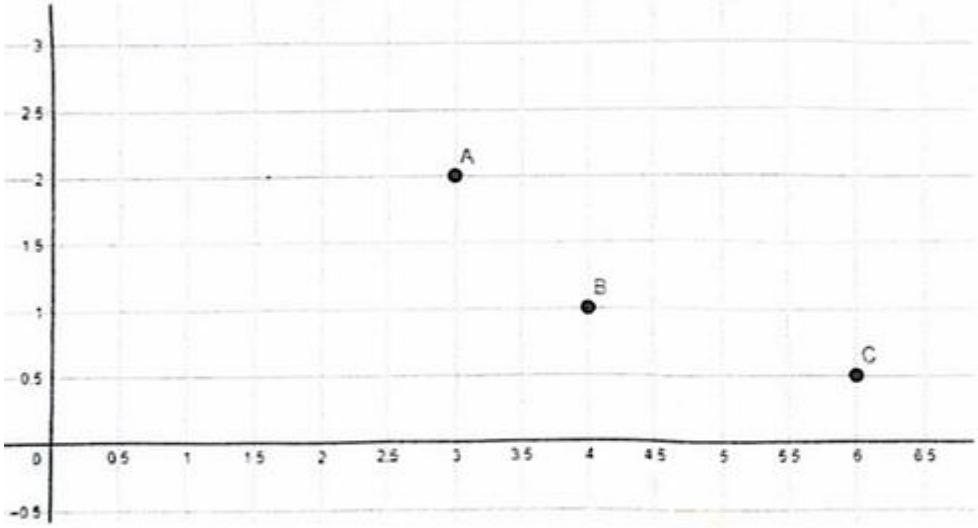
Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el número 4?

$-2-4=-6$ → el −2 se encuentra a 6 números del −4



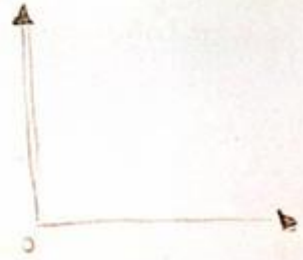
2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



A = (3, 2)
B = (4, 1)
C = (6, 0,5)

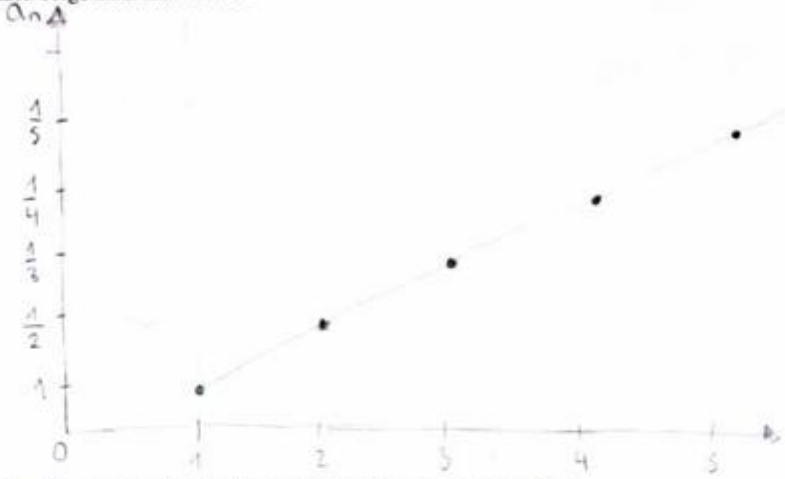
3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

n	a_n	
1	1	
2	$\frac{1}{2}$	0,5
3	$\frac{1}{3}$	$0,\overline{3}$
4	$\frac{1}{4}$	0,25
⋮	⋮	
n	$\frac{1}{n}$	

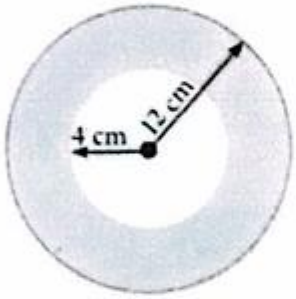


Gráfique la sucesión anterior.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



$AO = \pi \cdot 6^2 = \pi \cdot 36 = 36\pi$ $\quad Ao = \pi \cdot r^2$

$Ao = \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 4 = 4\pi$

$AO - Ao = 36\pi - 4\pi = \boxed{32\pi}$ → expresado

$\pi = 3,1415$ → $AO = 113,094$

$Ao = 12,566$

$AO - Ao = \boxed{100,528}$ → considerando 4 decimales de π

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$(x-1)(x+1)$

$x^2 + x - x - 1$

$(x+1)(x+1)$

$x^2 + x + x + 1$

$x^2 + 2x + 1$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

En algunos casos podría considerarse 1, por ejemplo en construcciones donde una medida nunca será perfecta, por lo que se utiliza lo mas cercano a ella. Entonces sí se considera que 0,999... es 1.

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

para mí, sería como un "tope" o "máximo" que se le pone a ciertos números o áreas geométricas.

Lados	Datos	Diferencias de areas = AO - A Polygono
4	$A_{\square} = 1,1881$ Lado $= \sqrt{2}$	$3,14 - 1,1881 = 1,1519$
6	$A_H = 2,595$ Lado $= 1$	$3,14 - 2,595 = 0,545$
8	$A_O = 2,7968$ Lado $= 0,76$	$3,14 - 2,7968 = 0,3432$
12	$= 2,97$ Lado $= 0,515$	$3,14 - 2,97 = 0,17$

Pregunta

a) Se multiplican la misma Distancia
(no se explica totalmente)

b) Cual si o si tienen los mismos Lados
1 = 1, 4 de los resultados.
2 = 0, 5

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{-5}{3} = -1.6666$ $\frac{-25}{7} = -3.5714$

$N = 2$
$N = 5$
$N = 100$
$N = 1000$

Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

Formula $\frac{2-3N^2}{N+4}$

b) Ahora grafiquen la sucesión.

$\frac{2-3\cdot 2^2}{2+4} = \frac{-10}{6} = -1,6666$ $\frac{2-3\cdot 100^2}{100+4} = \frac{-29,998}{104} = -288,442$

$\frac{2-3\cdot 5^2}{5+4} = \frac{-73}{9} = -8,1111$ $\frac{2-3\cdot 1000^2}{1000+4} = \frac{-2,999,998}{1004} = -2,988.045817$

$N2 = -1,6666$ $N100 = -288.442$
$N5 = -8,111$ $N1000 = -2,988.045817$

$\frac{6}{8} = (0,75)$

general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

$\frac{a}{15} = (0,6)$

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión.

a_1 = no existe

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = \frac{6}{8}$ $\quad a_3 = \frac{9}{15}$ $\quad$ término general $\frac{3n-3}{n^2-1}$

1 $\quad (0,75)$ $\quad (0,6)$

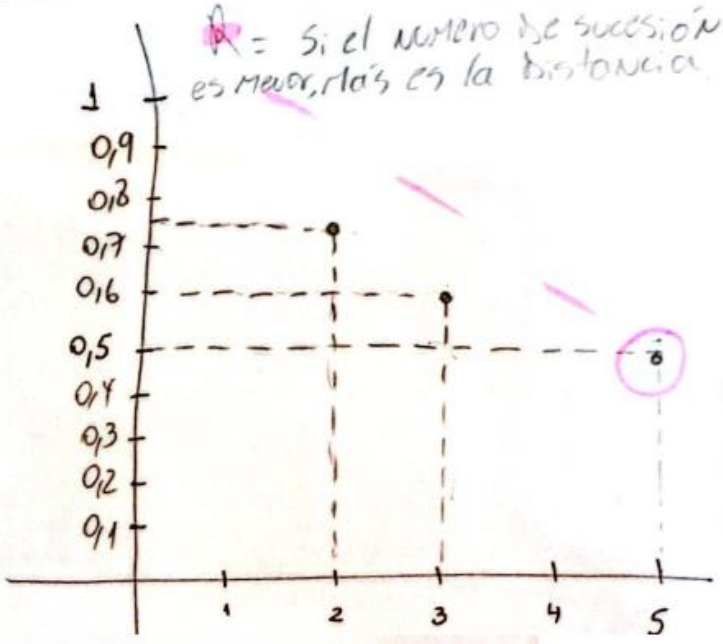
$\frac{3 \cdot 5 - 3}{5^2 - 1} = \frac{12}{24}$ $\quad (0,5)$

$\frac{3 \cdot 100 - 3}{100^2 - 1} = \frac{297}{9.999}$ $\quad (0,0297)$

$\frac{3 \cdot 1000 - 3}{1000^2 - 1} = \frac{2997}{999999}$ $\quad (0,00299)$

	0	3	5
a_1	—	—	—
a_2	0,75	2,25	4,25
a_3	0,6	2,4	4,4
a_5	0,5	2,5	4,5
a_{100}	0,0297	2,9703	4,9703
a_{1000}	0,002a	2,9	4,9971

★ = si el número de sucesión es mayor, más es la distancia



$\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$ ... termino general es $\frac{3n+4}{n+1}$

N=1
N=5
N=100
N=1000

N1=

$\frac{3 \cdot 1+4}{1+1} = \frac{7}{2} = 3,5 - 3 = 0,5$
$3,5 - 6 = -2,5$
$3,5 - 10 = -6,5$

N=5

$\frac{3 \cdot 5+4}{5+1} = \frac{19}{6} = 3,1666 - 3 = 0,1666$
$3,1666 - 6 = -2,8334$
$3,1666 - 10 = -6.8334$

N=100

$\frac{3 \cdot 100+4}{100+1} = \frac{304}{101} = 3,0099 - 3 = 0,0099$
$3,0099 - 6 = -2,9901$
$3,0099 - 10 = -6,9901$

N=1000

$\frac{3 \cdot 1000+4}{1000+1} = \frac{3004}{1001} = 3,0009 - 3 = 0,0009$
$3,0009 - 6 = -2,9991$
$3,0009 - 10 = -6,9991$

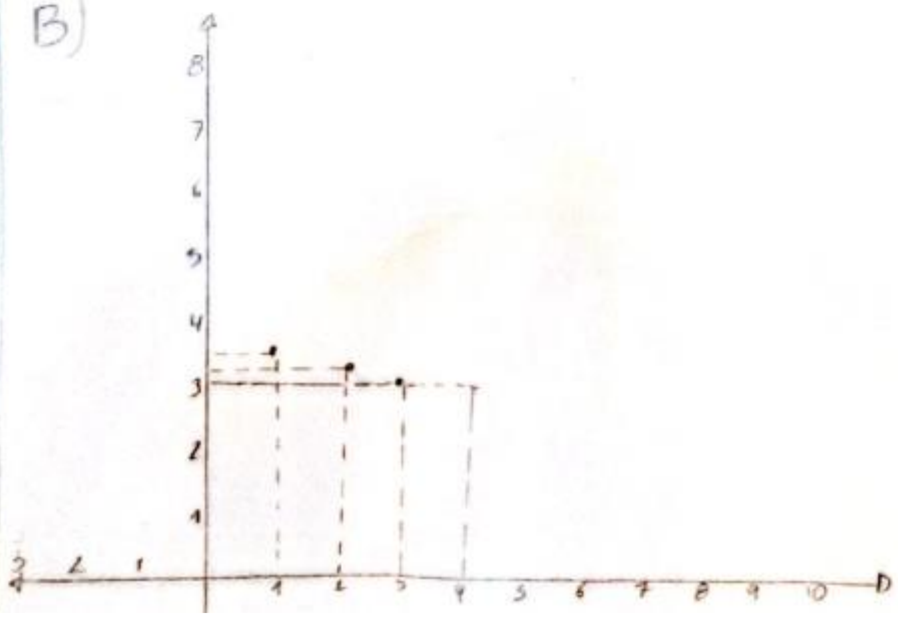
$\frac{7}{2} = 3,5$

$\frac{10}{3} = 3,3333$

$\frac{13}{4} = 3,25$

Conclución = Mientras más alto el valor ej 3,1666 - 10 = -6, 8334
El resultado sera negativo y se aleja más del 0.

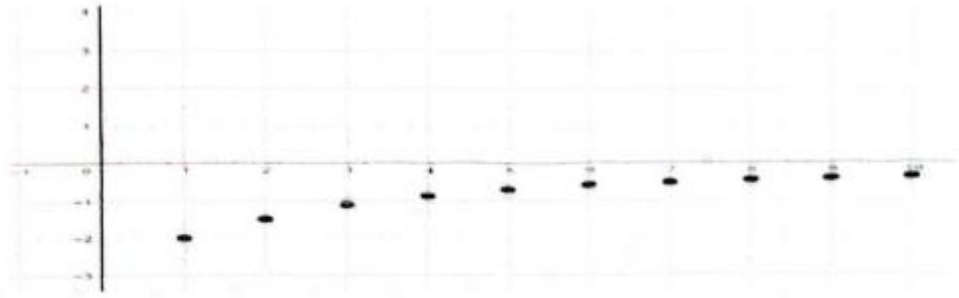
B)



1 = $\frac{7}{2}$
2 = $\frac{10}{3}$
3 = $\frac{13}{4}$
4 = $\frac{16}{6}$

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{39}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:



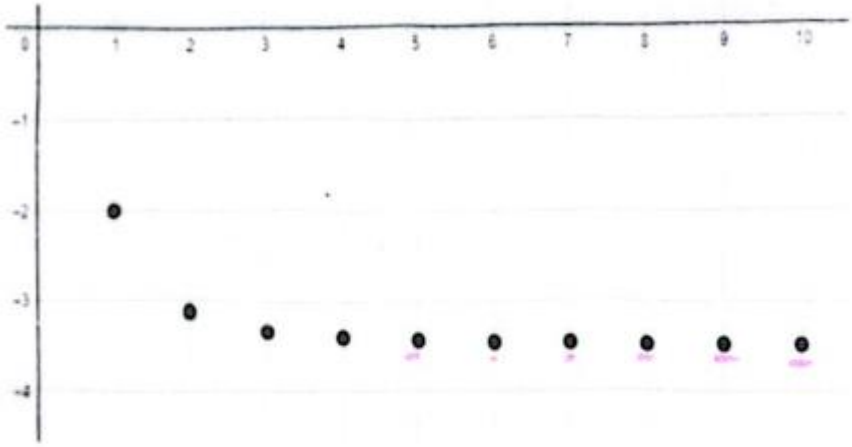
a) **Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.**

es convergente porque la distancia se hace más pequeña.

b) **Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen**

Porque como muestra el gráfico, ninguna distancia se pasa del 0, puede tocarlo pero no sobrepasar.

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma



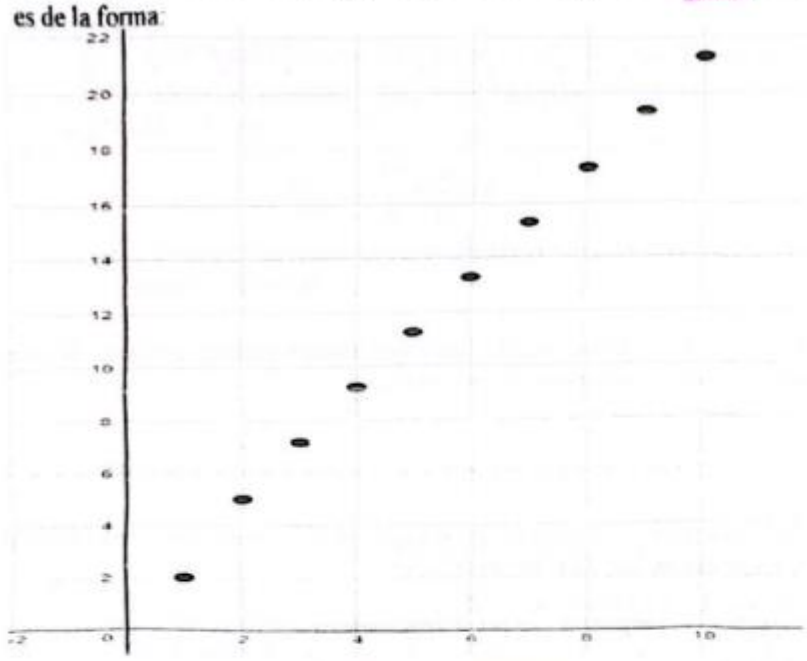
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Si es convergente porque llega hasta cierto punto el cual es no sobrepasa

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque los puntos llegan hasta cierto punto y se mantiene una cierta distancia sin sobrepasar

3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{6n^2-4}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma:



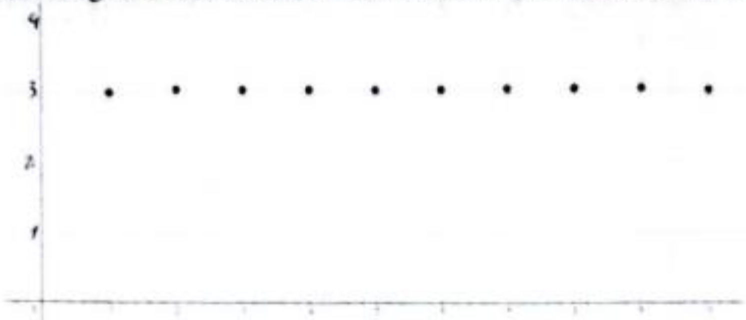
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

No es convergente

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

No lo es Porque la distancia va aumentando y no tiene límite.

4) **Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ..., 3, ... donde su representación gráfica es:**



a) **Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico**

es convergente

b) **Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen**

es convergente porque la distancia es igual para todos los puntos y puede estar en el límite (puede tocarlo)

5) **Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen**

⊖ → Diverge si el "n" esta al N^2 sabemos si es convergente o no (N^2 = es convergente N = no es convergente.

6) **Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen**

no es convergente

7) **Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a$, con $a \in \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen**

es convergente.
Porque la distancia es igual y tiene límite
(se mantiene).

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

Límite de sucesión es un valor que se obtiene de una sucesión el cual llega a un límite, pero no siempre.

2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1}$$

su límite es 0

$\frac{3+27\cdot 2}{81\cdot 2^2-1} = \frac{60}{323} = 0,263$

$\frac{3+27\cdot 100}{81\cdot 100^2-1} = \frac{3000}{809999} = 0,003$

$\frac{3+27\ 1000}{81\cdot 1000^2-1} = \frac{30000}{80999999} = 0,0003$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$

Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) converge la sucesión señalada?

$\frac{3n^2-1}{n^2} = \frac{3n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}$

sucesión sucesión

$3 - 0$

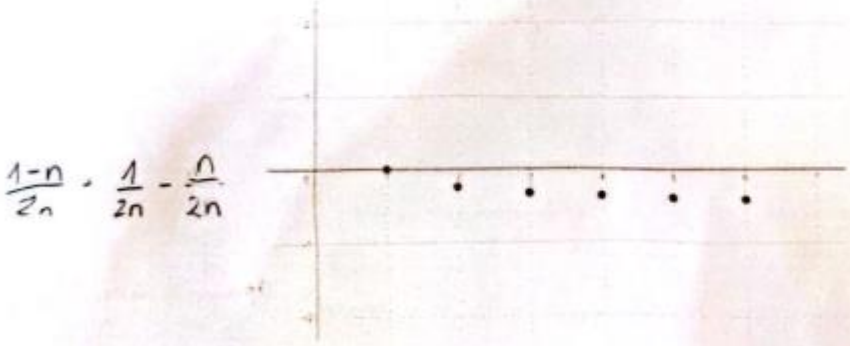
3

$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

La sucesión converge a 3.

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, justifique a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



$\frac{1-n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{n}{2n}$

$\frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} = 0,5$

$\frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{1}{2\cdot 100} = \frac{1}{200} = 0,005$

$\frac{1-1}{2\ 1} = \frac{0}{2} = 2$

$\frac{1-1000}{2\ 1000}$

$\frac{1-100}{2\cdot 100} \quad \frac{-99}{200} = -0,495$

$1-1000 \quad \frac{-999}{} \quad 0,1995$

5.- Determine, si existe o no el límite para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. Explique y justifique.

No Tiene límite, se puede ver al reemplazar los datos

6.- Dada la siguiente sucesión $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ justifique si tiene límite o no.

No Tiene límite, porque Tiene valores en negativo por lo que en un gráfico esta sucesión bajaría y subiría

Preguntas abiertas

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo que mejor entendiste?

Como graficar las sucesiones

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo más te complicó entender?

Calcular la sucesión algebraicamente

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es relevante? ¿Por qué?

Límite porque varias sucesiones lo Tienen.

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es irrelevante? ¿Por qué?

Creo que no hay, porque Todos aportan a comprender mejor las sucesiones.

$\frac{3+27\cdot 100}{81\cdot 100^2-1} = \frac{3000}{809999} = 0{,}0037$

$\frac{3+27\cdot 1000}{81\cdot 100^2-1} = \frac{30000}{80999999} = 0{,}0003$

los resultados de la sucesión convergen a 0, porque el denominador será mayor siempre ya que se eleva a 2 y hay datos más grandes

3) $\frac{3n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}$

$3 - 0 = 3$

$\frac{1}{n^2}$ } converge a 0 ya que al estar elevado a 2 el denominador será mayor y al dividirse dará un resultado pequeño.

$\frac{3n^2-1}{n^2}$ = Esta sucesión converge a 3.

4) $\frac{1-100}{2\cdot 100} = \frac{99}{200} = -0{,}495$

$\frac{1-1000}{2\cdot 1000} = \frac{999}{2000} = -0{,}4995$

La sucesión $\frac{1-n}{2n}$ converge a $-0{,}5$, porque reemplazando los datos y viendo el gráfico vemos que los valores se acercan a $-0{,}5$.

5) $\frac{100^3+1}{100^2-1} = \frac{1000.001}{9.999} = 100{,}0101$

$\frac{1000^3+1}{1000^2-1} = \frac{1.000.000.001}{999.999} = 1.000{,}0010$

$\frac{10.000^3+1}{10.000^2-1} = \frac{1.000.000.000.001}{99.999.999} = 10.000{,}0001$

la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$ no Tiene límite ya que al reemplazar se puede ver

6) -1

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$-\frac{1}{3} = -0{,}3333$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

No Tiene límite, ya que hay valores negativos y esto no dejaría que llegaran a un límite porque el valor bajaría y subiría.

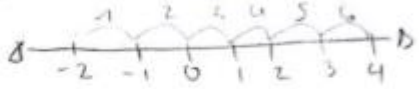
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

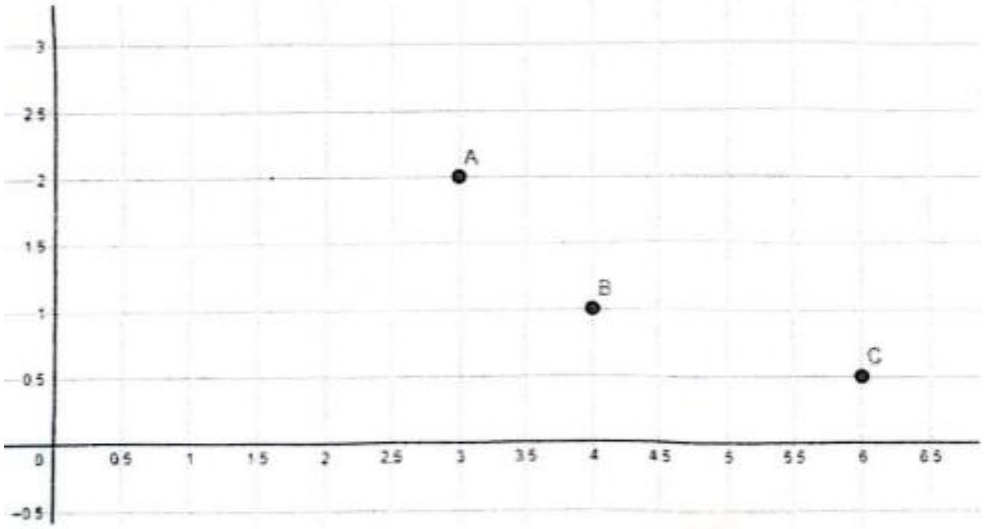
Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el número 4?

$-2-4=-6$ → el −2 se encuentra a 6 números del −4



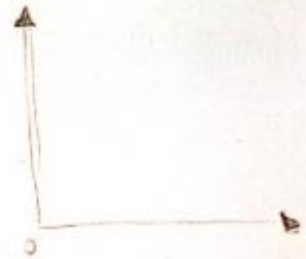
2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



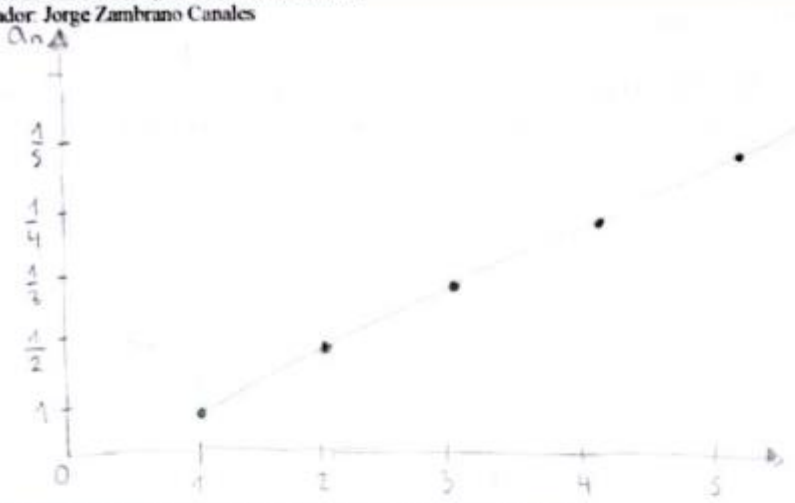
A = (3, 2)
B = (4, 1)
C = (6, 0,5)

3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

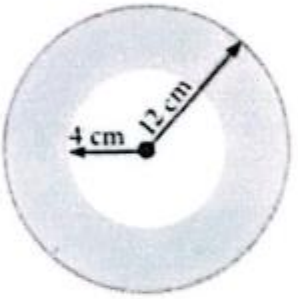
n	a_n	
1	1	
2	$\frac{1}{2}$	0,5
3	$\frac{1}{3}$	$0,\overline{3}$
4	$\frac{1}{4}$	0,25
⋮	⋮	
n	$\frac{1}{n}$	



Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



$AO = \pi \cdot 6^2 = \pi \cdot 36 = 36\pi$ $\quad Ao = \pi \cdot r^2$

$Ao = \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 4 = 4\pi$

$AO - Ao = 36\pi - 4\pi = \boxed{32\pi}$ → expresado

$\pi = 3,1415$ → $AO = 113,094$

$Ao = 12,566$

$AO - Ao = \boxed{100,528}$ → considerando 4 decimales de π

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \boxed{\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}}$$

$(x-1)(x+1)$

$x^2 + x - x - 1$

$(x+1)(x+1)$

$x^2 + x + x + 1$

$x^2 + 2x + 1$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

En algunos casos podría considerarse 1, por ejemplo en construcciones donde una medida nunca será perfecta, por lo que se utiliza lo más cercano a ella. Entonces sí se considera que 0,999... es 1.

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

para mí, sería como un "tope" o "máximo" que se le pone a ciertos números o áreas geométricas.

$\frac{3n+4}{n+1}$

a) $n=1 \rightarrow \frac{3\cdot 1+4}{1+1} = \frac{7}{2} = 3,5$ $\quad n=5 \rightarrow \frac{3\cdot 5+4}{5+1} = \frac{19}{6} = 3,1666$

$\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$ $\quad n=100 \rightarrow \frac{3\cdot 100+4}{100+1} = \frac{304}{101} = 3,0099$ $\quad n=1000 \rightarrow \frac{3\cdot 1000+4}{1000+1} = \frac{3004}{1001} = 3,0009$

$3,5 - 3 = 0,5$

$3,1666 - 3 = 0,1666$

$3,0099 - 3 = 0,0099$

$3,0009 - 3 = 0,0009$

$3,5 - 6 = |-2,5|$

$3,1666 - 6 = |-2,8334|$

$3,0099 - 6 = |-2,9901|$

$3,0009 - 6 = |-2,9991|$

$3,5 - 10 = |-6,5|$

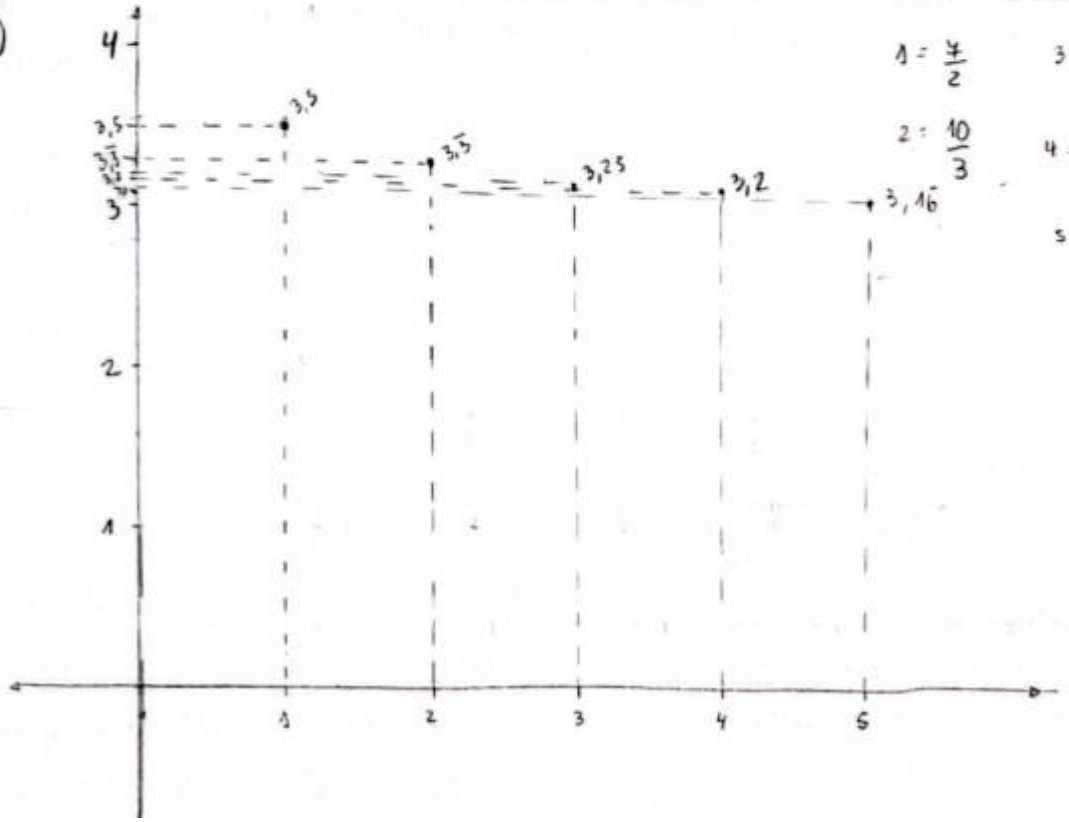
$3,1666 - 10 = |-6,8334|$

$3,0099 - 10 = |-6,9901|$

$3,0009 - 10 = |-6,9991|$

Se puede concluir, que mientras más alto es el número, más grande será la distancia entre el valor de la sucesión y el número

b)



$1 = \frac{7}{2}$ $\quad 3 = \frac{13}{4}$

$2 = \frac{10}{3}$ $\quad 4 = \frac{16}{5}$

$5 = \frac{19}{6}$

3,14 $A = 3,14\ 1^2$ Maite

$P = 6,28$ $P = 2\ 3,14\ 1^2$

a) Cuadrado (4 lados) $P = 1,41 \cdot 4 = 5,64$ $A = 1,41 \cdot 1,41 = 1,9881$

Lado = 1,41
Área = 1,9881

Hexágono regular (6 lados) $P = 1 \cdot 6 = 6$

$A = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{6 \cdot \frac{1,73}{2}}{2} = \frac{5,19}{2} = 2,595$

Lado = 1
Área = 2,595

Octágono regular (8 lados) $P = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 8 = 0,76\ 8 = 6,08$

$A = \frac{6,08 \cdot 0,92}{2} = 2,7968$

Lado = 0,76
Área = 2,7968

apotema $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{1,8}{2}$ 0,92 ≈

Dodecágono regular (12 lados) $A = 2,97$

base $\Delta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 0,515$ → lado

apotema $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1,925$

Lado = 0,515
Área = 2,97

Diferencia de áreas

área círculo - área polígono

Cuadrado = 3,14 - 1,9881 = 1,1519

Hexágono = 3,14 - 2,595 = 0,545

Octágono = 3,14 - 2,7968 = 0,3432

Dodecágono = 3,14 - 2,97 = 0,17

a) La diferencia de la circunferencia y el polígono va a ir disminuyendo cuando el polígono tenga más lados.

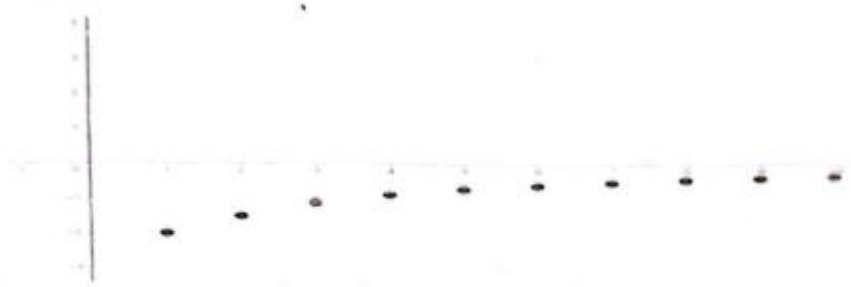
b) Cuando un polígono regular tiene más lados, la diferencia entre la circunferencia y el polígono será menor.

2) $n = 1$ $\frac{3 \cdot 1 + 4}{1 + 1} = \frac{7}{2}$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{9}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma



a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

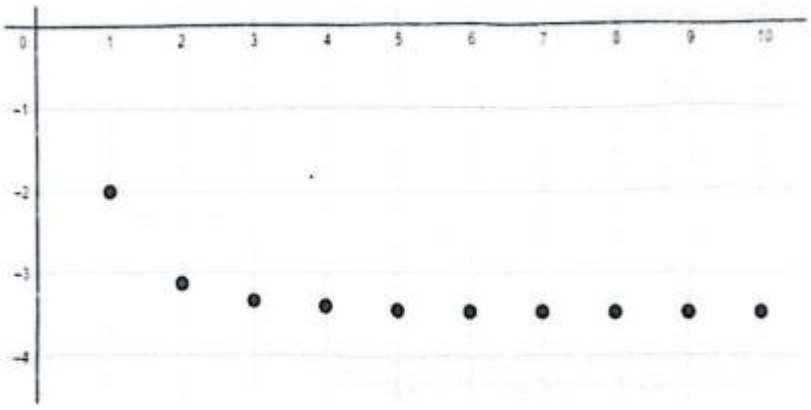
La sucesión es convergente, Tiende a 0

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque los valores de la sucesión cada vez se acercan más a su límite, que es 0, la distancia cada vez se hace más pequeña.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guía de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Cerales

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma:



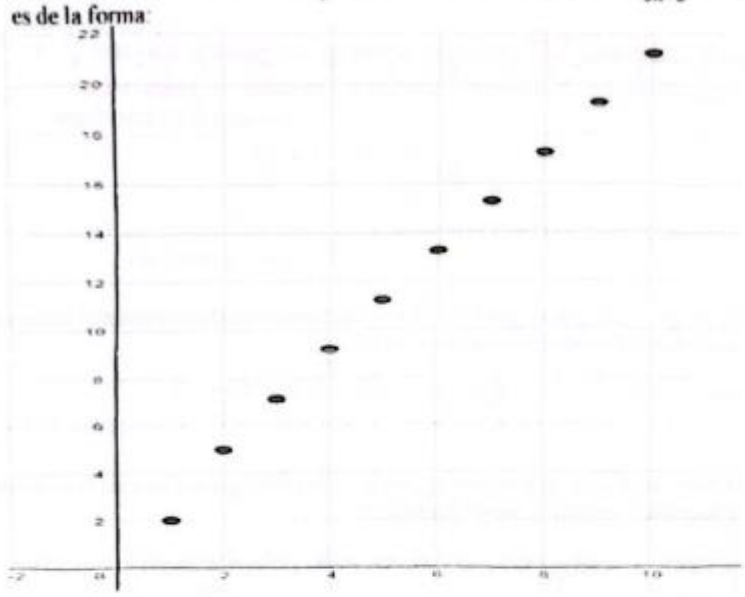
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

La sucesión es convergente, tiende a -3,5

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque los valores de la sucesión cada vez se acerca mas al -3,5, es decir, que la distancia va disminuyendo

3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{6n^2-4}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma:



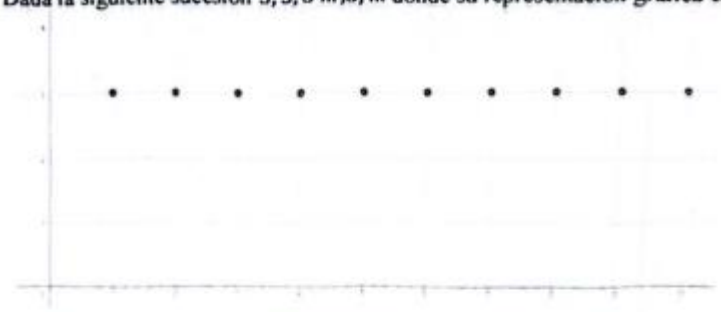
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

La sucesión no es convergente

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque los valores de la sucesión cada vez van aumentando la misma cantidad, por lo que no Tiene límite

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ...,3, ... donde su representación gráfica es:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

La sucesión es convergente, Tiende a 3.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

Porque Todos los valores de la sucesión Tocan el número 3

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

Si el denominador Tenga n^2 es convergente

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen

No, porque el denominador no está elevado al cuadrado.

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a$, con $a \in \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen

Si, ya que Todos los valores serán iguales. (llegaron a su límite)

$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$

2 1 = 2 → 6 + 6

2 2 = 1 → 6 + 1

2 3 = 0,6666 → 6 + 6,6666

2 4 = 0,5 → 6 + 6,5

2 5 = 0,4 → 6 + 6,4

2 20 = 0,1 → 6 + 6,1

2 100 = 0,02 → 6 + 6,02

2 10.000 = 0,0002 → 6 + 6,0002

a) Con los resultados de la expresión algebraica se puede ver que mientras más alto el número "n" menor será la distancia con 6, y 6 sería su límite

b) La compañera 2 Tiene la razón porque al ir aumentando los valores de "n" el número cada vez se acerca más a 6, por lo que 6 sería su límite.

2) $\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$

$\frac{3}{(1+1)} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\frac{3}{(2+1)} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{3}{(3+1)} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\frac{3}{(10+1)} = \frac{3}{11} = 0,2727$

$\frac{3}{(1000+1)} = \frac{3}{1001} = 0,0029$

a) con los resultados se puede ver como los valores van disminuyendo a medida que "n" aumenta

b) El compañero 1 Tiene la razón ya que al ir aumentando "n" el número se acerca a 0, 0 es su límite.

6) $n_1 = -1$

$n_2 = \frac{1}{2} = 0,5$

$n_3 = \frac{-1}{3} = -0,\overline{3}$

$n_4 = \frac{1}{4} = 0,25$

R= No tiene límite, ya que la sucesión se comporta de forma extraña, y los números no tienen un "tope".

Preguntas abiertas

1) Entendí lo que era un límite y como calcularlo y visualizarlo

2) Me complicó el cálculo de fórmulas para encontrar el límite

3) Es relevante el concepto de convergente y divergente, porque así sabemos si una sucesión tiene límite. También el concepto de sucesión y constante.

4) Yo veo que todos los conceptos son relevantes y tienen algo que aportar al entendimiento de límites.

2) $\lim_{n\to\infty} = \frac{3+27n}{81n^2-1} = \frac{3(9n+1)}{(9n-1)(9n+1)} = \frac{3}{9n-1}$

$\frac{3}{9\cdot 100-1} = \frac{3}{899} = 0{,}0033$

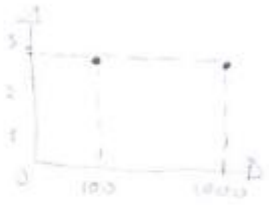
$\frac{3}{9\cdot 1000-1} = \frac{3}{8999} = 0{,}0003$

R= Entonces, el límite es 0, porque mientras el numerador se queda constante, el denominador se hace grande. lo podemos ver en el cálculo de grandes números.

3) $\frac{3n^2-1}{n^2} = \frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} - \frac{1}{n^2} = 3 - \frac{1}{n^2}$

$n_{100} = 3 - \frac{1}{100^2} = 3 - \frac{1}{10000} = 3 - 0{,}0001 = 2{,}9999$

$n_{1000} = 3 - \frac{1}{1000^2} = 3 - \frac{1}{1000000} = 3 - 0{,}000001 = 2{,}99999$



R= la sucesión converge a 3, porque al reemplazar en la forma números grandes como el 100 o el 1000, se ve que los resultados no pasan del 2,999..., es decir, que su límite es 3.

4) $\boxed{\frac{1-n}{2n}}$

$n_{100} = \frac{1-100}{2\cdot 100} = \frac{-99}{200} = -0{,}495$

$n_{1000} = \frac{1-1000}{2\cdot 1000} = \frac{-999}{2000} = -0{,}4995$

R= la sucesión converge a -0,5, porque reemplazando se ve que los números no pasan del -0,5

5) $\frac{n^3+1}{n^2-1}$

$n_{100} = \frac{100^3+1}{100^2-1} = \frac{1000\,000+1}{10\,000-1} = \frac{1000\,001}{9999} = 100{,}0101$

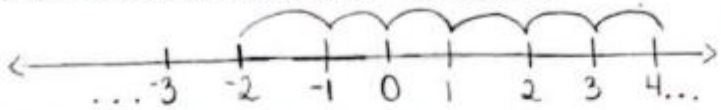
$n_{1000} = \frac{1000^3+1}{1000^2-1} = \frac{1000\,000\,000+1}{1000\,000-1} = \frac{1000\,000\,001}{999\,999} = 1000{,}0010$

R= la sucesión no tiene límite, ya que reemplazando por números grandes, los resultados siguen creciendo y no hay ningún número que los limite.

Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

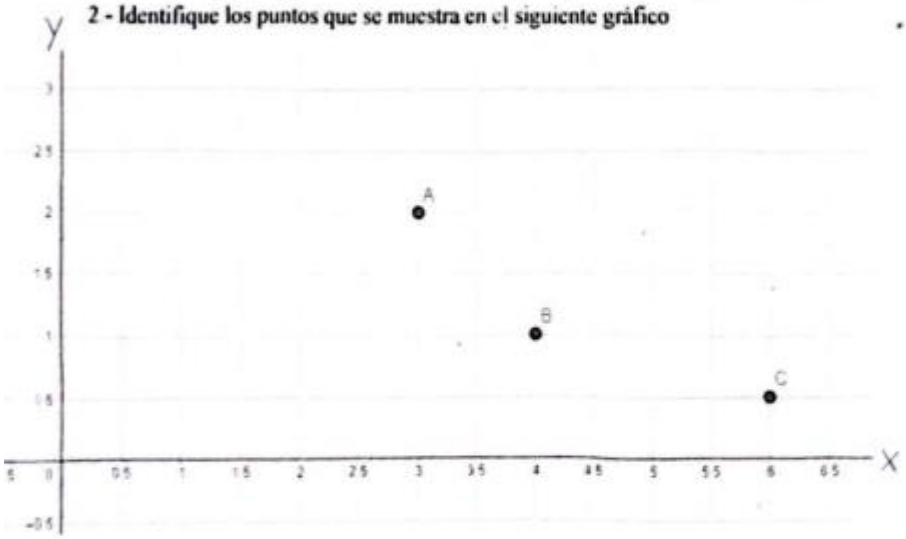
Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el número 4?



La distancia que hay del -2 al 4 es de 6.

2 - Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



A = (3,2)

B = (4,1)

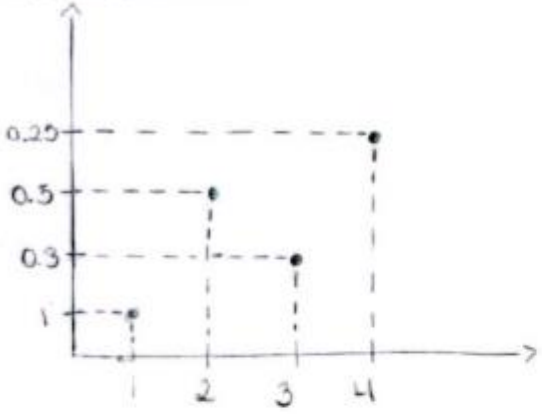
C = (6,0.5)

3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

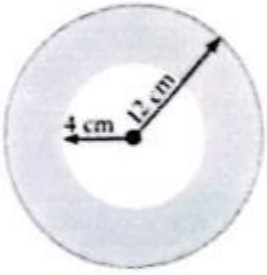
n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Docente Guia de la investigación: Lorena Espinoza
Investigador: Jorge Zambrano Canales



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



$\pi = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24$

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \quad \frac{(x+1)^2}{x^2-1} \quad \frac{(x+1)^2}{(x-1)\cdot(x+1)} \quad \frac{x+1}{x-1}$$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

No, ya que son en si numeros infinitos y van a continuar siendo infinitos sin llegar algún número entero.

7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

Para mi concepto de límite de sucesión es que hay un cierto límite en este caso en los números y de sucesión es que cuando llegan a un límite los números (n) reemplaza o toma los valores grandes.

1 A cuadrado: $1{,}41 \cdot 1{,}41 = 1{,}9881$

3L → P hexágono: $1 \cdot 6 = 6$ → Apotema $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ → $A = \frac{6 \cdot \frac{1{,}73}{2}}{2} = \frac{6 \cdot 0{,}865}{2} = \frac{5{,}19}{2} = \boxed{2{,}595}$

8L → P octágono $= 0{,}76 \cdot 8 = 6{,}08$ → apotema $= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{1{,}84}{2} = 0{,}92$ → $A = \frac{6{,}08 \cdot 0{,}92}{2} = \boxed{2{,}7968}$

10 → A dodecágono $= 2{,}97$ lado D: $0{,}515$

a) $A_O = 3{,}14$ $\left\{ \begin{array}{ll} A_{O-D} = 1{,}1519 & A_{O-O} = 0{,}3432 \\ A_{O-h} = 0{,}545 & A_{O-D} = 0{,}17 \end{array} \right\}$ R: Entre más lados tenga el polígono, más pequeña será su diferencia con el área de la circunferencia.

b) Mientras más lados tenga un polígono, el área de estos se va acercando más a 3,14, que es π.

2) $n = 1 \rightarrow \frac{7}{2}$

$n = 5 \rightarrow \frac{19}{6}$

$n = 100 \rightarrow \frac{304}{101}$

$n = 1000 \rightarrow \frac{3004}{1001}$

3) Observe la siguiente sucesión que parte desde $\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-25}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{2-3n^2}{n+4}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas.

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión.

a) $a_1 = \frac{2-3\cdot 1^2}{1+4} = \frac{-1}{5} = -0,2$

$a_2 = \frac{-5}{3} = 1,6666$

$a_3 = \frac{-25}{7} = -3,5714$

$a_4 = \frac{2-3\cdot 4^2}{4+4} = \frac{-46}{8} = -5,75$

$a_5 = \frac{2-3\cdot 5^2}{5+4} = \frac{-73}{9} = -8,1111$

$a_{100} = \frac{2-3\cdot 100^2}{100+4} = \frac{-29.998}{104} = -288,4423$

$a_{1000} = \frac{2-3\cdot 1000^2}{1000+4} = \frac{-2999998}{1004}$

$= -2988,0458$

Resta con 0

$-0,2 - 0 = 0,2$

Resta con 3

$-0,2 - 3 = 3,2$

Todos los números restados con 0 dan el mismo número

Observe la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{6}, a_3 = \frac{9}{15}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la **distancia** entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

a) $a_1 = \frac{0}{3}$ = no existe

$a_2 = \frac{3}{3} = 1$

$a_3 = \frac{6}{8} = 0,75$

$a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 3}{4^2 - 1} = \frac{9}{15} = 0,6$

$a_5 = \frac{3 \cdot 5 - 3}{5^2 - 1} = \frac{12}{24} = 0,5$

$a_{100} = \frac{3 \cdot 100 - 3}{100^2 - 1} = \frac{297}{9999} = 0,0297$

$a_{1000} = \frac{3 \cdot 1000 - 3}{1000^2 - 1} = \frac{2997}{999999} = 0,00299$

Restas con 0

$1 - 0 = 1$

La todas las restas con 0 son el mismo número

restas con 3

$1 - 3 = 2$

$0,5 - 3 = 2,5$

$0,0297 - 3 = 2,9703$

$0,0029 - 3 = 2,9971$

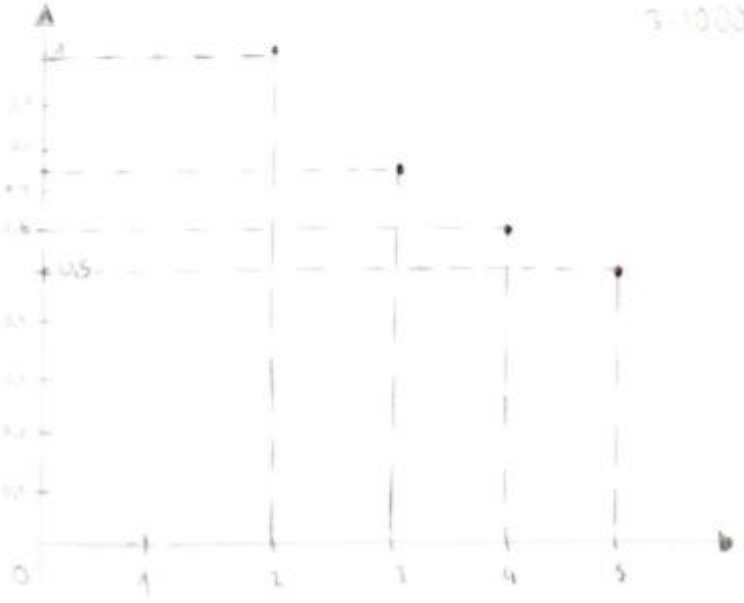
restas con 5

$1 - 5 = 4$

$0,5 - 5 = 4,5$

$0,0297 - 5 = 4,9703$

$0,0029 - 5 = 4,9971$



$n=5 \rightarrow \frac{17}{6}$ $n=1000 \rightarrow \frac{3004}{1001} = 3,0009$ $\frac{12+4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$

$\hookrightarrow 3,1666$

Restas con valor 3

$1 \rightarrow 3,5 - 3 = 0,5$

$5 \rightarrow 3,1666 - 3 = 0,1666$

$100 \rightarrow 3,0099 - 3 = 0,0099$

$000 \rightarrow 3,0009 - 3 = 0,0009$

Restas con valor 6

$1 \rightarrow 3,5 - 6 = -2,5$

$5 \rightarrow 3,1666 - 6 = -2,3334$

$100 \rightarrow 3,0099 - 6 = -2,9901$

$1000 \rightarrow 3,0009 - 6 = -2,9991$

Restas con 10

$1 \rightarrow 3,5 - 10 = -6,5$

$5 \rightarrow 3,1666 - 10 = -6,8334$

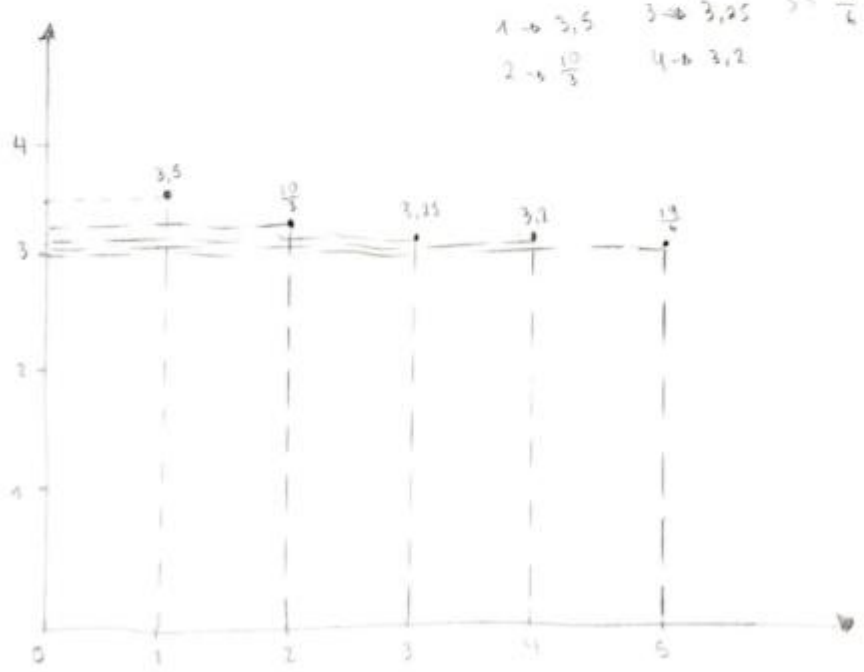
$100 \rightarrow 3,0099 - 10 = -6,9901$

$1000 \rightarrow 3,0009 - 10 = -6,9991$

R: Mientras más grande sea el número con el que restamos los valores de sucesión, mayor será la distancia entre ellos y los distintos valores que nos dieron (3,6 y 10)

$1 \rightarrow 3,5$ $3 \rightarrow 3,25$ $5 = \frac{17}{6}$

$2 \rightarrow \frac{10}{3}$ $4 \rightarrow 3,2$



b) La distancias entre el número 0 y los valores de sucesión dan como resultado los mismos valores de sucesión.
Respecto a las distancias entre el número 3 y los valores de sucesión, entre más pequeño sea el valor de sucesión más grande será la distancia

c) Estamos de acuerdo con el otro compañero porque ningún término de la sucesión es 0, se acerca mucho al 0 pero no lo toca.

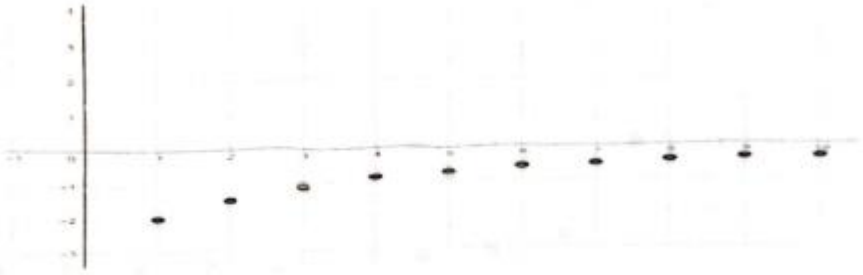
$\frac{3 \cdot 0 - 3}{0^2 - 1} = \frac{0 - 3}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$

$\frac{3 \cdot 10000 - 3}{10000^2 - 1} = \frac{29997}{99999999}$

$\lim_{b \to} a_{10000}$

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:



a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

R= la sucesión tiende o converge a 0

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

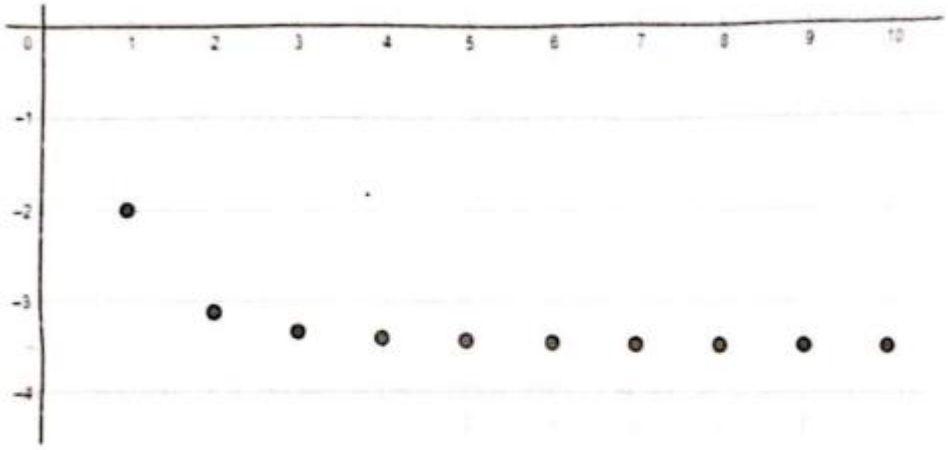
R= Porque los puntos de la sucesión van acercándose más al 0, pero no pasa más allá de él. Entonces, el número 0 es su "tope" o límite.

$$\frac{-4 \cdot 1 + 2}{1^2} = \frac{-2}{1}$$

$$\frac{-7 \cdot 1^2 + 3}{2 \cdot 1^2} = \frac{-4}{2}$$

$$\frac{6 \cdot 1^2 - 4}{3 \cdot 1 - 2} = \frac{2}{1}$$

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma:



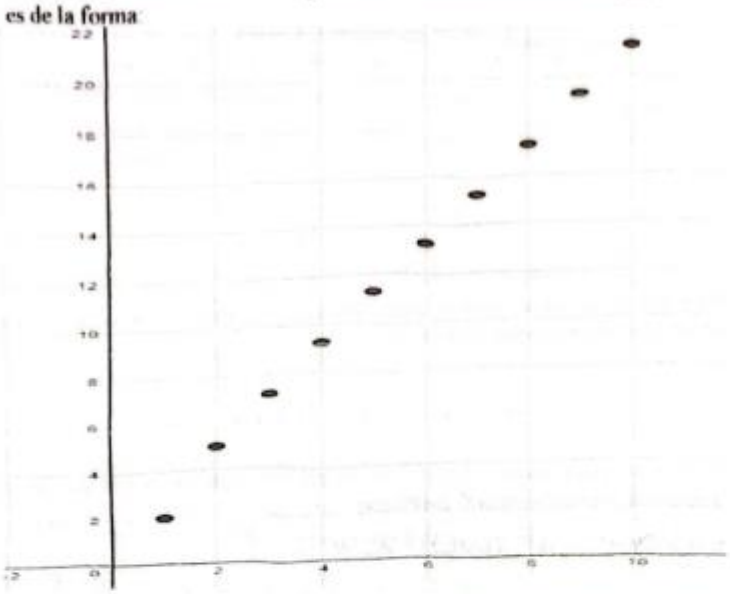
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

R= La sucesión sí es convergente, y su límite sería, aproximadamente, -3,5.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R= Porque los puntos en algún momento se mantienen más o menos constantes, y eso pasa cuando se van acercando al -3,5, es decir lo que no los deja pasar o su límite sí sería -3,5

3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{50}{7}, \ldots$ donde su término general es $\frac{6n^2-4}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma



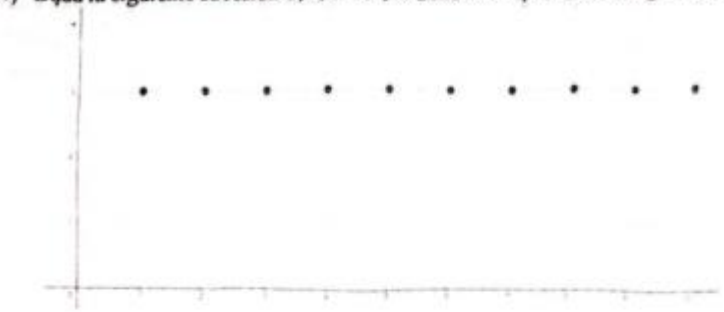
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

R= La sucesión no es convergente, no tiende a ningún número, por lo tanto, no tiene límite.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R= Porque los puntos de la sucesión cada vez se van alejando más de un número, y seguirán así porque no tienen límite

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ..., 3, ... donde su representación gráfica es:



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

R: Es convergente, su límite es 3

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R=Porque se muestra que los puntos se mantienen en 3, es decir que ya llegó a su límite.

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

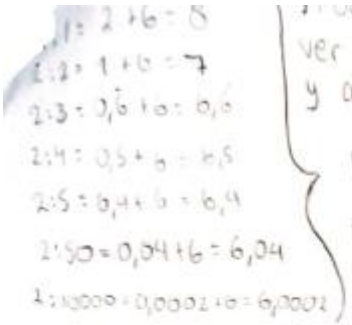
R: Si el "n" en el denominador esta elevado a 2, entonces es convergente. También, cuando converge, los números de arriba son negativos y después se suman, cuando no converge son positivos y se restan.

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$ Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen

R=No, porque el "n" no está elevado a 2 ni el número de arriba está en negativo

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a, con\ a \epsilon \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen

Sí, porque la sucesión es constante, es decir, llegó a su límite.



Podemos usar la forma simplificada para ver que los resultados van disminuyendo y acercándose a 6 con un "n" más grande

b) La compañera "dos" tiene la razón, porque reemplazando el "n" por un número más grande con la forma simplificada, da que el límite es 6, porque no pasa más abajo del número.

1) $\frac{3}{(1+1)} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\frac{3}{(2+1)} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{3}{(3+1)} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\frac{3}{(100+1)} = \frac{3}{101} = 0,0297$

$\frac{3}{1000+1} = \frac{3}{1001} = 0,0029$

a) Calculamos con números grandes usando la equivalencia algebraica, así nos damos cuenta que la sucesión tiende a 0.

b) Tiene la razón el primer compañero, porque en la equivalencia algebraica podemos ver que el 3 se va dividiendo en más partes,

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

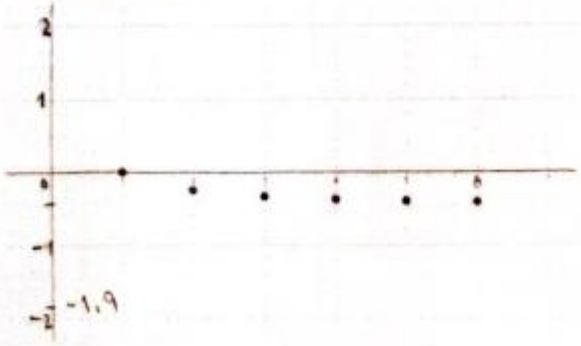
Es cuando una sucesión tiene un "tope", límite o tiende a cierto número. Por ejemplo la sucesión $\frac{1}{n}$, donde n puede tomar cualquier número hacia el infinito, tiene como límite 0, porque el 1 se va dividiendo cada vez en más partes. Estos resultados no pasan del 0, porque el 0 es su límite.

2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1}$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ **donde su término general es** $\frac{3n^2-1}{n^2}$.
Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) converge la sucesión señalada?

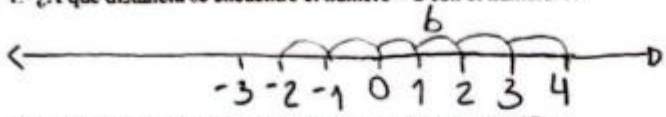
4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, justifique a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



Título de la Investigación: El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la enseñanza media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje

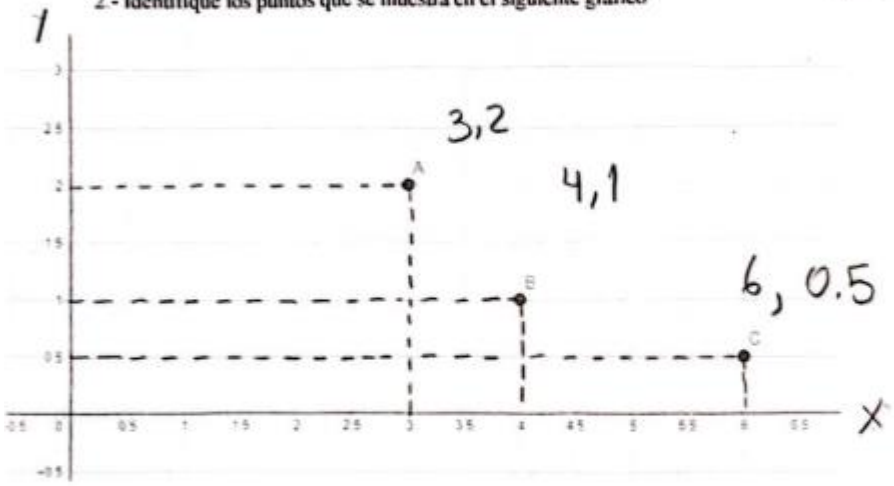
Cuestionario previo

1.- ¿A que distancia se encuentre el número −2 con el número 4?



el -2 del 4 se encuentra a una distancia 6

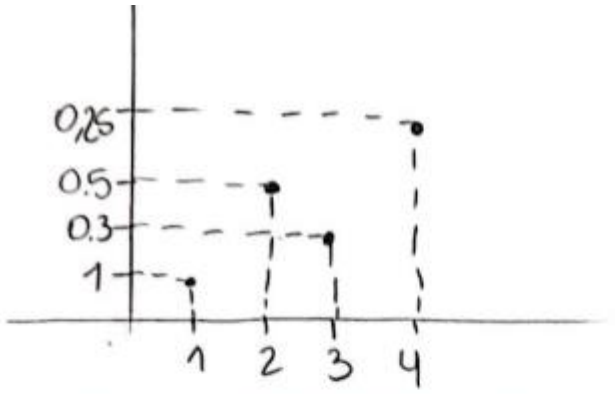
2.- Identifique los puntos que se muestra en el siguiente gráfico



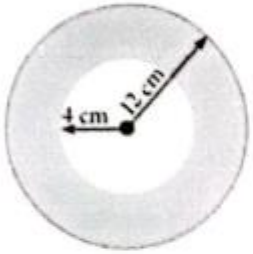
3.- Dada la siguiente sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... donde su termino general es $\frac{1}{n}$, cuya tabla de valores es:

n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

Gráfique la sucesión anterior.



4.-Calcule el área sombrada de la siguiente figura geométrica:



$3,1415 \cdot 4^2 = 50,264$

5.- Factorice la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \quad \frac{(x+1)^2}{x^2-1} \quad \frac{(x+1)^2}{(x-1)\times(x+1)} \quad \frac{x+1}{x-1}$$

6.- Explique con sus palabras si 0.9999... es o no es 1

dado que entre dos números distintos hay infinitos números racionales.

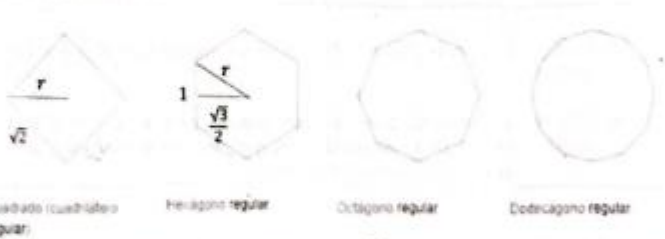
7.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto de límite de sucesión

es el valor al que tienden los terminos de la sucesion cuando n toma valores muy grandes.

Parte 1: Explorando el comportamiento de sucesiones

1) Arquímedes en el siglo IV a.C realizó una aproximación del área de la circunferencia, por medio del cálculo de áreas de polígonos regulares que sabía calcular. Esta actividad se trata de pensar como lo hizo Arquímedes.
Dada la siguiente circunferencia de radio $r = 1$ y vamos a utilizar $\pi = 3{,}14$

Consideremos los siguientes polígonos regulares **inscritos en esta circunferencia**, en que la distancia desde el centro hasta cada uno de sus vértices del polígono mide lo mismo que el radio de la circunferencia:



Recuerde que el área de un **polígono regular** es: $A = \frac{p\,a}{2}$ donde p es el perímetro del polígono regular y a es la apotema. Además, considere las siguientes aproximaciones:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \;;\; \sqrt{3} = 1{,}73 \;;\; \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}84 \;;\; \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}76 \;;\; \sqrt{6} = 2{,}44$$

a) ¿Qué sucede con la diferencia del área de la circunferencia y los polígonos regulares inscritos?
b) ¿Qué concluye usted respecto el área de los polígonos regulares inscritos y la de la circunferencia?

1) $A_{\square} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2$
$= 1{,}41\cdot 1{,}41 = 1{,}9881$
$3{,}14 - 1{,}9881 = 1{,}1519$ b

2) $A_{16} = \frac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6\cdot 1{,}73}{2} = \frac{5{,}19}{2}$

$A_{He} = 2{,}595$
$3{,}14 - 2{,}595 = 0{,}545$ b

3) $A_O = \frac{p\cdot a}{2} = \frac{6{,}08\cdot 0{,}92}{2} = 2{,}7968$
$3{,}14 - 2{,}7968 = 0{,}3432$ b

4) $12\cdot 0{,}515 = 6{,}18$
$A = \frac{6{,}18\cdot 0{,}92}{2} = 2{,}8428$
$3{,}14 - 2{,}8428 = 0{,}2972$ b

b) R/ la circunferencia de los círculos son iguales, en cambio el área de los polígonos varía entre sí mismo

1

Observe la siguiente sucesión que parte desde $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{8}, a_3 = \frac{9}{15}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$. Realicen las siguientes actividades y expliquen sus respuestas

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos términos de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión

$\frac{3n-3}{n-1} = \frac{3\cdot 2-3}{2^2-1} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{3\cdot 5-3}{5^2-1} = \frac{12}{24} = 0{,}5$

$\frac{3\cdot 100-3}{100^2-1} = \frac{297}{9999} = 0{,}0297$

$\frac{3\cdot 100-3}{100^2-1} = \frac{2997}{999.999} = 0{,}0029$

	0	3	5
a)	1	2	4
b)	0,5	2,5	4,5
c)	6,0297	2,9703	4,9703
d)	0,0029	2,9974	4,9971

a) Encuentren los términos de la sucesión para $n = 2; n = 5; n = 100; n = 1000$. ¿Qué pueden concluir al analizar la distancia entre los distintos valores de la sucesión y el número 0? ¿Y para los números 3 y 5?

b) Ahora grafiquen la sucesión.

$$\frac{2-3n^2}{n+4}$$

$$\frac{2-3^2}{2-4} = \frac{-10}{6} = 1,6666$$

$$\frac{2-3\cdot 5^2}{5+4} = \frac{-46}{8} = -8,1111$$

$$\frac{2-3\cdot 100^2}{100+4} = 29.998 = 288,4423$$

$$\frac{2-3\cdot 1000^2}{1000+4} = \frac{2.988.0458}{1004} = 2988,0458$$

	0	3	5
a)	1,6666	4,6666	6,6666
b)	8,1111	11,1111	3,1111
c)	288,4423	291,4423	293,4423
d)	2988,0458	2.999,5458	2998,045

(1, -0,5)

(2, -1,6)

(3, -3,5)

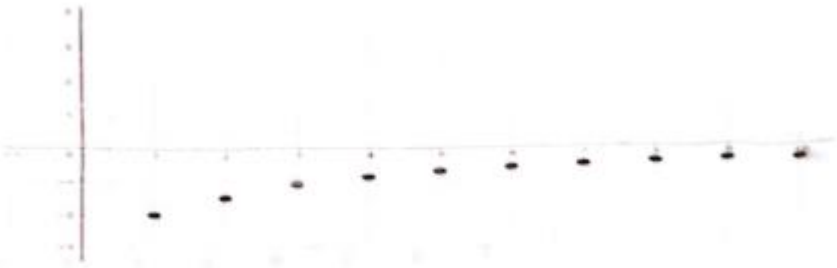
(4, -5,75)

(5, -8,1)

R// Se puede concluir en la sucesión en la que se indica en el grafico es que entre mas valores en x en y los valores de la distanc de los números negativos sera mas baja.

PARTE 2: Establecer hipótesis sobre límites de sucesiones

1) Dada la siguiente sucesión $6, \frac{9}{2}, \frac{38}{8}, \ldots$ donde su término general es $\frac{-4n+2}{n^2}$ y su gráfico es de la forma:



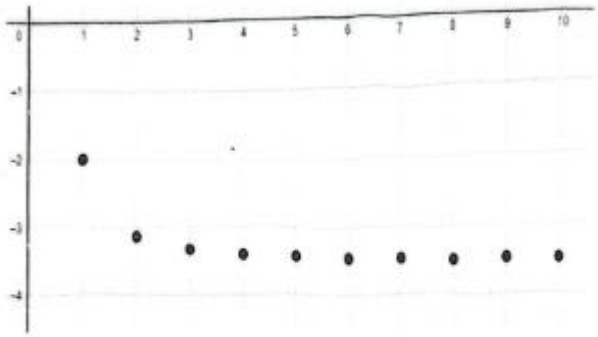
a) Propongan, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

R// En el gráfico la sucesión que converge es el 10 ya que es su tope.

b) Dado sus análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyeron que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R// Es el número ya que llegando al número 10 no sigue pasando ya que es su límite.

2) Dada la siguiente sucesión $5, \frac{31}{8}, \frac{11}{3}$ ... donde su término general es $\frac{-7n^2+3}{2n^2}$ y su gráfico es de la forma:



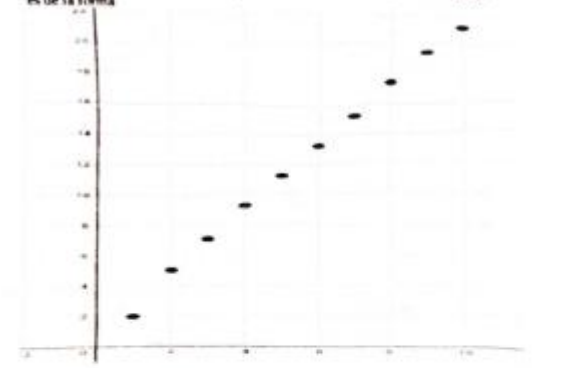
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico.

R// El comportamiento sí es convergente ya que tiene tope, tiene un límite.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R// Su límite de sucesión está entre el -3 y el -4.

3) Dada la siguiente sucesión $2, 5, \frac{10}{3}, \ldots$ donde su término general es $\frac{4n^2-n}{3n-2}$ y su gráfico es de la forma



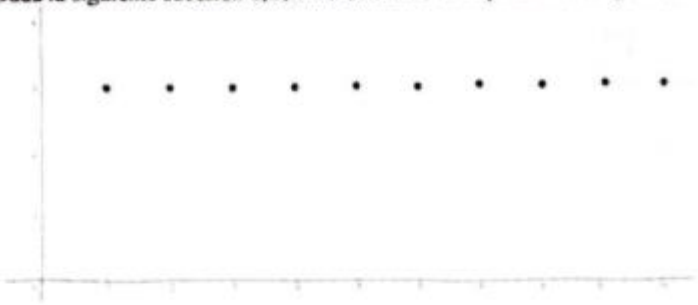
a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

R// No es convergente ya que se va alejando del lope y del 0.

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

R// No tiene un límite puede seguir subiendo sin tener límite.

4) Dada la siguiente sucesión 3, 3, 3 ... ,3, ... donde su representacion grafica es



a) Proponga, si es que es posible, hacia qué número tiende o converge, la sucesión observando el comportamiento en el gráfico

Si es convergente ya que su tope o límite es el 3 y aunque pongan mas valores se mantiene igu

b) Dado su análisis en la pregunta a) ¿Por qué concluyo que ese es o no es el límite de la sucesión y no otro número? Justifiquen

El 3 es su límite ya que los puntos se mantiene en el tope.

5) Dado al estudiar los problemas anteriores, podrían identificar algunas condiciones que debe tener la sucesión para que converja. Justifiquen

6) Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ donde su termino general es $\frac{1}{n}$. Respecto a su análisis en la pregunta 5) ¿Existe el límite de esta sucesión? Justifiquen

7) Dada la siguiente sucesión $a, a, a \ldots, a \ldots$ donde le termino general de la sucesión es $b_n = a, con\ a \epsilon \mathbb{R}$ ¿Existe el límite para esta sucesión? Justifiquen

Parte 3: Calculando límites de sucesiones

1) Sabemos que la sucesión cuyo término general es: $\frac{6n+2}{n}$ **tiene límite**, y lo que nos interesa ahora es calcularlo. Para esto, observen la siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{6n+2}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{2}{n} = 6 + \frac{2}{n}$$

a) ¿Cómo podrían usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas.

1. Una compañera realizó lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

2. Otra compañera hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 6$$

b) ¿Qué opinan? ¿Quién tendrá razón? Expliquen y justifiquen sus respuestas.

2) Se desea calcular el límite de la siguiente sucesión cuyo término general es $\frac{3n-3}{n^2-1}$ donde sabemos que **tiene límite**. Para esto, observa lo siguiente manipulación algebraica de la expresión:

$$\frac{3n-3}{n^2-1} = \frac{3(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{(n+1)}$$

a) ¿Cómo podrías usar esta **equivalencia algebraica** para calcular el límite? Escriban sus ideas

1. Un compañero realizo lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

2. Otro compañero hizo algo diferente. Observemos lo que realizó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 3$$

b) ¿Qué opinas? ¿Quién tendrá razón? Justifiquen

CUESTIONARIO POSTERIOR

1.- Explique con sus palabras que es para ti el concepto límite de sucesión.

Para mi el límite de sucesión son ciertos datos dado para un gráfico en el cual, dado los datos a medida que va avanzan debe ir siendo mas pequeña la distantia, en el cual hay límite.

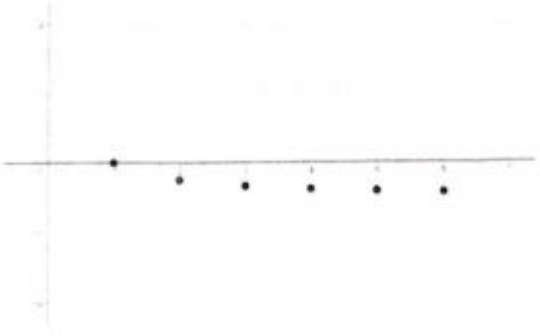
2.- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+27n}{81n^2-1} = \frac{30n}{81(n-1)} =$$

3.- Observe la siguiente sucesión $2, \frac{11}{4}, \frac{26}{9}, \frac{47}{16}, \frac{74}{25}, \ldots$ donde su término general es $\frac{3n^2-1}{n^2}$
Debido a lo anterior ¿A cuál de estos números (2,3 o 4) converge la sucesión señalada?

Si converge ya que va cada vez aumenta más y la distancia se hace aún mas grande y en sui general el denominador es n^2 y el numerador es $3n^2$ en el cual los dos iban aumentando de la misma manera

4.- Dada el siguiente comportamiento gráfico, justifique a que número converge o no la sucesión, cuyo término general es $\frac{1-n}{2n}$



No converge ya que se va alejando cada vez más del 0 y va aumentando su distancia, y no tiene un límite

5.- Determine, **si existe o no el límite** para la sucesión $\frac{n^3+1}{n^2-1}$. **Explique y justifique.**

En este caso el numerador crecera mucho más que el denominador en el cual no existira limite ya que no será menor la distancia sino que mayor ya que porque el numerador es tan grande se va alejando de 0 por lo que no hay un limite mientras que el denominador a la vez tambien avanza.

6.- **Dada la siguiente sucesión** $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **justifique** si tiene límite o no.

Si converge, tiene un limite porque si pongo una linea imaginaria todos aun así se mantienen en el 1 aún siendo negativo. -> tiene límite

Preguntas abiertas

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo que mejor entendiste?

Lo mejor que entendi fue convergente, en que momento era convergente en cúal no, identificar en el grafico su limite o tope.

Según lo que haz aprendido ¿Qué fue lo más te complicó entender?

Lo que más me costo fue el calculo de area, perimetro identificar el radio como eran los lado de las figuras; cada medida y el calcular una sucesion

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es relevante? ¿Por qué?

Lo que pienso que es relevante es sobre cada figura, e saber todas su medidas, es importante el saber como sacar medidas, sobre todo si uno quiere estudiar ingenieria las medidas estan en todo.

Según lo que haz aprendido ¿Qué concepto es irrelevante? ¿Por qué?

Ningún concepto se me hace irrelevante ya que en todo lo que se pasa en matematicas, que tenga calculos es importante en todo, todo lo que se pasa sirve para más adelante ya que en lo que trabaje uno entra todo tipo de calculos, tal vez unos menos que otros.

"El problema de la enseñanza y aprendizaje de los límites de sucesiones en la educación media chilena: Una propuesta para su enseñanza y aprendizaje"

© 2024 by Jorge Zambrano Canales is licensed under CC BY-NC-ND 4.0