UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Magíster en Educación Matemática

Departamento de Matemática y Computación

Resignificación del discurso Matemático Escolar docente. Una mirada al cálculo de volumen desde la teoría socioepistemológica.

Jorge Antonio Astudillo Ugalde

Profesoras Guía: Daniela Soto Soto

Gladys Bobadilla Abarca

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

Santiago – Chile

2021

Agradecimientos.

En este trabajo quiero agradecer en primer lugar a mi madre, por ser un pilar fundamental en mi vida, más que ser una madre, es una compañera de vida, una amiga y un centro de sabiduría máxima que siempre está ahí para aconsejarme de la mejor manera. Se que prometí darte riquezas, pero orgullo es la mayor riqueza que puedo darte. Te amo mucha mamá <3…

Quiero agradecer a mi mejor amigo, mi padre el cual siempre me ha apoyado en todas las metas que me he propuesto, somos seres de tiempos diferentes, pero con el tiempo hemos aprendido a entendernos y querernos. Gracias por ser como eres y darme tu guía para que tome las mejores decisiones, el tiempo siempre termina dándote la razón. Te amo mucho padre <3…

Quiero agradecer a mi hermanita menor, por estar ahí cuando la necesito. Independiente en donde nos encontremos, quiero que sepas que siempre estaré ahí para apoyarte, gracias por todo Claudia, te quiere tu hermano...

Todo este trabajo se lo debo en gran parte a la confianza, el entusiasmo y apoyo incondicional de la profesora Gladys Bobadilla y Daniela Soto, que han demostrado ser más que profesoras, sino que amigas, pero por sobre todo grandes personas, incorruptibles, nobles, pero por sobre todo justas y sabias. Gracias por todo profes ….

Quiero agradecer a mis amigos más cercanos como es Nicolas Ganin y Manuel San Martin, los cuales han sido pilares fundamentales para lograr este proyecto, siempre apoyándome y dándome garras para no rendirme. Aunque seamos de madres diferentes, yo siempre los consideraré más que amigos. Los quiero hermanos ….

Quiero agradecer a toda la familia Álvarez, en particular a la profesora Patricia ya que ha sido un gran apoyo en este proceso, entregando sus conocimientos, su cariño y sus buenos deseos. Lucharé por este sistema desigual e injusto para los docentes, para que todos aquellos profesores menoscabados que han entregado su vida al sistema educacional chileno sean recompensados. Un gran abrazo tía Paty.

También quiero agradecer a Romina Silva y Esteban Olivares, por su gran apoyo durante este proceso de proyecto de graduación, puesto que sin ellos esto jamás hubiese sido posible, ¡¡gracias muchachos!!. En particular, quiero destacar el apoyo transversal de

Esteban durante el proceso de rendimiento de asignaturas, por darse el tiempo de participar en mis experimentaciones y encuestas. ¡¡Gracias peladito!!

Para finalizar, quiero agradecer a todas esas personas que el destino puso en mi camino, como la profesora Patricia Toro, ¡¡¡que siempre me apoyó en mi lugar de trabajo y tuvo algunas palabras de aliento que me motivaron a seguir esta meta, muchas gracias profe!!!. En segundo lugar, a mi tío Juan, que me dio a entender la realidad y me hizo mantenerme cuerdo, gracias por eso Juan y éxito con tu familia. Finalmente, quiero agradecer a mi partner Rubén, con el cual pasamos momentos difíciles durante esta pandemia y durante todo el magíster, aun así, logramos apoyarnos para lograr la meta, gracias por todo Rubén, la confianza, el cariño y el apoyo. Siento que lo me llevo de este magíster es más que un grado, sino que un amigo. GRACIAS POR TODO A TODOS Y TODAS <3.

Dedicatoria.

Dedico este trabajo a toda mi familia ……

Santiago, febrero de 2022.

Lucia Ugalde Yáñez

Angel Astudillo Vergara

Claudia Astudillo Vergara

Nacely Maturana Fonseca <3

Lucas Astudillo Maturana

Roberto Fica Sepúlveda

Nicolas Ganin y su familia

Lucia Yáñez Garrido Q.E.D.

Manuel Antonio San Martin Maillard

Juan Rivas Aravena Jorge Ugalde Yáñez

Contenido

Resumen

La problemática de la investigación es mostrar cómo la geometría 3D, en particular el cálculo de volumen ha sido soslayada y transformada en un profundo cálculo aritmético o algebraico descontextualizado. Específicamente, se desconoce las nociones más intuitivas del concepto como son las representaciones 3D, la forma, el tamaño y la perspectiva, además de no considerar la evolución de este tópico a lo largo de la historia. Para lograr que el cálculo de volumen no sea lineal, y tome una significancia en la vida del estudiante, se debe trabajar en base a estimación y medida, lo cual no es sencillo, ya que de por si este contenido presenta su propia problemática (Pizarro, Albarracín & Gorgorió, 2018). Freudenthal (1983), realiza un análisis fenomenológico del volumen, acentuando distintos aspectos del volumen relacionados con situaciones reales, tal como la manipulación de sólidos concretos, comparación de volúmenes y optimización del espacio. Lo que implica que el cálculo y comprensión del volumen, no es solo la adquisición de habilidades espaciales, sino que también en el trabajo de los procesos de medir y estimar. Ahora bien, Chamorro (2003) indica que la única manera de abordar la problemática, es cambiando el paradigma que indica que cálculo de volumen es sinónimo de exclusivo trabajo aritmético y utilización de fórmulas algebraicas.

El objetivo principal de esta investigación, es mostrar cómo los docentes resignifican su discurso matemático escolar (dME) respecto a la enseñanza de la geometría 3D, en particular el cálculo de volumen. Para ello es necesario identificar el dME de los profesores, mediante el trabajo de situaciones de aprendizaje, que permita describir su forma de razonar el cálculo de volumen. Para finalmente, caracterizar su dME. Todo esto con el fin de lograr observar si su dME, considera elementos de la construcción social del conocimiento matemático (CSCM).

El desarrollo de la problemática se realiza bajo la teoría Socioepistemológica, en donde en primer lugar, se analiza históricamente cómo se enseña el concepto, y como este es presentado en el currículum escolar chileno. Luego de ello, se diseñan situaciones de aprendizaje, que apuntan a trabajar los tres dominios del modelo de inclusión-exclusión del marco teórico. La primera, confronta el dME escolar que presenta el docente, con nuevas ideas que propone la CSCM. En segundo lugar, se trabaja la unidad de ambas epistemologías, en la que el docente toma la decisión de cuál emplear. Finalmente se trabaja la idea de cambio, es decir, si el dME del docente presenta una resignificación respecto a sus nociones iniciales de la enseñanza del cálculo de volumen.

La metodología utilizada para este proyecto, es cualitativa, del tipo exploratoria. Se realiza un estudio de casos, que consiste en el trabajo con dos docentes, durante un periodo de cinco sesiones, las cuales son individuales. Los mecanismos de recolección de datos son la entrevista, la rúbrica de análisis del dME y las guías de trabajo de las secuencias de aprendizaje.

Finalmente se concluye de la experiencia, la comprensión por parte de los docentes, las críticas al dME usual desde la teoría Socioepistemológica, lo que les permite tener una visión más amplia y más geométrica del concepto de volumen y su enseñanza.

Palabras Clave: Teoría socioepistemológica, Geometría tridimensional, Procesos reflexivos del docente, Modelo Inclusión-Exclusión.

Introducción

Los seres humanos viven en un universo tridimensional, lo que conlleva la necesidad de comprender y manejar el entorno espacial en que se desenvuelven, por esta razón aparece la geometría 3D. En términos generales, a pesar de que la geometría es algo muy natural y propio del ser humano, es complejo su aprendizaje, por lo que es innato preguntarse el por qué. Una de las ideas principales que surge es el mal abordaje de los contenidos, debido a la falta de contexto con la que se presentan los conocimientos, o simplemente la mala implementación de los diferentes contenidos geométricos por parte del educador al momento de enseñarlos. Por otro lado, la enseñanza de la geometría a nivel mundial ha sufrido quiebres, los cuales hasta el día de hoy no se han superado por completo, un ejemplo más claro son las palabras de Jean Dieudonné en el año 1959 durante el periodo de la reforma de las matemáticas modernas (Bkouche, Charlot & Rouche, 1991), quien dijo que "si todo el programa tuviera que condensarse en un solo eslogan, yo diría ¡abajo Euclides!". Esta frase es una de las evidencias que muestra lo complicado que ha sido llegar a un consenso, al momento de decidir qué geometría se les debe entregar a los estudiantes.

La existencia de problemas en la enseñanza de la geometría, en particular la espacial son evidentes desde hace décadas, un ejemplo es lo que ocurre en Bélgica (Burton, Deutheux-Jehin, & Fagnant, 1997), donde se señala que los profesores de secundaria evalúan en general solo geometría plana clásica, y que solo el 6% de ellos se refiere a la geometría espacial. Por otra parte, el estudio pone de relieve los conocimientos que manejan y evalúan los docentes, de donde se deduce una debilidad, respecto de lo que saben y lo que enseñan de geometría a sus estudiantes.

En particular, en los establecimientos educacionales chilenos, los contenidos geométricos son tratados de manera superficial, y en su mayoría se dejan para el final del programa o se omiten. Además, es de destacar el fracaso que presentan los estudiantes universitarios al momento de intentar aprender conceptos de Cálculo II o Cálculo III, tales como sólidos de revolución o geometría vectorial, lo que ratifica que algo está ocurriendo con la geometría, en particular la espacial. Una de las principales hipótesis que podría ayudar a explicar lo anteriormente expuesto, es que se han olvidado las nociones elementales del concepto, y las herramientas que se utilizan para intentar aprender o enseñar la geometría tridimensional, no son las más precisas, puesto que no conectan el espacio con el contenido, por lo que se genera una desconexión entre el estudiante y el concepto matemático.

Ahora bien, centrándose en la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos, en el nivel de octavo grado, es necesario considerar lo expuesto por Freudenthal (1983), en base a su postura crítica a Piaget, expone que, para trabajar la idea del concepto de volumen, este debe desarrollar la noción de espacio. Esta será adquirida, si se hace hincapié en diferenciar el volumen del área, la capacidad y el volumen de un sólido, y más profundamente, si realizan transformaciones con los cuerpos, que permitan su manipulación, mediante aditividad, ruptura y transformación principalmente.

Para desarrollar la idea de espacio, en torno al cálculo de volumen, se vinculó de manera estricta y transversal con la idea de medir y estimar, dado que históricamente se encuentran de la mano. En particular, se trabajará con el dME relacionado con el contenido de cálculo de volumen, de docentes de matemáticas en ejercicio. Ellos participarán en diferentes situaciones de aprendizaje, que provocarán que vayan adquiriendo elementos de la CSCM. Para lograr esto, se han planteado tres objetivos específicos, que indican un proceso de pre intervención, intervención y post intervención. Inicialmente, se busca conocer el dME que presenta el docente y compararlo con el dME clásico, para observar si están presentes los fenómenos de opacidad, adherencia y exclusión. Luego de ello, se procederá a ejecutar una serie de secuencias de aprendizaje, que permitan transitar al docente entre el dME usual y el nuevo (CSCM). Finalmente, se analizará el dME del docente post intervención, para observar los cambios de este respecto a la hegemonía del álgebra y la aritmética, y cómo se han adquirido las ideas de espacio y medida.

Como se mencionó anteriormente, el marco teórico es la Socioepistemología, más específicamente el modelo de inclusión-exclusión, el cual consiste en tres etapas: la confrontación, en el que dME usual implica la utilización de la fórmula algebraica y el cálculo aritmético como base para la enseñanza del cálculo de volumen. No obstante, deja a un lado las representaciones bidimensionales y tridimensionales de los cuerpos, y los procesos de estimación y medida. Para construir un nuevo dME, que rompa con la aplicación usual, se deberían complementar ambas nociones, es decir, se debe buscar el cálculo de volumen mediante la utilización de recursos aritméticos y algebraicos, pero que utilicen de manera obligatoria las representaciones 3D y 2D, y la estimación y medida para obtener las respectivas dimensiones de los sólidos. La Unidad, que tiene como idea fundamental, la existencia de un tránsito entre el dME y la CSCM, es decir, que exista una composición de significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentaciones que permitan desde lo algebraico o aritmético desarrollar la idea de espacio que utiliza un cuerpo, mientras que cuando se valoran los entornos de uso y significados del cálculo de volumen, ocurra un tránsito opuesto. Finalmente, el Cambio, es la sección del diseño que propone que, para trabajar el cálculo de volumen, la utilización del álgebra y el cálculo aritmético no sea exclusivo, sino que tenga una relación horizontal con la idea de la utilización del espacio, es decir, exista un transitar tanto por lo 2D y 3D al trabajar el objeto matemático.

La metodología que permitirá lograr analizar el dME de los docentes y observar la resignificación de su discurso es del tipo cualitativa exploratoria, dado que los objetivos de este trabajo no es obtener conclusiones generales, sino más bien se busca que los docentes vivan una experiencia de aprendizaje y reflexión. La investigación consta de tres etapas, la primera de pre intervención pedagógica busca caracterizar el dME del docente mediante análisis de planificaciones y entrevista; la segunda, busca intervenir el dME docente, mediante la aplicación de una secuencia de aprendizaje que incorpora los elementos de la CSCM, esta durará tres sesiones y va de la mano con las etapas del modelo inclusión-exclusión (confrontación, unidad y cambio); Finalmente, la tercera parte post intervención, busca analizar el nuevo dME del docente, observando cuánto cambió éste en relación a las ideas espaciales que presentaban originalmente, para esto nuevamente se utiliza la entrevista y el análisis de planificaciones.

Para finalizar, se espera que las conclusiones respaldan el supuesto de trabajo, es decir, que la aplicación de la situación de aprendizaje, diseñada con base en la teoría Socioepistemológica, que aborda el cálculo de volumen de octavo grado, influya en la resignificación del discurso matemático escolar docente, porque a pesar de que se mantiene lo algebraico y lo aritmético al momento de presentar el contenido, esto ya no es exclusivo y predominante, sino que está en sincronía con los aspectos tridimensionales y bidimensionales del concepto, tales como la forma, la perspectiva, el tamaño y el espacio. Por otra parte, se espera también indicar cuales son las fortalezas y debilidades de la investigación, indicando que podría mejorarse y que podría evitarse.

Capítulo 1

1.1 PROPUESTA.

Bajo la mirada del modelo exclusión-inclusión, el discurso matemático escolar (dME), relacionado a la enseñanza del cálculo de volumen, presenta ciertos fenómenos (Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto, 2015), los cuales provocan que el conocimiento sea *utilitario*, que se *excluya* la naturaleza tridimensional de los cuerpos geométricos, además de generar *opacidad* en los argumentos del cotidiano, como es la forma, el tamaño y la perspectiva. Generando *adherencia* a elementos tanto algebraicos como numéricos, es decir, que existe un predominio de lo bidimensional, el uso de fórmulas algebraicas y el cálculo aritmético. Es por ello, que el dME se considera hegemónico y lineal, por lo que debe ser trastocado, generando uno nuevo que considere lo algebraico y lo aritmético, pero que también incorpore su naturaleza geométrica como es la tridimensionalidad.

Freudenthal (1983), considera fundamental adquirir la noción de tridimensionalidad, para ello sostiene que se debe hacer la diferencia entre área, volumen y capacidad. Por otro lado, apunta a que la manipulación de sólidos es un proceso fundamental, sin olvidar una idea transversal, y la que da origen al cálculo de volumen, como es la noción de medir y estimar. Estas acciones le dan significado al concepto, y permiten que se rompa la linealidad de calcular un número sin sentido.

La enseñanza de la geometría ha presentado varios contratiempos durante toda su historia (Guzmán, 1993). Ahora bien, los elementos que provocan que el dME tenga un carácter hegemónico y lineal, es la dificultad que tienen los estudiantes de desarrollar habilidades espaciales al momento de trabajar conceptos geométricos tridimensionales. Algunas nociones como la visualización, las habilidades espaciales y las percepciones conceptuales y mentales de un cuerpo geométrico, son mencionadas cuando se hace referencia a la geometría 3D. Todos estos términos anteriormente nombrados han sido trabajados por diferentes autores tales como Bishop (1998), Arcavi (2003), Battista (2007) y Godino, Batanero y Font (2007), entre otros. Los autores previamente mencionados han robustecido los argumentos del fenómeno, y han propuesto evidencias que se sustentan en (Aparicio, Sosa, Torres & Gómez, 2018). Uno de los argumentos, es la confusión que existe entre lo bidimensional y tridimensional, en donde la gran relevancia que se le da al cálculo aritmético y al uso exclusivo de la fórmula, han contribuido al crecimiento de la dificultad de aprender el contenido.

En Cajaraville, Fernández y Godino (2006), se menciona que efectivamente los estudiantes no logran adquirir habilidades espaciales y correlacionar lo conceptual con lo visual. Más aún las actividades geométricas se han visto transformadas en un cálculo aritmético exclusivo, que no considera lo geométrico en el trasfondo del aprendizaje, sino que sólo la utilización de las fórmulas algebraicas.

Un estudio realizado por Andrade y Montecino (2009), menciona que al trabajar con contenidos 3D, la mayoría de los estudiantes no logran desprenderse de un pensamiento bidimensional, es decir, abandonar el plano, y menos aún, intuir la posibilidad de un trabajo sobre una superficie esférica. Más aún, hay conceptos arraigados que generan un obstáculo en el aprendizaje del estudiante (Brousseau, 1986 citado por Andrade & Montecino (2009)). A continuación, una breve explicación de los factores que influyen en la enseñanza de la geometría tridimensional.

Figura 1: Representación bidimensional de un sistema cartesiano de tres dimensiones.

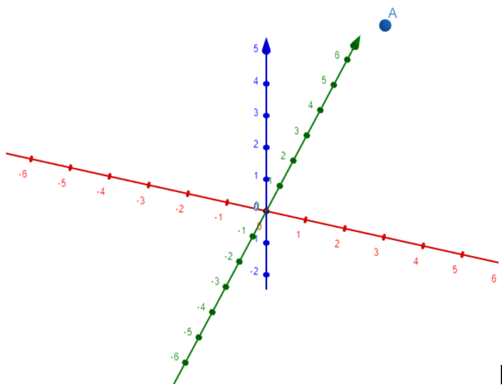


Figura 1.

La figura 1 muestra una representación bidimensional de un concepto tridimensional. La imagen no representa totalmente lo que se quiere enseñar, ya que, si por ejemplo se preguntará la ubicación de la coordenada del punto A, ¿se podría responder con exactitud mediante esta representación? La respuesta a la pregunta anterior es no, debido a que, desde la perspectiva de la imagen, el punto A podría tomar una infinidad de valores.

Figura 2: Representación bidimensional de un cubo.

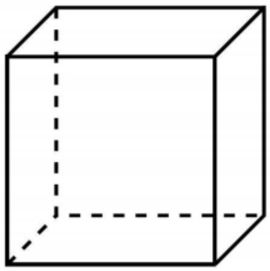


Figura 2.

La figura 2 muestra nuevamente una representación bidimensional de un cuerpo tridimensional, como lo es el cubo, el cual por definición tiene todas sus aristas del mismo tamaño y todas sus caras de las mismas dimensiones, pero ¿Se puede observar esto en la figura 2? La respuesta a la pregunta anterior es no, puesto que a pesar de que la imagen representa un cubo, por temas de perspectiva y enfoque, también podría considerarse como un paralelepípedo de dimensiones diferentes.

Figura 3: Representación Bidimensional de intersección de planos y rectas.

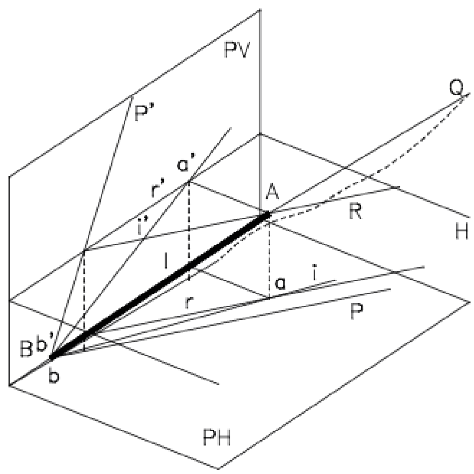


Figura 3.

La figura 3 muestra una representación bidimensional de varios planos y rectas diferentes. Como se aprecia en la forma superior, existe una gran cantidad de información, si ésta sólo se observa desde una única perspectiva, podría generar confusión y tendencia a errores. Por lo que es necesario una representación que considere varios enfoques, para así visualizar de mejor manera y aprovechar al máximo los datos entregados.

Las tres imágenes anteriores muestran de manera breve y sencilla alguna de las problemáticas que ocurren cuando se enseña geometría tridimensional. Parecen disyuntivas simples, pero al momento de trabajar los conceptos se podría generar desconexión entre lo cognitivo y epistemológico (Kuzniak, 2013).

Ahora bien, de todo lo anterior se deduce que existe una problemática al momento de enseñar geometría tridimensional, por lo que es lógico preguntar, ¿cómo se ha abordado tal dilema?

Autores como Ng, Shi y Ting (2020), han meditado los inconvenientes que se presentan al enseñar G3D[1], por lo que han realizado indagaciones, en donde el foco considera principalmente la manera de presentar el contenido, es decir, los recursos con los que se está enseñando la G3D. Con base en ello, se trabajó con cuerpos tridimensionales (físicos o virtuales), en donde los medios 3D generaron resultados positivos en la enseñanza de la geometría 3D, debido a que los estudiantes adquieren habilidades especiales transitorias (presentes sólo durante la actividad como es la utilización más sostenida de recursos 3D) y permanentes (presentes de manera transversal y continua, como es diferenciar lo 2D de lo 3D).

[1] G3D significa Geometría tridimensional

En lo propuesto por Carlos-Chullo, Vilca-Quispe, y Castro-Gutierrez (2021), se mencionan efectos que apuntan a que el uso de A.R[2] influye en la adquisición de habilidades espaciales y que el uso de este mecanismo genera una mayor motivación académica. Por otra parte, el estudio realizado por Benzer y Yildiz (2019), con profesores en formación, mediante la resolución de problemas (clases teórico-prácticas), mostró resultados que de igual forma apuntan a que la enseñanza de la geometría con modelos computacionales influye en el desarrollo de habilidades espaciales. Más aún, enfatizó que los estudiantes que no participaron en los talleres no mostraron aumento en el desarrollo de habilidades espaciales.

Todo lo mencionado anteriormente, presenta antecedentes de la problemática de manera genérica, por lo que se requiere una focalización, ya que se quiere abordar el problema en la enseñanza del cálculo de volumen de secundaria en Chile. Es por esto que es necesario preguntarse, qué se ha generado en torno a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos, y qué propuestas consideran los factores que involucran las habilidades espaciales y la visualización.

Respecto al cálculo de volumen, Escobar (2016), implementa una estrategia apoyada por una unidad didáctica, vinculada con el concepto de área y volumen en secundaria. Para esta se utiliza material concreto (origami) y tecnologías digitales (GeoGebra y sweet home 3d).

SanMiguel y Salinas (2011), realizan estudios, cuyo foco es conocer las dificultades que presentan los estudiantes ante el cálculo de volumen, obteniéndose resultados que indican que los estudiantes ven el cálculo de volumen como un proceso aritmético (contar cubitos) y que no existe un desprendimiento de lo bidimensional al trabajar con lo tridimensional (a los cubos los mencionan como cuadrados).

Rivera, Núñez, Saboya y Soto (2019), presenta un estudio dirigido hacia la modelación matemática, en donde se propone una secuencia de aprendizaje para el cálculo de volumen, mediante el método de sólidos en revolución.

En el contexto de pruebas internacionales como TIMSS y PISA, la medición, estimación, espacio y forma (indicadores relacionados al cálculo de volumen) van de la mano. Chile no alcanza la media a nivel mundial y es segundo a nivel sudamericano detrás de Uruguay, por lo que esto es un antecedente importante que evidencia la problemática a nivel nacional y sudamericano (Agencia de Calidad de la Educación, 2018).

Finalmente, Astudillo-Ugalde, Soto y Abarca (2021) diseña y valida localmente mediante la ingeniería didáctica, una propuesta de enseñanza que involucra el cálculo de volumen de cuerpos geométricos clásicos. Su estudio está contextualizado en secundaria y aplicado al aula. Se trabaja con cálculo directo, cálculo contextualizado, la categoría de

[2] A.R significa Realidad Aumentada.

volumen iguales que implican formas diferentes, visualización que induce a error al momento de calcular volumen y construcción de cuerpos 3D.

Previamente, se mostró algunos estudios que involucran el cálculo de volumen, no obstante, la matemática educativa, no solo considera el conocimiento o el estudiante, sino que también la perspectiva del profesor (Chevallard & Joshua, 1982). Es por esto, que se ha querido mencionar algunos estudios en donde se trabaje con profesores en procesos de formación. Uno de estos es el de Alsina y Mulà (2019), el que realiza un análisis de clases de matemáticas (30 sesiones). Estas proporcionan momentos de análisis individual, grupal, propuestas y estrategias de mejora de las prácticas pedagógicas colaborativas. Lo descrito anteriormente fue realizado con profesores de matemática en formación.

El estudio de Da Fontoura García Silva, De Lurdes Serrazina y Campos (2014), no es muy distante a la investigación anterior, ya que también va dirigida a la idea de que los procesos reflexivos, y el espíritu colaborativo entre profesores son fundamentales para el desarrollo profesional docente. Es de mencionar que el trabajo con los docentes fue respecto a la enseñanza de fracciones, lo cual se llevó a cabo durante 16 sesiones.

Otras investigaciones que presentan un marco diferente, pero que de igual manera contribuyen al proceso de desarrollo docente son la de Barth-Cohen, Little y Abrahamson (2018), que incentiva la auto reflexión docente, mediante el análisis de videos de clases, lo que genera la identificación de diferencias en la comprensión del conocimiento en estudiantes de secundaria. Análogamente Kuennen y Beam (2020), muestran herramientas de apoyo docente, tales como actividades de clases, materiales manipulables y estrategias de enseñanza que involucran la resolución de problemas.

Blanco (2013), expone resultados de una investigación realizada para profesores en formación, de la que se observa procesos de desarrollo docente, pero, además, se aborda la visualización geométrica y desarrollo de habilidades espaciales. De esta se concluye, que los docentes carecen de dichas cualidades y además se sostiene que a pesar de la existencia de recursos 3D, estos no son suficientes para influir en el aprendizaje de G3D, debido a la falta de recurrencia en los procesos de enseñanza.

Cordero, Gómez, Silva-Crocci, y Soto (2015) en su obra "El discurso Matemático Escolar: La adherencia, la exclusión y la opacidad" tratan la problemática de enseñar álgebra de funciones, destacando que, durante el paso de los años, lo aritmético y lo algebraico ha predominado frente a las representaciones gráficas del concepto. Si bien, esta investigación no tiene relación con el cálculo de volumen, como se mencionó en un principio, el modelo de la problemática encaja con lo que sucede en la G3D, puesto que se excluye lo tridimensional y sobresale lo bidimensional. Es de destacar, que la Socioepistemología está enfocada en la enseñanza del cálculo y álgebra, no obstante, considerando los antecedentes, se sostiene que el dME relacionado a la G3D, está bajo los fenómenos de adherencia, exclusión y opacidad, dado que se excluye la naturaleza

3D y se opaca los elementos del cotidiano como es la idea de medir y estimar, generando una adherencia al uso de la fórmula y el cálculo descontextualizado.

Dado que, en los anteriores puntos, se plantea los elementos que conforman la problemática, y su conexión con el marco teórico, se expone de manera concreta el foco del proyecto de investigación. Este considera trabajar el cálculo de volumen de cuerpos geométricos con profesores, mediante la teoría Socioepistemológica, todo esto con el objetivo de que el docente resignifique su dME, generando así un proceso que relacione las representaciones 3D con el concepto, es decir, provocar una desconcentración de lo aritmético y algebraico, y tratar de conectar nociones matemáticas que parecen inconexas y excluidas del discurso Matemático Escolar, como es la medida y el espacio. Todo aquello, para aportar a un problemática mucho más longeva y profunda, puesto que la geometría históricamente ha sido menoscabada (Guzmán, 1993) y ha existido hace más de cinco décadas una confusión entre lo bidimensional y lo tridimensional, más profundamente entre el área y volumen (Castelnuovo, 1963).

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.

De lo expuesto anteriormente, surge la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo influye en la resignificación del discurso Matemático Escolar docente, la aplicación de una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada en el marco de la teoría Socioepistemológica?

1.3 SUPUESTOS DEL TRABAJO.

La aplicación de la situación de aprendizaje, diseñada con base en la teoría Socioepistemológica, y que aborda el cálculo de volumen de octavo grado, influye en la resignificación del discurso matemático escolar docente, porque a pesar de que se mantiene lo algebraico y lo aritmético al momento de presentar el contenido, esto ya no es exclusivo y predominante, sino que está en sincronía con los aspectos tridimensionales y bidimensionales del concepto, tales como la forma, la perspectiva, el tamaño y el espacio.

1.4 OBJETIVOS.

A continuación, se mostrará el objetivo general y específico del trabajo de investigación.

Objetivo General.

Explicar los procesos de resignificación del discurso Matemático Escolar de profesores de matemática, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Objetivos Específicos.

Identificar el discurso Matemático Escolar de los docentes, previo a la aplicación de la secuencia de aprendizaje con base en la teoría Socioepistemológica, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Describir las acciones y formas de pensamiento de los profesores en ejercicio, cuando se enfrentan al conjunto de actividades que constituyen una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada con base en la teoría socioepistemológica.

Caracterizar el discurso Matemático Escolar de los docentes, luego de la aplicación de la situación de aprendizaje con base en la teoría socioepistemológica respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

1.5 Antecedentes.

Análisis epistemológico del concepto de volumen.

A continuación, se presenta un análisis epistemológico del concepto de volumen, el cual abarca desde lo más abstracto (ideas y nociones), hasta lo más concreto (fórmulas y demostraciones). Esta breve indagación, tiene el sentido de ayudar a comprender cómo ha evolucionado el concepto, robustecer la problemática y resignificar la forma de tratar el contenido.

Ideas intuitivas del volumen.

El volumen intuitivamente es el espacio que ocupa un cuerpo en un lugar determinado. Originalmente, el concepto de volumen viene de la necesidad de medir (Kula, 1980), en donde la medición es un sistema complejo que nace como mecanismo regulador del comercio, por ende, en la antigüedad trabajar con volúmenes era sinónimo de medir, comparar y cobrar.

Arquímedes (287-212 AC) mediante su principio de flotabilidad permite la medición del volumen de un cuerpo de manera indirecta, cuando éste es sumergido en el agua. La inmersión de un objeto logra medir el volumen de agua que tal cuerpo desaloja, no obstante, esto no es claro para muchos niños y adultos, quienes creen que el peso del cuerpo determina el cambio en el nivel de líquido (Sáiz, 2005).

Algunos autores como Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) retoman las nociones abstractas del volumen, considerando su relación con los procesos de medición, definiendo el volumen bajo tres conceptos:

- Volumen interno (la cantidad de unidades de material que conforman un cuerpo)
- Volumen ocupado (la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno)
- Volumen desplazado (el volumen de agua desplazado por un cuerpo que se sumerge en este líquido)

Ahora bien, se tiene la idea abstracta de volumen, como espacio que ocupa un cuerpo, pero ¿cómo medir este espacio? Todo problema de medición consta de un paso inicial que es elegir una unidad de medida (Sáiz, 2005), ya que se sabe que el volumen se encuentra en estricta relación con el proceso de medir. En el caso del volumen, lo que se ha impuesto como un mecanismo tradicional, es tomar un cubo de arista uno y suponer que éste ocupa una unidad de volumen. Una vez elegida la unidad, se trata de comparar ambos volúmenes contando las veces que la unidad está contenida en el cuerpo a medir. Aquí surge un primer problema, puesto que este proceso de conteo no siempre es fácil, y universal, basta recordar el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

Formalización del volumen.

La matemática griega separaba las magnitudes de los números (naturales sin el cero). Las magnitudes de la misma naturaleza podrían sumarse y compararse. Es a través de la medición de magnitudes que llegaron a operar con cantidades no discretas: conmensurables e inconmensurables. La unificación de los números y magnitudes se alcanza con los números reales en el siglo XIX con Cantor y Dedekind principalmente. Teniendo esto presente, se esboza como los griegos abordaron el cálculo de volúmenes.

La geometría espacial ocupa los libros XI, XII y XIII de los Elementos de Euclides (325-265 AC). En particular, en el libro XI define los conceptos de *figuras sólidas semejantes y figuras sólidas iguales y semejantes,* las primeras son aquellas contenidas por planos semejantes iguales en número y las segundas como las contenidas por planos semejantes iguales en tamaño y número. En lenguaje más simple, los cuerpos semejantes son de igual forma y el segundo concepto que corresponde a la congruencia, es la igualdad en forma y tamaño. Los volúmenes son tratados en el libro XII, en general comparando cuerpos: por ejemplo, en la proposición 10, se establece que:

"Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y altura. "

En la proposición 18 se encuentra el resultado siguiente:

"Las esferas guardan una con otra, la razón triplicada de sus respectivos diámetros"

Posteriormente, Arquímedes (287-212 A.C) calculó, entre otras cosas, volúmenes y áreas mediante el método llamado exhaución (agotamiento) basado en el principio que lleva su nombre: Dadas dos magnitudes de la misma naturaleza, existe un múltiplo de la menor que excede a la mayor.

Algunos de los resultados son:

1. El volumen de la esfera es 2/3 del volumen del cilindro circunscrito.
2. El área de la esfera es 2/3 del área total del cilindro circunscrito.

3. Toda esfera es el cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera.

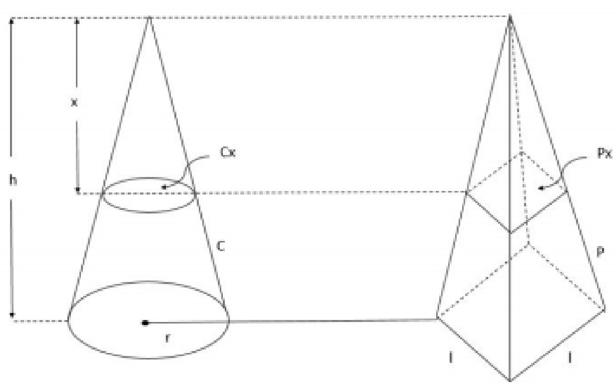
Se debe tener presente que en esos tiempos no se conocía la naturaleza de la constante entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.

Métodos formales del cálculo de volumen y Mecanismos algebraicos.

En el siglo XVII, Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano, concibió un método para calcular volúmenes basado en una concepción de la materia que la supone formada de partículas indivisibles (átomos) diferentes de la materia. La ejemplificación que daba Cavalieri era que, tal como las telas están formadas de hilos y los libros están formados por sus hojas, las figuras planas están formadas de líneas paralelas a las rectas paralelas que limitaban la figura y los cuerpos estaban formados por planos paralelos a los planos que la acotan. No entraremos aquí a comentar las críticas y vacíos lógicos de este método. La idea fundamental para el cálculo de volúmenes es la siguiente:

"Si dos sólidos están comprendidos entre dos planos paralelos y si todas las intersecciones de estos sólidos con un plano paralelo a los dos primeros tienen sus áreas en una cierta razón, entonces los volúmenes de los sólidos están en la misma razón".

Ahora bien, el cálculo del volumen de un cono circular recto, mediante el método de Cavalieri, plantea la comparación de un cono con una pirámide recta de base cuadrada de lado uno, ambos de igual altura (C.H. Edwards,1979).



Denotando por C el cono, por P la pirámide y por Cx y Px las respectivas secciones obtenidas por intersecciones de los sólidos con un plano paralelo a las bases y de altura x medida desde la base. Las áreas de las secciones cada sólido se define como:

$$a(C_x) = \frac{x^2 r^2 \pi}{h^2}$$

$$a(P_x) = \frac{x^2}{h^2}$$

Siguiendo a Cavalieri se tiene:

$$\frac{VolC}{VolP} = \frac{a(C_x)}{a(P_x)} = \frac{x^2 r^2 \pi}{h^2} \cdot \frac{h^2}{x^2}$$

Volumen y cálculo integral.

El método de los indivisibles de Cavalieri puede ser considerado un precursor del cálculo integral que resolvió el cálculo de áreas de superficies y volúmenes de cuerpos en forma general tal como se enseña en los cursos de cálculo. A las ideas anteriores, se adhirieron y complementaron autores como Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Wallis (1616-1703), Barrow (1630-1677), los cuales son los principales creadores del cálculo diferencial e integral.

Ahora bien, al analizar brevemente las bases curriculares, las propuestas de enseñanza o los textos universitarios (Stewart o Thomas principalmente) que mencionan el volumen en algún punto, se deducirá que dicho concepto se trabaja principalmente mediante las derivadas, la idea de máximos y mínimos e integrales. La idea anterior, solo ratifica que el cálculo de volumen durante el siglo XXI ha priorizado ideas puramente matemáticas, que tienen un carácter más bien algebraico y aritmético, por lo que ha perdido relevancia nociones más intuitivas, como es el espacio que ocupa un cuerpo en un lugar determinado.

Desarrollo del concepto de volumen y su funcionalidad en el cotidiano.

Para trabajar el volumen se requiere ahondar en la transversalidad del concepto, es decir, cómo este afecta y transforma la realidad de quien aprende. Es por ello, que se ha observado la historia, en donde se destaca una idea más intuitiva y longeva, como es medir y cobrar. Es por este trasfondo, que la problemática no solo tiene que ver con volumen, sino que también implica el fortalecimiento de las ideas estimar y medir.

El estudiante no podrá interiorizar lo que significa una unidad cúbica, mientras se siga priorizando la idea de alto por largo por ancho, bajo magnitudes establecidas (Chamorro, 2003). Ahora bien, el problema de medir es algo que implica varios factores, como son la mala conexión entre la realidad y lo matemático (Godino, Batanero y Roa, 2002), y el uso de contextos forzados, sin olvidar la falta de conocimientos por parte de los docentes, lo cual subyace desde su formación y el currículum, en particular el de Chile (Pizarro *et al*.,2018).

Para lograr que el cálculo de volumen no sea un conocimiento lineal, y tome una significancia en la vida del estudiante, se debe trabajar en base a la medición y estimación, lo cual no es sencillo, ya que de por sí este contenido presenta su problemática propia y además no es aislado (Pizarro, 2015), sino que implica habilidades profundas como el razonamiento lógico, comprensión del atributo, la conservación, la transitividad, las particiones iguales, la iteración de la unidad estandarizada, la distancia, el origen y la relación con el número. Para cambiar este paradigma, es necesario cambiar la idea que implica que calcular volumen es sinónimo de dominio exclusivo de lo aritmético y utilización de fórmulas (Chamorro, 2003).

Por otra parte, para generar una práctica social que sea realmente influyente en la vida de quien aprende y lo rodea, se reitera que la relación del cálculo de volumen con el concepto de medición debe ser estricta. El modelamiento por su parte también debe ser partícipe, ya que considerar los contextos del siglo XXI, ejemplos de estos son la cubicación (presupuestos para construir obras como un radier, una pieza, casa o edificio), la cilindrada del motor de un auto (respondiendo al significado de ¿qué significa una válvula de 1,6 o 2,0?) o la cantidad de líquido que presentan los vasos de Starbuck o McDonald en sus diferentes tamaños. Es esto quien aportará darle un sentido actual y una utilidad al cálculo de volumen.

Quizás, de todas formas, el concepto de volumen se ve ajeno y lejano a la vida cotidiana, olvidando de alguna manera que este está presente cuando se bebe agua (cantidad de agua necesaria para el cuerpo humano) o se prende el calefón (cantidad de metros cúbicos de gas a cobrar), y que su existencia apunte a la noción más elemental (kula, 1980), qué es medir, comparar y concluir.

Para intentar generar una propuesta de enseñanza que tenga sentido para el estudiante, es necesario considerar todo lo expuesto anteriormente. Por otra parte, Freudenthal (1983) en base a su postura crítica a Piaget, genera un análisis fenomenológico sobre el volumen, el cual es profundizado por Sáiz-Roldán (2005). Los autores enuncian, que los puntos tratados son fundamentales para trabajar el espacio y volumen. Estos plantean lo siguiente:

1) Hacer muchas transformaciones con sólidos, semillas, harinas y líquidos, como moldear, verter, transformar, romper y rehacer, sumergir en líquidos u otras.

2) Hacer hincapié en la diferencia entre volumen y área.

3) Diferenciar la capacidad y volumen de un sólido.

4) Observar la aditividad del volumen.

5) Hacer repartos justos (de pan, masa, plastilina, líquido).

6) Estimar

7) Medir

8) Comparar y reproducir

9) Optimizar el espacio

10) Construir cuerpos de igual área y volúmenes diferentes, cuerpos de igual volumen, pero diferentes áreas o cuerpos de diferentes formas, pero igual volumen.

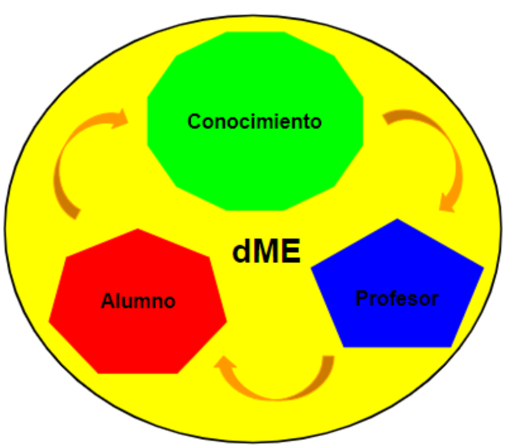
A modo de síntesis, este análisis epistemológico termina evidenciando que el volumen no involucra exclusivamente la noción de espacio o cálculo (aritmético o algebraico), sino que también considera el concepto de medir y estimar en una relación estricta. Es por ello, que, para realizar una reforma en la enseñanza de este concepto, que comprenda un marco de referencia amplio y transversal, es necesario apuntar a la idea de espacio, pero sin dejar de lado las nociones intuitivas que le dieron origen como son el medir, estimar, comparar y concluir.

Capítulo 2

2.1 MARCO TEÓRICO: Teoría socioepistemológica.

Durante el proceso de aprendizaje se presentan tres elementos fundamentales, el profesor, el estudiante y el conocimiento. A menudo el problema de aprender de los alumnos es atribuido en mayor grado al docente, y en ocasiones al mismo alumno (Escudero, 2005)[3]. pocas veces se observa críticamente al propio conocimiento matemático como elemento que forma parte del problema. Desde la teoría socioepistemológica, el conocimiento en sí es uno de los factores que generan fracaso escolar, puesto que la epistemología en que se sustenta al discurso matemático escolar apunta principalmente a objetivos de aprendizajes que ponen en relieve a los objetivos matemáticos y no a su funcionalidad y construcción social del conocimiento. Para explicar esta idea, Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015) menciona al estudio desarrollado por Carraher, Carraher y Schliemann (2000), que indica que, al realizarse evaluaciones a jóvenes escolares, respecto a conocimientos matemáticos que se utilizan en la realidad de las calles, no lograron responder correctamente, mientras que al realizarse evaluaciones a jóvenes de las calles respecto a contenidos enfocados en el curriculum escolar se obtienen los mismos resultados negativos. De los efectos expuestos por la investigación, se puede inferir que algo ocurre al intentar conectar lo curricular con lo vivencial, lo que subraya que existe un fenómeno en torno a la educación matemática.
Desde la teoría socioepistemológica, Soto y Cantoral (2014) han señalado que el discurso matemático escolar produce un tipo de exclusión sutil, ya que para los actores del sistema educativo es complejo visibilizar que la enseñanza de la matemática podría estar produciendo una violencia simbólica, en el sentido de Bourdieu y Passeron (2005), ya que muchas veces en el aula se imponen significados arbitrarios sobre los objetos matemáticos. Esto expresa una exclusión sobre la construcción y pone a los estudiantes en el lugar de observadores.

Figura 4. El discurso matemático escolar y los elementos del triángulo didáctico.



El discurso matemático escolar (dME), expresa todas aquellas ideas, estrategias, conceptos, vocabulario y nociones

[3] (Escudero, 2005 citado por Cordero, et al., 2015)

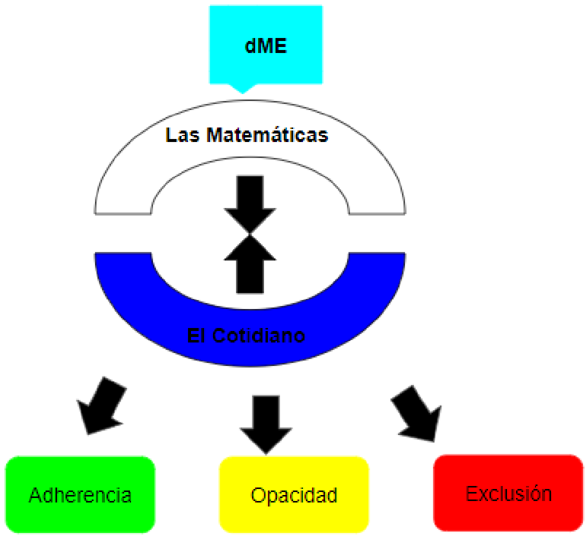
matemáticas que se encuentran presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El discurso matemático escolar influye en todos los elementos del triángulo didáctico, es decir, en el profesor, el alumno y el saber, en donde cada uno de los participantes posee su propio dME, no aislado, que se relaciona con el de los otros componentes.

Si bien, cada componente del triángulo didáctico presenta su propio dME, no aislado y en sincronía entre sí, por lo que bajo esta noción comienza el dilema, ya que, de los tres, existe uno que predomina sobre el resto, puesto que el dME del estudiante es una réplica o se ve afectado por el del docente, el cual a su vez es una réplica de aquel que está entorno al conocimiento. El dME del saber, va más allá del profesor y el alumno, y sobresale debido a que tiene un trasfondo histórico que lo sustenta y lo hace fluctuar, en donde los otros dos participantes se presentan como observadores, por lo que es acá donde se presenta fenómenos como, la opacidad, exclusión y adherencia (Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto, 2015), debido a que, a pesar de existir tres discursos, la realidad es que solo existe uno, que guía todos los caminos.

2.2 Fenómenos del discurso matemático escolar: Opacidad, Adherencia y Exclusión.

Para comenzar a entender lo que es el fenómeno de Opacidad, Adherencia y Exclusión, se citará lo expuesto por Cordero *et al*. (2015), quienes afirman que "La matemática escolar se ha fundamentado bajo un sistema de razón que norma las prácticas y las representaciones sociales de los actores del sistema didáctico. Este se caracteriza por ser hegemónico, utilitario, sin marcos de referencia que permitan resignificar la matemática, centrado en los objetos matemáticos y su presentación lineal y acabada. A este sistema lo hemos denominado "discurso Matemático Escolar". De lo anteriormente expuesto, se observan presentes estos fenómenos, debido a que el dME mediante su carácter hegemónico (Soto & Cantoral, 2014), expresa supremacía de algunas argumentaciones del conocimiento por sobre otras, por tanto excluye algunas nociones epistemológicas, no reconociendo su pluralidad, además, opaca la cotidianidad del conocimiento, al considerar solo lo estructural de las matemáticas (demostraciones, teoremas y cálculos) al momento de presentarlas, y por ende genera una única opción, que provoca inevitablemente la adherencia a ese dME.

Figura 5: Discurso matemático escolar y los fenómenos que genera.



Cordero *et al.* (2015) afirman que "La matemática escolar se encargaría de socializar ciudadanos plenos para vivir adecuadamente en su cotidiano, al mismo tiempo que el ciudadano debería encontrar reciprocidad y sustento del conocimiento
de su vida cotidiana con la matemática escolar. Pero la experiencia muestra que existen dificultades serias para lograr esta relación".
La figura 5 muestra cómo al intentar relacionar lo cotidiano con lo matemático, se genera el dME, el cual al no lograr la reciprocidad entre el conocimiento matemático y la vida cotidiana genera los fenómenos de adherencia, opacidad y exclusión.

2.3 Rediseño del discurso matemático escolar.

El dME tiene las siguientes características:

La atomización en los conceptos: No se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento (Soto,2014).

El carácter hegemónico: Existe una supremacía de argumentaciones, significaciones y procedimientos, frente a otras (Soto,2014).

La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo: Los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden (Soto,2014).

El carácter utilitario y no funcional del conocimiento: La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla (Soto,2014).

La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar: Se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales (Soto,2014).

Luego de caracterizar el dME, se aprecia que este termina siendo excluyente, puesto que logra imponer un conjunto de significaciones, procedimiento y argumentaciones centradas en los objetos matemáticos, las cuales no permiten que actores del sistema didáctico construyan conocimiento matemático (Soto, 2014).

Es por lo anterior, que el rediseño del dME se ha propuesto bajo la premisa de que el conocimiento matemático es una construcción social. Esta postura se basa en cuatro principios (Soto, 2014): la normatividad de la práctica social, el relativismo epistemológico, la racionalidad contextualizada y por último la resignificación progresiva.

Normativa de la práctica social	Le permite al sujeto construir conocimiento de acuerdo con su realidad social y cultural, dándole a este una funcionalidad.
Relativismo epistemológico	Complementa el conocimiento, entendiendo que existen otras argumentaciones válidas para la construcción del conocimiento.
Racionalidad contextualizada	Da un carácter situacional al conocimiento matemático, por esta razón es muy importante estudiar a los sujetos que construyen conocimiento y los contextos y las situaciones donde emerge ese conocimiento.
Resignificación Progresiva	Es la forma en la que se entiende que el conocimiento se desarrolla.

Si contrastamos la construcción del conocimiento matemático, con lo que expone el dME original, se aprecia que estos se contraponen, puesto que se observa que originalmente se encuentra acabado, y que mediante la resignificación vive y cambia según cada contexto y situación (Soto, 2014). Ahora bien, se sabe que la resignificación del dME apunta a la construcción social del conocimiento matemático, en donde se destaca que en un principio es exclusivo y hegemónico y que el tratamiento de este da como resultado uno inclusivo, es decir, que presenta una pluralidad epistemológica y considera el contexto de quien aprende.

2.4 La dialéctica exclusión-Inclusión desde la Socioepistemología

Principalmente, se han diseñado categorías que acerquen el dME a la construcción social del conocimiento, modificando los factores exclusivos del dME, por aquellos inclusivos que propone la construcción social del conocimiento matemático (CSCM) (Cordero *et al*., 2015). La siguiente tabla muestra un contraste entre ambos.

dME	CSCM
Utilitario	Funcional
Hegemónico	Pluralidad epistemológica
Centrado en objetos	Centrado en prácticas sociales
Sin marcos de referencia	Transversalidad
Continuo y Lineal	Desarrollo de usos

¿Qué indica cada una de las categorías de la CSCM?

A continuación, se definirá cada una de las categorías anteriormente mencionadas.

Funcional: El conocimiento toma relevancia para el individuo, a medida este se pone en práctica, provocando que el saber se integre a la vida del sujeto y la transforme.

Pluralidad Epistemológica: Considerar diferentes argumentaciones del conocimiento matemático, las cuales hacen emerger el estudio de dicho objeto.

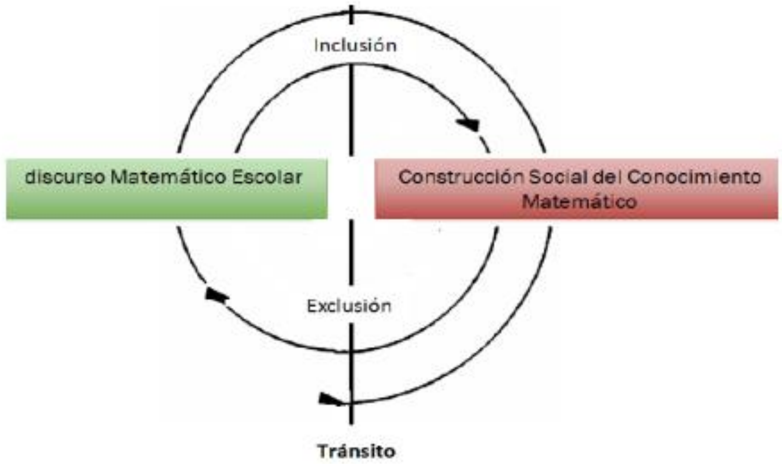
Centrado en prácticas sociales: Apunta a poner el conocimiento en uso, es decir, considerar los contextos y situaciones específicas que hagan emerger el conocimiento y al ciudadano con el cual estamos trabajando.

Transversalidad: Apunta al uso del conocimiento y no a su aplicación, es decir, no se conoce el concepto primero para posteriormente utilizarlo.

Desarrollo en usos: Reconocer argumentos diferentes a los preestablecidos por el dME y analizarlos con el fin de generar una resignificación progresiva de las nociones matemáticas.

Para catalogar el trabajo de los participantes en la resolución del diseño de cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado, se utilizará la dialéctica exclusión – inclusión. Al entender los procesos de exclusión e inclusión como una relación dialéctica (Reyes,2020), se señala que uno no vive sin el otro, además que la exclusión será caracterizada por los elementos del dME y la inclusión por la CSCM. Por otra parte, este modelo muestra un camino para la resignificación del conocimiento matemático a partir de la confrontación entre las dos epistemologías opuestas: dME y CSCM (Reyes, 2020)

Figura 6: Modelo de la dialéctica exclusión – inclusión (Reyes, 2020)


Inclusión
discurso Matemático Escolar
Construcción Social del Conocimiento Matemático
Exclusión
Tránsito

2.5 Los usos del conocimiento matemático.

Cordero, Valle y Morales (2017), luego trabajar la problemática en torno al dME que sostiene la enseñanza del cálculo y el análisis, han propuesto como conclusión, el diseño de la siguiente Socioepistemología, para ello han planteado la siguiente tabla.

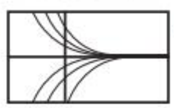
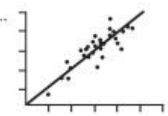
	Situaciones			
Construcción de lo matemático	*Variación*	*Transformación*	*Aproximación*	*Selección*
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0+variación=Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$	Optimización 

Figura 7: Socioepistemología del cálculo y el análisis (Reyes, 2020).

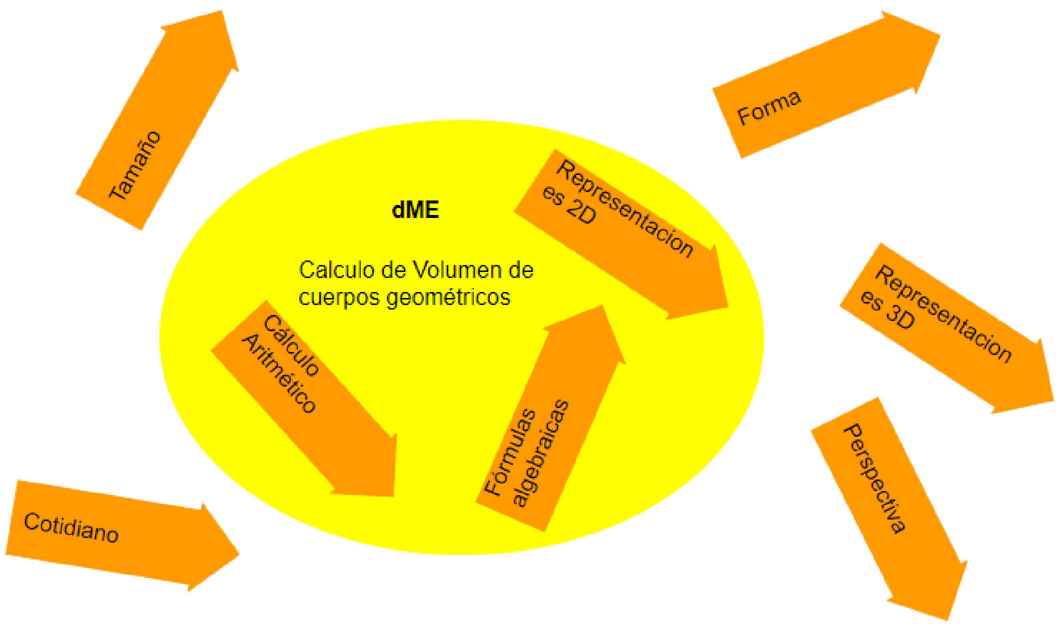
Como se mencionó inicialmente, la tabla anterior muestra cómo se construye la Socioepistemología del cálculo y el análisis, para esto propone diferentes situaciones de enseñanza. Se observan relaciones transversales y horizontales en un entorno amplio que representa una categoría de conocimiento matemático descentralizada del objeto. Cada situación propuesta, deriva en un proceso que trastoca y transforma el dME y genera rediseños de este.

Si bien, la propuesto por (Cordero, *et al*.,2017) va enfocado al contenido de cálculo y análisis, es un buen ejemplo, que puede orientar en el diseño de una Socioepistemología de enseñanza respecto al cálculo de volumen, que considere situaciones que impliquen la variación, transformación, aproximación o selección.

2.6 Relación de la Teoría socioepistemológica y la problemática del volumen. La problemática y su relación con el dME.

La problemática a desarrollar será abordada mediante el modelo de inclusión - exclusión, entendiendo este como el trastocar el dME y generar uno nuevo que considere la CSCM, es por ello que se ha observado la disyuntiva desde la mirada socioepistemológica, sintetizando en que la enseñanza del cálculo de volumen se ha convertido en un conocimiento *utilitario*, que *excluye* la naturaleza tridimensional de los cuerpos geométricos, *opaca* los argumentos del cotidiano, la forma, el tamaño y la perspectiva, generando *adherencia* al *dME*. En este predomina lo bidimensional, el uso de fórmulas algebraicas y el cálculo aritmético, es por ello por lo que se considera hegemónico y lineal, y debe ser trastocado, generando uno nuevo que considere lo algebraico y lo aritmético, pero que también incorpore su naturaleza geométrica como es la tridimensionalidad.

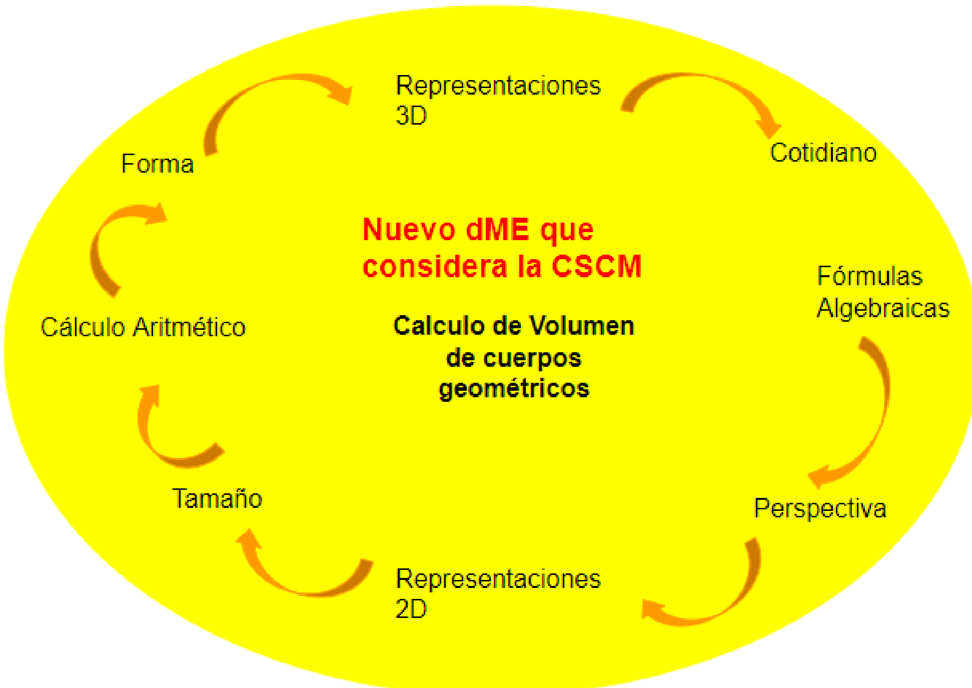
Figura 8: Enseñanza del cálculo de volumen en la actualidad.



La figura 6 muestra cómo está conformado el discurso matemático escolar, respecto al cálculo de volumen de cuerpos geométricos, el cual enfatiza lo aritmético, las representaciones bidimensionales y la utilización de fórmulas algebraicas, es en este punto donde se destaca la desconexión de estos tres objetos al momento de tratar el concepto, es decir, si bien se presentan, en ocasiones no están relacionados entre sí, como se observó en el análisis del libro de texto de 8vo grado. Por otro lado, la figura 6 también muestra cómo el cotidiano, las representaciones tridimensionales, la noción de perspectiva, forma y tamaño son excluidas de dME, por lo que existe una violencia simbólica, es decir, los argumentos que le entregan funcionalidad al conocimiento y potencian su desarrollo en usos no están siendo considerados.

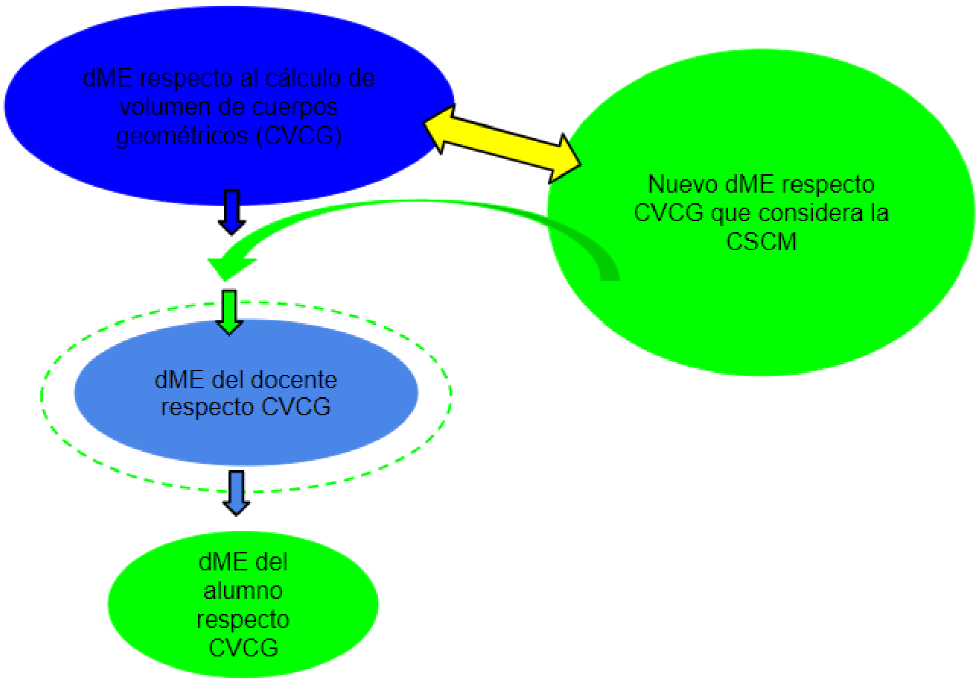
2.7 La propuesta mediante la CSCM.

Figura 9: Nuevo dME que considera la CSCM.



La figura 7 muestra cómo sería el nuevo discurso matemático escolar, el que considera la construcción social del conocimiento matemático, lo que significa que estima las representaciones tridimensionales, las nociones respecto a los cuerpos geométricos como son la perspectiva, tamaño, forma y transversalmente el cotidiano, mediante la idea de modelamiento matemático. Más profundamente, el nuevo dME considerará las nociones iniciales (representaciones 2D, cálculos aritméticos y fórmulas algebraicas), y añadirá aquellas excluidas. Lo anterior no solo fortalecerá la noción de espacio, sino que también la medición, puesto que como se dijo anteriormente, existe una relación estricta entre estos dos conceptos, en donde el tamaño, la perspectiva y la forma no solo influyen en el volumen, sino que también en la idea mirar, medir y comparar.
Como resultado final, el nuevo dME hará funcionar de manera conjunta y sincrónica los conceptos que rodean el cálculo de volumen, ya que como se mencionó en un principio, los argumentos iniciales del dME no son suficientes, y es necesario que sean complementados con aquellos excluidos. El foco de rediseñar el dME, es mejorar la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático, dándole un sentido y una utilidad en la vida de quien lo aprende y lo enseña.

Figura 10: Esquema de intervención del dME docente.



Como bien se dijo, el discurso matemático escolar se subdivide en tres, aquel relacionado al conocimiento matemático, el del docente y el del estudiante. El primero predomina por sobre todos y genera todos aquellos fenómenos educativos mencionados anteriormente (exclusión, opacidad y adherencia).

Al ser más amplio el dME escolar del objeto matemático, y aquel que influye sobre la reproducción de los restantes, es este que debe ser modificado. No obstante, su diseño como tal va más allá del docente, puesto que se incorporan factores como el Ministerio de Educación, los curriculistas, entre otros. Es por ello, que se propone una intervención intermedia (se muestra en la figura 8, vector verde más amplio), en donde se expone diseñar un nuevo dME que considere la CSCM, el cual no es aislado del original, como lo muestra la flecha amarilla, sino que está en estricta relación, puesto que baraja elementos de este, pero también agrega elementos nuevos. Esta intervención genera un efecto en el dME del docente, por lo que repercute en el dME del alumno, es decir, cambia la manera de pensar del profesor, lo que implica un cambio en la manera de enseñarle al alumno.

Capítulo 3

3.1 METODOLOGÍA.

3.1.1 Fundamentos del diseño.

La metodología del proyecto de investigación es del tipo cualitativa. Según Piza Burgos, Amaiquema Márquez y Beltrán Baquerizo (2019) en una investigación cualitativa el problema planteado se caracteriza por tener una orientación hacia la exploración, la descripción y el entendimiento y está dirigido a las experiencias de los participantes. Es de lo anterior, que se observa que la manera de trabajar la problemática buscará generar experiencias en los participantes, en donde ellos manipulan el concepto del cálculo de volumen. No obstante, este no será el foco exclusivo, puesto que a su vez se buscará describir ese proceso y entender el porqué de las decisiones docentes durante este.

En segundo lugar, la investigación se define cualitativa, puesto que utiliza métodos de recolección de datos característicos de esta categoría (Hernández - Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista-Lucio, 2014), como lo son las entrevistas y la observación. El primero será utilizado con los docentes para saber cómo proponen la enseñanza de la G3D y el segundo tendrá el objetivo de recopilar información de los materiales declarativos (planificaciones) y los procesos de desarrollo del docente.

El alcance de la investigación es del tipo exploratorio, debido a que los antecedentes respecto al problema son poco estudiados, y la situación es relativamente desconocida (Piza *et al.*, 2019). Datos que evidencian lo anterior son los resultados obtenidos en la revisión bibliográfica, la cual fue realizada mediante bases de datos indexadas como Scopus o Web Science, en donde se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla de resultados.

Criterio de Búsqueda	Resultados base de dato A *Web Science*	Resultados base de dato B *Scopus*	Número de resultados escogidos
C1: 3D geometry *and* Teaching	83	259	4
C2: Virtual resources *and* 3D geometry *and* Teaching	1	4	2
C3: Professional development *and* Teachers *and* Math	292	595	1

C4: Reflective processes *and* Teachers *and* Math	11	16	3

Si bien se encontró un total de 1258 resultados, al realizar búsquedas que consideran los cuatro criterios en conjuntos (c1 & c2 & c3 & c4) o pares entre los criterios educacionales y aquellos con nociones matemáticas, las búsquedas fueron nulas, es decir, no se encontraron investigaciones que trabajen con docentes, y apunten a la utilización de recursos 3D, para el cálculo de volumen de cuerpos geométricos o por lo menos la geometría tridimensional (intersección de planos, el espacio, cálculo en varias variables, entre otros). Al no existir investigaciones que consideren el desarrollo docente y la enseñanza de la geometría 3D, se separaron los criterios de búsquedas en dos grupos, los cuales se describirán a continuación.

Criterios de búsqueda.

3D geometry *and* Teaching - Enseñanza de la geometría 3D
Virtual resources *and* 3D geometry *and* Teaching - Recursos virtuales para la enseñanza de la geometría 3D
Professional development *and* Teachers *and* Math - Desarrollo profesional docente para profesores de matemática
Reflective processes *and* Teachers *and* Math - Procesos reflexivos de profesores de matemática

Grupo A	Grupo B
El grupo A considera encontrar principalmente investigaciones que propongan metodologías de aprendizaje que utilicen recursos bidimensionales o tridimensionales para la enseñanza de la geometría espacial.	El grupo B considera encontrar principalmente investigaciones en donde se trabaje con profesores titulados o en formación, con respecto algún concepto matemático, el cual no es estrictamente geométrico, en donde se observe capacitación mediante trabajo colaborativo e individual, análisis de video clases o trabajo reflexivo de actividades para la educación matemática.

3.1.2 Selección de participantes de la investigación.

Hernández – Sampieri et al., (2014) expone que en los estudios cualitativos el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia, sino que lo que se busca en la indagación cualitativa en profundidad, por lo tanto, se pretende calidad en la muestra, más que cantidad, es por ello que se ha decidido que los sujetos participantes sean dos docentes, puesto que será un estudio de casos, en donde el tamaño de la muestra puede ser de uno a varios (Hernández – Sampieri *et al*., 2014). En referencia a "calidad de muestra", esta es intencional y por conveniencia, en donde debe cumplir los siguientes criterios:

- Deben ser profesores de matemáticas.
- Estar en ejercicio.
- Tener una experiencia laboral no mayor a 3 años.
- Estar bajo consentimiento informado.

Los requisitos previamente establecidos, son debido a que, en primer lugar, el estudio está enfocado a un problema de la educación matemática, por lo que un profesor de historia no sería adecuado.

En segundo lugar, el profesor debe estar realizando clases de matemáticas, ya que la idea es trastocar su dME y que este lo lleve a la práctica lo más pronto posible, por lo que un docente jubilado o uno en formación no encajaría en este modelo.

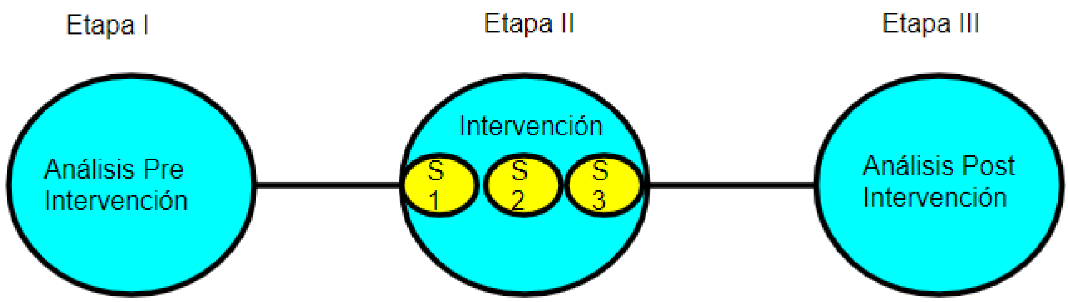
En tercer lugar, la experiencia docente no debe ser superior a los 3 años, ya que existe una resistencia por parte del educador a la transformación (Córica, 2020). Por otra parte, existe una relación directamente proporcional entre experiencia y cambio, es decir, a mayor cantidad de años como docente inmerso en un sistema educacional, existirá una mayor resistencia a probar ideas, mecanismos o recursos nuevos. Bachelard (2019), menciona una idea que sostiene lo anteriormente planteado "En el transcurso de una carrera larga y variada jamás he visto a un educador cambiar de método de educación. Un educador no tiene el sentido del fracaso, precisamente porque se cree maestro. Quien enseña manda".

Ahora bien, al no estar cien por ciento inmersos en el sistema educativo y bajo la influencia del currículum escolar chileno, no presentan una idea absoluta de cómo enseñar los contenidos, por lo que están en la fase de experimentación de recursos y mecanismos que los definan como docente, por lo que el concepto de resistencia debido a la experiencia es menos probable que ocurra. Uno de los comentarios que se rescata de (Guerrero, 2005) es "Me parece bastante pedante que unos jóvenes me vengan a enseñar algo que yo he hecho siempre, y que digan que de esta forma resultará mejor, ya que llevo 10 años enseñándolo así", lo anterior indica una resistencia al cambio, en donde las principales barreras de aprendizaje son la experiencia y el conocimiento.

Cuarto y último, los docentes que sean partícipes del estudio deben haber expresado voluntariamente su intención de participar en una investigación, después de haber comprendido la información que se le ha dado acerca de los objetivos de esta, los beneficios, las molestias, los posibles riesgos, las alternativas, sus derechos y responsabilidades.

3.1.3 Diseño de la investigación.

Figura 11: Diseño del estudio.



Como se observa en la figura 9, el diseño presenta tres etapas, las cuales se describen de la siguiente manera.

Etapa	Descripción
I	La etapa I va dirigida a lograr el objetivo específico N°1, en donde se deberá analizar: ● Textos de estudio ministeriales de octavo grado. ● Planificaciones docentes, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado. ● Entrevistas individuales a los docentes (1 sesión), que respondan: ¿Cómo se enseña el cálculo de volumen en octavo grado? Todos los análisis serán realizados en el marco de la teoría socioepistemológica, teniendo como foco observar los fenómenos de opacidad, adherencia y exclusión respecto a la enseñanza del cálculo de volumen.
II	La etapa II está enfocada a lograr el objetivo específico N°2, en donde se trabajará con los docentes mediante la aplicación de un conjunto de situaciones de aprendizajes, construidas en base a la teoría socioepistemológica. El foco de esta etapa es contribuir a la resignificación del dME, y al análisis del pensamiento y acciones del docente. Para lograr esta etapa, se realizarán 3 sesiones individuales con

	cada docente, de manera online, en donde serán grabados mientras realizan las actividades (grabaciones para análisis, no para publicación), todo esto con el objetivo de entender y justificar sus resultados.
III	La etapa III apunta a lograr el objetivo específico N°3, en donde se deben realizar las siguientes acciones: ● Diseño post intervención por parte del docente, de planificación de clases, respecto al cálculo de volumen. ● Realización de entrevistas personales a los docentes (1 sesión), todo esto post intervención, y respecto al cálculo de volumen. ● Análisis de las nuevas planificaciones diseñadas por el docente mediante el marco teórico. ● Descripción y justificación de decisiones del docente. ● Verificación de la resignificación del discurso matemático escolar del docente, respecto al cálculo de volumen.

3.1.4 Confiabilidad, validez y rigor ético.

El método de triangulación de la investigación será de datos (Okuda Benavides & Gómez-Restrepo, 2005), debido a que la verificación y comparación de la información será obtenida en diferentes momentos mediante los diferentes métodos. En particular, en esta investigación los diferentes métodos serán las entrevistas y los análisis de instrumentos educacionales (planificaciones y textos de estudio).

En cuanto a los criterios de rigor ético, como se menciona anteriormente en la selección de participantes, se entrega a cada participante del cuestionario un consentimiento informado validado por el comité de ética de la Universidad de Santiago de Chile. El consentimiento informado se considera como una herramienta de mediación entre los intereses de investigadores e individuos incluidos en la investigación. Además, es una forma de aplicar principios éticos (Cañete, Guilhem & Brito, 2012).

3.1.5 Entrada al campo.

Los docentes participantes trabajan en el establecimiento Colegio Hermanos Carrera de Maipú, fueron escogidos por cercanía (compañeros de trabajo) y facilidad de comunicación durante el periodo de pandemia. Ahora bien, con el objetivo de interiorizar a los participantes respecto al estudio, se realiza una reunión vía “Zoom” con los dos docentes que cumplieron los criterios indicados anteriormente. Es aquí, en donde se explica el proyecto a trabajar, las etapas y lo que se espera de ellos. Se menciona que la participación es de carácter voluntario y confidencial, por lo que los resultados serán presentados de manera anónima. Se le envía vía mail a cada participante el formulario un consentimiento informado (ver en anexos), en el cual mencionan aceptar o no aceptar su participación voluntaria, además de declarar tener un claro conocimiento del proyecto y su contribución.

3.2 Técnicas de producción de información.

Como se mencionó en un principio, la investigación será del tipo cualitativa, por ende, los mecanismos que se utilizarán será la entrevista individual y la rúbrica (para análisis de planificaciones y textos escolares). Los dos instrumentos serán diseñados en base a la pauta de análisis, la cual tiene la funcionalidad de establecer los elementos que se quieren observar en los instrumentos educativos respecto al marco teórico.

3.2.1 Métodos de análisis de la información.

Para obtener información, se debe realizar entrevistas en varias etapas de la investigación. Además, se deben realizar varios análisis, ya sea de actividades, textos escolares y planificaciones. A continuación, se indican los momentos de intervención y análisis de la investigación.

Etapa 1:

1. Análisis de textos escolares.
2. Análisis de planificaciones.
3. Entrevista.

Etapa 2:

1. Diseño de situaciones de aprendizajes.
2. Análisis a priori de la actividad.

Etapa 3

1. Nuevo análisis de planificaciones.
2. Nueva entrevista
3. Análisis a posteriori de la actividad.
4. Confrontación de los análisis y conclusiones.

Para finalizar este ítem, es importante destacar que cada uno de los instrumentos que se utilizaran en el estudio, fueron validados por doctores expertos en matemática educativa y matemática. Los documentos que corroboran la validación fueron incorporados en la sección “Anexos”.

3.2.1.1 Pauta de Análisis.

A continuación, se definirán los indicadores generales, estos servirán para diseñar la rúbrica, la que se utilizará para analizar las planificaciones docentes y textos de estudio ministeriales, además, permitirá diseñar la entrevista personal docente. La justificación teórica de los indicadores fue obtenida de (Cordero, Valle, & Morales, 2017) y (Lara, 2019).

dME	Indicador	CSCM	Indicador
Hegemónico	Uso exclusivo de lo algebraico.	Pluralidad	Estudio del espacio y sus interpretaciones.
Centrado en el objeto matemático	Utilización exclusiva de las fórmulas de volumen.	Centrado en los usos	Variación, transformación, selección de volúmenes para la toma de decisiones.
Utilitario	Calcular mediante fórmula, sin dar un sentido al resultado obtenido.	Funcional	Aborda aspectos tridimensionales del espacio (forma/ tamaño/ perspectiva)
Sin marcos de referencia	Contexto centrado en cálculo de volumen.	Transversalidad multidisciplinaria	Contextos de usos en el cotidiano y en otros dominios.
Acabado y Lineal	Fórmulas y parámetros de los cuerpos geométricos (altura/radio/ apotema/ generatriz)	Desarrollo en usos	**Variación:** Comparación de los estados de los cuerpos. **Transformación:** Variación de parámetros (algebraico/gráfico/ aritmético) **Selección/Optimización** Distinción de cualidades de los cuerpos geométricos.

3.2.1.2 Rúbrica

A continuación, se presenta la rúbrica de análisis, la que fue diseñada en base a los indicadores generales anteriormente mencionados. Este instrumento fue validado por dos docentes especialistas en la teoría de la Socioepistemología (Pauta de validación en Anexos).

Escala de Observación.	Color y Abreviatura
Siempre	S
Casi Siempre	CS
Medianamente	M
Casi Nunca	CN
Nunca	N

DME

Categoría	Indicador específico.	S	CS	M	CN	N
Hegemónico	Las actividades propuestas son de carácter algebraico.					
	Las representaciones bidimensionales o tridimensionales están desconectadas de lo algebraico.					
	Se varían los parámetros (altura /radio / apotema /generatriz) mediante la utilización exclusiva del álgebra.					
Centrado en el objeto matemático	Se aborda el concepto de volumen mediante el uso exclusivo de la fórmula.					
	Las actividades presentan las variables de manera numérica para aplicar la fórmula (radio/altura/apotema/generatriz).					
	Las actividades presentan el cálculo de volumen mediante el trabajo aritmético.					
Utilitario	Al realizar las actividades, estas promueven un resultado numérico o algebraico.					
	Se observa que los ejercicios están centrados en la utilización de la fórmula para obtener un resultado numérico o algebraico.					
	Se observa que los ejercicios están centrados en reemplazar los componentes entregados (valor radio/altura/apotema/generatriz) y obtener un resultado numérico o algebraico.					
Sin Marcos de Referencia	En el tratamiento del conocimiento, se observa el cálculo aritmético o algebraico descontextualizado como centro de la enseñanza.					

	Las actividades no presentan un contexto relacionado al cálculo de volumen.					
	Los resultados de las actividades no promueven un contexto.					
Acabado y Lineal	El tratamiento del contenido se centra en replicar los procesos de identificar las componentes de los cuerpos, reemplazar en la fórmula, calcular y dar una respuesta numérica o algebraica.					
	Las actividades son ejercicios, es decir, tienen soluciones y procesos similares y apuntan al contenido de una forma común.					

CSCM

Categoría	Indicador específico.	S	CS	M	CN	N
Pluralidad	Se trabaja con representaciones tridimensionales o bidimensionales de manera conexa con el cálculo de volumen, es decir, son un elemento necesario y fundamental para trabajar el contenido.					
	Se considera la forma como elemento que influye en el cálculo de volumen.					
	Se considera la perspectiva como elemento que influye en el cálculo de volumen.					
	Se considera el tamaño como elemento que influye en el cálculo de volumen.					
Centrado en los usos	Existe comparación de volúmenes para la toma de decisiones.					
	Existe la variación del volumen para la toma de decisiones.					
	Existe la transformación de cuerpos, para el cálculo de volumen y toma de decisiones.					
Funcional	La utilización de fórmula se relaciona con las ideas					

	que le han dado sentido a lo largo de la historia.					
	Existe una relación en la utilización de la fórmula con la idea de espacio que utiliza un cuerpo en un lugar determinado.					
Transversalidad	Se relaciona el cálculo de volumen con contextos relevantes para la vida del estudiante, en donde implique tomar decisiones y argumentar estas.					
	Se presentan contextos que impliquen medir, estimar y calcular al momento de trabajar el cálculo de volumen.					
Desarrollo en usos	Se trabajan las ideas de optimizar el volumen.					
	Se trabaja la idea de selección, con el fin de escoger un volumen conveniente.					
	Existe la variación de parámetros (algebraico/gráfico/ aritmético) al momento de trabajar el cálculo de volumen.					
	Se compara el estado de los cuerpos al momento de trabajar el cálculo de volumen.					
	Las actividades promueven diferentes mecanismos de solución, en donde no existe un mecanismo único para abordar cada situación.					

3.2.1.3 Pautas de Entrevistas

A continuación, se presenta la pauta de entrevista inicial (pre-intervención pedagógica), en donde las preguntas fueron diseñadas en base a los indicadores generales mencionados en el punto 3.2.1.1.

Categorías	**Preguntas**
Hegemónico/ Pluralidad	• ¿Utiliza nociones algebraicas para enseñar el cálculo de volumen? Si la respuesta es Sí ¿Cómo las utiliza? • ¿Considera que, en su manera de enseñar el cálculo de volumen, son necesarias las representaciones bidimensionales o tridimensionales de los cuerpos, o puede trabajar el concepto sin estas? • ¿De qué manera conecta las representaciones

	bidimensionales o tridimensionales de los cuerpos geométricos con el cálculo de volumen al momento de enseñar? ● ¿Se siente partícipe de la construcción del contenido (cálculo de volumen) o siente que todo está impuesto y solo están replicando algo pensado por otra persona? ● ¿Cómo usted aprendió el cálculo de volumen, ya sea en la enseñanza básica, medio o superior?
Centrado en el objeto / en usos	● ¿Qué mecanismos utiliza para enseñar el cálculo de volumen? (cálculo mediante fórmula, desplazamiento de agua, comparación de sólidos, etc.)
Utilitario / Funcional	● Cuando enseña el cálculo de volumen ¿en qué se centra? (resultado, la utilización de la fórmula, la interpretación que le da la situación, etc.) ● Cuando observa los resultados de sus estudiantes respecto al cálculo de volumen, ¿Cuál es su énfasis? ¿lo numérico, lo algebraico, la interpretación o sentido que le da a la respuesta?
Sin marcos de referencia / Transversalidad	● Cuando trabaja el cálculo de volumen, ¿presenta situaciones contextualizadas o descontextualizadas? ● ¿Considera que los contextos que utiliza en sus contenidos son relevantes para los estudiantes? ¿De qué manera lo son?
Acabado y Lineal / Desarrollo en usos	● En términos generales, cuando trabaja el cálculo de volumen ¿Los estudiantes realizan problemas o ejercicios? Justifique ● ¿Qué es un ejercicio o un problema para usted? ● ¿Considera que existe una mecánica detrás del cálculo de volumen, es decir, procesos que se repiten "n" veces de diferente forma?

A continuación, se presenta la pauta de entrevista final (post-intervención pedagógica), en donde las preguntas fueron diseñadas en base a los indicadores generales mencionados en el punto 3.2.1.1.

Categorías	**Preguntas**

Hegemónico**/** Pluralidad	• ¿Qué nociones utiliza para enseñar el cálculo de volumen? ¿Cómo las usaría? • ¿Considera que al momento de enseñar el cálculo de volumen son necesarias las representaciones bidimensionales o tridimensionales de los cuerpos, o puede trabajar el concepto sin estas? • ¿De qué manera conectaría las representaciones bidimensionales o tridimensionales de los cuerpos geométricos, al momento de enseñar el cálculo de volumen?
Centrado en el objeto **/** en usos	• ¿Qué mecanismos utiliza para enseñar el cálculo de volumen? (cálculo mediante fórmula, desplazamiento de agua, comparación de sólidos, etc.)
Utilitario **/** Funcional	• Al momento de enseñar el cálculo de volumen ¿Dónde estaría su foco? (en resultado, la utilización de la fórmula, la interpretación que le da la situación, etc.) justifique. • Al observar los resultados de sus estudiantes respecto al cálculo de volumen, ¿Cuál sería su énfasis? ¿lo numérico, lo algebraico, la interpretación o sentido que le da a la respuesta?
Sin marcos de referencia **/** Transversalidad	• ¿Cómo trabajaría el cálculo de volumen? ¿Presentando situaciones contextualizadas o descontextualizadas? • Si considera los contextos al momento de enseñar ¿Para usted que sería un contexto relevante para la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos?
Acabado y Lineal **/** Desarrollo en usos	• ¿Cuál sería para usted la definición de ejercicio y problema? ¿Cuáles de estos elementos emplearía con sus estudiantes y en qué grado?

Capítulo 4

4.1. Análisis y experimentación.

4.1.1. Análisis curricular del cálculo de volumen en textos de octavo grado con base en la teoría Socioepistemológica.

Para comenzar, se observa los planes y programas de matemática de octavo grado (Ministerio de Educación de Chile, 2016), en donde se encuentran los siguientes objetivos de aprendizaje respecto a la enseñanza del cálculo de volumen.

Objetivos de aprendizaje respecto al cálculo de volumen.

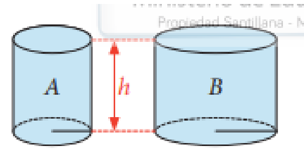
UNIDAD 3	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 11 Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros: › Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen. › Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie. › Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros. › Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.	› Arman y despliegan cajas de forma de prismas rectos. › Reconocen que las áreas laterales de todos los prismas rectos son rectángulos. › Elaboran redes de prismas rectos de diferentes bases y calculan las áreas de las superficies. › Resuelven problemas cotidianos que involucran el volumen y el área de prismas rectos. › Reconocen en forma intuitiva que los prismas a base de polígonos regulares se acercan a cilindros si se aumenta el número de los lados del prisma. › Confeccionan de manera concreta modelos de cilindros y los comparan con modelos o dibujos de prismas a base de polígonos regulares. › Transfieren la fórmula del volumen de un cubo para determinar la fórmula del volumen de un cilindro. › Calculan el área de cilindros en ejercicios rutinarios. › Resuelven problemas cotidianos y de ciencias relacionados con el área de la superficie y el volumen de cilindros.

La imagen anterior, es evidencia de la forma de presentar el contenido de cálculo de volumen, por parte la unidad de currículum y evaluación de octavo grado. Ahora bien, el cálculo de volumen no solo es trabajado en básica, sino que también en segundo medio (Ministerio de Educación de Chile, 2016), no obstante, el estudio se centrará en educación básica.
A modo de sustentar los resultados expuestos por la rúbrica y fortalecer la problemática, se ha diseñado un breve análisis del libro de texto del estudiante de octavo grado (Torres & Caroca, 2019). Este documento es del tipo ministerial, se utiliza como una guía para la enseñanza de los conceptos matemáticos, y está en estricta relación con los planes y programas (Ministerio de Educación de Chile, 2016), y las bases curriculares (Ministerio de Educación de Chile, 2019) de la educación pública y subvencionada del país.

A modo de evidenciar más concretamente los fenómenos epistemológicos, se analizan los siguientes ejercicios y problemas que propone el texto del estudiante.

Figura 12: Volumen del cilindro y su relación con su radio.

4. Los depósitos cilíndricos A y B tienen la misma altura, pero la medida del radio de B es el doble de la del radio de A. Si se va a llenar con agua el recipiente B utilizando el A, ¿cuántas veces hay que vaciar el contenido de A en el de B para llenarlo?



La figura 3.1 (Torres & Caroca, 2019, p. 166) plantea una situación que relaciona el volumen de los cilindros con el tamaño de los radios. No obstante, esta puede ser resuelta sin la necesidad de apoyarse en la imagen, por lo que se hace presente la exclusión de los elementos tridimensionales, la opacidad de la naturaleza del concepto que es estimar y comprender la noción de espacio, que es el fundamento que le da sentido. Por ende, esta actividad se adhiere al dME predominante, el cual considera solo un trabajo algebraico de la fórmula del volumen de un cilindro.

Figura 13: Cálculo de perímetro, área y volumen de cilindros sin un contexto.

5. Considerando $\pi \approx 3{,}14$. Calcula:

a. El perímetro de la base, el área de la base y el volumen, de un cilindro de radio 5,5 cm y altura 12 cm.

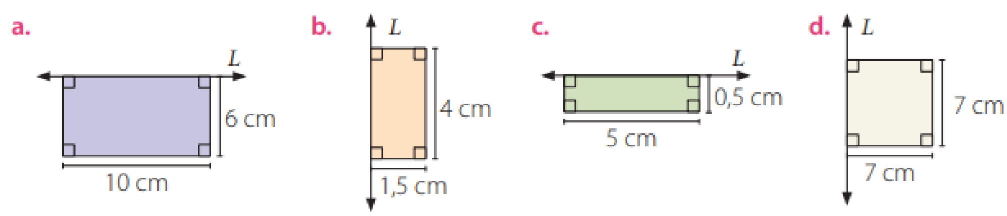
b. El radio, el perímetro de la base y el área de la base de un cilindro de altura 15 cm y volumen 4 710 cm^3.

c. El radio, el área de la base y el volumen de un cilindro que tiene un perímetro basal de 12,56 cm y altura 11 cm.

La figura 3.2 (Torres & Caroca, 2019, p. 167) propone calcular áreas, perímetros y volúmenes de cilindros. Para resolver estos ejercicios no es necesario representaciones bidimensionales y tridimensionales. De lo anterior, se puede observar claramente la hegemonía del dME predominante, en donde la exclusión de los elementos tridimensionales es evidente. La adherencia a la idea de que trabajar el volumen es sinónimo de cálculo aritmético y algebraico es evidente, por lo que nuevamente se ve opacado la significancia del concepto.

Figura 14: Sólidos en revolución.

6. Calcula el volumen (V) de los cilindros generados al rotar cada uno de los rectángulos en torno al eje L. Considera $\pi \approx 3{,}14$.



La figura 3.3 (Torres & Caroca, 2019, p. 168) propone calcular el volumen de cilindros mediante la información que entregan los rectángulos que los conforman. La situación puede ser resuelta mediante cálculo aritmético y uso de fórmulas algebraicas. En este ejercicio no es evidente los fenómenos, se encuentran de manera implícita, puesto que aborda la actividad mediante una acción muy pura de lo 3D, el rotar en el espacio para generar el cilindro (sólidos en revolución). No obstante, esto es solo un mero antifaz, puesto que, en el trasfondo, nuevamente predomina el dME hegemónico, el cual apunta al cálculo aritmético.

Figura 15: Relación entre el volumen y la variación de las componentes de los cuerpos geométricos.

8. Verifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en cada caso.

a. Al duplicar la medida de la arista de un cubo, su volumen también se duplica.

b. Si se triplica la altura de un prisma de base rectangular, su volumen también se triplica.

c. Al disminuir a la mitad las medidas de un prisma de base rectangular, su volumen disminuye a la cuarta parte.

d. Al duplicar las medidas de la base de un prisma de base rectangular y al disminuir a la cuarta parte su altura, su volumen no varía.

e. Al duplicar la medida de la altura de un cilindro, su volumen no varía.

f. Si se triplica la medida del radio de un cilindro, su volumen también se triplica.

g. Al disminuir a la mitad las medidas de un cilindro, su volumen disminuye a la octava parte.

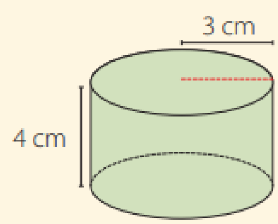
h. Al disminuir a la mitad la medida del radio de un cilindro y al cuadruplicar su altura, su volumen no varía.

Cuaderno de Actividades
Páginas 80 a 83.

Las afirmaciones de la figura 3.4 (Torres & Caroca, 2019, p.169) demuestran la hegemonía algebraica, ya que se excluye todo lo tridimensional. Apuntaría a la noción espacial construir sólidos, variar sus parámetros, y desde la manipulación observar qué relación hay entre la variación de las dimensiones y el espacio que abarcan los cuerpos.

Figura 16: Cálculo de volumen del cilindro de manera contextualizada.

5. Se está diseñando un recipiente para contener la leche extraída en una lechería. Una de las opciones considera un cilindro cuya altura mide 4 m y su radio 3 m, como se muestra en la imagen. Otra opción considera el doble del radio del recipiente anterior. ¿De qué manera debe variar su altura para que en ambos recipientes se pueda guardar la misma cantidad de leche?

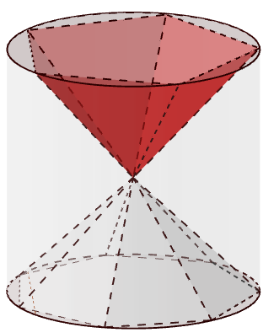


En el problema propuesto en la figura 3.5 (Torres & Caroca, 2019, p.169) sucede un proceso similar a lo de la figura 3.3, se plantea un objeto tridimensional, el cual al parecer será relevante para el problema, no obstante, es excluido, y opacado nuevamente por lo aritmético y lo algebraico, debido a que la información que entrega el enunciado permite su resolución. Ahora bien, más profundamente, la noción de espacio, y el sentido que esta toma es soslayado. Una evidencia de lo anterior es la relación del ejercicio con el contexto de la leche, puesto que se pregunta por la forma de un recipiente contenedor, pero qué influencia tiene la forma en la leche, el precio, el espacio que ocupa transportarlo, el sabor o la cantidad de material a utilizar. Estas son preguntas que no tendrán respuestas, y que ratifican la falta de marcos de referencia.

4.1.2 Diseño de situaciones de aprendizajes.

4.1.2.1 Sesión I. Confrontación.

Parte I. Reloj de líquido



Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet “pirámides y líquido. ggb” desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

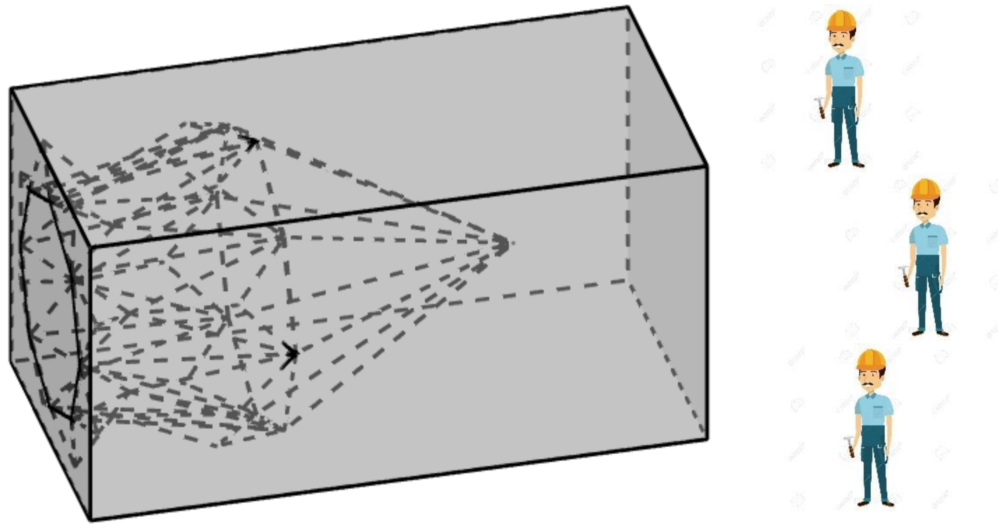
Actividad.

Roberto es un ingeniero que ha sufrido los efectos del COVID, quedando desempleado. Él está intentando hacer una PIME de seudo relojes tienen similitudes con los relojes de arena, solo que, en vez de usar cápsulas redondas de vidrio, utiliza trozos reciclados, estos los une con silicona transparente para formar una pirámide. Roberto entiende que en tiempos de pandemia es complicado conseguir arena fina o molido de acero, por lo que ha decidido cambiar la arena por agua.

Su hija Josefa le ha ayudado a diseñar un prototipo del reloj. Roberto al observar el plano expone que el agua no se vierte completamente de un lado a otro. Por otra parte, Josefa defiende su diseño y dice que comience a generar el reloj con confianza puesto que no habrá problemas.

- A simple vista, ¿quién cree que tiene razón?
- Si usted tuviera que tomar una decisión en base a argumentos concretos, ¿Cuál sería su decisión y argumentos? Fundamente.

Parte II. Cúpula



Instrucciones.

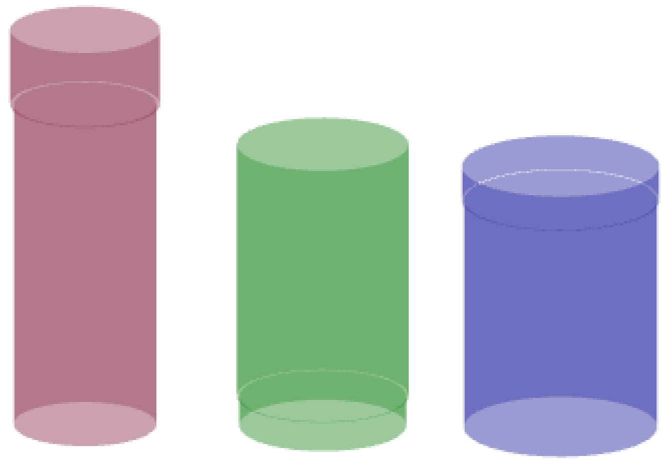
Para realizar esta actividad ingrese al applet "cúpula. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Unos excavadores encontraron una bóveda que fue rellenada con concreto, mediante sondeo se encontró una estructura metálica con forma de cúpula, la cual se piensa que es de los años 1890. Si la estructura ocupa más del 70% de la habitación, entonces se deberá realizar excavación fina, mientras que si es inferior al 70% se podrá aplicar fuerza bruta hasta un 20%, luego se deberá realizar excavación fina para poder desenterrar la reliquia. Sabiendo que utilizar fuerza bruta reduce los costos de la excavación. ¿Se podrá economizar en la excavación? Justifique sus respuestas.

Nota: Se supone que los trabajadores están comenzando a excavar desde la parte más lejana a la cúpula, como lo indica la imagen superior.

Parte III. Vasos de café



Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet "vasos. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Pedro, Juan y Diego están en una disyuntiva, puesto que han observado los nuevos diseños de vasos de una cafetería y no están de acuerdo del todo con los tamaños. Pedro dice que los volúmenes que propone la empresa están bien y que si tuviese mucha sed tomaría el rojo, mientras que Juan dice que es el azul quien tiene mayor volumen. Por otra parte, Diego dice que no puede asegurar cuál es el más grande, pero dice que el de menor precio debería ser el verde.

La cafetería propone los siguientes precios para los vasos.

Tamaños	Precios
Grande (Rojo)	$4.200
Mediano (Verde)	$3.500
Pequeño (Azul)	$2.800

Comentario: Los vasos en la imagen no tienen la tapa puesta, y se llenan hasta el borde.

Preguntas:

- ¿Está de acuerdo con lo expuesto por la empresa o presenta dudas respecto a los tamaños al igual que Pedro, Juan y Diego? ¿Cuáles son sus observaciones al momento de mirar los vasos a simple vista?

- ¿Cuántos litros o centímetros cúbicos tiene como capacidad cada vaso?

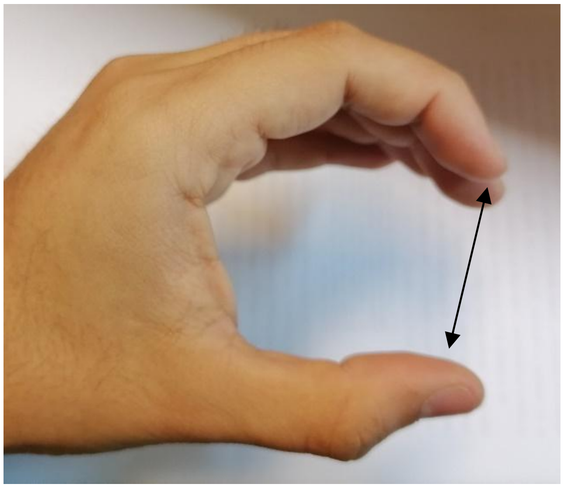
- Escriba sus conclusiones, argumente dichas conclusiones y proponga nuevos diseños de vasos que estén acordes a los precios expuestos.

Parte IV. Recipientes de helado.

Una compañía de helados propone 2 diseños de envase retro para el verano 2022, los cuales son un cono o un cilindro sin relieve, el contenido para ambos recipientes es de 250 ml de helado. El diseñador ha propuesto que los envases sean de cartón reciclable biodegrada a 2 años. La compañía ha tomado la decisión de solo considerar un modelo debido al costo que representa poner los dos modelos a gran escala, la única condición es que cumpla con la norma del agarre.

Diseñe un modelo en GeoGebra o con materiales manipulables que cumpla con el volumen de helado correspondiente y la norma del agarre. Justifique la propuesta de su envase.

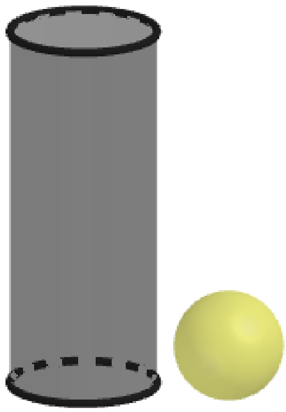
“Norma del Agarre”



La norma del agarre propone que la distancia entre el pulgar y el índice no debe ser superior a los 3 cms, puesto que así se asegura que el efecto pinza sea relajado. Además, se considera que el envase suda con el calor, por lo tanto, se vuelve resbaloso, lo que implica que a mayor la abertura del arco, menor es el agarre y por ende más riesgo de caída del helado.

4.1.2.2 Sesión II. Unidad.

Parte V. Bolas en un frasco.



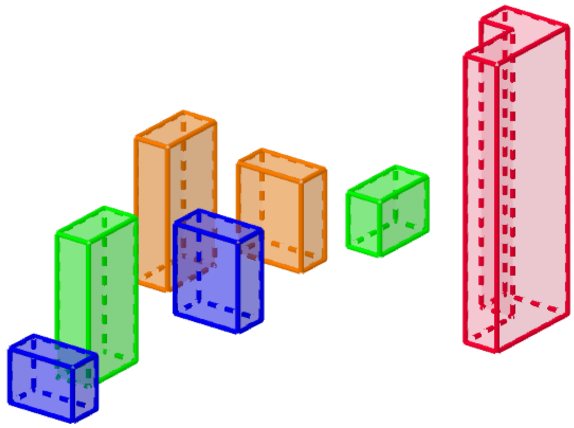
Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet "bolas en un frasco. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Jaime compró bolas de tenis en la feria, las que venían en una bolsa de plástico. En su casa tiene un frasco y quiere guardarlas ahí. Si la bolsa traía 4 bolas ¿Cuántas le caben en el frasco?

Parte VI. Fichas



Instrucciones.

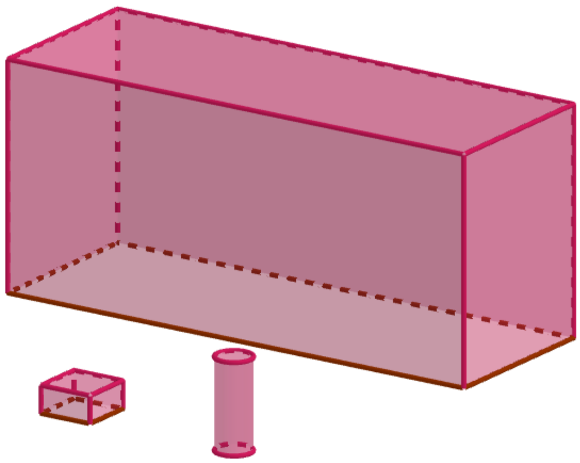
Para realizar esta actividad ingrese al applet "fichas. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Se tienen 7 lotes de fichas, las rojas, las verdes, las naranjas y las azules. Si quisiera agrupar los grupos más pequeños, ¿Ocuparían el mismo espacio que el lote rojo?

4.1.2.3 Sesión III. Cambio.

Parte VII: Container.



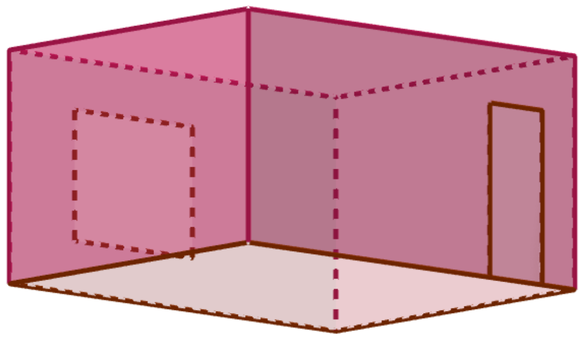
Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet "container. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Se necesita empacar arena en un container, para ello se proponen dos métodos de transporte, cilindros de trigo (con tapa) o cajas herméticas. ¿Cuál de los dos envases carga más arena en el container?

Parte VIII. Acomodando la habitación.



Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet "habitación.ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Un profesor que mide 1.85 mts. se muda a una habitación, en donde debe acomodar los siguientes objetos:

- 2 veladores de 45x45x80 cms.
- Mueble multipropósito (tv, equipo de música y libros) 250x90x200 cms.
- Cama 250x150x50 cms.
- Silla escritorio 50x70x90 cms.
- Mueble esquinero 50x50x100 cms.
- Pizarra 150x80 cms.
- Repisa aérea 35x25x180 cms.
- Cuadro 75x50 cms.

Dado que todos los objetos caben de manera funcional y estética en la pieza, diseñe un modelo en GeoGebra en donde ubica todos los objetos.

Nota: ¡¡¡Cuidado al abrir las puertas y cajones!!!

4.1.3 Análisis de las situaciones de aprendizajes.

Sesión I. Confrontación.

Objetivo

La primera sesión, está enfocada en la etapa de la confrontación de la dialéctica inclusión-exclusión, donde si bien el cálculo de volumen mediante el álgebra y la aritmética se hacen presentes, se incorporan nuevos elementos que son parte de la CSCM, como la visualización, relación con representaciones y perspectiva 3D.
En otras palabras, en esta sesión, si bien se utilizan fórmulas algebraicas y la aritmética, se incorporan elementos transversales que muestran diferencias con el dME tradicional, como estimar y medir. Por otra parte, también se incorpora la relación obligatoria de las situaciones con la representación tridimensional de los cuerpos, lo que significa que será necesaria la manipulación de los objetos simulados, para establecer estrategias, acciones y obtener una respuesta óptima.

Indicaciones.

Para comenzar se plantean las siguientes instrucciones a modo general:

"Instrucciones. Para realizar esta actividad ingrese al applet "applet''. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos."

La idea fundamental de estas instrucciones es guiar al docente, es decir, entregarle las directrices principales para trabajar las actividades, en donde no se permite utilizar herramientas que no se encuentren visibles, comandos del software o simplemente modificar los cuerpos (cambiar dimensiones, posiciones y elementos que las componen). Estas instrucciones son transversales para todas las sesiones.

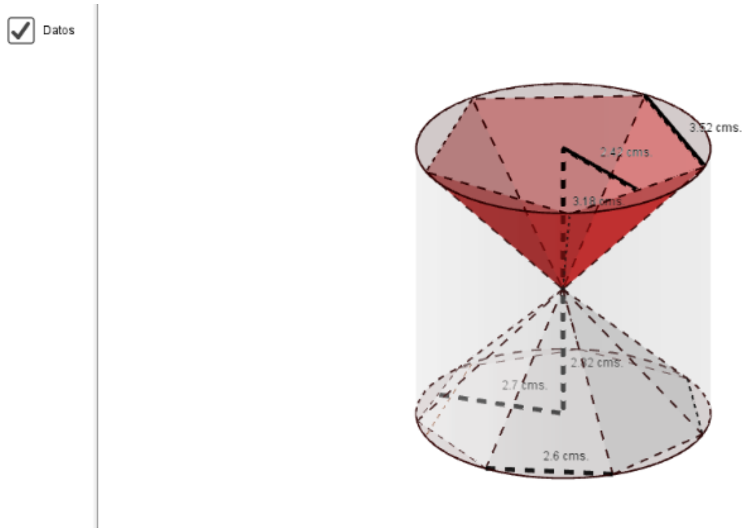
Actividad 1: Reloj de líquido.

En esta actividad la pregunta principal es "¿Quién cree que tiene razón?", bajo el contexto del diseño de un prototipo de reloj de arena de vidrio reciclado.
La idea fundamental es el cálculo de volumen de ambas partes del reloj (pirámide superior e inferior), en donde existen dos posibles respuestas:

- Si los volúmenes de ambas pirámides son iguales, entonces Josefa tiene razón.
- Si los volúmenes de ambas pirámides son diferentes, entonces Roberto tiene razón.

En base a la metodología exclusión-inclusión, esta situación debe permitir confrontar el dME del cálculo de volumen, con la CSCM de esta noción. Lo anterior se verá reflejado, en que para resolver la actividad se puede desarrollar el cálculo tradicional como se menciona en los planes y programas, no obstante, es necesario de la representación tridimensional para realizar este. Por ende, a pesar de seguir observándose el fenómeno de la utilización de la fórmula algebraica y el cálculo aritmético, se incorpora de igual manera las nociones de Freudenthal que sostienen la epistemología del uso del espacio.

Respuesta de la actividad 1.



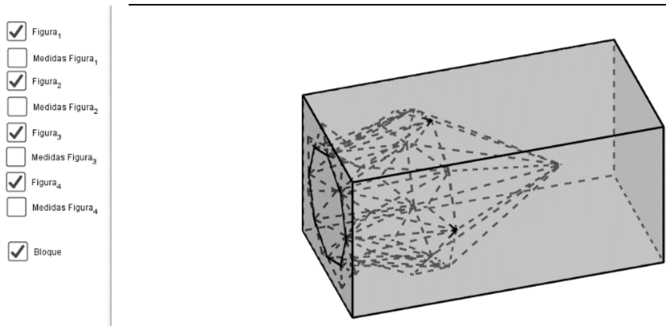
Como se observa en la imagen superior, para obtener las dimensiones se debe presionar el botón "Datos". Mediante este y las diferentes perspectivas del cuerpo, se puede reconocer las dimensiones de la altura, apotemas y aristas. Por ende, se puede calcular el área basal y el volumen de cada pirámide. Obtenido una vez los volúmenes, solo queda comparar y concluir.
Si bien, la situación implica un cálculo de volumen directo, también promueve el análisis de los volúmenes iguales que implican formas diferentes. Todo esto con el objetivo de a simple vista provocar que aquel que observa apoye la postura de Roberto, sin saber que realmente es Josefa quien tiene la razón.

Actividad 2: Cúpula.

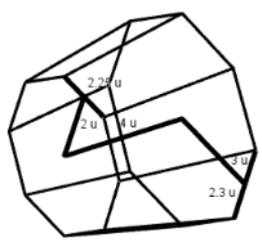
La actividad tiene como objetivo que el docente tome decisiones, todo esto con el fin de ahorrar dinero en mano de obra, para esto es necesario calcular el volumen del bloque de concreto y de la cúpula.

Obtener volumen de la estructura.

Para obtener el volumen de la cúpula es necesario utilizar los botones del applet, puesto que ayudan a hacer aparecer las dimensiones y permiten separar la estructura en sólidos más pequeños.



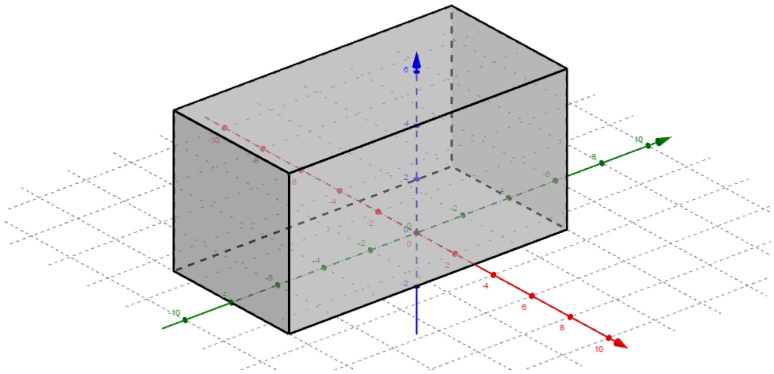
Como se muestra en la imagen superior, el applet presenta tres categorías de botones, los que hacen aparecer los cuerpos, los que hacen aparecer las dimensiones de cada parte de la cúpula, y los que hacen aparecer el bloque.



La imagen superior muestra el desglose de los cuerpos geométricos y sus respectivas dimensiones, en particular el centro de la cúpula es una pirámide truncada, por ende, al tener sus dimensiones, se puede utilizar la fórmula y calcular el volumen. El proceso anteriormente descrito se genera análogamente para todas las otras componentes de la estructura, para luego aplicar la aditividad y obtener el volumen total.

Obtener volumen del bloque de concreto.

El volumen del bloque de concreto se calcula de manera distinta a la cúpula, puesto que acá aparece por primera vez la noción de medir y estimar mencionada por Freudenthal, la cual es parte de la nueva epistemología que conforma la CSCM. Esta permitirá encontrar el largo, ancho y alto de una manera diferente, como es la visualización del plano cartesiano.



La imagen superior muestra la cuadratura y los ejes, de los cuales se pueden desprender los valores concretos del ancho, alto y largo, los cuales permitirán calcular el volumen del bloque.

Una vez obtenidos los volúmenes de la cúpula y el bloque de concreto, se realiza una comparación entre los volúmenes, lo cual permitirá obtener el porcentaje que ocupa la estructura dentro del bloque de concreto. Con los datos precisos ya se puede tomar una decisión.

Actividad 3: Vasos de café.

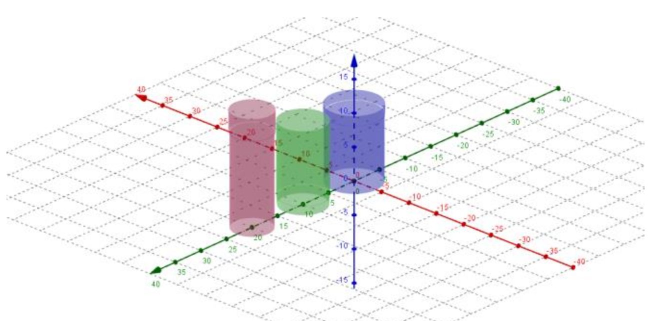
El diseño de la situación está basado en un reto viral, respecto al contenido de los vasos de cadenas de café, en donde se menciona que los tres vasos (chico, mediano y grande) tienen el mismo volumen, pero sus formas son diferentes, por ende, se estaría engañando a las personas al cobrar precios diferentes por volúmenes iguales.

La actividad parte con la discusión de tres amigos que exponen que los tamaños corresponden o no corresponden a los precios descritos por la empresa de cafés. La interrogante principalmente es quien tiene razón, para ello es necesario calcular el volumen de los tres vasos.

¿Cómo se obtiene el volumen de los vasos?

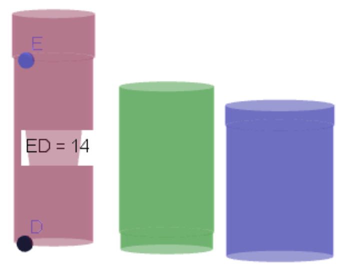
Para calcular el volumen de los vasos es necesario utilizar la idea de medir o estimar, y para ello aparecen dos caminos de resolución.

Forma 1.



Para la forma 1 se podrá usar la cuadratura y los ejes para obtener las dimensiones de los vasos, lo cual permitirá conocer el radio y la altura, los cuales se podrán utilizar en la fórmula. Tras haber realizado los cálculos, se podrá comparar y concluir.

Forma 2.



Para la forma 2 se podrá utilizar herramientas como puntos, ángulos, rectas y "distancia o longitud", esta última permite medir trazos de manera más precisa. Una vez obtenida la altura y el radio, se calcula el volumen de los tres vasos, se compara y se concluye.

Al igual que las actividades anteriores, vuelven a aparecer las ideas de Freudenthal, en donde la estimación y la medición son los elementos diferentes al momento de calcular volumen. Por otra parte, la idea de volúmenes iguales que implican formas diferentes también se hace presente, puesto que se podría pensar que uno tiene mayor volumen que otro, pero en realidad todos tienen el mismo volumen. Finalmente, la actividad no deja a un lado la toma de decisiones, proponiendo a quien realiza la actividad diseñar vasos que realmente se acomoden a los precios que ofrece la empresa de cafés.

Actividad 4: Recipientes de helado.

"Recipientes de helado" es una actividad diferente a las anteriores, puesto que implica cálculo de volumen y utilización de fórmulas, no obstante, no implementa un applet de GeoGebra diseñado por el autor, sino que más bien propone diseñar un recipiente de helado que sea ergonómico, estético y que cumpla con un volumen determinado. La idea fundamental de esta aplicación es relacionar el cuerpo geométrico con su entorno, en particular la mano de quien realiza la actividad, puesto que la "norma de agarre" es una condicionante que ínsita obligatoriamente a la visualización espacial, por ende, el cálculo aritmético y algebraico aparecen, pero no son suficientes, es necesario otros elementos, y estos son el espacio.

Sesión II.

Objetivo

Retomando los elementos de dME y la CSCM, esta sesión presenta transversalmente la idea de cálculo de volumen mediante el uso de lo aritmético y las fórmulas algebraicas. Por otro lado, también están presentes las ideas de Freudenthal, en donde la estimación, medición y uso de perspectivas, son elementos constantes.

En el comienzo de la sesión, la diferenciación entre volumen y capacidad se hace presente, puesto que independiente que matemáticamente los volúmenes de los objetos más pequeños dividan de manera exacta el volumen más grande, si la forma del recipiente no es la adecuada, entonces la capacidad será cero.

La inducción al error mediante la idea de "volúmenes iguales implican formas diferentes" vuelve a ser una idea concurrente, como lo fue en la sesión anterior, no obstante, se trabaja en conjunto con la aditividad de volúmenes y la repartición equitativa. Estas ideas son propias de la nueva epistemología, que, si bien considera el cálculo de volumen expuesto por el dME tradicional, también propone utilizar el espacio como elemento importante al momento de concluir, lo que es característico de la CSCM.

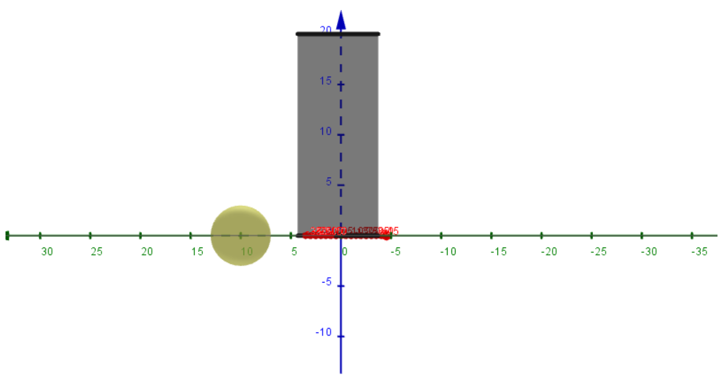
Para finalizar, es de mencionar que ambas actividades fueron diseñadas para trabajar la idea de "unidad" del modelo dialéctico inclusión-exclusión, en donde se considera ambas epistemologías como mecanismos de resolución de las actividades, es decir, un mecanismo más de cálculo directo (dME) o uno que implica la utilización del espacio (CSCM). Esta etapa es fundamental, puesto que es el participante quien escoge su postura, por ende, es en esta sección donde se observarán los primeros indicios de resignificación del dME docente, respecto a la idea de cálculo de volumen de cuerpos geométricos.

Actividad 5: Bolas en un frasco.

Esta actividad tiene su diseño desde la idea cotidiana de querer guardar un elemento en un recipiente y saber si este cabe o no cabe de manera eficiente (aprovecha el espacio al máximo). Para resolver esta situación existen dos caminos de acción:

Forma 1.

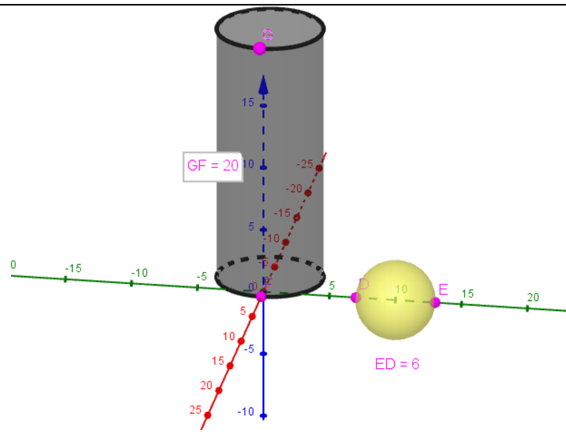
La forma 1 implica nociones de cálculo más intuitivas, en donde la noción de medir y estimar vuelve a estar presente, puesto que solo es necesario mirar las dimensiones aproximadas que tiene el frasco y la bola, en base a la cuadratura y el eje. Mediante la visualización y las diferentes perspectivas de los cuerpos se puede concluir que caben cuatro bolas en el frasco.



La imagen anterior muestra una de las perspectivas que permite comparar las dimensiones del recipiente con las de la pelota.

Forma 2.

La segunda forma implica el medir o estimar mediante herramientas como “distancia o longitud”, la utilización de puntos o rectas que interceptan con el eje como elementos de corte, o simplemente la estimación mediante la visualización de la cuadratura y los ejes. Todo lo anterior con el fin de obtener medidas específicas, como lo es el radio y la altura, lo cual permitirá tomar decisiones mediante la comparación. Otro mecanismo, es aplicar lo que expone el dME, lo cual consiste en reemplazar los valores en las fórmulas de volumen (cilindro y esfera), calcular y finalmente comparar mediante el cociente (¿Cuántas veces me cabe la esfera en el cilindro?).



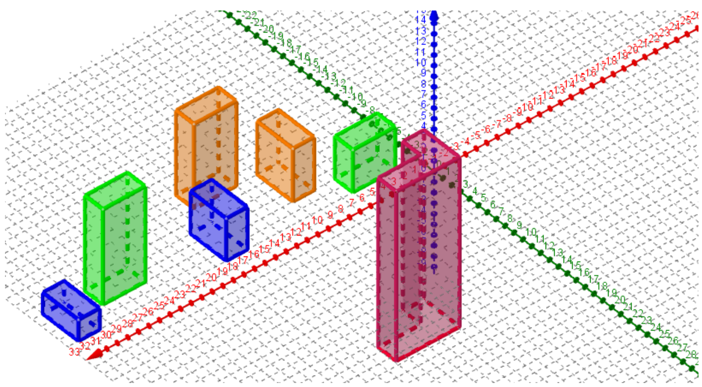
La imagen superior muestra un posible camino de medición del diámetro y la altura de la esfera y el cilindro.

Actividad 6: Fichas.

La actividad "Fichas" tiene dos mecanismos de resolución, uno que apunta a la utilización de la fórmula, es decir, realizar cálculo de volumen obteniendo las dimensiones desde el applet, y otro que conlleva a la visualización y comparación.

Forma 1.

Utilizando la cuadratura, los ejes o la herramienta "distancia y longitud", se obtienen las dimensiones de todos los sólidos. Una vez conocidas las medidas, se procede a calcular el volumen de cada bloque, para luego sumar los resultados de los más pequeños, y comparar con el más grande (torre de color rojo).

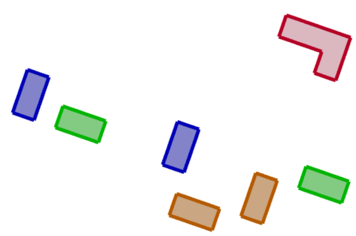


La imagen superior muestra cómo podrían obtenerse las dimensiones de los sólidos, en base a la cuadratura y los ejes.

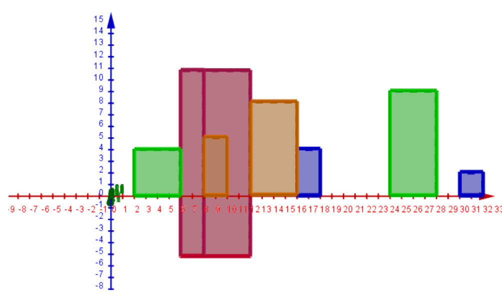
Formas 2.

La segunda manera es utilizando las diferentes perspectivas de los sólidos, lo cual permitirá establecer una especie de rompecabezas, en donde ocurre lo siguiente:

- Se observan las bases y se concluye que calzan de manera perfecta con la base de la torre mayor. La imagen inferior muestra una perspectiva que permite evidenciar la idea anterior.



- Se observan las alturas desde cierta perspectiva, y se concluye que, al agruparlas de cierta forma, general la altura de la torre más grande. La imagen inferior muestra una perspectiva que evidencia el tamaño de las alturas de los bloques.



Forma Mixta.

También se obtuvo una solución híbrida, es decir, que contempla elementos de la forma 1, como es el medir concretamente, pero emplea a su vez mecanismos de la forma 2, como es concluir mediante la visualización y utilización de diferentes perspectivas.

Sesión III.

Objetivo.

Las actividades de esta sesión tienen como objetivo trabajar los elementos de la CSCM. Si bien, el cálculo de volumen, la utilización de elementos aritméticos y algebraicos están presentes, las respuestas no podrán ser obtenidas si no se utiliza la noción del espacio. Si el participante no pudiese dar respuesta a las actividades, significa que no se logró resignificar su dME tradicional, y por ende los elementos que expone el curriculum y el sistema educacional son predominantes, es decir, no logra encapsular la idea de volumen y el espacio que este ocupa en un sitio determinado.

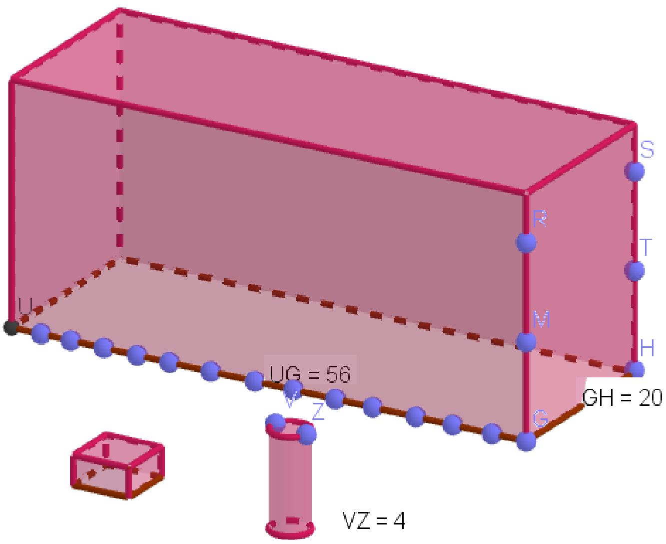
Actividad 7: Container.

La utilización del espacio, la visualización y las diferentes perspectivas serán fundamentales para la resolución de esta actividad, puesto que, si bien calcular volúmenes se encuentra presente, no es suficiente para dar respuesta. A continuación, se mostrará el camino de resolución y los posibles errores que se observaron en la fase de "piloteo" y adecuación del instrumento.

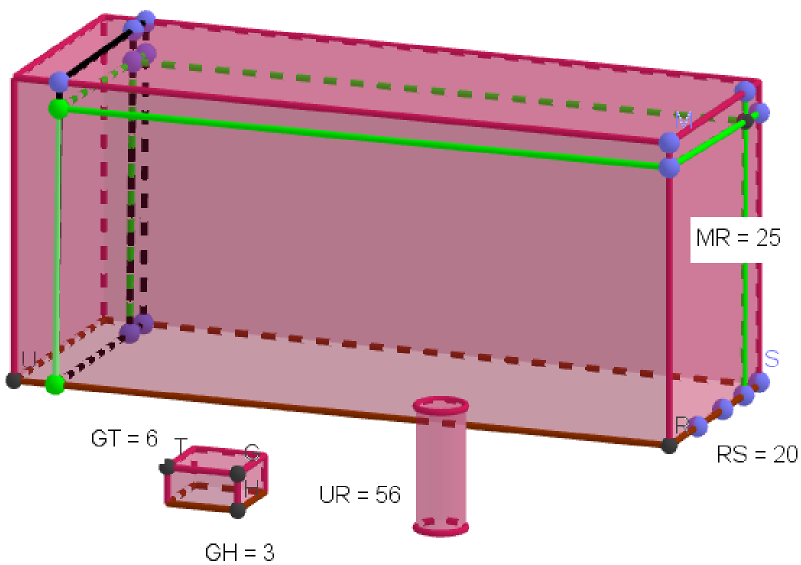
Resolución.

Las maneras de obtener las dimensiones son múltiples, puesto que se puede utilizar la cuadratura, los ejes, la herramienta "distancio o longitud" o simplemente calcular el volumen directamente mediante la herramienta "volumen".
Uno de los errores más comunes es obtener los valores del volumen del container, la caja y de los cilindros y comenzar a dividir. Si se realiza el cociente entre el volumen mayor y el menor, se está asumiendo que ambos contenedores caben de manera exacta en el container, lo cual no es verdadero.
La idea fundamental de esta actividad es optimizar el espacio, mediante la idea de cómo lo haría un carguero para ingresar la mayor cantidad de productos, dejando el menor volumen disponible. Las directrices generales que motivan esta situación son las ideas de Freudenthal, como es la optimización del espacio, la repartición equitativa de volúmenes y la diferencia entre capacidad y volumen.

Como se mencionó anteriormente, este applet incluye nuevas herramientas como son el plano y nuevas mediciones (volumen y área), todo lo anterior con el objetivo de ayudar a la construcción de la posible solución, que requiere la utilización del espacio y las diferentes perspectivas. A continuación, el posible camino de respuesta, una vez obtenidas las dimensiones es el siguiente:



La imagen superior muestra estimaciones que permitirá saber cuántas veces cabe el cilindro a lo largo, ancho y alto. Luego de saber la cantidad de cilindros que caben de manera entera en el container, se procede a calcular el volumen del espacio utilizado por los cilindros y por ende la cantidad de arena.

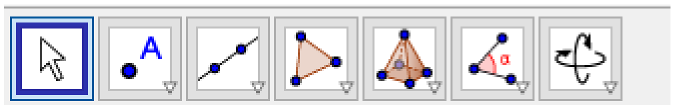


La imagen anterior muestra una sección remarcada de color verde, es en ese sector donde caben cajas de manera exacta, por ende, se pierde espacio en la parte posterior, superior y lateral, ya que no cabe ninguna caja. Luego de saber la cantidad de cajas que caben en el container se realiza un proceso análogo a lo realizado con el cilindro.

Para finalizar, se comparan los espacios utilizados por ambos recipientes (cajas y cilindros) y se concluye con que recipiente se carga más arena en el container.

Actividad 8: Habitación.

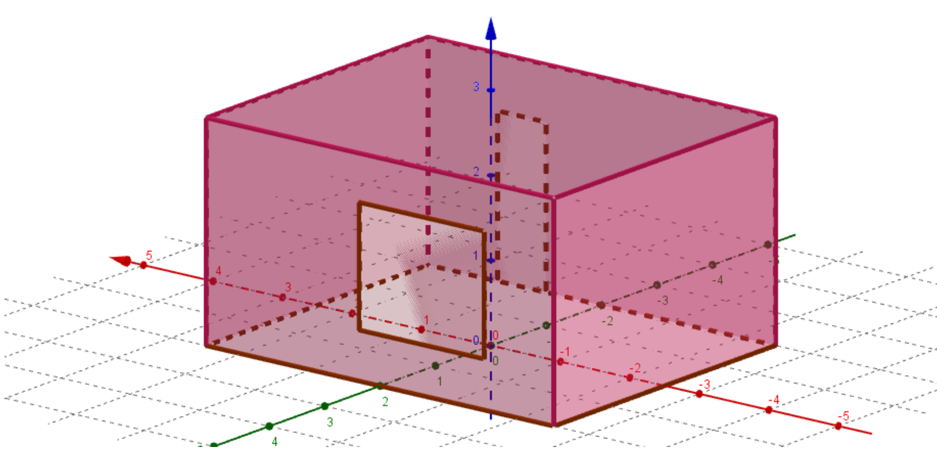
La actividad "habitación" es diferente a los propuesto por el dME tradicional, puesto que, si bien tiene relación con el cálculo de volumen, no implica la utilización de fórmulas algebraicas, sino que el cálculo es más bien intuitivo, y utiliza las dimensiones y el espacio.
Para esta parte de la secuencia se han agregado nuevas herramientas, las cuales se mostrarán a continuación.



La imagen anterior muestra las nuevas herramientas incorporadas, las que son "polígono", esta permite construir polígonos y "construcción de prismas", la cual permite construir prismas regulares. Las componentes anteriormente mencionadas, son importantes al momento de construir, puesto que facilitan el trabajo de quien resuelve.

Resolución.

La situación tiene como respuesta más de una solución posible, no obstante, se mostrará un camino posible de acción.
Para comenzar es necesario encontrar las dimensiones de la habitación, las que pueden ser calculadas mediante la visualización de la cuadratura y los ejes, o con la herramienta "distancia o longitud".



La imagen anterior muestra lo anteriormente descrito. Una vez obtenidas las dimensiones comenzamos a instalar los muebles de la lista, los cuales son:

- 2 veladores de 45x45x80 cms.
- Mueble multipropósito (tv, equipo de música y libros) 250x90x200 cms.
- Cama 250x150x50 cms.

- Silla escritorio 50x70x90 cms.
- Mueble esquinero 50x50x100 cms.
- Pizarra 150x80 cms.
- Repisa aérea 35x25x180 cms.
- Cuadro 75x50 cms.

La idea principal, es que el participante construya los elementos dentro de la habitación, y para ello es necesario que utilice la idea de estimar, medir y la ubicación espacial (noción elemental del volumen "el espacio que utiliza un cuerpo en un lugar determinado"), todo con el fin de ubicar los objetos de la mejor manera, sin olvidar la recomendación de que las puertas y cajones puedan abrirse.

Un comentario destacable, es que la situación tiene una solución cotidiana y esta no es única, puesto que su diseño fue obtenido de una habitación real con todos esos objetos ubicados de manera correcta y funcional.

Síntesis del diseño.

A modo de cierre de este análisis pre-intervención, es de mencionar los siguientes puntos:

- Para el diseño de las secuencias de aprendizajes se utilizaron nociones obtenidas del análisis epistemológico, y principalmente la idea elemental del volumen, como el espacio que ocupa un cuerpo en un lugar determinado.

- La idea de medir y estimar son nociones transversales que están presentes durante toda la secuencia de aprendizaje, la justificación de esta decisión es la historia, puesto que esta indica que la idea de calcular volumen aparece de la idea de estimar, medir y comparar, por ende, el cálculo viene de una necesidad la cual no puede ser soslayada.

- Los postulados de Freudenthal (descritos en el análisis epistemológico, sección 1.5) fueron tratados de manera diversa durante toda la secuencia de aprendizaje, los cuales serán clasificados más específicamente en la sección 4.1.4.

- El diseño de la secuencia de aprendizaje se realizó en base al modelo exclusión-inclusión, en donde se presentaron las tres etapas de este, mostrándose el dME y la CSCM en un constante diálogo, puesto que como se mencionó originalmente, ambos discursos presentan elementos importantes, y por ende es necesario hacerlos convivir.

- Finalmente, la geometría dinámica, la perspectiva, el tamaño y la forma son elementos transversales durante todas las sesiones, puesto que, si bien el cálculo de volumen mediante la aritmética y la utilización de fórmulas algebraicas es importante, este no es aislado y tiene una estricta relación con el espacio.

4.1.4 Categorización de las situaciones de aprendizajes.

Para diseñar las sesiones de aprendizaje, se utilizó las leyes de la dialéctica Exclusión - Inclusión (Soto, 2014; Lara, 2019; Reyes, 2020), las cuales exponen lo siguiente:

Leyes de la dialéctica	Articulación de las leyes de la dialéctica en la construcción del Diseño de Situación Escolar.
Confrontación	En primer lugar, se pone en práctica la epistemología conocida, se agregan elementos nuevos, pero el enfoque sigue siendo el uso de la fórmula para el cálculo de volumen. Mientras tanto, la segunda parte implica actividades diferentes, se ve puesta en acción la nueva epistemología, la cual considera los elementos de la CSCM y está enfocada en trabajar el espacio de manera diferente. Es en este ciclo, los conocimientos se ven confrontados.
Unidad	En esta sección se presentan ambas epistemologías, es decir, las situaciones pueden ser resueltas mediante lo que propone el dME o la CSCM, por ende, es acá donde ambas corrientes se unen y fluyen en simultáneo, permitiendo que el docente escoja la perspectiva que más lo identifique.
Cambio	Para esta última sección, las actividades propuestas consideran elementos del dME, no obstante, en necesario transitar por la CSCM, puesto que la idea de trabajar el espacio es transversal y sobresaliente. Es en este punto donde se observará si el docente cambió su manera de mirar el cálculo de volumen, o si continuará con las ideas predominantes del dME.

Además, para categorizar las situaciones de aprendizajes se utilizó elementos del análisis epistemológico (Freudenthal, 1983), generando los siguientes rangos de trabajo:

Actividad / Leyes de la dialéctica	Confrontación Sesión I	Unidad Sesión II	Cambio Sesión III
I. Reloj de Líquido	• Comparar y calcular volúmenes, para la toma de decisiones. • Formas diferentes con igual volumen. • Visualización que		

		conduce al error.		
II.	Cúpula	• Comparar y calcular volúmenes, para la toma de decisiones. • Aplicar la aditividad de volúmenes.		
III.	Vasos de Café	• Estimar dimensiones de los sólidos. • Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo. • Comparar volúmenes y tomar decisiones. • Visualización que conduce al error. • Construir cuerpos de formas similares, pero		

	volúmenes diferentes. ● Cálculo de volumen.		
IV. Recipientes de Helado	● Transformar sólidos, mediante cortes geométricos, cambio de dimensiones y forma. ● Construir cuerpos de formas diferentes, pero volúmenes similares. ● Estimar dimensiones de los sólidos. ● Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo.		
V. Bolas de un Frasco		● Estimar dimensiones de los sólidos.	

		• Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo. • Trabajar el volumen mediante reparticiones equitativas. • Diferenciar el concepto de capacidad con el de volumen.	
VI. Fichas		• Estimar dimensiones de los sólidos. • Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo.	

		• Trabajar el volumen mediante reparticiones equitativas. • Aplicar la aditividad de volúmenes. • Transformar sólidos, mediante cortes geométricos, cambio de dimensiones y forma.	
VII. Container			• Estimar dimensiones de los sólidos. • Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo. • Diferenciar el concepto

			de capacidad con el de volumen. • Trabajar el volumen mediante reparticiones equitativas. • Optimización del espacio. • Comparar volúmenes y reproducirlos. • Cálculo y toma de decisiones respecto al volumen.
VIII. Acomodando la Habitación			• Estimar dimensiones de los sólidos. • Medir las dimensiones de los sólidos, usando unidades establecidas o propias del individuo.

			• Diferenciar el concepto de capacidad con el de volumen. • Trabajar el volumen mediante reparticiones equitativas. • Optimización del espacio. • Diferenciar el volumen y el área.

4.1.5 Análisis Post-intervención.

4.1.5.1 Análisis de Resultados Fase I.

Para comenzar el análisis, primero se recordará el objetivo específico que rige esta fase, el cual es:

Identificar el discurso Matemático Escolar de los docentes, previo a la aplicación de la secuencia de aprendizaje con base en la teoría Socioepistemológica, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Para cumplir el objetivo se ha realizado el análisis de las planificaciones y de las entrevistas iniciales realizadas por los docentes. Es importante destacar, que los participantes no serán mencionados por sus nombres, por lo cual cuando se hable de ellos será por la etiqueta de profesor 1 y profesor 2.

4.1.5.1.1 Análisis de planificaciones.

Para realizar este análisis, se ha utilizado la rúbrica de observación, la cual ha presentado los siguientes resultados.

Observación desde el dME.

Categorías /Profesor	Profesor 1	Profesor 2
Hegemónico	Existe utilización del álgebra y desconexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.	Existe utilización del álgebra y desconexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.
Centrado en el objeto Matemático	Existe un claro centro en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula está presente en todas sus planificaciones.	Existe un claro centro en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula está presente en todas sus planificaciones.
Utilitario	Se observa que el foco de lo propuesto son los resultados.	Se observa que el foco de lo propuesto son los resultados.
Sin Marcos de Referencia	Se observa muy levemente la existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.	Se observa muy levemente la existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.
Acabado y Lineal	Se observan procesos repetitivos o similares al momento de presentar las actividades.	Se observan procesos repetitivos o similares al momento de presentar las actividades.

Observación desde la CSCM.

Categorías /Profesor	Profesor 1	Profesor 2
Pluralidad	No se observa del todo una pluralidad, puesto que, si bien considera las representaciones como parte del concepto, y levemente la forma, no se menciona la perspectiva o tamaño.	No se observa del todo una pluralidad, puesto que, si bien considera las representaciones como parte del concepto, y levemente la forma, no se menciona la perspectiva o tamaño.
Centrado en los Usos	No se observa un énfasis en usos ya que los elementos de la planificación no entran dentro de ninguno de los indicadores.	No se observa un centrado en usos ya que los elementos de la planificación no entran dentro de ninguno de los indicadores.
Funcional	No se observa un contenido funcional.	Si bien, se relaciona la idea de espacio con volumen, esta idea no es transversal, por ende, no es suficiente para considerarlo funcional.
Transversalidad	No se observa una transversalidad del conocimiento	No se observa una transversalidad del conocimiento
Desarrollo en Usos	No se observa un desarrollo en usos.	No se observa un desarrollo en usos.

4.1.5.1.2 Análisis de entrevistas.

Para realizar este análisis, se ha utilizado la pauta de entrevista, la cual ha presentado los siguientes resultados.

Observación desde el dME y CSCM.

Categorías /Profesor	Profesor 1
Hegemónico / Pluralidad	El docente considera las nociones algebraicas para la enseñanza del cálculo de volumen, dado que entregan dimensiones abstractas de un cuerpo. Por otra parte, comenta que las representaciones 2D y 3D son necesarias, y que las utiliza para enseñar volumen. No obstante, esto no es siempre, puesto que, cuando ya están familiarizados con el contenido, solo entrega las dimensiones y solicita que calculen. El participante, siente que está replicando una estructura de enseñanza, él no se siente partícipe de la construcción del currículum, y destaca que la forma en que lo aprendió es mediante la utilización de la fórmula de manera directa, entregando los valores de las dimensiones, para luego calcular.
Centrado en el objeto Matemático / en usos	El docente comenta que, durante sus años de enseñanza, siempre ha utilizado la fórmula para enseñar el cálculo de volumen.
Utilitario / Funcional	El docente comenta que la interpretación es un foco importante en el aprendizaje, más que la utilización de la fórmula, aunque

	de todas maneras se fija en el "todo" al momento de enseñar, en particular, lo numérico.
Sin Marcos de Referencia / Transversalidad	El docente comenta, que utiliza tanto situaciones contextualizadas como descontextualizadas. Por otra parte, indica que los contextos trabajados permiten que los estudiantes se acerquen al contenido y generen un mejor entendimiento.
Acabado y Lineal / Desarrollo en usos	El docente trabaja con sus estudiantes tanto con ejercicios, como con problemas. El entrevistado define un problema cuando se involucra un contexto, mientras que un ejercicio es aquel que no lo involucra. Para finalizar, el participante considera que existe una mecánica detrás del cálculo de volumen, puesto que en su mayoría siempre aparece la idea de base por altura, en donde es la base la que va variando.

Categorías /Profesor	Profesor 2
Hegemónico /Pluralidad	El docente comenta que considera las nociones algebraicas al momento de trabajar el contenido. Que, si bien la fórmula no la entrega de manera inmediata, puesto que la construye, está la utiliza para la enseñanza del volumen. Ahora bien, respecto a las representaciones, se menciona que son necesarias para el aprendizaje del contenido y que, si bien el currículum ofrece lineamientos para la enseñanza del objeto, para ella no son suficientes, no obstante, no se considera parte de la construcción, pero si se siente partícipe al momento de enseñar en el aula. Algo importante a destacar, es que no logro aprender cálculo de volumen a nivel básico o medio, puesto que no le encontraba sentido trabajar una fórmula sin ningún significado. Fue en la universidad mediante GeoGebra y la explicación de los fundamentos de cada fórmula que logró entender el contenido.
Centrado en el objeto Matemático / en usos	El docente comenta que utiliza recursos visuales para enseñar el cálculo de volumen, puesto que utilizar solo la fórmula es muy aburrido, no obstante, de todas maneras, utiliza la fórmula para enseñar este contenido.
Utilitario / Funcional	El docente comenta que la interpretación es el foco fundamental en el aprendizaje, más que la utilización de la fórmula.
Sin Marcos de Referencia / Transversalidad	El docente comenta que para enseñar el cálculo de volumen utiliza tanto situaciones contextualizadas, como descontextualizadas. Por otra parte, considera que el contexto es relevante cuando este está acorde a la realidad del estudiante, es decir, que tiene relación con la vida del alumno.
Acabado y Lineal / Desarrollo en usos	El docente comenta que los estudiantes principalmente realizan problemas al momento de trabajar el cálculo de volumen, en donde define problema como calcular, entregando un significado al resultado obtenido en el contexto dado. Es importante destacar, que el participante no considera que exista una mecánica repetitiva detrás de la enseñanza del cálculo de volumen, y sostiene que existen diferentes formas

	de plantearlo y depende de quien enseñe, no obstante, en esas diferentes formas que comenta aparece la utilización de la fórmula.

4.1.5.1.3 Contraste de la información entregada por la entrevista y las planificaciones.

La información entregada por ambos instrumentos es variada, ya que para el profesor 1, lo que indica la rúbrica y la entrevista coinciden, mientras que para el profesor 2, lo que indica la rúbrica difiere en momentos de lo que comenta en la entrevista.

El docente 1 claramente presenta elementos del dME, y, además, las principales directrices del fenómeno, como es el uso de la fórmula en exclusividad y la poca relación de las representaciones 2D y 3D con el concepto de volumen. Además, el docente afirma que no se siente parte de la construcción del dME, que es un mero replicador, y afirma que este fenómeno no es actual, sino que proviene de los tiempos en que él era estudiante.

El docente 2, si bien, en sus planificaciones presenta varios elementos que indican que el fenómeno ocurre al momento de enseñar el cálculo de volumen, como es la utilización de la fórmula y la poca conexión de sus objetivos con la idea de espacio. Al instante de conversar con él, este indica que la idea de espacio es fundamental para enseñar el cálculo de volumen, en donde enfatiza que utilizar valores y reemplazar estos, no tiene sentido para quien enseña, ni para quien aprende. No obstante, al no ver esta información reflejada en su planificación de clases, se podría pensar, que es consciente del fenómeno, no obstante, el dME tiene una mayor predominancia en su práctica.

Para finalizar, a pesar de las diferencias de criterios del segundo docente, de todas maneras, se puede afirmar que ambos están bajo el fenómeno de no considerar las nociones espaciales al momento de enseñar el cálculo de volumen, ya sea en un menor o mayor grado, por ende, existe una hegemonía del dME hacia la manera de enseñar de los profesores, ya sea por sus experiencias previas en la enseñanza básica o superior, el peso que tiene los planes y programas en la organización de contenidos de un docente, o simplemente el enfoque que se le da en los libros de textos ministeriales, los cuales son recursos frecuentes en la sala de clase.

4.1.6 Aplicación de Situaciones de aprendizajes.

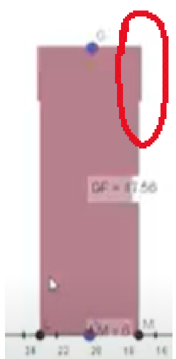
Para comenzar el análisis, primero se recordará el objetivo específico que rige la etapa de aplicación es:

Describir las acciones y formas de pensamiento de los profesores en ejercicio, cuando se enfrentan al conjunto de actividades que constituyen una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada con base en la teoría socioepistemológica.

Para cumplir el objetivo se procede a analizar los documentos y videos obtenidos en las sesiones de aplicación, realizadas por los docentes. Es importante destacar, que los participantes no serán mencionados por sus nombres, por lo cual cuando se hable de ellos será por la etiqueta de profesor 1 y profesor 2.

4.1.6.1 Análisis de Resultados Fase II. Confrontación.

Actividad	Profesor 1	Profesor 2
Reloj de Líquido	El docente utiliza el software para tomar una decisión, en donde se observa dificultades para relacionar la idea de reloj de arena con la de volumen. Luego de conectar la idea de volumen, con la del reloj de área, realiza el cálculo del volumen de las partes del reloj. Estos son prácticamente perfectos, no obstante, los datos que genera no le permiten producir conclusiones 100% correctas, es decir, emplea bien la idea de calcular volumen, pero existe un fallo al momento de tomar una decisión.	La docente originalmente ve muy trivial la pregunta y la responde de manera simple. Luego de observar bien los cuerpos y entender que el trasfondo es el calcular el volumen de las partes del reloj, decide utilizar la aritmética y las fórmulas de volumen para sostener su decisión inicial. Para realizar los cálculos, utiliza el software como un apoyo, en donde luego de un momento de trabajo, cambia su decisión inicial y obtiene nuevas conclusiones respecto a la problemática.
Cúpula	El docente presenta complicaciones inicialmente para la obtención de datos, puesto que no sabe cómo tomar las medias de cada poliedro, no obstante, luego de trabajar con la herramienta un rato sostenido, logra encontrar las dimensiones y dar respuesta a la pregunta, mediante la realización de cálculos de volumen. Es importante destacar que la respuesta que da el docente no es la correcta, puesto que sostiene la estructura utiliza un 20% del bloque, lo que hace inferir que no está empleando la representación visual, ya que la cúpula utiliza más del 50% del bloque y puede inferirse desde la representación gráfica del applet.	Al igual que el docente 1, el docente 2 presenta complicaciones inicialmente para la obtención de datos, puesto que no sabe cómo tomar las medias de cada poliedro, no obstante, luego de trabajar con la herramienta un rato sostenido, logra encontrar las dimensiones y dar respuesta a la pregunta, mediante la realización de cálculos de volumen. Quien realiza la actividad, no reconoce el cuerpo principal de la cúpula, por ende, le pregunta a quien ejecuta la actividad, ¿qué cuerpo es?, en donde se le indica que es una pirámide truncada. El participante, al no saber cómo calcular su volumen, busca su fórmula en internet. Luego de esto, realiza todos los cálculos correspondientes y concluye. La conclusión que obtiene es pertinente (la docente expone que la cúpula utiliza un 70% del bloque), y se observa una justificación de su respuesta desde lo visual, es decir, compara la representación 3D del bloque, con

		la de la cúpula.
Vasos de Café	El docente comenta que no recuerda todas las herramientas de GeoGebra, debido a que no utiliza hace un tiempo la versión 3D. El docente realiza cálculos de volumen mediante estimación y medida, por lo cual concluye que todos los vasos tienen diferente volumen, y que los volúmenes no corresponden a los precios. Si bien la conclusión es correcta, las justificaciones no, puesto que efectivamente los precios no corresponden, pero el motivo es que todos los volúmenes son iguales. De todas formas, el error de volúmenes no es mayor a 10 unidades cúbicas. Es de destacar nuevamente que la visualización, la perspectiva y el espacio no fueron consideradas del todo, por ende, fue esto lo que generó errores en la medición y estimación de dimensiones de cada vaso.  La imagen de la izquierda muestra que el vaso está formado por dos cilindros (círculo rojo), en donde el superior es un poco más grande que el inferior, no obstante, considerarlo como uno solo genera cambios numéricos al momento de calcular el volumen.	A primera vista el docente dice que entre más "gordito el vaso" mayor volumen tendrá (vaso azul es el más grande). Ahora bien, para fundamentar su respuesta, realiza el cálculo de volumen de cada vaso, en donde mediante la estimación y medida concluye que todos los vasos ocupan diferentes espacios, y que la clasificación de precios es incorrecta. En esta situación, sucede un proceso similar al del docente 1, puesto que, si bien la conclusión es correcta, la justificación no. Esto se debe a que la medición y estimación no es fina (no siempre se llega hasta el borde con la herramienta de longitud), por ende, los volúmenes difieren entre 10 y 20 unidades cúbicas. Lo anterior, termina provocando que se diga que son todos diferentes en cuanto a su espacio. Nuevamente, se destaca que al momento de estimar y medir las representaciones 3D de cada vaso, estas se consideran lineales y no compuestas, lo cual es el motivo de uno de los errores de medición.
Recipientes de Helado	Si bien el docente diseñó muchos vasos y cometió varios errores en el proceso, la respuesta final fue muy completa. Puesto que utilizó las dimensiones de las manos y materiales concretos como cilindros y conos de papel, para construir un vaso de helado. Además, consideró factores del entorno como modelo de	Al igual que el docente 1, el docente 2 obtuvo una respuesta final muy completa, no obstante, no consideró tantos elementos del entorno como el primer participante, además no realizó gran cantidad de cálculos. De un principio, decidió construir un cilindro de radio 2,5 cms. y su altura la obtuvo despejando desde

	construcción, como, por ejemplo, la comodidad de transporte, la adecuación del tamaño a la mano, y que sea visualmente estético. El vaso que diseñó el profesor fue un cono que cumplía perfectamente los 250 cc.	la fórmula, dado que ya se sabía el volumen que eran 250 cc. Un dato para destacar es que no utilizo regla como tal, sino que más bien un medidor digital del teléfono, es decir, una aplicación que mide longitudes con la cámara.

Conclusiones de la sesión.

A modo de síntesis de esta sesión de aplicación, se pueden mencionar los siguientes puntos:

- Durante la ejecución de las actividades se observó que los docentes no conocían del todo las herramientas de GeoGebra 3D, por ende, se les apoyó explicándoles cómo utilizarlas, puesto que esto no influía en los resultados finales. Además, los participantes venían con la idea de aprender conocimientos nuevos, y estas breves intervenciones les sirvieron para dominar de mejor manera la aplicación.
- Se observa durante momentos en los docentes, los elementos hegemónicos del dME usual, como son el uso de lo puramente aritmético o algebraico, dejando de lado el pensamiento espacial y sus representaciones 3D.
- Dado que las ideas de Freudenthal, como es la medición y estimación, son ideas transversales a lo largo de toda la aplicación, se observa una sorpresa por parte de los docentes, puesto que en ocasiones preguntan, dónde están las medidas, como calculo si no tengo las medidas, evidenciando nuevamente la idea del cálculo directo, el cual está presente sostenidamente el dME usual.
- No se observa un rechazo por parte de los docentes al utilizar GeoGebra, están en un constante diálogo con él.
- En cuanto a la utilización de los nuevos elementos que propone la CSCM, estos son trabajados por los docentes, no obstante, no son adquiridos en un 100%. Es por ello, que en ocasiones existe una desconexión entre lo que se calcula y la decisión que se quiere tomar en torno a ese cálculo.

Para cerrar esta etapa de *confrontación*, se puede observar que existe un transitar entre el dME y la CSCM, dado que el docente considera elementos de ambos discursos para intentar dar soluciones a las situaciones. Por otro lado, también es visible que existe una predominancia de elementos del dME usual, por lo cual se sustenta que está ocurriendo el fenómeno inicialmente planteado y están presentes elementos de la problemática.

4.1.6.2 **Análisis de Resultados Fase III. Unidad.**

Actividad	Profesor 1	Profesor 2
Bolas en un Frasco	El docente, para poder entregar respuesta a esta actividad, comienza a trabajar con las diferentes perspectivas de los sólidos en el applet. Mediante la visualización concluye la cantidad de pelotas que caben en el frasco. En particular, estima de	La docente 2 realiza el mismo procedimiento del docente 1, para encontrar la respuesta a la actividad. No obstante, su proceso es un poco más largo, dado que comienza con la idea de dividir el volumen del cilindro con el de las esferas. Lo anterior es

	muy buena manera el diámetro del frasco, su altura y el diámetro de la pelota. Con la información anterior estima la cantidad de bolas que pueden ingresar en el frasco. Es importante destacar, que no utiliza fórmulas algebraicas, ni cálculos aritméticos, sino que más bien, es un proceso totalmente visual, que considera el proceso de estimación y medida en todo momento.	una respuesta válida, puesto que se identifican los valores de la altura, los radios y se procede a concluir. El docente luego de tener todos los datos comienza a calcular, pero segundos antes de hacerlo, comenta que efectivamente podría hacer el cálculo y dar una respuesta, pero es mucho más fácil concluir desde lo visual, comparando el espacio que ocupa la esfera dentro del cilindro. La respuesta y las argumentaciones que se entregan son correctas.
Fichas	Para lograr dar respuesta a esta actividad, el profesor observa las diferentes perspectivas de los bloques, en donde estima el valor de sus dimensiones (ancho, largo y alto). Luego de esto, sostiene que estos son paralelepípedos, por ende, el volumen se calcula mediante la manera usual (largo por ancho por alto). Para finalmente, sumar los volúmenes pequeños y concluir que es el mismo volumen del grande, lo cual era la respuesta esperada.	El docente en esta oportunidad no logra dar la respuesta correcta, dado que comenta que las conclusiones que obtiene mediante la visualización y la utilización de las diferentes perspectivas no concuerdan con sus cálculos aritméticos, lo cuales son, los argumentos predominantes al momento de concluir. Ahora bien, es de destacar, que el procedimiento del profesor 2 es diferente al del 1, ya que no estima las dimensiones, sino que mide con la herramienta longitud de GeoGebra. Se observa que la medición no fue exacta, sino que entregó números decimales, lo cual varió los cálculos, y fue esa variación numérica lo que no le permitió a el docente concluir, que el espacio que utilizaban ambos cuerpos era el mismo.

Conclusiones de la sesión.

Como bien se observó en el análisis de las actividades (sección 4.1.3), la etapa de la *unidad* propone dos maneras de enfrentar una situación, una mediante los elementos del dME usual, y otra por la CSCM, considerando de manera transversal alguno de los elementos de Freudenthal.
Ahora bien, se puede concluir que existe una tendencia del docente a utilizar obligatoriamente los elementos usuales del dME, y esto queda reflejado, cuando el

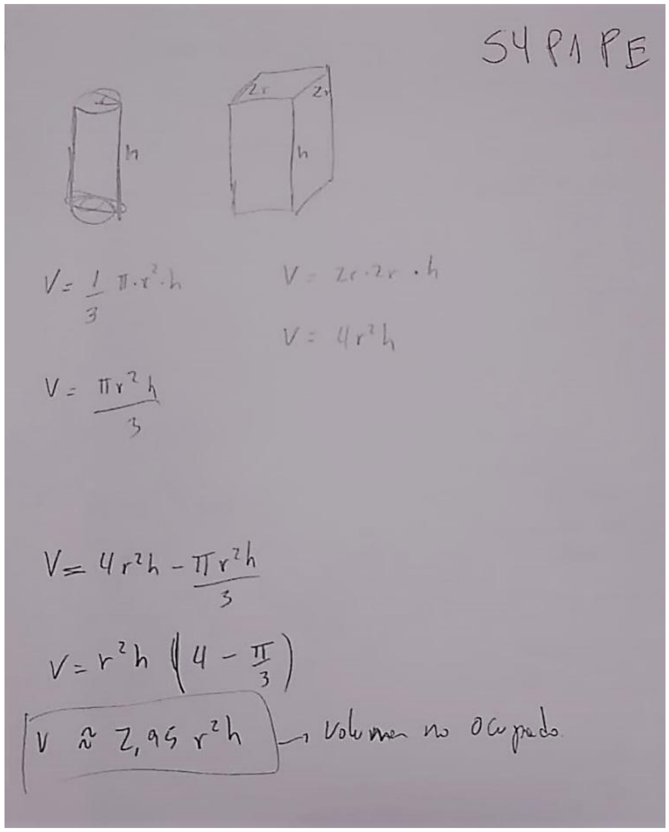
participante teniendo los elementos para poder concluir desde lo visual, sin necesidad de cálculo, de todas formas, ve la necesidad de utilizar la fórmula, más aún, cuando lo que visualiza y lo que calcula, no concuerdan, le da mayor importancia a las evidencias teóricas, que las empíricas, es decir, duda de la perspectiva y la forma y defiende sus cálculos.

Para finalizar, se concluye que los participantes no se olvidan de los elementos de la CSCM, puesto que, los utilizan y los hacen cada vez más parte su discurso, por lo que, existe un transitar entre lo nuevo y lo ya pre instaurado. No obstante, los elementos del nuevo discurso no están del todo establecidos, por lo que se reitera que sigue existiendo una predominancia del dME clásico, que implica utilizar la fórmula, reemplazar los parámetros y calcular un valor numérico.

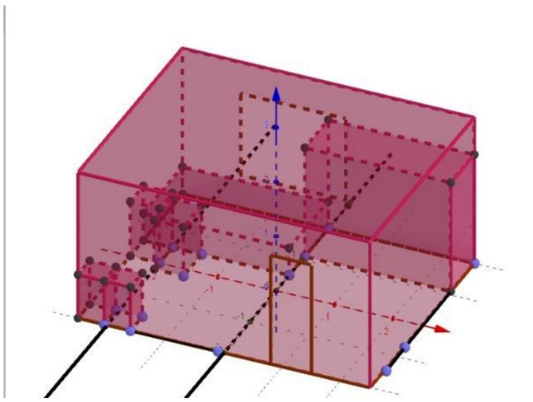
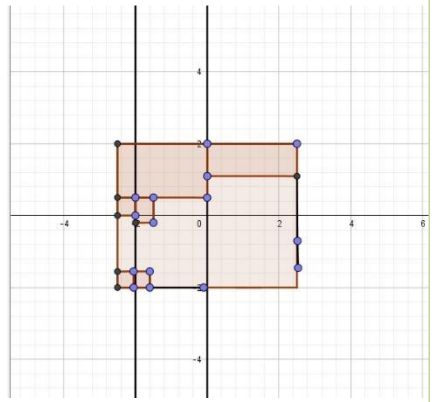
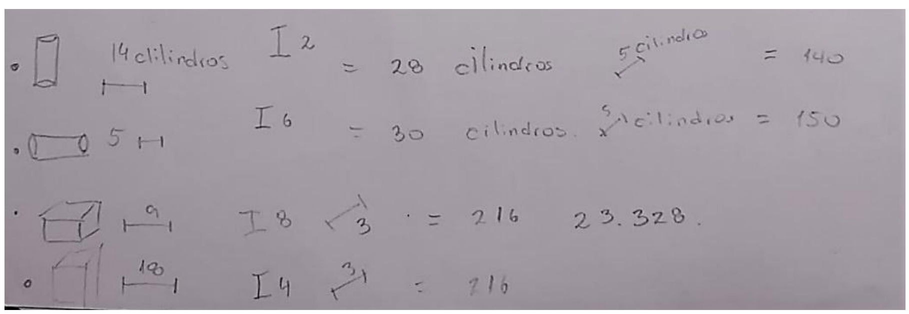
4.1.6.3 Análisis de Resultados Fase IV. Cambio.

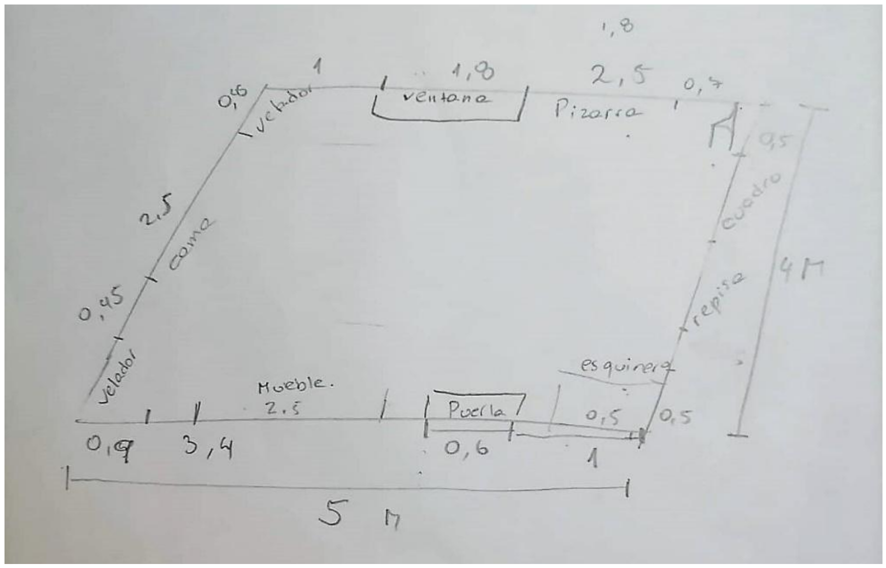
Actividad	Profesor 1	Profesor 2
Container	El profesor no logra responder esta pregunta de la manera solicitada, es más, no utiliza los datos que entrega el applet. El docente entrega una respuesta totalmente algebraica, donde supone que el cilindro cabe perfectamente dentro de la caja. Luego de ello, calcula la diferencia de espacios entre el cilindro y la caja, y concluye que la caja es la que deja menos espacio libre dentro del container.	En primer lugar, el docente entiende el problema de otra manera, realizado un cociente entre cada recipiente y el container; obtiene como respuesta, que con la caja se carga más rápido el container. No obstante, la pregunta anterior está enfocada en eficiencia de llenado, mientras que el enfoque de la pregunta es ¿Con cuál de los dos recipientes el container queda con menos espacio libre? Ahora bien, luego de repensarlo, el participante plantea un nuevo procedimiento y nuevas conclusiones. Lo primero que realiza es la medida de las dimensiones de cada cuerpo (caja, cilindro y container). Luego de esto, comienza a ver cuántas veces cabe cada recipiente pequeño, en el más grande, para luego calcular el volumen en cada caso y responder lo solicitado.
Acomodando la habitación	El docente comenta que desea diseñar un modelo tridimensional, pero no sabe cómo realizarlo, por lo que pide ayuda a quien ejecuta la actividad, para que le enseñe a utilizar GeoGebra 3D. Luego de aprender a construir prismas, el participante construye un modelo de una habitación a escala,	El docente diseña un modelo bidimensional de la habitación, en donde considera solo las bases de los cuerpos. Para ubicar los elementos aéreos, comenta donde los pondría, y justifica como estos no interferiría con los con tiene una altura más elevada.

<table>
<tr><td></td><td>mediante la modificación del applet original.</td><td></td></tr>
<tr><td>Profesor 1</td><td colspan="2">Evidencia del procedimiento para la actividad “Container”.



Como se puede ver en la imagen anterior, el docente propone modelos abstractos de ambos recipientes, en donde bajo la suposición de que el cilindro cabe dentro de la caja, algebraicamente establece el volumen que no se ocuparía a manera singular en el container. Bajo estos argumentos el profesor 1 argumenta su respuesta, lo cual no tiene relación con el foco de la actividad, por lo que se puede concluir que quizás no la comprendió.</td></tr>
</table>

	Evidencia del procedimiento para la actividad “Acomodando la habitación”.   La imagen superior, muestra el modelo 3D que propone el docente para acomodar todos los muebles dentro de la habitación. El modelo que propone el docente es bastante óptimo en cuanto al espacio, dado que todos los elementos caben de manera funcional.
Profesor 2	Evidencia del procedimiento para la actividad “Container”.  La imagen anterior, muestra cómo el profesor generó todas las posibles formas de ubicar ya sea la caja o el cilindro en el container, considerando las perspectivas horizontales y verticales.

	Evidencia del procedimiento para la actividad “Acomodando la habitación”.  La imagen superior, muestra el modelo bidimensional generado por el docente, en donde se destaca, que no menciona las alturas de los objetos al diseñar el plano.

Conclusiones de la sesión.

La etapa final de aplicación (*cambio)*, tiene como objetivo que el docente trabaje las actividades, transitando de manera obligatoria por los elementos del nuevo dME (CSCM). En donde aparecerán nuevamente las ideas transversales de Freudenthal (medir y estimar), todas estas relacionadas con el pensamiento espacial y la visualización 3D, las cuales son elementos que sustentan la idea del espacio.

En esta sesión se observó que aún existe adherencia a elementos del dME usual, como trabajar los elementos 3D mediante argumentos 2D, o la utilización de elementos aritméticos y algebraicos que anulan la idea de perspectiva, forma o tridimensionalidad. Ahora bien, se destaca que los docentes no presentaron rechazo a la utilización de nuevos instrumentos ni en esta sesión o en las anteriores, no obstante, se cree que no aprovecharlos al cien por ciento es debido a dos factores; el no conocimiento de los instrumentos (características 3D de GeoGebra), o la costumbre y lo bien instaurado que está el dME en la manera de pensar del docente.
Para finalizar, se destaca que, si bien existen elementos de la CSCM en el proceso reflexivo de los participantes, aún predominan los elementos del dME usual en la manera de razonar de los docentes.

4.1.7 Análisis de Resultados Fase V.

Para comenzar el análisis, primero se recordará el objetivo específico que rige esta fase, el cual es:

Caracterizar el discurso Matemático Escolar de los docentes, luego de la aplicación de la secuencia de aprendizaje con base en la teoría socioepistemológica respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Para cumplir el objetivo se ha realizado un nuevo análisis de planificaciones, además de analizar las nuevas entrevistas realizadas a los docentes.

4.1.7.1 Nuevo análisis de planificaciones.

Para realizar este análisis, se ha utilizado nuevamente la rúbrica de observación, la cual ha presentado los siguientes resultados.

Observación desde el dME.

Categorías /Profesor	Profesor 1	Profesor 2
Hegemónico	Existe utilización del álgebra, pero una mayor conexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.	Existe utilización del álgebra, pero una mayor conexión entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales.
Centrado en el objeto Matemático	Sigue existiendo una focalización en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula sigue estando presente en todas sus planificaciones.	Sigue existiendo una focalización en el objeto matemático, dado que el uso de la fórmula sigue estando presente en todas sus planificaciones. sus planificaciones.
Utilitario	Se sigue observando que el foco son los resultados.	Se sigue observando que el foco son los resultados.
Sin Marcos de Referencia	Se observa muy levemente la existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.	Se observa muy levemente la existencia de contextos al momento de trabajar el contenido.
Acabado y Lineal	Se observan nuevos mecanismos al momento de trabajar el cálculo de volumen, como es la aproximación por exceso o por defecto, para encontrar la fórmula del cilindro.	Se observan procesos repetitivos o similares al momento de presentar las actividades.

Observación desde la CSCM.

Categorías /Profesor	Profesor 1	Profesor 2
Pluralidad	Se observa una mayor pluralidad en el contenido, dado que considera en mayor grado la forma, la perspectiva y el tamaño.	No se observa del todo una pluralidad, puesto que, si bien considera las representaciones como parte del concepto. Aparece levemente la forma, y siguen sin aparecer la perspectiva o el tamaño.
Centrado en los Usos	No se observa un centrado en usos ya que los elementos de la planificación no entran dentro de ninguno de los indicadores.	No se observa un centrado en usos ya que los elementos de la planificación no entran dentro de ninguno de los indicadores.
Funcional	No se observa un contenido funcional.	Si bien, se relaciona la idea de espacio con volumen, esta idea no es transversal, por ende, no es suficiente para considerarlo funcional.
Transversalidad	No se observa una transversalidad del conocimiento	No se observa una transversalidad del conocimiento
Desarrollo en Usos	No se observa un desarrollo en usos.	No se observa un desarrollo en usos.

4.1.7.2 Nuevo análisis de entrevistas.

Para realizar este análisis, se ha utilizado nuevamente la pauta de entrevista, la cual ha presentado los siguientes resultados.

Observación desde el dME y CSCM.

Categorías /Profesor	Profesor 1
Hegemónico / Pluralidad	El docente considera elementos tridimensionales para la enseñanza del cálculo de volumen, es más, los considera fundamentales. Dentro de los elementos encuentra importante, están las representaciones tridimensionales de los cuerpos, las cuales pueden ser elementos tangibles (caja, una pirámide, etc.) o expresadas mediante herramientas tecnológicas (applet o animación).
Centrado en el objeto Matemático / en usos	El docente comenta que no solo utilizará la fórmula, sino que también introduciría las estimaciones de volumen, comparación de sólidos, desplazamiento de agua y diseño de sólidos mediante applet.
Utilitario / Funcional	El profesor comenta que cuando se trabaja una situación matemática, en particular el cálculo de volumen, el enfoque debe ser un proceso integrado, en donde todo tiene relevancia, es decir, el procedimiento, el resultado y la interpretación de este. Ahora bien, comenta que, de todas formas, en un

	ejercicio existirá una predominancia por el resultado, mientras que, en un problema, el foco será la interpretación.
Sin Marcos de Referencia / Transversalidad	El docente comenta, que utiliza tanto situaciones contextualizadas como descontextualizadas, pero su implementación depende del momento, y de lo que se quiera enseñar. Ahora bien, en cuanto a un porcentaje de implementación, diría que los ejercicios y los problemas se encuentran presentes de manera equilibrada al momento de trabajar los contenidos. Cuando se habla de la relevancia de un contexto para el estudiante, el profesor no se siente capaz de dar una definición, puesto que lo considera difícil de definir y no es algo que pueda ser contestado simplemente.
Acabado y Lineal / Desarrollo en usos	El docente mantiene sus definiciones iniciales, es decir, un ejercicio se centra en un resultado numérico o algebraico, mientras que un problema en dar un sentido al resultado, lo cual permite tomar una decisión.

Categorías /Profesor	Profesor 2
Hegemónico /Pluralidad	El docente comenta que ya no trabajaría los cuerpos de manera aislada, sino que los complementan entre sí, es decir, agregaría nociones de comparación y estimación de espacios. Por otro lado, considera que las representaciones 3D y 2D son fundamentales para el cálculo de volumen, puesto que lo 2D implica área (base de los sólidos) y 3D implica claramente volumen. Finalmente, considera que la composición de figuras planas (2D) forman un cuerpo (3D), en donde nuevamente comenta, que la idea de volumen es el espacio que utiliza un cuerpo en lugar determinado.
Centrado en el objeto Matemático / en usos	El docente comenta que no solo utilizará la fórmula, sino que también introduciría las estimaciones de volumen, comparación de sólidos, la idea de capacidad, pero más profundamente, dejaría a un lado la idea de solo concluir mediante el cálculo numérico, sino que también incorporaría la deducción por medio de la visualización.
Utilitario / Funcional	El profesor comenta que el foco al momento de enseñar el cálculo de volumen no sería ni la utilización de la fórmula ni el resultado numérico o algebraico, sino más bien la interpretación de este, dado que considera que este es uno de los puntos en los que están más débiles los estudiantes a nivel país.
Sin Marcos de Referencia / Transversalidad	El docente comenta que implementaría tanto elementos contextualizados y descontextualizados, dándole un mayor énfasis a la contextualización cuando se habla de cálculo de volumen. Ahora bien, cuando se habla de relevancia del contexto para el estudiante, menciona que un contexto será relevante respecto al cálculo de volumen, cuando el estudiante adquiera la idea de espacio. De lo anterior, el profesor da el ejemplo de hacer un

	queque, y que quien lo haga, debe ser consciente de la cantidad de ingredientes que se utilizan y el espacio que ocuparan en un recipiente determinado.
Acabado y Lineal / Desarrollo en usos	Se menciona que un ejercicio es un algoritmo con un mecanismo de resolución determinado, mientras que un problema involucra un contexto determinado. Para finalizar, comenta que ambos elementos son necesarios para que los estudiantes puedan comprender el cálculo de volumen.

4.1.7.3 Contraste de la información entregada por la nueva entrevista y las nuevas planificaciones.

Nuevamente, la información entregada por ambos instrumentos es variada a nivel general, ya que para ambos profesores lo que indica la rúbrica y la entrevista difieren en algunos puntos. Una explicación a esto puede ser el tiempo y el cansancio que presenta el docente durante el proceso final. Mientras que, por otro lado, se infiere que podría ser que la planificación es solo un modelo de cómo haría la clase, pero quizás al realizar la clase, se incorporen elementos que aparecieron en la entrevista, pero se mantuvieron ocultos en lo planificando (documento escrito).

El docente 1 sigue presentando elementos del dME, no obstante, se observa un cambio en elementos de su discurso, es decir, incorpora algunas componentes de la CSCM, como es la relación del espacio con el contenido, además la utilización de la fórmula y la aritmética no es exclusiva, sino que ya se menciona la idea de comparar el espacio, optimizarlo, y además emplea las ideas transversales de Freudenthal, que es medir y estimar. Por otra parte, conecta lo 3D y lo 2D con el cálculo de volumen, y lo considera fundamental para el contenido, más aún, propone representaciones tangibles y digitales para trabajar el objeto matemático. Ahora bien, en cuanto a la relevancia del contexto, es algo que aún no pudo ser resignificado, puesto que el docente no es capaz de definir claramente que sería un contexto relevante para el estudiante, que le permita aprender el concepto de cálculo de volumen.

Nuevamente el docente 2, presenta en sus planificaciones varios elementos que indican que elementos del dME siguen predominando al momento de tratar el cálculo de volumen, como es la utilización de la fórmula y la poca conexión de sus objetivos con la idea de espacio. No obstante, cuando se conversa con él, este indica que la idea de espacio es fundamental para enseñar el cálculo de volumen, en donde enfatiza que utilizar valores y reemplazar estos, no tiene sentido para quien enseña, ni para quien aprende, sino se incorpora la comparación de sólidos, la idea de capacidad y las acciones de medir y estimar. Ahora bien, en cuanto a la relevancia del contexto y su relación con otras áreas, el profesor indica que la relevancia dependerá de cómo el contexto permita al estudiante desarrollar las nociones espaciales al momento de trabajar el cálculo de volumen. Lo anterior, no se ve reflejado en su planificación de clases, por lo que aún se infiere, que el docente es consciente del fenómeno que ocurre respecto al cálculo de volumen, pero el dME tiene una mayor predominancia en su forma de enseñar.

Capítulo 5.

5.1 CONCLUSIONES.

Para este capítulo final, se dividirán las conclusiones respecto al objetivo general, los supuestos de trabajo, los elementos positivos de la investigación y los percances que se generaron en su aplicación.

¿Se cumplió el objetivo general?

Primero que todo, se debe recordar el objetivo general de la investigación, el cual dice:

"Explicar los procesos de resignificación del discurso Matemático Escolar de profesores de matemáticas, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado".

Los objetivos específicos son:

1. Identificar el discurso Matemático Escolar de los docentes, previo a la aplicación de la secuencia de aprendizaje con base en la teoría Socioepistemológica, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

2. Describir las acciones y formas de pensamiento de los profesores en ejercicio, cuando se enfrentan al conjunto de actividades que constituyen una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada con base en la teoría socioepistemológica.

3. Caracterizar el discurso Matemático Escolar de los docentes, luego de la aplicación de la situación de aprendizaje con base en la teoría socioepistemológica respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

En términos particulares se puede afirmar que los objetivos específicos se cumplen. Estos fueron diseñados con el propósito de aportar al cumplimiento del objetivo general. De lo anterior, se infiere que se logra el objetivo general, dado que, durante todo el proceso de intervención y análisis, se van explicando las maneras de pensar de los docentes, enfatizando en su manera de actuar, las nociones matemáticas que utilizan, y cómo estas van cambiando a medida que transitan por las diferentes etapas del modelo inclusión-exclusión. Más específicamente, se trata de explicar cómo el dME usual va incorporando elementos del nuevo dME (CSCM), lo que genera una resignificación del conocimiento que tienen los docentes respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

¿Se cumplió el supuesto de trabajo?

Para responder a esta pregunta, se recordará el supuesto de trabajo, el que dice:

"La aplicación de la situación de aprendizaje diseñada en el marco de en la teoría Socioepistemológica, y que aborda el cálculo de volumen de octavo grado, influye en la resignificación del discurso matemático escolar docente, porque a pesar de que se mantiene lo algebraico y lo aritmético al momento de presentar el contenido, esto ya no es exclusivo y predominante, sino que está en sincronía con los aspectos propiamente geométricos del concepto, tales como la forma, la perspectiva, el tamaño y proyecciones sobre planos o rectas.”.

En primer lugar, se observa que los docentes presentan cambios en su dME usual, e incorporan nuevos elementos de la CSCM, por lo que sí se puede afirmar que existe una resignificación de la manera de observar el cálculo de volumen, puesto que en su diálogo incorporan nociones de Freudenthal, como es la comparación de sólidos, la estimación, la medida, la utilización de representaciones tridimensionales, como elemento fundamental para trabajar con cuerpos, entre otras. Se destaca que siguen apareciendo nociones algebraicas y aritméticas, no obstante, ya no están del todo aisladas, sino que aparecen en conjunto con las anteriormente mencionadas. Si bien, no se observa sincronía entre lo usual y lo nuevo, si se puede afirmar que existe una influencia de la intervención en la resignificación del dME usual, dado que aparecen nuevos elementos que en un origen no estaban, y que ni siquiera aparecían o eran considerados importantes.
Es importante dejar claro, que toda esta investigación está centrada en el cambio de la manera de pensar del docente, por tanto, no se puede afirmar que el docente utilizará todo lo aprendido al momento de estar en la práctica, es decir, no existe ninguna evidencia o conjetura que asegure que el docente no volverá a emplear el dME usual al momento de enseñar el cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

¿Cuáles son los aspectos positivos de la investigación?

Los aspectos positivos para destacar de la investigación son los siguientes:

- Oportunidad para el docente de perfeccionarse en contenidos que sentía que no estaba completo, como es el caso del docente que comenta que esta experiencia le sirvió para aprender a utilizar GeoGebra 3D, ya que él no sabía que existía.

- Aportar en un algún porcentaje al fenómeno de la enseñanza de la Geometría, que presenta problemas en su aprendizaje desde hace más de 50 años.

- Fomentar el uso de herramientas tridimensionales para la enseñanza de la geometría tridimensional, es decir, tratar de instaurar la idea de “lo tridimensional debe trabajarse con herramientas tridimensionales” (Astudillo-Ugalde, Soto, & Abarca, 2021).

- Finalmente, fomentar el trabajo docente y su pensamiento reflexivo, puesto que en ocasiones el docente enseña una cantidad de tópicos durante años, pero no tienen la pausa de preguntarse si está bien como los enseña, ya sea porque lo aprendió así, no tienen tiempo u otros factores.

¿Qué percances presentó la investigación?

Para finalizar las conclusiones, esta investigación sufrió sus principales percances en el proceso de implementación, puesto que originalmente se conversó con cinco docentes, de los cuales dos participaron en un cien por ciento, otros dos no se presentaron por problemas de tiempo, cansancio y desinterés. Finalmente, un docente comenzó el proceso y abandonó cuando se llevaba el cuarenta por ciento de la implementación, el motivo fue que no le parecieron las actividades, sentía que la participación era inútil para su conocimiento, que sabía todo y no necesitaba aprender nada nuevo. Es de destacar, que este era un proceso voluntario y sin ninguna obligación por lo que no se entiende el comportamiento del participante. A modo de síntesis, trabajar con docentes presenta principalmente complicaciones de tiempo, puesto que las largas horas laborales y el gran trabajo académico que conlleva el sistema escolar, sobre todo en este proceso de pandemia 2020-21, genera desinterés y poca continuidad en un proceso investigativo. Por otra parte, como menciona (Bachelard, 2019), el docente no cree en el fracaso, pues quien enseña manda, además, por su experiencia en la educación y al ser y creerse un maestro, existe una resistencia al cambio, por lo tanto, en ocasiones esto no permite aprender cosas nuevas o perfeccionarse.

REFERENCIAS.

Agencia de Calidad de la Educación. (2019). *Resultados Educativos Simce.*

Agencia de Calidad de la Educación. (2018). *Pisa 2018 Entrega de Resultados.* Santiago de Chile.

Alsina, Á., & Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. Sustainability (Switzerland), 11(15) doi:10.3390/su11154039

Alves Júnior, F. C. C., Rodrigues, A., Diniz, M. M., & Monteiro, D. C. (2018). Teaching platonic polyhedrons through augmented reality and virtual reality. Paper presented at the ACM International Conference Proceeding Series, doi:10.1145/3274192.3274243 Retrieved from www.scopus.com

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Andrade, M. y Montecino, A (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, Actas del XIII CIAEM-IACME 2011. En: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf.

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). Reconceptualización del saber matemático en educación básica. Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. ISBN: 978-607-8527-55- 7.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Astudillo-Ugalde, J., Soto, D. S., & Abarca, G. b. (2021). Aplicación de una Situación Didáctica para la enseñanza del Cálculo de Volumen, construida mediante la teoría del Espacio de Trabajo Geométrico. *REDIME, 18*(3), 2-11. Obtenido de https://intranet.matematicas.uady.mx/rideme

Bachelard, G. (2019). *La Formación del Espíritu Científico: Contribución a un Psicoanálisis de un Conocimiento Objetivo.* Ciudad de México: Siglo XXI.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. Mathematics Teacher, 88(1), 48-54.

Barth-Cohen, L. A., Little, A. J., & Abrahamson, D. (2018). Building reflective practices in a pre-service math and science teacher education course that focuses on qualitative video analysis. Journal of Science Teacher Education, 29(2), 83-101. doi:10.1080/1046560X.2018.1423837

Benzer, A., & Yildiz, B. (2019). The Effect of Computer-Aided 3D Modeling Activities on Pre-Service Teachers' Spatial Abilities and attitudes towards 3D Modeling. *Journal Of Baltic Science Education*, *18*(3), 335-348. doi: 10.33225/jbse/19.18.335

Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds), Acquisition of Mathematics Concepts and Process (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), 7-16.

Bkouche, R., Charlot, B. and Rouche, N. (1991). Faire des Mathématiques: le plaisir du sens. Paris: Armand Colin, pp.47-59.

Blanco, T. F. (2013). La investigación en visualizacíon y razonamiento espacial. *La Investigación SEIEM.*

Bourdieu, Pierre y Jean-Claude Passeron (2005), La reproducción. Elementos para una teoría del sistema de enseñanza, México, Fontamara.

Burton, Deutheux-Jehin, & Fagnant. (1997). Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire? Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège.

Cajaraville, J., Fernández Blanco, T., & Godino, J. (2006). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. In *Aprendizaje de la geometría*. Huesca.

Cañete, R., Guilhem, D., & Brito, K. (2012). Consentimiento informado: algunas consideraciones actuales. *Acta Bioethica. 18*, págs. 121-127. Santiago, Chile: Universidad de Chile. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=55423585011

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (2000). *En la vida diez, en la escuela cero.* Siglo Veintiuno Editores.

Carlos-Chullo, J. D., Vilca-Quispe, M., & Castro-Gutierrez, E. (2021). Voluminis: An augmented reality mobile system in geometry affording competence to evaluating math comprehension doi:10.1007/978-3-030-52575-0_23 Retrieved from www.scopus.com

Castelnuovo, E. (1963). Didáctica de la matemática moderna. México: Trillas

Chamorro, C. (2001). —Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y ESO, en Chamorro (ed.) Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: MEC, p. 81-124

Chamorro, C. (2003). —Las magnitudes multi lineales: la superficie y el volumen, en Chamorro (ed.) Didáctica de las matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Educación, p. 221-272

Chevallard, Y., & Joshua, M.A. (1982) "Un exemple d' analyse de la transposition didactique: La notion de distance", Recherches en didactique des mathématiques, 3, 1, 159-239.

Cordero Osorio, F., Gómez Osalde, K., Silva-Crocci, H., & Soto Soto, D. (2015). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres Fenómenos del Discurso Matemático Escolar. In *Aspectos socioepistemológico en el análisis y rediseño del discurso matemático escolar*. México-Chile.

Cordero, F., Valle, T. d., & Morales, A. (2017). Usos de la Optimización de Ingenieros en Formación: El Rol de la Ingeniería Mecatrónica y de la Obra de Lagrange. *Relime*. doi: 10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1).

Cordero Osorio, F. (2006). La Institucionalización del Conocimiento Matemático y el Rediseño del Discurso Matemático Escolar. In *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19*. México.Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006).

Cordero Osorio, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Relime*, *1*(1), 56-74.

Córica, J. L. (2020). Resistencia docente al cambio: Caracterización y estrategias para un problema no resuelto. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 23*(2), pp. 255-272. doi: http://dx.doi.org/10.5944/ried.23.2.26578

Da Fontoura Garcia Silva, A., De Lurdes Serrazina, M., & Campos, T. M. M. (2014). Continuing education for math teachers: Developing reflective teaching practices. [Formação Continuada de Professores que Lecionam Matemática: desenvolvendo a prática reflexiva docente] Bolema - Mathematics Education Bulletin, 28(50), 1505-1524. doi:10.1590/1980-4415v28n50a24

Escobar, E. F. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y volumen.* Medellín: Universidad de Medellín.

Escudero, J. M. (2005). Fracaso Escolar, Exclusión educativa. *Red iberoamericana de innovación y conocimiento científico*.

Fernández-Enríquez, R., & Delgado-Martín, L. (2020). Augmented reality as a didactic resource for teaching mathematics. Applied Sciences (Switzerland), 10(7) doi:10.3390/app10072560.

Flores-Bascuñana, M., Diago, P. D., Villena-Taranilla, R., & Yáñez, D. F. (2020). On augmented reality for the learning of 3D-geometric contents: A preliminary exploratory study with 6-grade primary students. Education Sciences, 10(1) doi:10.3390/educsci10010004

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. En H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Netherland: Reidel Pub. Co.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39(1–2), 127–135.

Guerrero, P. (2005). Estudio de las resistencias de los profesores a una estrategia para el desarrollo de la creatividad en tres unidades educativas. *scielo, 14*(1). Obtenido de http://dx.doi.org/10.4067/S0718-22822005000100003

Guzmán, M. de (1993), Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Madrid: Editorial Popular.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed.). Ciudad de México.

Kuennen, E. W., & Beam, J. E. (2020). Teaching the mathematics that teachers need to know: Classroom ideas for supporting prospective elementary teachers' development of mathematical knowledge for teaching. Mathematics Enthusiast, 17(2-3), 771-805. Retrieved from www.scopus.com.

Kuzniak, A. (2013). Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométrico Espacios de trabajo matemático. [online] http://www.univ-irem.fr/. Available at: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Diapo_Valpo.pdf [Accessed 15 nov. 2020].

Lara, D. M. (2019). Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: el uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética. *Cinvestav*.

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programa de Estudio Matemática 8vo Grado.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programa de Estudio Matemática 2do medio.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Bases Curriculares 3º y 4º medio.*

Ng, O. -., Shi, L., & Ting, F. (2020). Exploring differences in primary students' geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: Dynamic geometry and 3D printing. International Journal of STEM Education, 7(1) doi:10.1186/s40594-020-00244-1

Okuda Benavides, M., & Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Scielo*, *34*(1). doi: ISSN 0034-7450 Volumen, Construida en Base al Espacio de Trabajo Geométrico. Licenciatura.

Piza Burgos, N., Amaiquema Márquez, F., & Beltrán Baquerizo, G. (2019). Métodos y técnicas en la investigación cualitativa. Algunas precisiones necesarias. *Scielo*, *15*(70). doi: 1990-8644

Pizarro, N., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). Actividades de Estimación de Medida: La interpretación de los docentes de Educación Primaria. *Scielo*.

Reyes, J. L. (2020). Resignificación de los usos de la derivada en un diseño escolar con perspectiva de la dialéctica Exclusión-Inclusión. *Cinvestav*.

Rivera, S. Q., Núñez¸, E., Saboya, M., & Soto, J. L. (2019). *Secuencia didáctica para el cálculo de volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía.* Ciudad de México: AMIUTEM.

Roldán, M. S. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 8*(18), 447-478. Obtenido de http://es.scribd.com/doc/52362622/Una-discusion-sobre-el-concepto-matematico-devolumen-con-fines-didacticos.

SanMiguel, M., & Salina, M. P. (2011). ´Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° relacionadas con el concepto de volumen y su medida. *La Investigación SEIEM*.

Soto, D. G. (2014). La Dialéctica Exclusión- Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático. *Cinvestav*.

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. *Scielo*, *28*(50). doi: 1980-4415

Torres Jeldes, C., & Caroca Toro, M. (2019). *Texto del Estudiante de Matemática 8° Básico* (1st ed.). Santiago: Dafne Milenka Vanjorek Suljgoi.

ANEXOS

Consentimiento informado n°1.

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA PARTICIPANTES.
Desarrollo de una propuesta de enseñanza para el concepto de volumen.

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

1.- Título: Resignificación del discurso Matemático Escolar docente. Una mirada al cálculo de volumen desde la teoría socioepistemológica.

2.- Objetivo de la investigación: Explicar los procesos de resignificación del discurso Matemático Escolar de profesores de matemáticas, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

3.- Su participación consistirá en 5 sesiones de trabajo, las cuales contemplan 2 sesiones de entrevista y 3 de desarrollo de una propuesta de aprendizaje, lo que ocupará 90 minutos por cada una.

4.- Riesgos y beneficios: La metodología que se utilizará en la investigación NO implica riesgos para el(la) participante.
Esta investigación NO implica beneficios para los participantes.

5.- Tipo de información que busca la investigación: El tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como:

¿Cómo influye en la resignificación del discurso Matemático Escolar docente, la aplicación de una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada con base en la teoría Socioepistemológica?

6.- Participación Voluntaria: La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

7.- Derecho a retirarse de la investigación: Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el (la) participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al (la) investigador(a) por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo(a) afecten.

8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación: Los resultados de este estudio, pueden ser presentados en Conferencias, Seminarios, Artículo Científico y/o Libros. Todo con el fin de la difusión científica.
Si el (la) participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

9.- Derecho al resguardo de la identidad del (la) participante, de la información compartida y de sus datos personales.

Anonimato del (la) participante: El (la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.
Confidencialidad del (la) participante: Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

Derecho a la imagen del (la) participante: En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

10.- Custodio de los Datos: El (la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

11.- Respecto de publicaciones: Este consentimiento informado da autorización al investigador responsable para que la información reportada por el participante pueda ser publicada en artículos, libros, conferencias u otros.

12.- Compensaciones: En el caso que corresponda, el(la) investigador(a) deberá compensar o retribuir transporte, colación u otros gastos extraordinarios derivados de la participación del sujeto en el estudio.

13.-Investigador responsable: en caso de consultas, se puede dirigir a Jorge Antonio Astudillo Ugalde.
Unidad académica: Departamento de matemáticas y computación.
Fono: (56-9) 98476894
E-mail: jorge.astudillo@usach.cl

14.- Identificación del Comité de Ética Institucional: En caso de reclamos, se puede dirigir al Dr. Jairo Venegas, Presidente (I) del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. Email: comitedeetica@usach.cl

15.- Ejemplares: Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el (la) investigador(a) responsable y uno para el (la) participante.

PARTICIPANTE: Profesora Romina Almendra Silva Espinoza.

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEÍDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERÍSTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO ___x____ ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MEDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS ___x___ DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI ___x____ NO _______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ECTRÓNICO, EL CUAL ES: rmy.silva97@gmail.com	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______ NO ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MEDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE: Jorge Astudillo Ugalde FIRMA FECHA: 15/07/2021	**PARTICIPANTE** NOMBRE: Romina Almendra Silva Espinoza FIRMA FECHA: 15/07/2021

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA PARTICIPANTES.
Desarrollo de una propuesta de enseñanza para el concepto de volumen.

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

1.- Título: Resignificación del discurso Matemático Escolar docente. Una mirada al cálculo de volumen desde la teoría socioepistemológica.

2.- Objetivo de la investigación: Explicar los procesos de resignificación del discurso Matemático Escolar de profesores de matemáticas, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

3.- Su participación consistirá en 5 sesiones de trabajo, las cuales contemplan 2 sesiones de entrevista y 3 de desarrollo de una propuesta de aprendizaje, lo que ocupará 90 minutos por cada una.

4.- Riesgos y beneficios: La metodología que se utilizará en la investigación NO implica riesgos para el(la) participante.
Esta investigación NO implica beneficios para los participantes.

5.- Tipo de información que busca la investigación: El tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como:

¿Cómo influye en la resignificación del discurso Matemático Escolar docente, la aplicación de una situación de aprendizaje relacionada con la enseñanza del cálculo de volumen de octavo grado, diseñada con base en la teoría Socioepistemológica?

6.- Participación Voluntaria: La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

7.- Derecho a retirarse de la investigación: Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el (la) participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al (la) investigador(a) por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo(a) afecten.

8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación: Los resultados de este estudio, pueden ser presentados en Conferencias, Seminarios, Artículo Científico y/o Libros. Todo con el fin de la difusión científica.
Si el (la) participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

9.- Derecho al resguardo de la identidad del (la) participante, de la información compartida y de sus datos personales.

Anonimato del (la) participante: El (la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.
Confidencialidad del (la) participante: Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas

vinculadas al estudio.

Derecho a la imagen del (la) participante: En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

10.- Custodio de los Datos: El (la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

11.- Respecto de publicaciones: Este consentimiento informado da autorización al investigador responsable para que la información reportada por el participante pueda ser publicada en artículos, libros, conferencias u otros.

12.- Compensaciones: En el caso que corresponda, el(la) investigador(a) deberá compensar o retribuir transporte, colación u otros gastos extraordinarios derivados de la participación del sujeto en el estudio.

13.-Investigador responsable: en caso de consultas, se puede dirigir a Jorge Antonio Astudillo Ugalde.
Unidad académica: Departamento de matemáticas y computación.
Fono: (56-9) 98476894
E-mail: jorge.astudillo@usach.cl

14.- Identificación del Comité de Ética Institucional: En caso de reclamos, se puede dirigir al Dr. Jairo Venegas, Presidente (I) del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. Email: comitedeetica@usach.cl

15.- Ejemplares: Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el (la) investigador(a) responsable y uno para el (la) participante.

PARTICIPANTE: Profesor Esteban Felipe Olivares Leiva.

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEÍDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERÍSTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO ___x____ ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MEDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS ___x____ DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI ___x____ NO _______ PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: esteban.olivares@usach.cl	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______ NO ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN SEA REGISTRADA MEDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______
INVESTIGADOR RESPONSABLE NOMBRE: Jorge Astudillo Ugalde FIRMA FECHA: 1 de diciembre de 2021	**PARTICIPANTE** NOMBRE: Esteban Olivares FIRMA FECHA: 1 de diciembre de 2021

Carta de Compromiso del Investigador.

Yo Jorge Antonio Astudillo Ugalde Investigador del proyecto de investigación “Resignificación del discurso Matemático Escolar docente. Una mirada al cálculo de volumen desde la teoría socioepistemológica” mediante la suscripción del presente documento me comprometo a:

1. Declarar mis potenciales conflictos de interés ante el comité de ética de investigación.
2. Comunicar los eventos adversos en la forma más rápida al comité.
3. Reportar por escrito al Comité cualquier desviación y/o modificación ya sea en el proyecto de investigación o en el proceso de consentimiento informado y suspender la ejecución del proyecto hasta la evaluación y pronunciamiento del Comité.
4. Elaborar informes de seguimiento y reportarlos al comité.
5. Elaborar el informe final al término del estudio y reportarlo al comité
6. Comunicar al Comité la suspensión del estudio en curso, enviando un informe con los resultados obtenidos, las razones de la suspensión y el programa de acción en relación con los sujetos participantes.
7. Garantizar que el procedimiento del consentimiento informado se lleve a cabo de tal forma que promueva la autonomía del sujeto, asegurándose que este logró entender la información respecto de la investigación, sus riesgos y probables beneficios.
8. Tomar a su cargo un número razonable de casos que no le impida asumir la responsabilidad del estudio en forma total.
9. Garantizar que los datos entregados sean íntegros y confiables, cumpliendo con el protocolo autorizado.
10. Custodiar los datos personales recopilados, resguardar la confidencialidad de los datos conocidos, mantener la más estricta reserva sobre el contenido de los datos como de los nombres de los participantes, ni ninguna otra información que permita individualizarlos, comprometiéndome a anonimizar esta información. Asimismo, me comprometo a eliminar estos datos una vez que concluya la investigación, pudiendo almacenarlos por un período máximo de 5 años. Finalmente, me comprometo a que en ningún caso las muestras y los datos recopilados serán utilizados para fines o proyectos diversos a los que fueron extraídos, sin previa autorización del Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

Jorge Antonio Astudillo Ugalde

Investigador(a) Responsable/Tutor(a) de Tesis

Pautas de Validación de Instrumentos.

Pauta para la validación la entrevista inicial.

Nombre del Experto: Héctor Silva Fecha: 20.X.21

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe una relación entre las preguntas y lo que expone el marco teórico, ambientado a la problemática de la enseñanza del cálculo de volumen.			x		
Coherencia respecto a los objetivos: Las preguntas tratadas en la entrevista ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.			x		
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado en cada pregunta es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.			x		
Relevancia respecto a la investigación: La entrevista es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			x		

Observaciones y Recomendaciones:

Los comentarios que puedo hacer aquí están en estrecha relación con la pauta para validación de la rúbrica, puesto que, como se declara, estas pautas de entrevistas son diseñadas con base en los indicadores de la rúbrica. Reitero mi sugerencia de incluir análisis a priori.

Firma del Experto

Pauta para la validación la entrevista final.

Nombre del Experto: Héctor Silva Fecha: 20.X.21

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

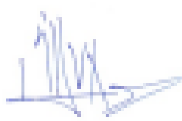
1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe una relación entre las preguntas y lo que expone el marco teórico, ambientado a la problemática de la enseñanza del cálculo de volumen.			x		
Coherencia respecto a los objetivos: Las preguntas tratadas en la entrevista ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.			x		
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado en cada pregunta es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.			x		
Relevancia respecto a la investigación: La entrevista es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			x		

Observaciones y Recomendaciones:

Los comentarios que puedo hacer aquí están en estrecha relación con la pauta para validación de la rúbrica, puesto que, como se declara, estas pautas de entrevistas son diseñadas con base en los indicadores de la rúbrica. Reitero mi sugerencia de incluir análisis a priori.

Firma del Experto



____

Pauta para la validación de la rúbrica.

Nombre del Experto: Héctor Silva Fecha: 19.X.21

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe relación de los puntos planteados en la rúbrica con los conceptos que trata el marco teórico.			x		
Coherencia respecto a los objetivos: Los puntos tratados en la rúbrica ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.			x		
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado por cada punto de la rúbrica es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.			x		
Pertinencia en la definición de rubrica: Lo presentado por la rúbrica corresponde efectivamente a una rubrica y no a otro instrumento.				x	
Relevancia respecto al desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Lo presentado tiene relación con el desarrollo del docente respecto				x	

al contenido de cálculo de volumen.					
Relevancia respecto a la contribución del objeto matemático (el volumen). Lo presentado contribuye a la problemática del cálculo del volumen y contribuye a la mejora del tratamiento del concepto.				x	

Observaciones y Recomendaciones:

Con la revisión de los indicadores surgen las siguientes reflexiones: ¿por qué esos indicadores y no otros?, ¿cómo se expresa el marco teórico en los indicadores?, ¿por qué esos indicadores tienen una naturaleza socioepistemológica?, entre otras.

A modo de ejemplo, me sitúo en la última interrogante, en particular en CSCM (desarrollo de usos) cuyo indicador denota situaciones de "variación"; "transformación"; "selección". Al revisar la rubrica manifiesta en CSCM, desarrollo de usos: "existe la variación de parámetros (algebraico/gráfico/aritmético) al momento de trabajar el calculo de volumen". Me resulta muy genérico, la socioepistemología del calculo que cita (Cordero, Morales, del Valle, 2019) es más profunda que solo variar parámetros.

Al leer la obra citada (Cordero y otros) la construcción de lo matemático en la situación de transformación brinda significaciones a los patrones de comportamientos gráficos y analíticos, en los que los procedimientos se relacionan con la variación de parámetros de la iteración $y = Af(Bx + C) + D$. Esto conlleva a concebir al objeto función no como una expresión formal, sino como instrucción que organiza comportamientos cuya argumentación se determina por comportamientos tendenciales. Ahora la pregunta, ¿cómo lo anterior se expresa en el indicador?, en el manuscrito de la tesis no se señala, tampoco hay un análisis a priori de los indicadores.
Así como el ejemplo anterior, podemos problematizar cada indicador de la rubrica. Es algo que se debe vigilar, queda la sensación que los indicadores se construyen de acuerdo con las creencias del autor, sin usar el marco teórico.

Considerando los comentarios anteriores con relación a los criterios de pauta para la validación, ¿cómo vigilar la coherencia respecto al marco teórico?, así como, ¿cómo vigilar coherencia respecto a los objetivos?
A continuación objetivos específicos que declara:

Objetivos Específicos.

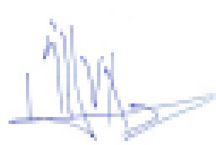
Identificar el discurso Matemático Escolar de los docentes, previo a la aplicación de la **secuencia didáctica con base en la teoría Socioepistemológica**, respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Describir las acciones y formas de pensamiento de los profesores en ejercicio, cuando se enfrentan al conjunto de actividades que constituyen una **situación didáctica relacionada con la enseñanza del cálculo** de volumen de octavo grado, **diseñada con base en la teoría socioepistemológica.**

Caracterizar el discurso Matemático Escolar de los docentes, luego de la **aplicación de la secuencia didáctica con base en la teoría socioepistemológica** respecto a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos de octavo grado.

Como evaluador sugiero que los indicadores (al igual que la secuencia didáctica que propone) deben incluir análisis a priori que denote lo que se espera y de cómo se manifiesta el uso del marco teórico.

Firma del Experto



Pauta para la validación la entrevista inicial.

Nombre del Experto: Héctor Silva Fecha: 20.X.21

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe una relación entre las preguntas y lo que expone el marco teórico, ambientado a la problemática de la enseñanza del cálculo de volumen.			x		
Coherencia respecto a los objetivos: Las preguntas tratadas en la entrevista ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.			x		
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado en cada pregunta es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.			x		
Relevancia respecto a la investigación: La entrevista es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			x		

Observaciones y Recomendaciones:

Los comentarios que puedo hacer aquí están en estrecha relación con la pauta para validación de la rúbrica, puesto que, como se declara, estas pautas de entrevistas son diseñadas con base en los indicadores de la rúbrica. Reitero mi sugerencia de incluir análisis a priori.

Firma del Experto

____

Pauta para la validación de Instrumento.

Nombre del Experto: Gladys Bobadilla Abarca

Fecha: 20 de octubre 2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe relación de las actividades con el marco teórico.				X	
Coherencia respecto a los objetivos: Las actividades ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.				X	
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado por cada actividad es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.				X	
Relevancia respecto al desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Lo presentado tiene relación con el desarrollo del docente respecto al contenido de cálculo de volumen.				X	
Relevancia respecto a la contribución del objeto matemático (el volumen). Lo presentado contribuye a la problemática del cálculo del volumen y contribuye a la mejora del tratamiento del concepto.				X	

Observaciones y Recomendaciones:

En la secuencia didáctica debo destacar el espíritu creativo del profesor Jorge Astudillo y su dominio de GeoGebra.

Firma del Experto

Gladys Astudillo

Pauta para la validación de Instrumento.

Nombre del Experto: Marta Cecilia Salazar Aburto Fecha: 7/11/2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe relación de las actividades con el marco teórico.				X	
Coherencia respecto a los objetivos: Las actividades ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.				X	
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado por cada actividad es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.				X	
Relevancia respecto al desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Lo presentado tiene relación con el desarrollo del docente respecto al contenido de cálculo de volumen.				X	
Relevancia respecto a la contribución del objeto matemático (el volumen). Lo presentado contribuye a la problemática del cálculo del volumen y contribuye a la mejora del tratamiento del concepto.				X	

Observaciones y Recomendaciones:

La elaboración del Instrumento presenta coherencia con el Marco Teórico y proporcionan la información requerida en los Objetivos especificos.

Firma del Experto

Pauta para la validación la entrevista inicial.

Nombre del Experto: Marta Cecilia Salazar Aburto Fecha: 7/11/2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

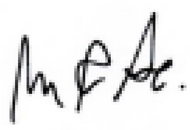
1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe una relación entre las preguntas y lo que expone el marco teórico, ambientado a la problemática de la enseñanza del cálculo de volumen.				x	
Coherencia respecto a los objetivos: Las preguntas tratadas en la entrevista ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.				x	
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado en cada pregunta es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.				x	
Relevancia respecto a la investigación: La entrevista es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.				x	

Observaciones y Recomendaciones:

Sin comentarios y observaciones.

Firma del Experto



____

Pauta para la validación la entrevista final.

Nombre del Experto: Marta Cecilia Salazar Aburto

Fecha: 7/11/2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

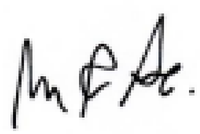
1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe una relación entre las preguntas y lo que expone el marco teórico, ambientado a la problemática de la enseñanza del cálculo de volumen.				x	
Coherencia respecto a los objetivos: Las preguntas tratadas en la entrevista ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.				x	
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado en cada pregunta es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.				x	
Relevancia respecto a la investigación: La entrevista es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.				x	

Observaciones y Recomendaciones:

Sin comentarios y observaciones.

Firma del Experto



____

Pauta para la validación de la rúbrica.

Nombre del Experto: Marta Cecilia Salazar Aburto

Fecha: 7/11/2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

1: Totalmente en Desacuerdo
2: En Desacuerdo
3: De Acuerdo
4: Totalmente de Acuerdo
N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio				
	1	2	3	4	N. O
Coherencia respecto al marco teórico: Existe relación de los puntos planteados en la rúbrica con los conceptos que trata el marco teórico.				x	
Coherencia respecto a los objetivos: Los puntos tratados en la rúbrica ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos especificos, en donde se relaciona su uso.				x	
Pertinencia en el lenguaje: El lenguaje presentado por cada punto de la rúbrica es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.				x	
Pertinencia en la definición de rubrica: Lo presentado por la rúbrica corresponde efectivamente a una rubrica y no a otro instrumento.				x	
Relevancia respecto al desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Lo presentado tiene relación con el desarrollo del docente respecto				x	

al contenido de cálculo de volumen.					
Relevancia respecto a la contribución del objeto matemático (el volumen). Lo presentado contribuye a la problemática del cálculo del volumen y contribuye a la mejora del tratamiento del concepto.				x	

Observaciones y Recomendaciones:

En la elaboración de la Rúbrica existe coherencia con el Marco Teórico y contribuyen con los Objetivos planteados en el trabajo de investigación. Además, esta relacionada con el Marco teórico.

Firma del Experto

____