

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**



**FACULTAD DE CIENCIA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN**

**ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE  
TENDENCIA CENTRAL A TRAVÉS DEL  
APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS  
CON USO DE TIC**

Autor: Rubén Darío González Aránguiz

Profesores guías: Eugenio Saavedra Gallardo – Carlos Vanegas Ortega

Trabajo de graduación presentado a la  
Facultad de Ciencia, en cumplimiento de  
los requisitos exigidos para optar al  
grado de Magíster en Educación  
Matemática

Santiago – Chile

2022



## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, dar gracias a mis padres que me acompañaron en este largo proceso de estudio e investigación, a pesar de todas las vicisitudes causadas por la pandemia. A pesar de todo eso, ellos estuvieron ahí para mí, y sin ellos, esta investigación no habría sido posible. A mi hermana, mis sobrinas y todos mis familiares quienes, de una forma u otra, me entregaron su apoyo y aliento en todo momento.

A mis profesores guías, Dr. Eugenio Saavedra Gallardo y Dr. Carlos Vanegas Ortega, entregándome sabios aportes y certeras sugerencias para perfeccionar y corregir mi tesis, pulirla y mejorarla hasta el final. A ambos, también, les dedico este trabajo.

A grandes amigos que, sin lugar a dudas, estuvieron apoyándome en las buenas y en las malas, entregándome su constante apoyo, sus palabras de cariño y su confianza plena en que esta investigación saldría adelante y culminaría con éxito. En particular, vayan mis gratitudes a Felipe, Mauricio, Cecilia, Nibaldo y Patricio, quienes me entregaron consejos y hermosas palabras que las atesoraré por siempre en mi memoria. En particular, a Jorge Astudillo, compañero de magíster y valioso amigo, con quien compartí horas de estudio, momentos muy buenos y ratos muy agradables, y momentos muy malos, en que, en más de una ocasión, me ayudó a que levantara mi mirada y continuara adelante, sin claudicar en los momentos importantes ni temer al futuro. También, a Sebastián Muñoz, compañero de postítulo, con quien compartí los deliciosos almuerzos del puerto de Valparaíso, como algunas ideas de cómo enseñar la estadística, y con quién también compartí gratos momentos y situaciones adversas, y sus palabras me ayudaron a volver a erguirme y continuar hasta la finalización de este magíster.

Por último, agradecer a Dios, a quien le pedí la fortaleza, la energía, el coraje y la sabiduría necesarias para ponerme, todos los días, de pie, a enfrentar a las adversidades propias que impone la vida, a los imponderables que emergen repentinamente, y que, sin él, no podría haber llegado hasta acá.

A todos y a cada uno de ustedes, muchísimas gracias. Les debo eterno reconocimiento.

## **DEDICATORIA**

Esta tesis va dirigida a mis queridos exalumnos del Colegio Real, a mis amadas exalumnas del Liceo Técnico Sara Blinder, a mis exalumnos del Colegio Miguel de Cervantes y a los exalumnos del Colegio Tomás Moro.

Mención especial para la directora, Srta. Carolina Cáceres, quién fue mi profesora de Ciencias Naturales cuando era estudiante, a y los alumnos del Liceo Juan Pablo Duarte que participaron de las actividades de esta investigación, y que fue, en este mismo, donde culminé mi etapa escolar básica. A todos ellos, les dedico esta tesis.

## ÍNDICE

Resumen.....	10
Introducción.....	11
1. Problemática.....	12
1.1. Aspectos generales de la problemática.....	12
1.2. Supuesto de Investigación.....	16
1.3. Pregunta de Investigación.....	16
1.4. Objetivo general.....	16
1.5. Objetivos específicos.....	16
2. Marco Teórico.....	17
2.1. Definición y aproximación histórica de la estadística.....	17
2.2. Desarrollo de las medidas de tendencia central.....	18
2.2.1. ¿Qué se entiende por medir?.....	18
2.2.2. Definición de las medidas de tendencia central.....	19
2.2.3. Propiedades de las medidas de tendencia central.....	20
2.2.3.1. Propiedades de la media aritmética.....	21
2.2.3.2. Propiedades de la mediana.....	21
2.2.3.3. Propiedades de la moda.....	22
2.3. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).....	23
2.3.1. Definición de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).....	23
2.3.2. Características del ABP.....	24
2.3.2.1. Habilidades que desarrollan los alumnos con el ABP.....	26
2.3.2.2. Habilidades del docente frente al ABP.....	27
2.3.3. Ventajas del ABP.....	27
2.3.4. Desventajas del ABP.....	29
2.4. Secuencia de pasos del ABP.....	29
2.5. Aprendizaje Basado en Problemas y Matemáticas.....	30

2.6.	Tecnologías de la información y comunicación (TIC) y ABP.....	31
2.7.	Tecnologías de la Información y Comunicación y Educación Estadística.....	32
2.8.	Importancia de la estadística en la enseñanza escolar.....	34
3.	Metodología.....	35
3.1.	Metodología de la Investigación.....	35
3.2.	Participantes de la Investigación.....	35
3.3.	Diseño metodológico.....	37
3.4.	Validación de los instrumentos.....	39
3.4.1.	Validación por juicio de expertos.....	39
3.4.2.	Validación por pilotaje.....	39
3.5.	Obtención de resultados.....	41
4.	Resultados y conclusiones de las actividades.....	45
4.1.	Análisis de las respuestas del Pre – test.....	45
4.1.1.	Conclusiones del Pre – test.....	52
4.2.	Análisis de las respuestas de la fase de exploración.....	53
4.2.1.	Conclusiones de la fase de exploración.....	56
4.3.	Análisis de las respuestas de la fase de introducción.....	57
4.3.1.	Conclusiones de la fase de introducción.....	59
4.4.	Análisis de las respuestas de la fase de estructuración.....	61
4.4.1.	Conclusiones de la fase de estructuración.....	62
4.5.	Análisis de las respuestas del Post – test.....	64
4.5.1.	Conclusiones del Post – Test.....	69
5.	Conclusiones de la Investigación.....	70
5.1.	El rol del ABP.....	70
5.2.	El rol de las TIC.....	70
5.3.	Objetivos trabajados y sus resultados.....	71
5.4.	Sobre la pregunta de investigación.....	73

5.5. Contraste del supuesto de investigación con los resultados.....	74
5.6. Conclusiones generales.....	74
5.7. Limitaciones y recomendaciones.....	75
5.7.1. Limitaciones generales y recomendaciones.....	75
5.7.2. Limitaciones metodológicas y recomendaciones.....	76
6. Bibliografía.....	78
7. Anexos.....	83
Pre – Test.....	83
Planificación docente.....	86
Actividad de Aplicación.....	114
Post – Test.....	123
Post- test aplicado en la secuencia.....	126
Cartas de Consentimiento.....	128
Pauta de Validación de los Instrumentos.....	136

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplos de preguntas planteadas en la prueba TIMSS a estudiantes chilenos.....	13
Figura 2. Mapa de la ciudad de Soho.....	17
Figura 3. Respuestas de una alumna en la fase de introducción (actividad de pilotaje).	39
Figura 4. Respuestas de un alumno en la fase de exploración (actividad de pilotaje).	40
Figura 5. Respuesta dada por un estudiante para el concepto de moda que participó de manera virtual (pre – test).....	41
Figura 6. Respuesta dada por un alumno a la pregunta (d.5) de la fase de exploración que participó de forma presencial.....	41
Figura 7. Respuesta dada por un educando a la pregunta (d.5) de la fase de exploración que participó de forma remota.....	41
Figura 8. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera virtual en el post – test.....	42
Figura 9. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera presencial del post – test.....	42
Figura 10. Definición de la mediana entregada por un alumno que participó de manera online.....	44
Figura 11. Respuestas de los alumnos que asocian la moda (medida de tendencia central) a la vestimenta de las personas.....	44
Figura 12. Definición de moda dada por un alumno que participó de manera remota.....	45
Figura 13. Respuesta formal de un alumno de dato atípico.....	45
Figura 14. Errores cometidos por dos alumnos al calcular el promedio de vuelos durante la semana.....	47
Figura 15. Respuesta de un alumno argumentando de por qué la moda no podría ser un bien representante.....	49
Figura 16. Tipos de respuestas dadas por dos alumnos que participaron de forma presencial y virtual, respectivamente.....	54
Figura 17. Argumentos que entrega un estudiante que participa de forma remota a la pregunta planteada.....	55
Figura 18. Respuesta dada por un estudiante que participa de forma remota.....	56

Figura 19. Respuesta dada por una estudiante al comparar los dos promedios de notas y su respectiva argumentación.....	57
Figura 20. Conclusiones dadas por dos alumnos sobre cómo varía el promedio ante un cambio en las calificaciones.....	57
Figura 21. Respuestas dadas por dos alumnos a la pregunta que participaron de manera presencial y virtual, respectivamente.....	60
Figura 22. Dos tipos de respuestas entregados por los alumnos que participaron bajo la modalidad virtual.....	62
Figura 23. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera virtual.....	63
Figura 24. Argumentos que da un estudiante ante la pregunta de por qué la media aritmética varió.....	64
Figura 25. Respuesta dada por una alumna ante la pregunta planteada.....	64
Figura 26. Dos respuestas entregadas por dos alumnos ante la pregunta de cómo podría interpretar el promedio de lápices por niño.....	65

## RESUMEN

La estadística se ha transformado en uno de los contenidos que, durante el último tiempo, ha adquirido una notoriedad fundamental en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, así como de la sociedad en su conjunto. Sin embargo, la enseñanza de los temas correspondientes a esta área no ha progresado como en otros pilares de la enseñanza escolar, como la geometría o el álgebra. La enseñanza que perdura en las escuelas sigue siendo la de tipo expositiva, en donde el docente es el transmisor de conocimientos, mientras que los alumnos son los receptores del mismo, haciendo que los resultados en evaluaciones tanto escolares, a nivel nacional e internacional, sean deficientes.

Se plantea, como objetivo principal de esta investigación, "caracterizar los aprendizajes de los estudiantes de 7° básico en los contenidos de estadística, en particular, de las medidas de tendencia central, a partir del aprendizaje basado en problemas, usando programas computacionales para el análisis de datos". Este fue llevado a cabo con estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, Región Metropolitana de Chile, para identificar sus ventajas; comparar las respuestas otorgadas por los alumnos de 7° básico del significado de la media aritmética, moda y mediana mediante la implementación del ABP antes y después de la intervención con uso de TIC, y cualificar las respuestas dadas por los alumnos respecto de la comprensión de las medidas de tendencia central que recibieron clases por medio del ABP. Para ello, se realiza una intervención a los estudiantes, por medio del Ciclo de Aprendizaje Constructivista de Jorba y Sanmartí, consistente en 4 fases: exploración, introducción, estructuración y aplicación. A su vez, se hace uso de un *software* estadístico para la enseñanza de las medidas de tendencia central, de forma tal que los educandos puedan manipular los datos entregados en las actividades propuestas.

Esta investigación, de tipo cualitativa, de alcance descriptivo, lo cual se considera una metodología donde su propósito es especificar propiedades y características importantes de cualquier fenómeno que se analice. "Únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren" (Hernández *et al.* 2014, p. 92).

Ahora bien, los instrumentos utilizados en la producción de datos corresponden a Pre test y Post test, junto a una serie de actividades diseñadas según la secuencia del Ciclo de Aprendizaje Constructivista, aplicado a un grupo cuasiexperimental conformado por 30 alumnos que participaron de forma híbrida, es decir, debido al contexto de pandemia que afectó al normal desarrollo de las clases, se estableció un protocolo de enseñanza basado en que, una parte del grupo estaba presencialmente en aula, mientras que la otra parte, se conectaba de forma virtual, desde sus hogares.

Se espera aportar, con esta tesis, una nueva estrategia de enseñanza que permita al docente reflexionar, tanto sobre su práctica y ejercicio en aula, como también en la búsqueda de alternativas innovadoras que le permitan acercar la estadística a sus estudiantes, hacerlos reflexionar sobre los beneficios que tiene en su aprendizaje y apreciar potencial que tiene los recursos TIC en la sala de clases.

**Palabras clave:** Aprendizaje Basado en Problemas (ABP); Tecnologías de Información y Comunicación (TIC); Medidas de Tendencia Central; Ciclo de Aprendizaje Constructivista (CAC).

## INTRODUCCIÓN

En un mundo globalizado como el de ahora, la información que llega a través de los diferentes medios de comunicación es abrumadora. Desde los principales índices económicos, nacionales e internacionales, como los datos de personas vacunadas para prevenir el COVID – 19, el número de ventas realizadas por una empresa, o cualquier otra información relevante que incida en la sociedad, será resumida a través de gráficos, tablas, números en contexto, que permitan hacer más inteligible esta ingente cantidad de información. Los datos analizados muestran tendencias, posibles factores que responden a fenómenos físicos o sociales, que permiten predecir, con un porcentaje considerable de certeza, lo que sucederá en el futuro y compararlo con el presente. Todo este tipo de análisis lo permite realizar la Estadística.

La humanidad en su conjunto necesita saber qué le depara el día de mañana, necesita tomar decisiones certeras que le permitan progresar para su bienestar y beneficio. Esta es una de las razones que hacen de la Estadística una ciencia fundamental para el progreso humano. Sin embargo, este progreso no se condice con su enseñanza.

Durante el último tiempo, a nivel nacional, los estudiantes chilenos han presentado un nivel bajo en las pruebas estandarizadas a nivel internacional, como TIMSS o PISA, haciendo preocupante los aprendizajes adquiridos por los alumnos en este tema, como también en las pruebas estandarizadas nacionales como SIMCE o PDT (antes llamada PSU: Prueba de Selección Universitaria).

Muchas veces, el contenido de Estadística en la escuela se deja para el final del año académico, lo cual hace que, o no se vea en su totalidad, o sencillamente, este contenido se omita. Los profesores y educandos la encuentran rutinaria y monótona, logrando así una resistencia hacia su aprendizaje, excluyendo la reflexión crítica de la información, la investigación que pueden realizar los propios alumnos con temas importantes que les interesen, la adquisición y desarrollo de habilidades comunicativas y sociales que demanda la humanidad en el siglo XXI.

Actualmente, la enseñanza de la Estadística se centra en los cálculos de ejercicios propuestos y repetitivos que, si bien, permiten hacer más comprensible los contenidos, también son muy limitados en cuanto a su análisis; por citar un ejemplo, el cálculo de promedio se realiza a través de las calificaciones obtenidas por un estudiante, lo que hace que sea un ejemplo cercano a los escolares, sin embargo, no hay un proceso de reflexivo de lo que nos indica este valor. ¿Qué ocurre si se cambia una nota alta, por una más baja? Si representamos las notas en una recta, ¿dónde se ubicaría el promedio? ¿Qué propiedades posee la media aritmética? ¿En qué otras situaciones se podría utilizar esta medida? Si se tiene un grupo de operarios, junto con el dueño de la empresa, y se desea saber el sueldo promedio de este conjunto, ¿puede ser la media un buen representante? ¿Qué otras medidas podríamos ocupar que sean más fidedignas en la información que entregan? Este tipo de interrogantes quedan fuera de las salas de clases, excluyendo el pensamiento y la observación en situaciones más complejas y que suelen suceder en la realidad.

Como tal, la sociedad actual pide a la educación realizar un cambio en la forma de hacer Estadística, que los alumnos sean actores principales, que asuman el rol de investigadores en los temas que les interesen, o que la sociedad demanda en el día de hoy, así como los profesores sean consejeros en los momentos de duda o confusión que puedan tener los estudiantes en el momento de iniciar su investigación. Esto hará de la Estadística, una ciencia que, no sólo, recolecte datos y los organice para su comprensión; hará que los educandos sean personas participativas de los constantes cambios a los cuales nos vemos enfrentados en la actualidad, actuando con criterio y tomando decisiones con base en un análisis propio de la información que les llega.

## 1. PROBLEMÁTICA

### 1.1 Antecedentes generales de la problemática

El estudio de la matemática ha sido un pilar fundamental en el desarrollo de la humanidad. Tanto es así que, a partir de sus importantes progresos, el conocimiento científico ha podido avanzar, junto con las demás áreas del saber. Sin embargo, esto no parece ir de la mano con la educación, pues se ha visto que aún la forma de enseñanza se centra, mayoritariamente, en la presentación de guías con ejercicios, que se alejan de la realidad de los alumnos, y que poco desarrollan el razonamiento crítico. Al respecto, Araya (2004, p. 75) afirma:

Prácticamente ninguno de nuestros estudiantes se queda con la idea de que la matemática es el lenguaje para describir los fenómenos de este mundo, ni para crear juegos/metáforas que lo representen. A lo más se imaginan que podría servir para describir fenómenos físicos y químicos. Esta situación explicaría por qué prácticamente nadie considera que la matemática le será relevante en su vida diaria, y sólo la vea como una serie de ejercicios de gimnasia mental.

La apreciación anterior también se puede llevar hacia la estadística. Esto se debe a que "la Educación Estadística en Chile –América Latina en general y parte del Caribe– es deficiente, comprobando esto en la pobre percepción que las personas tienen de la disciplina Estadística referente a qué es y qué hace" (Alvarado, 2017, p. 5). A esto se suma lo que dicen Juárez e Inzunza (2014, p. 15): "la estadística es vista por muchos estudiantes y profesores como una materia repleta de fórmulas y procedimientos laboriosos que hay que memorizar para resolver un problema". Esto se ve complementado con lo que dicen Díaz, Aguayo y Cortés (2014, p. 17), quienes señalan siete puntos correspondientes a las críticas surgidas hacia la enseñanza tradicional de la estadística; éstas son:

- 1) La existencia de una actitud negativa hacia su estudio, ya que es considerada como contenido (o curso, en el caso de la educación superior) monótono y aburrido.
- 2) Los contenidos no se enseñan con la profundidad necesaria y, en el mejor de los casos, se enseña desde lo formal, con pocos ejemplos de aplicaciones reales.
- 3) La ausencia de trabajo con datos reales y aspectos de razonamiento estadístico.
- 4) Falta de preparación de los profesores, de primaria y secundaria, en el área de estadística.
- 5) Se programa su enseñanza en los últimos meses del año académico sin darle la importancia debida y, a veces, sin llegar a ser trabajada.
- 6) Se estudia en carreras universitarias, sin embargo, no se entrega las herramientas necesarias para que en un futuro la utilicen en su quehacer profesional.
- 7) Los estudiantes, como en todos los niveles educacionales, son muy diferentes tanto en sus conocimientos como en sus estilos de aprendizaje, situación que es difícil de afrontar en los procesos formativos.

En particular, existe suficiente evidencia sustentada en investigaciones que se focalizan en reiterar sobre las dificultades que poseen los educandos cuando se ven enfrentados a problemas en los que tienen que ocupar las medidas de tendencia central. Algunas investigaciones muestran los obstáculos que presentan los estudiantes, por ejemplo, Pollatsek *et al* (1981, citado por Batanero, Godino y Navas, 1997, p. 1), "sugiere que un porcentaje importante de estudiantes universitarios calculan incorrectamente la media ponderada y la media simple a partir de una tabla de frecuencias". Asimismo, Mevarech (1983, citado por Batanero, Godino y Navas, 1997, p. 1), encontró que estudiantes universitarios le atribuían propiedades inexistentes a la operación de hallar la media aritmética, como la asociatividad, existencia de elemento neutro y elemento inverso. A su vez, Cai (1995, citado en Gatica, 2017, p. 6) descubrió que:

los estudiantes de 13 a 14 años presentan dificultades con la inversión del algoritmo de la media, esto es sólo algunos pueden determinar un valor desconocido en un conjunto de datos conocida su media y que, por el contrario, sí pueden aplicarlo adecuadamente de manera directa.

Coba, Del Pino y Wistuba (2010, citado por Alvarado, 2017, p. 5) plantean que

considerar la media aritmética desde la expresión que permite su cálculo, es decir, como la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos sumados, no permite que se reflexione correctamente ante la media aritmética y que se le considere como un representante de un conjunto de datos.

Otra de las dificultades que presentan los estudiantes en las medidas de tendencia central son las que menciona en su estudio Carvalho (1998, citado por Batanero, 2001, p. 84), cuando se les pide calcular las medidas de tendencia central:

- Moda: tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable
- Mediana: no ordenar los datos, para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente.
- Media: hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

Ahora bien, a nivel nacional, una manera de visualizar esta misma problemática es a través de las pruebas internacionales como PISA que, en el año 2018, se aplicó en Chile. En la figura 1, se puede ver algunos resultados de la prueba PISA que, en las competencias matemáticas, muestra que Chile superó por 30 puntos al promedio de los países latinoamericanos, pero dista mucho del promedio mundial en el mismo contenido (102 puntos)<sup>1</sup>. Respecto a TIMSS, en el año 2019 se entregaron los resultados que rindieron los estudiantes chilenos, y se vio que el rendimiento en los alumnos de 8° básico, en el área de datos y azar fue de 434 puntos, 7 puntos más abajo que el promedio a nivel internacional (441 puntos)<sup>2</sup>. De acuerdo con la Agencia de Calidad de la Educación, esta cifra no se diferencia significativamente del rendimiento general en Matemática. Esto puede parecer contraproducente, pues en el área geometría, se obtuvieron los mismos resultados, pero, de acuerdo a la información entregada, se menciona que es significativamente más bajo este resultado. A modo de ejemplo, la figura 1 (página siguiente) ilustra un tipo de pregunta que se aplicó en la prueba TIMSS.

Por otro lado, con relación al uso de TIC en la enseñanza escolar, los profesores se han encontrado con aulas tecnologizadas para las cuales no han sido preparados. En esta situación crítica, los profesores de Educación Media están adaptándose tímidamente a la tecnología. "Este proceso incipiente ha obligado a remirar los procesos de formación docente, las capacidades de uso de las Tics de los docentes y el lugar que ocupan las tecnologías en el currículum de las escuelas" explica Fabián Retamal, coordinador del Programa de Acceso y Acompañamiento a la Educación Superior (PACE) (Mundaca R., 2020, recuperado de <https://www.uchile.cl/noticias/164931/brecha-digital-y-educacion-online-la-pandemia-no-es-igual-para-todos>).

Es importante señalar los aspectos positivos que poseen las TIC en la enseñanza; en palabras de Gutiérrez *et al* (2019, p. 3) dan una gama de posibilidades que ofrece el trabajo con TIC:

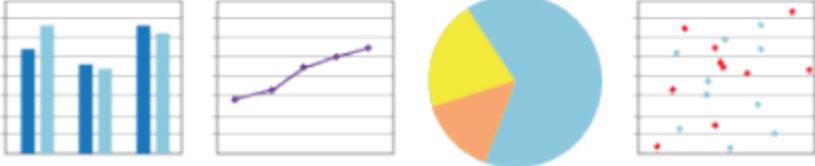
---

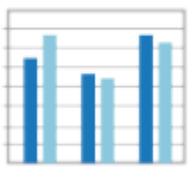
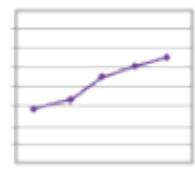
<sup>1</sup> [https://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA\\_2018-Entrega\\_de\\_Resultados\\_Chile.pdf](https://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf)

<sup>2</sup> [https://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados\\_TIMSS\\_2019\\_version\\_extendida\\_final.pdf](https://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS_2019_version_extendida_final.pdf)

**Dominio de contenido:** Datos y probabilidad  
**Dominio cognitivo:** Aplicación  
**Descripción:** Identificar un gráfico apropiado para tres tipos diferentes de información

Luis quiere hacer tres gráficos para mostrar información de su pueblo. Los títulos de sus gráficos se muestran en la tabla siguiente.  
 ¿Qué tipo de gráfico es mejor para cada uno?  
 Arrastra un tipo de gráfico a cada título.



<b>Job types of Workers in Town</b>	<b>The Number of Girls and Boys Born Each Year</b>	<b>Town Population Over Time</b>
		

Se muestra un ejemplo de respuesta que recibiría el puntaje completo a la pregunta (1 punto).

**Figura 1. Ejemplos de preguntas planteadas en la prueba TIMSS a estudiantes chilenos (Mineduc, 2020, p. 59)**

- Amplían la oferta educativa.
- Permiten la creación de entornos más flexibles para el aprendizaje.
- Eliminan las barreras espacio – temporales entre el profesor y los estudiantes.
- Potencian los escenarios y entornos interactivos.
- Favorecen tanto el aprendizaje autónomo, como el cooperativo y el grupal
- Facilitan la formación permanente.
- Favorecen los procesos de interactivos entre estudiante – estudiante, estudiante – profesor y entre los mismos docentes.
- Permiten la posibilidad de acceso a una amplia gama de recursos para el aprendizaje.

Sin embargo, se debe ser cauteloso con la incorporación de estas herramientas en las aulas. “La introducción de recursos tecnológicos en las Instituciones Educativas responde más a intereses económicos que a una intencionalidad renovadora del proceso de enseñanza y aprendizaje” (Faustino, 2012, citado por Faustino y Pérez, 2013, p. 9). Incluso cuando las TIC se tratan de un aparato poderoso, para los docentes pueden transformarse en un agente obstructivo. El profesorado ha enfrentado problemas para incorporar TIC en su práctica. “Estos problemas se ven reflejados en una articulación inadecuada de estas tecnologías con las disciplinas que imparte, pobre

contextualización, y en el mejor de los casos, un aprovechamiento insuficiente de su potencial” (Hernández y Cuevas, 2013, p. 166). Asimismo, “un elevado número de los docentes encuestados refiere que los principales motivos por los cuales los profesionales no utilizan los ordenadores se basa en la falta de preparación tecnológica de la que disponen” (Faustino y Pérez, 2013, p. 6).

En particular, ¿qué ocurre con la enseñanza de la estadística con uso de TIC? Si bien es cierto que hay diversos *softwares* estadísticos, entre los que se pueden nombrar *SPSS*, *R*, *Excel*, *OpenStat*, *ezANOVA*, entre otros, muchos de estos programas computacionales van dirigidos a estudiantes universitarios de áreas como la economía, la estadística, matemáticas; además, algunos de ellos utilizan el lenguaje de programación, lo cual los hace más complejos en su manipulación, exceptuando *Excel*. A su vez, ninguno de los *software* nombrados va dirigido a escolares, y la existencia de programas computacionales de este tipo son escasos para la enseñanza de la estadística. “La mayor parte del software existente, está orientado al procesamiento de datos y no está pensado con fines pedagógicos” (Gutiérrez y Ojeda, 2016, p. 23). Esto repercute en que el aprendizaje de la estadística sea más tediosa y compleja para los estudiantes, dejando de lado aspectos como la manipulación de los datos y cómo influyen éstos cuando se modifican.

Dado esto, surge la pregunta: ¿qué propone el Mineduc al respecto? Puede leerse en el plan y programa de 7° básico “usar programas informáticos específicos para aprender y complementar los conceptos aprendidos en las diferentes asignaturas” y “usar procesadores de texto, aplicaciones informáticas de presentación y planillas de cálculo para organizar, crear y presentar información, gráficos o modelos” (Mineduc, 2016, p. 18). Lo que propone el Ministerio sigue siendo ambiguo y no ha tenido eco en la clase de estadística, más aún que hoy se conocen una amplia gama de programas informáticos dirigidos hacia la enseñanza escolar, y que pueden impactar en los aprendizajes en los educandos. A modo de ejemplo: *Fathom*, *Tinkerplots*, *Geogebra*, por mencionar algunos.

Luego, ¿cómo implementar la tecnología en las aulas para la enseñanza de la estadística? Al respecto, se debe tener presente lo que dicen Gutiérrez y Ojeda (2016, p. 22): “la tecnología puede ser muy útil si se toman en consideración los contextos y las teorías pedagógicas que subyacen al aprendizaje de la Estadística y que permiten predecir los impactos de las acciones tecnológicas”. Sin embargo, la forma de enseñar también influye en la comprensión de los contenidos. Mucho se ha criticado a la manera expositiva de enseñanza, en la que los estudiantes son meros receptores del contenido, pero hay que tener cautela. No porque se use la tecnología en el aula se estará asegurando mejores procesos de enseñanza y satisfactorios aprendizajes por parte de los estudiantes. Al respecto, señalan Gutiérrez y Ojeda (2016, p. 22):

En algunos casos se pretende sobre simplificar la problemática de los procesos de enseñanza – Aprendizaje, arguyendo que como los métodos expositivos han demostrado su ineficiencia, entonces, hay que recurrir a la tecnología como una alternativa potencialmente mejor. Esta es una falsa dicotomía, pues el éxito de los métodos expositivos depende de muchos factores, entre ellos, las características del profesor y del estudiante y las condiciones en las cuales tiene lugar el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Es por ello que la enseñanza de la estadística a través de datos reales y contextualizados puede ser una potente alternativa de hacer ver que ésta, además de ser utilitaria, responde a situaciones de interés personal y ciudadano. Como lo expresan Batanero y Díaz (2004, p. 9): “en particular, no hay nada que haga más odiosa la estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados”.

Con base en estos antecedentes, este proyecto de graduación busca aportar a dicha problemática mediante la construcción, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica que, mediante el aprendizaje basado en problemas contextuales y la incorporación de las TIC, busca mejorar la comprensión de las medidas de tendencia central en los escolares de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia.

## **1.2 Pregunta de investigación**

¿Cómo el Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC, contribuye a los aprendizajes de los conceptos de las medidas de tendencia central en estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia?

## **1.3 Objetivo general**

Caracterizar los aprendizajes de los estudiantes de 7° básico en los contenidos de estadística, en particular, de las medidas de tendencia central, a partir del aprendizaje basado en problemas, usando programas computacionales para el análisis de datos.

## **1.4 Objetivos específicos**

- Identificar el nivel de logro de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando resuelven problemas que implican comprender las medidas de tendencia central.
- Describir los aciertos y dificultades de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando experimentan un proceso de enseñanza de las medidas de tendencia central a través del Aprendizaje Basado en Problemas y el uso de TIC.
- Evaluar el nivel de logro de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando resuelven problemas que implican comprender las medidas de tendencia central, luego de haber vivido un proceso de enseñanza basado en el Aprendizaje Basado en Problemas y el uso de TIC.

## **1.5 Supuesto de investigación**

El Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC contribuyen a mejorar los aprendizajes de los conceptos de las medidas de tendencia central de los estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Definición y aproximación histórica de la estadística

Aún no hay un consenso sobre de lo que es la estadística. Al respecto, se pueden mencionar las siguientes definiciones: "la estadística es una rama de las matemáticas que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades" (RAE), o es una ciencia que transforma, mediante métodos matemáticos, datos en información para la toma de decisiones (Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, INE). Por su parte, Barreto Villanueva (2012, p. 4), define la estadística como "la ciencia cuyo objetivo es reunir información cuantitativa concerniente a individuos, grupos, series de hechos, etc., para deducir de ello, gracias al análisis de estos datos, significados precisos o previsiones para el futuro". Del Callejo, Canal y Hákim (2020, p. 196) mencionan que la estadística "es la disciplina que permite recolectar, clasificar, analizar e interpretar información cuantitativa para atender problemáticas en diferentes contextos y situaciones y de forma crítica y autónoma". Para complementar esto último, Zapata y González (2017, p. 64) mencionan que la estadística "es una ciencia de naturaleza inductiva en la cual las conclusiones surgen de acuerdo con la probabilidad de los argumentos, y a partir de la observación repetida de objetos o eventos de la misma índole". Para efectos de esta investigación, la Estadística es la ciencia que, *usando herramientas matemáticas*, recoge y ordena los datos que, posteriormente, nos entregarán información sobre un estudio o investigación que hemos realizado.

Por otra parte, los inicios de la Estadística son remotos y datan de hace siglos. Al respecto, Batanero (2001, p. 9) menciona "que los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C), sumeria y egipcia". Los censos propiamente dichos eran ya una institución en el siglo IV a. C. en el imperio romano. A su vez, agrega que "los astrónomos de Babilonia resolvieron problemas calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos, práctica que se ha conservado hasta nuestros días, dando origen a lo que conocemos por media aritmética". Así, este concepto evolucionó primero como útil implícito en la solución de problemas prácticos, más tarde como objeto de estudio en sí mismo. A lo anterior se suma lo mencionado por Bakker (2003, p. 7) que señala que

la media aritmética no era el único valor medio conocido por los griegos. En la época de Pitágoras, alrededor del 500 a. C., se conocían tres valores medios, a saber, la media armónica, geométrica y aritmética. La teoría de los tres valores medios mencionados se desarrolló con referencia a la teoría musical, la geometría y la aritmética.

Posteriormente, "para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno" (Batanero, 2001, p. 10).

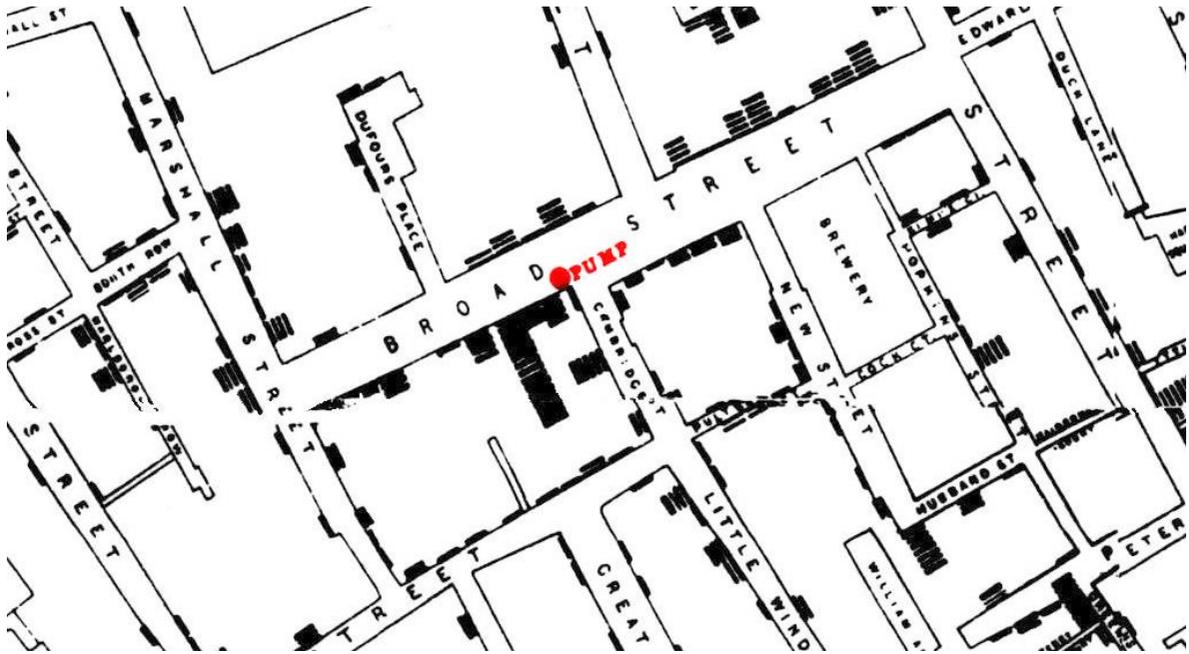
Al respecto, Kline (2012, p. 556) menciona

la idea de que la estadística podía servir como método para abordar los principales problemas sociales se le ocurrió al inglés John Graunt (1620 – 1674), acaudalado propietario de una tienda de artículos para caballeros. En 1662 Graunt publicó su libro *Observaciones naturales y políticas... basadas en los registros de mortalidad*, del que podría decirse que inició el viraje de las ciencias sociales hacia el método científico y que ciertamente promovió la fundación de la ciencia de la estadística.

Uno de los casos más importantes de señalar en el trabajo de la estadística en un caso notable en conjunto con la medicina: John Snow fue un epidemiólogo británico que llegó a la ciudad del Soho, en 1854, en que, a través de sus observaciones de campo y una

serie de encuestas realizadas a la población que vivía en ese lugar, se pudo erradicar la epidemia de cólera que azotó dicha ciudad. En la figura N°1, se muestra el mapa que confeccionó Snow para su estudio.

Al señalar cada víctima con una marca individualizada – las barras paralelas –, asignar el mismo peso visual a cada una de ellas y situadas, vivienda a vivienda, sobre un mapa convencional, se hace evidente de un único vistazo el componente geográfico de la epidemia. Resulta obvio que la mayor parte de las muertes se acumulan alrededor de la fuente (“*pump*”) de la calle Broad, en el centro del mapa (Grima, 2010, p. 14).



**Figura 2. Mapa de la ciudad de Soho**

**Extraído de *El mapa del cólera de John Snow*. (Castro, A., 2019, recuperado de <https://culturacientifica.com/2019/04/11/el-mapa-del-colera-de-john-snow/>) .**

Sin embargo, dentro de este marco histórico no hay referencias de las medidas de tendencia central, salvo de la media aritmética. No es hasta la aparición de Francis Galton que consolidó el término mediana; su desarrollo surge a partir de diversas investigaciones donde se hace notable la aplicación de este concepto, ya sea a para analizar datos o para determinar un valor representativo de algún problema en particular.

Para introducir el concepto de Mediana, Galton le asigna a esta característica fundamental de ser un valor central, dándole la importancia dentro de la distribución y desde la cual se toma como referente con respecto al análisis que se esté realizando, en el que los datos varían ya sea que estos se encuentren por encima o por debajo de este estadístico.

Galton (1899) también resalta la importancia del estudio de las propiedades de la mediana, plantea que para lograr comprenderla e interpretarla, puede ser contemplada desde diversos puntos de vista: como el resultado de un cálculo (el valor obtenido en el cálculo de la mediana), como operador que una distribución asigna un número y como un resumen estadístico o parámetro que caracteriza una distribución (Fuentes, 2017, pp. 11 - 12).

## 2.2 Desarrollo de las medidas de tendencia central

### 2.2.1 ¿Qué se entiende por medir?

El acto de contar y el acto de medir están indisolublemente unidos y son acciones que se remontan desde hace siglos. Por ejemplo, Baldor (1983, p. 438) plantea:

Contar y medir son las primeras actividades matemáticas del hombre. Los primitivos para medir el largo de una cosa cualquiera, utilizaban medidas basadas en el cuerpo humano. Los egipcios, quienes llegaron a poseer un sistema de medidas bastante aceptable, emplearon las proporciones del cuerpo humano para establecer las primeras unidades de medida.

Ahora bien, para comprender mejor qué significan las medidas de tendencia central, se debe mencionar la definición de lo que es medir.

Al respecto, un diccionario entrega la siguiente definición: "estimar o evaluar una cantidad según su relación a otra cantidad de la misma especie tomada como unidad y como término de comparación" (Sopena, 1982, p. 2696). Una definición similar entrega el diccionario de la Real Academia de la Lengua<sup>3</sup>: comparar una cantidad con su respectiva cantidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera. Tapia *et al* (2003, p. 403) entienden que "medida es el proceso que realiza el hombre al asignar números a objetos, fenómenos o características, según ciertas reglas de cuantificación. Se asocia un número y sólo uno (correspondencia biunívoca) al objeto o fenómeno que se quiere medir". Complementario a esto, Guevara y Puig (2011, p. 19) agregan que "medir es una actividad universalmente significativa para el desarrollo de las matemáticas, y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar". Al respecto, Mercado (1993, p. 23) menciona que "medir una magnitud es compararla con otra magnitud de la misma especie que se elige como unidad de medida". Para efectos de esta investigación, se seguirá la definición dada por Guevara y Puig.

### 2.2.2. Definición de las medidas de tendencia central

"Una medida de tendencia central es un número (estadígrafo), que se considera representativo de todos los números en un conjunto de datos" (Tapia Rojas *et al*, 2003, p. 416). También se puede decir que "son los valores alrededor de los cuales se agrupan los datos" (Batanero y Díaz, 2008, p. 53). Es común decir que el promedio, la mediana y la moda son las medidas de tendencia central pues "son usadas para describir el "centro" o "localización central" de un conjunto de datos" (Saavedra, 2020, p. 82). Canavos (1995, p. 12) agrega que "la *tendencia central* de un conjunto de datos es la disposición que de éstos para agruparse ya sea alrededor de un centro o de ciertos valores numéricos".

Cada una de estas medidas interpreta la idea de "centro" en diferentes maneras y, la elección de una apropiada medida para cualquier conjunto de datos, dependerá de al menos dos factores:

- Los aspectos de la "localización central" que pretenden capturarse
- El tipo de datos de que se disponga, es decir, si los datos son nominales, ordinales o numéricos (Saavedra, 2020, p. 82).

A continuación, se describirán cada medida de tendencia central:

---

<sup>3</sup> <https://dle.rae.es/medir>

- Promedio: También se le conoce con el nombre de media aritmética o, simplemente, media. "Corresponde a un punto de equilibrio donde los valores mayores balancean a los menores" (Lacourly, 2011, p. 44). "Se dice que es el centro físico de los datos" (Lacourly, 2011, p. 44). Dado un grupo de datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , entonces, el promedio está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

La media es una medida apropiada de tendencia central para muchos conjuntos de datos. Sin embargo, dado que cualquier observación en el conjunto se emplea para su cálculo, el valor de la media puede afectarse de manera desproporcionada por la existencia de algunos valores extremos (Canavos, 1995, p. 12).

- Mediana: la mediana es una medida de tendencia central que se obtiene al ordenar los datos de forma creciente (de menor a mayor) o decreciente (de mayor a menor), y nos indica que, al menos, un 50% de los datos son mayores o iguales a la mediana, mientras que, al menos, un 50% de los datos son menores o iguales al valor de la mediana. Ahora bien, sea  $n$  la cantidad de datos, si  $n$  es impar, el valor de la mediana será el dato ubicado en la posición  $\frac{n+1}{2}$ , mientras que si  $n$  es par, el valor de la mediana será el promedio de los datos que están ubicados en las posiciones  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$ .
- Moda: "dado un conjunto de observaciones, es el valor de la observación que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto" (Canavos, 1995, p. 12).

Ahora bien, se debe tener presente cuándo se puede calcular cada medida de tendencia central. Para ello, se darán a conocer la acepción del concepto de variable y sus tipos. Saavedra (2020, p. 32) menciona que "al definir informalmente una variable podemos decir que ella es valor o cualidad que puede variar de persona a persona, de ítem a ítem, o de momento a momento".

Por otro lado, las variables pueden ser clasificadas como:

- Variables cuantitativas: los datos numéricos (también llamados métricos) son usados para medir su valor (Saavedra, 2020, p. 38).
- Variables cualitativas: son aquellas que se expresan por medio del nombre del atributo en estudio, por ejemplo, el sexo, color de ojos, profesión (Tapia Rojas *et al*, 2003, p. 402).

A su vez, las variables cuantitativas pueden clasificarse en:

- Discretas: "sólo se miden por medio de números enteros, no admiten fracciones" (Tapia Rojas *et al*, 2003, p. 402). Complementario a lo anterior, Saavedra (2020 p. 39) menciona que "una variable cuantitativa es discreta si el número de posibles valores que asume es un conjunto contable (es decir, es finito o numerable)". "Por ejemplo: número de hermanos, páginas de un libro, CD de música, etc." (Tapia Rojas *et al*, 2003).
- Continua: "pueden tomar cualquier valor intermedio entre dos números enteros, es decir, admiten fracciones" (Tapia Rojas *et al*, 2003, p. 402). También, diremos que una "variable cuantitativa es continua si el conjunto de posibles valores que asume es un conjunto no contable" (Saavedra, 2020, p. 39).

Por su parte, las variables cualitativas pueden ser clasificadas en:

- Nominales: "una variable se dice cualitativa nominal si *datos nominales* son usados para medir su valor". Por ejemplo, sexo (hombre/mujer) o estado civil (casado/soltero) (Tapia *et al*, 2003, p. 403).
- Ordinal: una variable se dice cuantitativa ordinal si *datos ordinales* son usados para medir su valor (Saavedra, 2020, p. 33 - 34). A modo de ejemplo, se puede señalar si la apreciación de un servicio telefónico es mala, regular, buena o muy buena.

### 2.2.3. Propiedades de las medidas de tendencia central

En este acápite se darán a conocer las propiedades más importantes del promedio, de la mediana y la moda.

#### 2.2.3.1 Propiedades de la media aritmética

- El cálculo de la media involucra todos los valores de la muestra, es decir, usa toda la información disponible, lo cual no se da en el caso de la moda ni en el de la mediana.
- La media, generalmente, no es igual a alguno de los valores que componen la muestra.
- La media no puede ser determinada gráficamente, como el caso de la mediana (Saavedra, 2020, p. 104).
- El concepto de *reparto equitativo* sugiere la manera de obtener el valor de la media: "juntamos" (sumamos) los valores de las observaciones como si fueran unidades, y las repartimos equitativamente (dividimos) entre todas ellas.
- La media de un conjunto de datos puede no ser un valor admisible de la variable de interés, situación que dificulta su interpretación a través del concepto de reparto equitativo.
- *La media es sensible a valores extremos*: si en el conjunto de datos existe un valor mucho más grande que el grueso de las observaciones, la media crecerá de tal forma que puede no resultar un buen representante del conjunto de ellas. Lo mismo ocurre con un valor mucho más pequeño que el grueso de las observaciones. Es por esto se dice que los valores extremos "atraen a la media" hacia sí mismos (Araneda, Chandía y Sorto, 2013, p. 166).
- La media aritmética es el centro de gravedad de la distribución de la variable, es decir, la suma de las desviaciones de los valores con respecto a ella es igual a cero, o sea

$$\sum (x_i - \bar{x}) f_i = 0$$

(Batanero y Díaz, 2008, p. 55).

#### 2.2.3.2 Propiedades de la mediana

- No se ve afectada por valores extremos de las observaciones. La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior, puesto que sólo se tienen en cuenta los valores centrales de la variable. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos.

- Conserva los cambios de origen y de escala. Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos cada elemento del conjunto de datos por un mismo número esta operación se traslada a la mediana. Ello hace que ésta se exprese en la misma unidad de medida que los datos (Batanero y Díaz, 2008, p. 65).
- La mediana, como la moda, no es sensitiva a valores extremos (*outliers*).
- Para un conjunto de  $n$  datos existe una única mediana (no en el caso de la moda, en que puede haber dos, tres).
- Si  $n$  es impar, la mediana resulta ser uno de los datos de la muestra. En caso en que  $n$  es par, la mediana resulta igual a uno de los datos de la muestra, sólo si los datos ubicados en los lugares  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$  son iguales.
- Como en el caso de la moda, la mediana no usa toda la información presente en la muestra, desde que el valor numérico de la mediana es calculado usando solamente el valor central de los datos (o los dos valores centrales en el caso en que  $n$  es par), el resto de los datos son desestimados (Saavedra, 2020, p. 93).

### 2.2.3.3 Propiedades de la moda

- El cálculo de la moda no usa toda la información en la muestra, es decir, no involucra todos los valores obtenidos en la muestra, sólo usa el valor que ocurre más a menudo.
- La moda es una medida volátil, esto significa que es sensitiva a pequeños cambios de los valores muestrales.
- La moda no es particularmente afectada por los valores extremos en la muestra.
- La moda es siempre igual a uno de los valores presentes en la muestra (en el caso de los datos no agrupados) (Saavedra, 2020, p. 88).
- En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se llama unimodal, si existen dos bimodal, si hay más de dos se llamará multimodal.
- Si las frecuencias se condensan fuertemente en algunos valores de la variable, la moda no es una medida eficaz de tendencia central (Batanero y Díaz, 2008, p. 57 - 58).
- Si bien la moda es considerada una medida de tendencia central, no responde a un concepto de centro.
- Una desventaja de la moda es que el conocer únicamente su valor no nos indica su calidad como representante: aunque sea el valor que más se repite, esto puede ocurrir un número muy pequeño de veces o pueden existir otros valores que se repitan un número de veces que, aunque sea menor, sea muy similar al número de veces que se repite la moda (Araneda, Chandía y Sorto, 2013, p. 173).

Ahora bien, dependiendo del tipo de dato que tengamos que tengamos es posible o no determinar el promedio, la mediana o la moda. A este respecto, Saavedra (2020, p. 82) señala lo siguiente:

- Si los datos son numéricos, entonces, la moda, mediana y media pueden ser calculados,
- Si los datos son ordinales, la media no debería ser calculada,
- Si los datos son nominales, entonces, la única medida de localización central sería la moda.

## 2.3 Aprendizaje basado en problemas (ABP)

### 2.3.1 Definición de Aprendizaje Basado en Problemas

El Aprendizaje Basado en Problemas no tiene una única definición; sin embargo, muchas de ellas se parecen o correlacionan de acuerdo a lo que señalan los siguientes autores:

- Método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos conocimientos (Barrows, 1986, citado por Morales y Landa, 2004, p. 147).
- Es un método didáctico, que cae en el dominio de las pedagogías activas y más particularmente en el de la estrategia de enseñanza denominada aprendizaje por descubrimiento y construcción, que se contrapone a la estrategia expositiva o magistral (Restrepo, 2005, p. 10).
- El método de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), es un aprendizaje centrado en el estudiante, su esencia es la integración interdisciplinaria y la libertad para explorar lo que todavía no conoce, centrándolo en el proceso de aprendizaje (Rúa, 2008, citado por Alzate, Montes y Escobar, 2013, p. 543).
- Es una estrategia de enseñanza que favorece tanto el aprendizaje grupal como el autónomo y el global, que se centra en la solución de problemas reales y concretos, que se relacionan con el entorno profesional en el que tendrá que desenvolver el alumnado en el futuro, permite la adquisición y el fomento de competencias específicas, y otras más generales como la creatividad, reflexión crítica, comunicación y toma de decisiones en equipo (Bas, 2011, citado por Pérez Aranda *et al*, 2015, p. 190).
- Es un tipo de metodología activa de enseñanza, centrada en el/la estudiante, que se caracteriza por producir el aprendizaje del/la estudiante en el contexto de la solución de un problema auténtico (Marra, Jonassen, Palmer y Luft, 2014, p. 221, citado por Hurtado y Salvatierra, 2020, s/p).
- Se comprende como una experiencia pedagógica con carácter situado y vivencial, donde los estudiantes expresan real interés y motivación frente a una situación confusa y problematizadora. De esta manera, los estudiantes bajo el rol de interesados se apropian de la situación problema para comprenderla y analizarla en profundidad, logrando mediante un proceso de investigación, el diseño de vías diversas para su solución (Ortega, *et al*, 2020, p. 105).

Es necesario señalar que este método no es nuevo, pues ya se venía implementando desde hace algunos años en Norteamérica. Como mencionan Arpi Miró *et al* (2012, citado por Palta, Sigüenza y Pulla, 2018, p. 1)

Sus orígenes están aproximadamente en los años 60 en la Universidad MacMaster de Canadá en la Facultad de Medicina, pues esta metodología nace con el firme propósito de mejorar la formación de profesionales en esta área, ya que los estudiantes se formaban con las estrategias didácticas del método tradicional el cual se basa en clases magistrales y un dominio predominante del contenido teórico.

Complementando lo anterior, Escribano y Del Valle (2008, p. 11) establecen que el ABP se creó

Como una propuesta alternativa a la educación tradicional centrada en el maestro quien, en su condición de experto en determinada área del conocimiento, es el responsable de preparar los objetivos y materiales didácticos, así como determinar la secuencia de los contenidos y la evaluación de los mismos.

Una posible confusión que puede generarse es la que existe con el Aprendizaje Basado en Proyectos; al respecto, Castillo (2008, p. 189) es clara al enfatizar que

El Aprendizaje por Proyectos se le conocía hace algunos años como *aprendizaje por problemas*. El cambio se debió a que el *aprendizaje por problemas* tenía un enfoque específico (abordaba un solo problema a la vez), mientras que el Aprendizaje por Proyectos soluciona diversos y numerosos problemas.

A lo largo de esta investigación, se entenderá al ABP como una estrategia de enseñanza, centrado en los alumnos en que, por medio de una situación problemática y desafiante, ficticia o no, los estudiantes comparten experiencias, ideas y conocimientos para la creación de una solución al problema planteado. En este caso, el profesor es un guía que orienta a los educandos en el momento en que ellos estén no estén avanzando o no encuentren respuestas al problema.

Es importante señalar que las respuestas no son únicas, sino que puede haber varias y cada una de ellas puede abordar la situación planteada desde un punto de vista diferente entre los grupos de estudiantes, lo cual permite enriquecer los enfoques y argumentaciones que presentan los educandos cuando se ven enfrentados a una situación desafiante.

### **2.3.2. Características del ABP**

Barrows (1986, citado por Palta, Sigüenza y Pulla, 2018, p. 2) menciona las siguientes cualidades del ABP, a saber:

- El aprendizaje está centrado en el estudiante

Esto se debe a que son los estudiantes los que asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje, bajo la dirección de un tutor, reconociendo lo que tienen que saber para entender y manejar el problema en que trabajan y consiguiendo la información que necesitan (Morales y Landa, 2004, p. 147 - 148).

- El aprendizaje se aprende en pequeños grupos

La importancia de este punto es que les permite a los alumnos socializar sus dudas y complementarse mutuamente. Basaure, Quinchanao y Rodríguez (2017, p. 8) señalan que

se espera que los estudiantes sean capaces de identificar sus propios vacíos conceptuales tanto individuales como grupales, favoreciendo así el dominio y la adquisición de los mismos. Además de todo esto, también favorece el trabajo colectivo, el respeto ante las opiniones de los otros, la valoración ante la diversidad de ideas, yendo en pos de la búsqueda de la solución a la problemática inicial.

- Los profesores son facilitadores o guías de este proceso

Tradicionalmente, los profesores entregan los conocimientos a los alumnos por medio de la clase expositiva, teniendo la batuta de la clase los maestros. Por el contrario, el rol del docente cambia, siendo un orientador de los educandos.

En el ABP el profesor a cargo del grupo actúa como un tutor en lugar de ser un maestro convencional experto en el área y transmisor del conocimiento. El tutor ayudará a los alumnos a reflexionar, identificar necesidades de información y les motivará a continuar

con el trabajo, es decir, los guiará a alcanzar las metas de aprendizaje propuestas (Espinoza y Sánchez, 2010, s/p).

“El profesor permanece como un recurso al margen de la actividad colectiva, con perfil bajo, interviniendo sólo si el grupo se desvía visiblemente del objetivo, dando pistas para encarrilar nuevamente la discusión” (Restrepo, 2005, p. 15).

Complementando lo dicho en este punto, se suma lo que dicen Alzate, Montes y Escobar (2013, p. 543), que mencionan que “su labor será la de orientar, guiar, moderar y facilitar una adecuada dinámica de grupo. No buscan información o dictan cátedra. Custodian el proceso de aprendizaje del grupo y guían el descubrimiento, pero no son “dispensadores” de conocimiento”.

Esto último hace que los estudiantes sean protagonistas principales de su aprendizaje en que, por medio del ensayo y error, aciertos y desaciertos, adquirirán conocimientos que les permitan construir sus respuestas frente a la situación planteada. La búsqueda permanente de información debe ser la prioridad en esta forma de trabajo. Como se menciona en Restrepo (2005, p. 15), es cuando el grupo de alumnos se desvía, cuando el profesor adquiere el rol principal.

- Los problemas son el foco de organización y el estímulo para el aprendizaje

La característica principal de esta metodología es que se centra en un problema, ya sea real o ficticio. Sin embargo, ¿qué se entiende por problema? “El problema representa el desafío que los estudiantes enfrentarán en la práctica y proporciona la relevancia y la motivación para el aprendizaje” (Morales y Landa, 2004, p. 148). Al respecto, Restrepo (2005, p. 12) menciona que

En el ABP, como método o propuesta didáctica, el problema, así su solución se efectúe a través de la lógica del método científico, es una situación simulada muy parecida a los problemas que ya en la práctica profesional enfrentarán los futuros practicantes de una u otra profesión.

Es importante que el problema que inicie la clase sea claro y llamativo, pues es el combustible que permitirá a los educandos a seguir motivados durante el transcurso de la clase. Siguiendo con Restrepo (2005, p. 12), este autor agrega que “el problema debe mantener la motivación de los estudiantes y llevarlos a indagar áreas básicas de la profesión que estudian, para lo cual es necesario que el problema cumpla con determinadas características”.

- Los problemas son un vehículo para el desarrollo de habilidades resolución de problemas

“Esta característica se traduce en presentar un problema del mundo real o lo más cercano posible a una situación real, relacionada con aplicaciones en el que estudiante se desempeñará en el futuro” (Morales y Landa, 2004, p. 149).

- La nueva información se adquiere a través del aprendizaje auto dirigido

Se espera que los estudiantes aprendan a partir del conocimiento del mundo real y de la acumulación de experiencia por virtud de su propio estudio e investigación. Durante este aprendizaje autodirigido, los estudiantes trabajan juntos, discuten, comparan, revisan y debaten permanentemente lo que han aprendido (Morales y Landa, 2004, p. 149).

De manera general, otras de las características que tiene el ABP, según lo señalado por Palta, Sigüenza y Pulla (2018, p. 2) es que "promueve la participación activa de los estudiantes con el fin de que sean capaces y responsables de proponer la solución a un problema planteado, solución que debe surgir del trabajo en equipo. Esto evidencia el trabajo colaborativo y cooperativo".

Ortega *et al* (2020, p. 104, citando a Sadovsky, 2006, p. 8) mencionan que "el ABP propone rutas posibles de generación de conocimientos para la formación a situaciones problemas, reales y vivenciales, dado que permite en los individuos la configuración de saberes que aporten al mejoramiento de tales situaciones".

### **2.3.2.1. Habilidades que desarrollan los alumnos con el ABP**

Antes de tratar este punto, se debe comprender qué se entiende por habilidad. El Ministerio de Educación de Chile (2016, p. 8) las define como "capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz y psicosocial".

Como se mencionó en los puntos precedentes, el rol protagónico lo poseen los educandos, al ser ellos los gestores de su propio aprendizaje. "Esta metodología busca que el estudiante asuma un papel activo" (Alzate, Montes y Escobar, 2013, p. 543). Los alumnos no trabajan de forma independiente, sino que lo hacen de forma conjunta, apoyándose mutuamente.

En palabras de Morales y Landa (2004, p. 152), esto

Promueve el desarrollo de una cultura de trabajo colaborativo, involucra a todos los miembros del grupo en el proceso de aprendizaje, promueve habilidades interpersonales, propicia la participación de los alumnos, generando que desempeñen diferentes roles en las labores propias de las actividades diseñadas, que les permitirán ir adquiriendo los conocimientos necesarios para enfrentarse al problema retador.

Al respecto, es interesante mencionar lo que mencionan Colón y Ortiz (2019, p. 211), al referirse a lo que espera conseguir en los estudiantes con el ABP:

Se pretende que el estudiante aprenda a desenvolverse como un profesional capaz de identificar y resolver problemas, de comprender el efecto de su propia actuación profesional y las responsabilidades éticas que implica, de interpretar datos y diseñar estrategias; y en relación con todo ello, ha de ser capaz de poner en práctica el conocimiento teórico que es adquirido en su formación.

En otras palabras, el ABP permite que los estudiantes se coloquen en el puesto de los investigadores, enfrentando los mismos desafíos y contratiempos al momento de iniciar la resolución de un problema; a su vez, el compartir ideas, potenciar las habilidades propias y colectivas, así como cada alumno asume un papel protagónico que se comparte con el grupo de compañeros, hace que cada educando sea líder de su propio aprendizaje, de forma tal de que su progreso individual se complementará con el progreso de sus compañeros.

Esto se ve sustentado en palabras de Curiche (2015, p. 45) al decir que

También se ven reforzadas habilidades de liderazgo en los estudiantes, "aprenden a aprender", propicia en ellos una apertura mental que se expresa en la consideración respetuosa de las opiniones de otros, o puntos de vista distintos al propio, como una respuesta posible a los problemas observados.

Lo expuesto en este punto se condice con lo definido por el Mineduc, dado que el ABP incorpora elementos que permiten la interacción entre los compañeros del grupo de trabajo, no sólo intelectuales, sino también el compartir ideas afines o contrapuestas, manteniendo un clima de respeto ante una opinión distinta. A su vez, el hecho de compartir las dudas o interrogantes que surjan durante el desarrollo de la actividad, les permitirá a los educandos que forman el grupo, a buscar en conjunto una solución plausible a la situación presentada en la actividad. En particular, en el área de estadística, esto se ve reflejado en algunas de las habilidades que se esperan desarrollar en los estudiantes en el área de estadística, de acuerdo al plan y programa oficial del Ministerio de Educación (2016, p. 163), en concordancia con el contenido de medidas de tendencia central:

- Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
- Fundamentar conjeturas, dando ejemplos y contraejemplos.
- Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con la ayuda de instrumentos, para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.

### **2.3.2.2. Habilidades del docente frente al ABP**

Uno de los aspectos cruciales que tiene esta metodología es que el profesor pasa a tener un rol secundario en el proceso de enseñanza, transformándose en un guía que colabora en la secuencia de aprendizaje de los alumnos. Éstos pueden acudir a los docentes tantas veces lo requieran los educandos.

Al respecto, Palta, Sigüenza y Pulla (2018, p. 2) recogen los siguientes aspectos que deben tener los maestros en la aplicación del ABP:

- Da un papel protagonista al estudiante en la construcción de su aprendizaje
- Tiene que ser consciente de los logros que consiguen sus estudiantes
- Es un guía, un tutor, un facilitador del aprendizaje que acude a los estudiantes cuando le necesitan y les ofrece información cuando es preciso.
- El papel principal es ofrecer a los estudiantes diversas oportunidades de aprendizaje
- Ayuda a sus estudiantes a pensar críticamente, orientando sus reflexiones y formulando cuestionamientos importantes
- Realiza sesiones de tutoría con los estudiantes

### **2.3.3. Ventajas del ABP**

La metodología del ABP es generosa en su propuesta y presenta varias virtudes a señalar (Alzate, Montes y Escobar, 2013, p. 543):

- Promueve un conocimiento en profundidad

Esto se debe a que los alumnos, al ser investigadores de un tema, se ven inmersos a responder interrogantes que vayan surgiendo a medida que encuentren información. A modo de ejemplo, si realizan una encuesta para recopilar información, deberán averiguar cómo recogerla, ordenarla y agruparla para presentar los datos y hacerlos inteligibles al resto (¿reunir los datos por intervalos? ¿Por rango de edad, sexo, género, condición socioeconómica?)

- Estimula el desarrollo de habilidades personales

Los alumnos, al momento de resolver un problema, no se encuentran solos; por el contrario, la idea de resolver un problema en equipo le permite, a cada participante, desarrollarla y exponerla a sus compañeros, contrastándola con los demás integrantes de su grupo, y respetando la opinión opuesta en caso de que surja alguna. Esto permite estimular habilidades personales que, trabajando en forma individual, es más difícil que ocurra.

- El ambiente del aprendizaje es más estimulante

Una de las características que posee el ABP es que el problema inicial, real o ficticio, debe ser motivador para los alumnos. Con ello, las interacciones entre los compañeros del grupo de trabajo discutirán ideas, asumirán roles protagónicos, dependiendo de sus aptitudes y, sobre todo, tendrán que llegar a acuerdos en sus posturas, lo que hará desarrollar otras habilidades, como la empatía y la tolerancia.

- Promueve la interacción entre el estudiante y el docente

Cómo lo mencionó Alzate *et al* (2013, p. 543) el profesor pasa a ser un orientador en la búsqueda de información, en contraposición de la clase expositiva, en donde el docente se transforma en un divulgador del conocimiento y los estudiantes asumen un rol pasivo haciendo que la interacción sólo sea cuando hay dudas o pedir que un alumno resuelva un ejercicio en la pizarra. Con esta modalidad, el profesor no pierde su autoridad, sino que adopta la postura de ser uno más del grupo, colaborando a los educandos frente a las trabas que puedan tener durante el transcurso de la investigación, orientándolos a realizar una búsqueda más exhaustiva, o enfocar el problema de manera distinta a lo que los alumnos pensaron en un inicio. Por ejemplo, si los alumnos desean recopilar información en base a una encuesta, el profesor puede sugerirles la implementación en dos formatos distintos: por medio de un formato virtual, vía correo electrónico, y otro presencial, para aquellas personas que tienen dificultades para manejarse con las tecnologías actuales. Así, los alumnos tendrán más información y más variada, abarcando un rango etario más amplio.

- Promueve la colaboración entre las distintas disciplinas

Dado que el problema, tanto si es real o no, es un problema abierto, la confluencia de temas que pueden abordarlo es variada. El mismo puede responder a inquietudes que van de cómo visualizarlo, por ejemplo, desde la biología y cuál ha sido su impacto en el desarrollo histórico de la humanidad; continuando con esta idea, la pandemia producida por el Covid - 19, afectando a millones de personas, puede ser un buen ejercicio para aunar ambas disciplinas. Los estudiantes pueden recopilar información sobre cuáles han sido las variantes más mortales y, a su vez, realizar una comparación histórica sobre otras pandemias que se han desencadenado, cómo fue el desarrollo de la medicina durante esos años, qué descubrimientos se hicieron, cuánto era el ingreso per cápita por nación para enfrentar la enfermedad, por mencionar algunos temas para iniciar la clase y la investigación.

- Promueve una mejor retención del conocimiento

El hecho de que los alumnos adquieran la responsabilidad de buscar la información, procesarla, ordenarla, discutirla y, finalmente, presentarla, hace que cada integrante del grupo pueda enseñarle lo que aprendió al resto, mientras los demás prestan atención. Esto, además, se logra con la interacción permanente entre los compañeros de grupo, como también reconocer las dificultades que cada participante tendrá ante el tema de investigación. Todo esto colabora a que el aprendizaje que consiga cada estudiante del grupo será conservado de mejor manera tanto por el mismo, como por el resto de sus compañeros.

- Mejora la motivación

Como se mencionó antes, el ABP coloca al alumno como centro del aprendizaje, haciéndolo protagonista principal y gestor de su propia búsqueda.

Por otra parte, para que esto se cumpla, el problema debe ser desafiante desde el primer minuto al que se le presenta a los estudiantes, logrando que enfoquen su atención en la resolución y posibles soluciones. Esto coadyuva a que los educandos podrán elaborar sus propias respuestas al problema, entregando soluciones novedosas e ingeniosas.

#### **2.3.4. Desventajas del ABP**

Como en toda metodología e innovación, hay puntos de riesgo que hacen que el ABP no haya sido implementado en todos los centros educativos. A modo de ejemplo, Sanhueza y Rubilar (2018, p. 44 – 45, citando a Monterrey, 2010) mencionan las siguientes:

- Aunque la materia se explora en profundidad, el ritmo de avance es considerablemente más lento y se cubre menos material
- Muchos estudiantes prefieren trabajar individualmente y no les gusta trabajar en equipo por mucho tiempo
- Algunos estudiantes muestran poca seriedad o interés por aprender, lo que ocasiona que la participación no sea homogénea. La participación del alumno es fundamental para que el método funcione
- La evaluación es un aspecto difícil porque el alumno suele percibir como “subjetiva” la forma en que el profesor evalúa su participación, sobre todo en los grupos de discusión

También se pueden señalar aspectos como los siguientes (Curiche, 2015, p. 46):

- El profesor debe modificar constantemente los contenidos de los cursos, estar abierto a los nuevos descubrimientos de las investigaciones más recientes, esto exige que los docentes estén en constante formación.
- Cuando se trabaja con ABP el ideal es que se trabaje con grupos pequeños de alumnos guiados por un profesor, al haber una cantidad importante de alumnos debiera haber una cantidad, también, importante de profesores lo que implica elevar los costos de la institución.
- El trabajo con ABP implica mayor cantidad de tiempo de trabajo, tiempo que no siempre está disponible en contextos en los cuales los programas de estudios se organizan en torno a ciertos contenidos o aprendizajes obligatorios.

#### **2.4. Secuencia de pasos del ABP**

Como lo señala Restrepo (2005, p. 13 – 15), el ABP tiene una secuencia de pasos que pueden variar en cuanto a la cantidad de los mismos. A saber, se tienen las siguientes variantes:

El método de los siete saltos (Seven Jumps)

- Planteamiento del problema
- Clarificación de términos
- Análisis del problema
- Explicaciones tentativas
- Objetivos de aprendizaje adicional

- Autoestudio individual
- Discusión final y descarte de hipótesis
- El método de los ocho pasos
  - Explorar el problema, crear hipótesis, identificar aspectos
  - Tratar de resolver el problema con lo que ya se sabe
  - Identificar lo que no se sabe y lo que se necesita para saber resolver el problema
  - Priorizar las necesidades de aprendizaje
  - Autoestudio y preparación
  - Compartir información entre todos
  - Aplicar el conocimiento a la solución del problema
  - Evaluar el nuevo conocimiento logrado, la solución dada y la efectividad de todo el proceso
- El método de los nueve pasos
  - Preparar a los estudiantes para el ABP.
  - Presentar el problema
  - Presentar lo que se sabe y qué es lo que se debe saber
  - Definir bien el planteamiento del problema
  - Recoger y compartir información pertinente
  - Generar soluciones posibles
  - Evaluar el desempeño en el proceso
  - Resumir la experiencia alcanzada al tratar el problema
- El método de las cinco fases
  - Lectura el problema
  - Tormenta de ideas, generación de hipótesis
  - Identificación de objetivos de aprendizaje
  - Lectura e investigación individual preparatoria de la plenaria final
  - Discusión final en grupo

## **2.5. Matemática y Aprendizaje Basado en Problemas**

La enseñanza tradicional o expositiva no ha podido cumplir con todos los objetivos que se han planteado en la educación escolar. Esta forma de enseñanza, en la que los docentes son transmisores del saber y los alumnos, meros receptores de este conocimiento, ha traído como consecuencia, una baja en la comprensión de los contenidos estudiados, así como una desmotivación general hacia los estudiantes. Como mencionan Morales y Landa (2004, pp. 146 – 147)

Esta modalidad de enseñanza normalmente está focalizada hacia los contenidos, priorizando los conceptos abstractos sobre los ejemplos concretos y las aplicaciones. Las técnicas de evaluación se limitan a comprobar la memorización de información y de hechos, ocupándose muy rara vez de desafiar al estudiante a alcanzar niveles cognitivos más altos de comprensión. De esta manera, tanto profesores como alumnos refuerzan la idea de que en el proceso de enseñanza – aprendizaje el profesor es el responsable de transferir contenidos y los estudiantes son receptores pasivos del conocimiento.

En el caso de la enseñanza de la matemática, no es la excepción.

El distanciamiento por parte de alumnos sectores sociales y escolares hacia las matemáticas se ha dado por múltiples hechos históricos, concepciones y creencias a través de la historia,

muchas de estas de carácter negativo, llegando al punto de que se desconozca de la importancia y aplicabilidad de las matemáticas (Ortega *et al*, 2020, p. 104).

Pero, ¿cómo proceder, entonces, a una forma más efectiva de la enseñanza de la matemática? El ABP se postula como una forma novedosa e interesante de transmitir no sólo los conocimientos, sino también, un gusto por aprender las matemáticas, teniendo a los alumnos como personajes principales del propio aprendizaje adquirido, y donde el docente “permanece como un recurso al margen de la actividad colectiva, con un perfil bajo, interviniendo sólo si el grupo se desvía visiblemente del objetivo, dando pistas para encarrilar nuevamente la discusión” (Restrepo, 2005, p. 15).

Dado los beneficios que se mencionaron en el punto precedente, entonces, ¿qué aportes tendría el ABP en la enseñanza de la matemática? Ortega *et al* (2020, p. 106) son claros al indicar que

El uso de la estrategia ABP en el aula de matemáticas busca un acercamiento entre estudiante y profesor a partir de la búsqueda de una solución a una situación problema contextualizada que permita la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes de una forma más agradable y participativa.

Ahora bien, se debe tener presente que, para que los alumnos mantengan el interés en el aprendizaje y el ABP no se desvirtúe, es necesario que el problema con el que se enfrentarán los educandos sea llamativo, un reto a resolver. Para que esto ocurra, el problema debe cumplir con los siguientes criterios (Restrepo, 2005, pp. 12 – 13):

- **Relevancia**  
Los estudiantes deben sentirse en situaciones similares a las que tendrán que afrontar durante el ejercicio profesional.
- **Cobertura**  
Se refiere a que se cumpla la condición según la cual el problema guíe a los estudiantes a buscar, descubrir y analizar la información que el curso, la unidad o tema de objeto de estudio debe entregarles.
- **Complejidad**  
El problema complejo no tiene una solución única, sino que demanda ensayar varias hipótesis, que deben documentarse y probarse.

Con estas consideraciones de las cualidades del ABP, también es obligación destacar las habilidades matemáticas que desarrollan los alumnos cuando se aplica esta metodología. Como establecen Ortega *et al* (2020, p. 106)

Tales habilidades son: el pensamiento crítico y la capacidad de análisis y síntesis, por lo que promover el desarrollo de estas habilidades en el estudiantado facilita el aprendizaje de conceptos y contenidos propios de las matemáticas, brindando la posibilidad a los estudiantes de adquirir herramientas útiles que les ayuden a reconocer, plantear y resolver problemas de la vida real de manera colaborativa.

## **2.6. ABP y Tecnologías de la información y comunicación (TIC)**

Se comenzará definiendo lo que son las TIC de acuerdo a lo señalado por Ferrada *et al* (2021, p. 146): “conjunto de tecnologías desarrolladas para gestionar información y enviarla de un lugar a otro. Abarcan un abanico de soluciones muy amplio. Incluyen las tecnologías para almacenar información y recuperarla después, enviar y recibir información de un sitio a otro, o procesar información para poder calcular resultados y

elaborar informes". ¿A qué se debe la importancia del desarrollo de las TIC en las aulas? La respuesta la otorga Castillo (2008, p. 185) al indicar que "las TIC pueden apoyar a las investigaciones de los alumnos en varias áreas de las matemáticas, como números, medida, geometría, estadística, álgebra, pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas".

Por su parte, ¿qué relación se puede encontrar entre las TIC y el ABP? Al respecto, Alzate, Montes y Escobar (2013, p. 546) señalan que "el uso de TIC's puede ser una gran herramienta para la incursión de la nueva metodología de enseñanza, ya que los estudiantes actuales están bastante inmersos en todo lo relacionado con la tecnología".

## 2.7. Educación Estadística y Tecnologías de la Información y Comunicación

¿Qué puede decirse sobre el uso de la tecnología en la educación de la estadística? Mucho se sabe de la existencia de *software* como *Excel* para la construcción de gráficos, cálculo de medidas de tendencia central, dispersión o de otras medidas. También, el empleo de otros programas, como *Geogebra*, permiten tener una comprensión más acabada de algunos conceptos matemáticos; pero, como se señaló en la problemática, muchos *softwares* van orientados al análisis de datos, usando un lenguaje de programación avanzado, y muy pocos están dirigidos a la enseñanza escolar. Para este caso, se pueden nombrar a *Fathom* y *Tinkerplots*, que tienen como propósito la enseñanza de la matemática, no sólo de la estadística, para escolares. A continuación, se describirán sus características sucintamente:

- *Tinkerplots*: "es una herramienta de exploración dinámica de datos diseñada por KCP Technologies y por la Universidad de Massachusetts en 1998" (Del Pino, 2013, p. 245). Desarrollado por Clifford Konold y Craig Miller.

Muy útil en a todos los niveles, el inconveniente que presenta es que es de pago con precios que van desde US\$10 hasta los US\$50 por licencia para el centro de licencias de por vida, mientras que para los alumnos tiene un coste de US\$8 anuales (Del Pino, 2013, p. 245 – 246).

- *Fathom*: es un *software* dinámico que permite la enseñanza de la estadística y el análisis de datos, así como álgebra, física, química, biología; fue creado en 2010 por Key Curriculum Press Technologies. Entre sus características se incluyen:

La manipulación dinámica, presentada por la rápida actualización de cualquier tipo de representación o cálculo de medidas, mientras se traslada un punto específico, se modifican los ejes cartesianos y la definición de escalas, se cambian las barras de representaciones gráficas correspondientes; acceso a fórmulas para calcular medidas estadísticas, trazar funciones y controlar las simulaciones; simulación simple y herramientas de muestreo. Por otro lado, la capacidad que tiene *Fathom* facilita, en el análisis exploratorio de datos, pasar de una representación a otra, lo que posibilita al estudiante interactuar con el conjunto de datos y sus características (Alpizar, 2007, p. 108).

Una de sus desventajas es que sólo está disponible en inglés, además de ser un *software* pagado para ser usado de manera indefinida, con precios similares a los de *Tinkerplots*.

Ahora bien, en general, ¿cómo puede contribuir la tecnología en la enseñanza de la estadística, no sólo estos programas? "La tecnología puede utilizarse tanto como amplificadores o como reorganizadores conceptuales para desarrollar la comprensión de ideas estadísticas" (Batanero, 2009, p. 14).

Debe tenerse en cuenta que esto no es un sustituto del profesor, pues es fundamental la explicación del docente para que sus estudiantes comprendan mejor los conceptos; esto se refleja en las palabras de Gutiérrez y Ojeda (2000, p. 38): "La informática puede jugar un papel importante. No para reemplazar al profesor, pero sí para brindarle apoyo en su tarea y darle una opción más al estudiante para la consolidación de su aprendizaje". En otras palabras, las TIC son una poderosa herramienta que cataliza los aprendizajes que, progresivamente, van adquiriendo los alumnos. Esto es porque, con la ayuda de las TIC, los cálculos se hacen más rápidos, enfocándose la enseñanza en el mejoramiento de los conceptos. Batanero (2009, p. 14) lo explica de manera elocuente al decir que: "la tecnología ha reducido el tiempo de cálculo, permitiendo trabajar en clase con aplicaciones reales, en línea con uso de proyectos y las tendencias curriculares". Además, "la tecnología puede proporcionar a los estudiantes la oportunidad de conducir a investigaciones reales, a preguntas reales y de interés real" (Gutiérrez y Ojeda, 2016, p. 28). A modo de ejemplo, durante el periodo de pandemia debido al Covid - 19, se pueden plantear interrogantes que inciten la búsqueda de información como: ¿cuáles han sido las personas más afectadas por el virus? ¿Qué grupo etario se ha enfermado más? ¿Cuántas vacunas de cada tipo se han inyectado en la población?

Dada la velocidad con la que llega la información a la población, los medios de comunicación, entre ellos, internet, nos ofrecen una ayuda considerable a la hora de buscarla, lo cual hace que se tengan datos actualizados a cada instante. Como se mencionó más atrás, esto permite a los educandos trabajar con información fidedigna y nueva, lo que "potencia la interdisciplinariedad en clase de estadística, permitiendo aprender contenidos que no se adquieren habitualmente con problemas tomados de los libros de texto, por ejemplo, el efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de un estadístico" (Gea *et al*, 2015, p. 117). Además, el uso de *softwares* permitiría una mejor comprensión conceptual de los términos trabajados en clases.

"El uso apropiado de *software* estadístico puede hacer que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Estadística sean más efectivos, ya que fomenta el aprendizaje activo, mejora la comprensión de los conceptos estadísticos por parte del estudiantado y sus habilidades para resolver problemas" (Zamora *et al*, 2021, p. 7).

Dado que, tanto *Fathom* como *Tinkerplots* permiten, no sólo graficar datos, sino también, otorgarles dinamismo, facilitan la visualización de los cambios que se producen en un gráfico y de la variabilidad que pueden afectar a algunos estadígrafos. Esto permite "exponer al estudiantado a las variantes a la hora de cambiar los parámetros, así como las diferencias entre los distintos modelos, con lo que se logra una mejora en las experiencias de aprendizaje" (Zamora *et al*, 2021, p. 7).

Por último, no debe dejarse de lado aspectos como la argumentación y reflexión de estos cambios que se producen al modificar los datos, pues los educandos se verán obligados a explicar qué ocurre cuando modifican los datos, ya sea a su antojo, o por medio de una instrucción en particular. Como señalan Gea *et al* (2015, p. 117), las TIC:

"fomentan en el estudiante el uso del lenguaje (verbal, simbólico, icónico, gráfico), facilitan y amplían la gama de procedimientos a su alcance, hacen ostensivos conceptos y propiedades, sobre todo por medio de la simulación, y promueven el razonamiento y la argumentación".

Esto desemboca en que "el uso adecuado de *software* en la enseñanza puede contribuir a una mejora en el aprendizaje de conceptos estadísticos, así como al desarrollo de habilidades para su aplicación" (Zamora *et al*, 2021, p. 7).

## 2.8. Importancia de la estadística en la enseñanza escolar

Actualmente, no se discute sobre los beneficios que trae la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos de educación básica o media. Por ejemplo, el Mineduc (2020, p. 7) señala

La asignatura de Matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Comprender matemática y aplicar los conocimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos. Saber matemática crea oportunidades tanto de estudios, como en la ampliación laboral y enriquece la toma de decisiones, considerando datos y proposiciones matemáticas.

Pero, ¿qué aportes puede entregar el aprender estadística? Al respecto, puede señalarse lo que indicaban, ya en su momento, Espinoza y Sánchez (2010, s/p)

Algunas de las justificaciones para su incorporación en el currículum son: la gran cantidad de información que hoy en día recibimos y que debe ser interpretada por los ciudadanos, la importancia de estos tópicos para la formación posterior, así como su apoyo para el desarrollo de un razonamiento crítico ante la cantidad y diversidad de información, también como ayuda para comprender otros temas del currículum.

También se puede señalar el aporte que hace Alsina (2017, p. 26) al mencionar que, la incorporación de estos temas en la escuela permite

Ofrecerles herramientas que les ayuden a responder preguntas cuyas respuestas no son inmediatamente obvias, a la vez que les faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante. Todo ello, para que progresivamente sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes.

A esto se adiciona lo que señalan Sánchez y Ruiz (2020, p. 2, citando a Batanero, 2002), al decir que

El estudio de la estadística proporciona las herramientas e ideas necesarias para enfrentarse de manera adecuada a distintos tipos de información, por lo que se hace necesario que en la actualidad todo ciudadano adquiera la capacidad de interpretar y comprender información que proviene de diferentes medios y fenómenos cotidianos.

Esto último se ve fortalecido por lo que menciona Batanero y Díaz (2008, p. 11):

La principal razón que induce a incluir el estudio matemático de los fenómenos aleatorios en la educación primaria y secundaria es que las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que el alumno valore el papel de la probabilidad y estadística, es importante que los ejemplos y aplicaciones que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología.

Finalmente, la OCDE (2019, p. 5, citado por Vásquez, Ruz y Martínez, 2020, p. 163 – 164) menciona que existe

La necesidad de avanzar en el desarrollo de habilidades y conocimientos que permitan formar ciudadanos alfabetizados estadísticamente, es decir, capaces de extraer información significativa de los datos, comprender qué significan los datos, incluyendo cómo leerlos de manera apropiada, extraer conclusiones, así como reconocer cuándo se utilizan de manera engañosa o inapropiada.

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 Metodología de la Investigación

El enfoque metodológico para esta investigación es de tipo cualitativo. En palabras de Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 16), "la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas"; este tipo de información resultó indispensable para cumplir con el objetivo de esta investigación, puesto que permitió responder a la pregunta de investigación, que es cómo el Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC, contribuye a los aprendizajes de los conceptos de las medidas de tendencia central en estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia.

Por otra parte, el alcance de esta investigación es descriptiva, pues su propósito es especificar propiedades y características importantes de cualquier fenómeno que se analice. "Únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren" (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 92).

#### 3.2 Participantes de la Investigación

Con relación a la problemática planteada, se decide implementar una serie de actividades a los alumnos de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, Región Metropolitana, con el objetivo de mejorar la comprensión de las medidas de tendencia central. Esta selección se debió, principalmente, a que estos contenidos son tratados en este nivel. Para la muestra, se eligió a un solo curso, para analizar el desarrollo de las respuestas entregadas por los estudiantes en un pre - test, durante la implementación de las actividades, y en un post - test.

Dado que el grupo está conformado desde el inicio del año escolar, entonces, el estudio es cuasi experimental. Como lo explican Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 151), "los sujetos no se asignan al azar a los grupos ni se emparejan, sino que dichos grupos ya están conformados antes del experimento". Adicionalmente, dado que el enfoque de esta investigación es cualitativo, "el tamaño de la muestra no es importante desde una probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia" (Hernández *et al.* 2014, p. 384). A su vez, puede decirse que la muestra fue por conveniencia, ya que "están conformadas por los casos disponibles a los cuales tenemos acceso" (Hernández *et al.*, 2014, p. 390).

La elección del nivel se ha hecho dado que, el tema de las medidas de tendencia central, es un contenido que se estudia en este curso. Ahora bien, una de las dificultades que surgieron fue, debido a los ajustes curriculares establecidos por el Ministerio de Educación, este contenido pasó a estar en la sección de "No priorizados"; esto significa que, de acuerdo a lo establecido por el Ministerio, este tópico en específico, fue descartado, para darle prioridad a otros, en particular, al objetivo de aprendizaje N°16: "Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera visual y/o con software educativo" (Mineduc, 2020, p. 23).

El único curso seleccionado fue del nivel de 7° básico, ya que el contenido de medidas de tendencia central, como lo establece el Ministerio de Educación, pertenece a este nivel. Las características que poseen estos alumnos del curso seleccionado dejan en evidencia que tienen deficiencias en el área matemática. Esto se ve reflejado en el alto porcentaje de estudiantes que lograron un nivel deficiente de aprendizajes en la prueba SIMCE, esto de acuerdo a los resultados obtenidos en la medición del año 2018, que fue de 34,92%; los alumnos que alcanzaron un nivel elemental representan un 42,06% y, finalmente, los educandos que lograron un nivel adecuado fue de un 23,02%.

Con relación a la clasificación realizada, es necesario para su comprensión entender qué significa cada nivel de logro, como lo define el Ministerio de Educación a continuación, a través del decreto 129 (2019, pp. 2 – 3):

- Para el nivel adecuado, estos estudiantes muestran evidencia de que comprenden los conceptos y procedimientos básicos de números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición y datos y probabilidades propios del período.  
Asimismo, muestran generalmente que son capaces de aplicar dichos conocimientos y las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar en situaciones directas y en problemas rutinarios en los que se requiere seleccionar datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado.
- Para el nivel elemental, estos estudiantes muestran evidencia de que comprenden los conceptos y procedimientos más elementales de números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición y, datos y probabilidades propios del período.  
Asimismo, muestran generalmente que son capaces de aplicar dichos conocimientos y las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar en situaciones directas y en problemas rutinarios, con enunciados breves, en que los datos, conceptos y operación a utilizar se presentan de forma directa.
- En el nivel insuficiente, estos estudiantes muestran escasa evidencia de que comprenden los conceptos y procedimientos más elementales de números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, y datos y probabilidades propios del período; así como un escaso dominio de las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar. Por lo general, sólo logran aplicar algunos conocimientos y habilidades en situaciones directas y en problemas que se han practicado extensivamente y que representan algún tipo de mediación y apoyo.

Si se considera el avance regular del desarrollo escolar, los alumnos a los que se les aplicó la secuencia de actividades, éstos se encontraban en 4° básico al momento de la aplicación de la prueba SIMCE. Esto significa que, en su mayoría, los alumnos poseen aprendizajes deficientes, o sólo pueden resolver ejercicios rutinarios específicos.

Por otro lado, para aplicar los instrumentos al curso seleccionado se siguieron los protocolos establecidos por el Comité de Ética Institucional. Primero, el investigador informó, por medio de un correo electrónico, sobre la intervención a realizar en el curso propuesto, que luego fue ratificado por medio una entrevista presencial entre el investigador y el jefe de UTP (Unidad Técnico Pedagógica) del colegio para, finalmente, hacerle llegar el respectivo consentimiento informado. También, se les hizo llegar a los padres y apoderados de los alumnos que iban a participar de este estudio, el respectivo

documento que diera su autorización para la participación de sus hijos. Esto se complementó con la información entregada, de forma oportuna, al profesor jefe que, posteriormente, haría llegar ésta a los papás. Por último, el investigador a cargo de esta tesis, previo a dar inicio a la secuencia de las actividades, les entregó el respectivo consentimiento informado, explicándoles en qué consiste y leyendo las instrucciones tanto para aquellos que participaron de forma online como presencial. Cada uno de estos documentos pueden verse en los anexos de este estudio.

Ahora bien, debido a la situación global de la pandemia ocasionada por el Covid - 19, se optó por realizar la secuencia de trabajo con el aforo permitido en las salas de clases producto de la emergencia sanitaria. Por ello, se trabajó con todos los alumnos que estén en aula, y de forma paralela, con los estudiantes que asistieron en modalidad online.

### **3.3 Diseño metodológico**

El diseño metodológico se conformó en tres grandes etapas: en la etapa 1, se aplicó un pre - test, separados en dos ítems, siendo el primero de ellos, con 4 preguntas de tipo conceptual, con el fin de que los estudiantes explicaran, con sus propias palabras, lo que es el promedio, la mediana, la moda y dato atípico y, el segundo ítem, concerniente a calcular medidas de tendencia central y explicar qué indica ese resultado, teniendo un total de 8 preguntas. Se elaboró de esta manera para saber los conocimientos previos que tienen los educandos respecto a las medidas de tendencia central, y si son capaces de calcularlas e interpretarlas cuando se ven sometidos a resolver un ejercicio.

La segunda etapa corresponde a la secuencia de actividades, consistente en las fases de exploración, introducción, estructuración y aplicación, basadas en el ciclo de aprendizaje constructivista. Éste se puede entender de dos formas que se exponen a continuación:

- “Es un sistema de comunicación intencional y en el que se generan estrategias encaminadas a provocar el aprendizaje” (Contreras, 1990, p. 23, citado por Marzábal, 2011, p. 62).
- “Es un criterio orientador, una planificación flexible que se adapta en cada momento a las características de la situación en la que se desarrolla” (Gimeno, 1988, citado por Marzábal, 2011, p. 62).

El ciclo de aprendizaje propuesto se estructura en un modelo didáctico, entendido como “una construcción teórico - formal que, basada en supuestos científicos e ideológicos, pretende interpretar la realidad escolar y dirigirla hacia unos determinados fines educativos” (Cañal y Porlán, 1992, citado por Marzábal, Rocha y Toledo, 2015, p. 213). Ahora bien, este ciclo de aprendizaje tendrá en consideración la propuesta de Jorba y Sanmartí, como lo explica Espinoza y Sánchez (2014, p. 105 - 106), que consta de cuatro fases de aprendizaje, a saber:

- Actividades de exploración: “se caracterizan por el análisis de situaciones concretas y simples, cercanas, en lo posible, a la realidad de los estudiantes” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 105). “Tiene por objetivo la explicitación de las ideas de los alumnos y la comunicación de objetivos de aprendizaje” (Angulo y García, 1997, p. 2). “Sitúa al estudiante en la temática objeto de estudio y busca captar su atención; a la vez que permite diagnosticar y activar conocimientos previos” (Gallego, Quiceno y Pulgarín, 2014, p. 926).

- Actividades de introducción: permiten conducir al alumno, incentivándolo a “explicar y adecuar modelos iniciales, a identificar nuevos puntos de vista con relación al contenido en estudio, a resolver problemas planteados y a buscar atributos que permiten definir los conceptos y relaciones entre las ideas previas y los nuevos conceptos” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 105).
- Actividades de estructuración y síntesis: “pretende ayudar al estudiante a construir el conocimiento como consecuencia de la interacción con el maestro, los compañeros y el ajuste personal” (Gallego, Quiceno y Pulgarín, 2014, p. 926). El propósito es que “los estudiantes muestren la estructuración de su conocimiento, lo aprendido, los cambios en sus puntos de vista, lo que promueve el nivel de abstracción de las ideas más importantes” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 106).
- Actividades de aplicación: “están orientadas a la transferencia y generalización de los contenidos en contextos diferentes, es decir, para explicar nuevos problemas más complejos que los iniciales” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 106).

Cada una de las tres primeras etapas se repitió tres veces, una para cada medida de tendencia central. Esto tiene como fin la recolección de datos, y se aplicó una guía dirigida (ver anexo), con el propósito de identificar el nivel de logro alcanzado en cada momento, como también el describir los aciertos y dificultades que presentan los estudiantes, aspecto que se verá en el capítulo de los resultados de esta investigación.

Luego, en la fase de aplicación, los educandos deberían confeccionar una encuesta, en la que deben emplear todos los aprendizajes adquiridos durante las etapas anteriores, ya sea de un tema sugerido por el profesor, o un tema que ellos decidan investigar. Esta encuesta permite evaluar el nivel de logro de los estudiantes habiendo finalizado las anteriores etapas de estudio. Sin embargo, debido a las restricciones asociadas a la pandemia por Covid-19, esta última fase no pudo ser llevada a cabo por la cantidad de horas permitidas para su implementación, que fueron 5 horas pedagógicas, cada una de ellas con una duración de 60 minutos.

En otras palabras, el Ciclo de Aprendizaje Constructivista de Jorba y Sanmartí, propone cuatro tipos de actividades, que comienzan con ejemplos simples y cotidianos, incentivando los conocimientos previos que tienen los alumnos, pasando por problemas levemente más complejos, con el propósito de ir construyendo sus propios argumentos para, a continuación, resolver ejercicios más abstractos y complejos, hasta resolver situaciones, relacionadas con algún contexto en específico, con el fin de consolidar no sólo sus aprendizajes del contenido estudiado, sino también, cómo construyen una solución al problema planteado y cómo verbalizan su respuesta.

Por último, en la tercera etapa, se aplicó un post – test, abordándose sólo los temas tratados en la implementación de la secuencia, en este caso, el promedio. De manera similar al pre – test, el post – test estuvo conformado por dos ítems de conceptos, donde los alumnos debían explicar, con sus propias palabras, qué es el promedio y dato atípico, y un segundo ítem, de operatoria y argumentación, con un total de 5 preguntas, donde debían calcular el promedio, y explicar qué se entendía por ese valor y qué le ocurría a la media si se agregaba un dato atípico. Para esta última prueba, se extrajeron los ejercicios propuestos por Araneda, Chandía y Sorto (2013, p. 162), los que se modificaron para aplicar sólo las preguntas relacionadas con la media aritmética.

La relación existente entre las actividades diseñadas en la secuencia didáctica, junto con el pre y post – test, con el marco teórico, es en la aplicación de preguntas que no sólo consideran el cálculo de las medidas de tendencia central, sino también, preguntas de respuesta abierta, donde los estudiantes deben plantear sus ideas y redactarlas, previo a desarrollarlas en conjunto con sus pares, ya sea que hayan trabajado de forma remota o presencial. Como tal, el propósito de las actividades es ayudarlos a mejorar la comprensión de las medidas de tendencia central por medio de situaciones cotidianas y simples y, de manera progresiva, incentivándolos a resolver casos más complejos y reales, colocándolos en una posición de cómo podrían trabajar como investigadores de un tema en específico. Con esto, se puede ver que algunas de las ventajas del ABP son desarrolladas a medida que se avanza en el estudio de las medidas de tendencia central, como mencionan Alzate, Montes y Escobar (2013, p. 543); en este caso, la secuencia busca estimular el desarrollo de habilidades personales, promover la interacción entre el estudiante y el docente, mejorar la motivación y la colaboración entre las distintas disciplinas.

### **3.4 Validación de los instrumentos**

#### **3.4.1 Validación por juicio de expertos**

Los instrumentos que se iban a aplicar fueron enviados a un experto en el tema, PhD en Bioestadística, quién revisó e indicó correcciones a las tres actividades de las medidas de tendencia central. En particular, dado que sólo fue posible implementar la secuencia en que se estudiaba el promedio, la mayor parte de las observaciones iban dirigidas a asuntos de redacción, como también dar una visión positiva de la incorporación del *software Fathom* para el estudio de los desvíos que existen respecto al promedio (ver anexo). Debe señalarse que, dentro de las recomendaciones que realizó el experto, está el introducir el concepto de promedio de manera más intuitiva de lo que se propuso en un principio, así como la presencia de valores atípicos y qué ocurre con el valor de la media y su discusión. Es en esta última parte en donde, por medio de un plenario, los alumnos llegaron a la respuesta de que, ante la presencia de *outliers*, el promedio varía mucho su valor; sin embargo, no fue posible contrastar la media aritmética con otra medida de tendencia central, como por ejemplo la mediana, y poder determinar cuál de ellas es más representativa frente a un conjunto de datos, tema que se proponía estudiar en la fase de estructuración de la mediana y no fue posible debido a las restricciones de tiempo derivadas de la pandemia por Covid-19.

#### **3.4.2 Validación por pilotaje**

Para probar la confiabilidad de los instrumentos que se iban a implementar de manera definitiva, se realizó un pilotaje de los mismos a escolares de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Quillota, perteneciente a la región de Valparaíso. En este establecimiento, sólo fue posible realizar las actividades en 3 clases, cada una de ellas con una duración de 60 minutos, lo que daba una referencia de cuánto podrían tardar los estudiantes en responder a cada etapa. De igual manera, se aplicaron los protocolos éticos correspondientes. A su vez, los escolares se encontraban trabajando bajo la modalidad híbrida, lo que también permitió tener una idea de las dificultades que se presentarían posteriormente, al momento de dar inicio con la secuencia didáctica.

Como se describió más arriba, las actividades se separaron en tres grandes etapas, siendo la primera, la aplicación del pre – test. Los alumnos tardaron, aproximadamente, 20 minutos en responder la prueba, lo que dio paso a la aplicación de la segunda etapa,

comenzando con la fase de exploración del Ciclo de Aprendizaje Constructivista. Dentro del tiempo restante, los educandos contestaron, casi en su totalidad, la actividad propuesta. En la intervención siguiente, los alumnos culminaron con la fase de exploración, y continuaron con la fase de introducción. La mayor parte de los obstáculos que tuvieron los estudiantes estaban relacionados con la redacción de las respuestas que se le solicitaban en esta sección, pues muchos de ellos dejaron en blanco el espacio asignado a la argumentación. Otros escribieron respuestas simples, pero que carecían de sentido. Finalmente, se incorporó la fase de estructuración, de manera online, para cumplir con el tiempo asignado al investigador. La mayor dificultad fue la aplicación de esta fase de manera remota, sin que los estudiantes pudieran hacer uso del programa computacional, lo que ocasionó obstáculos en la comprensión de la propiedad del promedio que se deseaba que comprendieran, a saber, que la suma de los desvíos respecto al promedio es igual a cero, lo que permitía entender a la media como un punto de nivelación. No fue posible implementar el post – test, debido a la falta de tiempo y por la manera en que se hizo esta última intervención.

Por otro lado, dado que no fue posible recopilar las respuestas de estas actividades de los alumnos que estuvieron de forma virtual, para la intervención final se aplicaron los mismos instrumentos y se llevaron a un formulario de Google, para que éstos tuvieran la posibilidad de contestar a las preguntas planteadas, y así recolectar sus respuestas y contrastarlas con las de sus compañeros que participaron estando en aula.

Las imágenes siguientes muestran las respuestas de dos alumnos que participaron de forma presencial en las fases de exploración e introducción, respectivamente (figuras 3 y 4).

Handwritten calculations and a conceptual statement:

$$5,2 + 4,3 + 5,0 + 5,8 + 7,0 + 6,1$$
$$= 29,7$$
$$29,7 \div 6 = 4,95$$

con notas mas bajas el valor del PROMEDIO es mas bajo y si tenemos notas mas altas el PROMEDIO es mas alta.

**Figura 3. Respuestas de una alumna en la fase de introducción (actividad de pilotaje).**

Integrantes:

1) Fase de exploración

$$16 \div 4 = 4$$

a) Un grupo de niños de 1° básico realizan el experimento de hacer germinar una semilla en un frasco de vidrio. Javier plantará 3 semillas, Claudia plantará 2, Isabel, 5 semillas y Roberto, 6 semillas. ¿Cuántas semillas se plantaron en promedio por niño?

b) Alejandra, Víctor y Marta compartieron los dulces que les dieron sus papás. Alejandra trajo 7 dulces, Víctor trajo 3, y Marta, sólo 2.

b.1) ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño? 12 dulces

b.2) Ahora, se suma Marcos, pero no tenía dulces para compartir, por lo que los niños hacen una nueva repartición. ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño, en esta ocasión? 3

b.3) Hasta ahora, ¿qué piensas que es el promedio? ¿Cómo lo expresarías? Todos Reciben la misma cantidad de dulce

c) Para ornamentar algunas calles de una ciudad, se ha establecido que se plantarán algunos árboles en las mismas. En la primera calle se plantarán 12 árboles, en la segunda calle se colocarán 15 árboles, y en la tercera, habrá 16 árboles. ¿Cuánto es el promedio de árboles que habrá por cada calle? De acuerdo a tu respuesta dada en el punto (b.3), ¿cómo expresarías el promedio en este caso? no siempre es una repartición

$$14,33$$

d) Una doctora realiza un recuento de la estatura de los pacientes adolescentes que ingresan a su consulta. Los primeros registros fueron (las medidas están dadas en metros): 1,67 - 1,70 - 1,69 - 1,65 - 1,64 - 1,73.

$$1,68$$

d.1) ¿Crees que el promedio de las estaturas de los pacientes sea igual a uno de los datos?

d.2) Calcula el promedio de las estaturas de los pacientes y compara tu respuesta de la pregunta (d.1)

d.3) La doctora recibe a otro paciente en su consulta. Al medir su estatura, ve que es de 1,71 m. Antes de calcular el promedio con las estaturas dadas, ¿entre qué valores crees tú que estaría el valor del promedio? Calcula el promedio usando las estaturas de los primeros seis pacientes y el que acaba de ingresar. Compara la respuesta que obtuviste con lo que pensaste anteriormente.

d.4) La doctora piensa que el promedio de las estaturas de los jóvenes representa muy bien lo que miden todas las personas de la misma edad. ¿Qué piensas tú sobre esto? ¿Puede estar equivocada la doctora o no?

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más?

1,73 cuando agregamos a media que agregamos datos más grandes, el valor del promedio aumenta. si agregamos datos más pequeños el valor del promedio disminuye

Figura 4. Respuestas de un alumno en la fase de exploración (actividad de pilotaje)

### 3.5 Procesamiento y análisis de datos

Para analizar los datos recogidos en cada una de las etapas, se consideró estudiar todas las respuestas dadas por los alumnos en el pre - test y post - test, tanto de los que participaron de forma remota como presencial. Mientras que, para la secuencia didáctica, se contemplaron aquellas preguntas donde los alumnos tuvieron mayores

dificultades o donde se esperaba que los alumnos contestaran qué entendían por el estadígrafo pedido, cómo podía entenderse, de acuerdo a la situación planteada y, cómo calculaban el valor del mismo. También se hicieron análisis respecto de qué ocurría al variar ciertos valores dados en una tabla.

A modo de ejemplo, se ilustra en la figura 5 una respuesta dada por un alumno sobre qué entiende por moda. Esta etapa corresponde a la etapa 1, que es el pre – test.

No, por que la moda es algo muy diferente que las notas, la moda es algo que esta destacado por cierto tiempo, pero después termina esa moda y se va a por otra, mientras que las notas son permanentes, la que consigues es por tu aprendizaje. En el caso de Sofía, se repitieron 2 notas pero después de logro superarse y subir sus calificaciones

**Figura 5. Respuesta dada por un estudiante para el concepto de moda que participó de manera virtual (pre – test).**

Para el proceso de análisis, se decodificó cada respuesta de los estudiantes en unidades de significado más pequeñas. Como se ilustra en la tabla 1, para cada unidad de significado se hicieron interpretaciones en función de los acontecimientos y el desarrollo de la clase, las cuales, vistas en su conjunto, permitieron establecer las conclusiones reportadas en el siguiente capítulo.

**Tabla 1. Ejemplo de decodificación de las respuestas de los estudiantes**

<b>Unidad de Significado</b>	<b>Interpretación</b>
<i>No, por que la moda es algo muy diferente que las notas,</i>	Establece diferencias sustanciales entre el concepto y el problema, que no le permite identificar las relaciones entre ellos.
<i>la moda es algo que esta destacado por cierto tiempo pero después termina esa moda y se va a por otra,</i>	Define la moda desde sus experiencias previas relacionada con la vestimenta, fuera del contexto de estadística.
<i>mientras que las notas son permanentes, la que consigues es por tu aprendizaje.</i>	Refuerza los argumentos que le llevan a pensar que no hay relación entre el concepto y el problema
<i>En el caso de Sofía, se repitieron 2 notas pero después de logro superarse y subir sus calificaciones</i>	Involucra aspectos de la superación personal y los juicios punitivos de las evaluaciones para explicar el problema, sin resolverlo ni vincularlo al contexto de la estadística.

A continuación, se muestra la respuesta entregada por dos alumnos que contestan a la pregunta (d.5) de qué ocurre cuando se agrega un dato atípico y se calcula el promedio. En este caso, la diferencia entre la calidad y el tipo de respuestas llevó a definir que era fundamental hacer distinciones entre los resultados de los estudiantes que asistían a la clase de manera presencial, de aquellos que lo hacían de manera virtual. La figura 6 muestra lo que contestó un alumno que participó de manera virtual, mientras que la figura 7 es lo que respondió un estudiante de manera presencial. Estas corresponden a las respuestas dadas en la segunda etapa de la secuencia, en particular, en la fase de exploración.

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más?

se debe ha que se lo agrego un digito superior y mucho MAS grande (Por que era mucho mas grande que los demas)

**Figura 6. Respuesta dada por un alumno a la pregunta (d.5) de la fase de exploración que participó de forma presencial.**

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más? \*

el promedio de ser 1.68 a pasado a ser 1.72, ya que lo que mide el paciente es mas de lo que el máximo demostró (1.73, ósea que a mide 0,19 cm que el otro paciente) el nuevo paciente es un dato atípico

**Figura 7. Respuesta dada por un educando a la pregunta (d.5) de la fase de exploración que participó de forma remota.**

Finalmente, en la tercera etapa, concerniente al post – test, se muestran los resultados que entregaron los escolares al culminar las fases de exploración, introducción y estructuración del Ciclo de Aprendizaje Constructivista de la etapa 2. Las figuras que se muestran a continuación corresponden a las respuestas entregadas por dos estudiantes que contestaron a la prueba, en modalidad virtual y presencial, respectivamente.

b) En otra fábrica se ha medido la concentración de plomo en el aire (en microgramos por metro cúbico), encontrándose un valor de 5,4. Determina el valor promedio con estos siete valores. ¿Por qué ha variado tanto el valor del promedio? \*

1,37 es el promedio de los 7 valores, porque 5,4 es muy grande por lo tanto afecta el promedio.

**Figura 8. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera virtual en el post – test.**

- b) En otra fábrica se ha medido la concentración de plomo en el aire (en microgramos por metro cúbico), encontrándose un valor de 5,4. Determina el valor promedio con estos siete valores. ¿Por qué ha variado tanto el valor del promedio?

0,708 1,3757 porque la cifra que se  
Agrego era mucho mas grande haciendo  
que el promedio VARIE DRÁSTICAMENTE

**Figura 9. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera presencial del post – test.**

Como se mencionó al inicio de este acápite, la comparación entre las respuestas de los alumnos que participaron de forma remota y presencial, permitió contrastar el nivel de argumentación que entregaron cada grupo. En la sección siguiente se analiza, exhaustivamente, los resultados y respuestas que argumentaron los estudiantes de cada grupo. Se podrá ver que, en ocasiones, las respuestas dadas son similares entre los dos grupos (presencial y virtual), sólo cambian en algunas palabras; en otras, las respuestas cambian considerablemente, ya sea aportando más profundidad y argumentación de sus análisis o porque entregan resultados más precisos.

## 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES DE LAS ACTIVIDADES

### 4.1 Análisis de las respuestas del Pre - test

El análisis de las respuestas se hizo en dos partes, siendo la primera sección referida a la definición de las medidas de tendencia central (promedio, mediana y moda) y dato atípico, y en la segunda parte, la sección de cálculo y argumentación de las medidas de tendencia central con ejercicios. También, el análisis contempla cada pregunta por separado, estudiando cada respuesta dada para el promedio, la mediana, la moda y dato atípico, de la primera sección, así como para cada ejercicio, de la segunda sección.

#### I) CONCEPTOS

**Define con tus palabras los siguientes términos**

##### a) Promedio o media aritmética

De los 11 alumnos que trabajan de forma online, 6 de ellos responden de forma similar, indicando que es un *"conjunto infinito de números"*, respuesta que también se replica con un estudiante que respondió presencialmente. Sin embargo, dos estudiantes mencionan que la media aritmética es *"un solo número tomado como representante de una lista de números"*, o que *"es el valor característico de una serie de datos cualitativos"*. Por su parte, 3 educandos dan las siguientes respuestas:

- *"es el valor promedio que se encuentra al sumar los valores y dividir entre las cantidades de valores existentes";*
- *"lo obtenido al sumar todos los números o datos y dividir el resultado en el número total de números/datos";*
- *"la media de un conjunto de números, algunas ocasiones simplemente llamada el promedio, es la suma de los datos dividida entre el número total de datos"*

En otras palabras, entregan la definición formal de promedio, haciendo una clara alusión a la obtención del mismo a través del algoritmo.

Por otra parte, de los 7 alumnos que participaron de forma presencial, 5 de ellos no respondieron a la definición de lo que es el promedio. Las otras dos respuestas que dieron los educandos fueron: *"es el resultado final de varios valores"*, *"porcentaje a partir de "porcentajes" para hacer un cálculo"*.

La primera observación a rescatar está en las dificultades que tuvieron los alumnos que participaron de manera online versus los que estuvieron de forma presencial. Los últimos tuvieron más dificultades que los primeros, pues los que estaban en forma online extraían sus respuestas haciendo uso de internet, mientras que los alumnos que respondieron el pre test de forma presencial, no supieron argumentar sus definiciones. Esto demuestra que aún existen dificultades con el conocimiento básico del concepto de promedio, siendo que este contenido es estudiado en 5° básico.

##### b) Mediana

Quienes contestaron de forma presencial, 5 alumnos no entregaron una respuesta a la pregunta. Sólo 2 de los 7 alumnos que participaron bajo esta modalidad dieron su

respuesta: "cualquier cosa mediana o suave como, por ejemplo, una pelota blanda"; "el medio de algo". Puede apreciarse que esta última respuesta dada por el estudiante tiende a aproximarse a la idea de mediana, algo que está en el centro, pero no especifica cómo ubicarlo o qué es ese algo.

Por su parte, de los 11 alumnos que responden bajo la modalidad virtual, 6 de ellos contestan que la mediana es "el valor central de la variable de posición central en el conjunto de datos ordenados"; 2 estudiantes dan como respuesta: "es un valor que se encuentra en la mitad, al haber ordenado previamente los datos". Un alumno entrega la definición formal de la mediana, pero la ausencia de argumentación permite inferir que es poco probable que la conociera o que la comprenda a cabalidad. La siguiente imagen ilustra la respuesta del alumno.

En el ámbito de la estadística, la mediana representa el valor de la variable de posición central en un conjunto de datos ordenados. Se le denota mediana. Si la serie tiene un número par de puntuaciones la mediana es la media entre las dos puntuaciones centrales

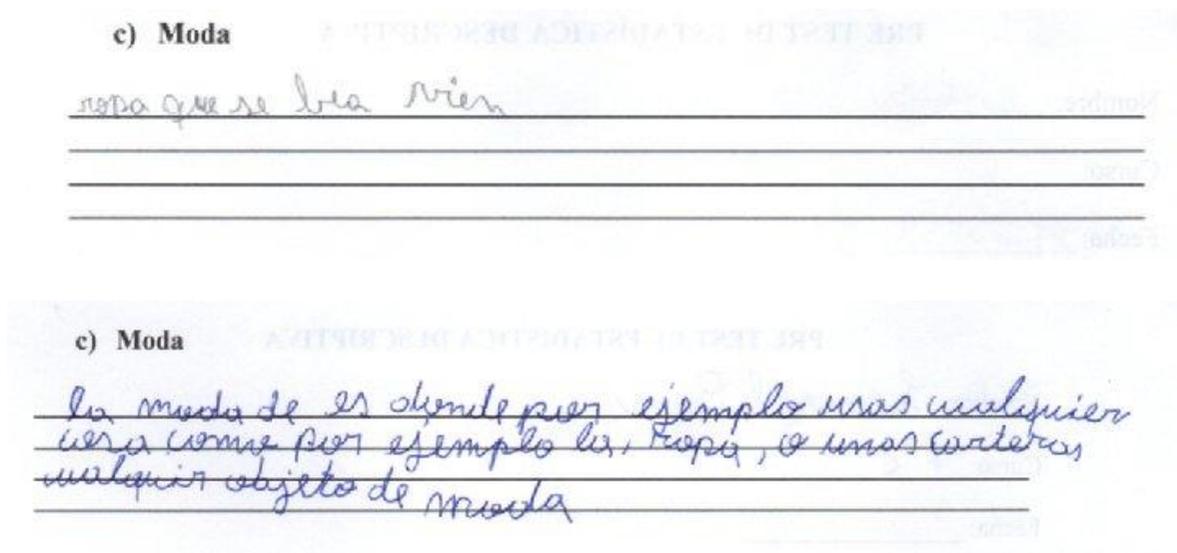
**Figura 10. Definición de la mediana entregada por un alumno que participó de manera online.**

Sólo una alumna (online) entrega una respuesta más "intuitiva" de lo que puede significar esta medida: "un número intermedio en un grupo de números".

Se esperaba que los alumnos tuvieran dificultades en definir esta medida de tendencia central, pues es un contenido desconocido para ellos. Sin embargo, es interesante señalar que, ninguna de las respuestas dadas por los alumnos que participaron de manera virtual, menciona que la mediana es un valor que indica que, al menos, un 50% de los datos son mayores o iguales a la mediana y, al menos, un 50% de los datos son menores o iguales a ella.

**c) Moda**

De los 7 educandos que contestaron el pre test de forma presencial, 5 de ellos no responden, mientras que los otros alumnos indican situaciones más cotidianas, relacionadas con la vestimenta de cada persona, como muestra la figura 11.



**Figura 11. Respuestas de los alumnos que asocian la moda (medida de tendencia central) a la vestimenta de las personas.**

Por su parte, de los 11 alumnos que respondieron de manera remota, 4 de ellos señalan que es "el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos"; otros 4 alumnos indican que es "el dato o número que más se repite"; otros dos educandos hacen mención al concepto de frecuencia, como se puede ver en las respuestas que dieron: "valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos". Por último, un estudiante entrega la definición formal de moda.

En la estadística, la moda es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos. Esto va en forma de una columna cuando encontremos dos modas, es decir, dos datos que tengan la misma frecuencia absoluta máxima. Una distribución trimodal de los datos es en la que encontramos tres modas

### **Figura 12. Definición de moda dada por un alumno que participó de manera remota**

Se pudo concluir que las respuestas dadas por los estudiantes que participaron de forma remota fueron extraídas de internet, ya que este contenido pertenece a 7° básico, y no se ve en los cursos anteriores; además, el uso de formalismos y la poca argumentación sobre sus respuestas dejan en evidencia que no comprenden lo que están planteando.

#### **d) Dato atípico**

De los 7 alumnos que participaron de manera presencial, ninguno de ellos pudo responder. Esto era esperable, pues no es un conocimiento previo que hayan adquirido los educandos en los cursos previos. Sin embargo, los alumnos que respondieron de manera online, 7 de ellos señalan que es "una observación distante a los demás datos". Otros 3 alumnos escriben que es "un dato que no se corresponde con los demás"; mientras que sólo uno de sus compañeros entrega la definición formal de dato atípico.

En estadística, tales como muestras estratificadas, un valor atípico es una observación que es numéricamente distante del resto de los datos. Las estadísticas derivadas de los conjuntos de datos que incluyen valores atípicos serán frecuentemente engañosas.

### **Figura 13. Respuesta formal de un alumno de dato atípico**

En esta sección, a los estudiantes se les preguntaba por la definición de las medidas de tendencia central (promedio, mediana y moda) y de dato atípico. Una de las dificultades que se pueden mencionar fue saber si los alumnos ya tenían conocimiento de algunas de ellas, como el caso del promedio; mientras que, en otros casos, se puede ver que muchos estudiantes copiaron sus respuestas desde internet, lo cual hace dudar de que lo pudieran comprender a cabalidad. Si bien internet se ha transformado en una herramienta potente para recopilar información y clarificar dudas, no siempre lo que entrega es totalmente correcto o entendible para el nivel de conocimientos que tienen los estudiantes.

Como conclusión de esta primera parte, se puede decir que una de las dificultades que presentaron los estudiantes está en cómo definen estos conceptos. Era esperable que no supieran muchos de estos términos, pues, como se señaló antes, corresponden a contenidos propios de este nivel y que aún no han visto.

## II) OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN

En esta segunda parte del pre test, a los alumnos se les solicita calcular los valores de las medidas de tendencia central solicitadas en cada caso, e interpretarlas. Se pudo constatar que los estudiantes tuvieron dificultades en ambas tareas, lo que no es de sorprender para el caso de la mediana, la moda y la interpretación de dato atípico, ya que son términos desconocidos para ellos. Se debe recalcar, eso sí, el caso de la media aritmética, en el que los educandos cometieron errores que se exponen en la problemática, y que fueron expuestos por algunos autores en dicha sección. Lo llamativo de estos errores es que, siendo un contenido visto por los alumnos en 5° básico, se equivoquen en el cálculo del promedio.

- a) **El piloto de una aerolínea desea saber el número de vuelos desde Santiago a regiones, durante una semana. El operador le entrega, al cabo de unos días, la siguiente información:**

Día de la semana	Número de vuelos
Lunes	23
Martes	34
Miércoles	25
Jueves	29
Viernes	28
Sábado	35
Domingo	34

### a.1) **Calcula el promedio de viajes que hubo durante esta semana**

Los alumnos presenciales (7 de ellos) respondieron incorrectamente a la pregunta, pues sólo sumaron la cantidad de vuelos que hubo durante la semana, pero no dividieron este resultado por la cantidad de días que tiene una semana. Por otra parte, 5 alumnos que contestaron de forma online, también se equivocaron en lo mismo que sus compañeros que respondieron de forma presencial. Sólo 6 alumnos que participaron con esta modalidad contestaron correctamente a la pregunta, (29,71 vuelos en promedio); algunos de ellos aproximaron sus respuestas a un número entero (29 o 30).

Un aspecto interesante a observar es el error que cometieron los 12 alumnos que contestaron a la pregunta, y es en no dividir por la cantidad de días que tiene la semana. De los 19 estudiantes, que 12 de ellos hayan cometido el mismo error, no es algo menor y es coincidente con lo que se planteó en los antecedentes, ya que, como lo señalan Mochón y Tlachy (2003, p. 13) "algunos estudiantes de secundaria suman los datos para calcular el promedio y no dividen entre el número de datos (promedio como una suma)".

a.1) Calcula el promedio de viajes que hubo durante esta semana

hubo en promedio 208 vuelos esta semana

a.1) Calcula el promedio de viajes que hubo durante esta semana

ys crees que hubo un promedio de 217 vuelos en total

**Figura 14. Errores cometidos por dos alumnos al calcular el promedio de vuelos durante la semana.**

a.2) ¿Qué significa el valor que obtuviste en la pregunta anterior?

De los siete alumnos presenciales que respondieron a la pregunta, sólo uno de ellos no contestó; mientras que el resto indica que es "el número de vuelos que hubo durante la semana", pero no hacen mención a una repartición entre los días y la cantidad de vuelos que hubo por día.

Por otro lado, los educandos que participaron de forma remota, 8 de ellos contestaron de forma similar, indicando que es el promedio de vuelos que hubo durante la semana. Otras respuestas que entregan tres estudiantes de manera individual fueron las siguientes:

- "Es el resultado de sumar todos los vuelos y luego dividirlos por 7", o sea, hace mención al procedimiento (algoritmo) del cálculo del promedio;
- "el valor final después de calcular el conjunto de números";
- "cuántos viajes hizo en la semana".

Al igual que sus compañeros que trabajaron de forma presencial, nadie hace mención al promedio como repartición, en este ejemplo, del número de vuelos que hay por cada día de la semana. Esto debiese ser una interpretación conocida por los alumnos, ya que es tratada en 5° básico.

a.3) ¿Cuál fue el número de vuelos más frecuente durante la semana?

Para este caso, dos alumnos que participaron de forma presencial responden acertadamente a la pregunta (34). Otros 3 alumnos indican que fue el día sábado (con 35 vuelos), confundiendo en que hubo mayor cantidad de vuelos ese día, pero no es la cantidad de vuelos más frecuente que hubo durante la semana. Mientras, otros dos educandos entregan respuestas que intentan aproximar este valor (20 o 30), o sea, realizan una estimación de los números que más se repiten durante esta semana.

De los alumnos que participaron de forma online, 7 de ellos dan la respuesta correcta, pero no entregan mayor información que permita inferir cómo llegan a dicho resultado.

También, 4 estudiantes mencionan que la respuesta es 35, o mencionan al día sábado como el día con mayor número de vuelos, lo cual no es correcto.

#### **a.4) ¿Cuál es la mediana del número de vuelos de la semana?**

De los alumnos presenciales, 3 de ellos no responden a la pregunta. Otros dos estudiantes, que respondieron de forma presencial, entregan una "estimación" a la mediana, por ejemplo: "yo creo que 25"; "20 y algo". Otro considera que el valor de la mediana es la suma de los vuelos que hubo en la semana (208 vuelos); mientras que sus de los compañeros indica que la mediana es "de 12 semanas"; no entrega las razones de su respuesta.

Por su parte, de los educandos que contestaron de forma remota, 5 de ellos contestan correctamente a la pregunta. Cuatro alumnos, que también respondieron de forma virtual, entregaron respuestas incorrectas como, por ejemplo, 25, 28 o 30.

#### **a.5) ¿Qué indica el valor que obtuviste en la pregunta anterior?**

De los alumnos presenciales, 3 de ellos no responden la pregunta. Otros 4 alumnos dan a conocer respuestas poco claras ("las semanas que se puede viajar"; "el número de vuelos de la semana"; "el número más mediano").

Los alumnos que participaron vía remota, 7 de ellos entregan respuestas casi iguales, al indicar que es "la mediana de los vuelos de la semana". Sin embargo, un estudiante indica que es "el valor que ocupa el lugar central en un conjunto de datos"; la respuesta pareciera ser correcta, pero no lo es en el sentido estricto, dado que el valor de la mediana deja, aproximadamente, un 50% de los datos bajo este valor, y otro 50% de los datos, supera este valor. A su vez, es muy poco probable que este alumno haya tenido conocimiento previo de la mediana, pues está repitiendo lo que escribió en la definición (que lo copió de internet sin comprenderlo) y, además, es un contenido que se analiza en 7° básico, que no hace parte de la priorización curricular, por tanto, aún no lo han abordado. A esto se agrega que, una de las dificultades que surgieron durante la implementación de las actividades de manera remota, es que los alumnos compartieron sus respuestas, lo cual hace que muchas de ellas sean iguales o similares.

#### **b) Sofía revisa sus calificaciones de los controles de una asignatura, las cuales fueron: 5,4 – 3,3 – 6,7 – 4,3 – 5,1 – 3,3 – 5,8 – 4,9 – 6,0 – 5,7.**

##### **b.1) Calcula el promedio de las notas de Sofía. ¿Qué indica este valor?**

De los 7 estudiantes presenciales, seis de ellos no responden a la pregunta. Sólo uno otorga un resultado estimativo, indicando que el promedio de las notas está entre 5,0 y 5,1. A su vez, nadie entrega una respuesta del significado del valor de lo que es el promedio, esta vez, entendiéndose como un punto de equilibrio, entendiéndose esto último, para este ejercicio, como una nota que iguala la suma de las distancias entre las calificaciones más altas y más bajas.

Mientras, de los 11 educandos que participan de forma remota en la actividad, dos de ellos no responden; los otros 9 estudiantes, entregan la respuesta correcta al cálculo del promedio de notas (5,05). Sin embargo y, al igual que sus pares que participaron estando presentes en el aula, ninguno de ellos da una interpretación del valor del promedio. Al respecto, se corrobora lo dicho por Coba, del Pino y Wistuba (2010, citado por Alvarado, 2017, p. 5):

Considerar la media aritmética desde la expresión que permite su cálculo, es decir, como la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos sumados, no permite que se reflexione correctamente ante la media aritmética y que se le considere como un representante de un conjunto de datos.

### **b.2) ¿Cuál es la nota de Sofía que más se repite?**

De los educandos presenciales que respondieron a la pregunta, 4 de ellos dan la respuesta correcta. Otros 3 alumnos indican que las notas más frecuentes son las que están entre 5 y 6; esto se debe a que, posiblemente, sean la mayor cantidad de notas que están entre estos valores.

Aquellos que participaron de forma virtual, dos alumnos responden equivocadamente, considerando que la nota que más se repite es aquella que está entre las calificaciones 5 y 6. Otros nueve alumnos responden de forma correcta (la nota que más se repite es 3,3).

### **b.3) ¿Crees tú que la moda puede ser un buen representante de las notas de Sofía? ¿Cuál considerarías tú?**

De los alumnos que participaron de forma presencial, 4 de ellos no responden, mientras que 2 estudiantes no dan respuestas satisfactorias de por qué la moda pudiera ser un buen representante ("*sí, creo que si considero ser un representante de las notas de Sofía*"; "*talbes (sic) porque también la gente califica la moda*"); así mismo, otro alumno considera que la moda no es un buen representante de las notas, pero tampoco da las razones.

Por otro lado, los educandos que contestaron esta pregunta vía virtual, sólo 3 de ellos la omitieron. Otros tres estudiantes, que estuvieron de forma remota, intentaron argumentar numéricamente sus respuestas: dos de ellos mencionan que el 3,3 sí es un buen representante, mientras que el tercero, indica que la moda es 5; esto puede

*No, por que la moda es algo muy diferente que las notas, la moda es algo que esta destacado por cierto tiempo, pero después termina esa moda y se va a por otra, mientras que las notas son permanentes, la que consigues es por tu aprendizaje. En el caso de Sofia, se repitieron 2 notas pero después de logro superarse y subir sus calificaciones*

deberse a que hay una mayor cantidad de notas que están entre 5 y 6.

Un aspecto interesante son las respuestas que entregan 4 alumnos vía virtual, a saber (la cuarta respuesta está dada en la figura 15):

- "*La mediana es un representante de las notas*".
- "*Hay pocas notas que se repitan, si hubieran (sic) más notas la tomaría en cuenta*".
- "*La moda no representa el total de las notas*".

#### **Figura 15. Respuesta de un alumno argumentando de por qué la moda no podría ser un bien representante.**

Para la respuesta dada en la figura 15, llama la atención de cómo el estudiante condiciona su comprensión de la moda estadística a partir de su percepción sobre las modas asociadas al vestuario. La relación que establece es que, este estadígrafo será válido sólo por un periodo de tiempo, por lo que no será representativo de un conjunto de datos, ya que puede cambiar. En otras palabras, condiciona esta medida de tendencia

central a una situación cotidiana como el uso de las prendas de vestir. Aunque puede existir relaciones entre la moda estadística y la moda de vestuario, el alumno no posee la claridad para distinguir que la moda estadística, para este ejercicio, dado el conjunto de notas, no tiene que ver con el periodo de tiempo que estén estas calificaciones, sino más bien, tiene relación con la frecuencia con la que se repite cada dato.

Es llamativo que, en los 4 últimos casos, estos estudiantes hayan hecho uso de un lenguaje claro que deja entrever un concepto de "mayor frecuencia" e, incluso, del uso de otra medida de tendencia central, como la mediana, siendo que ellos no han visto este contenido, exceptuando el promedio. No obstante, las razones que entregan son insuficientes para dar a entender un conocimiento a cabalidad de estas medidas.

#### **4.1.1 Conclusiones del Pre – test**

Se puede visualizar que los alumnos no tienen una definición formal de las medidas de tendencia central y de lo que es un dato atípico; esta última era esperable. Es importante señalar que los educandos, en 5° básico, vieron el contenido de promedio (debido a que es un Contenido Mínimo Obligatorio). Sin embargo, parecen que no comprenden que el promedio pudiera interpretarse como una repartición. Esto se condice con lo expuesto en la problemática y que lo señala Alvarado (2017, p. 6): "enseñar y concebir el promedio como la expresión matemática que permite su cálculo, no permite que el estudiantado comprenda a cabalidad este concepto".

Por otra parte, como se señaló más arriba, una de las dificultades que se vieron durante la realización del pre – test fue lo que ocurrió con los alumnos que participaron de forma remota, dado que copiaron sus respuestas, además, ocuparon internet para responder a las preguntas formuladas en las que se les pedía definir cada medida de tendencia central y dato atípico con sus propias palabras. Algunos de ellos entregaron definiciones formales, pero se evidenció que es probable que no las entendieran o que, simplemente, no supieran lo que estaba diciendo.

## 4.2 Análisis de las respuestas de la fase de exploración

El análisis de las respuestas dadas por los alumnos se hizo considerando cada pregunta, realizando aquellas que son más significativas, tanto por la forma en la que contestaron, como también, por las dificultades que presentaron ante las mismas. A su vez, se consideró aquellas en se mostraron algunas dificultades expuestas en otras investigaciones

### PROMEDIO

#### 1) Fase de exploración

**b) Alejandra, Víctor y Marta compartieron los dulces que les dieron sus papás. Alejandra trajo 7 dulces, Víctor trajo 3, y Marta, sólo 2.**

##### **b.1) ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño?**

Todos los alumnos realizan correctamente el cálculo del promedio de dulces que hay entre los tres niños. Los alumnos que participan de manera presencial, exceptuando uno de ellos, al igual que sus compañeros que participan de manera remota, no tienen mayores problemas en aplicar el algoritmo del cálculo del promedio para responder a la pregunta.

**b.2) Ahora, se suma Marcos, pero no tenía dulces para compartir, por lo que los niños hacen una nueva repartición. ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño, en esta ocasión?**

De la misma manera que en el caso anterior, tanto los alumnos presenciales como los que estuvieron de forma virtual no tuvieron mayores problemas en responder a esta pregunta; hicieron uso del algoritmo de la división para contestar que cada niño recibió en promedio 3 dulces. Sólo una alumna que participó de forma presencial no respondió.

##### **b.3) Hasta ahora, ¿qué piensas que es el promedio? ¿Cómo lo expresarías?**

De los 11 alumnos presenciales, 5 de ellos indican que el promedio consiste en repartir los dulces, pero sólo uno de ellos menciona que es de manera equitativa; un alumno indica que la media aritmética es sumar cosas y dividirlo por el número de personas que hay; en otras palabras, hacen mención al procedimiento algoritmo del promedio. Mientras, 4 educandos mencionan que esta medida es una repartición equitativa. Sólo una alumna no contesta a la pregunta.

Por su parte, de los 7 alumnos que trabajaron online, 4 mencionan al algoritmo del promedio como una forma en como ellos lo interpretan. Sólo un alumno indica que el promedio consiste en repartir cosas. Otro estudiante parece confundirse con su respuesta, pues dice que es "un número tomado como el neutro". Finalmente, sólo 2 de sus compañeros que trabajaron de la misma manera, establecen que el promedio es una repartición igualitaria.

Se puede apreciar que, en esta pregunta, los alumnos que participaron estando en aula tuvieron mejores comprensiones del significado del promedio, en comparación con sus compañeros que trabajaron de forma remota, lo que se ve reflejado en las respuestas planteadas.

- c) **Para ornamentar algunas calles de una ciudad, se ha establecido que se plantarán algunos árboles en las mismas. En la primera calle se plantarán 12 árboles, en la segunda calle se colocarán 15 árboles, y en la tercera, habrá 16 árboles. ¿Cuánto es el promedio de árboles que habrá por cada calle? De acuerdo a tu respuesta dada en el punto (b.3), ¿cómo expresarías el promedio en este caso?**

Tanto los educandos que estuvieron de forma remota como presencial no tuvieron mayores dificultades en responder a esta pregunta, pues hicieron uso del algoritmo del promedio. De los alumnos que trabajaron presencialmente, 6 de ellos se limita a calcular la media de árboles por avenida, mientras que 3 de sus compañeros intenta explicar que, como el resultado no es exacto, no siempre el promedio es una repartición justa; a modo de ejemplo, un estudiante argumenta: "*el promedio no es un valor exacto (completo)*". Solamente 2 no contestan.

En contraparte de sus compañeros que estuvieron de manera física, ninguno de los 7 alumnos que resolvieron esta parte de manera virtual llega a esa conclusión, sólo se limitan a entregar el valor numérico del promedio de árboles por avenida. Una vez más, los que trabajaron de manera presencial tuvieron mejor comprensión del concepto de promedio como un reparto que no siempre es equitativo, en contraste con sus pares que participaron de forma remota.

- d) **Una doctora realiza un recuento de la estatura de los pacientes adolescentes que ingresan a su consulta. Los primeros registros fueron (las medidas están dadas en metros): 1,67 – 1,70 – 1,69 – 1,65 – 1,64 – 1,73.**

**d.3) La doctora recibe a otro paciente en su consulta. Al medir su estatura, ve que es de 1,71 m. Antes de calcular el promedio con las estaturas dadas, ¿entre qué valores crees tú que estaría el valor del promedio? Calcula el promedio usando las estaturas de los primeros seis pacientes y el que acaba de ingresar. Compara la respuesta que obtuviste con lo que pensaste anteriormente.**

Los educandos presentaron dificultades en la elaboración de la respuesta, pues se esperaba que dijeran que el valor del promedio se encontraba entre el valor más bajo y más alto; para este caso, entre la estatura más baja y más alta. Se puede señalar que, de los 11 alumnos que participaron de forma presencial, 3 dejan en blanco esta pregunta, mientras que los 8 restantes obtienen el valor numérico, pero ninguno menciona entre qué valores está el promedio.

Por su parte, de los 7 alumnos que participaron de forma remota, sólo uno de ellos no contesta, mientras que los otros 6 estiman un valor comprendido entre 1,68 y 1,70; para comprobar esto, calculan el valor del promedio pero, al igual que sus compañeros que trabajaron en aula, ninguno de ellos establece que la media está entre los valores extremos.

Las respuestas entregadas por los participantes dan cuenta que esta característica de la media aritmética no la conocen, pues ninguno de ellos la menciona. Esto último se refuerza con lo que encontraron Strauss y Bichler (1988, mencionado por Batanero, 2001, p. 86), en el que investigaron el desarrollo evolutivo de la comprensión de esta noción en alumnos de 8 a 12 años: la media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución. Puede señalarse, entonces, que ningún alumno logra la respuesta esperada.

**d.4) La doctora piensa que el promedio de las estaturas de los jóvenes representa muy bien lo que miden todas las personas de la misma edad. ¿Qué piensas tú sobre esto? ¿Puede estar equivocada la doctora o no?**

Esta pregunta parece ser más compleja para ambos grupos de educandos (presencial y virtual). De los que trabajaron de forma presencial, 5 de ellos argumentan que el promedio puede variar si se agregan más personas; 4 alumnos no responden; otro estudiante agrega que la doctora está equivocada, pues sólo pudo haber considerado a los alumnos más pequeños. Sólo un alumno de este grupo responde diciendo que puede haber personas más altas o más bajas que el grupo de pacientes, o sea, tiene la idea de casos que salgan fuera de la norma.

Por su parte, de los estudiantes que participan de manera online, 5 de ellos especifican que la doctora pudiera estar o no equivocada, haciendo uso de sus experiencias. A modo de ejemplo, 4 alumnos consideran que la doctora está en lo incorrecto porque *"no se considera una edad en específico"*; *"es relativo, depende de la edad del joven"*. Otros dos alumnos responden diciendo *"como el promedio está aproximadamente cerca de 1,69 o 1,70, la doctora está en lo correcto"*. Sólo un estudiante da un leve indicio de algo que sale de lo común: *"hay jóvenes más altos y el promedio cambiará"*. Sólo un estudiante deja en blanco la pregunta.

Una vez más, se puede ver que ninguno de los dos grupos logra argumentar, de manera convincente, la respuesta correcta, que en este caso es que la doctora puede estar equivocada, dado que puede haber personas más altas o más bajas. Exceptuando aquellos educandos que sí respondieron de esta forma (un estudiante presencial y otro, virtual), el resto, no establece argumentos concluyentes que permitan relativizar la interpretación de los datos estadísticos.

**d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más?**

De los 11 alumnos que participaron de manera presencial, 4 dejan en blanco la pregunta, mientras que 3 de ellos indican que el promedio cambia porque se agregan más datos; otros 3 argumentan que el promedio ha variado 4 centímetros más respecto al valor anterior, debido a que hay una persona que es más alta que los demás pacientes. Sólo un alumno da una respuesta poco clara.

Por otro lado, dos alumnos que respondieron a esta pregunta de forma remota, uno de ellos entrega el valor del promedio con las 8 estaturas de los pacientes; uno no contesta, y dos de ellos señalan que el promedio cambia porque se agregó un dato más; sin embargo, 3 compañeros argumentan que el promedio cambia porque el último paciente era muy alto, pero sólo uno de ellos hace mención explícita a que es un "dato atípico".

Al respecto, se puede apreciar que un pequeño grupo de participantes da la respuesta acertada, que el promedio cambia su valor (de 1,68 a 1,72) porque hay un paciente que es muy alto. Esto sólo se da en el grupo de estudiantes que trabajaron de forma virtual. Tanto el caso del estudiante que respondió de forma presencial, como quien participó de forma remota están ilustradas en la figura 16.

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más?

se debe ha que se lo agrego un digito superior y mucho MAS grande (Por que era mucho mas grande que los demas)

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más? \*

el promedio de ser 1.68 a pasado a ser 1.72, ya que lo que mide el paciente es mas de lo que el máximo demostró (1.73, ósea que a mide 0,19 cm que el otro paciente) el nuevo paciente es un dato atípico

**Figura 16. Tipos de respuestas dadas por dos alumnos que participaron de forma presencial y virtual, respectivamente.**

#### 4.2.1 Conclusiones de la fase de exploración

Esta primera fase tiene como propósito la presentación de algunas ideas básicas del promedio. Los ejercicios propuestos van direccionados como lo plantean Espinoza y Sánchez (2014, p. 105), al estudiar "situaciones concretas y simples, cercanas, en lo posible, a la realidad de los estudiantes". Esto "permite diagnosticar y activar conocimientos previos" (Gallego, Quiceno y Pulgarín, 2014, p. 926).

Los educandos conocen el algoritmo de cálculo del promedio, pues lo asocian al cálculo del promedio de sus calificaciones. Sin embargo, presentan dificultades en lo que es percatarse de que esta medida de tendencia central puede interpretarse como una repartición equitativa, pues no parece que hayan conocido este modo de verlo, aun cuando no siempre se cumpla esta condición. A su vez, pareciera ser, en una primera instancia, que tampoco supieran que la media aritmética varía mucho ante la presencia de valores que escapan de la norma, como también, que el valor de la media aritmética está comprendido entre los valores extremos de un conjunto de datos.

En general, puede señalarse que los alumnos online presentaron más dificultades que sus pares que trabajaron de forma presencial; las respuestas que entregaron estos últimos fueron más acertadas y se refleja tanto en los cálculos realizados como en los argumentos que esgrimieron en cada pregunta.

### 4.3 Análisis de las respuestas de la fase de introducción

Al igual que en las fases anteriores, se han tomado en consideración las preguntas más significativas desde el punto de las reflexiones presentadas por los educandos, como también, dónde se focalizan más los obstáculos para enfrentar las interrogantes planteadas durante esta secuencia.

#### 2) Fase de introducción:

**Reunidos en grupos de 4 a 5 estudiantes, los alumnos responden la siguiente secuencia de actividades dadas en una guía, luego, se comparten las respuestas en un plenario**

a) **Supongamos que un estudiante ha rendido dos pruebas; sus calificaciones fueron 5,0 y 7,0. ¿Cuál es el número que está a igual distancia (o a la misma distancia) de estas notas? Para ello, hagamos el siguiente diagrama:**

i) **Dibujamos una recta horizontal y escribimos el 5 y el 7**



ii) **Luego, entre ambos números, escribimos la cifra que está a la misma distancia de 5 y 7; en este caso, es el 6, pues el 6 está a una unidad sobre el 5 y, a su vez, está a una unidad debajo del 7. ¿Cómo puedes obtener este valor? ¿Puede haber otro número que cumpla la condición de estar a la misma distancia tanto del 5 como del 7?**



Los 9 alumnos presenciales intuyeron que la respuesta es 6, pero sólo uno ocupó la idea del promedio entre ambas notas para obtener este valor. En contraparte, de los 13 estudiantes que participan de manera virtual, 7 de ellos contestan de manera más completa, indicando que sólo el 6 es el único número que cumple con la condición que está a la misma distancia entre 5 y 7. Sólo uno de ellos menciona que, a través del promedio de ambas calificaciones se puede obtener el 6, único valor que está a la misma distancia entre ambas notas (figura 17). El resto no responde.

Es interesante señalar que, en esta sección, sólo un estudiante de cada grupo obtuvo el valor que está entre ambas calificaciones, que es el 6, y que lo consiguió promediando los dos datos que entregaban. El propósito de esta actividad es, precisamente, ilustrar a los alumnos que el promedio no sólo puede ser entendido como una repartición justa (de hecho, no siempre lo es), sino que, también, pueda entenderse como un punto de equilibrio y así enriquecer la comprensión de esta medida. Al respecto, como lo señala Alvarado (2017, p. 5), "entender la media aritmética sólo como un reparto equitativo, empobrece el real valor que tiene este concepto".

Sumando el 5 y el 7 y luego dividiendo el resultado y hay me daría el 6. No porque no hay otro número entre el 5 y el 7 y si lo hubiera no serviría porque no estaría a la misma distancia entre los dos numeros

**Figura 17. Argumentos que entrega un estudiante que participa de forma remota a la pregunta planteada.**

b) Primer ejemplo:

Ahora, supongamos que el mismo alumno obtuvo un 3,3 en su tercer examen. ¿Qué número nivela la suma de las distancias que hay entre el 3,3, 5,0 y 7,0? ¿Cómo lo conseguiste? Representa, nuevamente, estas notas en una recta numérica junto con el número que obtuviste.

En esta parte, sólo dos alumnos que participaron de forma presencial tuvieron problemas en esta pregunta, mientras 4 de los compañeros comprendieron que sólo el 5,1, es decir, el promedio de las tres notas dadas, es el único valor que nivela la suma de las distancias. También, 3 alumnos de este grupo argumentan de forma más completa, explicando que el procedimiento que utilizaron fue la aplicación del algoritmo del promedio para obtener su valor, y cómo lo hicieron. Es menester mencionar que el profesor a cargo de la actividad les explicó a los educandos el concepto de "nivelación de distancias", que consiste en la diferencia entre el dato y el promedio y, posteriormente, sumando estas diferencias, se obtiene como resultado cero.

Contrariamente a sus pares que estuvieron presencialmente, los educandos que respondieron de manera remota tuvieron más problemas en contestar: 5 estudiantes no la responden, uno alumno no completa el ejercicio, y otro se equivoca en la división. Además, uno de ellos intenta dar con la respuesta correcta, pero yerra al calcular la resta de cada dato con el promedio (responde con los datos del ejercicio siguiente). El resto de los 8 alumnos se limita a determinar el valor del promedio de las calificaciones usando el algoritmo de la media aritmética. Es llamativa la forma en la que un alumno contesta a la pregunta realizando un diagrama similar al que aparece al inicio de la actividad, haciendo una especie de recta numérica y colocando las calificaciones y el promedio en la misma. También se logra visualizar el desarrollo del algoritmo de la media aritmética con las tres calificaciones dadas (figura 18).

b) Primer ejemplo: Ahora, supongamos que el mismo alumno obtuvo un 3,3 en su tercer examen. ¿Qué número nivela la suma de las distancias que hay entre el 3,3, 5,0 y 7,0? ¿Cómo lo conseguiste? Representa, nuevamente, estas notas en una recta numérica junto con el número que obtuviste. \*

Sumando  $3,3 + 5 + 7 = 15,3 \div 3 = 5,1$   
←---3,3-----5-5,1-----7

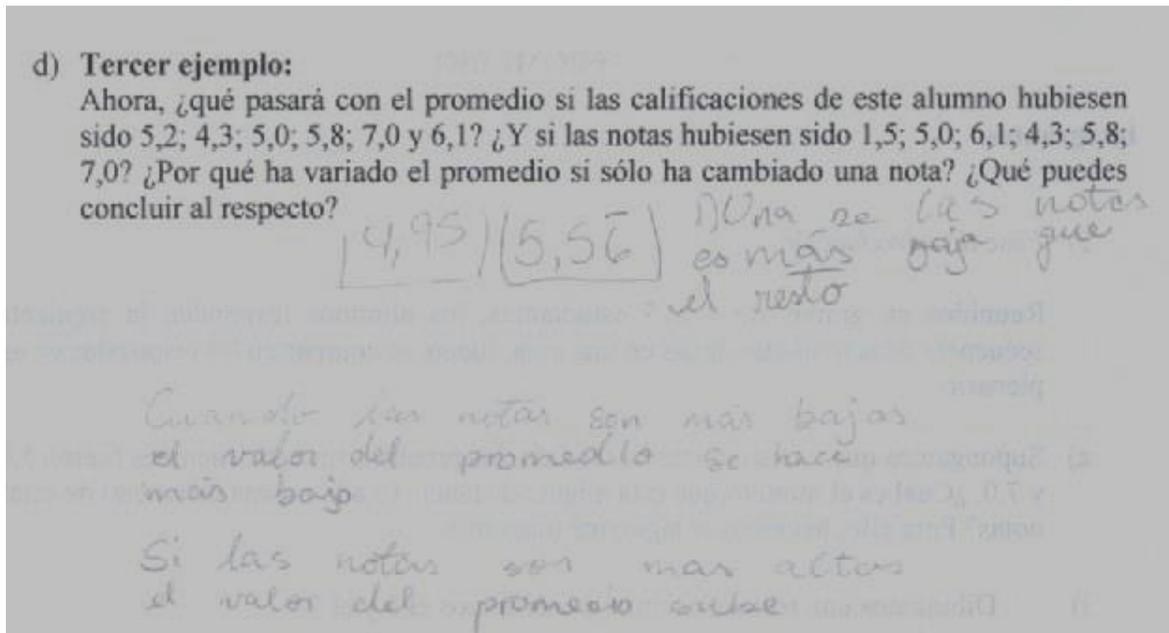
**Figura 18. Respuesta dada por un estudiante que participa de forma remota. Nótese que intenta representar, en una recta, el valor del promedio de las tres calificaciones.**

d) Tercer ejemplo:

Ahora, ¿qué pasará con el promedio si las calificaciones de este alumno hubiesen sido 5,2; 4,3; 5,0; 5,8; 7,0 y 6,1? ¿Y si las notas hubiesen sido 1,5; 5,0; 6,1; 4,3; 5,8; 7,0? ¿Por qué ha variado el promedio si sólo ha cambiado una nota? ¿Qué puedes concluir al respecto?

Seis educandos que participan de manera presencial entregaron respuestas incompletas, en las que 4 de ellos calcularon uno de los dos promedios de las notas dadas, o se limitaron a escribir que el promedio sube o baja de acuerdo a si hay notas

que son altas o bajas. Como se ilustra en la figura 19, una alumna entrega la respuesta completa, calculando los dos promedios e indicando la variación que sufre cuando hay valores altos o bajos.



**Figura 19. Respuesta dada por una estudiante al comparar los dos promedios de notas y su respectiva argumentación.**

Por otro lado, los estudiantes que respondieron de manera remota no estuvieron exentos de dificultades, pues 5 de ellos no respondieron, otros 3 dan respuestas poco concluyentes, y sólo 5 arguyen que el promedio cambia al variar mucho las notas debido a que hay una nota que es más baja que las demás (figura 20).

con la primera nota son 5,5 Y la otra nota sería 4,9 y la variación se debe a la nota 1,5 de el otro grupo el cual baja todo el promedio a el alumno

5,5 es el promedio de las primeras notas, 4,9 el promedio de las segundas notas , se aleja por la nota 1,5 que se sacó el niño, eso provocó la variación

**Figura 20. Conclusiones dadas por dos alumnos sobre cómo varía el promedio ante un cambio en las calificaciones**

#### 4.3.1 Conclusiones de la fase de introducción

La fase de introducción tiene por finalidad “explicar y adecuar modelos iniciales, a identificar nuevos puntos de vista con relación al contexto en estudio, a resolver problemas planteados y a buscar atributos que permiten definir los conceptos y relaciones entre las ideas previas y los nuevos conceptos” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 105). Los ejercicios presentados aquí van dirigidos a definir la media aritmética de una manera más amplia que sólo como una repartición igualitaria, o sea, que los educandos comprendieran que esta medida se puede entender como un punto de equilibrio entre un conjunto de datos.

En comparación a la actividad anterior, esta fue más compleja para los estudiantes, en particular, para el grupo que trabajó de forma presencial. Esto se puede contrastar con las respuestas que plantearon sus compañeros que trabajaron de forma remota, dado que sus argumentos fueron más certeros y concluyentes y dieron más razones de por qué el promedio sube o baja frente a notas más altas o bajas. Si bien todos los alumnos saben calcular la media aritmética de un conjunto de calificaciones, a pesar de que hayan obtenido errores en la suma o en la división, la interpretación del promedio como punto de equilibrio no es trivial.

Un aspecto positivo a mencionar, es el hecho de que los estudiantes no tuvieron mayores problemas en el uso de números negativos ni en su operatoria. Al realizar la suma de los desvíos, los alumnos pudieron constatar una de las propiedades que tiene el promedio, a saber, "la suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero" (Strauss y Bichler, 1988, citado por Batanero, 2001, p. 86).

#### 4.4 Análisis de las respuestas de la fase de estructuración

En esta sección, los alumnos trabajan usando el programa informático *Fathom* para modificar algunos datos entregados en la actividad y visualizar algunas propiedades del promedio. A medida que los alumnos leían los problemas planteados, los estudiantes debían manipular los datos que aparecían en pantalla, y explicar con sus palabras, qué ocurría con el valor de la media aritmética y por qué se debía ese cambio cuando ingresaban valores atípicos.

##### 3) Fase de estructuración:

Por medio de un plenario, los educandos responden las siguientes actividades y van siguiendo la secuencia que aparece en la guía, usando el software *Fathom*:

**¿Qué tanto ha disminuido la cantidad de agua caída en Santiago?**

Se sabe que, en Santiago, debido al calentamiento global, ha habido una disminución en la cantidad de agua caída, lo cual ha llevado a que, en estos últimos años, se haya decretado que estos han sido los años más secos para la capital. Pero, ¿qué tan cierta es esta afirmación? Supongamos que estás buscando esta información y que deseas corroborarla. Para ello, se te entrega la siguiente tabla que resume la cantidad de agua caída por año.

**Cantidad de agua caída en Santiago entre los años 1999 y 2019**

Año	Total de agua caída (mm)
1999	400,4
2000	621,8
2001	443,3
2002	608,0
2003	207,2
2004	408,5
2005	431,8
2006	453,6
2007	167,7
2008	374,8
2009	254,9
2010	184,7
2011	187,4
2012	320,0
2013	232,7
2014	246,2
2015	295,0
2016	268,3
2017	273,5
2018	233,1

- a) Durante el año 2019, apenas cayó 69,5 mm de agua, siendo éste el año más seco de los últimos lustros. Ingresas este dato y ve cómo cambia el promedio. ¿Cuánto ha cambiado con el valor del promedio que obtuviste anteriormente? ¿Qué ocurre con el valor de la suma total de las desviaciones respecto al promedio?

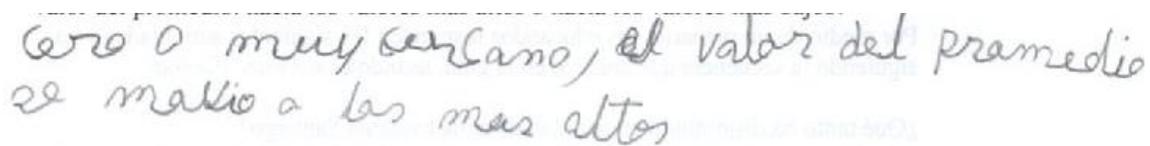
Cinco estudiantes, que estuvieron de forma presencial, contestan correctamente a la pregunta, indicando los valores de las medias de agua caída con los datos dados en el

*software* y agregando el nuevo valor. De este grupo, 3 de ellos arguyen que la suma de los desvíos se hace muy cercana a cero.

Los 10 compañeros que participaron de forma remota mostraron más complicaciones; esto se muestra a través de las respuestas entregadas: 4 de éstos entregan los valores en los que cambió el valor del promedio, y de éstos, sólo dos señalan que la suma de los desvíos se hace igual o muy cercana a cero. Otro alumno indica cuánto varió el valor de la media aritmética, antes y después de agregar el nuevo dato, pero no escribe los valores de los promedios con los datos entregados. De este grupo, solamente un estudiante intenta justificar el por qué cambió tanto la media, señalando que se debió porque se agregó un dato más, lo cual es una respuesta incompleta, pues le faltó mencionar que este dato era más pequeño que los demás.

- b) Ahora bien, supongamos que durante el año 2001 cayó 700 mm de agua, lo que representa algo fuera de lo común en un año normal. Este tipo de datos, que se alejan mucho del resto de las observaciones, se llama *dato atípico* o *outlier*. Esto hace que el valor del promedio cambie significativamente. Pero, ¿qué pasará con la suma de los desvíos respecto al promedio? Comprueba lo que sucede al cambiar este dato en el *software* y observa qué tanto ha cambiado el valor del promedio. Cuando ingresaste este dato, ¿hacia dónde se movió el valor del promedio: hacia los valores más altos o hacia los valores más bajos?**

Los estudiantes que participaron de forma presencial dan cuenta de que, aunque se agregue un dato atípico, la suma de los desvíos respecto al promedio se hace muy cercana a cero. También indican que, como se incorporó un dato que es muy grande, el valor del promedio se desplaza hacia los valores más altos (el valor del promedio sube). Mientras, los alumnos online se limitaron a responder escuetamente, mencionando que el valor del promedio sube cuando se adicionan datos que son más grandes; sólo una alumna indica que la suma de los desvíos es cercana a cero (figura 21).



Cero o muy cercano, el valor del promedio se movió a los más altos

el promedio subió a 325,62 la suma del desvío de los promedios es igual a 0. Se movió hacia los valores más altos.

**Figura 21. Respuestas dadas por dos alumnos a la pregunta que participaron de manera presencial y virtual, respectivamente.**

#### **4.4.1 Conclusiones de la fase de estructuración**

La fase de estructuración, como su nombre lo indica, tiene por finalidad que “los estudiantes muestren la estructuración de su conocimiento, lo aprendido, los cambios en sus puntos de vista, lo que promueve el nivel de abstracción de las ideas más importantes” (Espinoza y Sánchez, 2014, p. 106). Como tal, el objetivo de esta sección era que los estudiantes puedan comprender, usando el *software Fathom*, que la suma de los desvíos respecto al promedio es igual a cero, aun cuando agreguemos datos que son atípicos. A su vez, los alumnos trabajaron con datos reales, que les permitieran apreciar que la estadística es una herramienta que puede responder a otras áreas,

científicas o sociales. Al respecto, es interesante señalar lo que menciona Gatica (2017, p. 5, citando a Ben-Zvi y Garfield, 2004):

Los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con datos reales que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel. Los cambios en las situaciones hacen que los resultados no sean únicos, presentándose mayor variabilidad que otras áreas de las matemáticas.

Esto se ilustra con los argumentos que esgrimieron los participantes en esta fase: sus respuestas fueron, más bien, breves y concisas, lo que da cuenta de que poseen dificultades en explicar con palabras ante preguntas que son abiertas.

Por otra parte, el programa informático posee un deslizador que les permitió a los alumnos comprobar, primero, de forma intuitiva, en qué valor se encuentra el valor del promedio y, con los comandos respectivos, verificar si su respuesta se acerca al verdadero valor de la media aritmética. Esto les ayudó a comprobar que la suma de los desvíos respecto a la media es igual, o aproximadamente igual, a cero.

Ahora bien, al finalizar esta sección, los alumnos comprendieron que el promedio sube o baja a medida que se agregan datos que son más altos o más bajos que el resto, respectivamente, en contraste a que si se agregan datos que están entre los extremos iniciales del conjunto de datos.

No obstante, en ambos grupos de alumnos que participaron de la actividad, puede entenderse que esta fue la fase más compleja de todas, aun cuando se usara un *software* pensado para la enseñanza de la estadística, para ayudar a reforzar la idea del promedio como punto de equilibrio.

#### 4.5 Análisis de las respuestas del Post – Test

En esta última sección, el análisis se ha realizado pregunta por pregunta, para reflejar el nivel adquirido por los estudiantes después de haber trabajado en la secuencia planificada.

##### I) CONCEPTOS

**Define con tus palabras los siguientes conceptos estadísticos**

###### a) Promedio o media aritmética

De los 7 estudiantes que participan presencialmente de esta última parte, dos alumnas no saben qué responder, y un tercero entrega una respuesta poco clara; otros dos estudiantes contestan que es una repartición, pero sólo uno de ellos complementa al decir que es "equitativa"; mientras, un alumno intenta definirlo dando como ejemplo "el promedio de la nota". Por último, un educando señala que el promedio es "una forma de igualar una cosa", sin hacer referencia a qué se refiere con dicha cosa. Es llamativa esta respuesta, pues este estudiante intenta, posiblemente, hacer mención al promedio como punto de equilibrio, haciendo una indicación implícita a la igualación de los desvíos respecto al promedio.

Por su parte, de los 5 alumnos que respondieron de manera virtual, tres de ellos indican que la media aritmética es la suma de los datos dividido en el total de datos, como puede verse en la figura 22, es decir, emplean la definición del promedio a través de su algoritmo. Otras respuestas que dieron los alumnos fueron "el promedio es repartir", sin desarrollar mayormente su idea, aunque pareciera dar a entender que está indicando una repartición equitativa. Finalmente, un educando define esta medida como "el valor central calculado entre un conjunto de números".

###### a) Promedio o media aritmética \*

Promedio es cuando de un distinto tipo de números se suman todos y se dividen por el número de veces, ej 3 notas. sumas las 3 notas y las divides en 3

###### a) Promedio o media aritmética \*

El promedio o media aritmética es el valor central calculado entre un conjunto de numeros

#### **Figura 22. Dos tipos de respuestas entregados por los alumnos que participaron bajo la modalidad virtual**

Puede verse, entonces, que las respuestas de los alumnos son variadas, pero no completas, pues se esperaba que pudieran mencionar todos los aspectos del promedio como el algoritmo para su cálculo, una repartición equitativa, o un punto de equilibrio; este último concepto que no aparece, al menos de forma clara, en las respuestas que entregan los estudiantes.

###### b) Dato atípico

Del grupo que participó de manera presencial, 3 alumnos no contestan y dos no dan una respuesta clara. Dos alumnos arguyen que el dato atípico es un dato que varía

mucho; uno de ellos indica que este "dato varía mucho al agregar una cifra más". Por lo que se aprecia, en este caso, este alumno confunde el hecho de que, al incorporar un dato atípico, es el valor del promedio el que varía. El último estudiante establece que "es algo muy grande o muy bajo".

Por otro lado, de los 5 alumnos que trabajaron vía remota, uno contesta mencionando que es "una observación numérica", pero no desarrolla su idea. Dos alumnos indican que el dato atípico es un "valor que es muy alejado del resto de los demás datos". Las respuestas entre ambos son ligeramente distintas. Una interpretación distinta es la que da otro estudiante, al señalar que "es algo que no se da frecuentemente". Esto da a entender que asocia el dato atípico con algo que puede ocurrir muy rara vez. Una respuesta interesante es la que da otra estudiante, al argumentar que "es un valor que puede afectar el promedio bastante porque puede ser muy pequeño o muy grande". Es decir, explica que es un dato que está alejado del resto y que, por ello, el promedio varía significativamente, cuestión que se vio reflejada por medio del uso del programa estadístico en la fase de estructuración (figura 23).

#### b) Dato atípico \*

Es un valor que puede afectar el promedio bastante porque puede ser muy pequeño o muy grande.

**Figura 23. Respuesta dada por un estudiante que participó de manera virtual.**

## II) OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN

- 1) **Se ha determinado que un exceso de la concentración de plomo en el aire puede producir nocivos efectos en la salud. En efecto, se ha determinado el valor de 1,5 microgramos por metro cúbico como nivel máximo tolerable. Los siguientes datos corresponden a concentraciones de plomo, en microgramos por metro cúbico, medidos en el aire, al interior de algunas fábricas:**

$$0,4 - 1,1 - 0,42 - 0,73 - 0,48 - 1,1$$

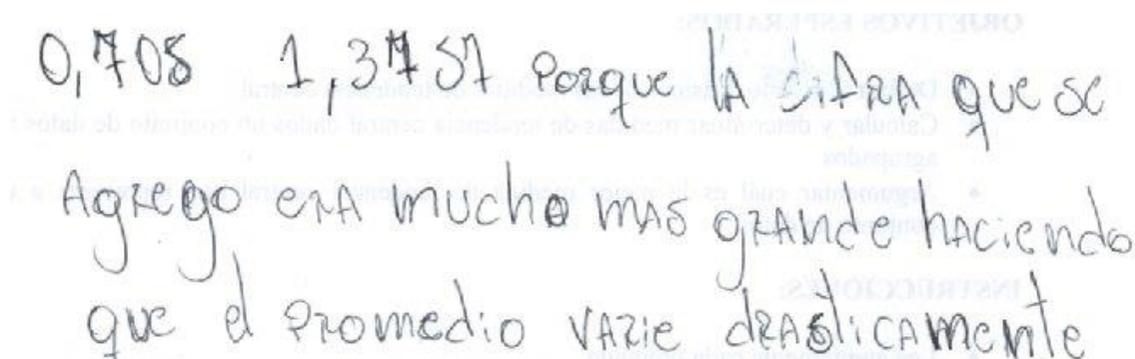
- a) **Determina la concentración promedio de plomo que hay en estas seis fábricas**

De los 7 alumnos presenciales que contestaron, 3 de ellos no respondieron a esta pregunta; un alumno sólo suma los valores dados, pero no divide por la cantidad de datos que hay. También, un estudiante realiza el procedimiento del cálculo de la media aritmética de forma correcta, pero yerra en escribir su respuesta con aproximación (el valor correcto es 0,705, mientras que el alumno escribe 0,76). Solamente, dos educandos de este grupo calculan correctamente la media de las concentraciones de plomo.

Por otro lado, sus pares que participaron de manera online, uno sólo suma los datos y no divide por el total de ellos, mientras que otro estudiante entrega un valor que no se condice con alguna de las posibles respuestas que pueden obtener (indica que el promedio es 0,9). Sólo 3 estudiantes contestan correctamente a la pregunta, dando el valor del promedio.

- b) En otra fábrica se ha medido la concentración de plomo en el aire (en microgramos por metro cúbico), encontrándose un valor de 5,4. Determina el valor promedio con estos siete valores. ¿Por qué ha variado tanto el valor del promedio?

Del grupo de estudiantes presenciales que participaron, 3 no responden a la pregunta. Otro alumno calcula la suma de los datos, pero comete el error de no dividir por el total de ellos. Dos estudiantes entregan respuestas poco claras, además de no desarrollarlas. Dos alumnos argumentan el por qué el valor del promedio cambió tanto; uno de ellos menciona que se debe "porque es un valor muy alto", sin hacer referencia al valor 5,4 que se agregó, tampoco da información del nuevo valor de la media de concentración de plomo, mientras que su otro compañero, entrega una respuesta más completa (figura 24), haciendo uso de un lenguaje, si bien, más sencillo, da a entender que trata de explicar, en sus propias palabras, la presencia de un dato atípico.



0,708 1,3757 porque la cifra que se Agrego era mucho mas grande haciendo que el promedio varie drasticamente

**Figura 24. Argumentos que da un estudiante ante la pregunta de por qué la media aritmética varió.**

Por otro lado, de los alumnos que participan de forma virtual, sólo un alumno entrega una respuesta que no se condice con los posibles resultados esperados. Dos compañeros dan como respuesta la suma de los valores, pero, una vez más, cometen el error de no dividir por el total de datos; uno de ellos justifica que el valor de la media "varió porque al agregar un valor más alto que los demás como el 5,4 el promedio sube". Un estudiante no entrega el resultado numérico, pero hace mención explícita que el cambio se debe "por un valor atípico". Sólo una alumna justifica el cambio que sufrió la media al agregar un nuevo dato, como se puede ver en la siguiente figura 25.

- b) En otra fábrica se ha medido la concentración de plomo en el aire (en microgramos por metro cúbico), encontrándose un valor de 5,4. Determina el valor promedio con estos siete valores. ¿Por qué ha variado tanto el valor del promedio? \*

1,37 es el promedio de los 7 valores, porque 5,4 es muy grande por lo tanto afecta el promedio.

**Figura 25. Respuesta dada por una alumna ante la pregunta planteada**

- 2) Para ejercitar el concepto de promedio, una profesora pide a los niños obtener el número promedio de lápices de colores que tiene cada uno de ellos en su estuche. Las siguientes son las cantidades que dice cada uno de los 15 niños del curso:

4 – 2 – 1 – 5 – 10 – 3 – 7 – 9 – 2 – 5 – 5 – 2 – 7 – 1 – 12

- a) **Determina el promedio de lápices que hay por niño**

De los alumnos que contestaron esta pregunta de forma presencial, 3 de ellos no responden, mientras que otro realiza la suma de los lápices que tienen los niños, pero no divide esta cantidad por el total de niños. Este error ya fue detectado por Mochón y Tlachy (2003, p. 13) al indicar que “algunos estudiantes de secundaria suman los datos para calcular el promedio y no dividen entre el número de datos (promedio como una suma)”. Tres de sus compañeros, realizan correctamente el cálculo del promedio de lápices que hay por niño. Los 5 educandos que contestan esta pregunta de forma remota, no tuvieron dificultades, y llegan a la respuesta correcta.

- b) **¿Cómo podrías interpretar este valor?**

Cinco educandos que participan de forma presencial dejan en blanco esta pregunta. Dos de sus compañeros argumentan que este valor se podría interpretar como “*que no tienen muchos lápices*”, mientras que el otro explica el algoritmo del cálculo del promedio (“*sumo los datos y después los divido*”). En definitiva, este grupo de estudiantes evidencia que se mantienen las dificultades para interpretar el promedio en una situación contextualizada.

De los 5 educandos que trabajaron vía virtual, dos estudiantes se limitan a decir que el promedio de lápices por niño es 5, mientras que un tercero indica que, el valor obtenido en la pregunta anterior, se interpreta como “*el promedio de lápices por cada niño*”. Otro estudiante justifica su respuesta de manera poco clara, como se aprecia en la figura 26. Sólo uno de este grupo da una respuesta coherente, al indicar que el promedio es una repartición equitativa.

b) ¿Cómo podrías interpretar este valor? \*

AQUÍ SE REPARTIÓ ENTRE TODOS LA MISMA CANTIDAD

b) ¿Cómo podrías interpretar este valor? \*

que de cada 15 estudiantes un niño tendrá 5 lápices por promedio

**Figura 26. Dos respuestas entregadas por dos alumnos ante la pregunta de cómo podría interpretar el promedio de lápices por niño**

- c) **Uno de los 15 niños se ha equivocado al decir que tiene 10 lápices, pues en realidad tiene 20. Calcula el valor del promedio con este nuevo valor. ¿A qué se debe a que haya cambiado tanto su valor?**

En cuanto a los estudiantes que participaron presencialmente, cuatro de ellos no responden, mientras que tres compañeros mencionan que el valor del promedio cambió debido a que "se agregó un dato más alto", "una cifra grande" o que "el niño se equivocó y tenía el doble de sus lápices". De éstos, sólo dos dan a conocer la respuesta numérica correcta.

Por su parte, de los 5 estudiantes que participan de manera remota, cuatro de ellos obtienen correctamente el valor del promedio con el nuevo dato, mientras que otro sólo se limita a decir que "el promedio varió al alto, ya que aumentó la cantidad"; en esta misma línea, del grupo total, sólo uno no argumenta por qué la media de lápices por niño cambió. Tres alumnos indican que la variación se produjo por un cambio en uno de los datos, pero nadie hace mención explícita a que se debió a que se agregó un dato atípico.

#### **4.5.1 Conclusiones del Post – Test**

Dadas las respuestas obtenidas por ambos grupos de alumnos, se puede decir que la secuencia de actividades planteadas, para el caso del promedio, no fue satisfactoria, dado que prevalece el desconocimiento sobre los contenidos tratados en clases. La ausencia, en su mayoría, de un lenguaje estadístico básico, como mencionar dato atípico, o la falta de interpretaciones del promedio que no se ven expuestas en lo que contestaron los alumnos, como reparto equitativo o punto de equilibrio, hace ver que esta forma de trabajo, bajo las condiciones en las que se llevó a cabo no es efectiva (clases híbridas, es decir, parte del alumnado está en aula, mientras que otro grupo trabajaba a distancia; la reducción de las horas lectivas que, de 90 minutos cronológicos, disminuyeron a 60; así como la eliminación de estos temas del currículum nacional, al no ser un contenido priorizado, como lo estableció el Ministerio de Educación).

Se puede ver que, a modo de ejemplo, los alumnos, tanto los que participaron de forma remota como los que contestaron de manera presencial, cometieron el error de sumar los datos y no dividir por la cantidad total de ellos, situación que ya detectaron en su investigación Mochón y Tlachy (2003, p. 13). A su vez, la incorporación del *software* estadístico *Fathom*, para la mejora de la comprensión de las medidas de tendencia central, en particular, para el promedio, da cuenta que no generó aprendizajes significativos, ni mucho menos, una verdadera comprensión de la media aritmética y sus propiedades, siendo muy pocos alumnos que, apenas, lograron una noción muy incipiente de los contenidos tratados durante estas clases. Esto se opone a lo que sustentan Faustino y Pérez (2013, p. 11) al apuntar que "los estudiantes observan un aprendizaje significativo cuando realizan un uso apropiado de las TIC".

Si bien es cierto que "la tecnología puede jugar un papel muy útil, permitiendo que el estudiante pueda realizar aprendizaje activo fuera de la clase" (Gutiérrez y Grima, 2001, p. 200), debe entenderse que sólo es un medio que coadyuva a la mejora de los aprendizajes que los docentes esperan conseguir en sus estudiantes. Esto se debe a los cambios en la forma de enseñanza que no han dado los frutos deseados, en específico, cuando se hace referencia a la enseñanza expositiva. Esto se ilustra en lo que arguyen Gutiérrez y Ojeda (2016, p. 22) al plantear que "como los métodos expositivos han

demostrado su ineficacia, entonces, hay que recurrir a la tecnología como una alternativa potencialmente mejor". Sin embargo, con los resultados obtenidos, queda en evidencia que no sólo se trata del contraste entre lo expositivo y el uso de TIC, sino que existen diversos factores que condicionan los aprendizajes matemáticos de los estudiantes.

Es posible que, en situaciones normales, o sea, con el tiempo suficiente para abordar la secuencia y bajo el trabajo en conjunto entre los educandos y los profesores en aula, las respuestas deseadas hayan sido más certeras y completas, argumentando y utilizando el lenguaje propio de la estadística, pero adecuado al nivel de los alumnos.

## 5. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En esta tesis se pretendía caracterizar los aprendizajes de los estudiantes de 7° básico en los contenidos de estadística, en particular, de las medidas de tendencia central, a partir del aprendizaje basado en problemas, usando programas computacionales para el análisis de datos. Para ello, se ha separado este capítulo en los siguientes acápite: en las dos primeras secciones, se ilustran cuáles fueron los roles del ABP y de las TIC en las respectivas secuencias de actividades. Luego, se explican los objetivos que fueron trabajados y los resultados que se obtuvieron al culminar la intervención didáctica. A continuación, se explica qué relación hubo entre la intervención realizada y la pregunta de investigación formulada. En quinto lugar, se contrastan el supuesto de esta tesis con los resultados generales que se obtuvieron en esta tesis. Por último, se dan a conocer las conclusiones generales de este estudio, como también las limitantes y recomendaciones que se sugieren para posteriores trabajos, tanto en las intervenciones realizadas con ABP como las posibilidades de obtener un mayor provecho de las TIC.

### 5.1 El rol del ABP

El rol del ABP propuesta en la secuencia didáctica no causó el impacto esperado, ya que, de acuerdo con los resultados expuestos en las distintas fases de la misma, los estudiantes no lograron apropiarse de los aprendizajes esperados que se plantearon en cada fase. Como se pudo apreciar en los resultados expuestos en cada sección, los alumnos entregaron respuestas poco coherentes o claras, a medida que subía el nivel de dificultad de las actividades; en ocasiones, los alumnos que trabajaron de forma online tuvieron menos dificultades que los estudiantes que participaron de manera presencial y viceversa. Los educandos no comprendieron el concepto de promedio como punto de equilibrio ni como reparto equitativo, y como evidenció sus respuestas en el post – test, estas ideas trabajadas en las etapas de exploración, introducción y estructuración, no se vieron reflejadas en la etapa final.

### 5.2 El rol de las TIC

Las Tecnologías de Información y Comunicación estuvieron orientadas hacia la comprensión de algunas propiedades de las medidas de tendencia central; en particular, al promedio y a la mediana. A su vez, se esperaba que los alumnos hicieran uso de esta tecnología para ser llevada a la fase final de las intervenciones, al crear una encuesta con relación a un tema que fuera elegido o propuesto por ellos y que les permitiera responder algunas preguntas planteadas en la misma actividad.

En particular, se aplicó el *software Fathom*, que está dirigido tanto a escolares de niveles básico o medio, como a alumnos universitarios. El propósito del mismo era mejorar la comprensión de las medidas de tendencia central, usándolas en momentos específicos de la secuencia didáctica.

Como se mencionó, en el caso de la enseñanza de la estadística, las TIC favorecen la comprensión de los conceptos que se espera que aprendan los educandos, además, permite reducir los tiempos de los cálculos que se realizan. En el caso particular de esta investigación, el rol de las TIC fue coadyuvar en la comprensión de las propiedades del promedio y de la mediana, observando que el promedio es un punto de equilibrio y que la suma de los desvíos es igual a cero; y para la mediana, se esperaba que ayudaran a los estudiantes a concluir que su valor indica que, al menos, un 50% de los datos serán mayores o iguales a ella, y al menos, un 50% de los datos serán menores o iguales a

ella. Sin embargo, y por las razones que se sintetizan a continuación, puede decirse que el rol que tuvieron las TIC en esta tesis fue limitado.

Para comenzar, la modalidad híbrida de trabajo en que se aplicó este estudio, limitó la participación y el uso del *software* hacia los estudiantes, como también el tiempo asignado a cada clase (cada una de ellas tenía una duración de 60 minutos). A su vez, los educandos mostraron que tenían obstáculos en la manipulación del programa (los comandos están en inglés; además, dado que el manejo de la recta móvil para determinar el promedio entregaba una estimación aproximada, entonces los estudiantes no pudieron concluir y comprender que la suma de los desvíos respecto al promedio era igual a cero), esto no permitió que se diera una dinámica de trabajo más fluida en la fase de estructuración de la media aritmética. Además, no hubo otra oportunidad para aplicar el uso del *software* con otros problemas, para que los alumnos profundizaran en las desventajas que tiene la media aritmética cuando se presentan valores atípicos y la manera como estos cambian su valor. A lo anterior se suma que, por disposiciones de la institución donde fue implementada la investigación, tampoco fue posible realizar una comparación entre qué medida de tendencia central es más eficiente para interpretar los datos frente a *outliers*: si la mediana, la media o la moda.

### **5.3 Objetivos trabajados y sus resultados**

El primer objetivo planteado en esta investigación fue identificar el nivel de logro de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando resuelven problemas que implican comprender las medidas de tendencia central. Para ello, se aplicó un pre – test, con preguntas que contemplaban, en la primera parte, explicar qué es la media aritmética, la mediana, la moda y dato atípico y, en una segunda parte, se proponía calcular cada uno de estos estadígrafos y explicar qué significaba este valor.

De acuerdo a los resultados obtenidos en esta prueba, puede decirse que los estudiantes presentaron un bajo nivel, tanto de comprensión, como también en operatoria y argumentación del significado de estos números que obtenían al calcular las medidas de tendencia central, lo que era esperable, ya que tanto la mediana, la moda y dato atípico son contenidos que son tratados en 7° básico, no así el promedio, que se estudia en 5° básico y se entiende como una repartición justa. Es en este último estadígrafo que llama la atención pues, si bien los alumnos ya conocen lo que es el promedio, los estudiantes que participaron de forma remota, entregaron respuestas que fueron extraídas de internet, y no argumentaron con sus propias palabras (que era lo que se esperaba), siendo, además, poco probable que entendieran a cabalidad las explicaciones que estaban copiando y pegando en sus respuestas. Como se mencionó en el respectivo análisis del pre – test, algunos indicaron que era “un conjunto infinito de números”, mientras que otros mencionaron las palabras “representante” o “valor característico”. De ambos términos, no hicieron comentarios de qué significaban estas expresiones. Mientras que los alumnos que participaron de forma presencial, ninguno entregó una definición precisa de la media aritmética.

De igual modo, tanto en el cálculo como en la interpretación de la mediana y la moda en los ejercicios propuestos en el pre – test, era esperable que los educandos no supieran resolverlos; sin embargo, es llamativo que los escolares tuvieran errores en calcular el promedio. Como ejemplo, en la pregunta (a.1) de la sección “OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN”, de los 18 alumnos que participaron de esta prueba, 12 de ellos no dividieron por el total de datos. Además, sólo 9 alumnos que contestaron de forma

virtual calcularon correctamente el valor del promedio en la pregunta (b.1), pero ninguno de los participantes, tanto presenciales como virtuales, dieron una interpretación de este valor. En otras palabras, se ilustra, de esta manera, que los alumnos no supieron interpretar el concepto de promedio que, al menos, se esperaba que pudieran plantear algunas ideas sobre su significado.

Otro de los objetivos que se trabajaron en esta tesis fue el describir los aciertos y dificultades de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando experimentan un proceso de enseñanza de las medidas de tendencia central a través del Aprendizaje Basado en Problemas y el uso de TIC.

Dentro de los aciertos que se consiguieron en esta investigación, se pueden nombrar que el ABP es una estrategia de aprendizaje colaborativo, ya que los alumnos son más participativos su aprendizaje y les permite interactuar más seguido elaborando sus propias respuestas. Debido al contexto en el cual se aplicó esta secuencia, tanto los alumnos que trabajaron de forma remota como presencial, intercambiaron y complementaron sus respuestas. Sin embargo, esta modalidad de estudio también impidió que los educandos que estaban bajo la modalidad virtual pudiesen formar grupos de trabajo o interacciones más fructíferas, en comparación a sus compañeros que estaban en aula. Esto se realizó dando espacio a que los escolares elaboraran sus propias estrategias, proponiéndolas y comentándolas en voz alta, mientras que, los alumnos que participaron de forma remota, escribían sus opiniones en la plataforma virtual que, luego, el profesor leía y comentaba con los compañeros que estaban en aula. Esto se aplicó en las fases de exploración, introducción y estructuración de la sección del promedio. No obstante, la aplicación del ABP fue superficial. Aunque, progresivamente, se abordaron situaciones cotidianas para facilitar el aprendizaje, hasta contextos más reales y complejos, como el caso de la cantidad de agua caída en la fase de estructuración de la media aritmética, no fue suficiente para generar un verdadero impacto en la comprensión de las propiedades de la media aritmética, aun cuando se hayan utilizado las TIC para favorecer el entendimiento de este contenido.

Otro de los aciertos fue la incorporación de las TIC en algunas secciones de la secuencia. Como se mencionó en el marco teórico, la ventaja que se tiene con estas herramientas está en la reducción de los cálculos de algunas medidas de tendencia central, lo que permite concentrarse en la comprensión conceptual y sus propiedades. Del contenido que se alcanzó a trabajar con TIC, en este caso, la media aritmética, una de las dificultades que surgieron con el uso de estas herramientas fue la lentitud con que los alumnos se adaptaron al *software Fathom*, como también el entender la propiedad de que la media aritmética es un estadígrafo que puede interpretarse como un punto de nivelación o de equilibrio. Es posible que esta propiedad, en particular, sea más compleja de entender para los educandos de 7° básico, y que el programa no haya desencadenado el propósito esperado, que era mejorar la comprensión de las medidas de tendencia central.

Complementario a esto, y como se mencionó más atrás, el *software* sólo está disponible en inglés, lo afectó en la rapidez de adaptabilidad de los educandos al programa, incluso, aunque hayan recibido el apoyo del profesor en todo momento y guiando a los estudiantes sobre cuáles comandos son los que deben usar. Además, debido al poco tiempo otorgado para esta investigación, los alumnos no tuvieron momentos para que experimentaran por ellos mismos la manipulación del programa, o ingresar los datos del ejercicio propuesto en la fase de estructuración de la media aritmética, o la creación de la recta móvil que les ayudara con la suma de los desvíos respecto a la media aritmética. En síntesis, la limitación de tiempo no permitió que los estudiantes se

apropiaran del uso del software con la finalidad de que pudieran incorporar autónomamente el uso de las TIC en su aprendizaje de los problemas relacionados con las medidas de tendencia central.

Finalmente, se evalúa el nivel de logro de los estudiantes de séptimo básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia, cuando resuelven problemas que implican comprender las medidas de tendencia central, luego de haber vivido un proceso de enseñanza basado en el Aprendizaje Basado en Problemas y el uso de TIC.

Con base en los resultados obtenidos en el post – test, puede señalarse que los logros alcanzados por los estudiantes fueron bajos, por las razones que se sintetizan a continuación. Durante el transcurso de la secuencia que se implementó, desde la fase de exploración hasta la fase de estructuración, los alumnos, poco a poco, fueron disminuyendo el número de respuestas satisfactorias con la que argumentaban a las preguntas que se les planteaban en las actividades. En otras palabras, la secuencia de actividades preparada y diseñada para el aprendizaje de las medidas de tendencia central no produjo los logros esperados, que era mejorar la comprensión de este contenido. Esto se comprueba, además, de manera elocuente, al compararlo con las respuestas que los alumnos contestaron en el pre – test (tanto de forma online como presencial), ya que repitieron algunos errores que fueron detectados en el post – test, como no dividir por la cantidad total de datos para obtener el valor del promedio y no entregar una definición estadísticamente más clara sobre qué significa y cómo se puede interpretar este valor. A su vez, los argumentos que esgrimieron para definir la media aritmética y dato atípico no fueron suficientes, y sus respuestas fueron incoherentes o inconclusas. Como se ve en el análisis de los resultados de esta sección correspondiente a este estadígrafo, no emplearon las frases de “punto de equilibrio”, “punto de nivelación” o de “repartición justa”.

#### **5.4 Sobre la pregunta de investigación**

La pregunta planteada, al inicio de este estudio, fue: ¿Cómo el Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC, contribuye a los aprendizajes de los conceptos de las medidas de tendencia central en estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia? Con los resultados obtenidos a lo largo de la secuencia didáctica implementada, el ABP con uso de TIC, enmarcado bajo el Ciclo de Aprendizaje Constructivista de Jorba y Sanmartí, no permite concluir, de manera satisfactoria, que haya habido una mejora en los aprendizajes en los escolares que trabajaron durante las intervenciones realizadas, ya sea que hayan participado de forma remota o presencial.

Dentro de los factores que se pueden señalar que pudieron afectar en las mejoras a alcanzar está en que no se haya hecho explícita, a los alumnos, la intencionalidad de trabajar con el ABP los temas de estadística, lo que los podría haber ayudado a entender el propósito de cada una de las actividades. A su vez, la aplicación focalizada de las TIC, en la fase de estructuración de la sección del promedio, estando ausente en las dos fases anteriores, permiten sugerir que, en la elaboración de las actividades, se apliquen las mismas con uso de estas herramientas, de forma tal que los alumnos puedan modificar los datos, manipularlos y argumentar qué ocurre con cada medida de tendencia central. Sin embargo, y como se mencionó en el marco teórico, en lo referente a las desventajas que presenta el ABP, la modificación constante de los contenidos y actividades a diseñar e implementar, obliga a los profesores a elaborar estrategias pedagógicas óptimas para alcanzar los logros de aprendizaje esperados, lo que puede

resultar complejo dado el poco tiempo asignado para la creación o implementación de este material.

Por último, si a lo anterior se le agrega que se aplicaron los instrumentos bajo la modalidad híbrida, como también, la reducción de las horas de clases (de 90 minutos pasaron a tener una duración de 60 minutos), la baja cantidad de sesiones que hubo para realizar la intervención y que el contenido de medidas de tendencia central fue excluido del currículum nacional, hicieron que las sesiones de trabajo no se hayan implementado en las condiciones esperadas, lo que tiene como consecuencia que los estudiantes no evidenciaron mejoras en los aprendizajes asociados a los conceptos de media, mediana y moda.

## **5.5 Contraste del supuesto de investigación con los resultados**

El supuesto de investigación planteada al inicio de esta tesis fue: El Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC contribuyen a mejorar las comprensiones de las medidas de tendencia central de los estudiantes de 7° básico de un colegio municipal de la comuna de Providencia.

Por lo tanto, de acuerdo con los resultados obtenidos al finalizar esta investigación, el supuesto se refuta. Los alumnos no argumentaron utilizando los contenidos trabajados en clases; las actividades en las que se implementaron las TIC no fueron suficientes y no causaron el efecto esperado que era que los alumnos comprendieran las medidas de tendencia central y sus propiedades. El ABP no pudo ser aplicado como se esperaba, ya que sólo fue intencionado explícitamente a la última fase (en este caso, de aplicación, la cual no fue implementada por problemas de tiempo en la institución), donde se esperaba que los escolares aplicaran todo lo aprendido en los tres primeros ciclos del aprendizaje constructivista destinados a cada medida de tendencia central.

Además, las actividades diseñadas no permitieron que los alumnos integran los conocimientos que se esperaba que aprendieran, donde se apreció, elocuentemente que, a medida que se avanzaba de fase, o sea, a medida en que las actividades aumentaban de dificultad, los alumnos presentaban mayores dificultades en el entendimiento del contenido trabajado.

Para ello, se recomienda intencionar y explicitar, desde el principio, la modalidad de trabajo del ABP hacia los estudiantes, con ejemplos simples, explicándoles las fases de desarrollo del trabajo a realizar. A su vez, se sugiere que los educandos manipulen tempranamente y en diversos momentos el programa computacional, como se tenía inicialmente pensado en la fase de estructuración, introduciendo los datos, ubicando los datos en un gráfico, construir la recta móvil que permitiera visualizar cómo cambia la suma de los desvíos, determinando la media aritmética y visualizando qué propiedad cumple respecto a estos desvíos.

## **5.6 Conclusiones generales**

Como ya se ha señalado en los puntos precedentes, no es suficiente sólo con la convergencia de perspectivas de educación matemática como el ABP y las TIC para que haya una mejora de los aprendizajes en los estudiantes en los contenidos de medidas de tendencia central. Al respecto, se deben tener presentes distintas variables que afectaron en el momento de aplicación de las actividades que se desarrollaron en este estudio. Uno de ellos es que el ABP demanda tiempo y trabajo en la elaboración de las

actividades a implementar, pues se espera que las mismas estén dirigidas a situaciones cotidianas o de interés para los educandos, lo que hace que sea un desafío continuo la búsqueda de ejemplos que cumplan con estos requisitos. Si bien se logran conocimientos más sólidos de los que posiblemente se consiguen con las clases expositivas, y se trabajan otras habilidades, como la argumentación, el trabajo colaborativo y el respeto a las diversas opiniones, la metodología del ABP en esta investigación, presentó una desventaja que fue el ritmo de avance que mostraron los alumnos, que fue lento, lo que hizo que no se pudieran analizar las otras medidas de tendencia central.

Por otro lado, las TIC no tuvieron el efecto deseado, aspecto que se contrapone a lo dicho por Batanero (2009, p. 14): "La tecnología puede utilizarse tanto como amplificadores o como reorganizadores conceptuales para desarrollar la comprensión de ideas estadísticas". Para efectos de esta investigación, se utilizó el *software Fathom*, orientado a escolares y estudiantes universitarios, para la enseñanza de la matemática y estadística; no obstante, los alumnos no lograron comprender en el nivel esperado las propiedades de la media aritmética (que sólo fueron las que se alcanzaron a implementar). Aunque el *software* les ayudó a visualizar el concepto durante la clase, dicho proceso de visualización no tuvo efecto en el aprendizaje a largo plazo puesto que, en las clases y evaluaciones precedentes, no demostraron haber comprendido lo que se trabajó con el programa computacional. Con ello, queda demostrado que el uso puntual y poco sistemático del *software Fathom* no contribuye a mejorar los aprendizajes estadísticos; por el contrario, se requiere un trabajo continuo y orientado a que el estudiante establezca relaciones entre el problema y lo que representa el *software*.

A modo de resumen de estos dos puntos antes expuestos, el ejemplo propuesto en la fase de estructuración de la cantidad de agua caída en la Región Metropolitana no fue atractivo para los escolares, aun cuando se trate de un tema del que se aborda en las asignaturas de ciencias y que permanentemente se habla en los medios. Además, el efecto de cambiar un dato y ver cómo afecta al valor del promedio fue difícil de entender para los alumnos, pues no comprendieron el concepto del promedio como punto de equilibrio, que era la finalidad de esta fase. Esto se contrapone a lo que exponen Zamora *et al* (2021, p. 7), al mencionar que "exponer al estudiantado a las variantes a la hora de cambiar los parámetros, así como las diferencias entre los distintos modelos, se logra una mejora en las experiencias de aprendizaje".

De esto último, se puede concluir que la formación de profesores debe apuntar, no sólo a los conocimientos teóricos de la estadística, sino también, a resolver situaciones problemáticas desafiantes usando un programa computacional, de forma tal que puedan sacar el mayor provecho posible, encontrar las dificultades que tiene su implementación en el aula y qué obstáculos pueden surgir en los alumnos este tipo de herramientas. La formación continua en este tipo de herramientas puede causar un positivo impacto en los escolares que aprenden, no sólo de estadística, sino de cualquier otro contenido de las demás áreas del saber.

## **5.7 Limitaciones y recomendaciones**

### **5.7.1 Limitaciones generales y recomendaciones**

Este estudio se llevó a cabo bajo el contexto de pandemia causada por el Covid – 19, lo que hizo que las escuelas cerraran para resguardar la salud de los estudiantes y sus

familias. No obstante, esta medida causó efectos en el aprendizaje de los alumnos, pues había inestabilidad en el sistema educativo debido a los tránsitos desde la presencialidad a la enseñanza virtual, tanto para los educandos como para los profesores, durante todo el 2020 y parte del 2021; para luego ser cambiada a la modalidad híbrida (alumnos que participaron desde sus casas de manera online y, simultáneamente, estudiantes que trabajaban de manera presencial).

Debido a esta situación y, como se mencionó en el marco teórico, el Ministerio de Educación de Chile estableció un currículum priorizado, en el que el contenido de medidas de tendencia central fue excluido, dándole atención a otros temas de la unidad de datos y azar.

Otro punto que limitó esta investigación fue el poco tiempo que otorgó el establecimiento para implementar la secuencia (5 clases, cada una de una duración de 60 minutos), el que no fue suficiente para cumplir todas las fases como se tenía previsto en un principio. Con la limitante del tiempo, no se pudo focalizar en profundidad el ABP y el uso de TIC sólo se hizo en clases específicas.

Por otro lado, a lo anterior hay que agregar que, como se vio en las respuestas que entregaron los educandos que contestaron de forma online al responder las preguntas del pre - test, en particular, las referidas a la definición de las medidas de tendencia central y dato atípico, hicieron uso de internet y no contestaron usando sus propias palabras, como se solicitaba. Como el número de intervenciones para aplicar las actividades no fueron suficientes, esto trajo como consecuencia que no se hayan podido analizar durante la clase estas respuestas dadas por este grupo de estudiantes, lo que hubiese sido una instancia importante para todo el curso pues, por una parte, permitiría una discusión sobre las definiciones que éstos encontraron en internet, y por otra, ayudaría a establecer aprendizajes sobre el uso ético, crítico y responsable de esta herramienta al momento de buscar y utilizar información.

### **5.7.2 Limitaciones metodológicas y recomendaciones**

Se puede señalar que esta investigación no es posible generalizarla, porque sólo se llevó a cabo en un curso del nivel de 7° básico de la comuna de Providencia. Es por ello que se recomienda realizar esta investigación comparando dos cursos, uno bajo clases de tipo expositiva, y otro con clases con metodología del ABP con uso de TIC, bajo el marco del Ciclo de Aprendizaje Constructivista de Jorba y Sanmartí. Más aún, se podría buscar una muestra más amplia para establecer conclusiones que pudiesen ser más generalizables respecto de lo que pasa en la región o el país.

La asistencia a clase fue un factor importante en esta tesis, ya que la cantidad de alumnos que participaron en cada una de las sesiones no fue constante, tanto los que estuvieron trabajando de forma remota como presencial. Se sugiere realizar este estudio en momentos cuando los escolares regresen a alguna de las dos modalidades (presencial o remota). Ambos casos son interesantes de estudio, pues permitiría contrastar la efectividad del ABP aplicando esta secuencia de trabajo con grupos aleatorios, mostrando los resultados de los aprendizajes logrados en cada etapa de las intervenciones, agregando, además, el componente ético de la responsabilidad de participar con otros y respetar la opinión de los demás, que es una de las cualidades positivas que tiene el trabajar bajo esta metodología.

Por otra parte, el uso de TIC sólo fue intencionado en algunos momentos. Se hizo efectivo cuando se abordó el promedio, pero no se logró aplicar en el caso de la mediana,

que se tenía previsto, ni en la fase de aplicación del Ciclo de Aprendizaje Constructivista, en donde los alumnos debían construir una encuesta y responder a una serie de preguntas utilizando el programa computacional trabajado en la secuencia. Es por ello que se recomienda un uso más integral de las TIC, aplicándolas desde un inicio y dando a conocer con qué tema se trabajará. Adicionalmente, se sugiere que se expliciten cuáles son los aprendizajes que se espera que logren los alumnos y qué hay detrás del ABP, es decir, que haga parte del contrato didáctico cuál es la intención de trabajar bajo esta modalidad y cómo se hará.

Finalmente, y al igual como se mencionó anteriormente, se recomienda que el ABP sea incorporado intencionalmente desde el principio de la secuencia y no al final, como se realizó en esta tesis. Esto puede ocasionar que los alumnos tengan una predisposición diferente al aprendizaje, ya que les permitirá que puedan adquirir conocimientos más acabados y apreciar que son capaces de responder a situaciones reales y contextualizadas a las actuales demandas sociales y científicas.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Agencia de Calidad de la Educación (2020) TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencia en Matemática y Ciencias. Presentación nacional de resultados. Gobierno de Chile.
- Alpizar Vargas, M. (2007) Herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2(3), 99 – 118.
- Alsina, A. (2017) Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Revista Épsilon de Educación Matemática*, 34(95), 25 – 48.
- Alvarado Brito, J. E. (2017) Propuesta de innovación para la enseñanza de la media aritmética. Tesis de magíster. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Alzate Rodríguez, E. J.; Montes Ocampo, J. W.; Escobar Escobar, R. M. (2013) Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la enseñanza de la Matemática. *Scientia et Technica*, 18(3), 542 – 547.
- Araneda, A. M.; Chandía, E.; Sorto, M. A. (2013) Datos y Azar para futuros profesores de matemáticas. Refip Matemática (Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática). Ediciones SM.
- Araya Schulz, R. (2004) Inteligencia Matemática. Editorial Universitaria.
- Baldor, A (2000) Aritmética. Publicaciones Cultural.
- Bakker, A. (2003) The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistical Education*, 11(1).
- Barreto Villanueva, A. (2012) El progreso de la Estadística y su utilidad en la evaluación del desarrollo. *Papeles de Población*, 18(73), 241 – 271.
- Basaure Arenas, M.S.; Quinchanao Ortega, A.A.; Rodríguez Estrada, C.A. (2017) Propuesta de material didáctico para la enseñanza de la distribución binomial en tercer medio a través de la metodología del aprendizaje basado en problemas. Tesis de Licenciatura, Universidad de Santiago de Chile.
- Batanero, C.; Godino, J.; Navas, F. (1997) Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310 – 324.
- Batanero, C. (2001) Didáctica de la Estadística. *Grupo de Educación Estadística, Universidad de Granada*.
- Batanero, C.; Díaz, C. (2004) El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. *Aspectos didácticos de las matemáticas*, 125 – 164.
- Batanero Bernabeu, C; Díaz Batanero, M. C. (2008) Análisis de datos con Statgraphics. *Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada*.
- Batanero, C. (2009) Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*, 7 – 21.
- Cabero Almenara, J.; Llorente Cejudo, M. (2015) Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC): escenarios formativos y teorías del aprendizaje. *Revista Lasallista de Investigación*, 12(2), 186 – 193.

- Canavos, G. (1995) *Probabilidad y Estadística. Aplicación y métodos*. McGraw – Hill.
- Castillo, S. (2008) Propuesta Pedagógica basada en el Constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 171 – 194.
- Colón Ortiz, L. C.; Ortiz Vega, J. (2020) Efecto del Uso de la Estrategia de Enseñanza Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en el Desarrollo de las Destrezas de Comprensión y Análisis de la Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 13(1), 205 – 223.
- Curiche Aguilera, D. M (2015) Desarrollo de habilidades de pensamiento crítico por medio de aprendizaje basado en problemas y aprendizaje colaborativo mediado por computador en alumnos de tercer año medio en la asignatura de filosofía en el Internado Nacional Barros Arana. Tesis de Magíster. Universidad de Chile.
- Del Callejo Canal, D.; Canal Martínez, M.; Hákim Krayem, M. R. (2020) Desarrollo del pensamiento estadístico en estudiantes de nivel superior a través de una Experiencia Educativa. *Educación Matemática*, 32(2), 194 – 216.
- Del Pino Ruiz, J. (2013) El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 243 – 250.
- Díaz Levicoy, D. A.; Aguayo Arriagada, C. G.; Cortés Toro, C. I. (2014) Enseñanza de la estadística mediante proyectos y su relación con teorías del aprendizaje. *Revista Premisa*, 16 (62).
- Diccionario Sopena (1982) Diccionario Enciclopédico Ilustrado Sopena. Editorial Ramón Sopena.
- Escribano González, A.; Del Valle López, A. (2008) El Aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior. Madrid, Narcea.
- Espinoza, C.; Sánchez, I. (2010) Desarrollo de una Propuesta de ABP en Probabilidades y Estadística y su Evaluación. PBL 2010 International Conference. São Paulo, Brazil, February, 8 - 12.
- Espinoza Melo, C. C.; Sánchez Soto, I. (2014) Aprendizaje basado en problemas para enseñar y aprender estadística y probabilidad. *Paradigma*, 35(1), 103 – 128.
- Faustino, A.; Pérez Luis, S. (2013) Utilización de las TIC en la enseñanza de la estadística en la educación superior angolana. *Prisma Social*, (11), 0 – 31.
- Ferrada Bustamante, V.; González Oro, N.; Ibarra Caroca, M.; Ried Donaire, A.; Vergara Correa, D.; Castillo Retamal, F. (2021) Formación docente en TIC y su evidencia en tiempos de COVID – 19. *Revista Saberes Educativos* 6, 144 – 168.
- Fuentes Sepúlveda, A. R. (2017) La Mediana, la hermana difícil de las medidas de tendencia central: una secuencia didáctica para su aprendizaje. Tesis de Magíster. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Gallego Madrid, D. E.; Quiceno Serna, Y.; Pulgarín Vásquez, D. (2014) Unidades didácticas: Un camino para la transformación de la enseñanza de las ciencias desde un enfoque investigativo. *Tecné, Episteme y Didaxis: TEC*.
- Gatica Riquelme, C. (2017) Análisis Didáctico para promover Ideas Fundamentales de Estadística relacionadas a Medidas de Tendencia Central. Tesis de Magíster. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

- Gea, M. M.; Batanero, C.; López Martín, M.; Contreras, J. M. (2015) Los recursos tecnológicos en la estadística bidimensional en los textos españoles de bachillerato. *RIED: Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20, 113 – 132.
- Grima, P (2010) La certeza absoluta y otras ficciones. Los secretos de la estadística. *Colección El mundo es matemático*.
- Guevara, I; Puig, C. (2011) Las medidas del mundo. Calendarios, longitudes y matemáticas. *Colección El mundo es matemático*.
- Gutiérrez Cárdenas, A.; Agudelo Varela, O.; Martínez Baquero, J. E. (2019) El Uso de las TIC en los Procesos de Enseñanza del Área de Probabilidad y Estadística en Universitarios. The 17th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Industry, Innovation, and Infrastructure for Sustainable Cities and Communities" (Conference)
- Gutiérrez, R.; Ojeda Ramírez, M. (2000) El proceso de aprendizaje de la estadística: ¿Qué puede estar fallando? *Heurística*, 10(1), 26 – 43.
- Gutiérrez, R.; Ojeda, M. (2016) El papel de algunas opciones tecnológicas en la educación estadística. *Heurística*, 18, 21 – 35.
- Hernández González, S.; Cuevas Acosta, J. H. (2013) Programas informáticos de uso libre y su aplicación en la enseñanza de la estadística. *Revista Investigación Operacional* (34), 166 – 174.
- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P. (2014) *Metodología de la Investigación*. 6ª edición. Mac Graw Hill.
- Hurtado Serna, M.; Salvatierra Melgar, A. (2020) Aplicación del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) de John Barell en la comprensión literal. *Revista Educación*, 44(2), 67 – 79.
- Juárez Duarte, J. A.; Inzunza Cazares, S. (2014) Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles educativos*, 36(146), 14 – 29.
- Kline, M. (2012) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, 2ª edición. Fondo de Cultura Económica.
- Lacourly, N. (2011) Introducción a la Estadística. *Colección Herramientas para la Formación de Profesores de Matemáticas*. J.C. Saez, Editor.
- Marzábal Blancafort, A. (2011) Algunas orientaciones para enseñar ciencias naturales en el marco del nuevo enfoque curricular. *Horizontes Educativos*, 16(2), 57 – 71.
- Marzábal, A.; Rocha, A.; Toledo, B. (2015) Caracterización del desarrollo profesional de profesores de ciencias – parte 2: Proceso de apropiación de un modelo didáctico basado en el ciclo de aprendizaje constructivista. *Educación Química*, 26(3), 212 – 223.
- Matamoros Espinoza, W. G. (2018) Propuesta didáctica de Aprendizaje Basado en Problemas dirigida al área de matemáticas (8º de educación general básica): Caso unidad educativa "Sagrada Familia". Tesis de magíster, Pontificia Universidad Católica del Ecuador.
- Mercado Schüler, C. (1993) *Geometría*. Tomo III y IV. Editorial Universitaria.

- Ministerio de Educación de Chile (2016) *Matemática. Programa de Estudio. Séptimo básico. Primera edición*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación (2019) Decreto 129. Modifica decreto N°129, de 2013, del Ministerio de Educación, que establece estándares de aprendizaje para 4° y 8° año básico en asignaturas que indica. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile (BCN), pp. 1 -8.
- Ministerio de Educación de Chile (2020) *Priorización Curricular Covid – 19 Matemática. 1° básico a 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación, Santiago, Chile.
- Mochón, S.; Tlachy Anell, M. M. (2003) Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática*, 15(3), 5 – 28.
- Morales Bueno, P.; Landa Fitzgerald, V. (2004) Aprendizaje Basado en Problemas. *Theoria*, 13, 145 – 157.
- Obando-Arias, M. (2021). Mediación pedagógica del aprendizaje a partir de la pregunta generadora en la educación media: Aprendizaje basado en proyectos. *Revista Electrónica Educare*, 25(2), 1-21.
- Ortega Iglesias, J. M.; Valencia Espejo, V. E.; Becerra Ramírez, M.; Durán Blanco, J. (2020) Matemática y Vida Cotidiana: Experiencia Escolar de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 104, 103 – 117.
- Palta Valladares, N. I.; Sigüenza Orellana, J. P.; Pulla Merchán, J. F. (2018) El Aprendizaje Basado en Problemas como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza. *Revista Killkana Sociales*, 2(2), 1 – 8.
- Pérez Aranda, J. R.; Molina Gómez, J.; Domínguez de la Rosa, L.; Rodríguez Martínez, M. (2015) El Aprendizaje Basado en Problemas como herramienta de motivación: reflexiones de su aplicación a estudiantes de GADE. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 8(4), 189 – 207.
- Restrepo Gómez, B. (2005) Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y Educadores*, (8), 9 – 19.
- Saavedra Gallardo, E. (2020) Contenidos básicos de estadística y probabilidad. Editorial USACH
- Sánchez Acevedo, N. A.; Ruiz Hernández, B. R. (2020) Análisis de las actividades propuestas en dos programas de estudio chilenos en el eje de Estadística y Probabilidad. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, 776.
- Sanhueza León, V.; Rubilar Parra, O. (2018) Influencias de una estrategia de enseñanza que usa elementos del Aprendizaje Basado en Problemas para el contenido de Probabilidades en estudiantes de primero medio de un colegio particular subvencionado de la comuna de Los Ángeles. Tesis de Licenciatura. Universidad de Concepción.
- Tapia Rojas, O.; Ormazábal Díaz – Muñoz, M.; Olivares Sepúlveda, J.; López González, D. (2003) *Manual de Preparación Matemática*. Universidad Católica de Chile.
- Vásquez, C.; Ruz, F.; Martínez, M. V. (2020) Recursos virtuales para la enseñanza de la estadística y la probabilidad: un aporte para la priorización curricular chilena frente

a la pandemia de la COVID - 19. *Tangram, Revista de Educação Matemática, Dourados, 3(2)*, 159 - 183.

Zamora Araya, J. A.; Aguilar Fernández, E.; Guillén Oviedo, H. S. (2021) Educación Estadística: tendencias para su enseñanza y aprendizaje en educación secundaria y terciaria. *Revista Educación, 46(1)*, 1 - 19.

Zapata Cardona, L.; González Gómez, D. (2017) Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática, 29(1)*, 61 - 89.

## ANEXOS

### 1. PRE TEST

#### PRE TEST DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Puntaje ideal: 21 puntos

Puntaje de aprobación: 11 puntos

Puntaje obtenido:

#### OBJETIVOS ESPERADOS:

- Definir conceptos básicos de las medidas de tendencia central.
- Calcular y determinar medidas de tendencia central dados un conjunto de datos no agrupados.
- Argumentar cuál es la mejor medida de tendencia central que representa a un conjunto de datos.

#### INSTRUCCIONES:

- Lee atentamente cada pregunta.
- El desarrollo de este test puede ser respondido con lápiz mina o lápiz pasta azul o negro. Puedes ocupar calculadora.
- Debe desarrollar cada pregunta, de lo contrario, no será válida su respuesta.
- Dispone de 15 minutos para responder este test.

#### III) CONCEPTOS

Define con tus palabras los siguientes términos (2 pts c/u):

a) Promedio o media aritmética

---

---

---

---

b) Mediana

---

---

---

---

c) Moda

---

---

---

---

d) Dato atípico

---

---

---

---

e) OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN

c) El piloto de una aerolínea desea saber el número de vuelos desde Santiago a regiones, durante una semana. El operador le entrega, al cabo de unos días, la siguiente información:



Día de la semana	Número de vuelos
Lunes	23
Martes	34
Miércoles	25
Jueves	29
Viernes	28
Sábado	35
Domingo	34

a.1) Calcula el promedio de viajes que hubo durante esta semana (2 pts)

a.2) ¿Qué significa el valor que obtuviste en la pregunta anterior? (3 pts)

a.3) ¿Cuál fue el número de vuelos más frecuente durante la semana? (1 pto)

a.4) ¿Cuál es la mediana del número de vuelos de la semana? (2 pts)

a.5) ¿Qué indica el valor que obtuviste en la pregunta anterior? (3 pts)

d) Sofía revisa sus calificaciones de los controles de una asignatura, las cuales fueron: 5,4 – 3,3 – 6,7 – 4,3 – 5,1 – 3,3 – 5,8 – 4,9 – 6,0 – 5,7.



b.1) Calcula el promedio de las notas de Sofía. ¿Qué indica este valor? (3 pts)

b.2) ¿Cuál es la nota de Sofía que más se repite? (1 pto)

b.3) ¿Crees tú que la moda puede ser un buen representante de las notas de Sofía?  
¿Cuál considerarías tú? (3 pts)

## 2. PLANIFICACIÓN DOCENTE Y GESTIÓN DIDÁCTICA

<b>Unidad: Medidas de Tendencia Central</b>		
Contenido	Medidas de tendencia central (promedio, mediana y moda)	
	Conceptos	Medidas de tendencia central: promedio, mediana, moda
	Procedimental	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular promedio con datos no agrupados</li> <li>• Comprender las propiedades del promedio como punto de equilibrio.</li> <li>• Graficar, de manera aproximada, en una recta, los datos y el promedio.</li> <li>• Determinar la distancia que hay entre los datos y el promedio y averiguar qué ocurre con las distancias que están bajo el promedio y sobre él.</li> <li>• Comprender que la suma de las desviaciones al promedio es igual a cero.</li> <li>• Comprender qué ocurre con el promedio cuando se tienen datos atípicos (<i>outliers</i>).</li> <li>• Comprender cuándo es mejor emplear el promedio y la mediana.</li> <li>• Calcular la mediana con datos no agrupados.</li> <li>• Comprender el concepto de moda con datos no agrupados.</li> <li>• Comprender los tipos de datos (nominales, ordinales, numéricos) y calcular medidas de tendencia central con ellos (en caso en que se pueda).</li> </ul>
	Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplear la tecnología para representar la información recogida.</li> <li>• Trabajar en equipo, respetando las opiniones de los compañeros y estableciendo consensos entre los mismos</li> </ul>
Objetivo General	Comprender las propiedades y el cálculo de las medidas de tendencia central (promedio, moda y mediana) cuando se ocupan con datos no agrupados y representar estos datos utilizando un software estadístico.	
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprender las medidas de tendencia central (promedio, moda y mediana) y sus propiedades.</li> <li>• Determinar la medida de tendencia central más adecuada a emplear dado un conjunto de datos.</li> <li>• Argumentar si una medida de tendencia central es más adecuada que otra dada cierta información.</li> <li>• Calcular medidas de tendencia central con datos no tabulados</li> <li>• Utilizar un software estadístico para representar los datos y las medidas de tendencia central.</li> </ul>	
Aprendizajes esperados	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprenden las medidas de tendencia central (promedio, moda y mediana) y sus propiedades.</li> <li>• Determinan la medida de tendencia central más adecuada a emplear dado un conjunto de datos.</li> <li>• Argumentan si una medida de tendencia central es más adecuada que otra.</li> </ul>	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculan medidas de tendencia central con datos no tabulados.</li> <li>• Utilizan un software estadístico para representar los datos y las medidas de tendencia central.</li> </ul>
Dirigido a	Estudiantes de 7° básico (en el sistema educacional chileno)
Temporalidad	9 clases
Materiales	Computador, software Fathom, calculadora, cuaderno, regla.

## PROMEDIO

### 4) Fase de exploración

Los alumnos responden las preguntas planteadas en una guía y comparten sus respuestas por medio de un plenario:

- a) Un grupo de niños de 1° básico realizan el experimento de hacer germinar una semilla en un frasco de vidrio. Javier plantará 3 semillas, Claudia plantará 2, Isabel, 5 semillas y Roberto, 6 semillas. ¿Cuántas semillas se plantaron en promedio por niño?
- b) Alejandra, Víctor y Marta compartieron los dulces que les dieron sus papás. Alejandra trajo 7 dulces, Víctor trajo 3, y Marta, sólo 2.
  - b.1) ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño?
  - b.2) Ahora, se suma Marcos, pero no tenía dulces para compartir, por lo que los niños hacen una nueva repartición. ¿Cuántos dulces hay en promedio por cada niño, en esta ocasión?
  - b.3) Hasta ahora, ¿qué piensas que es el promedio? ¿Cómo lo expresarías?
- c) Para ornamentar algunas calles de una ciudad, se ha establecido que se plantarán algunos árboles en las mismas. En la primera calle se plantarán 12 árboles, en la segunda calle se colocarán 15 árboles, y en la tercera, habrá 16 árboles. ¿Cuánto es el promedio de árboles que habrá por cada calle? De acuerdo a tu respuesta dada en el punto (b.3), ¿cómo expresarías el promedio en este caso?
- d) Una doctora realiza un recuento de la estatura de los pacientes adolescentes que ingresan a su consulta. Los primeros registros fueron (las medidas están dadas en metros): 1,67 – 1,70 – 1,69 – 1,65 – 1,64 – 1,73.
  - d.1) ¿Crees que el promedio de las estaturas de los pacientes sea igual a uno de los datos?
  - d.2) Calcula el promedio de las estaturas de los pacientes y compara tu respuesta de la pregunta (d.1)
  - d.3) La doctora recibe a otro paciente en su consulta. Al medir su estatura, ve que es de 1,71 m. Antes de calcular el promedio con las estaturas dadas, ¿entre qué valores crees tú que estaría el valor del promedio? Calcula el promedio usando las estaturas de los primeros seis pacientes y el que acaba de ingresar. Compara la respuesta que obtuviste con lo que pensaste anteriormente.
  - d.4) La doctora piensa que el promedio de las estaturas de los jóvenes representa muy bien lo que miden todas las personas de la misma edad. ¿Qué piensas tú sobre esto? ¿Puede estar equivocada la doctora o no?

d.5) Posteriormente, ingresa un nuevo paciente a la consulta. La estatura que registra la doctora es de 1,97 m. ¿Cuánto ha variado el valor del promedio? ¿A qué se debe esto si hemos agregado un dato más?

5) *Fase de introducción:*

Reunidos en grupos de 4 a 5 estudiantes, los alumnos responden la siguiente secuencia de actividades dadas en una guía, luego, se comparten las respuestas en un plenario

c) Supongamos que un estudiante ha rendido dos pruebas; sus calificaciones fueron 5,0 y 7,0. ¿Cuál es el número que está a igual distancia (o a la misma distancia) de estas notas? Para ello, hagamos el siguiente diagrama:

iii) Dibujamos una recta horizontal y escribimos el 5 y el 7



iv) Luego, entre ambos números, escribimos la cifra que está a la misma distancia de 5 y 7; en este caso, es el 6, pues el 6 está a una unidad sobre el 5 y, a su vez, está a una unidad debajo del 7. ¿Cómo puedes obtener este valor? ¿Puede haber otro número que cumpla la condición de estar a la misma distancia tanto del 5 como del 7?



d) **Primer ejemplo:**

Ahora, supongamos que el mismo alumno obtuvo un 3,3 en su tercer examen. ¿Qué número nivela la suma de las distancias que hay entre el 3,3, 5,0 y 7,0? ¿Cómo lo conseguiste? Representa, nuevamente, estas notas en una recta numérica junto con el número que obtuviste.

e) **Segundo ejemplo:**

A lo largo del semestre, este alumno obtuvo las siguientes calificaciones: 5,0; 7,0; 3,3; 6,1 y 5,8. ¿Qué número nivela la suma de las distancias que están sobre y bajo este valor? ¿Cómo lo lograste?

En general, decimos que el promedio, simbolizado por  $\bar{x}$ , es una *manera de mirar el centro por medio de un equilibrio*, y este equilibrio lo entendemos cuando la suma de las distancias que están bajo el valor del promedio con las que están sobre el promedio es igual a cero.

En el estricto rigor, decimos que el promedio es una medida de tendencia central y es el valor que se obtiene al sumar todos los datos y dividir esta suma por el total de datos. En símbolos, esto se escribe así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

En donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son los datos y  $n$  es el total de datos.

f) **Tercer ejemplo:**

Ahora, ¿qué pasará con el promedio si las calificaciones de este alumno hubiesen sido 5,2; 4,3; 5,0; 5,8; 7,0 y 6,1? ¿Y si las notas hubiesen sido 1,5; 5,0; 6,1; 4,3; 5,8; 7,0? ¿Por qué ha variado el promedio si sólo ha cambiado una nota? ¿Qué puedes concluir al respecto?

6) *Fase de estructuración:*

Por medio de un plenario, los educandos responden las siguientes actividades y van siguiendo la secuencia que aparece en la guía, usando el *software Fathom*:

¿Qué tanto ha disminuido la cantidad de agua caída en Santiago?

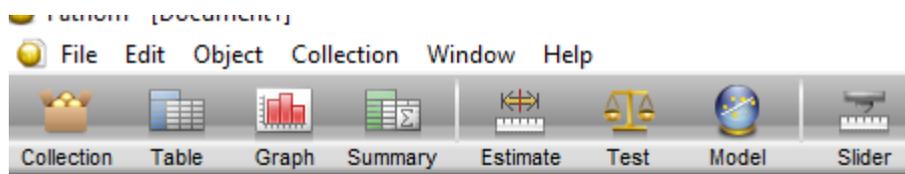
Se sabe que, en Santiago, debido al calentamiento global, ha habido una disminución en la cantidad de agua caída, lo cual ha llevado a que, en estos últimos años, se haya decretado que estos han sido los años más secos para la capital. Pero, ¿qué tan cierta es esta afirmación? Supongamos que estás buscando esta información y que deseas corroborarla. Para ello, se te entrega la siguiente tabla que resume la cantidad de agua caída por año.

Cantidad de agua caída en Santiago entre los años 1999 y 2019

<b>Año</b>	<b>Total de agua caída (mm)</b>
1999	400,4
2000	621,8
2001	443,3
2002	608,0
2003	207,2
2004	408,5
2005	431,8
2006	453,6
2007	167,7
2008	374,8
2009	254,9
2010	184,7
2011	187,4
2012	320,0
2013	232,7
2014	246,2
2015	295,0
2016	268,3
2017	273,5
2018	233,1

**Fuente: Dirección Meteorológica de Chile**

Los datos dispuestos en el programa *Fathom* deben quedar dispuestos de la siguiente manera:

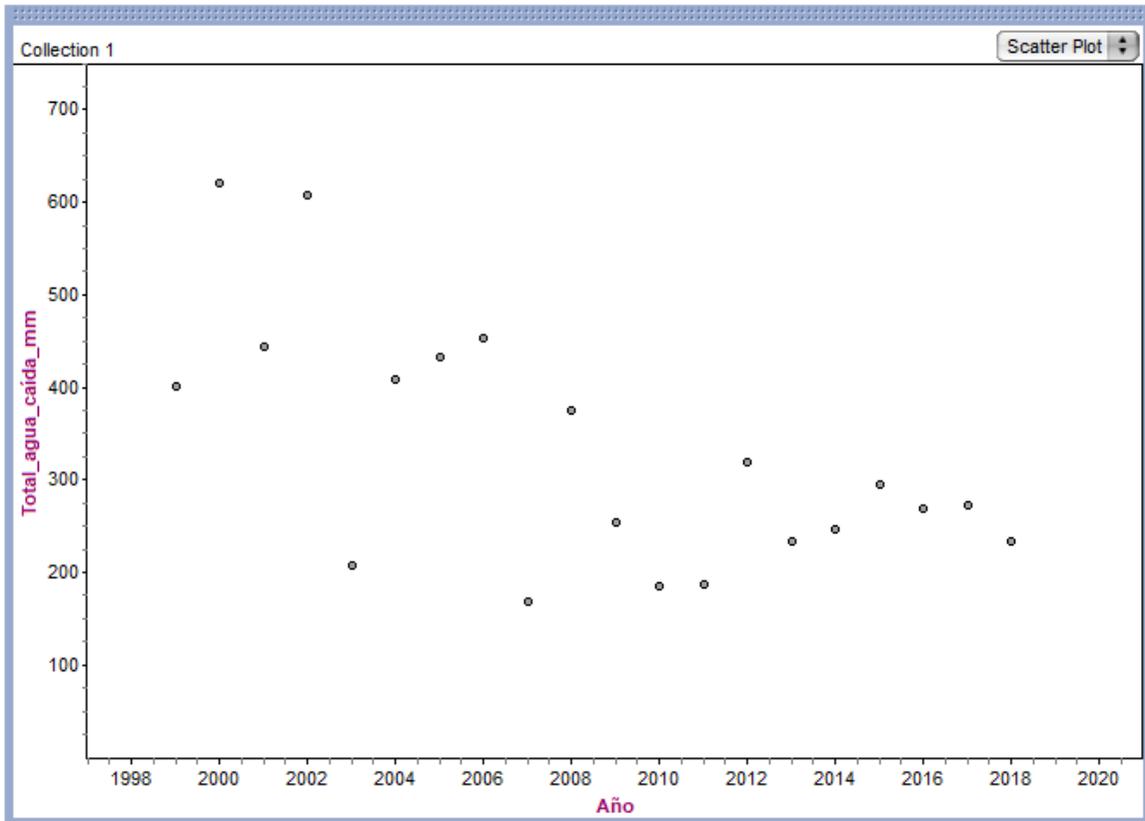


Collection 1

	Año	Total_agua_caída_mm	<new>
1	1999	400,4	
2	2000	621,5	
3	2001	443,3	
4	2002	608,0	
5	2003	207,2	
6	2004	408,5	
7	2005	431,8	
8	2006	453,6	
9	2007	167,7	
10	2008	374,8	
11	2009	254,9	
12	2010	184,7	
13	2011	187,4	
14	2012	320,0	
15	2013	232,7	
16	2014	246,2	
17	2015	295,0	
18	2016	268,3	
19	2017	273,5	
20	2018	233,1	

**Figura 1. Ingreso de los datos al software *Fathom***

Usando la herramienta “Graph” y arrastrando cada variable a los ejes respectivos (*Año* al eje X y *Total\_agua\_caída\_mm* al eje Y), se consigue el siguiente gráfico.



**Figura 2. Representación gráfica de los datos.**

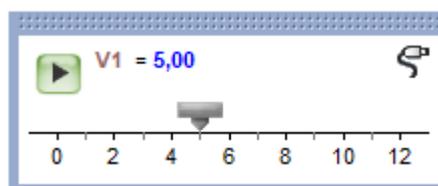
Ahora bien, calcularemos el valor del promedio con los datos dados en la tabla anterior, y que estimaremos la posición en la que estaría la media aritmética.

En primer lugar, crearemos una recta móvil que se mueva a lo largo del gráfico. Esto nos ayudará a intentar determinar el valor aproximado del promedio. Para ello, usaremos el comando *Slider* que se encuentra en la parte superior de la pantalla.



**Figura 3. Ícono de *Slider* (deslizador)**

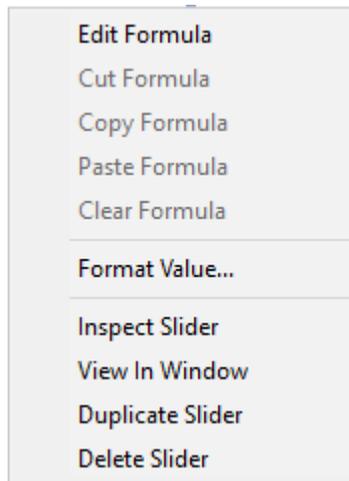
Al hacer clic en el ícono, saldrá la siguiente imagen



**Figura 4. Deslizador**

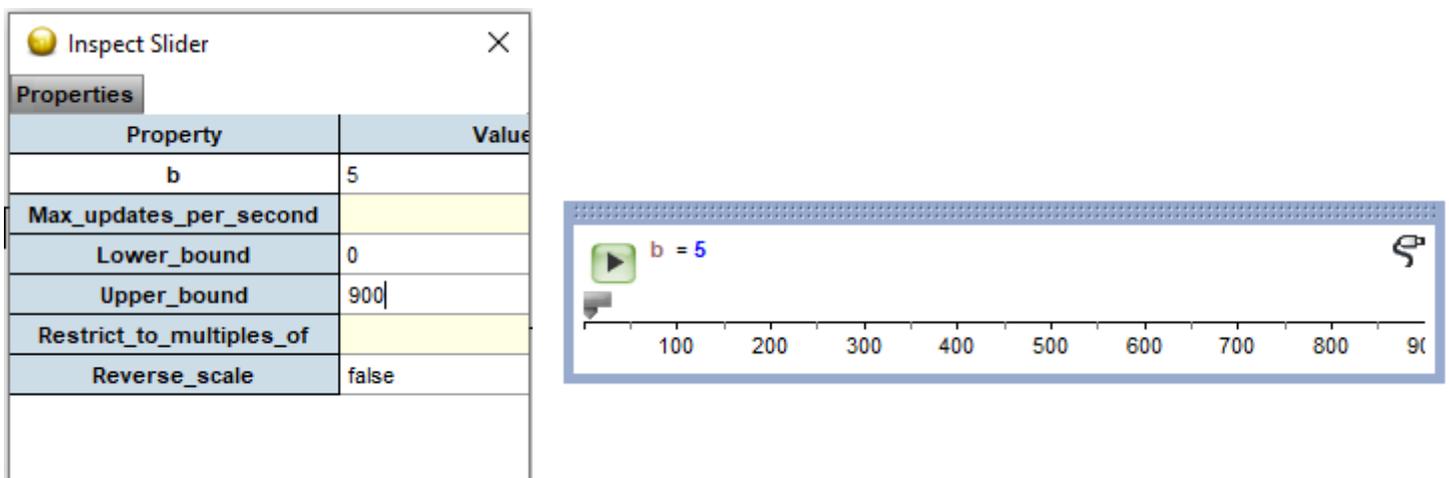
Simbolizaremos por  $b$  a la recta móvil. Para ello, haz clic en donde está  $V1$  y cambia la letra.

Haciendo clic con el botón derecho del *mouse*, aparecerá el siguiente cuadro de diálogo, en que pulsaremos *Inspect slider*.



**Figura 5. Cuadro de diálogo del deslizador**

Aparecerá el siguiente cuadro de diálogo que se visualiza en la imagen de abajo. Lo que haremos es cambiar los valores en los que se desplazará nuestra recta por el gráfico. El valor más bajo (*Lower\_bound*) que tomará será 0, mientras que el más alto (*Upper\_bound*) será 900. ¿Por qué no puede tomar valores negativos el deslizador?



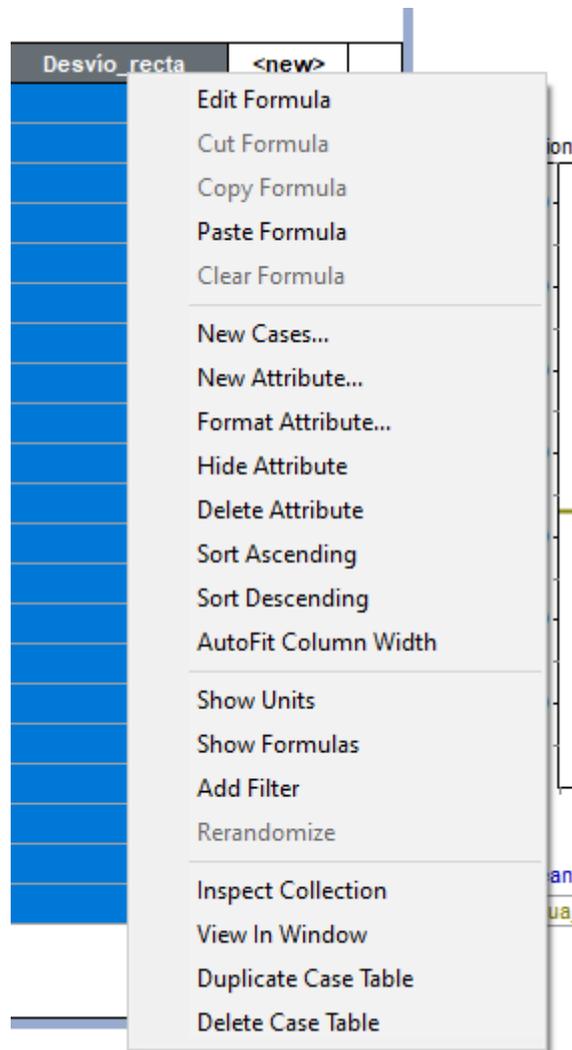
**Figura 6. Valores mínimo y máximo del deslizador y nueva visualización**

Ahora, crearemos una nueva columna en la que calcularemos qué tanto se alejan los datos respecto a la recta móvil. Para ello, restaremos cada dato respecto a esta recta. Esta diferencia es lo que llamaremos *desvío* y, a la nueva columna, la llamaremos *Desvío\_recta*. La imagen siguiente ilustra esta situación (página siguiente).

Collection 1				
	Año	Total_agua_caída_mm	Desvío_recta	<new>
1	1999	400,4		
2	2000	621,5		
3	2001	443,3		
4	2002	608,0		
5	2003	207,2		
6	2004	408,5		
7	2005	431,8		
8	2006	453,6		
9	2007	167,7		
10	2008	374,8		
11	2009	254,9		
12	2010	184,7		
13	2011	187,4		
14	2012	320,0		
15	2013	232,7		
16	2014	246,2		
17	2015	295,0		
18	2016	268,3		
19	2017	273,5		
20	2018	233,1		

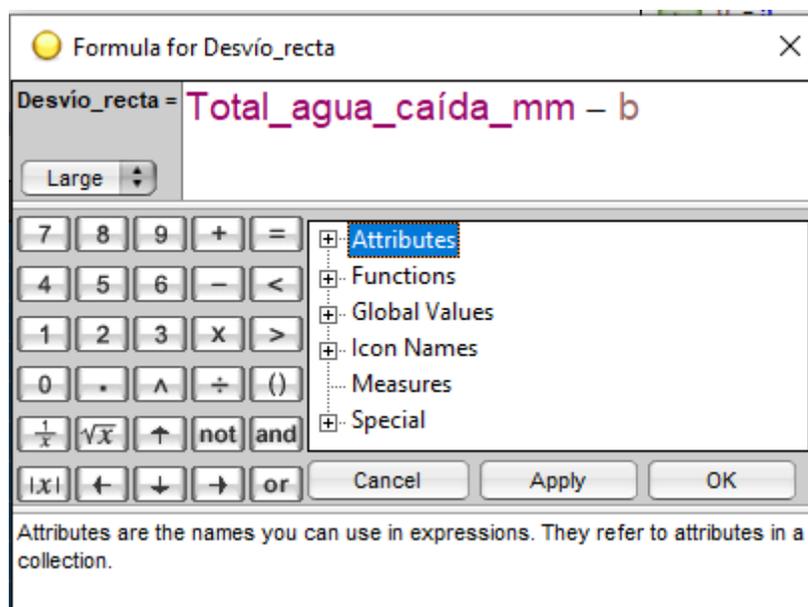
**Figura 7. Columna de los desvíos respecto a una recta cualquiera.**

Como se mencionó justo antes, el desvío es la resta entre cada dato respecto a la recta móvil. Para que el programa lo haga, ingresaremos una nueva fórmula. Haciendo clic con el botón derecho, saldrá un cuadro de diálogo en que pulsaremos el comando *Edit formula* (página siguiente).



**Figura 8. Cuadro de diálogo de Desvío\_recta**

Al pulsar en ese comando, saldrá el siguiente cuadro de diálogo e ingresaremos lo que aparece en la imagen:



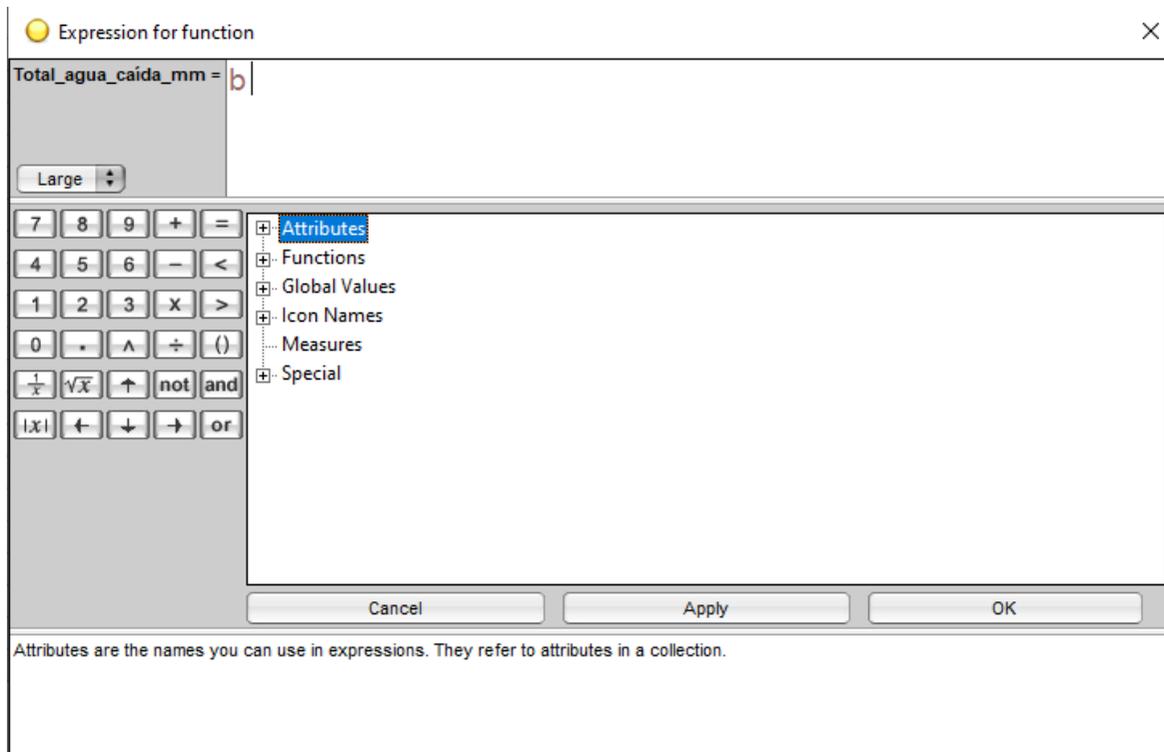
**Figura 9. Fórmula para la columna Desvío\_recta**

Al pulsar *Enter*, saldrán los resultados de cada diferencia, como lo ilustra en la imagen que sigue:

Collection 1				
	Año	Total_agua_caída_mm	Desvío_recta	<new>
1	1999	400,4	395,4	
2	2000	621,5	616,5	
3	2001	443,3	438,3	
4	2002	608,0	603	
5	2003	207,2	202,2	
6	2004	408,5	403,5	
7	2005	431,8	426,8	
8	2006	453,6	448,6	
9	2007	167,7	162,7	
10	2008	374,8	369,8	
11	2009	254,9	249,9	
12	2010	184,7	179,7	
13	2011	187,4	182,4	
14	2012	320,0	315	
15	2013	232,7	227,7	
16	2014	246,2	241,2	
17	2015	295,0	290	
18	2016	268,3	263,3	
19	2017	273,5	268,5	
20	2018	233,1	228,1	

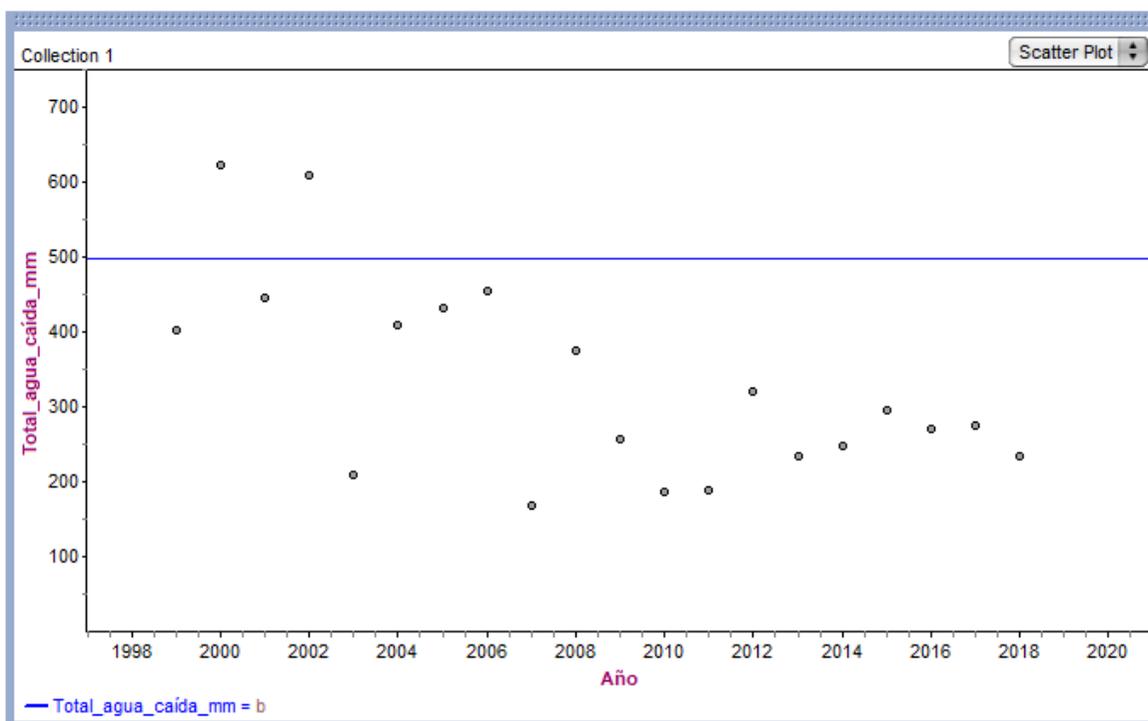
**Figura 10. Valores de los desvíos de cada dato respecto a una recta cualquiera**

Ahora, graficaremos esta recta móvil en nuestro gráfico junto al promedio. Para ello, hacemos clic con el botón derecho del *mouse* sobre el gráfico, y haremos clic en la expresión *Plot function*; saldrá el siguiente cuadro de diálogo e introduciremos la expresión para la recta móvil, que la hemos designado por *b* (página siguiente).



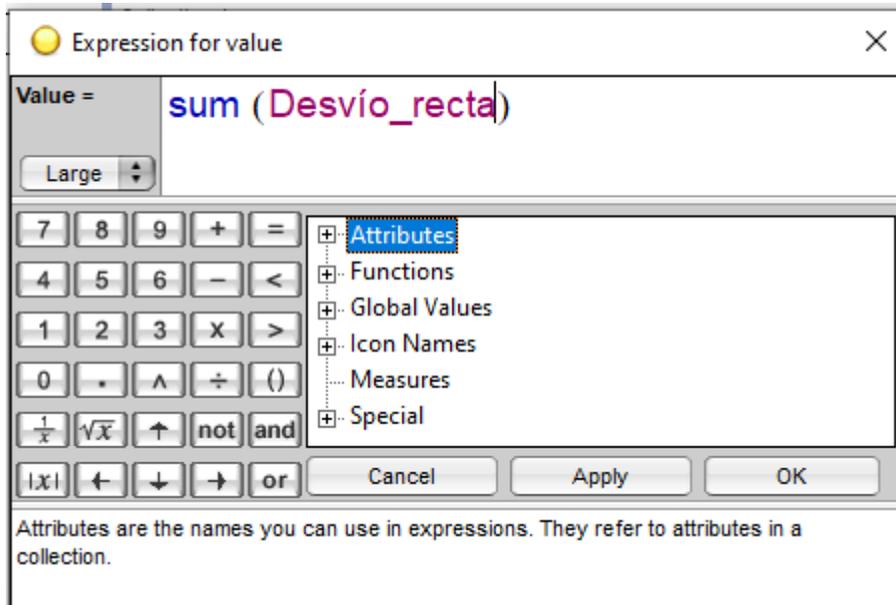
**Figura 11. Comando de representación gráfica de la recta móvil**

Al pulsar *OK*, visualizaremos la recta móvil en el gráfico, como se ilustra a continuación



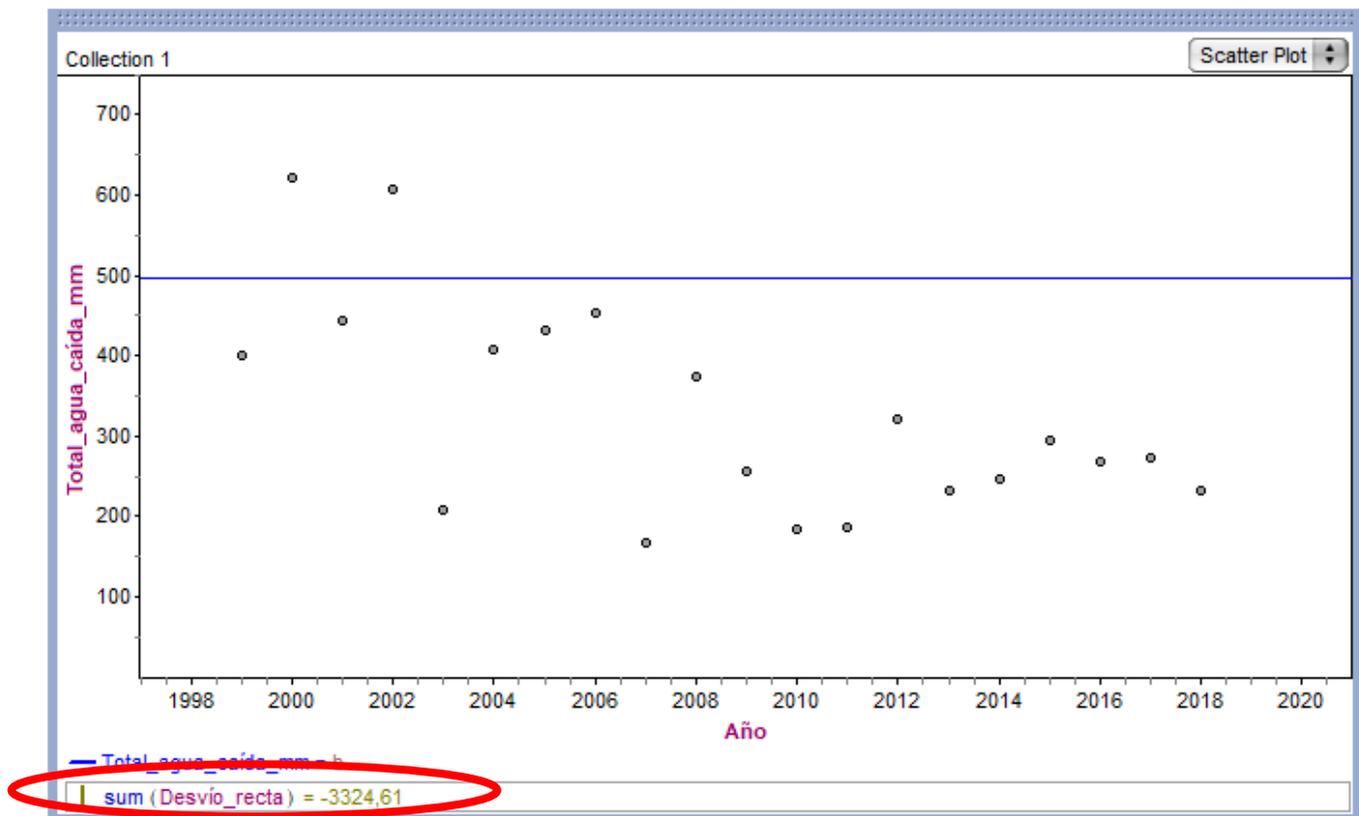
**Figura 12. Representación de la recta móvil.**

Si pulsamos el botón de *Play* en el deslizador, veremos que la recta se mueve de arriba hacia abajo y viceversa. Esto se verá reflejado en la columna *Desvío\_recta*. A continuación, determinaremos la suma total de estos desvíos. Para ello, introduciremos una nueva fórmula en nuestro gráfico. La imagen siguiente ilustra cómo debe hacerse (página siguiente).



**Figura 13. Fórmula de la suma total de los desvíos respecto a la recta móvil**

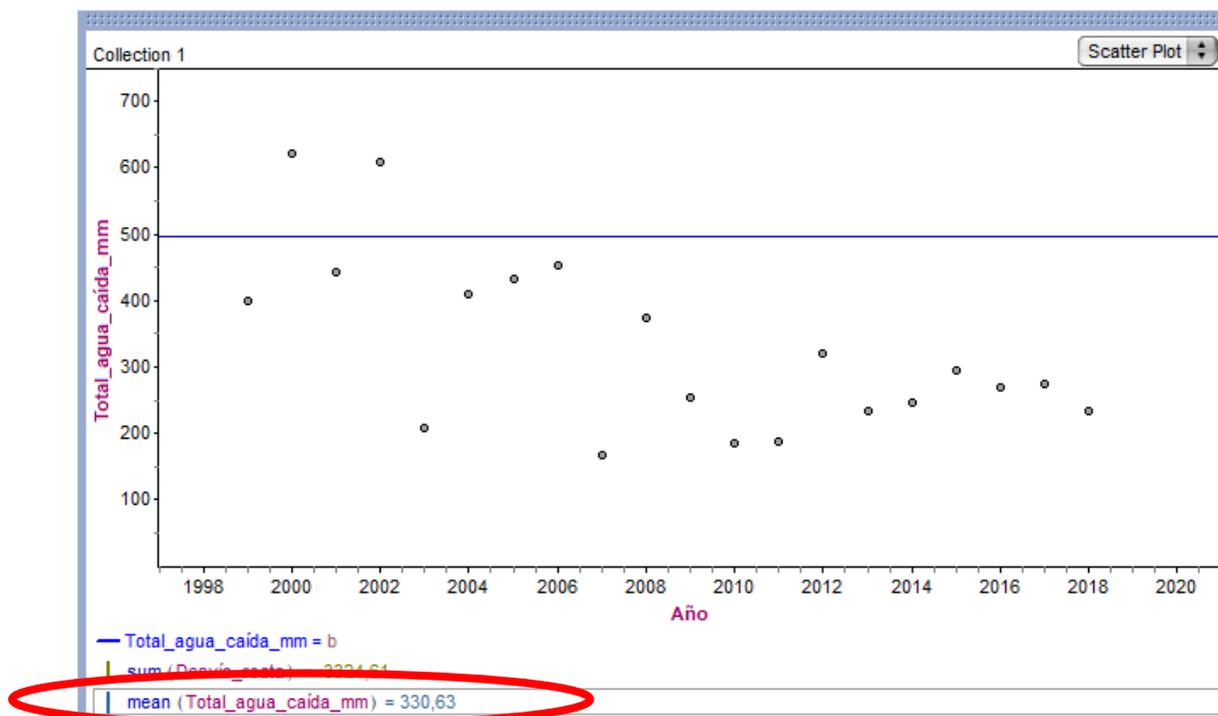
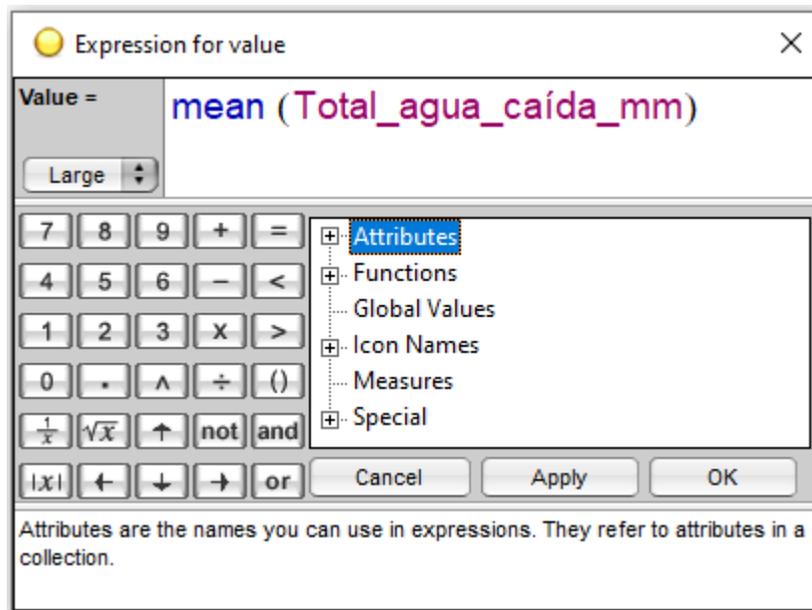
El resultado se mostrará abajo del gráfico



**Figura 14. Obtención de la suma de los desvíos respecto a la recta móvil.**

A medida que la recta se mueve, visualizaremos la suma total de los desvíos de cada dato respecto a la recta móvil. Ahora bien, ¿qué valor hará que esta suma total sea cero? Para ello, mueve la recta hasta acercarte lo más posible al valor cero. ¿Cómo crees que se llamará el número en que cumpla que la suma de los desvíos respecto a la recta sea igual a cero?

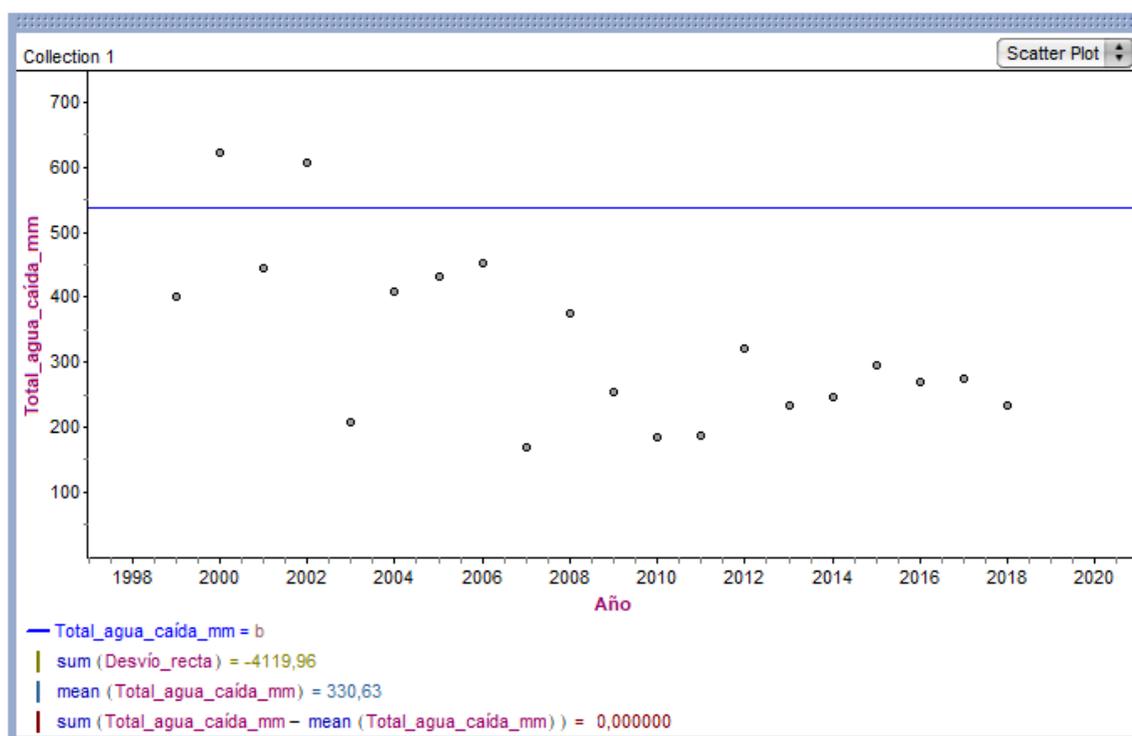
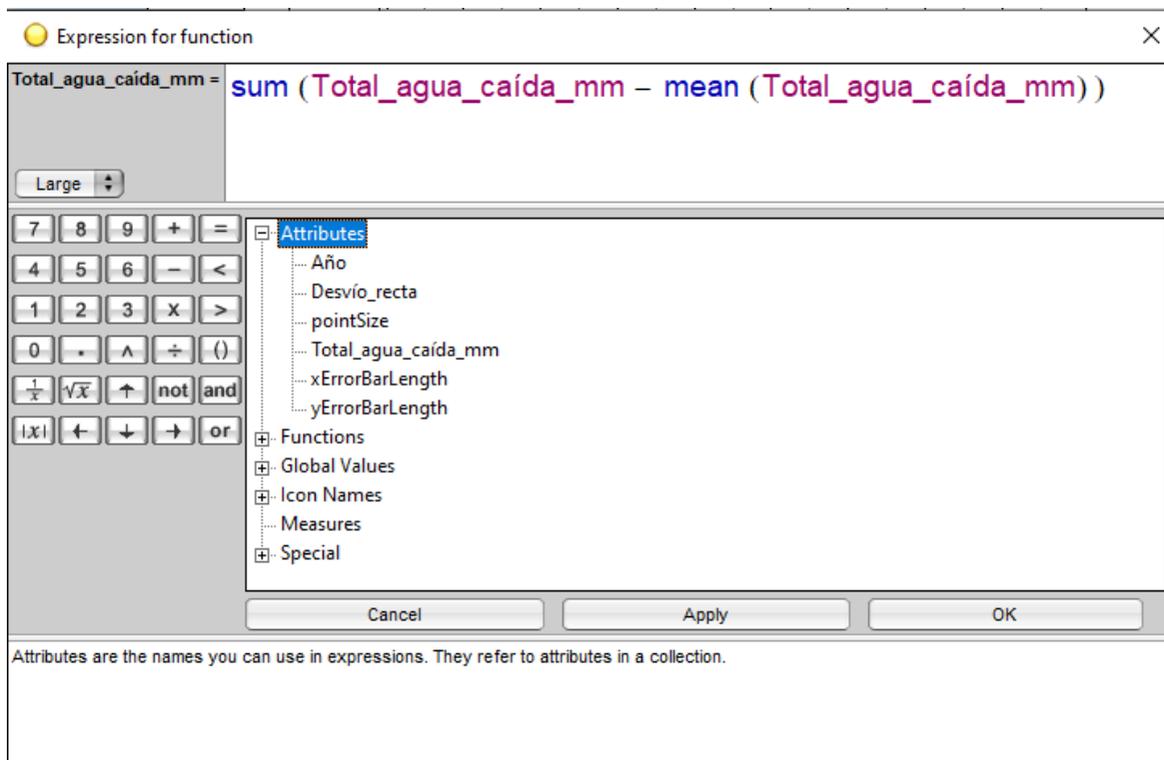
Para comprobar si lo que dices es cierto, calcularemos el promedio de la cantidad total de agua caída. Para ello, pulsando el botón derecho, pulsando el comando *Plot value* saldrá el siguiente cuadro de diálogo en donde ingresaremos lo que aparece en la imagen:



**Figura 15. Comando de cálculo de promedio y su valor.**

Para comprobar si tu respuesta es correcta, cambia el valor de la recta móvil *b* al valor del promedio que se obtuvo con el *software* y verifica el valor de la suma. ¿Qué resultado dio?

Como podemos ver, la suma de los desvíos respecto al promedio *es igual a cero*. Para comprobarlo, utilizaremos el *software* e introduciremos la suma de los desvíos de los datos respecto al promedio. Para ello, hacemos clic con el botón derecho y escribimos lo que aparece en la imagen. El resultado saldrá bajo el gráfico (página siguiente).



**Figura 22. Cuadro de diálogo para la obtención de la suma total de las desviaciones de los datos respecto al promedio y su valor**

Ahora bien, ¿esto siempre se cumplirá? Para cerciorarnos de esto, ingresaremos el siguiente caso:

- Durante el año 2019, apenas cayó 69,5 mm de agua, siendo éste el año más seco de los últimos lustros. Ingresamos este dato y ve cómo cambia el promedio. ¿Cuánto ha cambiado con el valor del promedio que obtuviste anteriormente? ¿Qué ocurre con el valor de la suma total de las desviaciones respecto al promedio?

Es decir, aun cuando hayamos ingresado un nuevo valor, que es más pequeño que el resto, la suma de los desvíos respecto al promedio *siempre es igual a cero*. Por último, considera que en el año 2020, se registró que el agua caída fue de 225 mm. ¿Subió o bajó su valor? ¿Cuánto varió el valor del promedio?

Ahora bien, supongamos que durante el año 2001 cayó 700 mm de agua, lo que representa algo fuera de lo común en un año normal. Este tipo de datos, que se alejan mucho del resto de las observaciones, se llama *dato atípico* o *outlier*. Esto hace que el valor del promedio cambie significativamente. Pero, ¿qué pasará con la suma de los desvíos respecto al promedio? Comprueba lo que sucede al cambiar este dato en el *software* y observa qué tanto ha cambiado el valor del promedio. Cuando ingresaste este dato, ¿hacia dónde se movió el valor del promedio: hacia los valores más altos o hacia los valores más bajos?

## MEDIANA

### 1) Fase de exploración:

Reunidos en grupos de 4 o 5 estudiantes, los alumnos responden las siguientes preguntas entregadas en una guía. Luego, comparan sus respuestas con todo el curso:

- i) Los psicólogos han calculado las horas de estudio, previo a un examen, de un grupo de adolescentes escolares para conocer su nivel de logro. Los tiempos (en horas) que se registraron fueron: 13 – 20 – 11 – 16 – 18. Ordena los datos de menor a mayor.  
Si observamos con detalle, hay cinco datos, lo que significa que dos de ellos serán menores que un dato y los otros dos serán más grandes que ese mismo dato. Diremos que el dato que deja la misma cantidad de datos, tanto hacia arriba como hacia abajo ocupa la *posición central*. ¿Cuánto es el porcentaje de datos que quedan sobre y bajo el dato que ocupa la posición central?
- ii) Se les ha preguntado a diez conductores cuántos litros consume su auto en carretera cada 100 km. Las respuestas que dieron fueron: 7 – 8 – 9 – 10 – 8 – 6 – 6 – 5 – 7 – 7 (Rauld, 1998, p. 216). Ordena los datos del más pequeño al más grande. Si nos damos cuenta, hay 10 datos. ¿Cuál(es) es(son) el(los) dato(s) que ocupa(n) la(s) posición(es) central(es)? Calcula el porcentaje de datos que son menores o iguales y mayores o iguales al dato central.
- iii) En un curso de 7° básico, se seleccionan a un grupo de 7 estudiantes para medir su estatura. Los datos que se obtuvieron (en metros) son: 1,62; 1,70; 1,65; 1,61; 1,97; 1,63; 1,64. Calcula el promedio. Ordena las estaturas del más pequeño al más alto y determina el valor central. ¿Qué valor crees que es mejor representante del conjunto de datos: el promedio o el dato que ocupa la posición central? Calcula el porcentaje de datos que quedan bajo y sobre el dato que ocupa la posición central.

### 2) Fase de introducción:

Reunidos en grupos de 4 a 5 alumnos, los estudiantes responden las siguientes preguntas, que luego serán compartidas junto a sus compañeros de curso:

- a) Un grupo de médicos desea comprobar la efectividad de un nuevo antipirético. Según los médicos, el remedio actúa entre 45 a 60 minutos de haber sido ingerido. Para ello, un grupo de diez pacientes voluntarios han probado el medicamento y se registraron los minutos que se demora en hacer efecto. Los tiempos (en minutos) que se registraron fueron los siguientes:

50 – 51 – 48 – 55 – 60 – 56 – 49 – 61 – 52 – 54

¿Cuánto fue el tiempo promedio que tardó en hacer efecto el remedio?  
Si ordenamos los datos, de menor a mayor, ¿cuál es el que queda al centro?

- b) Ahora bien, para tener mayor seguridad de que el remedio promete actuar en ese rango de tiempo, un nuevo voluntario se suma a los diez anteriores y, en este caso, el tiempo de registro fue de 45 minutos.

Determina el promedio  
¿Cuál es el dato central?

¿Hay un único dato que ocupa la posición central?

- c) Para certificar que el antipirético es efectivo y salga al mercado, los farmacéuticos considerarán, en total, a 15 pacientes. Por lo tanto, se incluyen 4 pacientes voluntarios que se someten a tratamiento. Los tiempos (en minutos) que se registraron con los 15 pacientes fueron los siguientes:

50 – 51 – 48 – 55 – 60 – 56 – 49 – 61 – 52 – 54 – 45 – 120 – 59 – 63 – 44 – 47

Calcula el tiempo promedio.

¿Qué ha pasado?

¿Puedes mencionar cuál(es) es(son) el(los) valor(es) atípico(s)?

En conclusión, podemos decir que, si estamos en presencia de datos atípicos, entonces, el promedio no es un buen representante de los datos. Por lo tanto, la mediana pasa a ser una medida de tendencia central muy adecuada.

Por otra parte, ¿qué característica tienen los datos que están por debajo la mediana? ¿Y los que están por sobre la mediana?

- d) Finalmente, para cerciorarse de que el medicamento es efectivo, un último voluntario se ofrece para el estudio. Su registro fue de 53 minutos. ¿Cómo podrías determinar el valor central con los 16 datos? Este valor central, ¿cómo lo obtuviste?, ¿coincide con alguno de los valores obtenidos en las mediciones?

En otras palabras, si los datos ya están ordenados de forma creciente o decreciente, entonces, la mediana es igual al valor central del conjunto de datos, siempre que la cantidad de ellos sea impar; mientras que, si el número de datos es par, entonces, la mediana es la suma de los datos centrales, dividido en dos.

En otras palabras, podemos decir que la mediana es otra manera de ver el centro de un conjunto de datos, y que corresponde al valor que ocupa la posición central del conjunto de datos.

En el estricto rigor, la mediana es una medida de tendencia central que se obtiene al ordenar los datos de forma creciente (de menor a mayor) o decreciente (de mayor a menor), y nos indica que, al menos, un 50% de los datos son mayores o iguales a la mediana, mientras que, al menos, un 50% de los datos son menores o iguales al valor de la mediana. Ahora bien, sea  $n$  la cantidad de datos, si  $n$  es impar, el valor de la mediana será el dato ubicado en la posición  $\frac{n+1}{2}$ , mientras que si  $n$  es par, el valor de la mediana será el promedio de los datos que están ubicados en las posiciones  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$ .

Ahora bien, visualizaremos a través de un ejemplo, la definición de la mediana dada aquí.

Un grupo de 9 deportistas compiten entre sí para evaluar su resistencia. Para ello, consideran la mayor cantidad de repeticiones de levantamiento de pesas durante una cierta cantidad de minutos. Los registros fueron:

35 – 31 – 29 – 32 – 30 – 34 – 37 – 32 – 31

Ordenemos los datos de menor a mayor. Obtendremos lo siguiente:

29 – 30 – 31 – 31 – 32 – 32 – 34 – 35 – 37

Como la cantidad de datos es 9, y este número es impar, entonces, lo que nos dice la definición es que debemos sumarle 1 a la cantidad de datos, y a este resultado, lo dividimos por dos. Al realizar esto, tendremos lo siguiente:

$$\frac{9 + 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

El número que acabamos de obtener nos indica **la posición en la que está ubicado el valor de la mediana**. Volvamos a ver nuestros ordenados:

$$29 - 30 - 31 - 31 - \mathbf{32} - 32 - 34 - 35 - 37$$

El dato marcado en negrita corresponde al valor de la mediana.

¿Cuánto es el porcentaje de datos que quedan bajo la mediana (sin considerar este valor)?  
 ¿Y cuánto es el porcentaje de datos que queda sobre la mediana (sin considerar este valor)?  
 ¿Qué ocurre si repetimos las preguntas anteriores, pero considerando el valor de la mediana?

Ahora bien, para elegir al mejor representante del grupo de deportistas, consideran agregar a 3 competidores más para comparar sus resultados. Los registros fueron: 33 – 37 – 33.

Por lo tanto, los registros de todos los competidores fueron:

$$35 - 31 - 29 - 32 - 30 - 34 - 37 - 32 - 31 - 33 - 37 - 33$$

Ordenemos los datos de menor a mayor.

$$29 - 30 - 31 - 31 - 32 - 32 - 33 - 33 - 34 - 35 - 37 - 37$$

Como tenemos 12 datos, entonces, para calcular la mediana, de acuerdo a la definición dada, debemos determinar los valores que están en las posiciones  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$ . Para este caso, tenemos:

$$\frac{12}{2} = 6; \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7$$

Recordemos que lo que hemos obtenido son las posiciones de los datos que ocupan el 6° y 7° lugar. Volvamos a escribir los datos ya ordenados y determinemos cuáles son los datos que ocupan estas posiciones.

$$29 - 30 - 31 - 31 - 32 - \mathbf{32} - \mathbf{33} - 33 - 34 - 35 - 37 - 37$$

De acuerdo a la definición entregada, si la cantidad de datos es par, entonces, el valor de la mediana será el promedio entre estos dos valores:

$$\frac{32 + 33}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

Luego, el valor de la mediana es 32,5.

Este valor, ¿coincide con alguno de los datos anteriores?  
 ¿Cuánto es el porcentaje de datos que quedan bajo la mediana?  
 ¿Y cuánto es el porcentaje de datos que queda sobre la mediana?

3) Fase de estructuración:

Consideremos el caso de la cantidad de agua caída en los años 1999 – 2019 e ingresemos los datos al programa *Fathom*. Determinemos nuevamente el promedio y, a su vez, determinemos la mediana.

Año	Total de agua caída (mm)
1999	400,4
2000	621,5
2001	443,3
2002	608,0
2003	207,2
2004	408,5
2005	431,8
2006	453,6
2007	167,7
2008	374,8
2009	254,9
2010	184,7
2011	187,4
2012	320,0
2013	232,7
2014	246,2
2015	295,0
2016	268,3
2017	273,5
2018	233,1
2019	69,5

Collection 1

	Año	Agua_caída_mm	<new>
1	1999	400,4	
2	2000	621,5	
3	2001	443,3	
4	2002	608,0	
5	2003	207,2	
6	2004	408,5	
7	2005	431,8	
8	2006	453,6	
9	2007	167,7	
10	2008	374,8	
11	2009	254,9	
12	2010	184,7	
13	2011	187,4	
14	2012	320,0	
15	2013	232,7	
16	2014	246,2	
17	2015	295,0	
18	2016	268,3	
19	2017	273,5	
20	2018	233,1	
21	2019	69,5	

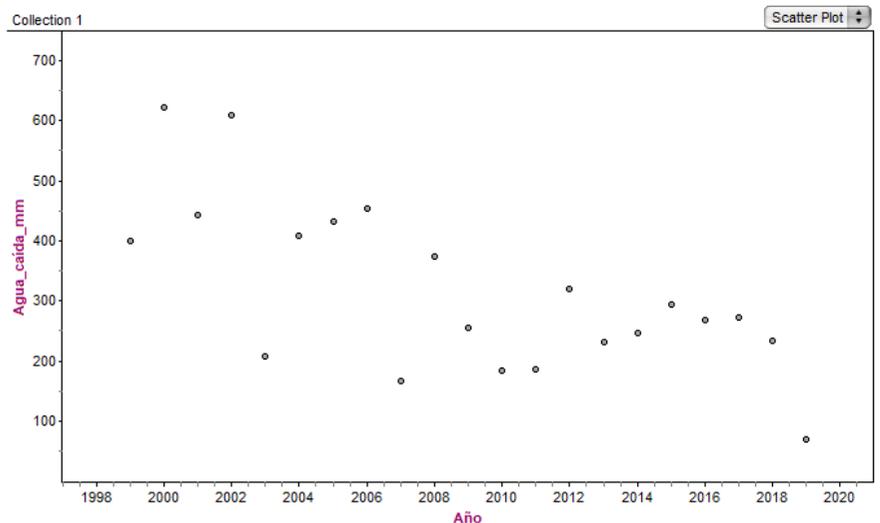
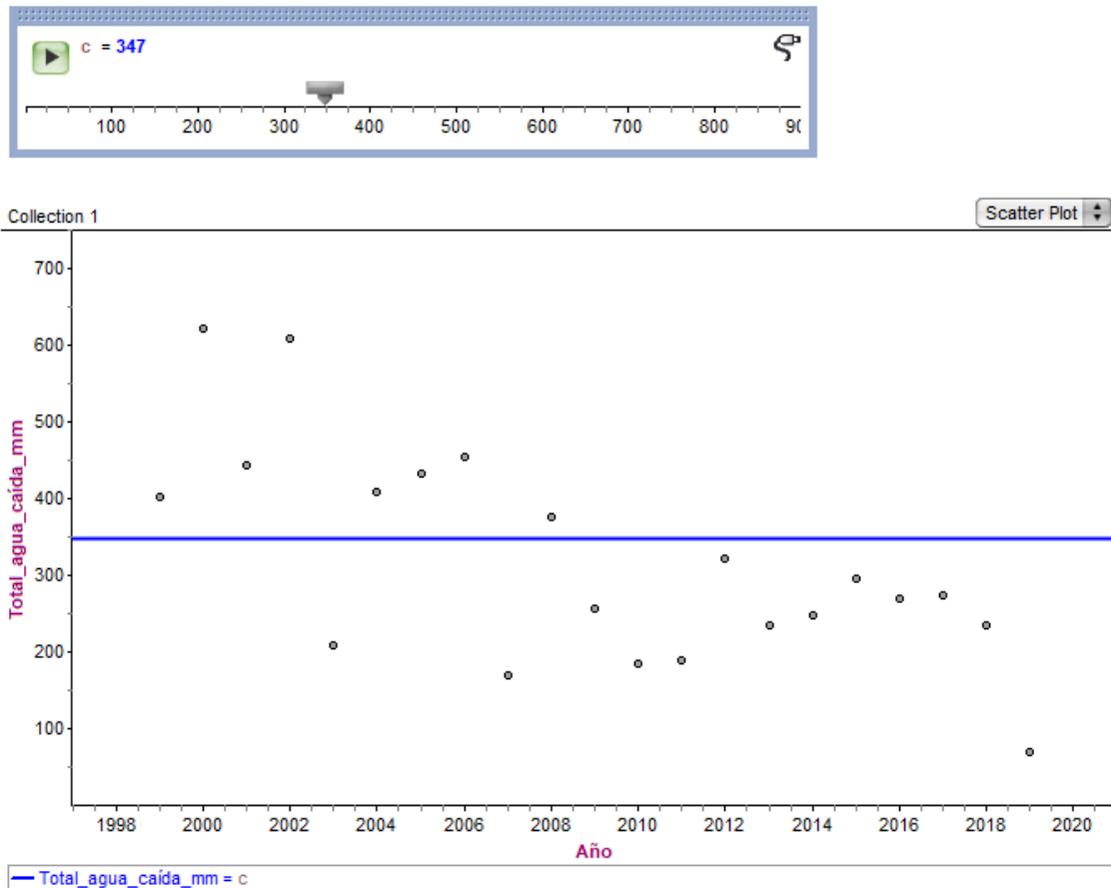


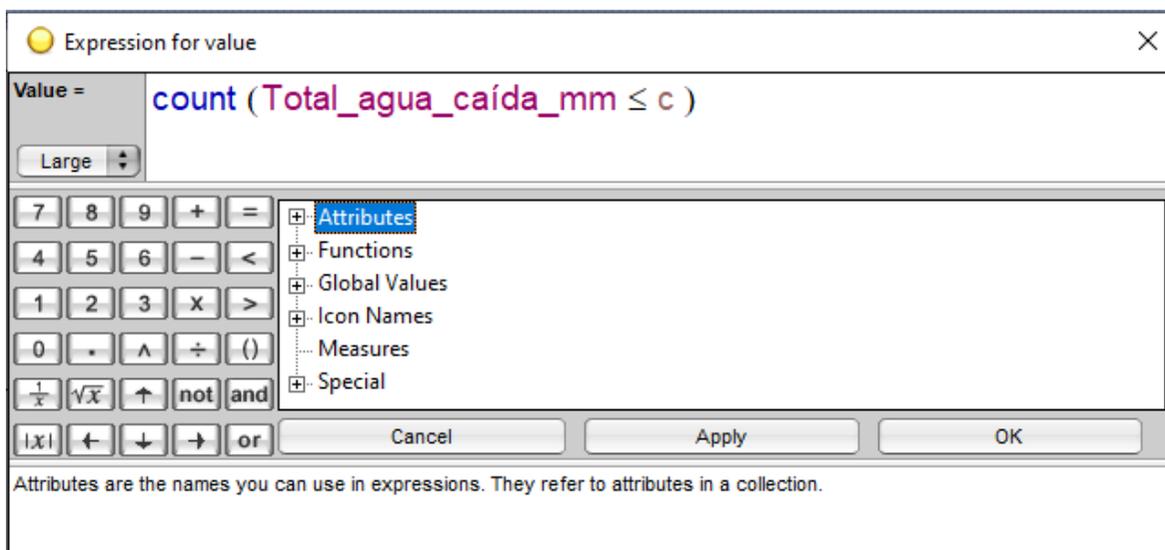
Figura 23. Datos ingresados al software *Fathom*

Ahora, ingresaremos un nuevo deslizador (*Slider*) que nos permitirá representar gráficamente, y de forma aproximada, la mediana. Llamaremos a esta recta por  $c$ .



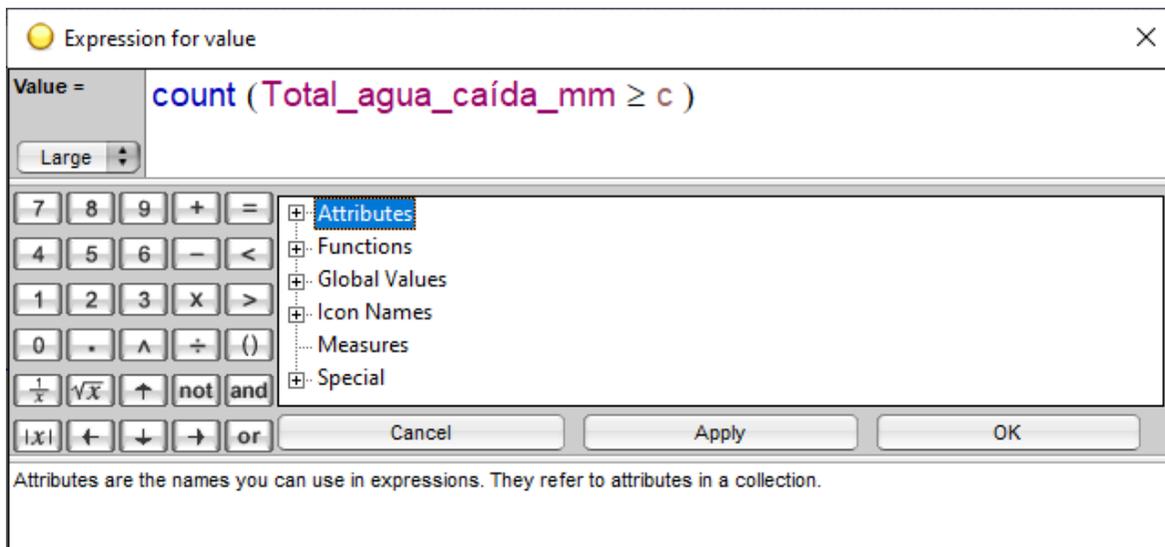
**Figura 24. Representación gráfica del deslizador**

Introduciremos una nueva fórmula que nos permitirá calcular cuántos datos quedarán sobre y bajo el valor de la recta móvil. Haciendo clic con el botón derecho y pulsando la opción *Plot value*, escribiremos lo que aparece en la siguiente imagen:



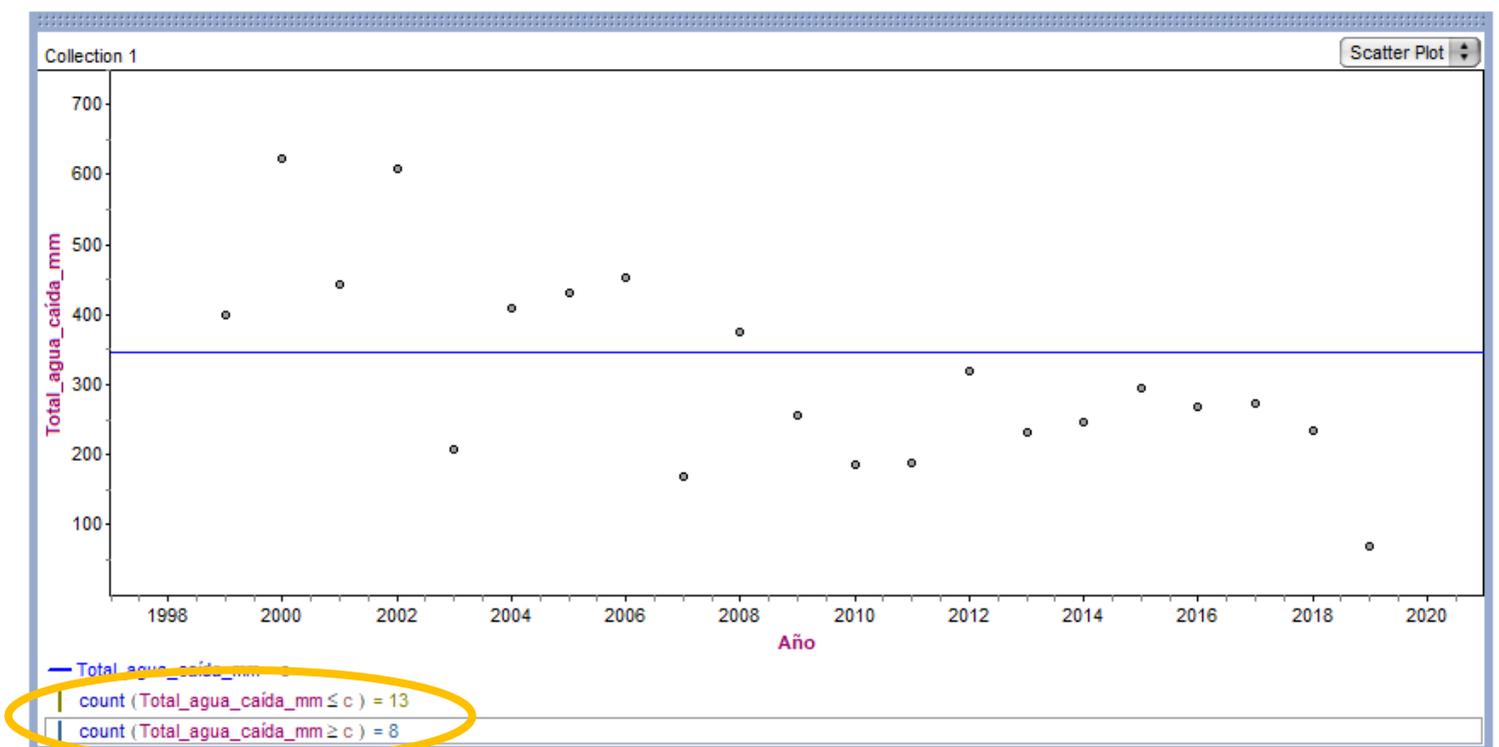
**Figura 25. Fórmula para el conteo de datos que son menores o iguales a la recta móvil  $c$**

De igual modo, se repite el procedimiento anterior, pero ahora consideraremos los datos que son mayores o iguales a la recta móvil. La imagen siguiente indica lo que debemos ingresar:



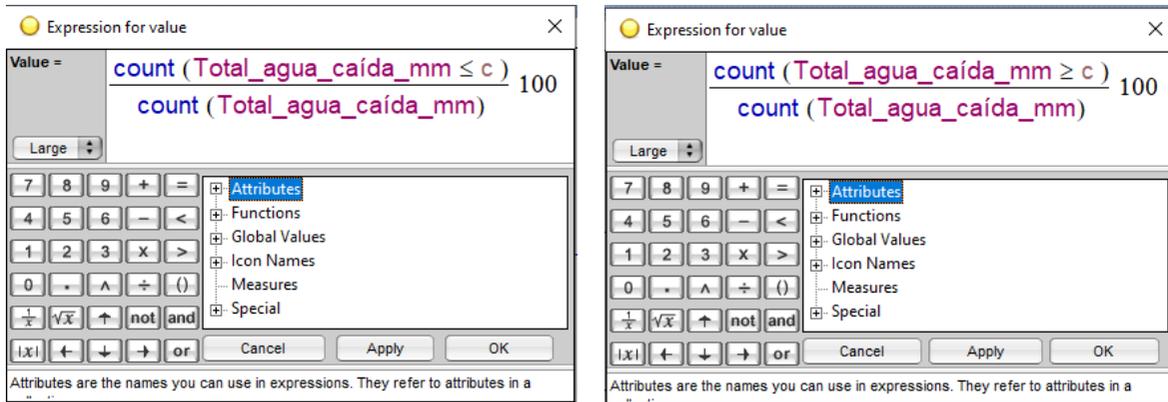
**Figura 26. Fórmula para el conteo de datos que son mayores o iguales a la recta móvil  $c$**

La palabra *count* nos cuenta la cantidad de datos. Para este caso, lo que hemos hecho es contar la cantidad de datos que están sobre y bajo la recta móvil, como lo ilustra la siguiente imagen:



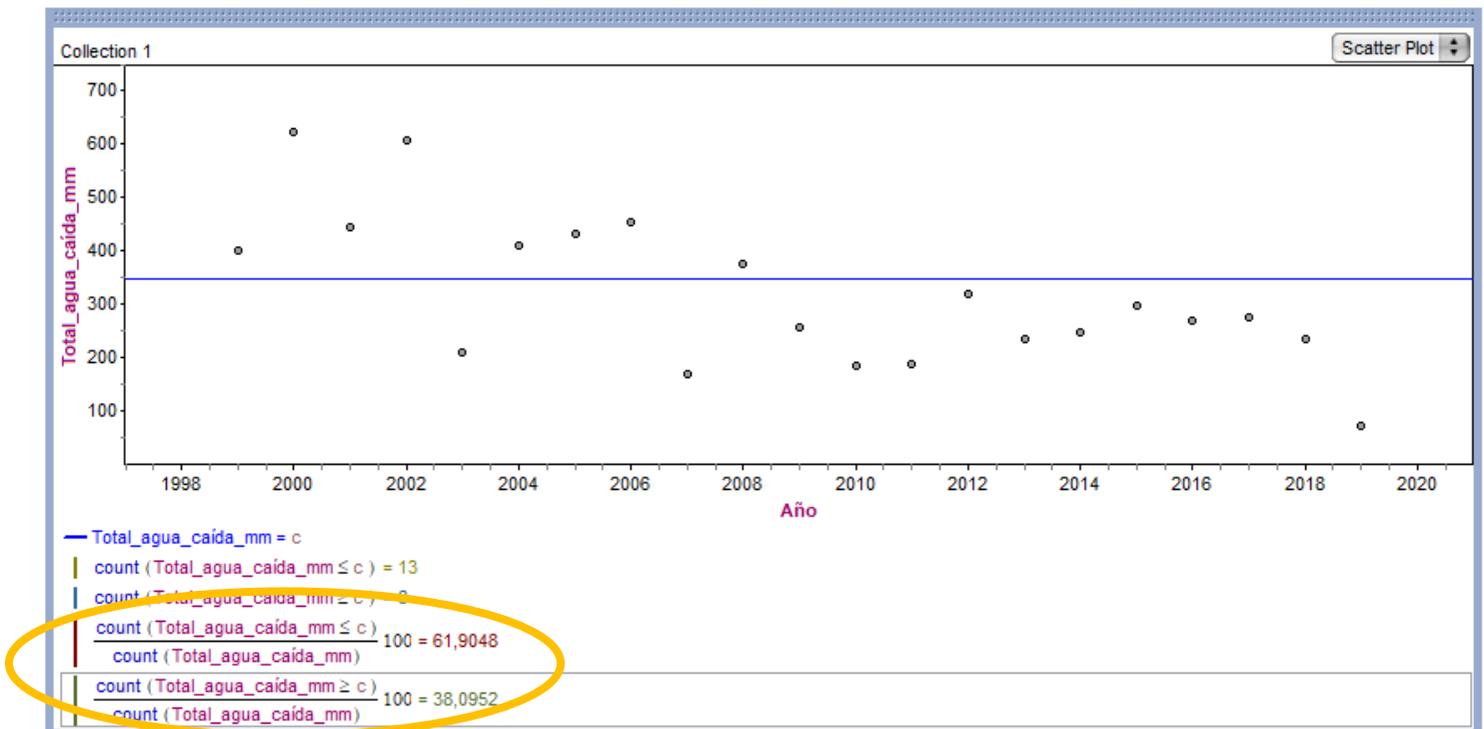
**Figura 27. Cantidad de datos que son menores o iguales o mayores e iguales al valor de la recta móvil.**

Ahora, determinaremos el porcentaje de datos que son menores o iguales y mayores o iguales al valor de la recta móvil. Para ello, haciendo clic derecho sobre el gráfico, y seleccionando la opción *Plot value* ingresaremos lo que aparecen las imágenes siguientes (página que sigue):



**Figura 28. Expresión para el porcentaje de datos que quedan bajo y sobre la recta móvil**

Al multiplicar por 100 hace que los números queden expresados en valores decimales (el *software* no entrega el valor dado con el símbolo %). Los valores están dados bajo el gráfico:



**Figura 29. Porcentaje de datos que quedan sobre y bajo la recta móvil.**

Al pulsar *play* en el deslizador, veremos que estos valores cambian permanentemente, lo que nos permitirá observar que, a medida que los valores de *c* aumentan o disminuyen, los porcentajes también cambiarán. Ahora bien, ¿en qué lugar deberíamos colocar la recta móvil para que quede, aproximadamente, un 50% de los datos sobre la recta y, aproximadamente, un 50% de los datos bajo la recta? Para ello, mueve la recta e intenta aproximarte a este valor.

Ahora bien, veremos que el valor que nos deja el 50% de los datos bajo la recta móvil y un 50% de los datos sobre la recta es la mediana. Calcula la mediana con los datos de agua caída que hubo por cada año. Ahora, determinaremos el valor de la mediana usando el *software*. Para ello, haz clic en el botón derecho sobre el gráfico y pulsa la opción *Plot value* e ingresa lo que aparece en la siguiente imagen (página siguiente):

Bajo el gráfico saldrá el valor de la mediana. Comprueba tu respuesta que obtuviste con la que entrega el *software*.

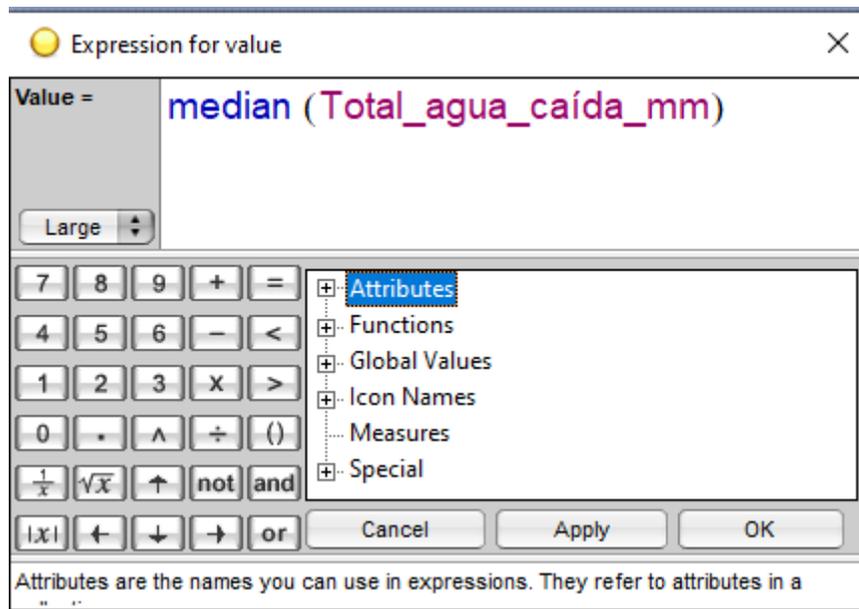
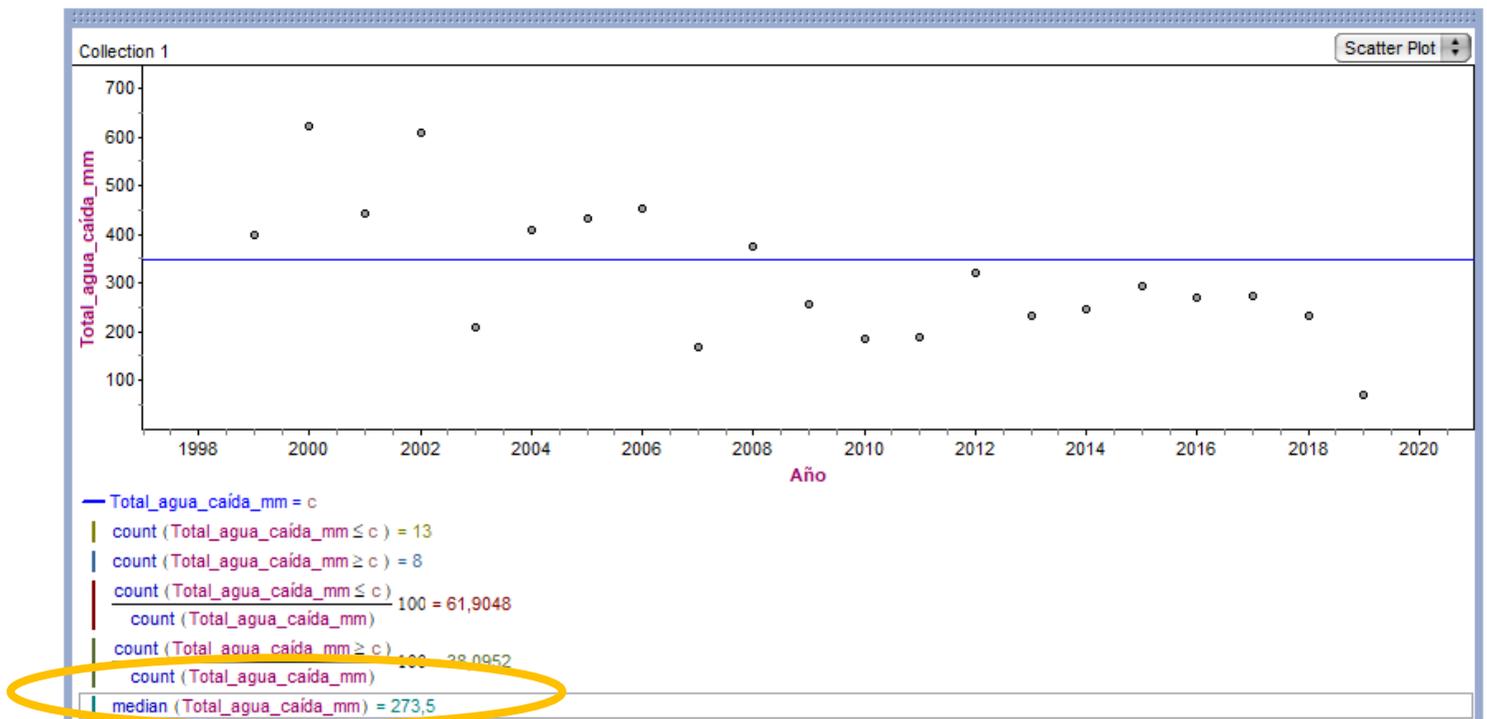
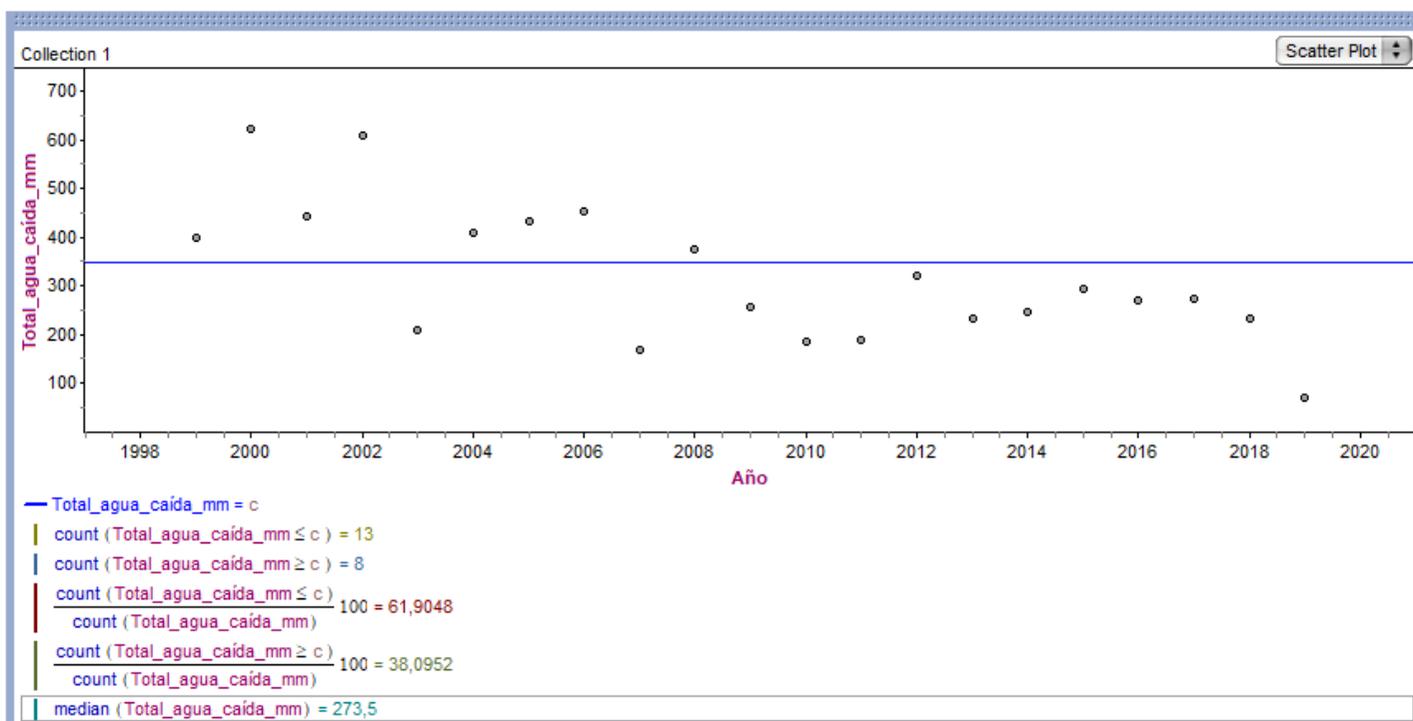


Figura 30. Cálculo de la mediana





**Figura 31. Valor de la mediana**

- Dado el valor que obtuviste en el gráfico y con los valores que obtuviste, ¿la mediana coincide con algunos de los datos de la tabla?
- Ahora bien, ¿qué crees que ocurrirá al valor del promedio y de la mediana y sacamos la cantidad de agua caída de los años 2000, 2002 y 2019? ¿Por qué crees que ha ocurrido eso?

A continuación, vuelve a ingresar los datos que fueron eliminados en la pregunta (b) e agrega el siguiente dato: en el año 2020 cayeron 225 mm de agua. ¿Cuánto varió el valor de la mediana?

Luego de esto, cambia el dato de agua caída del año 2000 a 700 mm ¿Cuánto ha cambiado el valor de la mediana al ingresar este nuevo dato? Compara con el valor que obtuviste con el promedio en la sección anterior. Con esto, ¿cuál crees que puede ser un valor más representativo del conjunto de datos?

Finalmente, recordemos que el promedio lo podemos interpretar como una repartición equitativa entre los datos; mientras que, para la mediana, podemos interpretar este valor como un centro que trata de dejar **aproximadamente** la misma cantidad de datos tanto hacia abajo como hacia arriba los valores que están bajo la mediana y los valores que están sobre ella.

En general, decimos que la mediana es una medida de tendencia central más robusta que el promedio, pues, a pesar de que tengamos valores muy grandes o muy pequeños, el centro de los datos se mantendrá “estable”.

## MODA

### 1) Fase de exploración:

Los alumnos acceden a la siguiente encuesta realizada a través de un formulario de Google, que se les envía a su correo electrónico. Las preguntas son las siguientes:

- 1) ¿Cuánto mides?
  - a) Entre 1,6 m y 1,64 m
  - b) Entre 1,65 m y 1,69 m
  - c) Entre 1,7 m y 1,74 m
  - d) Entre 1,75 m y 1,79 m
  - e) Entre 1,8 y 1,84 m
  - f) Más de 1,84 m
  
- 2) ¿Cuál es tu color favorito?
  - a) Rojo
  - b) Morado
  - c) Azul
  - d) Verde
  - e) Amarillo
  - f) Rosado
  - g) Café
  
- 3) ¿Cuál es tu cantante/artista favorito?
  - a) Mon Laferte
  - b) Movimiento Original
  - c) Santa Fera
  - d) Cami
  - e) Pablo Chill – E
  - f) Los Prisioneros
  - g) Polimá Westcoast
  - h) Harry Nach
  
- 4) ¿Cuál es tu videojuego favorito?
  - a) Fornite
  - b) Grand Theft Auto (GTA)
  - c) League of Leyends (LOL)
  - d) Minecraft
  - e) FIFA 20
  - f) Free Fire
  - g) Pro Evolution Soccer (PES)
  - h) Otro
  
- 5) ¿Cuál es la red social que más ocupas?
  - a) Facebook
  - b) Instagram
  - c) Tik Tok
  - d) Twitter
  - e) Pinterest
  - f) Snapchat
  - g) No ocupo redes sociales

- 6) ¿Cuántos hermanos(as) tienes?
- a) 0
  - b) 1
  - c) 2
  - d) 3
  - e) 4
  - f) Más de 4
- 7) ¿Cuál es el estilo de música que más escuchas?
- a) Trap
  - b) Reggaetón
  - c) Salsa
  - d) Rock
  - e) Heavy Metal
  - f) Clásica
  - g) Cumbia
  - h) Merengue
  - i) Otro
- 8) ¿Cuál es tu asignatura favorita?
- a) Lenguaje y Literatura
  - b) Historia
  - c) Matemáticas
  - d) Educación Física
  - e) Música
  - f) Inglés
  - g) Artes Visuales
  - h) Tecnología
  - i) Ciencias Naturales
- 9) ¿Cuál es tu número de calzado?
- a) 35
  - b) 36
  - c) 37
  - d) 38
  - e) 39
  - f) 40
  - g) 41
  - h) 42
  - i) 43
  - j) 44
  - k) 45
  - l) Otro

Luego, se les ilustra a los estudiantes cuáles fueron las respuestas que más se repitieron. Los formularios de Google tienen la ventaja de que se pueden ilustrar los resultados a medida que se van entregando las respuestas. A continuación, por medio de un plenario, responden las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuáles han sido las respuestas de mayor preferencia?
- b) ¿Cuál es la mediana para las preguntas 6 y 9?

### 2) Fase de introducción:

Reunidos en grupos de 4 o 5 integrantes, los estudiantes responden las preguntas que se les planteará en la siguiente situación, dadas en una guía:

El Ministerio de Transportes ha recogido información sobre el número de accidentes de tránsito ocurridos durante un mes debido a la rapidez a la que conducen los conductores en una ciudad. Esta información se ha reunido en la siguiente tabla (modificado del libro Manual del Preparación de Matemáticas UC, 2003, Tapia Rojas *et al*):

Rapidez (km/h)	Número de accidentes
10	40
20	130
30	210
40	250
50	350
60	240
70	150
80	70
90	40
100	20
110	20
120	10

- a.1) ¿A qué rapidez es más frecuente que ocurran los accidentes de tránsito en la ciudad?
- a.2) ¿Cuál es el promedio de accidentes que hubo por día? (Considera que el mes tiene 30 días). Interprete este resultado.
- a.3) ¿Qué medidas implementarías para reducir los accidentes de tránsito en tu comuna? Averigua cuáles son las leyes que rigen la conducción vial en Chile.

En general, se dice que el dato que tiene la mayor frecuencia corresponde a la moda. Ya sea que trabajemos con datos cualitativos (que mencionan alguna característica) o cuantitativos (que nos indican un número), podemos decir que siempre podemos determinarla.

En otras palabras, la moda es otra forma de mirar el centro de un conjunto de datos, y este centro está dado por el dato que más se repite.

En el caso del promedio, éste se calcula para datos cuantitativos, sin embargo, no lo podemos calcular cuando los datos son de tipo cualitativo.

### 3) Fase de estructuración:

Reunidos en grupos de 4 o 5 integrantes, los alumnos responden la siguiente actividad que se les entregará en una guía:

Desde la Región Metropolitana hasta la XI Región de Aysén, se ha escuchado de los índices de contaminación atmosférica. Pero, ¿qué es la contaminación atmosférica? El Ministerio del Medioambiente lo define como la presencia de contaminantes en la atmósfera, tales como polvo, gases o humo en cantidades y durante períodos de tiempo tales que resultan dañinos para los seres humanos, la vida silvestre y la propiedad.

Para tomar alguna acción mejorar la calidad del aire, el Ministerio lleva un registro de los de la cantidad de días de episodios críticos que hay en el aire en algunas ciudades. Estos registros corresponden al mes de junio de año 2021:

<b>Ciudad</b>	<b>Cantidad de días de episodios críticos</b>
Región Metropolitana	8
Rancagua	10
Talca	15
Linares	7
Curicó	8
Chillán	14
Los Ángeles	14
Concepción	11
Curanilahue	4
Temuco	15
Valdivia	11
La Unión	13
Osorno	19
Puerto Montt	17
Aysén	2
Coyhaique	17

**Fuente: Ministerio del Medio Ambiente**

Debemos tener presente que un episodio crítico se declara cuando se superan los valores que estén establecidos en la respectiva norma de calidad primaria del aire. Estas normas definen los niveles de concentraciones que dan origen a episodios críticos (niveles 1, de alerta; 2 de preemergencia; y 3, de emergencia ambiental)<sup>4</sup>.

Con la información precedente, responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la ciudad con mayor cantidad de días de episodios críticos durante el mes de junio?
- b) Ahora bien, ¿cuántas ciudades tuvieron 8 días de episodios críticos?

En otras palabras, podemos decir que, en un conjunto de datos, podemos tener una moda, dos, tres o más modas. Cuando esto ocurre, decimos que la distribución es bimodal, trimodal o multimodal.

Por otra parte, ¿tú crees que, para este ejemplo, la moda es un buen representante de este conjunto de datos? ¿Qué otra medida de tendencia central ocuparías? ¿Por qué?

---

<sup>4</sup> Guía de Calidad del aire y Educación Ambiental, 2016.

### 3. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

#### Instrucciones generales

En grupos de 4 o 5 integrantes y, con relación a algún tema que les interese, creen una encuesta con 5 a 10 preguntas, que les permita recolectar información sobre el tema elegido, en la que puedan aplicar las tres medidas de tendencia central estudiadas (promedio, moda y mediana) y usar el software *Fathom* para representar la información recogida. Deben aplicarla como mínimo, a 30 personas (6 personas encuestadas por cada integrante). Pueden seleccionar algunos de los temas que aparecen a continuación u otro que sea de su interés:

- Redes sociales
- Deportes
- Covid – 19
- Series de alguna plataforma virtual (Netflix, HBO Max, Amazon, Disney+)
- Medioambiente
- Elecciones presidenciales
- Actividades culturales (museos, bibliotecas municipales, teatros, etc.)
- Videojuegos
- Feminismo
- Convención Constitucional

La encuesta que confeccionen pueden ir dirigidas a familiares, amigos o vecinos, creada a través de un formulario de Google que recoja las respuestas, las cuales deben ser traspasadas al software *Fathom* para su representación. Obligatoriamente, deben presentar el link del formulario y el Excel de los datos de la encuesta respondida. Para que les sea más fácil recopilar los datos, pueden enviar la encuesta por medio de *Whatsapp* a sus amigos y familiares.

Deberán ir completando preguntas y tablas que les permitirán saber si es posible o no determinar cada medida de tendencia central. Las preguntas *sexo* y *edad* son obligatorias en todas las encuestas. También deberán responder a las preguntas que se plantean en la última sección de este apartado, en que deberán hacer uso de *Fathom*.

A continuación, aparece un ejemplo que les permitirá guiarse con las preguntas que pueden realizar para aplicar su encuesta.

#### Ejemplo del diseño de la encuesta

- 1) Sexo: \_\_\_\_\_ Masculino \_\_\_\_\_ Femenino
- 2) Edad: \_\_\_\_\_ años
- 3) ¿Cuál es la región que más le gustaría visitar?
- 4) De las siguientes atracciones turísticas nacionales, ¿cuál es la que más le gustaría visitar? (Colocar una imagen de cada una de ellas). Sólo debe elegir una.

Morro de Arica \_\_\_\_\_



Oficina Salitrera Humberstone \_\_\_\_\_



Valle de la Luna (Antofagasta) \_\_\_\_\_



Desierto florido \_\_\_\_\_



Valle del Elqui \_\_\_\_\_



Moais de la Isla de Pascua \_\_\_\_\_



Cajón del Maipo \_\_\_\_\_



Viñedos del Valle Central \_\_\_\_\_



Parque Nacional Radal Siete Tazas (Talca) \_\_\_\_\_



Mina Chiflón del Diablo (Concepción) \_\_\_\_\_



Lago Budi (sector costero de Temuco) \_\_\_\_\_



Huilo Huilo \_\_\_\_\_



Chiloé \_\_\_\_\_



Capillas de Mármol (Coyhaique) \_\_\_\_\_



Torres del Paine (Punta Arenas) \_\_\_\_\_



5) ¿Cuántas veces ha salido de su región de vacaciones? \_\_\_\_\_

6) ¿Cuánto ha sido la mayor cantidad de días que ha salido de vacaciones en otra región del país? \_\_\_\_\_

7) ¿Qué continente le gustaría conocer? (Sólo puede elegir uno)

- América del Sur
- América del Norte
- Asia
- Europa
- África
- Oceanía

8) ¿Cuál es el medio que más prefiere para viajar?

- Auto particular
- Bus interurbano
- Avión
- Tren

9) ¿Cómo califica la calidad del servicio hotelero en que se ha hospedado en sus viajes?

- Excelente
- Muy Bueno
- Bueno
- Regular
- Malo
- Muy malo

10) ¿Cómo se entera de las promociones y ofertas turísticas?

- Internet
- Televisión
- Radio
- Diario o periódicos

**Link de la encuesta en el formulario de Google**

Observen las imágenes que se adjuntan a continuación como referencia de la encuesta que deben realizar:

Preguntas Respuestas

### Encuesta sobre el Turismo en Chile

Estimado/a encuestado:

Solicitamos responder esta pequeña lista de preguntas que nos permitirán conocer algunos intereses relacionados con el tema del turismo en nuestra nación. Respóndela de forma sincera, pues nos ayudará a reflejar las inquietudes no sólo tuyas, sino también de la muchas otras personas.

1) Sexo \*

Hombre

Mujer

2) Edad (escribe sólo el número de tu edad, por ejemplo, 39) \*

Texto de respuesta corta

3) ¿Cuál es la región que más te gustaría visitar? \*

Región de Arica y Parinacota

Región de Tarapacá

Región de Antofagasta

Región de Atacama

Región de Coquimbo

Región de Valparaíso

Región Metropolitana

Región del Libertador General Bernardo O'Higgins

Región del Maule

Región del Ñuble

Región del Biobío

Región de la Araucanía

### Ejemplo de Matriz de correspondencia entre las preguntas y las MTC

Preguntas de la encuesta	¿Permite calcular el promedio?	¿Permite calcular la mediana?	¿Permite determinar la moda?
Pregunta 1			<b>X</b>
Pregunta 2	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
Pregunta 3			<b>X</b>
Pregunta 4			<b>X</b>
Pregunta 5	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
Pregunta 6	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>
Pregunta 7			<b>X</b>
Pregunta 8			<b>X</b>
Pregunta 9			<b>X</b>
Pregunta 10			<b>X</b>

### **Ejemplo de tabla de resultados**

Preguntas de la encuesta	Promedio	Mediana	Moda
Pregunta 1			17
Pregunta 2	29,3	44	30
Pregunta 3			R. Aysén
Pregunta 4			Moais
Pregunta 5	3,6	3	4
Pregunta 6	15,1	12	14
Pregunta 7			Europa
Pregunta 8			Avión
Pregunta 9			Muy Bueno
Pregunta 10			Internet

### **Estructura del Informe que debe entregar el grupo**

- 1) Portada: logo del colegio, tema seleccionado, nombre de los integrantes, curso, ciudad y fecha.
- 2) Introducción: ¿por qué eligieron este tema? ¿Qué importancia tiene para ustedes y para las personas cercanas (amigos, familiares)?
- 3) Diseño de la encuesta (preguntas creadas)
- 4) Link de la encuesta en el formulario de Google
- 5) Matriz Correspondencia entre las Preguntas y las MTC
- 6) Tabla de Resultados

Escribe los resultados obtenidos para cada pregunta:

Preguntas de la encuesta	Promedio	Mediana	Moda
Pregunta 1			
Pregunta 2			
Pregunta 3			
Pregunta 4			
Pregunta 5			
Pregunta 6			
Pregunta 7			
Pregunta 8			

Pregunta 9

Pregunta 10

7) Preguntas a responder

- **Con uso de *Fathom***

- En las preguntas en las que tuvieron que calcular el promedio, ¿aparecieron datos atípicos? En sus palabras, ¿cómo definirían un dato atípico (*outlier*)?
- En las preguntas en las que se pueden calcular dos o tres medidas de tendencia central, ¿cuál creen que es la que mejor representa la información? Argumenten.

- **Sin uso de *Fathom***

- ¿Por qué en algunas preguntas es posible calcular el promedio y en otras no?
- Selecciona una pregunta que contenga las 3 medidas de tendencia central e interpreta los resultados que obtuvieron para cada una de ellas.
- ¿Por qué es posible determinar la moda en todas las preguntas que formularon en la encuesta? Argumenten su respuesta.

8) Conclusiones

- a) ¿Cuáles son los principales aprendizajes que lograron con el trabajo?
- b) ¿Cómo les ayudó *Fathom* a entender e interpretar los datos?
- c) ¿Qué fue lo que más les gustó de este trabajo? ¿Qué fue lo que menos les gustó?

#### 4. POST TEST

### POST TEST DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Puntaje ideal: 21 puntos

Puntaje de aprobación: 11 puntos

Puntaje obtenido:

#### OBJETIVOS ESPERADOS:

- Definir conceptos básicos de las medidas de tendencia central
- Calcular y determinar medidas de tendencia central dados un conjunto de datos no agrupados
- Argumentar cuál es la mejor medida de tendencia central que representa a un conjunto de datos

#### INSTRUCCIONES:

- Lee atentamente cada pregunta
- El desarrollo de este test puede ser respondido con lápiz mina o lápiz pasta azul o negro. Puedes ocupar calculadora.
- Debe desarrollar cada pregunta, de lo contrario, no será válida su respuesta
- Dispone de 15 minutos para responder este test

#### f) CONCEPTOS

Define con tus palabras los siguientes conceptos estadísticos (2 pts c/u):

#### g) Promedio o media aritmética

---

---

---

---

#### h) Mediana

---

---

---

---

i) Moda

---

---

---

---

j) Dato atípico

---

---

---

---

k) OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN



1) Para estudiar la duración, en meses, de una marca de ampollitas, se selecciona una muestra de once de ellas. Los datos de duración son: 15, 12, 17, 22, 13, 20, 18, 21, 12, 12, 18 (Cofré, Moreno y Rodríguez, 1999, p. 212).

- a) ¿Cuál es el valor de la moda?
- b) ¿Cuál es el valor de la mediana?
- c) ¿Cuánto es el promedio?
- d) ¿Qué significa cada medida de tendencia central?

2) En una competencia escolar, participarán dos grupos de 5 integrantes cada uno. Los datos están dados en la tabla que sigue (González, Moraga y Silva, 1999, p. 221):

Edades de los amigos			
Grupo 1		Grupo 2	
Nombre	Edad (años)	Nombre	Edad (años)
Camila	13	Joaquín	17
Andrea	16	Nicolás	15
Matías	14	Paula	16
Felipe	19	Paz	16
María	18	Tomás	16

a) Calcula promedio, moda y mediana en cada grupo de integrantes

**b) Si a la lista se añade una niña de 15 años, ¿cuál de las medidas de tendencia central cambiará más? Argumenta tu respuesta.**

**c) Si la niña que se agrega al grupo tiene 19 años, ¿qué valor cambiará más? Argumenta tu respuesta.**

**5. POST – TEST APLICADO EN LA SECUENCIA  
POST TEST DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA**

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Puntaje ideal: 14 puntos

Puntaje de aprobación: 7 puntos

Puntaje obtenido:

**OBJETIVOS ESPERADOS:**

- Definir conceptos básicos de las medidas de tendencia central
- Calcular y determinar medidas de tendencia central dados un conjunto de datos no agrupados
- Argumentar cuál es la mejor medida de tendencia central que representa a un conjunto de datos

**INSTRUCCIONES:**

- Lee atentamente cada pregunta
- El desarrollo de este test puede ser respondido con lápiz mina o lápiz pasta azul o negro. Puedes ocupar calculadora.
- Debe desarrollar cada pregunta, de lo contrario, no será válida su respuesta
- Dispone de 15 minutos para responder este test

**I) CONCEPTOS**

**Define con tus palabras los siguientes conceptos estadísticos (2 pts c/u):**

**c) Promedio o media aritmética**

---

---

---

---

**d) Dato atípico**

---

---

---

---

## II) OPERATORIA Y ARGUMENTACIÓN

- 3) Se ha determinado que un exceso de la concentración de plomo en el aire puede producir nocivos efectos en la salud. En efecto, se ha determinado el valor de 1,5 microgramos por metro cúbico como nivel máximo tolerable. Los siguientes datos corresponden a concentraciones de plomo, en microgramos por metro cúbico, medidos en el aire, al interior de algunas fábricas:

$$0,4 - 1,1 - 0,42 - 0,73 - 0,48 - 1,1$$

- a) Determina la concentración promedio de plomo que hay en estas seis fábricas (**1 pto**)  
b) En otra fábrica se ha medido la concentración de plomo en el aire (en microgramos por metro cúbico), encontrándose un valor de 5,4. Determina el valor promedio con estos siete valores. ¿Por qué ha variado tanto el valor del promedio? (**3 pts**)

- 4) Para ejercitar el concepto de promedio, una profesora pide a los niños obtener el número promedio de lápices de colores que tiene cada uno de ellos en su estuche. Las siguientes son las cantidades que dice cada uno de los 15 niños del curso:

$$4 - 2 - 1 - 5 - 10 - 3 - 7 - 9 - 2 - 5 - 5 - 2 - 7 - 1 - 12$$

- a) Determina el promedio de lápices que hay por niño (**1 pto**)  
b) ¿Cómo podrías interpretar este valor? (**3 pts**)  
c) Uno de los 15 niños se ha equivocado al decir que tiene 10 lápices, pues en realidad tiene 20. Calcula el valor del promedio con este nuevo valor. ¿A qué se debe a que haya cambiado tanto su valor? (**2 pts**)

## CARTAS DE CONSENTIMIENTO

### CARTA DE AUTORIZACIÓN DEL (LA) DIRECTOR(A) DEL ESTABLECIMIENTO DONDE SE DESARROLLARÁ LA INVESTIGACIÓN

Autorizo el desarrollo del proyecto de investigación titulado Enseñanza de las Medidas de Tendencia Central a través del Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC, dirigido por el investigado don Rubén Darío González Aránguiz, en este establecimiento.

Como director(a) estoy al tanto de la naturaleza y de los objetivos de esta investigación, en la cual se recopilará información a través de la revisión o desarrollo de los siguientes elementos: guías de trabajo y clases grabadas donde se velará por el anonimato de los y las estudiantes.

Asimismo, la participación de los/as participantes o sujetos de investigación es LIBRE Y VOLUNTARIA e independiente de esta autorización.

También entiendo que la participación de las personas que pertenecen a la institución que dirijo (estudiantes y docentes) conlleva un manejo confidencial de la información recabada, sin que se identifique ni a las personas ni a las organizaciones en los documentos o publicaciones derivadas del estudio.

La información obtenida será utilizada solo con fines de esta investigación, estará bajo la custodia del (la) investigador(a) responsable por 2 años y luego será destruida. No obstante lo anterior,

\_\_\_\_\_ (sí o no) acepto que se señale el nombre de la organización en los resultados de la investigación.

\_\_\_\_\_ (sí o no) me interesa conocer los resultados de la investigación.

Consiento actuar como ministro de fe en la firma del consentimiento o en designar un delegado al efecto.

Entiendo que ante cualquier duda o consultas respecto de la investigación se puede contactar al investigador responsable Rubén Darío González Aránguiz, al celular 982808046 y ante algún reclamo referido a la vulneración de los derechos de los participantes, se puede dirigir al Dr. Jairo Vanegas López, Presidente del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. E.mail: [comitedeetica@usach.cl](mailto:comitedeetica@usach.cl)

La presente Carta de Autorización se firma en tres ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a), otro en poder del (la) Director(a) y una última copia es remitida al Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

Para formalizar el permiso en este estudio, firmo a continuación

Atentamente,

\_\_\_\_\_  
NOMBRE DEL DIRECTOR(A)

CORREO ELECTRÓNICO - TELÉFONO

\_\_\_\_\_  
FIRMA

Ciudad \_\_\_\_\_ Día \_\_\_\_\_ del mes de \_\_\_\_\_ del año \_\_\_\_\_

## **CARTA DE COMPROMISO DEL/A INVESTIGADOR/A**

Yo, Rubén Darío González Aránguiz, Investigador/a del proyecto de investigación Enseñanza de las Medidas de Tendencia Central a través del Aprendizaje Basado en Problemas con uso de TIC, mediante la suscripción del presente documento me comprometo a:

1. Declarar mis potenciales conflictos de interés ante el comité de ética de investigación.
2. Comunicar los eventos adversos en la forma más rápida al comité.
3. Reportar por escrito al Comité cualquier desviación y/o modificación ya sea en el proyecto de investigación o en el proceso de consentimiento informado y suspender la ejecución del proyecto hasta la evaluación y pronunciamiento del Comité.
4. Elaborar informes de seguimiento y reportarlos al comité.
5. Elaborar el informe final al término del estudio y reportarlo al comité
6. Comunicar al Comité la suspensión del estudio en curso, enviando un informe con los resultados obtenidos, las razones de la suspensión y el programa de acción en relación con los sujetos participantes.
7. Garantizar que el procedimiento del consentimiento informado se lleve a cabo de tal forma que promueva la autonomía del sujeto, asegurándose que este logró entender la información respecto de la investigación, sus riesgos y probables beneficios.
8. Tomar a su cargo un número razonable de casos que no le impida asumir la responsabilidad del estudio en forma total.
9. Garantizar que los datos entregados sean íntegros y confiables, cumpliendo con el protocolo autorizado.
10. Custodiar los datos personales recopilados, resguardar la confidencialidad de los datos conocidos, mantener la más estricta reserva sobre el contenido de los datos como de los nombres de los participantes, ni ninguna otra información que permita individualizarlos, comprometiéndome a anonimizar esta información. Asimismo, me comprometo a eliminar estos datos una vez que concluya la investigación, pudiendo almacenarlos por un período máximo de 2 años. Finalmente, me comprometo a que en ningún caso las muestras y los datos recopilados serán utilizados para fines o proyectos diversos a los que fueron extraídos, sin previa autorización del Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

**RUBÉN DARÍO GONZÁLEZ ARÁNGUIZ**

**Investigador(a) Responsable/Tutor(a) de Tesis**

**FIRMA**

## CONSENTIMIENTO INFORMADO

### REGISTRO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

#### PARTICIPANTES DE PROYECTO PARA MEJORAR LOS APRENDIZAJES DE MATEMÁTICA

SE LE INVITA A PARTICIPAR EN EL SIGUIENTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

**1.- Título: ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS CON USO DE TIC**

**2.- Objetivo de la investigación:**

- **Mejorar los aprendizajes de los estudiantes de 7° básico en los contenidos de estadística, a partir del uso de programas computacionales para el análisis de datos.**

**3.-** Su participación consistirá en desarrollar las actividades planteadas en clases, lo que ocupará 5 horas pedagógicas.

**4.- Riesgos y beneficios:** La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para el(la) participante.

Esta investigación no implica beneficios para los participantes, pero su participación le permitirá mejorar los aprendizajes en los contenidos de estadística.

**5.- Tipo de información que busca la investigación:** A modo de ejemplo, el tipo de información que se busca apunta a responder preguntas tales como:

- ¿Cómo el uso de la tecnología, en particular, el uso de programas computacionales, pueden mejorar los aprendizajes de los estudiantes de 7° básico?

**6.- Participación Voluntaria:** La participación en la investigación, es absolutamente voluntaria. La información recabada solo se utilizará en este estudio.

**7.- Derecho a retirarse de la investigación:** Igualmente, en el transcurso de la investigación y duración del proyecto, el (la) participante tendrá todo el derecho a retirarse en cualquier momento, comunicándolo al (la) investigador(a) por cualquier medio disponible, y sin que esto implique sanciones, responsabilidad o consecuencias negativas que lo(a) afecten.

**8.- Derecho de conocer los resultados generales de la investigación:** Los resultados de este estudio, serán presentados en el marco de la realización de una tesis de magíster.

Si el (la) participante desea recibir los resultados de la investigación, podrá señalarlo al final de este formulario e incluir una dirección electrónica de contacto para ello.

**9.- Derecho al resguardo de la identidad del (la) participante, de la información compartida y de sus datos personales.**

**Anonimato del (la) participante:** El (la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

**Confidencialidad del (la) participante:** Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

**Derecho a la imagen del (la) participante:** En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de su participación en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda.

**10.- Custodio de los Datos:** El (la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 2 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

**11.- Respeto de publicaciones:** Se solicitará autorización al (la) participante respecto de que la información aportada aparezca en artículos o libros que se podrían publicar como resultado de esta investigación. Igualmente se solicitará su autorización para que su nombre figure en la investigación. En el caso que el(la) participante acepte aparecer con su identidad en la publicación, el investigador responsable, de manera previa enviará para su revisión la información a publicar. El(la) participante podrá realizar las correcciones y/u observaciones que estime pertinentes en lo que respecta a los datos por él(ella) aportados.

**12.- Compensaciones:** El estudio no requiere ni contempla compensación o retribución por transporte, colación u otros gastos extraordinarios por la participación del sujeto en estudio.

**13.- Investigador(a) responsable:** en caso de consultas, se puede dirigir a Rubén Darío González Aránguiz

Unidad académica: Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia

Fono: (56-9) 82808046

E-mail: [ruben.gonzalez.a@usach.cl](mailto:ruben.gonzalez.a@usach.cl)

**14.- Identificación del Comité de Ética Institucional:** En caso de reclamos, se puede dirigir al Dr. Jairo Vanegas López, Presidente del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. Email: [comitedeetica@usach.cl](mailto:comitedeetica@usach.cl)

**15.- Ejemplares:** Este Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares: uno para el investigador responsable y uno para el (la) participante.

**PARTICIPANTE:**

(Marcar con una X donde corresponda)

HE LEIDO ESTE DOCUMENTO Y HE SIDO INFORMADO DEL OBJETIVO Y CARACTERISTICAS DE ESTE ESTUDIO Y ACEPTO PARTICIPAR VOLUNTARIAMENTE EN ÉL, EN CALIDAD DE:

<p>ACEPTO LA PARTICIPACIÓN DE MI HIJO(A) EN EL DESARROLLO DE LAS CLASES _____</p> <p>DESEO QUE EL INVESTIGADOR ME ENVÍE LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI _____ NO _____</p> <p>PARA ELLO, REGISTRO MI CORREO ELECTRÓNICO, EL CUAL ES: _____</p>	<p>NO ACEPTO LA PARTICIPACIÓN DE MI HIJO (A) EN EL DESARROLLO DE LAS CLASES _____</p>
<p><b>INVESTIGADOR RESPONSABLE</b></p> <p>NOMBRE: RUBÉN DARÍO GONZÁLEZ ARÁNGUIZ</p> <p>FIRMA</p> <p>FECHA</p>	<p><b>PARTICIPANTE</b></p> <p>NOMBRE</p> <p>FIRMA</p>

## ASENTIMIENTO

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

**Título de la Investigación:** ENSEÑANZA DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS CON USO DE TIC

**Docente Guía de la investigación:** Eugenio Saavedra Gallardo, Carlos Vanegas Ortega

**Investigadores(as):** RUBÉN DARÍO GONZÁLEZ ARÁNGUIZ

**Institución Patrocinante:** Universidad de Santiago de Chile

Soy investigador del Magíster en Educación Matemática, perteneciente al Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación. Estoy realizando un estudio para conocer acerca de la comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes de 7° básico usando herramientas tecnológicas y para ello quiero pedir tu colaboración.

### **Declaración del (la) menor participante:**

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en responder a las actividades planteadas en clases para conocer el nivel de comprensión de los contenidos estudiados. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.

En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo del investigador, cuyo nombre es Rubén Darío González Aránguiz, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.

Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

(Sí/No) He leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

**Autorización:**

Si aceptas participar, debes poner un ticket ( ✓ ) en el cuadrado de abajo que dice “Sí, quiero participar” y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrado, ni escribir tu nombre.

Sí, quiero participar

Nombre: \_\_\_\_\_

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

<p><b>Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto</b></p> <p>Sí _____</p>	<p><b>No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto</b></p> <p>No _____</p>
---	--

**Contactos**

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Rubén González Aránguiz al correo electrónico [ruben.gonzalez.a@usach.cl](mailto:ruben.gonzalez.a@usach.cl)

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

<b>Investigador Responsable</b>  Nombre:	<b>Datos Comité de Ética Institucional</b>  Dr. Jairo Vanegas López  Correo electrónico: <a href="mailto:comitedeetica@usach.cl">comitedeetica@usach.cl</a>
--	---

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

**Rubén Darío González Aránguiz**

\_\_\_\_\_  
**INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE**

\_\_\_\_\_  
**FIRMA**

\_\_\_\_\_  
**NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE**

\_\_\_\_\_  
**FIRMA**

Ciudad, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

## PAUTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

### Pauta para la validación de Instrumento.

Nombre del Experto: Carlos Felipe Henríquez Roldán, PhD

Fecha: 18 de noviembre de 2021

Para el análisis se utilizará la siguiente escala:

- 1: Totalmente en Desacuerdo
- 2: En Desacuerdo
- 3: De Acuerdo
- 4: Totalmente de Acuerdo
- N.O.: No Observado

Criterio.	Juicio (*)				
	1	2	3	4	N. O
<b>Coherencia respecto al marco teórico:</b> Existe relación de las actividades con el marco teórico.	1	3	3	3	
<b>Coherencia respecto a los objetivos:</b> Las actividades ayudan a generar información en beneficio del cumplimiento de los objetivos específicos, en donde se relaciona su uso.	1	3	3	2	
<b>Pertinencia en el lenguaje:</b> El lenguaje presentado por cada actividad es claro, es decir, inteligible y apropiado para quien la aplica.	2	4	3	2	
<b>Relevancia respecto a la mejora del contenido:</b> Lo presentado tiene relación con la comprensión de las propiedades de las medidas de tendencia central.	1	3	3	2	
<b>Relevancia respecto a la contribución del objeto matemático (medidas de tendencia central):</b> Lo presentado contribuye a la problemática de la comprensión de las medidas de tendencia central en alumnos de 7° básico.	2	4	3	2	

(\*) Evalué cada uno de los cuatro documentos enviados para mi revisión.

### Observaciones y Recomendaciones:

Me gusta que los ejemplos no sean de juegos de azar. Hay redacciones que mejorar (ver los documentos en PDF que incluyo). La moda no siempre existe (igualdad de frecuencias). Los desvíos respecto a la media por lo general los utilizo para motivar la varianza. Aquí se presentan de una manera correcta para enfatizar lo que son los promedios pero, creo, falta rematar esta idea cuando se discute. Los promedios se discuten y presentan como fórmulas matemáticas, falta un aspecto intuitivo o remarcar lo poco representativa que es con la presencia de valores extremos. Medidas con y sin valores extremos es fácil de mostrar con Pathom . Muchos ejemplos incluyen variables continuas y son tratadas como discretas. Por ejemplo, tiempo de duración: 1, 2 o 3 minutos; cuando en realidad 1 representa a los valores entre 1 y 2, el 2 representa entre el 2 y 3, y así sucesivamente. Así debiese trabajarse con marcas de clases (1,5; 2,5; etc) y no con los valores exactos. Sugiero cambiar las variables continuas por



valores discretas para no incorporar errores conceptuales a temprana edad. Se mencionan referencias pero no se incluyen en los documentos. Crear referencias al final de los textos. Aun cuando mis comentarios parecen lapidarios, confío en el trabajo que se está realizando para mejorar la enseñanza de la estadística en la enseñanza general básica. No decaer y dar un giro a lo presentado acá para disponer de un excelente material de enseñanza.

Firma del Experto

Carlos F. Henríquez R., PhD