UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

RESIGNIFICACIÓN DE LOS USOS DE LA DERIVADA EN LA CARRERA DE INGENIERÍA COMERCIAL

Nicolé Verónica Geyssel Salinas

Profesora Guía: Daniela Soto Soto

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencias en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al Título de Magister en Educación Matemática.

Santiago – Chile

2021

Resumen

La matemática estudiada en los cursos de educación superior, en particular en la Ingeniería Comercial, es presentada siguiendo una estructura clásica: definiciones, teoremas y finalmente “aplicaciones” (García, 2013). Estas últimas por lo general corresponden a ejercicios tipo que poco tienen que ver con lo que un Ingeniero Comercial realiza en su práctica profesional (Zúñiga, 2007). Se deja de lado la funcionalidad de la matemática, es decir, los usos propios de la comunidad de conocimiento a la que se está enseñando.

El presente proyecto tiene como objetivo resignifcar la derivada en estudiantes de Ingeniería Comercial, basados en la Teoría Socioepistemógica (Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel, 2014) por medio del pensamiento y lenguaje variacional (Caballero, 2012).

Para lograr este objetivo, se realizará una problematización de la derivada (Reyes-Gasperini, 2012) a través de los estudios epistemológicos, sociales, cognitivos y didácticos.

Se caracterizará a los Ingenieros Comerciales como una Comunidad de Conocimiento Matemático. Para ello se realizará una entrevista semiestructurada con la finalidad de conocer los usos que le da un ingeniero Comercial a la derivada. Luego, se considerarán dichos usos de este objeto matemático para su resignificación.

La ingeniería didáctica será la métodología de investigación empleada. Junto con sus fases: Análisis preliminar, Concepción y Análisis a priori, Experimentación y finalmente el Análisis a posteriori y validación, se realizará el análisis de las respuestas de los estudiantes.

Finalmente, se presentará un análisis de las entregas de los estudiantes. Dicho análisis permitirá concluir que una gran cantidad de estudiantes resignifca la derivada, mientras que otros se mantienen adheridos a la definición formal de la misma. Por este motivo se propone un rediseño de la Situación de Aprendizaje.

Palabras clave: Socioepistemología, derivada, resignificación, Ingeniería Comercial.

Abstract

The mathematics studied in higher education courses, particularly in Commercial Engineering, is presented following a classic structure: definitions, theorems and finally “applications” (García, 2013). The latter generally correspond to type exercises that have little to do with what a Commercial Engineer performs in his or her professional practice (Zúñiga, 2007). The functionality of mathematics is left aside, that is, the uses of the knowledge community that is being taught.

The present project aims to re-signify the derivative in Commercial Engineering students, based on Socioepistemological Theory (Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel, 2014) through variational thinking and language (Caballero, 2012).

To achieve this objective, a problematization of the derivative will be carried out (Reyes-Gasperini, 2012) through epistemological, social, cognitive and didactic studies.

Commercial Engineers will be characterized as a Community of Mathematical Knowledge. For this, a semi-structured interview will be carried out in order to know the uses that a commercial engineer gives to the derivative. Then, these uses of this mathematical object will be considered for its resignification.

The research methodology used will be the didactic engineering. Along with its phases: Preliminary analysis, Conception and a priori, Experimentation and finally the a posteriori Analysis and validation, the analysis of the students' responses will be carried out.

Finally, an analysis of the students' submissions will be presented. This analysis allows us to conclude that a large number of students resignify the derivative, while others adhere to the formal definition of it. For this reason, a redesign of the Learning Situation will be proposed.

Key words: Socioepistemology, derived, resignification, Commercial Engineering.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi a familia. Ellos han sido un pilar fundamental en todo momento. También quiero dar las gracias a mis amigos, a mis compañeros de trabajo, a mis compañeros de carrera y a todos los que han sido parte de este trabajo, ya sea escuchándome o apoyándome. Finalmente le agradezco a mi profesora Daniela Soto toda la paciencia, los consejos, el apoyo y la perseverancia que ha tenido conmigo.

Muchas gracias a todos

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de Ilustraciones

Introducción

En la educación superior, el estudio de la matemática tiende a ser un objetivo en sí mismo. Se ha llegado a considerar la matemática como una ciencia básica indispensable para desempeñar cualquier labor (Mendoza & Cordero, 2015). Esto convierte la enseñanza de esta ciencia en procesos formales, descontextualizados y algoritmizados. El aprendizaje se convierte en una serie de reglas, cuya única finalidad es la obtención de la respuesta correcta (García, 2013). De este modo, se deja de lado la idea de que la matemática está al servicio de otras disciplinas, en donde adquiere sentido y significación.

En la carrera de Ingeniería Comercial existen variados usos de elementos propios del cálculo. La derivada, trabajada en funciones marginales, es uno de estos elementos. Este objeto matemático es estudiado desde los primeros cursos de la carrera, siempre con un enfoque matemático y con aplicaciones que son reducidas a ejercicios tipo de un libro de Cálculo aplicado (García, Azcárate, & Moreno, 2006).

En clases, los ejercicios aplicados utilizan la derivada con funciones expresadas de forma algebraica, empero el actuar de los Ingenieros Comerciales está más ligado al análisis de datos en tablas por medio de softwares como Excel que al análisis de funciones expresadas de forma algebraica (Diez & Fuentealba, 2011).

Desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica, marco teórico de esta investigación, se investigan las epistemologías que analicen las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento matemático (Morales & Cordero, 2014). Esto está fuertemente relacionado con la idea de que el cálculo, y la matemática en sí, primero se usa y luego se define (Cantoral, 1993). Además, esta teoría considera que todo el conocimiento matemático, incluso el conocimiento avanzado, tiene un origen (Cantoral, 2003). De este modo, con la Teoría Socioepistemológica es que se considera la derivada como "la idea de la diferencia y variación" (Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005, p. 465)

Considerando todos los elementos mencionados anteriormente, vale decir: la funcionalidad, el análisis histórico, la significatividad, la derivada, la variación y la teoría sociepistemológica, el propósito del proyecto es resignificar la derivada en alumnos de Ingeniería Comercial, por medio de uno de sus usos, a decir, la predicción con el uso de funciones marginales. De este modo, se propiciará un aprendizaje significativo y con sentido en el ámbito de su propia carrera (Zuñiga, 2007). Así mismo, el profesor podrá desarrollar una propuesta de enseñanza con las aplicaciones propias de la carrera, y darle sentido a la derivada, contenido que se estudia desde los primeros cursos de Ingeniería.

Para los propósitos mencionados se realizan diversos estudios presentados en 6 capítulos que serán detallados a continuación.

En el primer capítulo, correspondiente a la Problemática, se presenta el problema y la motivación de este estudio junto con las preguntas que surgen de esta investigación. Luego, se exponen los objetivos de investigación correspondientes a los pasos a seguir para llevar a cabo la investigación.

En el segundo capítulo, de los Antecedentes, se estudian diversas investigaciones referentes a la derivada, con enfoque en las dificultades de este objeto y en las distintas propuestas de enseñanza para las carreras de ingeniería. Finalmente se realiza un análisis de la derivada desde las miradas cognitiva, epistemológica, didáctica y social.

En el tercer capítulo, Marco Teórico, se expone la base teórica de la investigación. Aquí se estudia la Socioepistemología junto con sus cuatro dimensiones. Luego se presenta el discurso matemático escolar (dME) junto con sus fenómeros y se aprecia cómo este discurso ha afectado el estudio de la derivada. Se sigue con el estudio del pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar) junto con sus elementos, entre los cuales encontramos las tareas variacionales y las estrategias variacionales, ambos elementos considerados al momento de diseñar la Situación de Aprendizaje. Posteriormente, se sigue con una caracterización de la funcionalidad y el aprendizaje significativo, para finalizar con comunidad de conocimiento y la relación que tienen los Ingenieros Comerciales con una comunidad de conocimiento.

En el cuarto capítulo, correspondiente a la Metodología, se presenta la metodología de investigación, es decir, el enfoque y el alcance de la misma. Se exponen algunas condiciones para llevar a cabo este estudio considerando el contexto. Se presenta el método de la Ingeniería Didáctica considerando los pasos a seguir en este tipo investigaciones y finalmente se exponen los elementos a considerar en la realización de la Situación de aprendizaje.

En el quinto capítulo, Diseño y Análisis, se analiza y expone la Situación de Aprendizaje a aplicar. En este apartado se detallan los momentos de la secuencia, las preguntas a realizar y los objetivos de dichas preguntas. Luego se realiza el análisis a priori de la propuesta. Aquí se presentan las respuestas esperadas por el autor, las estrategias esperadas en el desarrollo de la Situación y las posibles dificultades.

Posteriormente, se presenta la experimentación, sección que expone todas las entregas de los estudiantes junto con la descripción general de los estudiantes con los que se trabajo y el modo de trabajo de los mismos con el monitor de la Situación. Finalmente, se realiza el análisis a posteriori junto con la confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori.

En el capítulo seis, Conclusiones, separado en cuatro secciones, se presentan las diversas reflexiones obtenidas luego de realizar la investigación. La primera sección corresponde a las reflexiones relacionadas con las preguntas de investigación, luego las reflexiones sobre los objetivos de la investigación, y el marco teórico, finalizando con los resultados de la Situación de Aprendizaje y proyecciones.

Capítulo 1: Problemática

La teoría socioepistemológica reconoce que hay una dualidad en la matemática. Esto es, algunas veces la matemática es un objeto de estudio y otras veces es una herramienta que está al servicio de otras disciplinas. Es en esta última situación en la que domina la justificación funcional de las matemáticas (Mendoza-Higuera, Cordero, Solís & Gómez, 2018).

Históricamente se le ha otorgado gran importancia a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, intentando favorecer una visión científica del mundo (Cantoral & Farfán, 2003; García, 2013). No obstante, al mismo tiempo, constituye uno de los problemas más significativos dentro de los modelos de educación. Esto porque tanto a nivel de educación media como universitaria se presenta un alto nivel de reprobación y repetición de los cursos matemáticos (García, 2013). Así también, se evidencia la enorme brecha que existe entre la matemática escolar y la matemática que usa la gente, que nos indica que la matemática escolar no prepara a las personas para los problemas que tiene en su cotidiano vivir (Yerbes & Cordero, 2016).

De acuerdo con Yerbes y Cordero (2016), la realidad en educación es que la matemática se enseña desde la matemática misma. Se deja de lado la construcción social detrás de este conocimiento, soslayando las otras prácticas y el carácter funcional, dejando de lado lo humano y con eso, los marcos de referencia que resignifiquen el conocimiento (Cordero, 2008). Así es como al momento de evaluar la educación no se cuestiona la función social, sino solo la matemática misma. Se niega que "la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación" (Cantoral & Farfán, 2003).

La derivada, como un objeto particular estudiado en los primeros cursos de matemática, es afectada por esta enseñanza. En particular García, Azcárate, & Moreno, 2006 indican que:

> Casi todos los profesores siguen una metodología tradicional para enseñar el concepto de derivada, basada en aspectos fisicomatemáticos o geométricos, descartando alternativas innovadoras relacionadas con el campo profesional del estudiante. Hay algunos profesores que mantienen una línea clásica en la introducción y desarrollo del tema, pues siguen el esquema definición-ejemplo-aplicación que aparece en los programas oficiales; en este sentido, no contemplan propuestas metodológicas alternativas. (p.110)

Más aún, diversas investigaciones como Castañeda (2019), Dolores (2000), Rodríguez & López (2013), entre otras, dan cuenta de este problema. En estas investigaciones se expone la importancia de considerar nuevas formas de enseñar la derivada para mejorar la comprensión y enseñanza de este objeto matemático.

En particular, para la carrera de Ingeniería Comercial, los diversos textos de estudio como Purcell, Varberg, & Rigdon (2007) o Stewart (2008) presentan aplicaciones de la derivada ligada con esta área de estudio. Mas esta conexión es siempre desde una mirada matemática. Cada vez que se trabaja con la derivada, se consideran funciones expresadas de forma algebraica. Estas funciones se deben derivar utilizando las reglas usuales de derivación para conducir a una respuesta y concluir. Pero, ¿qué pasa cuando el Ingeniero Comercial debe trabajar con tablas de datos? Cuando debe realizar el análisis de estos datos en Excel (Diez & Fuentealba, 2011 ; Gayón, 2019) ¿dónde quedan las funciones $y = f(x)$?

Mendoza et al. (2018), indica que muchas veces son los matemáticos o el departamento de matemáticas quien decide lo que debe aprender el ingeniero, sin conocer los usos de la matemática en las comunidades de ingenieros.

Moreno (2005), citada en Zúñiga (2007), indica que:

> La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien a realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. (p. 147)

A esto se añade que los profesores que imparten los cursos matemáticos por lo general no son especialistas de ingeniería. Al presentar la utilidad de los contenidos estudiados en los cursos de cálculo, los profesores se limitan a enseñar los “problemas aplicados” que están presentes en los textos guías. Problemas que rara vez corresponden a situaciones reales (Zúñiga, 2007 ; García et al., 2006). En el caso de las aplicaciones de la derivada, éstas se limitan a trabajar o analizar utilizando funciones expresadas en forma algebraica. El proceso de análisis es similar al que se realizaría en cualquier contexto, solo que en el caso de las aplicaciones económicas se utilizan funciones afines. Mientras que muchas de las acciones que los ingenieros comerciales realizan en sus trabajos son por medio de análisis de datos en tablas de valores.

Estos escenarios en conjunto provocan que los estudiantes, en particular los de Ingeniería, entiendan las matemáticas de una forma restringida, llegando a ser para ellos sólo un cúmulo de fórmulas, reglas o “recetas” enfocadas en responder bien a preguntas que por lo general están alejadas de la realidad. Barrera & Castro Villagrán (2019) concluyen que diversos estudiantes de

Ingeniería considera que las habilidades o destrezas utilizadas en clases de matemáticas no tienen una relación muy clara con las habilidades para resolver problemas en la vida diaria.

De este modo, los estudiantes, a pesar de ser capaces de realizar ciertos algoritmos como derivar una función, no logran reconocer la necesidad de hacerlo en ciertos problemas (Zúñiga, 2007) o cómo aplicarlo en situaciones distintas a las trabajadas en las aplicaciones, como es el caso de tablas de valores .

Bajo la Teoría Socioepistemológica es importante considerar las prácticas sociales que generan el conocimiento y no solo el objeto construido (Cantoral, Farfán, Lezama, & Martínez-Sierra, 2006). En el caso de la derivada, objeto matemático enseñado por su definición de límites de cocientes incrementales o razón de cambio, históricamente ha sido utilizada, descubierta y posteriormente definida (Grabiner, 1983). De acuerdo con esto, es relevante considerar las prácticas sociales que dieron origen a la derivada. Por este motivo es que se consideran las ideas precedentes de la derivada, la idea de diferencia y variación (Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005). Para esta investigación se considerará la derivada no de acuerdo a su definición formal, sino más bien desde sus prácticas sociales y su idea precedente: la variación.

En resumen, la problemática de este estudio es la enseñanza de la derivada en ingeniería comercial, y para ello se va a generar un diseño que considere los usos de la derivada con el fin de resignificar esta noción en los estudiantes de Ingeniería Comercial

En este punto surgen las siguientes preguntas de investigación

- ¿Cuáles son los usos de la derivada en Ingeniería Comercial?
- ¿Qué características debe tener una situación de aprendizaje que se fundamente en los usos de la derivada en Ingeniería Comercial?

1.1. Objetivos de investigación

En la presente sección se exponen los objetivos de la investigación. Primero el objetivo general en el que se relacionan los elementos constituyentes de este estudio. Para lograr este objetivo general se proponen los objetivos específicos.

1.1.1. Objetivo General

Diseñar una Situación de Aprendizaje, desde la Teoría Socioepistemológica y la ingeniería didáctica, para la resignificación de la derivada por medio de sus usos en estudiantes de Ingeniería Comercial.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Identificar los usos de la derivada en ingenieros comerciales
- Diseñar una Situación de Aprendizaje desde la Teoría Socioepistemología
- Aplicar la Situación de Aprendizaje en estudiantes de Ingeniería Comercial
- Evaluar la Situación de Aprendizaje mediante ingeniería didáctica

Capítulo 2: Antecedentes

Parece unánime […] que todos debemos aprender Matemática en los niveles superiores para crear herramientas tecnológicas y; en los niveles inferiores para que el hombre común pueda entender superficialmente el mundo que lo rodea y pueda actuar sobre este. Pero nos preguntamos ¿Qué Matemática se debe enseñar para estas dos situaciones? y ¿Cómo se debe enseñar Matemática para estos dos escenarios?

Yaneth Ríos (2007)

El presente capítulo, separado en dos secciones, presenta la derivada con distintas miradas. Primero se exponen diversas investigaciones relativas a la derivada y su enseñanza. Luego se realiza la problematización de la derivada (Reyes-Gasperini, 2012) a través de los estudios epistemológicos, sociales, cognitivos y didácticos.

2.1. La derivada en diferentes investigaciones

En este apartado se exponen diferentes investigaciones que se han realizado sobre la derivada. Estas investigaciones presentan nuevas propuestas de enseñanza, dificultades y el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada.

Para comenzar Sánchez-Matamoros, García & Llinaes (2008) realizan un recorrido por distintas investigaciones relacionadas con la derivada. Los autores expresan que tanto en las investigaciones presentadas, como en su experiencia laboral han podido comprobar la dificultad de enseñar y aprender este concepto. Aunque los estudiantes pueden aprender de forma mecánica algunos cálculos de derivada hay dificultad para que los mismos logren una comprensión del concepto. Esto radica en que dichos alumnos no han construido un significado apropiado de la derivada.

Los autores presentan distintas perspectivas teóricas que han adoptado los investigadores centradas en elementos de cognición. Además, vislumbran el nuevo enfoque que tiene la Teoría

Socioepistemológica, para la cual es importante el acercamiento a este concepto por medio de las prácticas sociales.

Se sigue con diversos estudios, Orton (1983), Hart (1981), Tall (1989), Sfard (1992) entre otros, que se han realizado en torno a los errores y dificultades que tienen los estudiantes respecto a la derivada visualizada como razón de cambio. Esto continúa con los estudios realizados de la relación entre razón de cambio y cociente incremental, donde se recalca la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, además de la importancia de la influencia de los contextos en la construcción del significado y las transformaciones entre diferentes representaciones.

Profundizando en las transformaciones en diferentes representaciones, se sigue con la conexión entre lo gráfico y lo analítico. En este punto, las conclusiones de las investigaciones presentadas exponen que los estudiantes consideran los contextos gráficos y algebraicos de formas separadas, sin relación. Así también se expone que los estudiantes que tienen una enseñanza tradicional, tienen problemas al hacer un traspaso entre información entregada de forma analítica a la expresión gráfica de la misma información.

Otro aspecto importante es concerniente a lo local y global de la derivada. El estudio mencionado concluye que la compresión de la derivada está en la relación entre lo local (la derivada en un punto) y lo global (la función derivada).

Continuando con el estudio, se presenta el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada con la perspectiva piagetana de los niveles intra, inter y trans. Aquí se concluye que muchos estudiantes tienen una comprensión muy limitada de la segunda derivada. También se vislumbra la idea de que los jóvenes necesitan entender la primera derivada en sí misma como una función para comprender la importancia de la segunda derivada. Del mismo modo se presentan estudios relacionados con las aplicaciones de la derivada, en particular la regla de la cadena. Este último se fundamenta en el marco teórico de APOE, ofreciendo una descomposición genética que puede ser de utilidad para profesores.

Concluyendo las investigaciones, los autores mencionan la importancia del contexto, ya que los estudiantes no conectan de forma automática el proceso vinculado con la idea de derivada en un contexto u otro. Por otro lado, se tiene que los modos de representación (gráfico y analítico) influyen en la construcción de significados que hacen los alumnos. Más aún, la dificultad para relacionar los contextos gráficos, numéricos y analíticos se presenta cuando, en problemas de contexto gráfico, los estudiantes requieren la expresión analítica de la función para resolver el problema.

> Aún existen aspectos en los que se deben centrar las investigaciones, tomando en cuenta la complejidad que representa la derivada, lo cual ha hecho que el estudio sobre su comprensión haya sido abordado desde distintas perspectivas. (Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 292)

Desde otra perspectiva, García, Moreno, Badillo & Azcárate (2011) presentan una propuesta de enseñanza de la derivada ligada con la economía. Expresan que al existir muchos libros de matemáticas aplicados a la economía, su foco está puesto en aportar algunas ideas en el proceso de enseñanza-aprendizaje para la formación de un profesional con un perfil más centrado en su carrera. Por lo mismo, realizan un estudio histórico de la derivada en el campo matemático y económico.

Este estudio histórico de la derivada con miras en economía y matemática tiene por finalidad llenar el vacío histórico de los programas oficiales para estas carreras y contextualizar la enseñanza de la derivada.

Los autores señalan que en carreras afines a la economía se enseña el concepto de derivada desde el punto de vista de la interpretación geométrica y de razón de cambio. Esto porque los problemas de física y matemáticas son los que dan origen a este concepto, como la velocidad y recta tangente. También se considera importante el aspecto histórico y epistemológico de un concepto matemático, pues contribuye al desarrollo profesional del profesor y puede mejorar su práctica docente.

El texto sigue con la evolución histórica de la derivada desde Newton y Leibniz hasta los aportes de Cauchy y Weierstrass, sin dejar de mencionar que fueron muchos los matemáticos que aportaron de una u otra manera al desarrollo del cálculo. Continúa con las diversas notaciones e interpretaciones de la derivada y se da cuenta de otras interpretaciones en campos diversos como la biología, la física y la economía. En esta última se nombran la interpretaciones de la derivada en las ciencias económicas como son costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal y tasa de impuesto marginal, entre otras.

Luego se presenta el análisis marginal, cuándo y de dónde surge. La mirada histórica de la derivada en economía emerge. Aquí se explica que:

> las ciencias económicas tomaron prestadas metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas para desarrollar una teoría formal basada, en buena parte, en el cálculo […] estas herramientas no se podían usar de manera arbitraria puesto que a los economistas les interesaba estudiar la unidad adicional de una situación económica como el coste, el

> beneficio, el ingreso, entre otros, con lo cual el cálculo infinitesimal no era la mejor herramienta puesto que fallaba la continuidad de la función a estudiar. Ello les condujo a considerar la función objeto de estudio como una función continua. (García et al., 2011, p. 151-152)

Luego se presentan sugerencias en la enseñanza de funciones económicas. De estas últimas se vislumbran dos en detalle: La demanda y la oferta.

Siguiendo en el texto se presenta la introducción del concepto de derivada por medio de un ejemplo no matemático junto con observaciones para el profesor. Se finaliza con una propuesta de función económica más general y su estudio, junto con consideraciones a tomar por el profesor.

En las consideraciones y propuestas finales se recalca la importancia de considerar la evolución del cálculo diferencial con énfasis en el análisis marginal. Así también, se hace hincapié en enseñar con una mirada más amplia este objeto de estudio, por ejemplo, por medio de ejemplos no matemáticos. En este último punto los autores recalcan que es muy importante tener presente que los aumentos en economía no son continuos, sino discretos. Por esto mismo,

> se ha de tener en cuenta que hay funciones no derivables por la misma definición del dominio que requiere este contexto. No obstante, para poder manipularlas se ha de ampliar el dominio al conjunto R, de los números reales, para poder hacer que la función sea derivable. (García et al., 2011, p. 168)

Por su parte, Aguilar & Riestra (2009) presentan una propuesta de enseñanza de la derivada algebraica. Esta propuesta, consistente con el desarrollo histórico de este objeto matemático, aborda el problema de máximos y mínimos. Luego, en vez de desarrollar la definición formal de derivada por medio de épsilon y delta, se desarrollan diferencias de la función en términos de incrementos finitos de la variable independiente.

Los autores señalan que con esta propuesta aparece la derivada de forma natural con los desarrollos como el coeficiente diferencial. Además, “los problemas de máximos y mínimos adecuadamente seleccionados y ordenados permiten desarrollar gradualmente la teoría matemática involucrada en el concepto de derivada sin recurrir al concepto de límite” (Aguilar & Riestra, 2009, p.1)

También Delgado & Medina (2017) exponen una metodología de enseñanza- aprendizaje de la derivada. Explican que el cálculo juega un papel fundamental en la formación de ingenieros. Mas es probable que en las clases de cátedra tradiciones impartidas en ingeniería no todos los estudiantes interioricen los conceptos, esto último dado el alto índice de alumnos retrasados en sus cursos o desertores en los últimos años.

Esta investigación realizada en cursos de cálculo diferencial para ingenieros tiene como objetivo desarrollar una estrategia de enseñanza-aprendizaje de la derivada utilizando Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como herramienta de apoyo para estudiantes de Ingeniería, generando un aprendizaje significativo a través de un uso apropiado de ciertas tecnologías.

El estudio concluye que el uso de blogs educativos como estrategia de enseñanza-aprendizaje conlleva un aprendizaje significativo. En general, utilizar estrategias de enseñanza-aprendizaje basadas en TIC, como herramienta de apoyo, para el aprendizaje significativo del concepto de la derivada, fortalece el rendimiento estudiantil, pues facilita el proceso de enseñanza aprendizaje.

Siguiendo con la importancia de las TIC, Baéz, Blanco & Pérez (2015) presentan los avances de una investigación que parte con la problemática que existe respecto del trabajo de estudiantes con los conceptos del cálculo Diferencial.

Los autores afirman que en las clases los objetos matemáticos no son mostrados con claridad y que existe una insuficiente cantidad de tareas sobre la transferencia de registros semióticos. De este modo se limita el trabajo conceptual de los estudiantes.

Para robustecer el conocimiento de la derivada que poseen los estudiantes, y que logren independizar el objeto de sus representaciones, los investigadores presentan la importancia del uso de TIC.

Por ejemplo, al momento de trabajar con los criterios de la primera derivada, además de trabajar de forma algebraica, se pueden apreciar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función por medio de un software de geometría dinámica utilizando el registro gráfico.

Por su parte, el trabajo con problemas de variación instantánea es fundamental en las carreras de ingeniería. En estos problemas de modelación de problemas técnicos, se encuentran presentes las características fundamentales de la derivada.

Al concluir, los autores hacen hincapié en que el trabajo netamente algebraico limita el trabajo conceptual de los estudiantes. Así también, concluyen que el desarrollo de las TIC facilita la transferencia de registros semióticos. De este modo, el estudiante puede apreciar lo conceptual de la derivada y sus aplicaciones.

Vrancken, Engler & Müller (2012) presentan los datos de una investigación que pretende estudiar las nociones que construyen los alumnos cuando interactúan con actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio.

Cabe destacar que las autoras consideran el cálculo como la matemática de la variación y el cambio. Por lo mismo, "estudiar qué es lo que varía -y cómo- en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados" (Buendía y Ordóñez, 2009 citado en Vrancken et al., 2012, p.236)

De este modo, se diseñó y aplicó una secuencia de actividades que introdujera la derivada. La secuencia de actividades tenía en cuenta las tres nociones físicas fundamentales: la variación, la razón de cambio media y la razón de cambio instantánea.

Entre los resultados se destacan: "Los alumnos están más acostumbrados a utilizar procedimientos analíticos y algorítmicos, dejando de lado los argumentos visuales, que además, son de mayor dificultad cognitiva." (Vrancken et al., 2012, p.243).

> [También se pudo] observar claramente cómo los alumnos lograron asociar la derivada con la variación, dejando de lado un tratamiento abstracto y estático, avanzando mucho más allá de la asociación de la derivada con un límite. (Vrancken et al., 2012, p. 243)

Por su parte, Luna, Ruiz, Ochoa, Loera, Barrón & Salazar (2016) presentan una propuesta de problema tipo que puede ser reproducido en un experimento de laboratorio. El problema muestra tener un potencial didáctico importante, pues fomenta el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas. Además, expresa la idea de que los problemas presentados en clases no son productos prefabricados.

El problema basado en la experimentación consiste en presentar un fenómeno físico de variación, como es el vaciado de arena. La importancia de este experimento, se basa en que éste se da con rapidez constante. En esta secuencia se plantea al estudiante interrogantes relacionadas con la identificación de variables, forma en que éstas cambian, con qué rapidez lo hacen, estimaciones y predicción de valores futuros, etc.

Luego, se experimentó con hielo seco. La importancia de este experimento reside en que su comportamiento no es de tipo polinómico. Finalmente se realizan algunas actividades extra clase, para que los estudiantes, con los datos obtenidos en el laboratorio, refuercen las actividades realizadas en clases. Así, se consolidan las ideas que los estudiantes han construido y comienzan a pensar en situaciones que se estudiarán más adelante en sus diferentes carreras.

Los autores concluyen que

> Por la experiencia vivida en esta investigación y los resultados obtenidos en la misma se hace la sugerencia de la introducción en el discurso de la matemática escolar el estudio de la variación como una perspectiva de la derivada y su aplicación en la solución de problemas como un adelanto a lo que se presentará en sus respectivas carreras (Luna et al., 2016, p. 12)

Todas las investigaciones y artículos vistos exponen la problemática que existe en torno a la derivada. Algunas presentan los diversos obstáculos y errores que puede presentar un estudiante al momento de construir el concepto de derivada. Muchas otras investigaciones exponen secuencias de aprendizaje. De las expuestas en este apartado, se rescatan tres ideas generales.

En primer lugar, el estudio histórico expuso un dato poco trabajado en la enseñanza de este objeto: la necesidad, para el uso del cálculo infinitesimal, de la continuidad en las funciones económicas -cuyo dominio es discreto- condujo a considerar la función objeto de estudio como una función continua. (García et al., 2011)

Luego, el uso de TIC en la enseñanza es de gran importancia para lograr un aprendizaje significativo, así como también el cambio en la enseñanza, dejando de lado la definición formal de la derivada con el uso de límites, por una derivada más aplicada.

Finalmente, trabajar con la derivada desde la perspectiva de variación y aplicación de esta misma en el contexto de los estudiantes, resulta en un aprendizaje significativo.

2.2. Problematización de la derivada

Cuando hablamos de la problematización del saber (Reyes-Gasperini, 2012), en este caso de la derivada, hablamos de analizar cuatro dimensiones de la derivada: dimensión epistemológica, referida a la naturaleza del saber; dimensión social, sobre los usos del saber; dimensión cognitiva, concerniente a la apropiación del saber y dimensión didáctica, relacionada con la difusión del saber.

2.2.1. Dimensión Cognitiva

Representaciones de la derivada

Si se piensa en derivada, muchas personas visualizarán el límite de un cociente que se debe desarrollar, mas otras personas considerarán un gráfico. Este concepto, trabajado en los cursos de cálculo en distintas carreras, puede ser estudiado desde distintos ámbitos. Algunas de las representaciones, citadas en Sánchez-Matamoros, García & Llinares (2008) son:

- Gráfica: Pendiente de recta tangente a la curva en un punto.

  Si consideramos un punto A en la gráfica de una función $f(x)$, la recta tangente a $f(x)$ en el punto A es la recta que pasa por A cuya pendiente es el límite de las pendientes secantes, si es que existe, cuando el punto B se acerca a A por ambos lados.

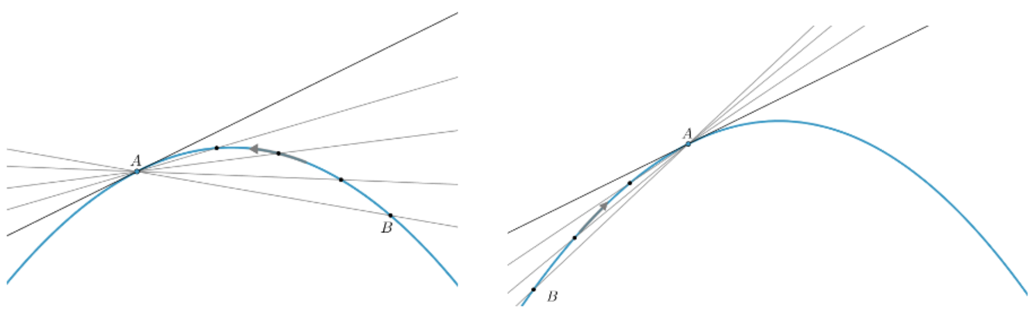


Ilustración 1 – Derivada como pendiente de recta tangente

- Verbal: Como razón de cambio instantánea.

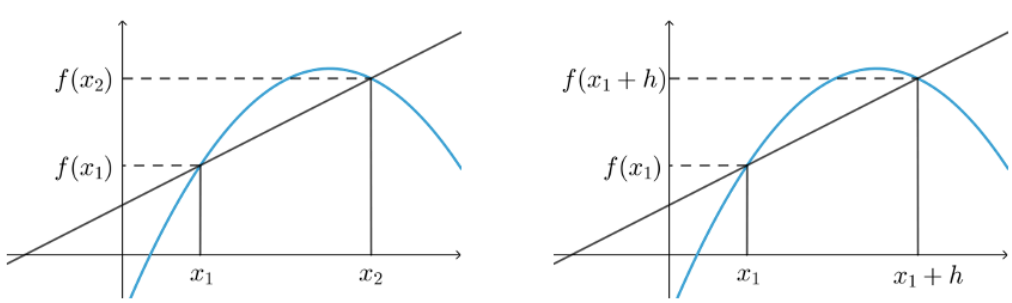


Ilustración 2 - Derivada como razón de cambio

La expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

es llamada razón de cambio promedio de x_1 a x_2. Si este cociente de diferencias tiene límite cuando x_2 se aproxima a x_1 (o cuando h se aproxima a cero), ese límite conocido como la razón de cambio instantánea es la derivada de $f(x)$ en x_1.

- Simbólica: Como límite de cociente incremental.

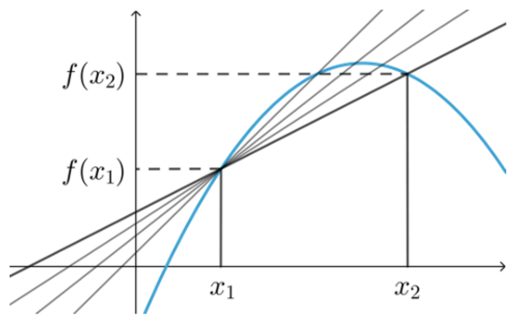


Ilustración 3 - derivada como límite de cociente incremental

La expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es llamada cociente de diferencias de la función $f(x)$ con incremento h. Si este cociente de diferencias tiene límite cuando h se aproxima a cero, ese límite es la derivada de $f(x)$ en a.

Así también, si se interpreta el cociente de diferencias como la pendiente de la recta secante, entonces la derivada resulta en la pendiente de la recta tangente en el punto a, tal como se vio en el punto anterior.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Analítico: Como una función.

  Si se considera que la expresión

  $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  existe para cualquier valor de x en el dominio de $f(x)$. Entonces se dice que $f'(x)$ es la función derivada de $f(x)$. Otras de las notaciones utilizadas son:

  $$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

  En estas notaciones, los símbolos d/dx y D indican la operación de derivada. Es más, dy/dx se lee: "la derivada de y con respecto a x", y df/dx y $d/dx\, f(x)$ se leen: "la derivada de f respecto a x". Las notaciones prima y' y $f'(x)$ surgen de las notaciones que utilizaba Newton para las derivadas y las notaciones d/dx son semejantes a las utilizadas por Leibniz. (Thomas & Weir, 2006, p. 150)

Dificultades

En los cursos de cálculo diferencial e integral, es frecuente ver que los alumnos presentan problemas al momento de aprender los conceptos propios del curso, entre ellos, la derivada. Este objeto, muchas veces trabajado de forma satisfactoria algebraicamente, no se desarrolla a cabalidad, ni existe un traspaso entre representaciones (gráfica, como pendiente de la recta tangente a la curva o razón de cambio; analítica, como límite del cociente incremental; puntual o global, como función). (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008)

Diferentes investigaciones (Sánchez-Matamoros et al., 2008; Sealey & Flores, 2005 y Dolores, 2000) exponen los obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los alumnos al momento de estudiar la derivada. Entre las dificultades se tienen:

- Gráficas

  Una de las representaciones que se utilizan en la enseñanza de la derivada es la de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. La noción de recta tangente involucra conceptos como límite, monotonía o curvatura de una función, por lo que al momento del aprendizaje se generan distintos significados, como el de una línea que pasa por un punto, pero no corta la curva en un entorno de él, como una línea que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, y como una línea que pasa por dos puntos infinitamente cercanos a un punto de la curva entre otros (Orts, Llinares & Boigues, 2016, p.407).

Todas estas concepciones de la recta tangente generan dificultades al considerar lo que pasa en los puntos angulosos y los puntos de inflexión, entre otros, de una curva. Esto dado que se contrarían la idea de que la recta tangente, además de tocar a la curva en un punto, la puede cortar y ser tangente en la vecindad del corte.

Otra dificultad presente relacionada con las gráficas del concepto de derivada tiene relación con el esbozo de la primera derivada dada la gráfica de una función. Este problema tiene relación con la compresión de la derivada, que al ser vista de forma puntual como un número, no se logra relacionar con la representación gráfica.

“Los estudiantes pueden considerar a los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas.” (Sánchez-Matamoros et al., 2008, p. 277)

- Razón de cambio

La razón de cambio es una de las representaciones con las que se introduce el concepto de derivada. Por este motivo, una comprensión débil de esta idea, como interpretar la pendiente de una recta como qué tan empinada está la recta sin considerar la razón que existe entre el aumento de la imagen y el avance de la variable independiente, o el cociente entre las variaciones de la variable dependiente con respecto a la variable independiente, puede conllevar problemas al momento de interpretar la derivada y sus aplicaciones. (Sealey & Flores, 2005)

- Límite

El concepto de límite es considerado inherentemente difícil para muchos estudiantes de matemáticas. Primeramente, la palabra límite puede crear confusión dado que, en la vida cotidiana, tiene connotaciones distintas a las utilizadas en matemáticas. Esto es, en la vida diaria un límite denota una división o frontera, como es el caso de los límites geográficos, o una restricción como es en el caso de los límites de velocidad. (Sealey & Flores, 2005)

Otro posible obstáculo se encuentra en el cálculo del límite, dado que los alumnos no pueden utilizar siempre el mismo método aritmético o algebraico para obtener la respuesta de forma directa.

Con respecto a la derivada vista como un límite, Orton A (1977) (citado en Dolores, 2000) obtuvo evidencias de las dificultades que tienen los estudiantes de comprender que por medio de una sucesión de rectas secantes se logre obtener la recta tangente. Los alumnos consideran el límite solo como una aproximación que se obtiene al evaluar la función dada en el punto deseado.

- Derivadas puntuales y generales

La derivada en un punto $x = a$, $f'(a)$, como se puede ver en muchos textos de estudio, es abordada y trabajada en la parte introductoria del tema derivada para luego definir la función derivada. El cambio de considerar la derivada como un número, la pendiente de la recta tangente en un punto, a considerarla como función también puede originar problemas. (Sánchez-Matamoros et al., 2008). En efecto, se pasa de encontrar la derivada en cada punto, a considerar la derivada como un objeto, una función que entrega la pendiente de la función primitiva en cada punto. Asimismo, puede generar el conflicto de que el cociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Toma un valor a fijo y otro h variable que toma valores cada vez más pequeños, es una función de h. La expresión

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

es una función que depende se x (Sealey & Flores, 2005).

2.2.2. Dimensión Didáctica

Enseñanza de la derivada

La derivada puede ser desarrollada de distintas formas. En este caso, hemos considerado dos textos de estudio utilizados en los primeros cursos de cálculo y en particular en la carrera de Ingeniería Comercial de la Universidad Adolfo Ibáñez. Éstos son el libro "Trascendentes tempranas de J. Stewart (2008)" y el libro "Cálculo, de Purcell, Varberg & Rigdon (2007)". En ellos se realiza el siguiente análisis de la derivada:

El texto Trascendentes Tempranas (Stewart, 2008) trabaja la derivada dentro del capítulo de límites, como un subcapítulo enfocado a las rectas tangentes y a la derivada. El texto introduce la idea de tangente de una función en un punto por medio del límite de las rectas secantes y cuya pendiente está dada por m en la siguiente definición:

1 DEFINICIÓN La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando el límite existe.

Ilustración 4 - Definición recta tangente (Stewart, 2008, p.144)

Luego se presenta la velocidad como el límite de las velocidades promedios y se introduce la notación $h \to 0$, para finalmente presentar la derivada de la siguiente forma:

> DERIVADAS
>
> En realidad, los límites de la forma
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial (Stewart, 2008, p.146).

4 DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un número a**, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Ilustración 5 - Definición de derivada en un punto (Stewart, 2008, p.146)

En seguida se presenta la equivalencia de la derivada en un punto por medio del cambio de variable $x = a + h$, explicando:

> Si escribe $x = a + h$, en tal caso, tiene $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. En consecuencia, una manera equivalente de establecer la definición de la derivada, como se mencionó en la búsqueda de rectas tangentes, es

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ilustración 6 - Derivada puntual como pendiente de recta tangente (Stewart, 2008, p.147)

Más adelante en el texto, se presenta la derivada en un punto como una razón de cambio instantánea

6

$$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ilustración 7 - Derivada como razón de cambio (Stewart, 2008, p.148)

Finalmente, en el subcapítulo siguiente, se presentar la derivada como una función. Con ella se realiza el análisis propio de funciones, esto es, determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, hallar máximos y mínimos de la función y relacionar la continuidad de la función con los intervalos donde es derivable.

En los capítulos posteriores se estudian las reglas de derivación y las derivadas de funciones trigonométricas y logarítmicas, para luego exponer algunas aplicaciones de la razón de cambio promedio y la derivada en Física, Química, Bilogía, Economía y otras ciencias. En este último apartado de aplicaciones de Economía se presenta el costo marginal explicado por medio de un ejemplo como una razón de cambio

“Así entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la (n+1)-ésima unidad].” (Stewart, 2008, p.229)

Por su parte, en el libro Cálculo de Purcell, Varberg & Rigdon (2007), se comienza el capítulo referente a derivada por medio de la problemática de la recta tangente, cómo es que se planteó esto en la antigüedad, y cómo es que por medio de rectas secantes se puede llegar a la idea de la recta tangente. Ahí se define la recta tangente como:

Definición Recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

Ilustración 8 - Definición recta tangente (Purcell et al, 2007, p.93)

Con la misma idea de la pendiente de la recta tangente, se presenta la velocidad promedio y la velocidad instantánea, pero utilizando la idea de velocidad en un punto:

Definición Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su **velocidad instantánea** en el instante c es

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

Ilustración 9 - Definición velocidad instantánea (Purcell et al, 2007, p.95)

Posteriormente, se define la derivada como una función, haciendo una mención a lo ya visto y generalizando el concepto:

Hemos visto que *la pendiente de la recta tangente* y la *velocidad instantánea* son manifestaciones de la misma idea básica. Tasa de crecimiento de un organismo (biología), ganancia marginal (economía), densidad de un alambre (física) y velocidad de disolución (química) son otras versiones del mismo concepto básico. El buen sentido matemático sugiere que estudiemos este concepto independiente mente de estos vocabularios especializados y de sus diversas aplicaciones. Elegimos el nombre neutral de *derivada*, el cual añadiremos a *función* y *límite* como una de las palabras clave del cálculo (Purcell et al., 2007, p.100).

Definición Derivada

La **derivada** de una función f es otra función f' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ilustración 10 - Definición derivada (Purcell et al, 2007, p.100)

Finalmente, por medio de un cambio de variable ($x = h + c$), se ve la derivada en un punto como:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ilustración 11 - Derivada puntual (Purcell et al, 2007, p.101)

En los sucesivos capítulos se analiza la relación de la continuidad de la función con la derivada, las reglas de derivación junto con las derivadas de las funciones trigonométricas, la razón de cambio y aproximaciones y finalmente aplicaciones como máximos y mínimos, puntos críticos, monotonía y concavidad, problemas prácticos. Estos últimos son evocados a las ciencias físicas, biológicas y químicas, con un apartado opcional de economía. En él se definen de manera simple y por medio de ejemplos los conceptos ingreso, costo y utilidad. Además, se explica el uso de la palabra marginal como sigue:

Suponga que la empresa ABC conoce su función de costo C(x) y que tiene planeado, tentativamente, producir 2000 unidades este año. Nos gustaría determinar el costo adicional por unidad, si ABC aumenta un poco su

> producción. Por ejemplo, ¿sería menor que el ingreso adicional por unidad? Si es así, tendría un buen sentido económico aumentar la producción.

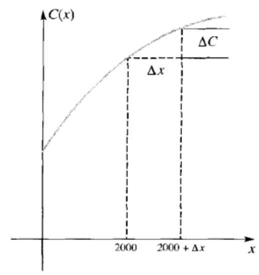


Figura 17

> Si la función de costo es la que se muestra en la figura 17, nos estaríamos preguntando por el valor de $\Delta C/\Delta x$ cuando $\Delta x = 1$. Pero esperamos que esto estará muy cerca del valor de
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$
>
> cuando $x = 2000$. Este límite se denomina costo marginal. Los matemáticos reconocemos esto como dC/dx, la derivada de C con respecto a x. (Purcell et al., 2007, p. 173)

En ambos casos, Purcell et al., 2007 y Stewart, 2008, se presenta y trabaja la derivada en la siguiente secuencia: como la pendiente de la recta tangente, seguido de una velocidad instantánea, como razón de cambio, como función, o intercambiando el orden de estas últimas dos. Más aún, en estos textos se introduce el capítulo de derivada con gráficos similares que muestran el límite de las rectas tangentes.

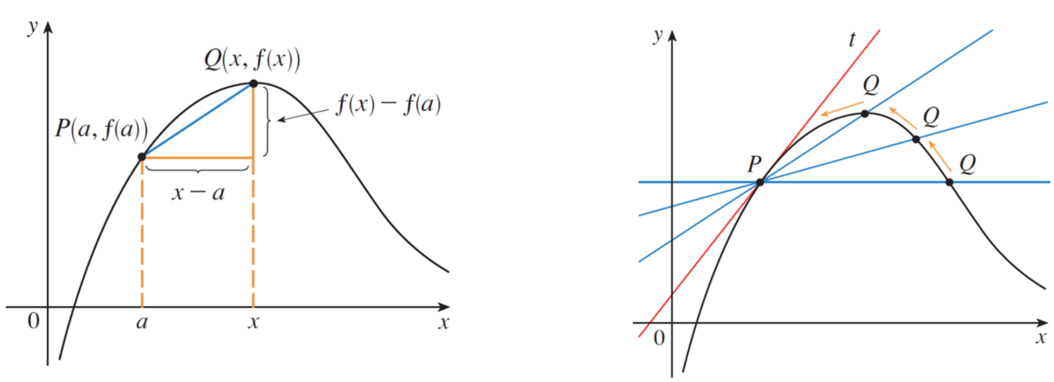


Ilustración 12 - Rectas tangentes y secantes (Stewart, 2008, p.144)

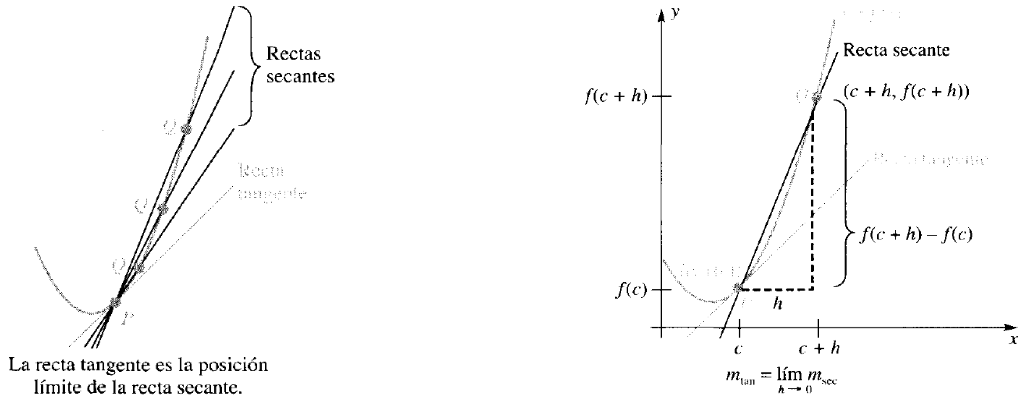


Ilustración 13 - Rectas tangentes y secantes (Purcell et al, 2007, p.93)

Luego, estas ideas de gráfica se utilizan para el análisis de la función, como crecimiento, concavidad y máximos, incluso como una herramienta para resolver problemas en contextos, por lo general optimización. Más aún, en ambos textos se da una idea de lo que son las funciones marginales, pero de forma escueta, solo como una de las aplicaciones en contexto de la derivada. En ningún caso se presenta la derivada o las mismas funciones marginales como una herramienta para predecir.

Purcell, Varberg & Rigdon	Stewart
Recta tangente	Recta tangente
Velocidad Instantánea	Velocidad Instantánea
Función derivada	Derivada puntual
Derivada puntual	Razón de cambio
Propiedades continuidad	Función derivada
Reglas derivación	Propiedades continuidad
Aplicaciones	Reglas derivación
Razón de cambio	Aplicaciones

Tabla 1 - Comparación secuencia enseñanza textos guía.

Tipos de Ejercicios

En la carrera de Ingeniería Comercial, específicamente en el curso de cálculo I, se trabaja el concepto de derivada y diversas de sus aplicaciones. Entre ellas las concernientes a su área económica, que son las funciones marginales.

De acuerdo a nuestra experiencia y de la recopilación de ejercicios encontrados en los diversos textos de estudios (utilizados en los cursos de cálculo de la Universidad Adolfo Ibáñez), estos ejercicios pueden ser clasificados en tres tipos según el enunciado y el proceso de resolución del problema:

Tipo I:

Este tipo de ejercicios se caracteriza por conceder en el mismo enunciado la función con la que deben trabajar los estudiantes. Este trabajo puede consistir en maximizar (o minimizar) la función entregada por medio de una serie de pasos, que consisten en derivar la función e igualar la derivada a 0 para encontrar los posibles valores de x donde la función alcanza su máximo o mínimo. O puede consistir en calcular de forma directa la función marginal en un punto dado, para lo cual es necesario derivar la función del enunciado y evaluar en el punto dado.

Se logra identificar este tipo de ejercicios por ser directo, con un desarrollo estándar que por lo general implican derivar y evaluar en algún punto. Algunos ejercicios piden interpretación de las respuestas dado el contexto, pero por lo general esta interpretación no abarca mucho más allá de la definición del concepto trabajado.

A continuación, se presentan las dos variaciones de este tipo de ejercicios encontrados en el libro Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales (Hoffmann, Bradley & Rosen, 2006)

Ejemplo 1 (Hoffmann et al. 2006, p. 149):

> Un fabricante de cámaras digitales estima que cuando se producen x unidades, la utilidad total es
>
> $$P(x) = -0.0035x^3 + 0.07x^2 + 25x - 200$$
>
> miles de dólares.

a) Encuentre la función de utilidad marginal.

b) ¿Cuál es la utilidad marginal cuando el nivel de producción es $x = 10$, $x = 50$ y $x = 80$?

c) Interprete estos resultados.

Respuesta esperada:

a) Derivando se obtiene

$$P'(x) = -0.0105x^2 + 0.14x + 25$$

Luego, la función utilidad marginal es $P'(x)$

b) Para obtener las utilidades marginales al producir $x = 10, 50$ y 80 cámaras, evaluamos

$$P'(10) = -0.0105 \cdot 10^2 + 0.14 \cdot 10 + 25 = 25{,}35$$

$$P'(50) = -0.0105 \cdot 50^2 + 0.14 \cdot 50 + 25 = 5{,}75$$

$$P'(80) = -0.0105 \cdot 80^2 + 0.14 \cdot 80 + 25 = -31$$

c) Los valores dados indican la utilidad que generará el incremento de una unidad en la utilidad total al producir 10, 50 u 80 cámaras.

Ejemplo 2 (Hoffmann et al. 2006, p. 193):

El ingreso obtenido por la venta de una nueva clase de patín motorizado t semanas después de su introducción está dado por

$$R(t) = \frac{63t - t^2}{t^2 + 63} \quad 0 \leq t \leq 63$$

millones de dólares. ¿Cuándo se alcanza el ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Respuesta esperada:

Para determinar el máximo de la función ingreso, se deriva y se iguala la derivada a 0. Por lo tanto

$$R'(t) = \frac{(63t - t^2)'(t^2 + 63) - (t^2 + 63)'(63t - t^2)}{(t^2 + 63)^2} = 0$$

$$\frac{(63 - 2t)(t^2 + 63) - (2t)(63t - t^2)}{(t^2 + 63)^2} = 0$$

$$\frac{-63t^2 + 63^2 - 126t}{(t^2 + 63)^2} = 0$$

$$\frac{-63(t + 9)(t - 7)}{(t^2 + 63)^2} = 0$$

De este modo, los posibles candidatos a máximo son $t = -9$ y $t = 7$. Como el dominio está entre 0 y 63, se considera $t = 7$.

Para verificar que en $t = 7$ la función ingreso tiene un máximo analizamos el signo de la primera derivada.

	$]-\infty, -9[$	$]-9, 7[$	$]7, \infty[$
-63	$-$	$-$	$-$
$(t+9)$	$-$	$+$	$+$
$(t-7)$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Tabla 2 - Ejercicio clasificación de máximo con criterio de primera derivada.

Como el signo de la derivada antes de $t = 7$ es positiva y después de $t = 7$ es negativa, por el criterio de la primera derivada, se tiene que la función posee un máximo en $t = 7$.

Tal como se puede apreciar en ambos ejemplos, el enunciado presenta la función a trabajar. En el primer caso, la función $P(x)$ debe ser derivada y evaluada en $x = 10$, $x = 50$ y $x = 80$ para obtener los valores que nos indicarán, de acuerdo a la definición de utilidad marginal, la utilidad que generara el incremento en una unidad cuando la producción sea de $x = 10$, $x = 50$ y $x = 80$ unidades respectivamente.

En el segundo ejemplo, para la función $R(t)$ se debe determinar el valor de t para el cual la función es máxima. Para ello es necesario calcular la derivada de $R(t)$ e igualarla a 0 para determinar el o los posibles valores de t y justificar por medio del criterio de la primera o segunda derivada para máximos y mínimos, que efectivamente la función posee un máximo en ese punto.

Luego, considerando que el dominio es acotado, se debe comparar el valor de la función en este punto con el valor de la función en los extremos para poder decidir.

Tipo II

Un segundo tipo de ejercicios se caracteriza por no entregar de forma directa la función a trabajar. En este tipo de ejercicios se suelen entregar dos o más funciones que, por medio del álgebra, llevan al modelo del que realmente se quiere extraer la información. Esto puede ser maximizar o minimizar la función. Tal como se describió en el ítem anterior, el procedimiento consiste en derivar la función e igualar la derivada a 0 para encontrar los posibles valores de la variable independiente donde la función alcanza su máximo o mínimo, o bien calcular la función marginal por medio de su derivada.

Tener que "descubrir" la función con la que se quiere trabajar agrega dificultad al problema, ya que debe existir un conocimiento previo de cómo construir esa función.

A continuación, se presenta un ejemplo extraído del libro Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales (Hoffman et al. 2006) que mezcla estas variaciones de ejercicios:

Ejemplo (Hoffmann et al. 2006, p. 236):

> Un fabricante estima que cuando se producen q unidades de cierto artículo cada mes, el costo total es $C(q) = 0.4q^2 + 3q + 40$ miles de dólares, y las q unidades se pueden vender a un precio de $p(q) = 22.2 - 1.2q$ dólares por unidad.

a) Determine el nivel de producción que proporciona la máxima utilidad ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) ¿En qué nivel de producción se minimiza el costo promedio por unidad $A(q) = \frac{C(q)}{q}$?

c) ¿En qué nivel de producción el costo promedio es igual al costo marginal $C'(q)$?

Respuesta esperada:

a) La función utilidad está dada por los ingresos menos los costos. De este modo se tiene que la utilidad está dada por:

$$U(q) = q \cdot p(q) - C(q)$$

$$U(q) = q \cdot (22.2 - 1.2q) - (0.4q^2 + 3q + 40)$$

$$U(q) = -1.6q^2 + 19.2q - 40$$

Para determinar el máximo de la función utilidad, se deriva y se iguala la derivada a 0. Por lo tanto,

$$U'(q) = -3.2q + 19.2 = 0$$

$$q = 6$$

De este modo, el posible candidato a máximo es $q = 6$. Para verificar que en $q = 6$ la función utilidad tiene un máximo analizamos el signo de la segunda derivada en $q = 6$.

$$U''(6) = -3.2$$

Como la segunda derivada es negativa en $q = 6$, se cumple que la función tiene un máximo en dicho punto. Y el máximo es

$$U(6) = -1.6 \cdot 6^2 + 19.2 \cdot 6 - 40$$

$U(6) = 17.6$ dólares

b) Para saber en qué nivel de producción se minimiza el costo promedio, se deriva la función y se iguala a 0. Primero determinamos la función

$$A(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{0.4q^2 + 3q + 40}{q}$$

$$A(q) = \frac{C(q)}{q} = 0.4q + 3 + \frac{40}{q}$$

Y ahora se deriva e iguala a 0, obteniendo

$$0.4 - \frac{40}{q^2} = 0$$

$$q = \pm 10$$

Por el contexto, dado que no se pueden producir $q = -10$ unidades de cierto artículo, se considera como un posible mínimo $q = 10$. Verificamos que efectivamente es un mínimo evaluando en la segunda derivada

$$A''(q) = \frac{80}{q^3} \quad \rightarrow \quad A''(10) = \frac{8}{100}$$

Como la segunda derivada evaluada en $q = 10$ es positiva, se tiene que dicha producción determina un mínimo en la función.

c) Igualamos las funciones involucradas, costo promedio y costo marginal:

$$0.4q + 3 + \frac{40}{q} = 0.8q + 3$$

$$100 = q^2$$

$$q = \pm 10$$

De este modo, cuando se producen 10 artículos, el costo promedio es igual al costo marginal.

En el ejemplo dado, se entrega la función costo total, $C(q)$, de un total de q artículo y el precio unitario de cada artículo. Con esta última función se puede obtener la función ingreso, $I(q)$, dada por la multiplicación del precio unitario por la cantidad de productos vendidos. De estas dos funciones se debe obtener la función utilidad, dada por:

$$U(q) = I(q) – C(q) = q \cdot p(q) - C(q)$$

Para esto, tal como se explicó, el alumno debe saber que la función ingreso ($I(q)$) está dada por la variable, en este caso q, multiplicada por el precio de cada artículo. De este modo, se obtiene el total de dinero que se recibe al vender la q cantidad de artículos. Además, se debe saber que la función utilidad ($U(q)$) está definida como el ingreso menos el costo. Luego de esto se puede trabajar lo pedido.

Tipo III

El último tipo de ejercicios se caracteriza por poseer un enunciado que especifica una situación con la cual se debe modelar la función a trabajar, ya sea maximizándola, minimizándola o calculando su derivada.

En este tipo de ejercicios, al contrario de los de tipo II, en donde se entregan de forma directa funciones con las que por medio de suma, resta, multiplicación o división (o combinaciones de estas operaciones) de ellas se logra obtener la función a trabajar, se debe interpretar el enunciado, y con los datos dados se debe formular una función que modele la situación que se nos está entregando.

Para este tipo de ejercicios, muchas veces es necesario tener un conocimiento previo del tipo de funciones con las que se trabaja. Un ejemplo de esto es que, si se habla de función costo, la persona que se enfrente al problema debe saber que el costo se puede dividir en el costo fijo más el costo variable. Por esto, seguramente la función que quiera modelar estará compuesta de estas dos funciones.

A continuación, se presentan ejemplos extraído del libro Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales (Hoffman et al. 2006) que muestran este tipo de ejercicios:

Ejemplo 1 (Hoffmann et al. 2006, p. 258):

> Un fabricante de bicicletas compra 6.000 llantas al año a un distribuidor. El costo por la orden y el transporte es de $\$20$ por pedido, el costo de almacenamiento es de 96 centavos por llanta al año, y cada llanta cuesta $\$5,75$. Suponga que las llantas se utilizan a una razón constante durante todo el año y que cada pedido llega justo cuando se está acabando el pedido anterior. ¿Cuántas llantas debe ordenar el fabricante en cada pedido para minimizar el costo?
>
> Respuesta esperada:
>
> El objetivo es minimizar el costo total, que se puede expresar como
>
> $$Costo\ total\ = \begin{matrix} costo\ de \\ almacenamiento \end{matrix} + \begin{matrix} costo\ de\ los \\ pedidos \end{matrix} + \begin{matrix} costo\ de\ la \\ compra \end{matrix}$$
>
> Sea x el número de llantas en cada pedido y $C(x)$ el costo total correspondiente en dólares. Entonces,

$$Costo\ de\ los\ pedidos\ = (costo\ por\ pedido)(número\ de\ pedidos)$$

Como se solicitan 6.000 llantas durante el año y cada pedido contiene x llantas, el número de pedidos es. $\frac{6000}{x}$ y entonces

$$Costo\ de\ los\ pedidos\ = 20\left(\frac{6.000}{x}\right) = \frac{120.000}{x}$$

Además,

$$Costo\ de\ compra\ = (número\ total\ de\ llantas\ pedidas)(costo\ por\ llanta)$$

$$Costo\ de\ compra\ = 6.000\ (5{,}75) = 34.500$$

Para determinar el costo de almacenamiento, se puede considerar que cuando llega un pedido, todas las x llantas se colocan en el almacén y se van sacando a razón constante. El inventario decrece linealmente hasta que no quedan llantas, y en ese momento llega el siguiente pedido. De este modo el número promedio de llantas almacenadas durante el año es $\frac{x}{2}$, y el costo total anual de almacenamiento es igual que si se almacenaran $\frac{x}{2}$ llantas durante todo el año. Se sigue que

$$Costo\ de\ almacenamiento$$
$$=\ (número\ promedio\ de\ llantas\ almacenadas)(costo\ de\ almacenamiento\ por\ llanta)$$

$$= \frac{x}{2}(0{,}96) = 0{,}48\,x$$

Reuniendo todo, el costo total es

$$Costo\ total\ =\ 0{,}48x\ + \frac{120.000}{x}\ +\ 34.500$$

Y el objetivo es encontrar el mínimo absoluto de $C(x)$ en el intervalo $0 < x \leq 6.000$.

La derivada de $C(x)$ es

$$C'(x) = 0{,}48 - \frac{120.000}{x^2}$$

Que es igual a cero cuando

$$x^2 = \frac{120.000}{0{,}48}\ =\ 250.000 \quad o \quad x = \pm 500$$

Como $x = 500$ es el único número crítico en el intervalo significativo $0 < x \leq 6\,000$, se puede aplicar el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos. La segunda derivada de la función costo es

$$C''(x) = \frac{240.000}{x^3}$$

Que es positiva cuando $x > 0$. Por lo tanto, el mínimo absoluto del costo total $C(x)$ en el intervalo $0 < x \leq 6.000$ se alcanza cuando $x = 500$; es decir, cuando el fabricante pide las llantas en lotes de 500.

Ejemplo 2 (Hoffmann et al. 2006, p. 46):

Un fabricante puede producir cintas de video en blanco a un costo de $\$2$ por casete. Los casetes se han estado vendiendo a $\$5$ la pieza, y a ese precio, los consumidores han estado comprando 4.000 casetes al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los casetes y estima que por cada aumento de $\$1$ en el precio, se venderán 400 casetes menos cada mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al cual se vendieron los casetes.

b) Dibuje la gráfica de la función de utilidad. ¿Qué precio corresponde a la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

Respuesta esperada

a) Consideramos la utilidad como

$$Utilidad = (número\ de\ casetes\ vendidos)(utilidad\ por\ casete)$$

Como debemos expresar la utilidad como una función del precio, entonces la variable independiente es el precio y la variable dependiente es la utilidad. Sea p el precio al cual se venderá cada casete y $P(p)$ la utilidad mensual correspondiente.

Ahora, se sabe que cada mes se venden 4.000 casetes cuando el precio es \$5 y que se venderán 400 casetes menos cada mes por cada aumento de \$1 en el precio. Como el número de aumentos de \$1 es la diferencia $(p - 5)$ entre los precios de venta nuevo y anterior, se tiene

$$Número\ de\ casetes\ vendidos = 4.000 — 400(número\ de\ aumentos\ de\ \$1)$$

$$= 4.000 - 400(p - 5)$$

$$= 6.000 - 400p$$

La utilidad por casete es simplemente la diferencia entre el precio de venta p y el costo $2.

Así,

$$Utilidad\ por\ casete = p - 2$$

y la utilidad total es

$$P(p) = (número\ de\ casetes\ vendidos)(utilidad\ por\ casete)$$

$$= (6.000 - 400p)(p - 2)$$

$$= -400p^2 + 6.800p - 12.000$$

b) El objetivo es encontrar el máximo de la función utilidad $P(p)$.

La derivada de $P(p)$ es

$$P'(p) = -800p + 6.800$$

Esta es igual a cero cuando

$$x = 6.800/800 = 8,5$$

Como $x = 8,5$ es el único número crítico, se puede aplicar el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos. La segunda derivada de la función utilidad es

$$P''(p) = -800$$

Esta es siempre negativa. Por lo tanto, el máximo absoluto de la utilidad se alcanza cuando el fabricante cobra $8,50 por cada casete, y la utilidad máxima mensual es

$$P_{máx} = P(8,5) = -400(8,5)^2 + 6.800(8,5) - 12.000$$

$$= \$16.000.$$

En ambos ejemplos se presenta una situación en la que se pretende maximizar o minimizar costos o utilidad. Para ello se entregan una serie de datos que llevan a modelar el problema para poder resolverlo.

Cabe destacar que en ambos casos no se presenta de forma explícita ninguna función. Sin embargo, en el primer ejemplo, cuando se nombra el costo por transporte y pedido, y almacenamiento, se está haciendo referencia a que la función costo está compuesta por el costo fijo, que es el precio que se paga por las llantas al año, y el costo variable que es el costo de almacenamiento que depende de la cantidad de llantas que se almacenan en promedio a lo largo del año. Sobre esta base, se puede obtener la función a trabajar.

En el segundo ejemplo se pide maximizar la utilidad, por lo que se debe tener en consideración que la utilidad está compuesta del costo y el ingreso (y este a su vez está compuesto por el precio por unidad del producto y la cantidad de unidades vendidas) de producir y vender, en este caso, casetes. Con esto y las variaciones de venta e ingreso que se producen con los cambios expuestos, se debe modelar la función a maximizar.

En resumen, los tipos de ejercicios planteados exhiben variación sobre el modo de presentar la función a trabajar. Estos son: entregando en el mismo enunciado la función a trabajar (Tipo I), se entregan dos o más funciones con las cuales se puede llegar a la función buscada (Tipo II) y no se entregar funciones, se debe interpretar el enunciado y con los datos dados formular una función que modele la situación (Tipo III). Es importante recalcar que, en los tres casos, el modo de abordar el problema es similar.

2.2.3. Dimensión Epistemológica

La historia de la derivada

La derivada, tal como la conocemos hoy, se estudia desde algunos cursos en la enseñanza media, o en los primeros años de la enseñanza superior hasta niveles avanzados de matemáticas. Para entender de dónde viene este concepto y en qué se utiliza, necesitamos explicar cómo es que surge. De acuerdo con Grabiner (1983) y Ponce (2015):

En 1630, tanto René Descartes como Pierre de Fermat inventaron de manera independiente la geometría analítica, que en esencia significa que las curvas se pueden representar por medio de ecuaciones y que cada ecuación determina una curva. Dado que cada ecuación puede ahora producir una curva, los antiguos métodos de la geometría sintética eran insuficientes. Por lo que surge la pregunta:

¿Cómo podríamos describir las propiedades de la tangente en un punto arbitrario a una curva definida por un polinomio de grado 96? (Ponce, 2015, p.9)

De acuerdo con Ponce (2015), los griegos sabían cómo trazar tangentes para cierto tipo de curvas. Ellos habían definido una tangente como la línea que toca una curva en un solo punto, pero sin cortarla. Esta definición, apropiada para la circunferencia, no lo era para otro tipo de curvas. El estudio de las nuevas curvas implicaba nuevos retos. De este modo surgieron nuevos problemas relacionados con el estudio de áreas y de longitudes de arco.

En 1630 Fermat ilustró su método para calcular máximos y mínimos al abordar el siguiente problema:

Dada una línea, dividirla en dos partes de tal manera que el producto de las partes sea un máximo.

Entonces, al designar la línea completa como B y A la primera parte de la línea. Se tiene que la segunda parte es $B - A$

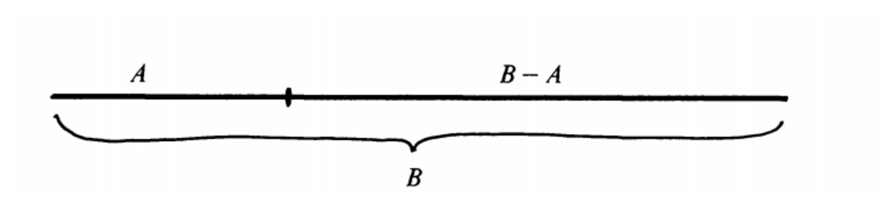


Ilustración 14 - División de segmento B (Grabiner, 1983, p. 197)

y el producto de las dos partes es

$$A(B - A) = AB - A^2 \qquad (1)$$

Con los resultados del matemático Pappus de Alejandría, que dice que un problema que tiene dos soluciones, deberá tener un máximo, Fermat desarrolló su método para calcular máximo y mínimos.

En el problema mencionado se supone que existen dos soluciones. Para este nuevo método, se considera la primera parte de la línea como $A + E$. De este modo, la segunda parte es $B - (A + E)$. Al multiplicar las dos partes, se obtiene

$$(A+E)(B-A-E) = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2 \qquad (2)$$

Con el principio de Pappus para el máximo se tiene que, en lugar de tener dos soluciones, existe una única solución para el máximo. De este modo, las ecuaciones (1) y (2) deben ser “iguales”.

> Esto es lo que Fermat llamó una seudo identidad:
>
> $$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$$
>
> Simplificando se obtiene $2AE + E^2 = BE$, y finalmente $2A + E = B$.
>
> Ahora, Fermat estableció, sin justificación, que el término E se debe “suprimir”. De esta manera, él obtiene
>
> $$A = \frac{B}{2}$$
>
> lo cual es en realidad el valor máximo que se estaba buscando (Ponce, 2015, p.12).

El conflicto en este punto es que Fermat no consideró al término E como un infinitesimal, tampoco como un límite. Fermat no aclaró por qué se podía dividir en primer lugar por E y luego eliminarlo como si fuera un cero.

Otro tema de gran interés durante el siglo XVII fue el cálculo de tangentes. “En esta época la tangente se consideraba como una secante en la cual dos puntos distintos se acercaban hasta llegar a coincidir” (Ponce, 2015, p.13).

Ponce (2015) explica que

> Fermat, Descartes, John Wallis y muchos otros matemáticos del siglo XVII fueron capaces de calcular tangentes a curvas. […] El método usado en ese entonces involucraba considerar y calcular la pendiente de la secante
>
> $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> Posteriormente, haciendo el álgebra requerida para la fórmula $f\,(x + h)$ en el numerador y finalmente dividir por h. (p. 13)

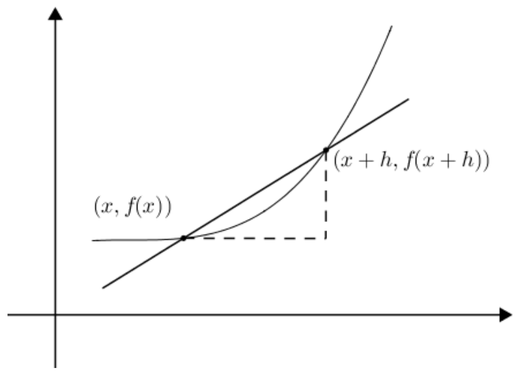


Ilustración 15 - Secante a una curva (Ponce, 2015)

En la década de 1660, el cálculo algebraico y geométrico se relacionó en los problemas de extremos y los problemas de tangente. Esto es, “a maximum was found by computing the slope of the tangent, according to the rule, and asking when it was zero”. [un máximo era encontrado calculando la pendiente de la tangente, de acuerdo con la regla, y preguntando cuándo era cero] (Grabiner, 1983, p. 198).

Es decir, en esta década aún no existía el concepto de derivada, pero existía un método para resolver este tipo de problemas.

Newton y Leibniz retomaron los métodos para el cálculo de tangentes, extremos y áreas. Incorporaron estos métodos dentro de dos conceptos más generales, la integral y la derivada.

También, desarrollaron una notación que haría más sencillo el uso de estos conceptos generales. Actualmente, seguimos usando la notación $\dot{x}$ de Newton y también la notación $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\int y\,dx$ de Leibniz. (Grabiner, 1983)

> Por su parte, Newton llamó *fluxión* a su “derivada”, la cual se consideraba como la razón de un flujo o cambio. Mientras que Leibniz consideró a la “derivada” como una razón de diferencias infinitesimales y le llamó *cociente diferencial*. (Ponce, 2015, p. 16)

De acuerdo con Ponce (2015),

> Newton introdujo otra técnica para resolver problemas de cuadraturas. A partir de casos particulares dedujo que la cuadratura de un fluente (una curva expresada analíticamente), se podía calcular encontrando una fórmula cuya

> fluxión correspondía a ese fluente.[…] De este manera, se comprendió que las derivadas están fundamentalmente vinculadas con las áreas y las tangentes, así que el concepto de derivada ayudó a ver que estos dos problemas son mutuamente inversos. (p. 18)

En 1715, empleando las propiedades de diferencias finitas, Brook Taylor escribió una ecuación expresando f(x+h) en términos de f(x) y de sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Luego, al considerar las diferencias más pequeñas, junto con un paso a límite, Taylor estableció la fórmula que lleva su nombre: Series de Taylor (Ponce, 2015).

Por otra parte, el concepto de derivada de Newton se convirtió en un instrumento para el desarrollo de la física, en particular para el estudio del movimiento.

En 1739, Euler logró establecer y resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$m\,\ddot{x} + kx = 0$$

Esta describe el movimiento de un resorte con vibración.

Un escenario análogo fue el establecimiento y la solución de la ecuación diferencial parcial para el resorte con vibración:

$$\frac{d^2y}{d^2} = \frac{Td^2y}{\mu\,dx}$$

“a mediados del siglo XVIII las series de Taylor y las ecuaciones diferenciales se habían convertido en herramientas indispensables dentro de la historia las matemáticas y en la física” (Ponce, 2015, p. 22).

Grabiner (1983) indica que Lagrange en 1797 escribió que el concepto de límite Newtoniano no era claro para fundamentar una rama de las matemáticas. Más aún, consideraba que este concepto era muy restrictivo. Para Lagrange, el cálculo debía reducirse al álgebra, que estaba mejor fundamentada.

De este modo, Lagrange trató de dar solidez al cálculo reduciéndolo al álgebra de series infinitas. Declaró, y pensó que había probado, que toda función tenía una expansión en series de potencias:

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + \cdots \qquad (3)$$

excepto, posiblemente, para un número finito de valores aislados de x.

Lagrange entonces definió una nueva función, el coeficiente del término lineal en h, el cual es $p(x)$ en la expansión mostrada en (3), y la denominó la primera función derivada de $f(x)$ (Grabiner, 1983).

El término que Lagrange utilizó, "función derivada", es el origen de nuestro actual término "derivada". Él introdujo una nueva notación, $f'(x)$, para dicha función, y definió $f''(x)$ como la primera derivada de la función $f'(x)$, y así sucesivamente.

Para Lagrange, la derivada era una función, así como la n-ésima derivada era simplemente otra función, definida como el coeficiente de h en las series de Taylor para

$$f^{n-1}(x+h).$$

"He used his definition together with Euler's criterion for using truncated power series in aproximation to give a most useful characterizacion of the derivative of a function" [Usó su definición junto con el criterio de Euler para series de potencia truncadas en aproximación para dar una caracterización más útil de la derivada de una función] (Grabiner, 1983, p. 203).

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + Hh$$

Arriba, se debe considerar que H tiende a cero con h. Lagrange interpretó esta frase "H tiende a cero con h" en términos de desigualdades. Más precisamente, escribió que:

> Dados D y h, estos se pueden elegir de manera tal que $f(x+h) - f(x)$ está entre $h(f'(x) - D)$ y $h(f'(x) + D)$ (Ponce, 2015, p. 25).

Esta afirmación se asemeja a la actual definición delta-épsilon de la derivada.

Ponce (2015) indica que en el trabajo de Lagrange de 1797, la derivada era definida en base a las series de Taylor. Sin embargo, la derivada fue descrita al satisfacer lo que nosotros reconocemos como la desigualdad delta-épsilon. Lagrange aplicó esta desigualdad para resolver problemas de tangentes y de extremos. En este punto la derivada era una función más que una razón o una velocidad.

En 1823, Cauchy definió la derivada de $f(x)$ como un límite, cuando este existe, del cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cuando h tiende a cero. Pero Cauchy entendía el "límite" de manera muy diferente a sus predecesores (Grabiner, 1983).

Cuando Cauchy tenía que demostrar algo en donde necesitaba la noción de límite, utilizó desigualdades algebraicas. Por ejemplo, Cauchy establece:

Si $f(x)$ es continua en $[x, x+i]$, entonces:

$$min_{[x,x+i]}\ f'(x) \leq \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \leq\ max_{[x,x+i]}\ f'(x)$$

> Cauchy no logró resolver todos los problemas relacionados con la fundamentación del cálculo. En particular, su definición de derivada sufría algunas deficiencias de las cuales él no se había percatado. Dado un Ɛ, él eligió un δ que suponía funcionar para toda x. Es decir, asumió que el cociente de diferencias convergía uniformemente a su límite (Ponce, 2015, p.28).

En 1850,

> Weierstrass made algebraic inequalities replace words in theorems in analysis, and used his own clear distinction between pointwise and uniform convergence along with Cauchy's delta-epsilon techniques to present a systematic and thoroughly rigorous treatment of the calculus. [Weierstrass remplazó los argumentos verbales con desigualdades algebraicas para realizar demostraciones en análisis y además usó su propia distinción entre convergencia puntual y uniforme. Asimismo, Weierstrass utilizó las técnicas delta-épsilon de Cauchy para presentar un tratamiento sistemático y riguroso del cálculo] (Grabiner, 1983, p. 205).

Finalmente, del trabajo de Weierstrass proviene nuestra definición moderna de derivada usando épsilon y delta.

En resumen, de los antecedentes expuestos se observa que, históricamente, la derivada primero fue utilizada como una herramienta para determinar máximos y mínimos. Luego fue descubierta y desarrollada, tanto en la física, con el estudio del movimiento, como en la matemática, con el estudio de áreas y tangentes. Finalmente fue definida como es conocida actualmente.

La derivada en economía

García, Moreno, Badillo & Azcárate (2011) nos indican que, aunque en muchos cursos se habla sobre parte histórica de la derivada, es solo porque los programas la contemplan como la razón de cambio de Newton (velocidad instantánea) o consideran la interpretación geométrica de Leibniz (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado). Sin embargo, en los cursos de economía también se pueden aprovechar estos enfoques para relacionarlos con el estudio de las funciones para que, al momento de modelar las situaciones, la derivada sea una herramienta clave. Es más:

> Con el enfoque de Leibniz, la pendiente m de la recta tangente a la curva en un punto es una información económica valiosa y precisa, $m < 0$ para el caso de la demanda y $m > 0$ para la oferta, entre otros, y con el enfoque de Newton se llega al análisis económico marginal (García et al., 2011, p. 147).

Análisis marginal es el nombre que recibe el cálculo diferencial en las ciencias económicas. Este análisis marginal consiste en el uso de la derivada para estimar el cambio en el incremento de una unidad de la variable independiente de una función que modele una situación económica como son el ingreso, el costo, la utilidad, la producción, etc.

Arrow e Intriligator (1981) citado en García et al. (2011) indican que el desarrollo histórico de la economía matemática se puede dividir en los períodos “Marginalista” (1838 - 1947), “De los modelos lineales y la teoría de conjuntos” (1948 - 1960) e “Integración” (1961 - Actualidad). Se debe hacer hincapié en que los años de cada período no son más que una referencia sobre el proceso de origen, ya que en la actualidad se desarrollan tanto el cálculo diferencial como el cálculo integral en la economía.

El término marginal, se origina en el periodo marginalista por una dificultad que surge con la insuficiencia de los modelos únicamente cualitativos al momento de resolver problemas económicos que comenzaron a surgir en ese periodo. En ese momento se le comienza a dar a la economía un enfoque matemático. Se focalizan los aportes en el concepto de marginalidad o última unidad, esto es, se realizaron estudios de las modificaciones que se producían en el margen o entorno de una variable cuando se producen aumentos infinitesimales de otra variable (García et al. 2011).

De acuerdo con Arrow e Intriligator (1981) citado en García et al. (2011), éste es el período en que la economía matemática surge, donde las ciencias económicas abordan metodologías de las ciencias físicas relacionadas con las matemáticas para desarrollar teorías basadas mayoritariamente en el cálculo. Con esto surgió el problema de las funciones utilizadas como costo, utilidad, ingreso (funciones discretas), dado que a los economistas les interesaba estudiar la unidad adicional. De este modo, fallaban las condiciones de continuidad de las funciones a estudiar. Esto llevó a que consideraran las funciones de estudio como funciones continuas.

Así es como la economía matemática se transformó en un método utilizado para el análisis económico, basado en herramientas matemáticas como son el cálculo, y de forma particular las derivadas (García et al. 2011).

> Originalmente, los economistas definieron el coste marginal a un nivel de producción x como $C(x+1) - C(x)$, que es el coste de producir una unidad adicional de un producto. Como, se deduce que el coste marginal $C'(x)$ al nivel de producción x es aproximadamente el coste de producir la unidad $(x+1)$. (Salas et al.,1999, p. 151). citado en García et al. (2011, p. 152)

De este modo, el desarrollo de la derivada en economía antes expuesto señala un importante cambio que sufren las funciones económicas. La necesidad de continuidad para el uso de la derivada llevó a que consideraran funciones discretas en forma continua. Este último hecho es considerado un elemento importante para la confección de la Situación de Aprendizaje.

2.2.4. Dimensión Social

Las matemáticas forman parte de los currículos de la mayoría de las carreras universitarias (García et al., 2011). El cálculo diferencial, en particular, se presenta como una herramienta fundamental para el modelado de fenómenos naturales como es el caso de las ecuaciones diferenciales, o de optimización para distintos campos de estudio. Entre ellos, economía (funciones marginales, elasticidad), biología (crecimiento poblacional de un determinado ecosistema), medicina (velocidad máxima del flujo de aire en el sistema respiratorio al toser, respuesta del organismo en función de la dosis de una droga), ciencias sociales (desempleo, transporte público), física (terremotos, densidad de un material, movimiento armónico) (Martínez, Pluvinage & Montaño, 2017), aproximación por incrementos, etc.

Aquí se explican algunas de las aplicaciones que tiene la derivada y que son vistas en los textos de estudios utilizados en las carreras de ingeniería. Entre ellas se encuentran la administración, la economía y la física.

Algunos ejemplos son:

- Análisis Marginal:

  Se define una función marginal (costo, ingreso, utilidad, productividad, tazas de impuesto, rendimiento) como el valor límite de la función promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero.

  En el caso de una función general $f(x)$, cuando hablamos de esa función marginal, se define por:

$$Función\ Marginal\ = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\ = \ lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Ecuaciones diferenciales:

  Con frecuencia se desea describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. Puesto que con frecuencia las hipótesis acerca de un sistema implican una razón de cambio de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis puede ser una o más ecuaciones que contengan derivadas. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

  Así, las ecuaciones diferenciales pueden modelar situaciones como: Dinámica Poblacional, Decaimiento Radiactivo, Ley de Enfriamiento de Newton, Propagación de una enfermedad, Reacciones Químicas, Mezclas, Drenado de un tanque, Circuitos en serie, Cuerpos en caída, etc.

- Velocidad instantánea:

  La velocidad instantánea de una partícula se define como el límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la posición:

$$Velocidad\ instantánea\ = \ lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- Aceleración instantánea:

La aceleración instantánea es igual al límite de la proporción $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la velocidad:

$$Aceleración\ instantánea\ = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

- Estudio de funciones:

> [Considerando una función continua] podemos averiguar casi todo lo que necesitamos saber acerca de una función dos veces diferenciable examinando su primera derivada. Es posible encontrar en qué parte la gráfica de la función sube o baja, y en dónde se alcanzan todos los extremos locales; podemos derivar para saber hacia dónde abre la gráfica cuando pasa por los intervalos de crecimiento y decrecimiento, e incluso podemos determinar la forma de la gráfica de la función. […] Finalmente, la derivada no nos da información sobre las asíntotas, que se encuentran usando límites (Thomas & Weir, 2006, p. 273).

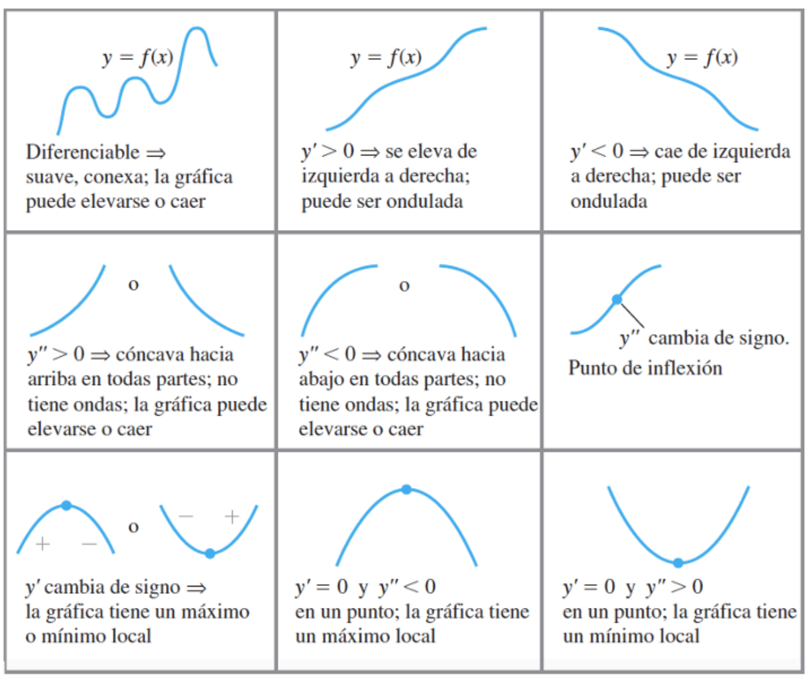


Ilustración 16 - Estudio de funciones con la derivada (Thomas & Weir, 2006, p.274)

- Series de Taylor en una variable:

  Si se considera una función $f(x)$ con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a $x = a$ como un punto interior, entonces la serie de Taylor generada por $f(x)$ con centro en $x = a$ está dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

En resumen, las aplicaciones expuestas recopiladas de los textos de estudio presentan el uso físico-matemático de la derivada. El análisis marginal, en forma particular, es presentado como una más de las aplicaciones de la derivada, trabajadas como límite de cocientes incrementales.

Capítulo 3: Marco Teórico

La matemática es un conocimiento funcional en diferentes disciplinas, sin embargo el dME considera, en el mejor de los casos, estos marcos de referencia solo como contextos para la aplicación, no como situaciones donde los conceptos y procedimientos matemáticos emergen. Es importante decir que hemos documentado como en la matemática a nivel superior, el único marco de referencia es la misma matemática escolar.

Daniela Soto (2014)

En este capítulo se desarrollan los elementos teóricos considerados en todo el proceso de resignificación.

Comenzamos por la Socioepistemología, un programa que se acerca a la investigación científica enfocada en la matemática escolar y la construcción social del conocimiento matemático, sus características y dimensiones.

Luego se presenta el discurso matemático escolar y los fenómenos que conlleva, hablamos de la adherencia, la opacidad y la exclusión. Seguimos con el Pensamiento y lenguaje variacional, línea de investigación en Matemática Educativa que sirve de marco de referencia para realizar el diseño de la actividad.

Finalmente, se desarrollan la funcionalidad y el aprendizaje significativo, seguido de una caracterización de la Comunidad de conocimiento y su relación con los Ingenieros Comerciales.

3.1. Socioepistemología

La socioepistemología, etimológicamente compuesta por las palabras socio-episteme-logos, es una de las ramas de la epistemología enfocada en la construcción social del conocimiento. Por lo que su foco está puesto en la práctica social de la producción del conocimiento, más allá que sólo basarse en el objeto contruido (Cantoral et al., 2006)

De acuerdo con Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel (2014):

> la Socioepistemología se caracteriza por ser una teoría *contextualizada, relativista, pragmática y funcional* que toma en cuenta la complejidad de la *naturaleza del saber* y su *funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social* en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. (p.98)

Es bajo estas premisas que la teoría sociepistemológica considera legítimo todo saber, ya sea popular, técnico o culto. Por lo que, aplicarlo a las Matemáticas exige realizar analisis entre la ciencia en sí y lo social que pueda afectarlo (Cantoral, Montiel, & Reyes-Gasperini, 2015).

De este modo, la socioepistemología estudia los objetos matemáticos en relación con la vida social, pues “el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas.” (Cantoral, 2003, p.1)

Más aún Cantoral et. al. (2015) indica que:

> …las Matemáticas desde la mirada socioepistemológica son consideradas parte esencial de la cultura, un elemento “vivo” que se crea “fuera” del aula, pero se recrea “dentro” de ella: las Matemáticas no se inventaron para ser enseñadas y sin embargo se enseñan, se las usa en distintos escenarios, digamos que “viven” a través de las acciones más básicas de toda actividad humana […] Están presentes también en la educación formal, en las aulas de ciencias, Física, Química, Biología, tecnología, taller, lectura y comprensión… y, por supuesto, en la clase de Matemáticas. Están presentes en las prácticas cotidianas de todos los seres humanos…(p. 15)

Siguiendo la línea de la Teoría Socioepistemológica (TSE), para este proyecto se consideró que “The derivative was first used; it was then discovered; it was then explored and developed; and it was finally defined” [La derivada primero se utilizó; después se descubrió; posteriormente se exploró y desarrolló y, finalmente se definió] (Grabiner, 1983, p. 195). Lo que motivó a buscar y utilizar aplicaciones que resignifiquen este objeto por medio de sus usos en la vida.

La Socioepistemología descansa en cuatro principios fundamentales que forman una red nodal. Con respecto a cada uno de los principios Cantoral et al. (2014) indica:

- El principio normativo de la práctica social:

  Las prácticas sociales son la base y orientación de los procesos de construcción del conocimiento. Visualizando la práctica social como lo que hace hacer a los individuos lo que hacen, es decir que norman su accionar.

  El siguiente esquema de Cantoral (2013), citado en Cantoral et al. (2014), explica los procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático basado en prácticas sociales.

Ilustración 17 - Modelo de anidación de prácticas (Cantoral et al. 2014)

- El principio de la racionalidad contextualizada:

  El actuar de un sujeto depende del contexto en el que esté inmerso en un momento y lugar determinado. Por lo tanto, la construcción del conocimiento es un producto sociocultural.

- El principio del relativismo epistemológico

  El relativismo es el que defiende que los puntos de vista no tienen validez universal, sólo poseen una validez relativa a los distintos marcos de referencia. Esto produce un cambio en la mirada educativa, pues no se interpreta el error del alumno como una falla, sino que se analiza desde el punto de vista de una racionalidad aun no develada para el investigador. Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo.

- El principio la resignificación progresiva

  Los significados construidos derivan de la acción del sujeto sobre el objeto. Estos significados son puestos en funcionamiento en nuevas situaciones y, bajo el mismo esquema constructivo, se resignifica, produciendo conocimientos. Esta dinámica de significación se ha denominado resignificación progresiva y está en la base misma del desarrollo del pensamiento.

Bajo estos cuatro principios se basa la premisa de que el conocimiento matemático es una construcción social. En particular, el análisis marginal y la derivada son una construcción social dentro de la comunidad de ingenieros comerciales.

Por medio de estos cuatro principios y la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM) se busca rediseñar el discurso Matemático Escolar (dME).

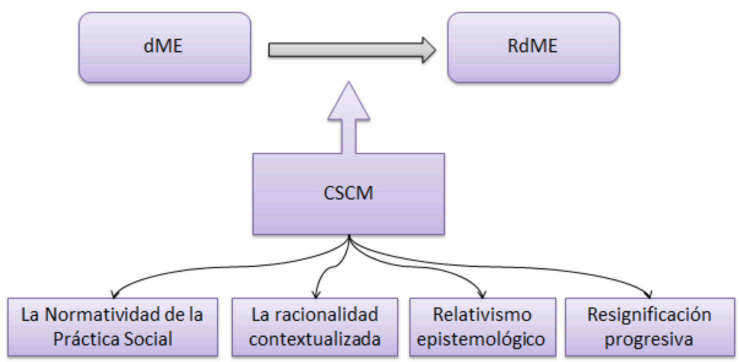


Ilustración 18 - Principios y objetos de estudio de la teoría Socioepistemológica (Soto, 2013)

De este modo, es importante darle un significado a la derivada desde la mirada de los ingenieros comerciales. Por este motivo es que en esta investigación, se considera que la derivada es utilizada para una práctica social, la predicción, por medio de sus ideas previas, como es la variación.

3.1.1. Dimensiones de la Socioepistemología

El enfoque de la Sociepistemología desde un comienzo se ha centrado en qué se está enseñando, cuál es el saber matemático que está presente en el sistema educativo, junto con esto, a quiénes, para qué, por qué y cómo se está enseñando o se debería enseñar la matemática escolar. Con todos estos cuestionamientos en consideración se cambió la atención que estaba puesta en el objeto matemático en sí a las prácticas que originan este objeto matemático o las circuntancias que favorecen su necesidad.

Con la finalidad de realizar nuevos análisis que involucren este nuevo foco, la Socioepistemología incorpora la componente social a las anteriores componentes, cognitiva, didáctica y epistemológica, de la Matemática educativa para lograr una mirada integral de los fenómenos a abordar (Reyes-Gasperini & Cantoral, 2014).

Con respecto a cada una de estas cuatro dimensiones, en Soto (2013) se indica:

- La dimensión cognitiva en la teoría socioepistemológica hace referencia a que los objetos se crean a partir de interacciones dialécticas (formas de acercamiento a los fenómenos de construcción del conocimiento), en el ejercicio de prácticas normadas. Mas esto se ha dejado de lado y se ha reducido a apropiarse de objetos que existen objetiva y previamente. Tal como indica Soto (2013) "hemos soslayado la capacidad de "hacer emerger" el significado a partir de resignificaciones progresivas entre el sujeto y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural" (p. 63).

- La dimensión epistemológica tradicionalmente considera la construcción del conocimiento. Mas con una mirada socioepistemológica, se considera importante la construcción social del conocimiento. En este sentido, el foco está puesto en las prácticas y en los momentos sociales, políticos y culturales, en las situaciones en las que el conocimiento se aplica y se resignifica. Soto (2013) indica que esta dimensión

  > "considera que el conocimiento es situado y que debemos tomar en cuenta la organización de los grupos humanos que los llevan a construir conocimiento matemático de una forma y no de otra. Así se generan epistemologías de prácticas" (p. 63).

- La dimensión didáctica estudia los procesos que favorecen y dificultan la enseñanza e institucionalización del conocimiento en clases, dejando de lado el conocimiento que se manifiesta a través de los usos, ya sean los usos institucionales, cotidianos, culturales, históricos, etc.

Cantoral (2013), citado en Soto (2013), señala:

> La dimensión didáctica es relativa a su naturaleza como objeto institucional dirigido en los procesos de enseñanza a los aprendices, tanto en el ámbito escolar como no escolar, en la vida cotidiana, la esfera profesional altamente especializada o en la enseñanza de las artes y los oficios, en las prácticas comunitarias de acompañamiento. Una especie de enseñanza, pero en aula extendida para una verdadera sociedad del conocimiento (p. 63).

- La dimensión social es la que permite ampliar la visión que se tiene de los conocimientos abstractos y aislados de la realidad presentes en el dME, considerando, además de los mecanismos de interacción entre individuos para medir la relación entre lo cognitivo y el medio, las dimensiones práctica, funcional e histórica, dimensiones que están soslayadas por el dME (Reyes-Gasperini & Cantoral, 2014). La mirada social en la socioepistemología es ampliada, ya que considera la "funcionalidad del conocimiento en la comunidad y situación, donde se usa y se resignifica" (Soto, 2013). Esta nueva mirada es la que nos conduce a pensar que los conocimientos matemáticos son parte de la cultura, son producto de la actividad humana.

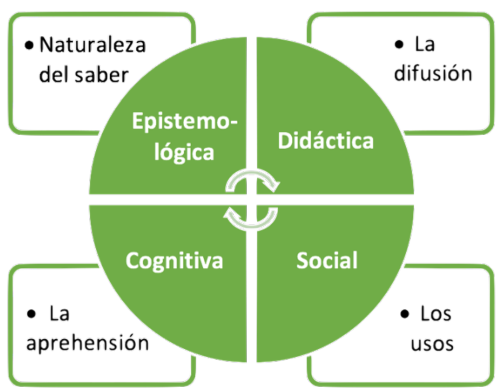


Ilustración 19 - Las dimensiones que atiende la Socioepistemología (Soto, 2013)

Considerando estas cuatro dimensiones de la Socioepistemología, es que se considera la problematización de la derivada como la expuesta en el capítulo II, sección 2.2.

3.2. Discurso matemático escolar (dME)

De acuerdo con Cordero y Flores (2007), el dME es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico sobre lo que es la enseñanza y la matemática. Este discurso se puede ver presente directamente en los textos de estudio, ya que estos últimos son los utilizados en la práctica del docente y los que tienen una gran influencia sobre todas las acciones de enseñanza y aprendizaje. De este modo el dME puede ser visto como un sistema de razón (SR), es decir, un conocimiento que norma la reflexión y la acción de los individuos, que forma categorías y que fabrica identidades, que delimita lo que queda dentro y fuera de la razón.

Las características reconocibles del dME son:

- Atomización en los conceptos: Se consideran los conceptos de forma acabada y sin modificaciones. Por lo tanto, no se consideran los contextos sociales y culturales en los que emerge el conocimiento, omitiendo argumentaciones que pudieran dar diferentes significados a la matemática.

- Carácter hegemónico: La matemática escolar es la que está escrita en los textos y no se permite considerar otras argumentaciones, significaciones y procedimientos dentro de la matemática escolar.

- Concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo: Los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre, con un orden determinado, sin que los individuos los puedan trastocar.

- Carácter utilitario del conocimiento: La matemática se considera una herramienta para resolver problemas, tanto matemáticos como de otros contextos. Con esto, lo importante de aprender matemática es poder aplicarla.

- Falta de marcos de referencia: No se considera que los individuos se encuentren bajo una cultura, sociedad, institución y disciplinas diferentes a las cuales aportan e imponen diferentes significaciones y uso del conocimiento. Con esto, deja al margen la funcionalidad del conocimiento y por ende las prácticas de los diferentes grupos e individuos.

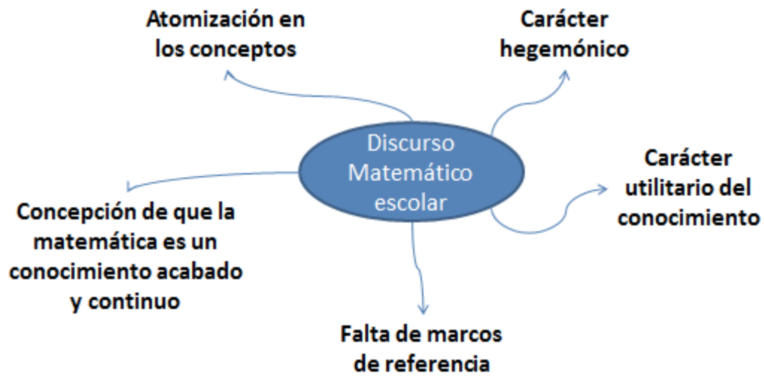


Ilustración 20 - Mapa del dME (Soto, 2013)

Todas estas características del dME, llevan a que la matemática escolar no se construya ni modifique. Por ejemplo, como indica Mendoza (2013) citado en Mendoza y Cordero (2015), en los cursos dictados en la universidad "…prevalece el dominio matemático por encima del conocimiento de la ingeniería. Esto conlleva formular enseñanzas de la matemática ignorando los *usos del conocimiento matemático* de la propia ingeniería" (p. 4). Lo anterior perjudica a los estudiantes al limitarlos a tener una sola mirada de la matemática, no permitiendo que exploren los distintos significados que esta pueda tener, pues tanto profesores como estudiantes legitiman los textos de estudios que nos presentan la matemática acabada y que se reproducen año tras año.

En particular, en el tema que abordamos, cada una de las características del dME es apreciable:

Características de dME	**Análisis de la derivada**
Atomización de los conceptos	En los diversos textos de estudio, el concepto de derivada es trabajado en una misma línea. Dejando de lado el contexto de los estudiantes y su construcción histórica.
Carácter hegemónico	La noción de derivada está orientada a sus significados y aplicaciones fisicomatemáticas, enfocado en lo algebraico del concepto, soslayando las diferentes argumentaciones.

Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo	La derivada es presentada, en diversos textos de estudio, siguiendo una misma secuencia: definición, teoremas y aplicaciones. Así, se deja de lado diferentes argumentaciones o significados.
Carácter utilitario y no funcional del conocimiento	La derivada es utilizada para resolver problemas como optimización, L'hopital y estudio de funciones. Soslayando sus usos en otros escenarios, como es la ingeniería comercial, donde se utiliza la derivada, trabajada como variaciones, para predecir estados futuros de una función. Así también, el carácter funcional no es considerarlo para la construcción de este conocimiento.
Falta de marcos de referencias para resignificar la matemática escolar	La derivada es definida como una razón de cambio, como la pendiente de la recta tangente o como límite de cocientes incrementales. Mas estas construcciones de la derivada no responden a las necesidades de otras disciplinas

Tabla 3 - Análisis de las características del dME en la noción de derivada.

Por otra parte, las características del dME, al centrar su atención en objetos matemáticos formales, provocan una exclusión del ser humano en la construcción del conocimiento, que conlleva una violencia simbólica (VS) al imponer significados y validando sólo un tipo de argumentación (Reyes-Gasperini & Cantoral, 2014; Cantoral, Montiel, & Reyes-Gasperini, 2015; Soto & Cantoral, 2010; Soto & Reyes-Gasperini, 2011).

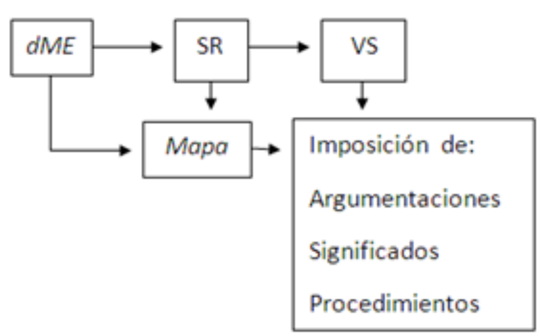


Ilustración 21 - Modelo de exclusión (Soto, 2013)

3.2.1. Fenómenos del dME

Tal como se ha visto, el dME ha trastocando la epistemología del conocimiento matemático. Esto ha provocado fenómenos como la adherencia, la opacidad y la exclusión.

De acuerdo con Cordero, Gómez, Silva-Crocci, Soto, (2015), el carácter hegemónico del dME produce que la matemática escolar se conciba como acabada, perfecta y sin errores. En consecuencia, docentes y, por tanto, estudiantes, se adhieren a él y no se atreven a trastocarlo. En otras palabras, el dME desencadena la repetición y memorización de conceptos matemáticos, ocasionando la falta de marcos de referencia para la resignificación en otros escenarios de conocimiento.

Más aún, la desventaja en la que se encuentra Latinoamérica ante la dualidad de culturas centrales y periféricas, donde se da más importancia a lo que sucede fuera de nuestras fronteras, obstaculiza la construcción de pensamiento coherente con la realidad de la sociedad latinoamericana (Cordero et al., 2015).

De este modo se niega la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático, invisibilizando los distintos argumentos que pueda tener, esto es lo que se llama opacidad. Si lo llevamos al ámbito escolar, la epistemología de la vida y la de la matemática escolar no dialogan, pero el conocimiento legitimado es el de la escuela, es decir, la matemática escolar opaca lo matemático. Aquí, consideramos lo matemático como “aquellas expresiones del conocimiento de las diferentes comunidades o bajo ciertas situaciones específicas que no necesariamente responden a un razonamiento formal.” Cordero et al. (2015)

> Lo que pasa en la matemática escolar es independiente de lo cotidiano del ciudadano que se encuentra en el aula de clase, pareciera que se le exige a ese ciudadano dejar su cotidiano fuera de la clase para no ser tomado en consideración en la construcción de su propio conocimiento matemático (Cordero et al., 2015, p. 96).

Por último, el planteamiento de las dos epistemologías que se ponen en juego en el ámbito escolar, en la cual una somete a la otra por medio del discurso unilateral de lo que es correcto y de lo que no lo es, genera el fenómeno de la exclusión.

> Una de las características de esta forma de exclusión es la invisibilidad que se produce del fenómeno, ya que tanto dominadores como dominados son víctimas involuntarias de esa violencia simbólica. Es violencia en tanto que rompe con la naturaleza del humano, al imponer significados que son

> seleccionados por un conjunto de la sociedad y no obedecen a una regla natural (Cordero et al., 2015, p. 61).

En particular, la derivada es un objeto que ha sido influenciado por el dME. Semestre a semestre es enseñada en base a los textos de estudio, que no varían mucho su estructura de enseñanza entre unos y otros, sin ser trastocada. Esto invisibiliza el contexto de los estudiantes y el propio significado que ellos y su comunidad de conocimiento le pueda otorgar. Por lo tanto, es menester rediseñar el dME por medio de diseños que consideren los usos de la derivada.

3.3. Pensamiento y Lenguaje Variacional

A finales de la década de los 90 el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) surge como línea de investigación en Matemática Educativa, en particular, en la manera de comprender los fenómenos de enseñanza – aprendizaje del conocimiento matemático propio del Cálculo y el Análisis. Esto, dado que el Pylvar se enfoca en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no solo en su manejo simbólico y analítico. La idea base de esta línea de investigación es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo (Caballero, 2012).

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales ((Cantoral, 2000) citado en (Caballero, 2012, p 10)).

Aquí, el cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), mientras que la variación se asume como una cuantificación particular de dicho cambio. Por lo tanto, estudiar la variación en una situación específica implica conocer qué es lo que cambia, cuánto cambia y cómo cambia (Cantoral, Sánchez y Molina, 2005; Caballero-Pérez y Cantoral, 2017)

El interés por estudiar el cambio en los fenómenos viene dado por la necesidad de predecir. La imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad obliga a los grupos sociales a anticipar los eventos con cierta racionalidad. Para esto, se han desarrollado diversas herramientas, basadas en el estudio del cambio, para lograr anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral et al. 2005).

> El Pylvar es por tanto una línea de investigación, así como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Las situaciones donde se pone en juego el Pylvar permiten significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos. Por tanto, las ideas de cambio y variación son fundamentales en el Pylvar, pues representa la base en la cual se sostiene y cuyo estudio permite resignificar los concomimientos matemáticos propios del cálculo. De modo que el Pylvar se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios (Caballero, 2012, p. 13).

En un sentido amplio, el Pylvar consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio (Caballero-Pérez & Cantoral, 2017).

De acuerdo con Caballero (2012), las investigaciones desarrolladas en el Pylvar han determinado que el estudio de la variación es necesario para poder darle significado a las ideas y conceptos del Cálculo. Mas el discurso matemático escolar no favorece este desarrollo de ideas variacionales, dejando de lado la construcción de una concepción rica en significados, provocando que en muchas ocasiones los estudiantes concluyan sus estudios sin reconocer cuándo es necesario, por ejemplo, el uso de la derivada.

Esta habilidad se termina desarrollando más adelante en su práctica profesional, provocando que los estudios de Matemáticas de su formación académica no sean relevantes, llegando incluso a negar que utilicen la matemática en sus labores diarias. Es el caso de los estudiantes de ingeniería comercial, quienes poseen una concepción débil de la derivada, por lo que carece de significado para ellos y les dificulta poder identificar cuándo una situación requiere de su estudio.

Un ejemplo que da cuenta de estas dificultades se presenta en Cantoral & Farfán (1998), en el cual se proporciona un conjunto de cuatro gráficas idénticas (Ilustración 22), y se les pide a los participantes que marquen sobre ella la porción en la que se cumpla que la función, la primera, segunda y tercera derivada sea mayor a cero.

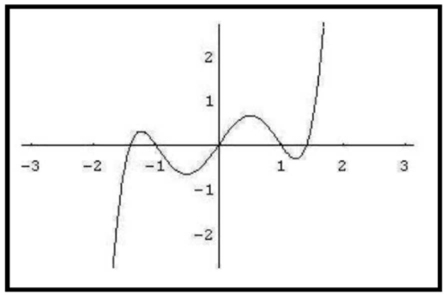


Ilustración 22 - Gráfica proporcionada en Cantoral & Farfán (1998)

Cantoral & Farfán (1998) explican que para el caso de las preguntas donde deben indicar que $f(x) > 0$, los estudiantes suelen recordar, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función, por lo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes.

En la pregunta donde deben indicar que $f'(x) > 0$, los estudiantes confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que para pendientes positivas se tendrán derivadas positivas y de forma análoga para las pendientes negativas.

La pregunta en que deben indicar $f''(x) > 0$ exige de niveles progresivos de abstracción, donde el recurso dominante en las respuestas es la memoria, puesto que suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa.

Finalmente, la pregunta en la que deben indicar $f'''(x) > 0$ genera un reto especial, ya que, aunque entienden el enunciado, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente.

Las estrategias y argumentos de respuesta de los participantes presentan una carencia de significado con respecto a la derivada.

Los participantes principalmente apelan al uso de la memoria para el caso de la primera y segunda derivada, dejando de lado las ideas variacionales propias de este concepto. Esto se observa en el caso de la tercera derivada, ya que no cuentan con ninguna referencia que les permita construir una respuesta plausible. Todo esto, debido a que el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional. Solamente aquellos que hayan desarrollado un Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) son capaces de construir una respuesta mediante el análisis de las variaciones en la gráfica (Cantoral & Farfan, 1998).

González (1999), citado en Caballero (2012), indica que la razón de que tanto estudiantes como profesores se centren en los procesos algorítmicos se debe a que no tienen escenarios donde significar las nociones matemáticas. De este modo, el que recurran a las ideas de pendiente para trabajar con la primera derivar y con la concavidad para trabajar con la segunda derivada, demuestra un apego a los recursos memorísticos o mnemotécnicos que les permiten resolver ciertas situaciones, pero al mismo tiempo dan muestra de una falta de aprendizaje y comprensión de los objetos tratados.

3.3.1. Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional

Caballero (2012) recorre una serie de trabajos (entre ellos Flores, 2010; González, 1999; Salinas, 2003; Cabrera, 2009) para realizar una caracterización del Pylvar. Con ella es posible distinguir entre lo que es una situación variacional de aquella que no lo es.

> Una característica esencial del Pylvar […] es la propuesta de estudiar situaciones y fenómenos en los que el cambio y la variación se encuentran inmersos, partiendo de las intuiciones y concepciones previas de los alumnos, de manera que se trabaja con ellas para hacerlas evolucionar por medio de situaciones variacionales, ya que se considera que la noción de variación tiene su génesis en las prácticas humanas ligadas al pensamiento variacional, llamadas estrategias variacionales. Estas dos nociones son parte indispensable cuando se habla del Pylvar (Caballero, 2012, p. 31).

Los elementos propios del Pylvar, descritos por Caballero (2012) y Caballero & Cantoral (2013) son:

▪ **Situación Variacional**: Se considera una situación variacional al conjunto de problemas en cuya resolución es necesario el uso de estrategias variacionales y el análisis entre diversos estados del cambio. Los siguientes ejemplos citados en Caballero (2012), corresponden a un ejemplo de situación variacional y a un ejemplo de una situación que no es variacional:

Ejemplo 1: ¿Cuánto vale $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$?

En esta situación, las expresiones tanto del numerador como del denominador tienen un crecimiento que tiende al infinito cuando la variable x también tiende al infinito. Para abordar este problema se requiere realizar un tratamiento variacional de la situación, ya que no basta saber que algo está cambiando (saber que ambas expresiones crecen), sino que es necesario conocer el crecimiento relativo entre ellas (cómo cambian), para concluir que el denominador presenta un crecimiento “más rápido” que el numerador.

Ejemplo 2: Para $y = x + \cos(x)$ encuentre $\frac{dy}{dx}$

Esta situación se puede abordar utilizando procesos algorítmicos, ya que al derivar se puede obtener una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Por tanto, se considera que esta situación no es variacional.

▪ **Argumentos Variacionales:** Considerando las situaciones variacionales, diremos que esta última se caracteriza por el empleo de argumentos de tipo variacional, esto es, argumentos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación. Las personas hacen uso de estos argumentos cuando

> hacen uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral, 2000, citado en Caballero, 2012, p. 32).

De este modo, son este tipo de argumentos los que permiten dar explicación a las situaciones variacionales.

▪ **Códigos Variacionales**: Consisten en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza. De este modo, consideramos los códigos como toda expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los Argumentos Variacionales.

▪ **Estrategia Variacional**: Consiste en la forma de razonar y actuar ante una situación variacional, la cual posibilita encarar y explicar dichas situaciones. Por lo mismo se postula que estas estrategias son generadoras del pensamiento variacional, por ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos. Ellas permiten reconocer aquello que cambia, así como estudiar cómo y cuánto cambia dentro del sistema, lo que a su vez permite postular estados futuros.

Algunas estrategias variacionales reconocidas son la Predicción, la Comparación, la Seriación y la Estimación, aunque no se descarta la existencia de otras estrategias. Las cuatro estrategias son caracterizadas por Salinas (2003), citada en Caballero (2012), quien formula la siguiente caracterización:

- Comparación: Está asociada a la acción de establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados. Algunos de los términos utilizados que caracterizan el uso de esta estrategia son: “es más alto que”, “es más corto que”, “está por encima de”, “es más pequeño (grande) que”, etc.

- Seriación: Está asociada con la acción de analizar estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos. A diferencia de la estrategia de Comparación, la Seriación consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos. Por ejemplo, si hablamos de una función estrictamente creciente en un intervalo (a, b) la relación entre los estados intermedios que satisfacen $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{\{n-1\}} < b$ es:

  $$f(a) < f(x\_1) < f(x\_2) < \dots < f(x_{\{n-1\}}) < f(b).$$

  La seriación como estrategia variacional, puede ser usada para hallar una relación funcional dada una tabla de valores, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras.

- Predicción: Está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis a la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. Por ejemplo, dada una sucesión de números, se pregunta por el número que corresponde a una posición posterior, e incluso una anterior.

  A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento, o valor determinado. No obstante, hallar esa relación mediante la estrategia de Seriación o Comparación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que pueden llegar a ser parte de la Predicción.

- Estimación: A partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, en la práctica se usa la estimación en el análisis de las temperaturas y en el análisis del crecimiento de poblaciones, entre otras cosas, para saber si crecerán o disminuirán, en tanto que la Predicción puede servir para decir hasta qué punto crecerá, o saber algún valor especifico de la temperatura o población dentro de algún tiempo.

▪ **Estructura Variacional Específica**: Consisten en los conocimientos matemáticos o científicos que se usan en una situación variacional para darle explicación, y en las que se apoyan las estrategias variacionales para realizar el estudio de la variación. Por tanto, son herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico que funcionan como punto de apoyo para abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las situaciones variacionales.

▪ **Tareas Variacionales**: Consisten en actividades y acciones que el alumno realiza para poder dar respuesta a las situaciones variacionales planteadas. Estas acciones consisten en el uso de una o más estrategias variacionales que comparten similitudes en cuanto al contexto en que se realizan, que puede ser numérico, gráfico o analítico y en la finalidad de esas acciones. Algunas de las Tareas Variacionales identificadas por Caballero (2012) son las siguientes:

- Tabulación como variación numérica: Consiste en la acción de proporcionar valores distintos a una variable, para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema (por ejemplo, una gráfica o expresión analítica). Una característica de esta tarea es que el análisis realizado surge a partir de observar los efectos derivados de las acciones de tabular; por tanto, si los datos ya están plasmados o la tabulación corresponde a una acción de sólo llenar una tabla, entonces no se considera que se trate de una tarea variacional.

- Análisis de datos en tablas numéricas: Consiste en que, dada cierta información en forma de datos agrupados en tablas numéricas, se contempla realizar un análisis de esos datos, fijándose en patrones de los valores, relaciones entre datos, y comportamientos. A diferencia de la tarea de Tabulación como variación numérica, esta tarea se desarrolla cuando ya se cuenta con los datos, o bien, el hallar esos valores no implica analizar los efectos de la tabulación en algún sistema. Además, no hay un cambio de sistema, sino que se desarrolla siempre en un contexto numérico.

- Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia: Consiste en la construcción de gráficas, para lo cual la persona se apoya en el análisis de las variaciones correspondientes a la situación que se plantea, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. Aunque la forma de abordar esta tarea involucre el hallar algún patrón o comportamiento, el objetivo no es hallar eso, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercanamente posible la situación que se presenta.

- Análisis gráfico con la variación como punto de referencia: Esta tarea es similar a la de Análisis de datos en tablas numéricas en el sentido de que se buscan patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos, pero con la diferencia de que el análisis esta sobre gráficas, así como elementos que surgen a partir de ella, como tangentes, alturas, asíntotas, entre otros. Una característica de esta tarea es que las acciones a realizarse giran en torno al análisis de variaciones, incluso en gráficas generadas con tecnología.

- Comparación de áreas: Al tener dos o más figuras cerradas, se trata de determinar la relación entre el área de ellas, cuál es mayor, menor o si son iguales, incluso encontrar qué tan diferentes son las áreas entre sí.

- Comparación de expresiones algebraicas: La tarea consiste en observar el valor de una o más expresiones analíticas al sustituir uno o más valores, para encontrar comportamientos, regularidades o diferencias entre ellas o con algún valor o expresión en particular.

- Comparación del número de aparición de un elemento: Consiste en contabilizar el número de apariciones de algún elemento dentro de algún contexto particular (por ejemplo, una gráfica de frecuencias, cuántas veces cabe un segmento dentro de otro, etc.), para determinar si la frecuencia de aparición es mayor, menor o igual a algún otro elemento del sistema o un valor especifico.

3.3.2. Modelo de interacción de los elementos del Pylvar

Los elementos descritos anteriormente que caracterizan al Pylvar interactúan dentro de los diseños de las situaciones de variación y del pensamiento variacional, permitiendo generar el desarrollo del pensamiento variacional.

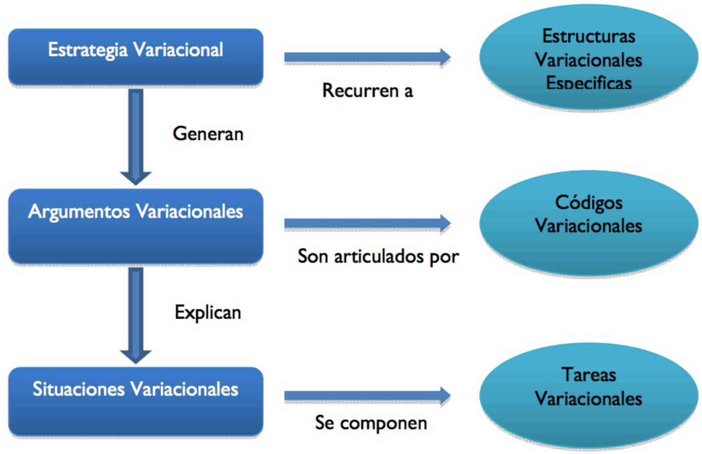


Ilustración 23 - Modelo de interacción de los elementos del Pylvar (Caballero & Cantoral, 2013)

> Las estrategias variacionales son las generadoras del Pylvar, pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos. Para ello, se apoyan en el uso de una o más estructuras variacionales que permiten analizar la variación a partir de las características particulares de cada una. El uso combinado de las estrategias y estructuras variacionales permite a la persona analizar la variación involucrada en cada situación variacional, y con ello generar los argumentos variacionales para dar explicación a la situación que se plantea. Este tipo de argumentos se caracterizan por manifestar respuestas basadas en la variación, y que son articulados por códigos variacionales que dan cuenta del estudio de la variación, como pueden ser frases, dibujos, esquemas o gráficas. De esta forma, una situación variacional es resuelta por medio del uso de argumentos variacionales, y se caracteriza por el empleo de estrategias variacionales. Por otra parte, estas situaciones pueden ser dividas en una o más tareas variacionales, lo que permite organizar el estudio de la variación de las situaciones variacionales en acciones y objetivos más específicos dentro de contextos particulares (Caballero, 2012, pp. 39 - 40).

De este modo, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional se encuentra inmerso en una situación variacional que requiere del uso de estrategias variacionales para generar el estudio de la variación, que a su vez favorece el uso de argumentos variacionales y códigos variacionales para explicar el estudio de la variación y permitir dar respuesta a la situación variacional.

3.4. Funcionalidad y Aprendizaje significativo

De acuerdo con Cordero (2016), existen tres escenarios distintos de la matemática: el conocimiento matemático, el conocimiento escolar y el conocimiento cotidiano. Estos están interrelacionados, pues el conocimiento cotidiano puede llevar al surgimiento del conocimiento matemático que al ser reorganizado produce el conocimiento escolar. Algunas de las características de estos conocimientos se presentan en la siguiente Imagen.

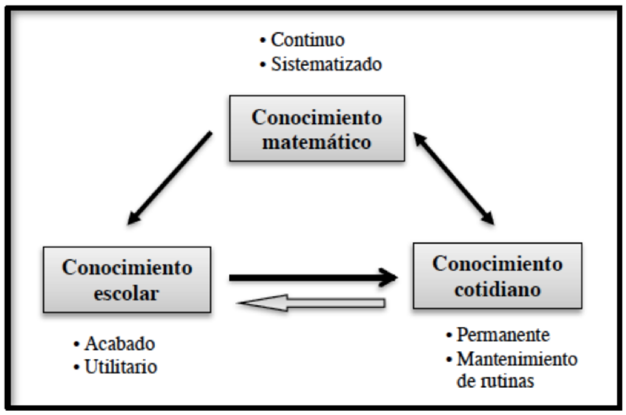


Ilustración 24 - Características de la matemática en sus diferentes escenarios (Cordero, 2016)

Cuando se incorporan estos conocimientos a la educación, la matemática escolar es concebida como el resultado de la actividad humana que se va transformando. El individuo, que pone en funcionamiento sus prácticas y saberes, utilizando conocimiento matemático en un contexto específico, no es opacado por el dME. Aquí es donde el conocimiento matemático resulta ser un instrumento para los otros dominios del conocimiento. Reconociendo la existencia de una pluralidad epistemológica del conocimiento matemático, se rompe el carácter utilitario de la matemática y surge su carácter funcional, entendiendo lo funcional de acuerdo a Soto, Gómez, Silva & Cordero (2012):

> La justificación funcional hace énfasis en el desarrollo de los usos del conocimiento matemático, dejando espacio para el papel de la construcción social del conocimiento, es decir, reconoce que la evolución del conocimiento depende de las necesidades propias de la época, de las características de las situaciones, del humano, de sus condiciones y sus limitaciones. Nos permite apreciar la importancia de lograr que los ciudadanos incorporen

> nuevo conocimiento a su vida para transformarla. Reconstruir permanentemente significados para la vida. Esto no quiere decir que todo ciudadano se convierta en científico, sino que el conocimiento sea parte del cotidiano, que logre ser revalorado, distinguido, discutido, y en su caso, empleado (pp. 1044-1045).

Con este enfoque en mente es que se busca resignificar o reconstruir el significado de la derivada en economía, con funciones conocidas por los alumnos de ingeniería comercial (funciones marginales), trabajadas desde la variación. Todo esto se hace mediante una práctica social en un contexto actual que tenga sentido para los estudiantes, como es la predicción.

De acuerdo con García (2013), investigaciones realizadas en la década de 1980 indican que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es uno de los mayores problemas en cualquier modelo educativo. Esto es evidenciado por los niveles de repetición y promoción en los cursos matemáticos.

Una de las posibles causas es que las matemáticas se enseñan de manera masiva, descontextualizada y algoritmizada, convirtiendo el aprendizaje en una serie de reglas, axiomas y teoremas. En muchos casos, esto reduce el aprendizaje a un nivel aritmético por el uso de calculadoras.

Estos elementos distan mucho de un aprendizaje significativo, que de acuerdo a Zúñiga (2007), citando a Ausubel, Novak & Hanesian (1978):

> …un aprendizaje es significativo si el estudiante tiene "una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento", y si la tarea de aprendizaje "consiste en sí de un material razonable o sensible y si puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante particular". (p. 170)

Para el caso de la derivada en economía es importante considerar la construcción del análisis marginal en economía. García et al., (2011) indican que

> las ciencias económicas tomaron prestadas metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas para desarrollar una teoría formal basada, en buena parte, en el cálculo […] estas herramientas no se podían usar de manera arbitraria puesto que a los economistas les interesaba estudiar la unidad adicional de una situación económica como el coste, el

> beneficio, el ingreso, entre otros, con lo cual el cálculo infinitesimal no era la mejor herramienta puesto que fallaba la continuidad de la función a estudiar. Ello les condujo a considerar la función objeto de estudio como una función continua. (García et al., 2011, p. 151-152)

Con todo lo expuesto, se considera importante relacionar el estudio de la derivada con elementos que los alumnos ya conocen, como son el uso de las gráficas y el cálculo de variaciones, esto reconociendo el contexto histórico de las funciones marginales, en situaciones contextualizada. De este modo se puede ayudar a que la enseñanza de la derivada sea significativa para los estudiantes.

3.5. Comunidad de conocimiento

De acuerdo a la problemática de esta investigación se considera necesario reconocer que existe una diversidad de argumentos que dependen del quehacer de las personas. Soto (2010) (citado en Méndez, 2015) indica que el conocimiento se construye cuando es empleado, cuando tiene una función particular para cada situación.

En nuestro caso, se considera que los ingenieros comerciales utilizan argumentos y justificaciones específicas de su área, como es el análisis marginal. Así, se busca dejar de lado la creencia de que el conocimiento matemático es único, estático y hegemónico para dar espacio a diversos significados, procedimientos y argumentos que reconocen a quién lo construye.

Con esta idea es que se admite la necesidad de distinguir las producciones de la población que se encuentra en cierta situación, lo que es propio de la comunidad, donde se pueden visualizar diversos argumentos fundamentados en el quehacer particular de la comunidad. Al abordar la existencia de diversos argumentos se permite una pluralidad epistemológica que está distante de la escuela y del dME, ya que este último comprende la matemática únicamente desde su utilidad, ignorando cualquier otro enfoque que pueda tener.

"Reconocemos la necesidad de entender cómo se usa el conocimiento matemático en comunidad. Esto no es trivial, ya que hoy la discusión se ha centrado sobre qué conocimiento y no por ejemplo en quién lo construye". (Méndez, Opazo, Parra, Pérez & Cordero, 2016)

El modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) es la herramienta que permite entender y explicar los usos del conocimiento en diversas comunidades. No obstante, no todo conjunto de personas compone una comunidad, por lo que se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de lo individual, de lo público y de lo cosmopolita o lo que es común a todo el mundo. Así pues, debemos reconocer la triada reciprocidad, intimidad y localidad, que proporcionarán una mirada a las producciones, es decir, a las argumentaciones que genera el colectivo. A lo que ocurre en la construcción del conocimiento matemático en el colectivo (Méndez et al., 2016).

Méndez, (2015), Cordero, Méndez, Parra, & Pérez (2014) y Méndez et al., (2016), indican que la reciprocidad puede ser visualizada con la construcción social del conocimiento. Esto es, se considera que el conocimiento matemático surge y se resignifica en distintas situaciones. De acuerdo con Parra (2014), citado en Méndez (2015): “si hay conocimiento hay una comunidad que lo construye” (p. 129). Así es como se reconoce que los ingenieros comerciales construyen conocimiento que se genera por la existencia de un compromiso mutuo.

Por otro lado, el conocimiento se genera y transforma mediante formas de ser y hacer propias de la comunidad permeado por los códigos internos del colectivo que son invisibles para el público. La intimidad hace referencia al uso de este conocimiento propio y privado, que no es público.

La localidad se ve reflejada en la construcción del conocimiento, ya que este último se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, entre otros. Es la visión de la comunidad delimitada por características explícitas de ella, que nos permiten entender sus producciones, contrario a lo cosmopolita, a lo común a todo el mundo.

Otro aspecto fundamental consiste en apreciar el saber como un producto continuo, que se manifiesta en la permanencia en la vida con la cual se modifican de forma mutua continuamente por medio de sus usos. Esto es, la institucionalización es un eje transversal con el que podemos apreciar el uso del conocimiento matemático, por medio de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia como parte de la comunidad. De este modo lo importante es la continuidad de conocimiento a través de sus usos.

Finalmente, y dado que una comunidad de conocimiento con adjetivo se distingue de otras, se requiere de momentos de identidad propios de la comunidad: legitimidad, resistencia y proyecto. Por lo que precisamente la identidad, con sus momentos, será otro eje transversal.

Méndez (2015) citando a Parra (2014) caracteriza la construcción de la identidad de acuerdo a sus 3 formas y orígenes:

- Identidad legitimadora: introducida por las instituciones dominantes de la sociedad para extender y racionalizar su dominación frente a los actores sociales.

- Identidad de resistencia: generada por aquellos actores que se encuentran en posiciones/condiciones devaluadas o estigmatizadas por la lógica de la dominación, por lo que construyen trincheras de resistencia y supervivencia basándose en principios diferentes u opuestos a los que impregnan las instituciones de la sociedad.

- Identidad de proyecto: cuando los actores sociales, basándose en los materiales culturales de que disponen, construyen una nueva identidad que redefine su posición en la sociedad y, al hacerlo, buscan transformación de toda la estructura social.

Considerando todos estos elementos en conjunto se formula un modelo que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento (Ilustración 25).

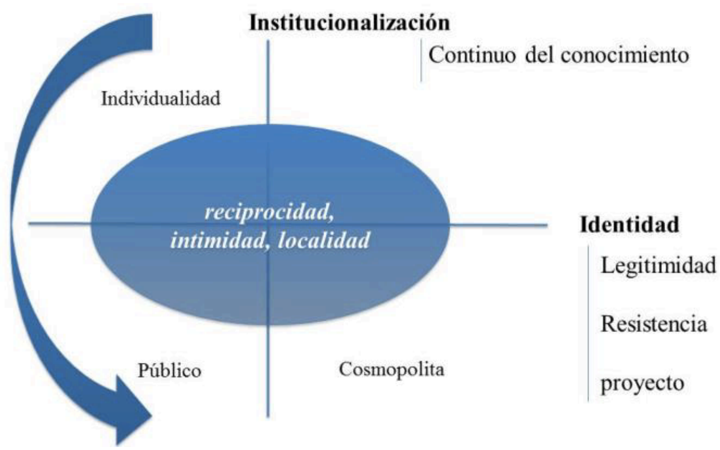


Ilustración 25 - Modelo de comunidad de conocimiento matemático (Méndez et al., 2016)

Con este modelo de CCM de Cordero, se considera que los Ingenieros Comerciales forman una Comunidad de Conocimiento. Ellos generan conocimiento que es usado por la propia comunidad. En el caso particular de la derivada y su uso para la predicción, se reconoce que, aunque la predicción es una práctica social (Cantoral et al. 2006), el análisis marginal es propio de la comunidad de Ingenieros Comerciales. De este modo, la derivada es lo Institucional que nos lleva a los modelos predictivos, pero existe el análisis marginal que es propio de esta comunidad, es parte de su identidad.

3.6. Entrevista

Con el motivo de esta investigación se realizó una entrevista semiestructurada. Esta fue consensuada con un especialista en didáctica de la matemática. Se desarrolló luego de un estudio documental de los antecedentes y se validó por un experto.

La entrevista realizada a un Ingeniero comercial, titulado el año 2011 en la Universidad Tecnológica de Chile, tiene como finalidad conocer los usos que le da un ingeniero Comercial a la derivada.

La entrevista se encuentra transcrita a continuación:

Nicolé: ¿Dónde ha trabajado como ingeniero comercial?

Entrevistado: Desde que salí del colegio estaba trabajando en un grupo que se llama grupo isi, es un grupo de holding de distintos retails (jefe de planificación). Luego en gestión financiera y presupuesto. Ver estado resultados, los números de la empresa cómo van respecto al presupuesto, entrega de balances financieros para entregar al directorio, a bancos y demases. Eso es lo que hace un jefe de planificación.

Nicolé: *¿La matemática que viste en la universidad consideras que se aplica en la práctica de tu profesión?*

Entrevistado: Mira es re poco lo que se aplica, yo igual veo números todo el día, o sea veo mucho número, pero es principalmente en Excel, entonces la parte matemática, más que desarrollarla día a día es como principalmente lo que yo vi en mí, era como más abrir la mente en cuanto a números para poder desarrollar problemas. Yo en la pega, o sea, de matemáticas veo sumas, promedios, cosas así, ¿caxai?, pero más que eso no.

Nicolé: *¿consideras que la derivada es usada por ingenieros comerciales? ¿cómo?*

Entrevistado: En mi pega nada, o sea, en mi trabajo yo no veo nada. Nada de derivada, ni optimización ni cosas así. ¿Para dónde veo yo que es más aplicado?, cuando veo a ingenieros industriales en empresas que tienen que ubicar o hacer cálculos con relación a áreas, cosas así. Ahí los veo más aplicados, pero en ingenieros comerciales, no los veo muy aplicados, por lo menos en mi área, planificación y finanzas.

Nicolé: ¿consideras que el análisis predictivo es usado por ingenieros comerciales? ¿cómo?

Entrevistado: Sí, se ve un poco en estadística, pero es mínimo, o sea, como te digo, más allá de ser promedio, media cosas así, no veo mucho más de matemática o análisis matemático con respecto a eso. Solamente, como te digo, es como lo básico de la matemática más allá que de predicciones o derivadas o cálculo, es súper básico.

Nicolé: Si te entiendo, lo básico, pero mi duda es así como con sacar datos para más adelante, si hoy día estamos o vendiendo esto el próximo mes ¿cómo va a ser?

Entrevistado: Sí, exacto así lo sacamos, pero como te digo es súper básico. Por ejemplo, como tú lo estás viendo cómo vas a ser las ventas por ejemplo para la próxima semana, nosotros sacamos estadísticas del pasado, o sea nosotros vemos la historia, sacamos promedios, vamos viendo cuales son los periodos, vemos las estacionalidades de las ventas y según eso vamos proyectando hacia adelante.

Nicolé: ¿Qué es estacionalidad de las ventas?

Entrevistado: Mira una estacionalidad… tú, por ejemplo, te lo voy a hacer súper fácil, 12 meses por ejemplo si tuvieras tu retail la estacionalidad de ventas tú vas a saber que por ejemplo en navidad hay un pick súper grande de ventas porque en navidad nosotros sabemos que es un fuerte de venta de juguetes, ¿ok? Y la otra estacionalidad de venta de juguetes por ejemplo sería el día del niño, entonces la estacionalidad de ventas sería agosto y después sería diciembre una nueva estacionalidad de ventas, ¿ok? Esos son los pick de la venta de juguetes por ejemplo para un retail ¿caxai? Entonces así nosotros lo vamos sacando. En toda empresa las ventas tienen estacionalidades dependiendo de los periodos, los autos, no sé el retail, la comida, la ropa, todo tiene estacionalidad y eso es lo que nosotros vamos viendo en cuanto a los promedios y en cuanto a darse los futuros ingresos. Todo tiene su periodo y nosotros todo eso lo vamos concluyendo con la historia, o sea, como fue en el pasado y como va a ser según eso en el futuro. Y a eso le vamos aplicando porcentajes de crecimiento, si vamos a tener inversión o no y con eso podemos tener un pick, todo eso se va viendo en cuando a la predicción.

Nicolé: ¿consideras que el análisis marginal es usado por ingenieros comerciales? ¿cómo?

Entrevistado: Casi nada, casi nada, o sea a lo más cuando queremos, más que nada es más estadístico que matemático lo que vemos, o sea vamos viendo las estacionalidades, no sé campana de Gauss para ver cómo nos vamos comportando en alguna materia, pero es totalmente estadístico y no tanto matemático.

Nicolé: ¿qué rol cumplen las gráficas en tu quehacer?

Entrevistado: *Las gráficas son para mostrar mucho más gráficamente una sábana de datos, o sea nosotros decimos que tenemos muchos datos, no sé, venta, ingreso, muchas líneas de negocios, tenemos distintas áreas entonces los gráficos hacen mucho más visible lo que nosotros vemos con números, así el gráfico es para mostrarle a personas que no conocen absolutamente nada de lo que nosotros hacemos, para que lo entienda de una forma más bonita, como una imagen ¿ok? Para eso se usa principalmente el gráfico.*

Nicolé: ¿qué tipos de gráficos usan entonces?

Entrevistado: De todo, o sea, dispersión, gráficos de barras, marcamos tendencias también con el gráfico, usamos de todo, todo tipo de gráficos y como te digo, principalmente para personas que no entienden puedan ver realmente cómo se comporta.

Nicolé: pero ¿tú no ocupas gráficas?, para comparar, para cualquier cosa.

Entrevistado: No, yo como soy usuario de los números, ocupo solamente números, o sea yo veo números, porcentajes de variación, diferencias entre un número y otro. Cuando yo muestro algo, cuando le muestro a los directores o mostrarle a los comerciales o cualquier otra área que no conocen los números ocupamos los gráficos, ahí hacemos presentaciones, no con un listado de números, sino que con un gráfico para ver cómo se comporta, eh no sé, comparación de un año versus otro, variación de una línea versus la otra, eso es lo que vamos haciendo con los gráficos.

Nicolé: ¿qué tipos de gráficos podrías reconocer de tu práctica?

Entrevistado: Cuando vemos, por ejemplo, el crecimiento de ventas podemos ocupar los gráficos lineales, entonces, por ejemplo, empieza hacer un periodo, por ejemplo, el periodo 1, no sé tiene 100 de ventas y el periodo 12 tiene 1000 y así vamos viendo cómo va la curva del crecimiento de ventas, sería como en los gráficos 5 y 6 para ver crecimientos de ventas.

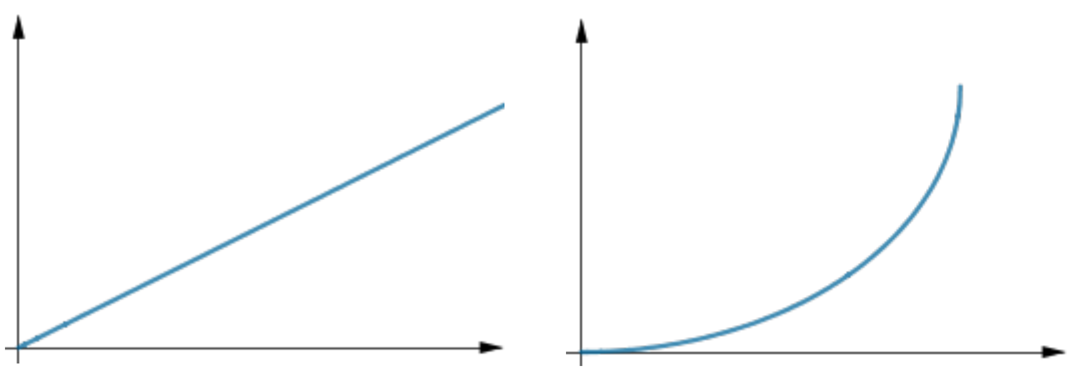


Ilustración 26 - Gráficos utilizados en práctica profesional

Tal como se desprende de la entrevista, el Ingeniero Comercial no relaciona su actuar o su pensamiento con lo visto en la matemática escolar. Mas el uso de la derivada, y el análisis marginal, se encuentra expresado con lenguaje natural en su discurso.

La derivada, y sus usos, se ve opacada por el dME. En el cotidiano del Ingeniero entrevistado, no hay funciones expresadas de forma analítica, tampoco está el cálculo de límite de cocientes incrementales y mucho menos la pendiente de la recta tangente.

Los elementos clave observados son: “predecir”, “Excel”, “tablas de datos” y “variaciones” (en particular “diferencias” y “porcentajes de variación”). De ellos se puede concluir que los Ingenieros Comerciales utilizan el análisis marginal en tablas de datos (trabajadas específicamente en programas computacionales como Excel) por medio de variaciones para predecir estados futuros.

Cada uno de estos elementos clave son los que motivan el diseño de la Situación de Aprendizaje que se explica en el capítulo siguiente.

Capítulo 4: Marco Metodológico

…resulta vital que el docente que enseña cálculo reflexione sobre la problemática que tanto sus estudiantes como él mismo enfrentan, para ser capaz de determinar posibles causas y proyectar consecuencias, y así replantear su papel, dado que dependiendo de la percepción de su propio trabajo, puede inducir al educando a ver en las matemáticas un recurso formalizado y frío que vale por sí mismo o un instrumento para resolver problemas, dejando los formalismos para los matemáticos profesionales.

José Ángel García (2013)

En el actual capítulo se presenta el enfoque, alcance y metodología de la investigación. Se sigue con la Ingeniería Didáctica. Finalmente, se presentan los elementos a considerar para el diseño de la Situación de Aprendizaje, enfatizando el tipo de Tarea Variacional y Estrategia Variacional.

4.1. Metodología

La metodología de la presente investigación tiene un enfoque cualitativo. De acuerdo con Strauss, A. & Corbin, J. (2003) este tipo de investigaciones son las que producen conclusiones o descubrimientos a los cuales “no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación” (Strauss & Corbin, 2003, p. 19-20) y aunque alguno de los datos obtenidos puede cuantificarse, no es el fuerte del análisis.

Más aún, Strauss & Corbin (2003) indican:

> Al hablar sobre análisis cualitativo, nos referimos, no a la cuantificación de los datos cualitativos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico. Los datos pueden consistir en entrevistas y observaciones pero también pueden incluir

> documentos, películas o cintas de video, y aun datos que se hayan cuantificado con otros propósitos tales como los del censo (p.19).

Complementando esto, la investigación posee un alcance exploratorio (Hernández, Fernández & Baptista, 1998). Este tipo de estudio "se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes" (Hernández, Fernández & Baptista, 1998, p.100).

Esto último concuerda con el tema de estudio presentado, ya que dentro de la revisión bibliográfica no se encontraron estudios que presenten una Situación de Aprendizaje basadas en el Pylvar con el uso de tablas para trabajar el concepto de derivada en ingenieros comerciales.

Además, la investigación cualitativa exploratoria se realizará con un estudio de caso utilizando la metodología de la Ingeniería Didáctica descrita en el siguiente apartado.

4.1.1. Virtualidad

La actual situación de pandemia que aqueja al mundo, y las restricciones de reuniones sociales causadas por la propagación del COVID 19, trajo consigo una serie de restricciones que afecta la modalidad en la educación. Las clases que otrora fueron presenciales han sido reemplazadas por clases virtuales. (Picón, González & Paredes, 2020)

Dado lo anterior, la Situación de Aprendizaje se realizó de forma virtual con el programa Zoom. A través de él se puede trabajar con los estudiantes de forma conjunta, o se pueden separar para que trabajen de forma individual, y en caso de ser necesario pueden consultar, de forma personal, cualquier inquietud al profesor.

De este modo, la Situación de Aprendizaje se lleva a cabo de forma virtual por 2 horas con 5 estudiantes de ingeniería comercial. A estos estudiantes se les envió un archivo Excel vía correo electrónico, en el que debían anotar todas sus respuestas de forma individual, y al finalizar la actividad se les solicitó que envíen por correo electrónico sus respuestas. Todo esto con previo consentimiento informado de parte de los estudiantes.

4.2. Ingeniería Didáctica

La noción de ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los ochenta para describir una manera de abordar el trabajo didáctico semejante al trabajo del ingeniero. Esta comparación se basa en el supuesto de que para realizar un proyecto el ingeniero se apoya en los conocimientos científicos de su dominio. Acepta someterse a un control científico, pero al mismo tiempo, está obligado a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede o no quiere tomar a su cargo todavía (Artigue, 1995).

La ingeniería didáctica como metodología de investigación presenta entre sus principales características, que es una investigación basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Así también, otra característica importante es que la validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y a posteriori sobre las recopilaciones que se producen en la implementación de las tareas (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Para el desarrollo de este tipo de investigación se deben tener en cuenta las cuatro fases que esta presenta.

1. Análisis preliminar

Fase en la que se busca profundizar sobre los conocimientos teóricos didácticos generales y específicos del campo de estudio.

Aquí, se realiza un estudio de la epistemología de los contenidos contemplados en la enseñanza, de la enseñanza tradicional y sus efectos, de las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, de las condiciones bajo las cuales se presentará la situación didáctica efectiva y de los objetivos de la investigación, entre otros (Artigue, 1995; Campeón, Aldana & Villa, 2018).

De acuerdo con Artigue (1995), el análisis preliminar considera tres dimensiones fundamentales dentro de la ingeniería didáctica.

a) La dimensión didáctica toca todo aquello que tiene que ver con la enseñanza y aprendizaje del contenido.

b) La dimensión cognitiva toma en cuenta el componente cognitivo de la población que va a ser sometida a la Ingeniería Didáctica.

c) La dimensión epistemológica toma en cuenta la evolución histórica de los conceptos matemáticos, diferencias entre el saber científico y el saber enseñado y los obstáculos epistemológicos: cuáles pueden evitarse, cuáles no deben evitarse y cómo superarlos.

En la presente investigación, la primera fase de la ingeniería didáctica se encuentra presente en la problematización de la derivada (Capítulo II, sección 2.2). En dicho apartado se realiza un estudio de la derivada desde las distintas dimensiones.

2. Concepción y análisis a priori

Es la fase en donde el diseñador de la situación didáctica, antes de la clase, explicita supuestos referidos a los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que desea producir, los probables y los seguros.

Este análisis comprende una parte descriptiva y una predictiva. Además, en esta etapa el diseñador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema. Las variables macro-didácticas o globales (concernientes a la organización global de la ingeniería) y las variables micro-didácticas o locales (concernientes a la organización local de la ingeniería, esto es, la organización de una secuencia o fase). Ambas variables, aunque se presenten separadas, no son independientes entre ellas (Artigue, 1995; Campeón, Aldana & Villa, 2018).

En la presente investigación se definen las siguientes variables:

• La variable macro-didáctica es la concerniente a los usos de la derivada en ingeniería comercial, dado que en base a esta noción se desarrollan todos los momentos de la Situación de Aprendizaje.

• Las variables micro-didácticas serán las tareas variacionales, están son: Análisis de datos en tablas numéricas, Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, así como las estrategias variacionales: Comparación, Seriación, Estimación y Predicción.

Cada una de estas variables micro-didácticas fueron consideradas para la conformación de los momentos en la Secuencia de Aprendizaje.

3. Experimentación

Es la fase de la ingeniería didáctica donde el investigador tiene contacto directo con una cierta población de estudiantes objeto de la investigación. Es el momento en el cual se ejecuta lo planificado en la Ingeniería.

Para el desarrollo de esta fase, el investigador debe explicitar los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, asimismo debe establecer un contrato didáctico y finalmente aplicar los instrumentos de investigación diseñados de acuerdo con el problema de investigación y recogiendo los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori (Artigue, 1995; Campeón, Aldana & Villa, 2018).

En la presente investigación, la fase de experimentación es explicada en el Capitulo IV, sección 4.1.1, dado que a nivel mundial se está enfrentando una pandemia que ha modificado las condiciones de trabajo en aula.

4. Análisis a posteriori y validación

A la fase de experimentación sigue la de análisis a posteriori que se basa en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación. Esto incluye las observaciones de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con frecuencia con otros obtenidos mediante cuestionarios o entrevistas que pueden ser individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso.

Luego, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

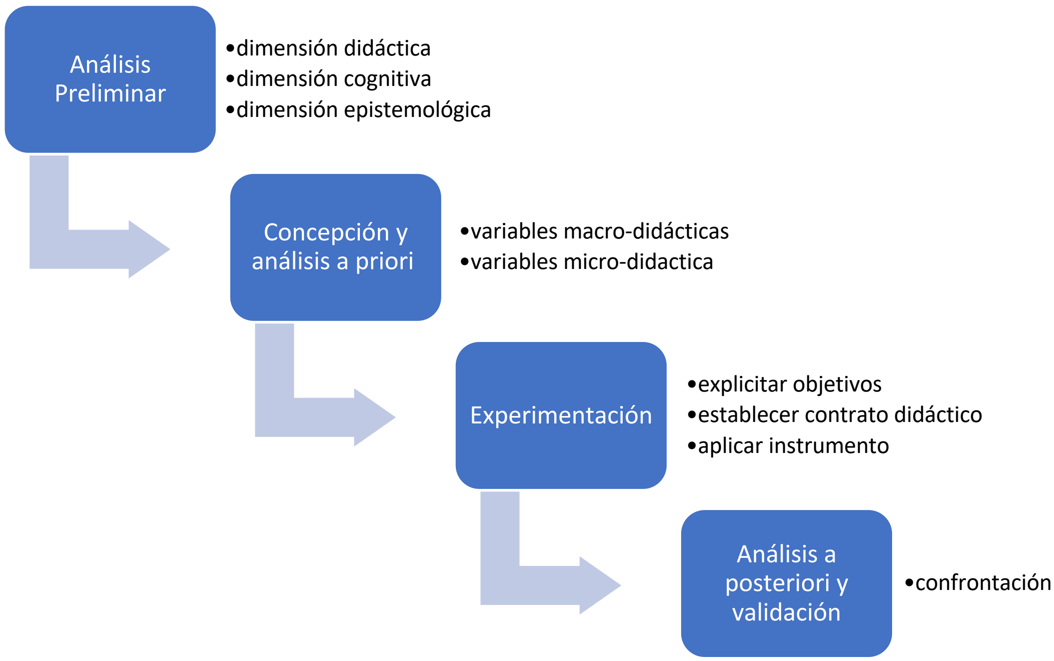


Ilustración 27 - Fases de la Ingeniería didáctica

4.3. La Situación de Aprendizaje

Tal como indica González (1999) citado en Caballero (2012):

> la derivada no puede reducirse a su definición ni a sus aplicaciones, tampoco puede reducirse a la primera derivada, ni a la segunda derivada, ni a la tercera, existe un aspecto que caracteriza el paso entre ellas, "algo" que se conserva, ese algo es la variación y la predicción (p. 4).

La derivada es más que solo realizar cálculos algebraicos. Luego, al acoger a los ingenieros comerciales como una comunidad de conocimiento que utiliza argumentos y justificaciones específicas de su área es que se propone una Situación de Aprendizaje que resignifique la derivada, específicamente el uso de esta para la predicción.

Para la construcción de la Situación de Aprendizaje se consideran distintas tareas variaciones, como por ejemplo análisis de datos en tablas numéricas, análisis gráfico con la variación como punto de referencia entre otras, con la finalidad de promover diversas estrategias variaciones para incentivar el pensamiento variacional.

La situación no pretende enseñar la derivada, sino que resignificar la misma por medio de una actividad que es cotidiana, una práctica social: la predicción. De este modo, se entiende que los estudiantes de ingeniería comercial y los ingenieros comerciales se encuentran en una comunidad de conocimiento que usa este mismo conocimiento de otra forma, distinta al dME. Con este mismo foco es que la Situación de Aprendizaje es desarrollada en Excel, herramienta utilizada de forma transversal en esta Comunidad de Conocimiento.

La situación está conformada por tres Momentos detalladas en la siguiente tabla.

Momentos	**Nº Tareas Variacionales**	**Clasificación Tarea Variacional**
Primer Momento	4 tareas variacionales	Análisis gráfico con la variación como punto de referencia, con seriación.
Segundo Momento	5 tareas variacionales	Análisis de datos en tablas numéricas, con seriación Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia.
Tercer Momento	2 tareas variacionales	Análisis de datos en tablas numéricas, con estimación y predicción

Tabla 4 - Conformación de la Situación de Aprendizaje

Con las tareas variacionales del primer momento se busca que los estudiantes utilicen la derivada y sus criterios por medio de un análisis gráfico. De este modo se comienza identificando las variaciones positivas y negativas de un gráfico, para luego relacionar estas variaciones con los criterios de la derivada y finalmente analizar la derivada de la función que se entrega.

En el segundo momento, las tareas variacionales son la conexión entre las tareas del primer momento y la predicción. Con estas tareas variacionales se busca que el estudiante analice una función dada en forma discreta, como valores de una tabla. Para ello debe calcular las variaciones de la función y su signo, y relacionarlo con los criterios de la derivada. Finalmente, el estudiante debe modelar ciertos datos o períodos de la función, para determinar el comportamiento de los mismos.

Las tareas variacionales del tercer momento conducen a la predicción. En este tercer momento los estudiantes deben predecir (y estimar) estados futuros de una función dada a la que le falta una cierta cantidad de datos, utilizando los cálculos realizados en el segundo momento (Análisis Marginal).

Con estos tres momentos se busca conducir al estudiante desde una actividad usual de clases imperada por el dME hasta una práctica social: la predicción.

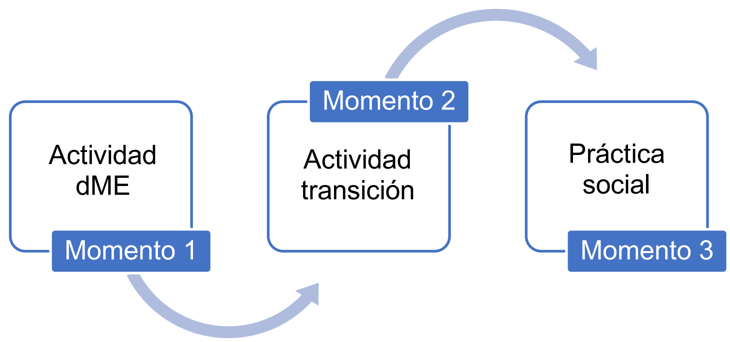


Ilustración 28 - Esquema Situación de Aprendizaje

Capítulo 5: Diseño y Análisis

No se trata de enseñar la derivada porque es un concepto matemático interesante sino porque resuelve muchos problemas de la variación. Bajo estas consideraciones, el contenido matemático no se ciñe necesariamente a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, más bien se trata de una introducción intuitiva e informal que tiene como punto de partida las necesidades de la práctica.

Crisólogo Dolores (2000)

En este capítulo se explica y presenta la Situación de Aprendizaje, para luego exponer el análisis a priori de la misma, junto con los datos de la experimentación. En este paso también se detalla la población a la cual se le aplicó la actividad, para finalizar con el análisis a posteriori y la confrontación de ambos análisis, el a priori y el a posteriori .

Es importante mencionar que el análisis preliminar de esta investigación está detallado en los capítulos II y III correspondientes a los Antecedentes y el Marco teórico. De ellos se destacan los elementos constitutivos del diseño que son: el pensamiento y lenguaje variacional, y el uso de la derivada.

5.1. Diseño de Situación de Aprendizaje

La secuencia de aprendizaje está dividida en tres momentos, detallados a continuación, con el fin de hacer el traspaso entre una tarea usual de clases y una aplicación cotidiana de ingeniería comercial. Esta consiste en la predicción de estados futuros dada una tabla de datos. Los tres momentos son contextualizados en las redes sociales, en particular Instagram, ya que es una red social que los estudiantes conocen y utilizan (Hanna, Ocampo, Janna, Mena & Torreglosa, 2020).

El primer momento consiste en la presentación de un gráfico en el contexto de las redes sociales. En ella los estudiantes deben identificar los intervalos o periodos de crecimiento y decrecimiento de la curva, como así también los períodos en que no hay crecimiento ni pérdida de seguidores. Relacionando esto con los criterios de la derivada en el gráfico. Además de lograr identificar cuándo esta variación es máxima o mínima.

El objetivo de este momento es que el alumno realice un análisis gráfico del comportamiento de un fenómeno y lo relacione con los criterios de la derivada (Ilustración 29). Es decir, que exprese que en los periodos en que la gráfica es creciente la derivada es positiva y, de igual forma, que los periodos en que la gráfica es decreciente, la derivada es negativa.

PRUEBA CRECIENTE/DECRECIENTE
(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.
(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Ilustración 29 - Criterio de la primera derivada en una función monótona (Stewart, 2008, p.287)

Además, se espera que el estudiante relacione los máximos, mínimos o cuándo la gráfica es constante, con la información que entrega la derivada y sus criterios, tal como se presenta en las siguientes ilustraciones del texto de estudio Stewart:

$\boxed{4}$ **TEOREMA DE FERMAT** Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Ilustración 30 - Teorema de Fermat (Stewart, 2008, p.273)

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ilustración 31 - Derivada de una función constante (Stewart, 2008, p.173)

La tarea variacional es el **análisis gráfico con la variación como punto de referencia**, basado en la seriación. En esta se pretende que el estudiante analice gráficamente la función “Seguidores de Instagram” semana a semana y relacione los cambios que tiene con los criterios de la derivada. De este modo, el estudiante relaciona el análisis gráfico con la derivada, esta última desde la mirada del dME.

El segundo momento consiste en la presentación de una tabla con los datos en el mismo contexto de las redes sociales. En él los estudiantes deben indicar las variaciones semanales y mensuales de seguidores, relacionar estas variaciones existentes con la derivada de una función implícita para finalmente graficar algunos datos clave y decidir el comportamiento que siguen.

El objetivo de este momento es que el estudiante comience a relacionar conceptos como variación y derivada, con valores dados en tabla o con funciones discretas. Más aún, que relacione datos de una tabla con una función que modele de forma aproximada estos datos.

La primera tarea variacional de este momento es el **análisis de datos en tablas numéricas**, con seriación. En esta el estudiante debe analizar las variaciones de "Seguidores de Instagram", ahora vistos en una tabla, para relacionarlos con los criterios de la derivada. La segunda tarea variacional de este momento es la **construcción de gráficas con la variación como punto de referencia**. Aquí el estudiante debe realizar un gráfico con algunos datos seleccionados y determinar el comportamiento que tienen estos.

El tercer momento, siguiendo en el contexto de las redes sociales, consiste en la presentación de una tabla de datos con los Seguidores de Instagram del año siguiente, sin incluir los valores del último mes. La finalidad de este último momento es estimar y predecir los siguientes Seguidores de Instagram. Esto porque los seguidores entre años consecutivos se comportan de forma similar, de acuerdo a lo que se explica en el ejercicio.

La finalidad de este momento es estimar y predecir por medio del uso de variaciones conocidas de una función, estados futuros de la misma. Es importante recalcar que esto es otra forma de ver el análisis marginal, aplicado a una tabla de valores, y no solo con la derivada como una fórmula, que es lo presentado en el dME (expresado en los textos de estudio).

La tarea variacional del tercer momento es el **análisis de datos en tablas numéricas**, con estimación y predicción. En esta el estudiante debe estimar un estado futuro y analizar las variaciones de una tabla de valores para aplicarlas a estados nuevos y así determinar estados futuros.

El objetivo de los tres momentos es comenzar con la familiarización del contexto en matemáticas por lo que los alumnos deben asociar el análisis gráfico del comportamiento de un fenómeno con la derivada, y relacionarlo con el contexto dado. De este modo, el enfoque del primer momento está puesto en la conexión entre la derivada del dME y análisis gráfico, ambos contextos conocidos por los alumnos, pero que tienden a pensarlos de modo separado, sin relación para resolver los problemas (Sánchez-Matamoros et al., 2008).

Se sigue con un análisis variacional de datos en una tabla numérica para relacionarlo con la derivada. Esto es, analizando el crecimiento o decrecimiento de los datos y relacionarlo con el signo de la derivada para luego modelar una cierta cantidad de datos relevantes en el problema. De este modo, el enfoque de este segundo momento es hacer la transición entre un análisis gráfico con la definición y uso usual de la derivada, y la resignificación de esta.

Finalmente, se utiliza la idea del análisis marginal y la predicción de estados futuros por medio de la derivada como la variación en un punto aplicado a una tabla de valores, para resignificar la derivada por medio de una actividad realizada por ingenieros comerciales.

De este modo se tiene

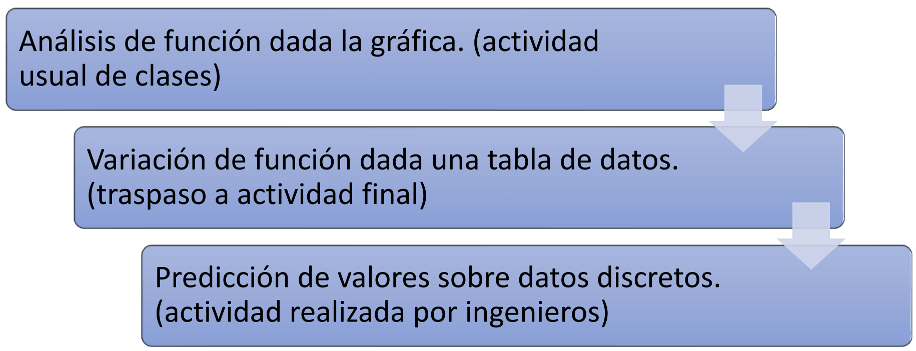


Ilustración 32 - Momentos de actividad

A continuación, se presenta el diseño “Seguidores de Instagram”

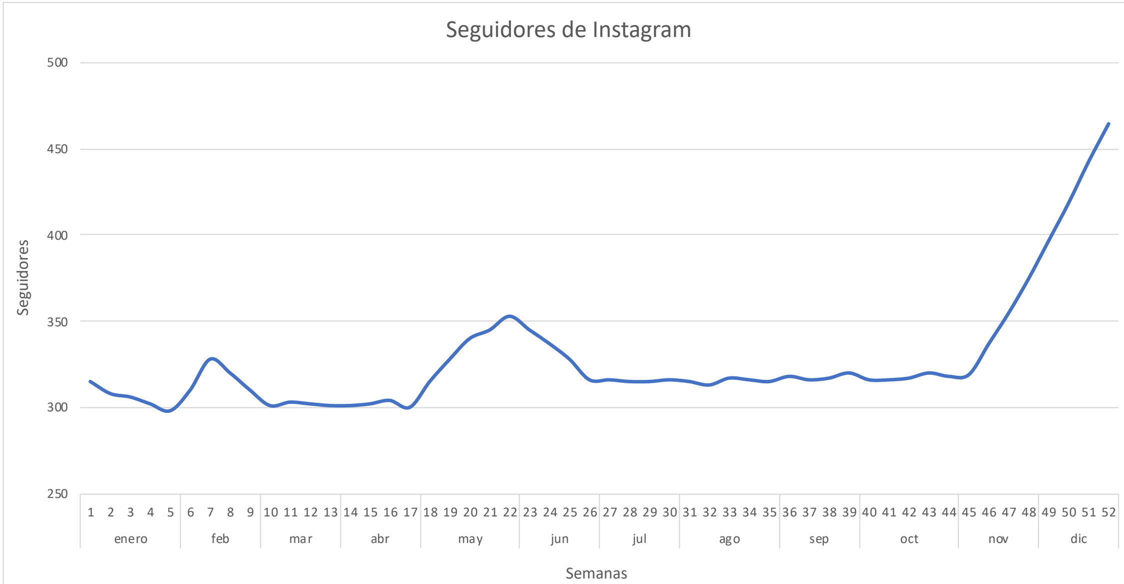
Seguidores de Instagram

<u>Actividad 1</u>

Para un trabajo se le pide analizar los seguidores de una página de Instagram que realiza ventas de productos de belleza para mujeres.

Los seguidores son muy importantes pues, de acuerdo a la tienda, aproximadamente un 30% de ellos realiza compras al mes.

Se han registrado los seguidores de la página semana a semana todo el año 2019 y sus datos se presentan en el siguiente gráfico.



a) Indique los períodos en que los seguidores de Instagram aumentan, disminuyen o son constantes.

b) Relacione lo anterior con los criterios de la derivada.

c) ¿Qué meses llega la derivada a su máximo? ¿a su mínimo?

d) ¿En qué semanas la derivada es igual a 0? Y ¿Qué significa que esta derivada sea igual a 0?

Actividad 2

Si ahora tiene los seguidores exactos del 2019 de cada semana, que se presentan a continuación:

2019	semana	seguidores
dic	52	316
enero	1	315
	2	308
	3	306
	4	302
	5	298
feb	6	310
	7	328
	8	320
	9	310
mar	10	301
	11	303
	12	302
	13	301
abr	14	301
	15	302
	16	304
	17	300
may	18	315
	19	328
	20	340
	21	345
	22	353
jun	23	345
	24	337
	25	328
	26	316

jul	27	316
	28	315
	29	315
	30	316
ago	31	315
	32	313
	33	317
	34	316
	35	315
sep	36	318
	37	316
	38	317
	39	320
oct	40	316
	41	316
	42	317
	43	320
	44	318
nov	45	319
	46	337
	47	355
	48	375
dic	49	397
	50	419
	51	443
	52	465
	1	462

a) Indique las variaciones semanales y mensuales de seguidores.

b) ¿Qué meses hay más variación de seguidores? ¿Cuál es la variación?

c) ¿Cómo son los cambios mes a mes?

i) ¿Cómo se relacionan estos cambios con la derivada?

d) En el período mayo-junio

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

e) En el período noviembre-diciembre

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

Actividad 3

A continuación, se presentan los datos de los seguidores de la página de Instagram en los últimos meses (del año 2020). Usted debe considerar que el comportamiento de los seguidores es similar año a año.

2020	semana	seguidores
enero	1	462
	2	455
	3	453
	4	449
	5	450
feb	6	462
	7	475
	8	469
	9	457
mar	10	448
	11	450
	12	449
	13	448
abr	14	448
	15	449
	16	451
	17	447
	18	462
may	19	478
	20	489
	21	495
	22	502
jun	23	499
	24	487
	25	476
	26	463

jul	27	449
	28	447
	29	445
	30	446
	31	443
ago	32	445
	33	441
	34	443
	35	444
sep	36	445
	37	442
	38	441
	39	443
oct	40	442
	41	442
	42	442
	43	445
	44	452
nov	45	466
	46	474
	47	489
	48	507
dic	49	
	50	
	51	
	52	
	53	

a) ¿Cómo se deberían comportar la cantidad de seguidores en diciembre?

b) Estime la cantidad de seguidores de diciembre. Indique: ¿Qué hizo?, ¿Cómo lo hizo?, ¿Qué relación tiene con la derivada?

5.2. Análisis a Priori

En esta sección se expone el Análisis a priori de la investigación. Aquí se presentan las respuestas esperadas, estrategias esperadas y dificultades que pueda tener el estudiante en el desarrollo de cada momento.

<u>Actividad 1</u>

Respuestas esperadas:

a) Entre las semanas 1 y 5 hay una disminución de seguidores, en la semana 5 no hay aumento ni disminución de seguidores, entre las semanas 5 y 7 hay un aumento de seguidores, en la semana 7 no hay aumento ni disminución de seguidores, entre las semanas 7 y 10 hay una disminución de seguidores, entre las semanas 10 y 17 se mantienen relativamente estables los seguidores, entre las semanas 17 y 22 hay un aumento de seguidores, en la semana 22 no hay aumento ni disminución de seguidores, entre las semanas 22 y 26 hay una disminución de seguidores, entre las semanas 26 y 45 los seguidores se mantienen relativamente estables y finalmente entre las semanas 45 y 52 se produce un aumento de seguidores.

b) Cada tramo de aumento en la cantidad de seguidores indica que la derivada de la función “seguidores de Instagram” es positiva. De igual modo en cada intervalo de pérdida de seguidores, de decrecimiento, nos indica que la derivada de la función dada es negativa. Finalmente, cada intervalo en que los seguidores se mantienen estables o no existe ni aumento ni disminución de estos, la derivada es igual a 0.

Por lo tanto, para la derivada de la función “seguidores de Instagram” se tiene

Semana	**Signo de la derivada**
1 - 5	Derivada negativa
5	Derivada igual a 0
5 - 7	Derivada positiva
7	Derivada igual a 0
7 - 10	Derivada negativa
10 - 17	Derivada igual a 0
17 - 22	Derivada positiva
22	Derivada igual a 0

22 - 26	Derivada negativa
26 - 45	Derivada igual a 0
45 - 52	Derivada positiva

Tabla 5 - Respuesta esperada pregunta 1b) Actividad 1

c) La derivada llegará a su máximo entre las semanas 45-52 ya que hay aproximadamente un aumento de 150 seguidores, lo que es aproximadamente un aumento de 21 seguidores semanales. Mientras tanto, en las semanas 17-22 se produce un aumento de 50 seguidores, lo que es aproximadamente un aumento de 10 seguidores semanales.

La derivada llegará a su mínimo entre las semanas 7-10 ya que hay aproximadamente una disminución de 30 seguidores, lo que es aproximadamente una disminución de 10 seguidores semanales. Mientras que en las semanas 22-26 se produce una disminución de 30 seguidores, lo que es aproximadamente una disminución de 7,5 seguidores semanales.

d) La derivada será igual a 0 en las semanas 5, 7, 10-17, 22, 26-45. Estos son los periodos en que no hay un cambio de seguidores, o cuando se pasa de un aumento de seguidores a una disminución de seguidores o al revés. Lo que nos indica que hay un máximo de seguidores o un mínimo de seguidores de forma local.

Estrategias:

El alumno puede analizar la altura de la función para cada valor de x, y comparar dos estados consecutivos, identificando si en la función se produjo un aumento o una disminución de la altura.

Otra forma de proceder es unir las posibles coordenadas de la función dada, formando una poligonal. De este modo para cada segmento de recta, la pendiente positiva indica crecimiento y la pendiente negativa indica decrecimiento, o el cambio de crecimiento (de creciente a decreciente o viceversa) indica pendiente igual a cero, igual que en los segmentos de no crecimiento (ni decrecimiento).

Por otro lado, se tiene comparación entre pendientes o entre razones de cambio para determinar la derivada máxima y mínima.

Así, se tiene el uso de la estrategia de Comparación para establecer la derivada máxima y mínima, y Seriación para analizar las variaciones consecutivas de la función dada su gráfica.

Dificultades

Una de las primeras dificultades que puede tener el alumno es determinar hasta qué punto existe crecimiento o decrecimiento en la función, ya que los valores no están dados de forma explícita en el gráfico. Luego, al intentar relacionar el crecimiento y decrecimiento de la función con los criterios de la derivada, podría no recordar estos últimos. Por otro lado, una posible dificultad está en relacionar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica con la derivada, ya que los alumnos piensan en el gráfico y en la derivada (algebraica) de modos separados y no relacionados (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008). Finalmente, es posible que los alumnos tengan dificultades al determinar cuándo la derivada es máxima o mínima, pues no existen puntos de referencia explícitos y es usual que los alumnos piensen en la derivada y en el gráfico de modos separados.

Actividad 2

Respuestas esperadas:

a)

2019	semana	seguidores	semanal	mensual
dic	52	316		
enero	1	315	-1	-18
	2	308	-7	
	3	306	-2	
	4	302	-4	
	5	298	-4	
feb	6	310	12	12
	7	328	18	
	8	320	-8	
	9	310	-10	
mar	10	301	-9	-9
	11	303	2	
	12	302	-1	
	13	301	-1	
abr	14	301	0	-1
	15	302	1	
	16	304	2	
	17	300	-4	

may	18	315	15	53
	19	328	13	
	20	340	12	
	21	345	5	
	22	353	8	
jun	23	345	-8	-37
	24	337	-8	
	25	328	-9	
	26	316	-12	
jul	27	316	0	0
	28	315	-1	
	29	315	0	
	30	316	1	
ago	31	315	-1	-1
	32	313	-2	
	33	317	4	
	34	316	-1	
	35	315	-1	
sep	36	318	3	5
	37	316	-2	
	38	317	1	
	39	320	3	
oct	40	316	-4	-2
	41	316	0	
	42	317	1	
	43	320	3	
	44	318	-2	
nov	45	319	1	57
	46	337	18	
	47	355	18	
	48	375	20	
dic	49	397	22	90
	50	419	22	
	51	443	24	
	52	465	22	
	1	462	-3	

Tabla 6 - Respuesta esperada pregunta 2a) Actividad 2.

b) Los meses de mayor variación son diciembre, con un aumento de 90 seguidores, y noviembre con un aumento de 57 seguidores. Por su parte, junio tiene una disminución de 37 seguidores.

c) Los cambios mes a mes no son constantes, no se identifica un patrón, hay meses de aumento de seguidores, como en febrero, mayo, septiembre, noviembre y diciembre. Y meses de disminución de seguidores, como enero, marzo, abril, junio, agosto y octubre.

c.i) Estas variaciones indican el signo de la derivada, aumentos con derivadas positivas y disminuciones con derivadas negativas, y el número cuán pronunciada es pendiente de la recta tangente a la curva o que tan alto o bajo el valor de la derivada.

d.i) y d.ii)

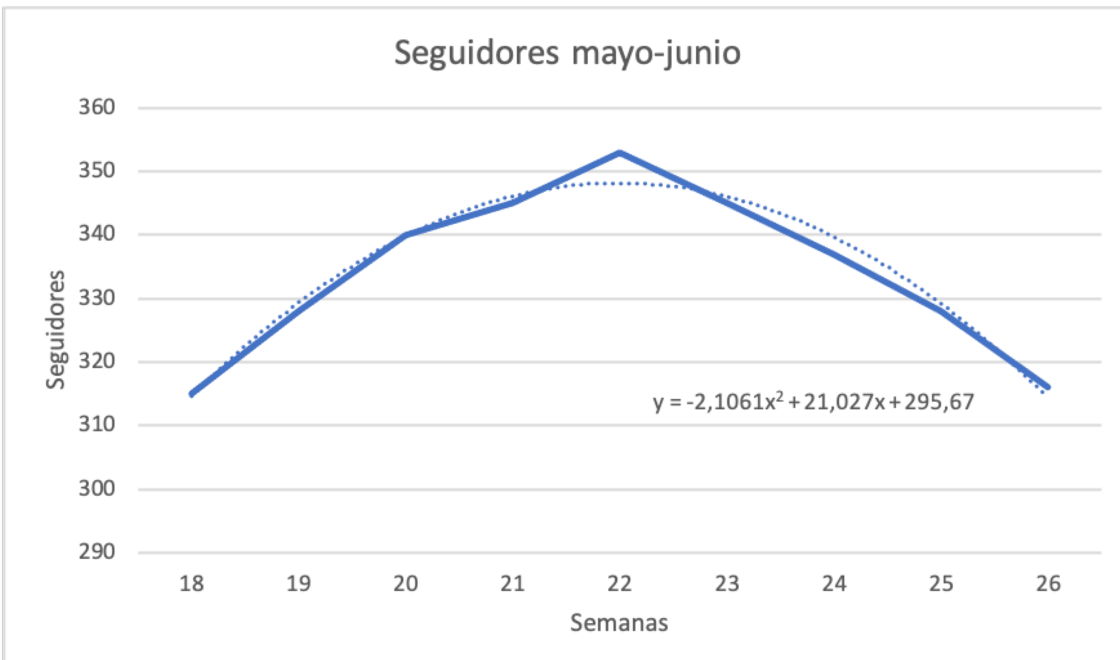


Ilustración 33 - Gráfico respuesta esperada pregunta 2d) Actividad 2.

d.iii) En los meses mayo-junio, los seguidores tienen un comportamiento cuadrático. Siguiendo la curva $y = -2{,}1061x^2 + 21{,}027x + 295{,}67$.

e.i) y e.ii)

Los gráficos con líneas de tendencia pueden ser los dos presentes a continuación

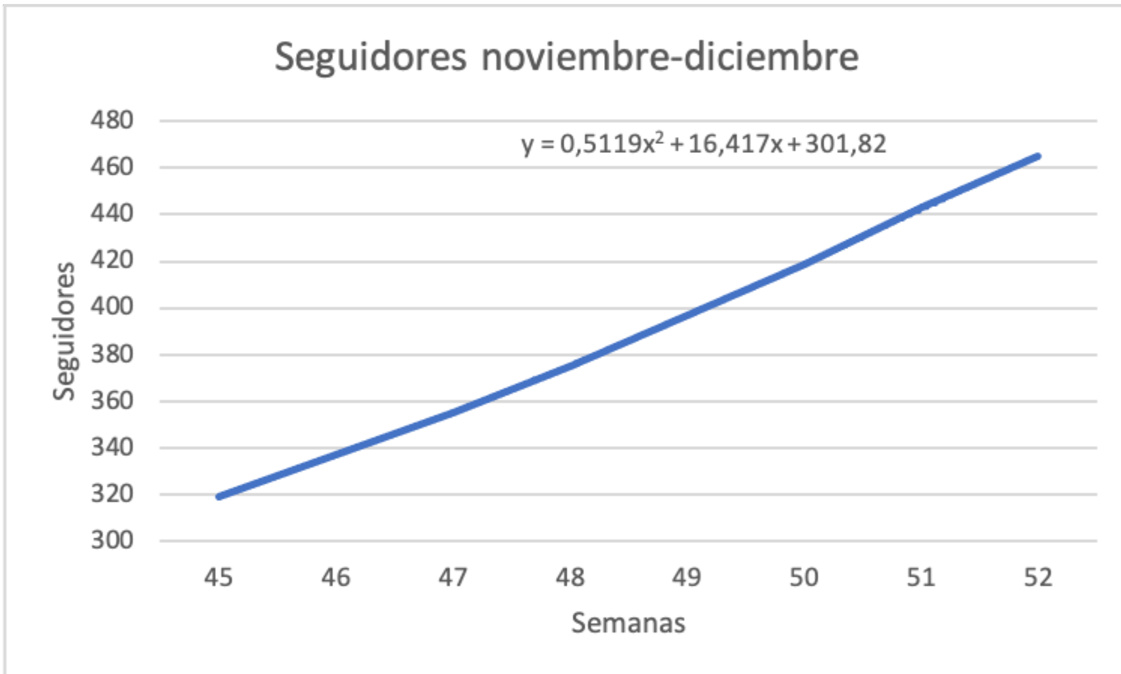


Ilustración 34 - Gráfico respuesta esperada pregunta 2e) Actividad 2, opción 1.

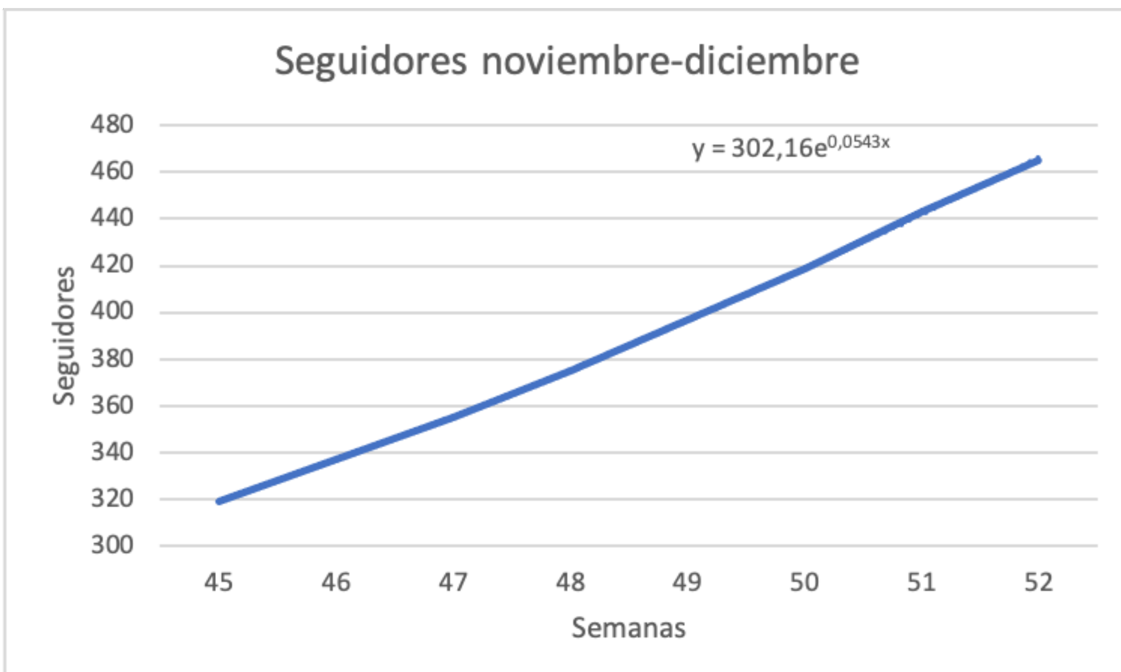


Ilustración 35 - Gráfico respuesta esperada pregunta 2e) Actividad 2, opción 2.

e.iii) En los meses noviembre-diciembre, los seguidores tienen un comportamiento cuadrático, siguiendo la curva $y = 0{,}5119x^2 + 16{,}417x + 301{,}82$ (o pueden tener un comportamiento exponencial, siguiendo la curva $y = 302{,}16\, e^{0{,}0543x}$)

Estrategias:

El alumno puede realizar la resta entre dos estados consecutivos de la tabla, identificando si esta diferencia es positiva o negativa, esto sería identificar si en la función se produjo un aumento o una disminución de seguidores de Instagram. De este modo puede relacionar las variaciones con el signo de la derivada y determinar si existe un patrón en los datos. Por último, el alumno debe crear un gráfico e insertar la línea de tendencia que mejor se aproxime; para ello, debe comparar entre las diferentes líneas de tendencia y seleccionar la que se asemeje mejor a los datos.

Así, se tiene el uso de la estrategia de Comparación, entre líneas de tendencia, y Seriación para analizar las variaciones consecutivas de la función dada una tabla de valores.

Dificultades

Una dificultad que puede tener el alumno es no saber determinar si las variaciones calculadas son positivas o negativas. Esto sería solo restar dos estados consecutivos, lo que puede causar confusión con lo realizado en la actividad 1. Por otro lado, una posible dificultad está en relacionar los cálculos hechos con la derivada, ya que los alumnos suelen pensar en la derivada de forma algebraica, por lo que analizar las variaciones como restas en una tabla es algo nuevo. Finalmente, una dificultad que se puede tener es al determinar la línea de tendencia e intentar determinar la que mejor aproxime los datos, esto último por dificultades con el programa Excel.

<u>Actividad 3</u>

Respuestas esperadas:

a) Como los seguidores se comportan de forma similar año a año, este año se deberían comportar siguiendo el modelo cuadrático $y = 0{,}5119x^2 + 16{,}417x + 301{,}82$ (o el modelo exponencial $y = 302{,}16\, e^{0{,}0543x}$). De este modo deberían aumentar significativamente los seguidores.

Otra forma de ver el comportamiento de los seguidores de diciembre del 2020, es al ver el comportamiento de los seguidores del año anterior que tiene un crecimiento pronunciado.

b) El máximo de seguidores para diciembre será de 597. Esto, considerando las variaciones del año anterior aplicadas a los nuevos valores.

Lo que se hizo fue considerar la variación de diciembre del año 2019, que fue de 90 seguidores, y aplicarlo a la última semana de noviembre del año 2020, lo que nos lleva a 507 + 90 = 597 seguidores.

Esta última aplicación es el uso de la derivada para predecir estados futuros de una función.

Otra forma de predecir los seguidores de diciembre del 2020 es teniendo el modelo de comportamiento de la función en diciembre del 2019. Podría utilizar el análisis marginal usual para predecir el estado de la función en diciembre del 2020.

Estrategias:

El alumno puede proponer el mismo comportamiento del modelo determinado en la actividad anterior para el comportamiento de los nuevos datos como las funciones $y = 0{,}5119x^2 + 16{,}417x + 301{,}82$ o $y = 302{,}16\, e^{0{,}0543x}$, o puede suponer que, como los datos de la actividad anterior con crecientes, los nuevos datos también lo serán.

Por otro lado, para estimar la cantidad de seguidores del mes de diciembre del 2020, puede sumar la variación de seguidores calculada en la actividad anterior y aplicarla a los nuevos datos, o puede realizar la derivada de la función modelo, evaluarla en las distintas semanas del mes diciembre e ir aplicando estos valores semana a semana en diciembre del 2020.

Así, se tiene el uso de la estrategia de Estimación al momento de determinar el comportamiento de los seguidores de Instagram, y el uso de la estrategia de Predicción para postular un valor futuro de seguidores de Instagram.

Dificultades

Una posible dificultad es no saber qué datos considerar, si las variaciones semana a semana o la variación mensual. En caso de considerar las variaciones semana a semana, puede haber confusión al tener que considerar estas variaciones una sola vez, o tantas veces como semanas hay en diciembre.

En caso de utilizar la función modelo de la actividad anterior, podría haber confusión en qué punto evaluar, en la semana 50 por la semana del año o en la semana 6 por los datos considerados.

Además, puede haber confusión al querer calcular el número exacto de seguidores y no un aproximado de estos.

5.3. Experimentación

La actividad se realizó con 5 alumnos de ingeniería comercial de forma voluntaria y virtual, específicamente por medio de zoom, aplicación que los alumnos han utilizado en sus diversas clases por lo que la conocen y les es familiar.

Es importante destacar que los cinco estudiantes ya habían rendido los cursos de cálculo donde se ve y trabaja la derivada, y también habían rendido al menos un curso donde se trabaja con Excel, por lo que conocen los comandos que se utilizarán a lo largo de toda la Situación de Aprendizaje.

El tiempo estimado para la realización de la actividad fue de 2 horas aproximadamente, tiempo en el que se aplicó la situación de aprendizaje por completo.

Al comienzo de la sesión se les explicó a los estudiantes que podían expresar todas sus dudas y comentarios, ya que la actividad tenía fines investigativos. Además, se les expresó la metodología que se emplearía a lo largo de la actividad que consistía en separar a los alumnos en sesiones individuales por medio de la herramienta “sección de grupos” de zoom, para que ellos pudieran realizar consultas en caso de que necesitaran, sin distraer ni influir al resto en su trabajo. En ese tiempo la moderadora respondía consultas y verificaba el avance de la tarea. Al finalizar cada actividad, se reunían alumnos y profesora para discutir lo que habían hecho. De este modo se procedió con los tres problemas.

Cabe destacar que todos los voluntarios habían sido estudiantes y/o ayudantes de la profesora/ moderadora Nicolé Geyssel por lo que existía cierta confianza para expresar lo que necesitaran a lo largo de las tres actividades.

Al final de la sesión cada alumno envío el documento Excel que habían estado trabajando al profesor vía electrónica.

Los resultados obtenidos de esta experimentación se detallan a continuación.

En la Actividad 1 se tienen las siguientes respuestas de parte de los estudiantes

Actividad 1.a) Indique los periodos en que los seguidores de Instagram aumentan, disminuyen o son constantes.

Los estudiantes identifican los periodos de crecimiento, decrecimiento de forma general sin problemas, mas no consideran las semanas de máximos y mínimos relativos de seguidores como seguidores constantes. Consideran constantes las semanas de poco cambio como se ve en la respuesta del estudiante nº 2

a) Los periodos, en semanas, en que los seguidores de Instagram aumentan son: [5-7[, [17-22[, [45-52[. Por otra parte, los periodos en que los seguidores disminuyen son: [1-5[, [7-9[, [22-26[. Por ultimo, podemos ver que en los periodos, en semanas, [9-17[, [26-45[se mantienen los seguidores constantes.

Ilustración 36 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 1.a)

Diferentes estudiantes no consideran la continuidad de las semanas en sus respuestas, como el estudiante 3 y el estudiante 5, que no escriben qué pasa entre las semanas 5 y 6 o 7 y 8.

1 al 5	disminuye
6 al 7	aumenta
8 al 9	disminuye
10 al 17	constante
18 al 22	aumenta
23 al 26	disminuye
27 al 44	constante
45 al 52	aumenta

Ilustración 37 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 1.a)

a) entre las semanas 6 y 7, 18 a 22, y 45 a 52 los seguidores aumentan; entre las semanas 1 a 5, 8 a 10, y 23 a 26 los seguidores disminuyen; y el resto de las semanas son constantes, por lo tanto, existe una tendencia de seguidores creciente cuando las vacaciones se acercan, pero que tiende a revertirse.

Ilustración 38 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 1.a)

Actividad 1.b) Relacione lo anterior con los criterios de la derivada.

Algunos de los estudiantes relacionan el crecimiento y decrecimiento de la función con el signo de la derivada. Como el estudiante nº 5 que indica que la derivada de la función Seguidores de Instagram es positiva cuando hay un aumento de seguidores, negativa cuando los seguidores disminuyen, y es cercana a cero o igual a cero cuando los seguidores son contantes:

b) Lo anterior indicaría que la derivada de la función es positiva en los periodos que esta es creciente, igual o cercana a cero cuando es constante y negativa cuando los seguidores disminuyen.

Ilustración 39 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 1.b)

Así también el estudiante nº 2 nos entrega una noción de la relación entre el crecimiento o pérdida de seguidores con el criterio de la derivada como se puede observar:

b) Podemos relacionar lo anterior con el cambio porcentual y con la pendiente de cada curva; esto significa que al derivar la funcion en el que esta basada la curva del grafico, deberia darnos un valor que, segun este, determinaria la pendiente de la curva y, por ende, el comportamiento de los seguidores. Por ejemplo, si determinamos que la pendiente es positiva dada su derivada, podriamos concluir que en aquel mes o periodo, los seguidores irian en aumento.

Ilustración 40 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 1.b)

Por su parte, el resto de los estudiantes utiliza el criterio de la derivada para la clasificación de máximos y mínimos, como podemos ver en la respuesta de los estudiantes nº 3 y nº 4:

con el criterio de la primera derivada se podria ver los maximos y minimos de la funcion para sacar los intervalos con mas facilidad

Ilustración 41 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 1.b)

enero-febrero	semana 5 un minimo relativo	(pto minimo)
	semana 1 es un maximo relativo	
febrero-marzo	semana 7 es un maximo relativo	
marzo-abril	…	
abril-mayo	…	
mayo-junio	semana 18 es un minimo relativo	
	Semana 22 es un maximo relativo	
Junio-Julio	Semana 23 es un maximo relativo	
	semana 26 es min relativo	
julio-octubre	…	
Octubre-noviembre	semana 45 es un minimo relativo	
	Semana 48 es un maximo relativo	
Noviembre-Diciembre	Semana 49 es un minimo relativo	
	Semana 52 es un maximo relativo	(pto maximo)
Enero-Diciembre	Semana 5 es un minimo reltivo	
	Semana 52 es un maximo relativo	

Ilustración 42 - Respuesta estudiante nº 4 Actividad 1.b)

Se advierte que ninguno de los estudiantes utiliza ambas concepciones en su análisis.

Actividad 1.c) ¿Qué meses llega la derivada a su máximo? ¿a su mínimo?

Los estudiantes por lo general confunden la derivada máxima con el máximo de la función, lo que se puede apreciar en la respuesta del estudiante nº 1, que indica en su respuesta los máximos y mínimos de la función.

Máximo semana 22
Mínimo semana 8

Ilustración 43 – Respuesta estudiante nº 1 Actividad 1.c)

También en la respuesta del estudiante nº 3 se advierte esta confusión, pues indica los posibles mínimos absolutos de la función y el máximo absoluto de la misma que se obtiene en diciembre.

en enero marzo y abril la derivada llega a su minimo
llega a su maximo en diciembre

Ilustración 44 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 1.c)

Solo un alumno consideró la derivada máxima como la máxima razón de cambio o la pendiente de la recta tangente más inclinada. De igual modo con el mínimo, como se ve en la respuesta del estudiante nº 5.

> c) Al ser la derivada una razón de cambio, llega a su máximo cuando la "aceleración" de la función es mayor (su pendiente está más inclinada hacia arriba), y al ojo podría determinar que es en el transcurso del mes 7; mientras que su mínimo se podría determinar al observar cuando la pendiente de la función está más inclinada hacia abajo, que a simple vista podría ser en el cambio de la semana 25 a la semana 26.

Ilustración 45 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 1.c)

Actividad 1.d) ¿En qué semanas la derivada es igual a 0? Y ¿Qué significa que esta derivada sea igual a 0?

Los estudiantes relacionan la derivada igual a cero con los períodos de la función “Seguidores de Instagram” constantes o relativamente constantes, lo que indicaría que los seguidores se mantienen o que la pérdida de seguidores es igual a la ganancia de éstos, tal como se ve en las repsuestas de los estudiantes nº 1 y nº 5.

> d) De la semana 26 a 45 es cero; se mantiene constante, no hay nuevos seguidores, o la perdida de algunos es igual a la ganancia de nuevos

Ilustración 46 - Respuesta estudiante nº 1 Actividad 1.d)

> d) sería igual a cero cuando la función es constante ya que no tiene razón de cambio, aunque sería más cercana a cero que igual a cero, ya que no es totalmente plana.

Ilustración 47 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 1.d)

Por su parte, el estudiante nº 3 escribe la relación que tiene la derivada igual a cero con el criterio de la derivada para la clasificación de máximos y mínimos de la siguiente forma.

que la derivada llegue a 0 significa que la funcion intersecta el eje x, y podemos ver hacia donde se mueve la funcion (puntos de inflexion) para ver si aumenta o disminuyen los seguidores
no me acuerdo, pero creo que los meses en que la derivada seria cero es en los periodos que la funcion es constante

Ilustración 48 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 1.d)

En la Actividad 2 se tienen las siguientes respuestas de parte de los alumnos

Actividad 2.a) Indique las variaciones semanales y mensuales de seguidores.

Los estudiantes calculan la variación semanal como la resta entre los seguidores de una semana menos los seguidores de la semana anterior, o realizan la pendiente que se da considerando los datos de dos semanas consecutivas, que en este caso coincide con la resta determinada al comienzo.

Para el cálculo de la variación mensual se dieron cinco respuestas distintas, que se detallan a continuación:

El estudiante nº 1 realizó la resta de los seguidores de la primera y la última semana de cada mes obteniendo:

enero	-17
feb	0
mar	0
abr	-1
may	38
jun	-29
jul	0
ago	0
sep	2
oct	2
nov	56
dic	68

Ilustración 49 - Respuesta estudiante nº 1 Actividad 2.a)

El estudiante nº 2 realizó la resta de los seguidores de la última semana de un mes con la última semana del mes anterior con lo que obtuvo los siguientes datos.

enero	-18
feb	12
mar	-9
abr	-1
may	53
jun	-37
jul	0
ago	-1
sep	5
oct	-2
nov	57
dic	90

Ilustración 50 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.a)

El estudiante nº 3 realizó la resta de los seguidores de la primera semana de un mes con la primera semana del mes anterior obteniendo:

variacion mensual	
dic-enero	-1
enero-febrero	-5
febrero-marzo	-9
marzo- abril	0
abril-mayo	14
mayo-junio	30
junio-julio	-29
julio-agosto	-1
agosto-septiembre	3
septiembre-octubre	-2
octubre-noviembre	3
noviembre-diciembre	78
diciembre-enero	-3

Ilustración 51 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.a)

El estudiante nº 4 realizó las pendientes mensuales considerando los seguidores de la primera y la última semana de cada mes y la cantidad de semanas transcurridas, de este modo obtuvo:

	pendiente mensual
enero	-4,25
feb	0
mar	0
abr	-0,3333333
may	9,5
jun	-9,6666667
jul	0
ago	0
sep	0,66666667
oct	0,5
nov	18,6666667
dic	10,75

Ilustración 52 - Respuesta estudiante nº 4 Actividad 2.a)

El estudiante nº 5 calcula la variación mensual, sumando las variaciones semanales de cada mes, obteniendo:

2019	Mensual
enero	-18
feb	12
mar	-9
abr	-1
may	53
jun	-37
jul	0
ago	-1
sep	5
oct	-2
nov	57
dic	90

Ilustración 53 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 2.a)

Actividad 2.b) ¿Qué meses hay más variación de seguidores? ¿Cuál es la variación?

Los estudiantes distinguen que las mayores variaciones son en los meses de diciembre, noviembre y junio indicando el valor de estas variaciones, y por lo general si existe un aumento o una disminución de seguidores, como indica la respuesta del estudiante nº 5.

> b) en los meses mayo(53), junio(37), noviembre(57) y diciembre(90), donde la variación es positiva en mayo, noviembre y diciembre, y negativa en el mes de junio.

Ilustración 54 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 2.b)

O solo considerando las mayores variaciones, que son positivas, como se puede ver en la respuesta del estudiante nº 2.

> El mes con mayor variacion de seguidores es en diciembre con un aumento de 90 seguidores con respecto a noviembre. Este seguido por el mes de noviembre con una variacion igualmente positiva de 57 seguidores con respecto a octubre.

Ilustración 55 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.b)

Actividad 2.c) ¿Cómo son los cambios mes a mes?

Los alumnos concluyen que existe variación de seguidores en los meses vistos, estos seguidores no son constantes. El estudiante nº 5 determina que el comportamiento de los seguidores no es constante y tiende a crecer.

> c) no son constantes, y a pesar de que a lo largo del año los seguidores aumentaron en 150, la tendencia creciente de noviembre y febrero podría revertirse como suciedió con las tendencias crecientes anteriores.

Ilustración 56 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 2.c)

El estudiante nº 3 indica que los cambios mes a mes son pocos si no se consideran los meses de mayor cambio (mayo, noviembre, diciembre y junio).

> c) los cambios mes a mes son pocos y que van en aumento o disminucion de 1 a 5 seguidores a excepcion de los tres meses antes mencionados

Ilustración 57 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.c)

El estudiante nº 2 indica que el comportamiento de los meses es muy variable con la siguiente respuesta:

Son muy variantes, pasan de cambios negativos a positivos, y viceversa, muy rapido. Por ejemplo, en el mes de mayo se cuenta con 53 seguidores nuevos y luego al mes siguiente una caida de 37 seguidores.

Ilustración 58 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.c)

Actividad 2.c.i) ¿Cómo son los cambios mes a mes?

Los estudiantes presentan una confusión al relacionar la derivada con las variaciones mensuales. Se tienen tres tipos de respuestas, presentadas a continuación:

El estudiante nº 2 indica que, por la gran variabilidad que presentan los seguidores de Instagram, la derivada debe tener un valor más grande, y en los meses de poco cambio, la derivada debería ser cercana a cero.

Las derivadas deben ser de un valor mas grande dado a la gran variabilidad y la gran cantidad de cambios que poseen los seguidores de la cuenta de Instagram. Ya en los meses de cambios mas constantes, entre julio y octubre, las derivadas deberian ser mas cercanas al cero.

Ilustración 59 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.c.i)

El estudiante nº 3 alude a que la derivada entregará más herramientas para analizar la función "Seguidores de Instagram".

con la derivada podemos sacar con mayor facilidad los cambios mes a mes dado a que podemos encontrar los puntos de inflexion,
maximos y minimos relativos o locales. La derivada nos puede dar esta informacion mucho mas rapido para sacar estas conclusiones.

Ilustración 60 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.c.i)

El estudiante nº 5 vincula la derivada con la variación mensual de seguidores

C) i) la derivada vista mensualmente es positiva cuando la función es creciente y viceversa, por lo tanto, al ser una razón de cambio, la variación mensual representaria el valor de la derivada en ese mes.

Ilustración 61 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 2.c.i)

Actividad 2.d) En el período mayo-junio:

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

Los estudiantes determinan el gráfico y la línea de tendencia que se ajusta a los datos, además expresan que los seguidores en un comienzo aumentan y luego disminuyen hasta llegar a la misma cantidad de seguidores que en un comienzo, como indica el estudiante nº 3.

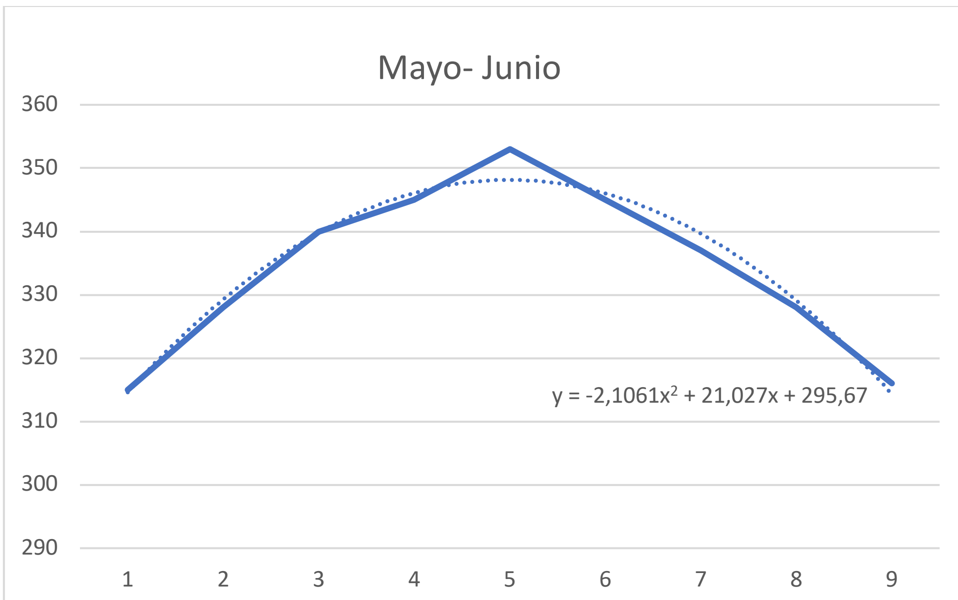


Ilustración 62 - Gráfico respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.d)

Además, el estudiante nº 2 concluye la tendencia de los seguidores como se indica a continuación:

Se comportan como una curva de tendencia polinomica en donde se ve claramente un maximo en la ultima semana de mayo (semana 5 del periodo), lo que se puede interpretar que en el mes de mayo obtuvieron muchos seguidores los cuales en junio fueron disminuyendo considerablemente quedando igual al numero de seguidores que tenian en inicios de mayo.

Ilustración 63 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 2.d) parte 2

El estudiante nº 1 determina una línea de tendencia que no se ajusta a los datos como se muestra en la imagen, y concluye que los seguidores se comportan de forma constante.

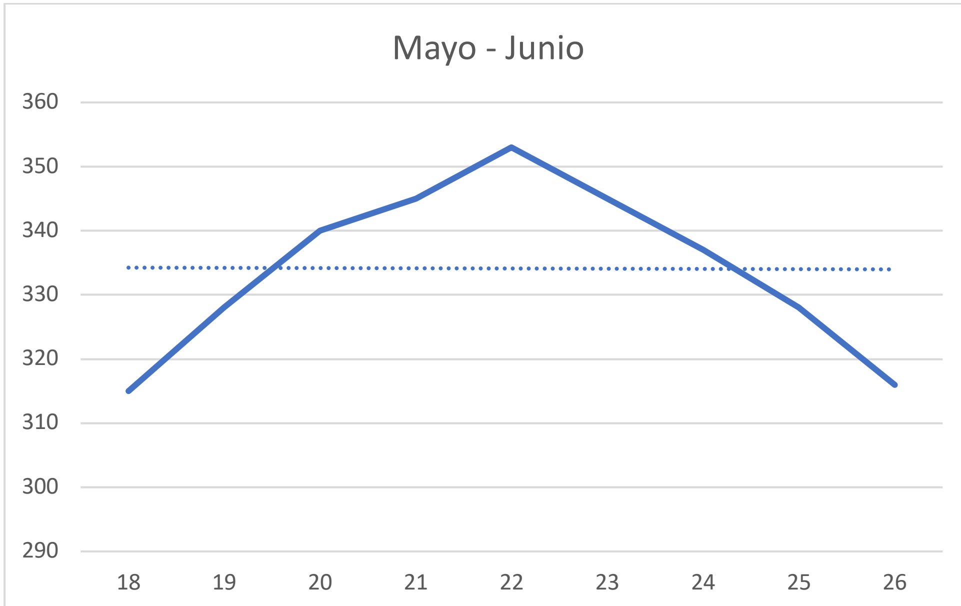


Ilustración 64 - Gráfico respuesta estudiante nº 1 Actividad 2.d)

Constante

Ilustración 65 - Respuesta estudiante nº 1 Actividad 2.d) parte 2

El estudiante nº 4 determina una línea de tendencia que no se ajusta a los datos como se muestra en la imagen, mas concluye que los seguidores aumentan a fines de mayo y junio, y luego vuelven a los mismos seguidores del comienzo de mayo.

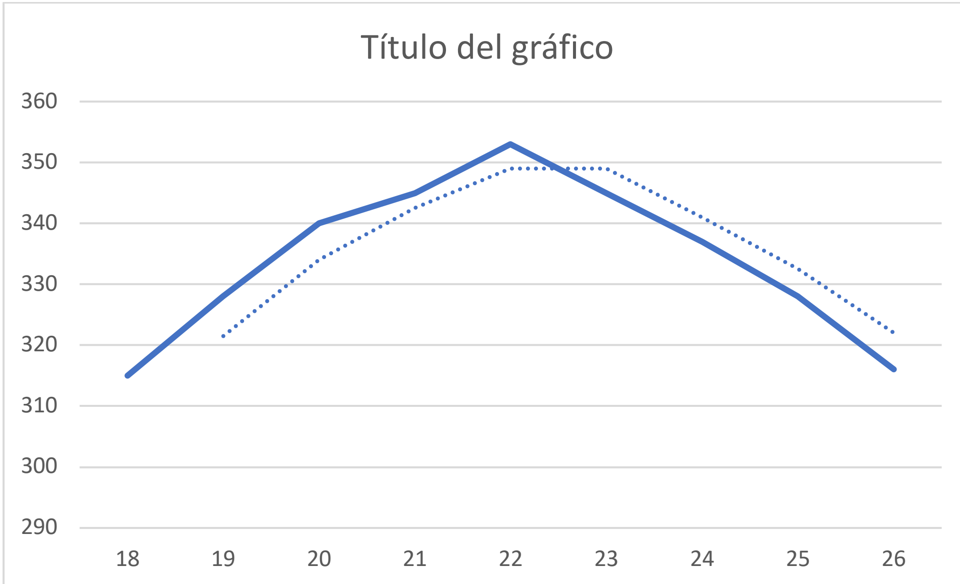


Ilustración 66 - Gráfico respuesta estudiante nº 4 Actividad 2.d)

Aumentan a fines de mayo y a fines de junio, vuelven a los mismos eguidores de inicio de mayo

Ilustración 67 - Respuesta estudiante nº 4 Actividad 2.d) parte 2

Actividad 2.e) En el período noviembre-diciembre:

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

Los estudiantes determinan el gráfico y diversas líneas de tendencia que se ajusta a los datos. A continuación, se presentan los tres tipos de respuestas.

El estudiante nº 1 determina que los datos son crecientes con el siguiente gráfico.

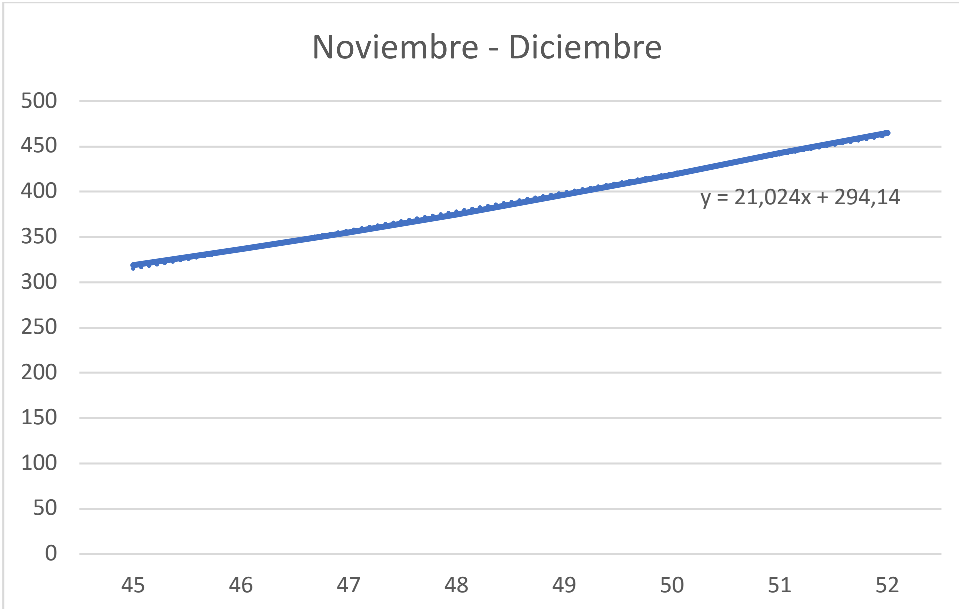


Ilustración 68 - Gráfico respuesta estudiante nº 1 Actividad 2.e)

Creciente(?

Ilustración 69 - Respuesta estudiante nº 1 Actividad 2.d) parte 2

El estudiante nº 2 determina que los seguidores se comportan como una curva exponencial de forma creciente.

Ilustración 70 - Gráfico respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.d)

En este caso los seguidores se comportan en una curva de tendencia exponencial en donde van constantemente en aumento

Ilustración 71 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 2.d) parte 2

El estudiante nº 3 determina que los seguidores tienen un comportamiento cuadrático y aumentan constantemente.

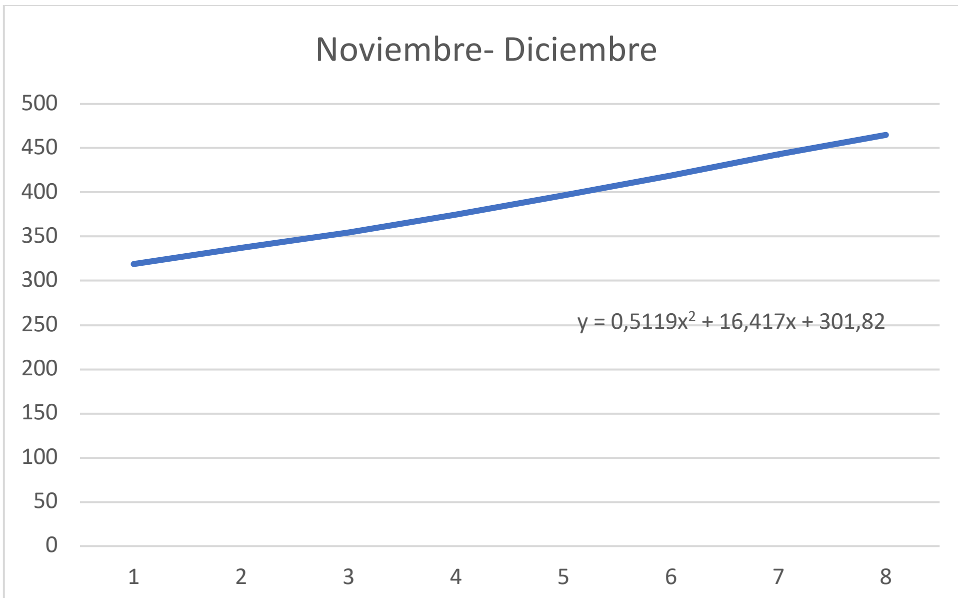


Ilustración 72 - Gráfico respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.d)

iii) en el periodo noviembre a diciembre van aumentando constantemente

Ilustración 73 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 2.d) parte 2

En la Actividad 3 se tienen las siguientes respuestas de parte de los alumnos.

Actividad 3.a) ¿Cómo se deberían comportar la cantidad de seguidores en diciembre?

Los estudiantes concluyen que como los seguidores de Instagram son similares año a año, en el año 2020 los seguidores deberían aumentar.

Es estudiante nº 1 nos indica que los seguidores deberían aumentar más que en el resto de los meses del año.

a) Suponiendo que el año 2020 se comporta de forma parecida al 2019, los seguidores en diciembre deberían aumentar más que en todo el resto de los meses del respectivo año.

Ilustración 74 - Gráfico respuesta estudiante nº 1 Actividad 3.a)

El estudiante nº 2, haciendo referencia a su respuesta en el ítem anterior, indica que el crecimiento debería ser exponencial.

Como el comportamiento es similar año a año, en el mes de Diciembre deberia existir un aumento exponencial de los seguidores.

Ilustración 75 - Gráfico respuesta estudiante nº 2 Actividad 3.a)

Actividad 3.b) Estime la cantidad de seguidores de diciembre. (Indique ¿qué hizo?, ¿cómo lo hizo? Y ¿qué relación tiene con la derivada?)

Los estudiantes estimaron los seguidores de Instagram del mes de diciembre del 2020 de diversas formas que explicamos a continuación:

El estudiante nº 1 determinó el promedio del promedio de las variaciones mensuales de los años 2019 y 2020 de la siguiente forma, para cada mes calculó el promedio de variación mensual (entre el mes correspondiente del año 2019 y 2020), considerada esta última como la diferencia entre los seguidores de la última semana menos la primera semana de cada mes. Luego, con los promedios de variaciones mensuales, calculó un promedio y este valor se lo sumó a las variaciones del mes de diciembre del 2020 para obtener un aumento de aproximadamente 71 seguidores nuevos.

				b) La estimación sería obtener 71 seguidores nuevos a finales del mes de diciembre.		
Enero	-14,5					
Feb	-2,5					
Mar	0					
Abr	6,5					
May	31					
Jun	-32,5		3,31818182		**Estimación**	**71,3181818**
Jul	-3					
Ago	-1					
Sept	-2					
Oct	6					
Nov	48,5					

Ilustración 76 - Respuesta estudiante nº 1 Actividad 3.b)

El estudiante nº 2 calculó las variaciones porcentuales semanales de diciembre del año 2019, y esta variación porcentual se la aplicó a las semanas de diembre del año 2020.

Saque la variacion porcentual de Diciembre 2019 la cual es:					
dic	49	5,87%			
	50	5,54%			
	51	5,73%			
	52	4,97%			
	53	-0,65%			
Y luego, tomando en cuenta a que el comportamiento es el mismo, calcule los seguidores de Dicembre 2020:					

Ilustración 77 - Desarrollo respuesta estudiante nº 2 Actividad 3.b)

dic	49	536,744
	50	566,488
	51	598,936
	52	628,68
	53	624,624

Ilustración 78 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 3.b)

Además, el estudiante nº 2 indicó

La relacion con la derivada es que utilice el cambio porcentual.

Ilustración 79 - Respuesta estudiante nº 2 Actividad 3.b) parte 2

El estudiante nº 3 consideró que los seguidores aumentan aproximadamente en 20 unidades por semana en diciembre del año 2019, por lo que fue sumando a cada semana de diciembre del año 2020 20 unidades.

con las variaciones semanales del año 2019 se puede ver un aproximado de cuanto aumentan en cada semana del mes de diciembre
que son un aproximado de 20 seguidores mas por semana
Por eso a cada semana le fui sumando 20 seguidores mas

Ilustración 80 - Desarrollo respuesta estudiante nº 3 Actividad 3.b)

dic	49	527
	50	547
	51	567
	52	587
	53	607

Ilustración 81 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 3.b)

Respecto al uso de la derivada, el estudiante nº 3 añade:

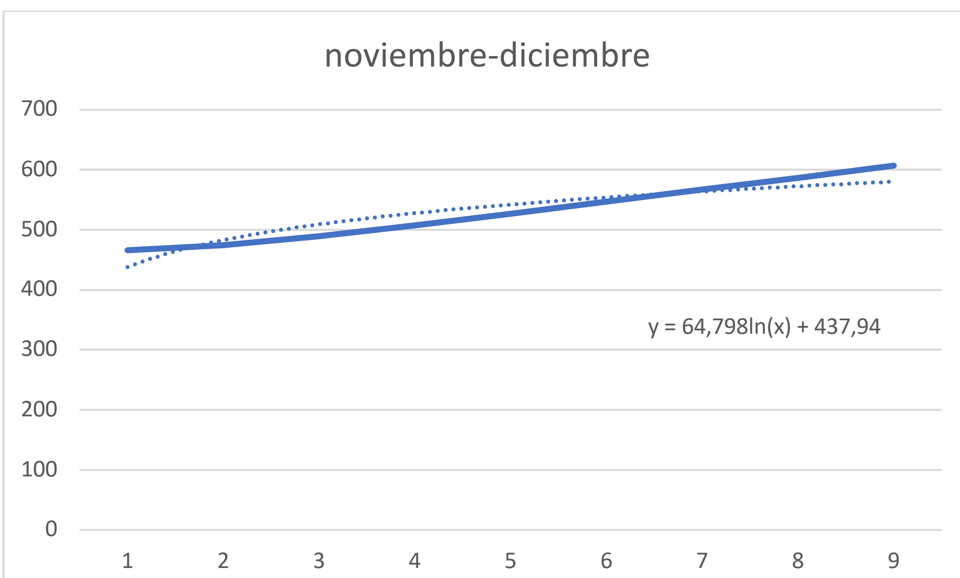


Ilustración 82 - Gráfico respuesta estudiante nº 3 Actividad 3.b) parte 2

lo que hice no tiene relacion con la derivada, porque no se me ocurrio :(
pero si vamos viendo la linea de tendencia uno se puede dar cuenta que la tendencia de los seguidores es a aumentar enlos ultimos meses del año.

Ilustración 83 - Respuesta estudiante nº 3 Actividad 3.b) parte 2

El estudiante nº 4, considera las variaciones semanales (vistas como pendientes) de diciembre del año 2019 y se las aplica a las semanas de diciembre del año 2020

Como el comportamineto de los seguidores es similar, asumimos que las
pendientes, de igual manera, deberian ser similares semana a semana,
por lo que, asumimos las pendientes del año 2019 como las mismas pendientes de
diciembre para el año 2020.
Hacemos una ecuacion, donde la incognita sera la cantidad de seguidores, que es igual
a, la multiplicacion de pendiente, la cual asumimos igual al año 2019, de la diferencia entre
las semanas, sumado a la la cantidad de seguidores de la semana anterior.

Ilustración 84 - Desarrollo respuesta estudiante nº 4 Actividad 3.b)

nov	45	466		
	46	474		
	47	489		
	48	507		18
dic	49	529		22
	50	551		22
	51	575		24
	52	597		22
	53	594		-3

Ilustración 85 - Respuesta estudiante nº 4 Actividad 3.b)

Además, el estudiante nº 4 añade

Su relacion con la derivada, es que son razones de cambio, por lo tanto, si se comportan
de manera similiar, podriamos asumir la razon de cambio igual para la semana correspondiente
según el año anterior, por lo tanto, con cualquier otra cifra, el resultado de la derivada o razon
de cambio, deberia ser igual o muy parecido.

Ilustración 86 - Respuesta estudiante nº 4 Actividad 3.b) parte 2

El estudiante nº 5 realiza una línea de tendencia con los datos de noviembre del año 2020 y modela que el comportamiento de estos datos es lineal de ecuación $y = 13{,}8x + 449{,}5$ por lo que al reemplazar con x (la semanas a partir de noviembre) el valor desde 5 hasta 9 obtiene los posibles seguidores de Instagram que siguen esta tendencia.

Utilicé una linea de tendencia para predecir la cantidad aproximada de seguidores que deberían haber en cada semana de diciembre, y de esta forma calcular la variación; al saber la tendencia lineal de los meses noviembre - diciembre del año 2019 (y al tener cada año una tendencia similar) la derivada del mes de noviembre del 2020 me permitió saber el comportamiento aproximado del mes de diciembre.

Ilustración 87 - Desarrollo respuesta estudiante nº 5 Actividad 3.b)

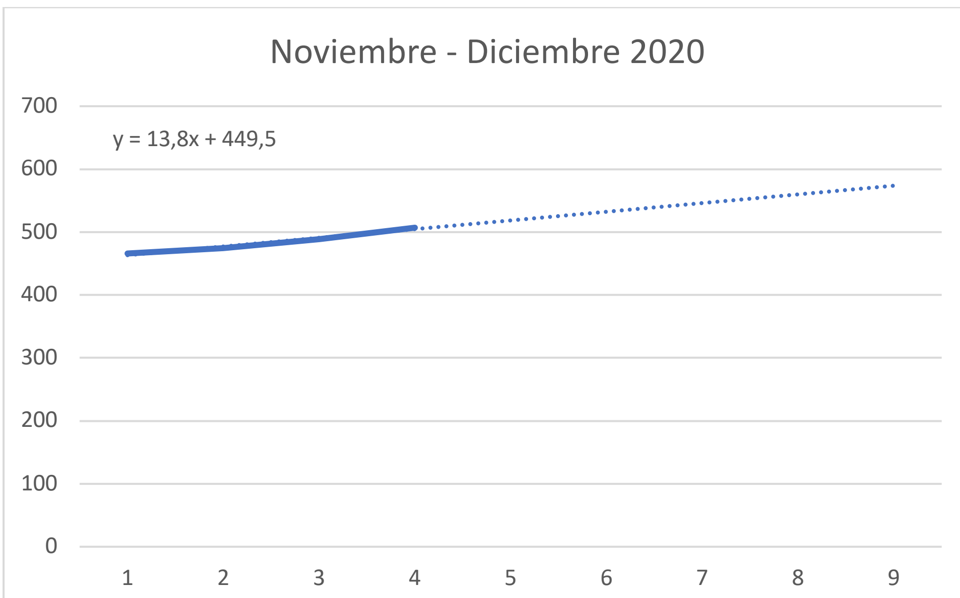


Ilustración 88 - Gráfico desarrollo respuesta estudiante nº 5 Actividad 3.b)

Diciembre		
518,5	11,5	
532,3	13,8	
546,1	13,8	66,7
559,9	13,8	
573,7	13,8	

Ilustración 89 - Respuesta estudiante nº 5 Actividad 3.b)

5.4. Análisis a posteriori y Confrontación

En esta sección se exponen los Análisis a posteriori y la Confrontación luego de realizar la experimentación de la Situación de Aprendizaje.

Actividad 1.a): Los estudiantes reconocen los periodos de crecimiento y decrecimiento de seguidores (y de la función) sin problemas. Los periodos de seguidores constantes o con poco cambio son asociados a más de una semana sin mucho cambio.

Las respuestas no consideradas en el Análisis a Priori consisten en no considerar las semanas de máximos y mínimos relativos de seguidores como seguidores constantes, y también que varios estudiantes no consideran la continuidad de las semanas (hay semanas no consideradas en las respuestas)

En el desarrollo de esta Tarea Variacional se encuentra presente la estrategia comparación, pues los estudiantes comparan semana a semana (una anterior con otra siguiente).

Actividad 1.b): Los estudiantes en su mayoría relaciona el criterio de la derivada con la clasificación de máximos y mínimos, y justifican que se puede utilizar para saber un poco más de la función. Un par de estudiantes relaciona los períodos de crecimiento y pérdida de seguidores con el signo de la derivada, aunque lo hacen de forma general y no especificando por semanas.

Actividad 1.c): La mayoría de los estudiantes señalan los máximos y mínimos de la función Seguidores de Instagram, y no de la derivada. Este error no fue considerado en el Análisis a Priori, aunque es un error usual en clases. Solo un estudiante explica que al ser la derivada una razón de cambio, ésta será máxima cuando la recta (tangente) este más inclinada hacía arriba. De igual modo con el mínimo. En ambos casos sus respuestas son aproximadas.

En el desarrollo de esta Tarea Variacional se aprecia el uso de la estrategia seriación, pues los alumnos, en su mayoría, comparan los posibles máximos para determinar el mayor de ellos. Por lo tanto, comparan más de dos posibilidades.

Actividad 1.d): Los estudiantes relacionan la derivada igual a cero con los períodos en que existe poco cambio en los seguidores de Instagram. Ninguno indica que los máximos o mínimos relativos de seguidores de Instagram también se corresponden con esta propiedad.

Los estudiantes utilizan la estrategia de seriación para determinar los períodos de poco cambio al comparar varias semanas relativamente constantes con el resto de las semanas.

A lo largo de este primer momento los estudiantes utilizan los criterios de la derivada cuando se les pide relacionar los periodos de crecimiento, decrecimiento y constancia de seguidores de Instagram con la derivada, mas este uso esta ligado al dME. Esto es apreciable en las respuestas que explican que teniendo la función en la cual está basado el gráfico, se podría derivar dicha función y determinar la pendiente de la recta tangente. También se puede apreciar en las respuestas de los estudiantes que relacionan los cambios de la función con el criterio de clasificación de máximos y mínimos de la primera derivada.

De este modo se tiene que, los estudiantes en su mayoría mencionan los criterios de clasificación de máximos y mínimos con la primera derivada relatando un discurso aprendido que no tiene relación con lo que se les pide. La estrategia variacional utilizada en este primer momento carece de significado respecto a la derivada.

Así, se tiene que el porcentaje de estudiante que relacionan la derivada con la variación en el primer momento está dado por el siguiente gráfico

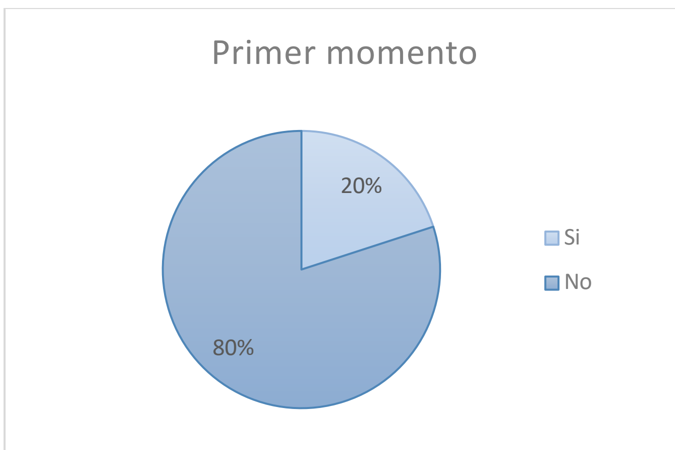


Ilustración 90 - Gráfico porcentaje de estudiantes que relacionan la derivada con la variación, Momento 1.

Actividad 2.a): Los estudiantes calculan las variaciones semanales y mensuales. Esta última de distintas formas explicadas en la Experimentación.

Las respuestas no consideradas en el Análisis a Priori consisten en calcular las variaciones, semanales y mensuales, como pendientes. Además, se presenta un error de cálculo de variación mensual que considera solo los datos de un mes, sin tomar en cuenta la variación de seguidores entre la última semana de un mes, con la primera semana del mes siguiente.

Actividad 2.b): Los estudiantes comparan las diversas variaciones mensuales para determinar el máximo aumento de seguidores de Instagram y también el mínimo, identificado con la pérdida de seguidores de Instagram. Por esta razón, se aprecia el uso de la estrategia seriación para poder determinar las máximas variaciones.

Actividad 2.c): Los estudiantes concluyen que los seguidores son variables y que no son constantes. También identifican los meses de aumento de seguidores y los meses en que hubo pérdida de seguidores.

Actividad 2.c.i): Los estudiantes relacionan la derivada con el cambio de la función utilizando un lenguaje natural. Un estudiante, además, relaciona el valor de la derivada con la variación mensual. Algunos estudiantes no responden.

Actividad 2.d): Los estudiantes grafican los datos de los meses pedidos e insertan una línea de tendencia que modela los datos como una función cuadrática, lo que indica el uso de la estrategia de comparación al tener que seleccionar la mejor línea de tendencia, y concluyen que los seguidores de Instagram de estos meses primero crece y luego decrece. Algunos estudiantes no insertan una línea de tendencia que se asemeje a los datos y los lleva a conclusiones erróneas. Ninguno de los estudiantes utiliza la expresión algebraica de la línea de tendencia para explicar el modelo de comportamiento de los seguidores en estos meses; todos utilizan un lenguaje natural.

Actividad 2.e): Los estudiantes grafican los datos de los meses pedidos e insertan una línea de tendencia que modela los datos como una función lineal, cuadrática o exponencial. Esto indica el uso de la estrategia de comparación al tener que seleccionar la mejor línea de tendencia, y concluyen con lenguaje natural que los seguidores de Instagram de estos meses se mantiene en constante crecimiento. Ninguno utiliza la expresión algebraica de la línea de tendencia para explicar el modelo.

El modelo de función lineal para modelar los datos no fue considerado en el Análisis a Priori.

En este segundo momento, la mayoría de los estudiantes sigue utilizando los criterios de la derivada como se presentan en el dME. Algunos aún justifican que si tuvieran la derivada de la función (analítica) podrían obtener más información de la función. Otros estudiantes relacionan las variaciones de la tabla con la derivada. Unos indican que la gran variabilidad de datos se corresponde con una gran derivada, mientras que otros indican que la variación mensual se corresponde con la derivada de la función al ser una razón de cambio.

De este modo se tiene que, en su mayoría, los estudiantes mantienen la idea de la derivada aprendida formalmente. Mas algunos de los estudiantes comienzan a dotar de significado la derivada respecto a la variación.

Así se tiene que el porcentaje de estudiante que relaciona la derivada con la variación en el segundo momento está dado por el siguiente gráfico

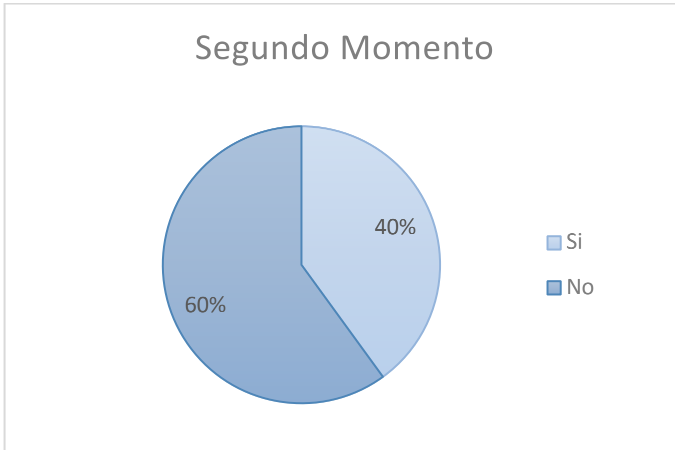


Ilustración 91- Gráfico porcentaje de estudiantes que relacionan la derivada con la variación, Momento 2.

Actividad 3.a): Los estudiantes argumentan que por ser el comportamiento de los seguidores similar año a año, estos deben aumentar más que en el resto de los meses. Por lo que en esta Tarea Variacional se utilizó la estrategia de Estimación. Solo un estudiante relaciona el modelo determinado en la Actividad 2 para justificar que los seguidores se comportarán de forma exponencial.

Actividad 3.b): Los estudiantes predicen un posible valor de seguidores de Instagram para el mes de diciembre por medio de las variaciones calculadas en la Actividad 2. Todos ellos lo hacen de distintas formas, varias de ellas, como la variación porcentual o utilizar la línea de tendencia del mes de noviembre, no fueron consideradas en el Análisis a Priori.

Además, varios estudiantes relacionan la estimación calculada con el uso de la razón de cambio o el cambio porcentual.

En esta Tarea Variacional se encuentra presente el uso de la estrategia de predicción, pues sin importar el método utilizado, se determinó un valor aproximado de seguidores para el mes de diciembre del 2020.

En este tercer momento las respuestas de los estudiantes se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo a la estrategia de predicción, y la resignificación con la derivada:

	Grupo 1	*Grupo 2*	*Grupo 3*
Predicción con uso de variación.	X	X	
Relaciona la derivada con la variación.	X		X

Tabla 7 - Clasificación de estudiantes en Momento 3.

Los estudiantes del Grupo 1 utilizaron las variaciones de una función expresada en tabla de datos para predecir estados futuros y relacionaron su accionar con la derivada. De este grupo se puede concluir que resignificaron la derivada por medio de sus usos. Estos estudiantes relacionaron las variaciones de los datos presentados con la derivada y lograron predecir estados futuros de la función.

Los estudiantes del Grupo 2 utilizaron las variaciones de una función expresada en tabla de datos para predecir estados futuros, pero no relacionaron su accionar con la derivada o no respondieron. Respecto a este grupo, se infiere que los estudiantes se adhieren al dME y no les permite reconocer este nuevo uso del conocimiento como válido (Gómez et al., 2014). Esto, dado que el uso presentado en la situación de aprendizaje no es latente. Así, se tiene que el dME soslaya los usos de la derivada.

Los estudiantes del Grupo 3 no utilizaron las variaciones calculadas en el momento 2 para predecir los datos faltantes en la tabla del momento 3. Respecto a los estudiantes de este grupo, no se puede concluir si lograron resignificar o no la derivada. Aún así, si se observan sus respuestas en los momentos 1 y 2, se puede apreciar que estos estudiantes relacionaban las variaciones semanales o mensuales del momento 2 con la derivada vista como una razón de cambio. Por este motivo se podría deducir que estos estudiantes resignificaron la derivada.

De este modo se tiene que el porcentaje de estudiante que relaciona la derivada con la variación en el segundo momento está dado por el siguiente gráfico.

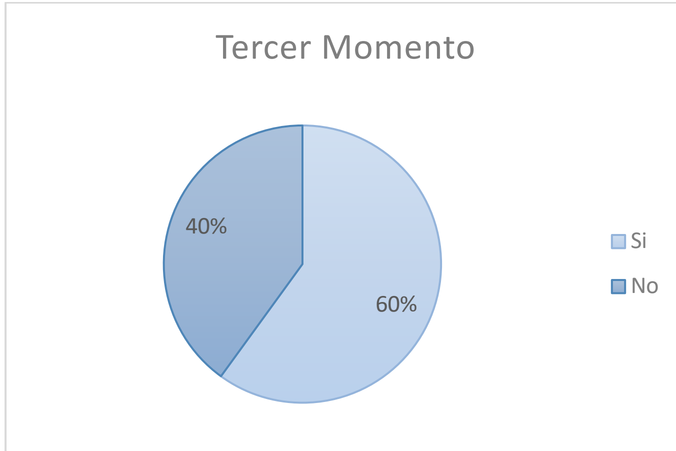


Ilustración 92 - Gráfico porcentaje de estudiantes que relacionan la derivada con la variación, Momento 3

Al realizar una comparación de los estudiantes que relacionan la derivada con la variación en cada momentos, se tiene el siguiente gráfico

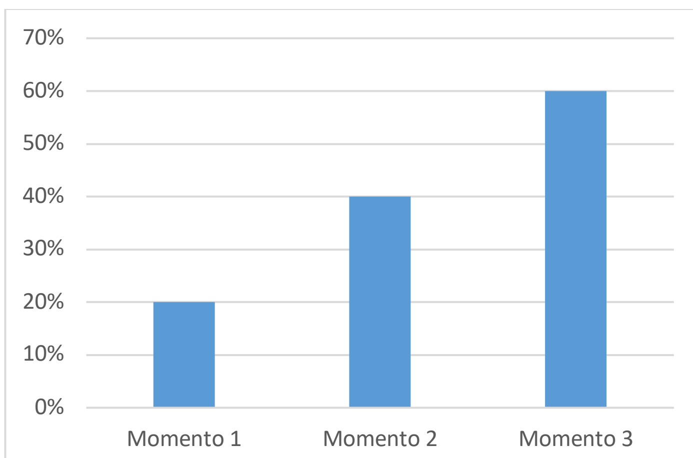


Ilustración 93 - Gráfico porcentajes de estudiantes que relacionan la derivada con la variación en cada momento.

Del anterior gráfico se infiere un avance respecto a la percepción de los estudiantes en relación a la derivada vista como variación. De este modo se deduce que la Situación de Aprendizaje promueve la resignificación de la este objeto matemático.

Capítulo 6: Conclusión

A continuación se explican las conclusiones extraidas de la investigación. Las conclusiones se encuentran dividas en 5 secciones, referidas a las preguntas de investigación, a los objetivos de la investigación, al marco teórico y a los resultados de la situación de aprendizaje y proyecciones.

6.1. Sobre las preguntas de investigación

La problemática de esta investigación está situada en la enseñanza de la derivada en ingeniería comercial. Para poder resignificar este objeto de estudio desde la teoría socioepistemológica es necesario abordar los escenarios de construcción de este conocimiento matemático y las prácticas que lo hacen emerger. Así también, es importante considerar qué características son relevantes al momento de diseñar una Situación de Aprendizaje.

De este modo es que surgen las preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los usos de la derivada en ingeniería comercial?
- ¿Qué características debe tener una situación de aprendizaje que se fundamente en los usos de la derivada en ingeniería comercial?

Para determinar los usos de la derivada en ingeniería comercial se realizaron dos procesos. Con el primero de ellos, de carácter documental, se determinó que el análisis marginal es propio de los ingenieros comerciales. Así también, se precisó que al momento de enseñar la derivada por medio del análisis marginal, el dME se adhiere a la definición matemática de este último concepto, soslayando las prácticas que lo dotan de significado.

El segundo proceso corresponde al estudio de la comunidad de conocimiento de los ingenieros comerciales. Aquí, luego del estudio documental, se realizó una entrevista a un ingeniero comercial. Con la entrevista, consensuada con un especialista en didáctica de la matemática, se concluyó que los ingenieros comerciales utilizan la derivada por medio de variaciones en tablas de valores, tanto para analizar sus datos, como para predecir estados futuros. Muchos de estos análisis o predicciones por medio de softwares computacionales como Excel.

De este modo se tiene que los ingenieros comerciales trabajan la derivada desde una mirada variacional, por medio de tablas de valores en programas como Excel, para analizar datos y predecir.

Con los elementos recabados de la entrevista en mente (variación, tabla, predecir, Excel), se confecciona una situación de aprendizaje cuya columna vertebral son los usos de la derivada guiada por el Pylvar por medio de tablas en Excel. De este modo se caracteriza la Situación de Aprendizaje fundamentada en los usos de la derivada en ingeniería comercial.

Dicha situación de aprendizaje proporciona una nueva mirada de la derivada. En ella se observan prácticas distintas a las presentadas por el dME, a saber, prácticas sociales como la predicción y prácticas realizadas por ingenieros comerciales como el análisis de datos en tablas de valores. Estas nuevas prácticas contribuyen en la resignificación de la derivada.

6.2. Sobre objetivos de la investigación

Para resignicar la derivada en los ingenieros comerciales, esta investigación planteó la problemática desde la Teoría Socioepistemológica. Desde este punto, la enseñanza de la derivada debe considerar las prácticas sociales de la producción de este conocimiento. Es así como se tiene el objetivo de investigación: Diseñar una Situación de Aprendizaje, desde la Teoría Socioepistemológica y la ingeniería didáctica, para la resignificación de la derivada por medio de sus usos en estudiantes de ingeniería comercial.

Para cumplir dicho objetivo, se plantean los objetivos específicos de la investigación:

- Identificar los usos de la derivada en ingenieros comerciales
- Diseñar una Situación de Aprendizaje desde la Teoría Socioepistemología
- Aplicar la situación de Aprendizaje en estudiantes de ingeniería comercial
- Evaluar la Situación de Aprendizaje mediante ingeniería didáctica

Por medio de un análisis documental se determina que la derivada es históricamente utilizada por los ingenieros comerciales. Así también, se establece que el dME ha soslayado las prácticas que dotan de significado este objeto matemático, adhiriéndose a las definiciones matemáticas formales.

Por otro lado, se estudió la comunidad de conocimiento de los ingenieros comerciales por medio de una entrevista. En ella se precisan los usos de la derivada en esta comunidad de conocimiento. Estos corresponden a la predicción por medio de la derivada, trabajada como variaciones en una tabla de datos.

Estos usos son considerados para diseñar una Situación de Aprendizaje. De este modo se emplea la derivada en el contexto de los ingenieros comerciales, para una práctica social como es la predicción por medio de la variación. Así surge el carácter funcional de la derivada (Soto et al., 2012) procurando un aprendizaje significativo.

En relación con la aplicación y la evaluación de la Situación de Aprendizaje, luego de analizar las producciones de los estudiantes, se determina que una gran cantidad de ellos relaciona las variaciones calculadas en tablas de datos y el procedimiento realizado para predecir estados futuros con la derivada. El resto de los estudiantes, a pesar de realizar el procedimiento esperado, no relaciona su accionar con la derivada. Esto, se infiere, se debe a que los estudiantes se adhieren al dME.

6.3. Sobre el Marco Teórico

El análisis bibliográfico de la derivada proporcionó dos fuertes corrientes de pensamiento en el estudio de este objeto matemático. Desde el punto de vista del discurso matemático escolar, la derivada es un conocimiento acabado que se repite y memoriza.

Con la mirada del dME, la derivada tiene un carácter utilitario. Los usos que se enseñan de ella son netamente físicomatemáticos (García et al., 2006); en caso de ser utilizada en otro ámbito, como son las ciencias económicas, los ejemplos solo cambian el contexto, mas el tipo de ejercicio se mantiene intacto.

La falta de marcos de referencia se presenta en la enseñanza de este concepto. En ingeniería comercial, se deja de lado la concepción histórica del análisis marginal y, más importante, se elude la explicación de que las ciencias económicas tomaron prestadas las metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas y esto condujo a que consideraran sus funciones objeto de estudio como funciones continuas (García et al., 2011).

Desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica, el foco está puesto en las prácticas sociales (Cantoral et al., 2006). Bajo esta teoría se considera válido todo saber, en particular, el saber de los ingenieros comerciales. De este modo, las prácticas realizadas por los ingenieros comerciales, como son el análisis de valores en tablas de datos y la predicción en dichos valores por medio del cálculo de variaciones es válido.

Con las ideas precedentes se tiene que el ingeniero utiliza la derivada vista como variaciones mas no considera que su práctica esté relacionada con este objeto. Esto se produce porque la variación en tablas de valores no se encuentra en el discurso matemático escolar de la derivada. Es decir, el dME opaca las prácticas de los ingenieros y los excluye.

Por lo antes mencionado, se rediseña el discurso matemático escolar de la derivada por medio de sus usos. Aquí se trabaja la variación con las tablas de datos, para realizar una práctica social: la predicción. De este modo se desarrollan los usos de este conocimiento matemático y se presenta el carácter funcional de la derivada.

6.4. Sobre los resultados de la Situación de Aprendizaje y Proyecciones

La situación de aprendizaje, compuesta por tres momentos, tenía la finalidad de resignificar la derivada por medio de sus usos en la ingeniería comercial. Cada momento tenía una finalidad.

Con el primer momento se buscaba que los estudiantes utilizaran la derivada y sus criterios por medio de un análisis gráfico. Luego, el segundo momento, tenía como finalidad ser una actividad de transición. En ella, los estudiantes debían analizar una función dada como valores de una tabla y modelar ciertos datos o períodos de la función, para determinar el comportamiento de los mismos. Finalmente, el tercer momento conducía a la predicción.

De este modo, con los tres momentos se dirigía al estudiante desde una actividad usual de clases imperada por el dME, hasta una práctica social: la predicción.

Al analizar las entregas, se logra determinar que en el primer momento los estudiantes utilizan los criterios de la primera derivada para describir los momentos en que la función presentada de forma gráfica es creciente, decreciente y constante. Mas al momento de responder por el período en que la derivada es máxima, o mínima, los estudiantes justifican con criterios de clasificación de máximos y mínimos en la función o explican que al tener la función en la cual está basado el gráfico, se podría derivar dicha función y determinar la pendiente de la recta tangente.

Con todo lo expresado, se infiere que los estudiantes se adhieren al dME. Al momento de relacionar los diversos períodos de la gráfica de la función con los criterios de la derivada, los estudiantes recuerdan que la pendiente de la tangente a la curva se relaciona con la derivada por lo que pendientes positivas se concierne con derivada positiva y viceversa (Cantoral & Farfán, 1998). Pero al preguntar sobre la derivada máxima o mínima, utilizan todo lo que saben para responder con lo que les haga más sentido, aunque no tenga relación con lo que se les pregunta.

En el segundo momento los estudiantes determinan las variaciones solicitadas de los datos expuestos, todas calculadas de distinta forma. Aquí cuando se pide relacionar lo calculado con la derivada se presenta un cambio en la respuesta de los estudiantes. En su mayoría, ellos siguen buscando utilizar la derivada del dME con una función expresada en forma algebraíca, mientras que una minoría comienza a relacionar las variaciones calculadas con la derivada. Aquí se destaca la respuesta de un estudiante que concluye que la variación mensual se corresponde con la derivada de la función al ser una razón de cambio.

Por lo antes expuesto se infiere que, aunque la mayoría de los estudiantes mantienen la idea de la derivada aprendida formalmente, ya hay otros que comienzan a dotar de un nuevo significado la derivada.

Finalmente, en el tercer momento, los estudiantes predicen los datos faltantes en la tabla presentada. Casi todos los realizan por medio de las variaciones calculadas en el segundo momento. Mas al momento de relacionar su procedimiento con la derivada sus argumentos se dividen en dos.

Por un lado se encuentran los estudiantes que explican que lo hecho se relaciona directamente con la derivada, pues están utilizando el cambio porcentual, o porque las variaciones que son razones de cambio deben ser iguales entre un año y otro.

Por otro lado, se tienen los estudiantes que no relacionan su actuar con la derivada. Aquí se infiere que los estudiantes se adhieren al dME y no les permite reconocer este nuevo uso del conocimiento como válido (Gómez et al., 2014). Esto, dado que el uso presentado en la situación de aprendizaje no es latente, por lo que el dME soslaya los usos de la derivada.

Otra posible explicación se relaciona con el aprendizaje significativo. Como explica Zuñiga (2007)

> …un aprendizaje es significativo si el estudiante tiene "una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento"" (p. 170).

En este punto aparecen nuevamente los fenómenos del dME. Si un estudiante no tiene la disposición de relacionar de manera significativa un nuevo material con su previa estructura de conocimiento, puede ser porque se adhiere a esta estructura ya existente de conocimiento. Es decir se adhiere al dME, y este último opaca el conocimiento del ingeniero comercial y los excluye.

Con los antecedentes expuestos, es importante perfeccionar la Situación de Aprendizaje, por lo que se propone un rediseño de esta. Todo esto con el afán de fortalecer la transición entre la actividad usual del dME y los usos de la derivada. De este modo se busca que los estudiantes puedan relacionar la definición formal de la derivada con las variaciones de una tabla, para lograr resignificar este concepto.

Considerando este rediseño, se invita a profesores a trabajar con esta propuesta fortaleciendo la discusión entre cada momento de la Situación de Aprendizaje. De este modo los estudiantes pueden enriquecer su reconstrucción de la derivada.

Finalmente, la Situación de Aprendizaje planteada, al trabajar por medio de la variación, entrega una nueva mirada de la derivada. Se espera que esta nueva mirada sea un aporte en la enseñanza de este objeto matemático, como así también una inspiración para todo el que quiere fomentar un aprendizaje significativo, no solo para las carreras del ámbito económico, sino que en cualquier área.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A., & Riestra, J. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *Revista el calculo y su enseñanza 1.1*, 1-12.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33, 60.

Baéz, N., Blanco, R., & Pérez, O. (2015). Dificultades de los alumnos en el trabajo con los conceptos del cálculo diferencial.

Barrera, B., & Castro Villagrán, A. (2019). Creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de ingeniería. *ConCiencia Tecnológica*, (57), 12-20.

Caballero-Pérez, M., & Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación.

Caballero, M. (2012). Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato. *(Doctoral dissertation, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN).*

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional.

Campeón, M., Aldana, E., & Villa, J. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia, 14(2)*, 115-126.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones centroamericanas*, 7, 391-410.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. *[CD-ROM]. In XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*, (pp. 1-15).

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42(14)*, 3.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(1)*, 83-102.

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1)*, 5-17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 7(3)*, 91-116.

Castañeda, R. (2019). Formulación de una estrategia para la enseñanza del concepto de la derivada a partir de los conocimientos previos y su impacto en la disminución de la deserción escolar. *Encuentro de Ciencias Básicas, Vol. 2 (ene.-dic., 2019)*, p. 1-122.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 285.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*, 59-88.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(1)*, 07-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad..* Gedisa Editorial.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., & Pérez, R. (2014). Atención a la Diversidad: La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3)*, 71-90.

Delgado Fernández, J., & Medina Cepeda, N. (2017). Uso del blog como herramienta para el aprendizaje significativo de la derivada en estudiantes de ingeniería. *Conference Proceedings. Vol. 1. No. 1.*

Diez , C., & Fuentealba, A. (2011). Análisis de los factores determinantes en las solicitudes de trabajo requeridos por el mercado laboral para los ingenieros comerciales en Chile.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal*, 155-181.

García Retana, J. Á. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, 37(1), 29-42.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 85-116.

García, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía*, (31), 137-171.

Gayón Bayona, C. (2019). Análisis del papel de los ingenieros comerciales frente al campo laboral.

Gómez Osalde, K., Silva-Crocci, H., Cordero Osorio, F., & Soto Soto, D. (2014). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar.

Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics magazine, 56(4)*, 195-206.

Hanna Lavalle, M., Ocampo Rivero, M., Janna Lavalle, N., Mena Gutiérrez, M., & Torreglosa Portillo, L. (2020). Redes sociales y calidad de vida relacionada con la salud en estudiantes universitarios.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (1998). Metodología de la investigación.

Hoffmann, L., Bradley, G., & Rosen, K. (2006). *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana.

Luna González, J., Ruiz Chávez, O., Loera Ochoa, E., Barrón López, J., & Salazar Álvarez, M. (2016). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Cultura Científica y Tecnológica, (51).*

Martínez, A., Pluvinage, F., & Montaño, L. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El cálculo y su enseñanza, enseñanza de las ciencias y la matemática*, 8, 1-18.

Méndez, C. (2015). Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela. *(Doctoral dissertation, Tesis de (Doctorado) no publicada. Cinvestav-IPN, DF, México)*.

Méndez, C., Opazo, C., Parra, T., Pérez, R., & Cordero, F. (2016). Comunidad de conocimiento matemático: un marco metodológico.

Mendoza-Higuera, E. J., Cordero, F., Solís, M., & Gómez, K. (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 1219-1243.

Mendoza, E. J., & Cordero, F. (2015). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. El caso de la estabilidad. *Memorias del III Coloquio de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa*, 1-14.

Morales Soto, A., & Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 319-345.

Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. (2016). Aprendizaje del concepto recta tangente en alumnos de bachillerato. 407-416.

Picón, G., González de Caballero, K., & Paredes, N. (2020). Desempeño y formación docente en competencias digitales en clases no presenciales durante la pandemia COVID-19.

Ponce, J. (2015). Breve historia del concepto de derivada.

Pulido San Román, A. (2002). Posibilidades y limitaciones de las Matemáticas en la Economía. *Encuentros multidisciplinares.*

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* Pearson Educación.

Reyes-Gasperini, D. (2012). Matemática educativa, socioepistemología y la problematización del saber: acciones de una agenda para un cambio educativo.

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48)*, 360-382.

Ríos García, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia, 13(2)*, 120-157.

Rodríguez, I., & López, J. (2013). Incorporación de elementos tecnológicos para la resignificación de la derivada a través del uso de gráficas.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(2)*, 267-296.

Sealey, V., & Flores, A. (2005). Entender la derivada: sí se puede. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, 175-196.

Soto, D. (2013). La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático. *(Doctoral dissertation, Instituto Politécnico Nacional).*

Soto, D., & Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la Matemática?

Soto, D., & Reyes-Gasperini, D. (2011). En búsqueda de la exclusión en el discurso matemático escolar.

Soto, D., Gómez, K., Silva, H., & Cordero, F. (2012). Exclusión, cotidiano e identidad: una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable; trascendentes tempranas Vol. I.* Editorial Cengage Learning.

Strauss, A., & Corbin, J. (2003). Bases de la investigación cualitativa técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. *Medellín: Universidad de Antioquia*, 45.

Thomas, G., & Weir, M. (2006). *Cálculo. Una Variable.* Pearson Educación.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2012). La comprensión de la derivada en estudiantes de ingeniería agronómica. Logros y dificultades.

Yerbes, J., & Cordero, F. (2016). El rol de los constructos del cotidiano y la matemática no escolar. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*, 231-237.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 145-175.

Anexos

Anexo A. Situación de Aprendizaje Rediseñada

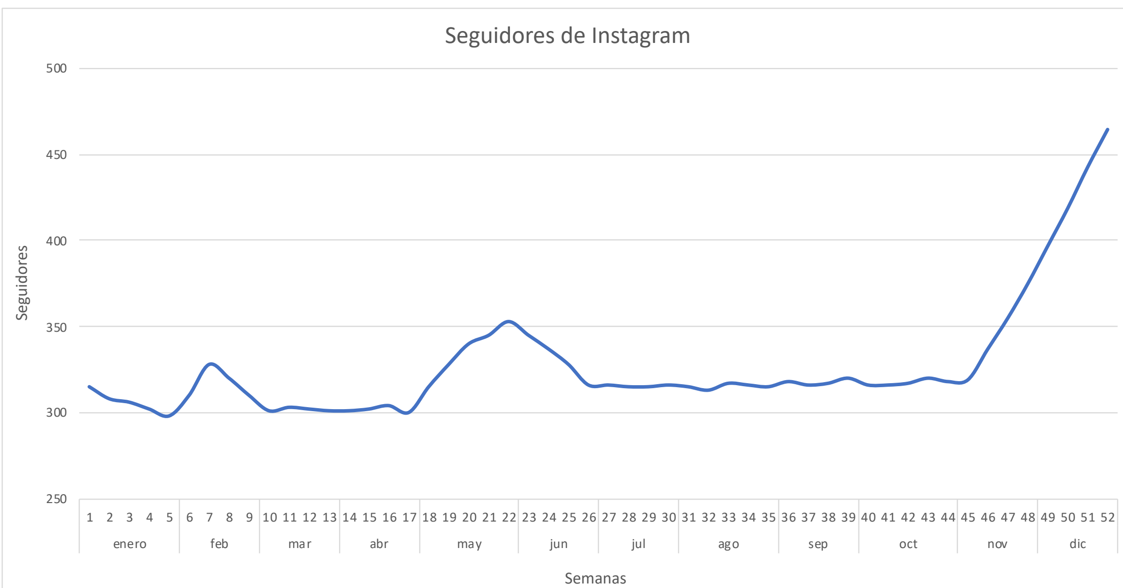
Seguidores de Instagram

Actividad 1

Para un trabajo se le pide analizar los seguidores de una página de Instagram que realiza ventas de productos de belleza para mujeres.

Los seguidores son muy importantes pues, de acuerdo a la tienda, aproximadamente un 30% de ellos realiza compras al mes.

Se han registrado los seguidores de la página semana a semana todo el año 2019 y sus datos se presentan en el siguiente gráfico.



a) Indique los periodos en que los seguidores de Instagram aumentan, disminuyen o son constantes.

b) Relacione lo anterior con los criterios de la derivada.

c) ¿Qué meses llega la derivada a su máximo? ¿a su mínimo?

d) ¿En qué semanas la derivada es igual a 0? Y ¿Qué significa que esta derivada sea igual a 0?

Actividad 2

Si ahora tiene los seguidores exactos del 2019 de cada semana, que se presentan a continuación:

2019	semana	seguidores
dic	52	316
enero	1	315
	2	308
	3	306
	4	302
	5	298
feb	6	310
	7	328
	8	320
	9	310
mar	10	301
	11	303
	12	302
	13	301
abr	14	301
	15	302
	16	304
	17	300
may	18	315
	19	328
	20	340
	21	345
	22	353
jun	23	345
	24	337
	25	328
	26	316
jul	27	316
	28	315
	29	315
	30	316
ago	31	315
	32	313
	33	317
	34	316
	35	315
sep	36	318
	37	316
	38	317
	39	320
oct	40	316
	41	316
	42	317
	43	320
	44	318
nov	45	319
	46	337
	47	355
	48	375
dic	49	397
	50	419
	51	443
	52	465
	1	462

a) Indique las variaciones semanales y mensuales de seguidores.

b) ¿Cómo se relacionan las variaciones del ítem anterior con la respuesta de la Actividad 1.b)?

c) ¿Qué meses hay más variación de seguidores? ¿Cuál es la variación?

d) ¿Cómo son los cambios mes a mes?

e) ¿Cómo se relacionan los cambios del ítem anterior con la derivada?

f) En el período mayo-junio

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

g) En el período noviembre-diciembre

i) Realice un gráfico de línea con los datos de estos meses.

ii) En el gráfico del ítem anterior inserte una línea de tendencia que se ajuste al gráfico y determine la ecuación.

iii) ¿Cómo se comportan los seguidores en estos meses?

Actividad 3

A continuación, se presentan los datos de los seguidores de la página de Instagram en los últimos meses (del año 2020). Usted debe considerar que el comportamiento de los seguidores es similar año a año.

2020	semana	seguidores
enero	1	462
	2	455
	3	453
	4	449
	5	450
feb	6	462
	7	475
	8	469
	9	457
mar	10	448
	11	450
	12	449
	13	448
abr	14	448
	15	449
	16	451
	17	447
	18	462
may	19	478
	20	489
	21	495
	22	502
jun	23	499
	24	487
	25	476
	26	463
jul	27	449
	28	447
	29	445
	30	446
	31	443
ago	32	445
	33	441
	34	443
	35	444
sep	36	445
	37	442
	38	441
	39	443
oct	40	442
	41	442
	42	442
	43	445
	44	452
nov	45	466
	46	474
	47	489
	48	507
dic	49	
	50	
	51	
	52	
	53	

a) ¿Cómo se deberían comportar la cantidad de seguidores en diciembre?

b) Estime la cantidad de seguidores de diciembre. Indique: ¿Qué hizo?, ¿Cómo lo hizo?, ¿Qué relación tiene con la derivada?

Anexo B. Entrevista

Nombre:

Edad:

Profesión:

Institución (universidad) donde cursó sus estudios:

En qué año se tituló:

Dónde ha trabajado como ingeniero(a) comercial:

¿La matemática que viste en la universidad consideras que se aplica en la práctica de tu profesión?

¿consideras que la derivada es usada por ingenieros comerciales? ¿cómo?

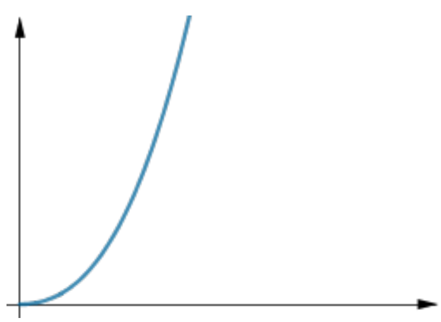
¿consideras que el análisis predictivo es usado por ingenieros comerciales? ¿cómo?

¿consideras que el análisis marginal es usado por ingenieros comerciales? ¿cómo?

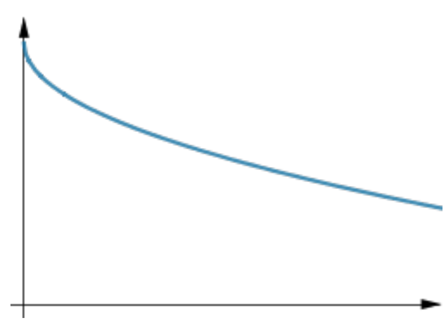
¿qué rol cumplen las gráficas en tu quehacer? Podrías dibujar algunas que utilices

¿qué tipos de gráficos podrías reconocer de tu práctica?

1.

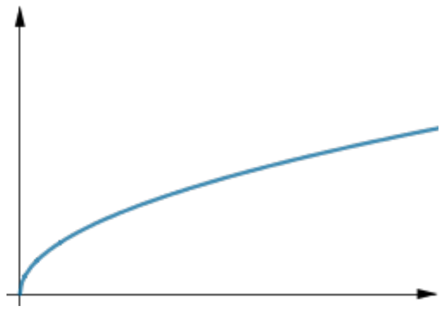


2.



3.

4.



5.

6.