UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática y Computación

Diseño de una propuesta de enseñanza sobre la noción de vector para séptimo básico bajo la perspectiva socioepistemológica

Francisco Javier Guerrero Vargas

Profesor guía: Daniela Geraldiny Soto Soto

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

SANTIAGO – CHILE

2021

Resumen

En el presente trabajo se diseña una propuesta de enseñanza con base en el juego para la noción de vector en un nivel básico de la enseñanza chilena, a partir de la teoría socioepistemológica. Para ello, se analiza el *discurso matemático escolar* propuesto, específicamente en los documentos entregados por el Ministerio de Educación en Chile (MINEDUC).

Para rediseñar este discurso, se realiza un análisis epistemológico del concepto de vector donde se destaca el **movimiento** como uno de sus usos. Con dicho uso se pretende construir los **componentes del vector** (punto inicial-final, magnitud y sentido).

El método utilizado es la ingeniería didáctica donde se realiza las fases que esta metodología propone. En primer lugar se presenta el análisis preliminar, luego la concepción y el análisis a priori, sigue la experimentación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

Por último, se plantean las reflexiones en las que se presenta un análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes, que nos lleva a distinguir la relación del saber con la naturaleza intrínseca en los conocimientos de los educandos. Esto provoca una nueva mirada en la concepción de la noción de vector.

Palabras claves: Socioepistemología, Educación matemática, Geometría, Movimiento.

Abstract

In the present work, a game-based teaching proposal is designed for the notion of vector at a basic level of Chilean education, based on socio-epistemological theory. For this, the proposed school mathematical discourse is analyzed, specifically in the documents delivered by the Ministry of Education in Chile (MINEDUC).

In order to redesign this discourse, an epistemological analysis of the concept of Vector is carried out, in which movement is highlighted as one of its uses. This use is intended to construct the components of the Vector (initial-final point, magnitude and meaning).

The method used is didactic engineering where the phases that this methodology proposes are carried out. First the preliminary analysis is presented, then the conception and a priori analysis, experimentation follows and finally the a posteriori analysis and evaluation.

Finally, the reflections are presented in which an analysis of the answers given by the students is presented, which leads us to distinguish the relationship of knowledge with the intrinsic nature of the students' knowledge. This provokes a new look at the conception of the notion of Vector.

Keywords: Socio epistemology, Mathematics education, Geometry, Movement.

Agradecimientos

Agradezco a mis a padres, que siempre estuvieron apoyándome en todos mis procesos universitarios, siendo un pilar fundamental en todo momento, les quiero decir que los amo y gracias por todo. A mi hermano que es un modelo que seguir como persona, muchísimas gracias por todo.

Gracias a mis amigos y compañero de carrera, los cuales estuvieron en todo momento apoyándome, estudiando y compartiendo gratos momentos dentro de la universidad, estos fueron fundamental para que mi proceso universitario se hiciera más ameno y el mejor que he vivido. En especial a gente que estuvo compartiendo en todo momento conmigo.

Muchas gracias a mi esposa Cynthia Carocca por todo su apoyo, amor y comprensión en los momentos más difíciles, brindándome energía y una actitud positiva para poder terminar todo este proceso, quiero decirle que la amo.

Finalmente agradezco a todas personas que se estuvo en este proceso y aporto un granito a mi formación, ya sea como docente o como persona. Debo recalcar a la profesora que estuvo en todo momento, apoyándome y aconsejándome cuando fue necesario, por lo que fue el pilar fundamental de este trabajo de titulación. Muchísimas gracias, profesora Daniela Soto por las horas brindadas, el esfuerzo y la paciencia que me tuvo. La estimo mucho.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Índice de Imágenes

Introducción

El siguiente trabajo se origina al realizar un análisis al *discurso matemático escolar* de la noción de vector en los diferentes materiales curriculares que propone el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), se observa que existe una falencia (al hablar del juego como elemento a trabajar) en uno de los objetivos expuestos en séptimo básico en el eje de geometría, este es: "Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica" (Ministerio de Educación, 2015)

Este objetivo se presenta en el año 2015 cuando se realiza un ajuste curricular a los planes y programas de estudios en matemática. Siendo el tratamiento del concepto de vector trasladado de primer año medio a séptimo básico.

En el estudio de los materiales propuesto por el Ministerio, se aprecia que en el objeto matemático predomina la visión algebrista, pese a que se encuentra en el eje de geometría. Referente a dicho eje las Bases Curriculares (2015), señalan que los estudiantes deben describir posiciones y movimientos usando coordenadas y vector, y tiene que obtener conclusiones respecto de las propiedades y características de los lugares geométricos. Plasmando una diferencia entre estos dos elementos curriculares.

Considerando esta discordancia presente entre los planes de estudios y los textos que entrega el MINEDUC, se realiza un análisis epistemológico en el que predomina uno de sus usos en la construcción de la noción (el **movimiento**).

Dado lo antes mencionado, el objetivo propuesto en esta investigación es diseñar y validar una propuesta enseñanza para la noción de vector en séptimo básico, a partir de un estudio socioepistemológico. Con el fin de fortalecer el uso de esta noción en contextos de movimiento y juegos. Para alcanzar el objetivo propuesto se presentan seis capítulos, los que son detallados a continuación.

En el primer capítulo: *Problemática*, se presenta la motivación del investigador para realizar este estudio, en ella se ilustra los resultados obtenidos por los educandos respecto a una prueba estandarizada chilena. Luego se vislumbran diversas investigaciones sobre el eje de geometría, la concepción que tienen los profesores y los educandos. Finalmente se muestran estudios internacionales en los que se plasma una problemática en común.

Dentro de este capítulo se observa el ajuste curricular realizado el 2015 en el currículo de matemática por el ministerio de educación, presentando el traslado del objetivo antes expuesto.

Asimismo, se muestran los objetivos a realizar en esta investigación, estos son los pasos a seguir por el autor para concretar el estudio propuesto.

En el segundo capítulo: *Análisis preliminar*, se presentan investigaciones sobre la noción de vector. En este apartado se muestra la relevancia que tiene la geometría en desarrollo humano y como se ha ido adaptando durante el transcurso de la historia.

Luego se ilustran los componentes curriculares en el que se encuentra presente la noción de vector, en primer lugar, el contenido antes del ajuste curricular (en el texto de estudio y en el marco curricular), siguiendo con los elementos curriculares luego del ajuste.

Continuando en el apartado se presenta la progresión escolar del concepto de vector, en este se vislumbra cuándo los estudiantes son expuestos por primera vez al concepto de vector, ya sea explícita o implícitamente.

En esta sección también se ilustra la importancia que tiene el juego en el desarrollo de habilidades de los estudiantes y la relevancia que tiene éste al momento de incluirlo dentro de una actividad en la educación matemática.

Finalmente se evidencian diversos estudios realizados sobre la enseñanza de vector, en el que se presentan los diversos tratamientos que ha tenido esta noción en la educación.

En el tercer capítulo: *Marco teórico*, se ilustra el sustento teórico de la investigación, donde se presenta la teoría socioepistemológica considerando las cuatro dimensiones en esta y como se relaciona con la construcción social del conocimiento matemático.

Luego se vislumbran los componentes del *discurso matemática escolar* (dME) y su influencia en la construcción del conocimiento matemático. También se ilustra la relación que se observa con la noción de vector.

Continuando se presentan los fenómenos dentro de la Socioepistemología y como se observa que el concepto del vector se ha incorporado a la adherencia, a la opacidad y la exclusión.

Finalmente se ilustra la epistemología del vector, en la que se vislumbra las dos líneas presentes en la construcción del concepto; la física y la matemática. También quiénes fueron los principales afluentes y usos dentro del desarrollo histórico de la noción en juego. Por último, en el apartado, se presenta la definición matemática del concepto trabajado.

En el cuarto capítulo: *Metodología*, se ilustra el método de la ingeniería didacta, en este se presentan los pasos a seguir dentro de la investigación al utilizar esta corriente, éste es el lineamiento de la investigación junto con la elección de la macro variable y las micro variables.

Finalmente en este apartado se vislumbran investigaciones de experimentación en la contingencia mundial. También se presentan las condiciones para realizar la experimentación dentro de este contexto.

En el quinto capítulo: *Diseño y experimentación*, se ilustra el diseño de la propuesta, en éste se detalla las preguntas y qué pretende identificar en dichos cuestionamientos.

Luego se vislumbra el análisis a priori de la propuesta, en este se presenta un detalle de las preguntas donde se ilustra las respuestas esperadas por el autor, las estrategias esperadas de los educandos y finalmente las posibles dificultades que puedan tener los estudiantes.

Continuando con las secciones de este apartado, se presenta el análisis a posteriori, en el que se muestran las respuestas entregadas por los estudiantes. En este se vislumbran las descripciones generales de los estudiantes que se sometieron a la experimentación. Luego las respuestas que coinciden con la esperada, los cuestionamientos que se encuentran correctos pero que no eran esperadas y las dificultades presentes dentro de la propuesta.

Finalmente en este análisis se vislumbra la confrontación de los dos análisis antes mencionados, en este se comparan las respuestas que el autor esperaba con las que entregaron los educandos. También se ilustra un porcentaje de logro de los estudiantes y sus contestaciones. Además se suma una entrevista en particular realizada a uno de los educandos junto al rediseño de la propuesta divido en dos partes; el primero enfocado en las preguntas que tuvieron dificultad al ser contestadas y el segundo enfocado en un rediseño de las micro variables.

En el sexto capítulo: *Conclusiones*, se detallan las reflexiones que se obtuvieron luego de realizar la investigación, también se ilustra cómo los estudiantes entregan sus respuestas en base a la intuición que difiere de cómo son entregados los conocimientos que componen un vector.

Se espera que la investigación ayude a estudiantes y profesores a tener un mejor entendimiento de la noción de vector y de los diferentes componentes que esta posee.

Capítulo I: Problemática

En esta sección se presenta los motivos que incentiva al autor para realizar esta investigación, en primer lugar se ilustra la motivación, donde se explican los diversos argumentos que llevan a concretar dicho escrito.

Para luego encontrar los ejes del problema de investigación vislumbrado en un ajuste curricular realizado por el Ministerio de Educación. Finalmente se presentan los objetivos de investigación.

1.1. Motivación

En el año 2015 se realizó un ajuste curricular en los contenidos propuestos por el Ministerio de Educación en la asignatura de matemática, junto a sus cincos ejes, dado esto se trabaja con uno de ellos: la geometría, en este se vislumbra que dentro del estudiantado existe una baja aprobación, generándole un bloqueo en su aprendizaje, tal y como afirma Valenzuela (2015), quien realiza un análisis de los datos del SIMCE (prueba estandarizada aplicada a cuarto básico, sexto básico, octavo básico y en segundo medio), en el caso de Matemática, se observa que el contenido con menor aprobación de preguntas es Geometría, con un aproximado de 40% de las preguntas rechazadas, esto se observa en la siguiente tabla mostrando la aprobación de los estudiantes en los diversos ejes de matemática.

CONTENIDO	ACEPTACIÓN
Números	79,22%
Datos y Azar	80,00%
Geometría	61,11%
Álgebra	70,00%
HABILIDAD	
Resolución de Problemas	73,63%
Conocimiento	76,06%

Figura 1-1: Aprobación de las preguntas en matemática (Valenzuela, 2015)

Queda plasmado que el eje de geometría posee una baja aprobación por parte del estudiantado en todos los niveles que se aplica dicha prueba, y esto provoca que los educandos se predispongan antes los contenidos relacionados a este eje, generando una barrera para el aprendizaje en los contenidos que nos ofrece la geometría.

Debido a lo antes mencionado Blanco y Barrantes (2003) señalan que los estudiantes perciben la geometría como una materia difícil. Es más, un grupo de estos la recuerdan como la más difícil. Con esto se ilustra que los educandos tienen una baja aprobación sobre el eje de geometría, más aún, se observa que es un eje que no se sienten cómodos y lo recuerdan con gran dificultad.

Por ende, se hace relevante estudiar los contenidos de este eje debido a las dificultades en los estudiantes, siendo esto una problemática para los docentes.

Dado esto se observa que el eje de geometría es dejado en la planificación de los profesores en las últimas unidades e incluso no se alcanza a ver dentro de los diferentes cursos.

De esta forma se genera un retraso, por la falta de contenido durante todos los años de la educación secundaria, Caro y Breccia (2009), señalan que en la enseñanza de la geometría, se presentan dificultades muy serias recalcando que en muchas ocasiones no se les enseña los contenidos de este eje a los estudiantes.

Debido a lo anterior, los autores aclaran que resulta habitual que los profesores desplazaran paulatinamente los contenidos relativos hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar.

Con esto se resalta la relevancia de abordar este eje en particular, ya que de por sí trae consigo una serie de problemáticas ya instauradas en las diversas comunidades escolares.

Esto lo podemos reafirmar en Gorgorio, Artigues, Banyuls, Moyano, Planas, Roca y Xifré (2000) que relatan que "a menudo parece que existen verdaderas dificultades para incorporar la geometría en los currículos efectivos de matemáticas. La geometría ha ido quedando relegada en los programas frente a otros aspectos de la educación matemática" (pp. 59).

Por estas razones se observa un déficit en los procesos de enseñanza-aprendizaje con relación a este eje, también se vislumbra que el conocimiento geométrico de los estudiantes en general es desigual y escaso (Gorgorio, Artigue, Banyuls, Moyano, Núria, Roca & Xifré, 2000).

Debido a lo antes mencionado se observa que este problema no se presenta solamente en la educación chilena, por el contrario, es un problema que se presenta de manera internacional, Alsina (2009) citando a Sawada (1999) señala que existen mayores oportunidades de aprender en álgebra, estadística y números, pero no en geometría. Ya que en la mayoría de los países se encuentran errados en los contenidos y métodos de enseñanza de la geometría.

Dado lo anterior, se logra vislumbrar una gran brecha en la enseñanza de la geometría, considerándola desigual en comparación a los otros ejes dentro de la matemática; número, algebra y datos y azar. Esto se observa de manera nacional e internacional y tanto en estudiantes como en profesores, por lo tanto, esta investigación se centra en el eje de geometría debido a las problemáticas presentes en ella, más específicamente en un contenido de este eje: el concepto de vector y sus componentes.

1.2. Problemática

Debido a la existencia de una problemática en la enseñanza-aprendizaje de la educación matemática donde se "reconoce también una distancia abismal existente entre lo que se enseña en la escuela y aquello que la sociedad demanda para una vida laboral plena y activa, quizás ello se deba a la percepción de que la matemática que vive en la escuela poco o nada tiene que ver con la vida cotidiana de los estudiantes" (Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini, 2015, pp 7).

Dada esta distancia, se problematiza una noción de la matemática el "vector". Dicha noción es considerada debido a que en el 2015 se realiza un ajuste curricular en los objetivos propuestos por el Ministerio de educación en el currículo de matemática, el objeto matemático a tratar fue trasladado desde primer año medio a séptimo básico, sin observar ningún tipo de modificación en su tratamiento (para más información vea el Capítulo 2, sección 2.2).

Los objetivos presentados por el Ministerio de Educación son los siguientes, el primero que se encuentra antes de la reforma es: “Notación y representación gráfica de vectores en el plano cartesiano y aplicación de la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas” (Ministerio de Educación, 2009). Y el segundo, luego de realizar un ajuste curricular posee la siguiente característica “Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica” (Ministerio de Educación, 2015).

Para cumplir los objetivos antes expuestos, el Ministerio de Educación propone dos secuencias de aprendizaje en los textos de estudios de cada nivel según corresponda (véase Capítulo 2, sección 2.2). En estos se observa que el ajuste curricular realizado fue modificar el nivel en el cual se formalizaba la noción de vector, debido a que en una primera instancia se encontraba en un primer año de enseñanza media, para ahora ser tratado en séptimo básico.

Cabe destacar que el tratamiento del concepto al ser ajustado, solo se le realizó un cambio de contexto (donde el ejemplo es con traslado de una mosca en primero medio, a un avión en séptimo básico), estas situaciones fueron entregadas por el Ministerio de educación, pero no son utilizadas en la construcción del concepto. Finalmente se formaliza la noción de vector de manera algebraica y al revisar los ejercicios propuestos para que desarrollen los estudiantes son muy similares en ambos niveles priorizando el desarrollo de estos de la misma forma antes expuesta.

Esto lleva a generar una controversia en lo planteado por el Ministerio de Educación, ya que este propone que la matemática es un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender y para la resolución de problemas (Ministerio de Educación, 2015), considerando lo antes mencionado se aprecia que en el tratamiento de la noción predomina una mirada algebrista, sin considerar la resolución de problemas ni facilitando los contenidos para que sean un medio para aprendizaje.

Por otro lado, autores como Henríquez & Montoya (2016) relatan sobre los *paradigmas geométricos* los cuales coexisten en la enseñanza de la geometría, en consideración a la mirada algebrista, esta se ubica en el GII, es por esto que los objetos geométricos son descritos por su definición o su propiedad. Esto apoya la controversia antes mencionada, debido a que es la primera vez que se trabaja en este paradigma, también recalcar que los estudiantes en sexto básico recién conocen las expresiones algebraicas.

Es por estas razones que surgen las siguientes interrogantes, ¿Cuáles son las situaciones que le dan sentido al vector? ¿Qué prácticas le permitieron al humano para que emerja tal concepto? ¿Cuáles son las prácticas que le dan sentido a la emergencia de este concepto?, a través de los diferentes constructos de esta investigación se darán respuestas a estas interrogantes.

1.3. Objetivos de Investigación

En el siguiente apartado se presentan los objetivos de esta investigación, en primer lugar se encuentra el objetivo general en el que se relacionan los componentes de este escrito para llegar a un fin común. Luego se ilustran los específicos, los que son las directrices a seguir para poder cumplir el objetivo general.

1.3.1. Objetivo General

Diseñar y validar una propuesta de enseñanza para la noción de vector en séptimo básico, a partir de un estudio socioepistemológico. Con el fin de fortalecer el uso de esta noción en contextos de movimiento y juegos.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Identificar el tratamiento del vector en diferentes instrumentos curriculares
- Analizar la epistemología de la noción de vector
- Diseñar una propuesta de enseñanza utilizando una metodología de juego
- Evaluar la propuesta de enseñanza a través de una ingeniería didáctica

Capítulo II: Análisis preliminar

En esta sección se presenta la relevancia que tiene la geometría y su influencia a lo largo de la historia, luego de esto se ilustra el tratamiento del vector propuesto por el Ministerio de Educación antes y después del ajuste curricular realizado en el año 2015. Continuando se vislumbra la progresión escolar del concepto a trabajar, mostrando cuándo se presenta la noción en años anteriores, ya sea implícita o explícitamente. Siguiendo con la relevancia que posee el juego en el desarrollo cognitivo de los estudiantes y cómo se relaciona con la educación matemática y finalmente se presentan diversas investigaciones en la que se ha trabajado con la noción de vector en distintos niveles educativos.

2.1. Relevancia de la geometría

Dado que el concepto de vector y sus componentes se encuentra en el eje de geometría, en este apartado se ilustra la relevancia de este eje mostrando como fue la construcción de esta noción a lo largo de los años.

En sus inicios la matemática buscaba solucionar problemas de la vida cotidiana, como por ejemplo, calcular el área de los terrenos para posteriormente cobrar un impuesto, dividir de forma equitativa los alimentos creando las fracciones, encontrar el valor del peso de un alimento a través de una ecuación de primer grado, etc. (Guerrero & Herrera, 2015). Estos ejemplos relatan la necesidad existente de comprender el mundo que nos rodea, y que la matemática fue un conocimiento que permitió al humano estudiar los fenómenos que surgieron durante las diversas épocas.

El estudio de la geometría (que tiene como significado medición de la tierra) fue uno de los afluentes para dar solución a las problemáticas planteadas, ya que es considerada como una herramienta para comprender e interactuar con el espacio en que vivimos, es quizá la parte más intuitiva, concreta y unida a la realidad de las matemáticas. (IMCI, 1998, pp. 337 citado en Blanco & Barrantes, 2003). Con esto se vislumbra la relevancia del eje de geometría en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, debido a que con los contenidos que este ofrece se logra relacionar el entorno en el que vivimos con la matemática.

Caro & Breccia (2009) señalan que “la geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación”(pp.85), con esto se hace relevante que los educandos sean parte de esta noción, donde se desarrollan diversas habilidades que además sirven en los otros ejes de la matemática.

Debido a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, fue necesario realizar un cambio de mirada dentro de la educación chilena, por estas razones es que Guerrero & Herrera (2015) relatan que, en los años 2000, 2002, 2003-2004, 2009-2010, 2014-2015 y 2016, se plasma la inclusión de nuevos contenidos en el eje de geometría.

Dado lo antes mencionado, se problematiza este eje de la matemática, ya que se puede observar en los textos de estudio que existen, una preponderancia al desarrollo algebraico dentro de los problemas geometricos, en este sentido Sánchez (1997) expresa que los contenidos trabajados en el eje de geometría se convierten en capítulos de álgebra lineal.

Finalmente, es menester dar otro enfoque a la enseñanza de la geometría, para que la visión de este no se centre en la mirada algebrista, es por esto que Alsina (2009), señala que el material didáctico, juega un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, debido a que mejora el entendimiento de los estudiantes.

Notando la relevancia que tiene la geometría en el desarrollo de la matemática en sí, se pretende desarrollar una propuesta de enseñanza para el eje de geometría. Con la que se busca interectuar con la realidad. Especificamente se trabaja con un contenido que se encuentra dentro de este eje en particular, este es el concepto de vector.

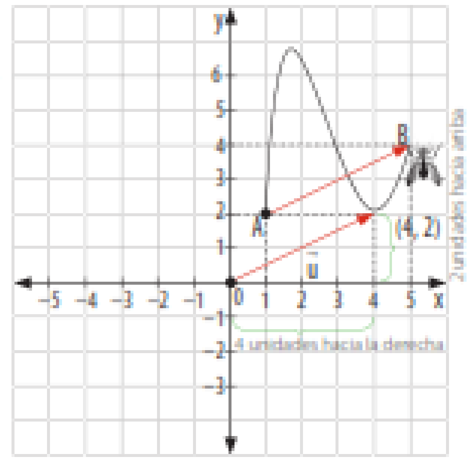
2.2. Marco curricular y textos de estudio

En este apartado, se presenta el tratamiento del concepto de vector antes del ajuste curricular realizado el año 2015, para luego mostrar los cambios realizados después de dicho ajuste.

En el marco curricular anterior al año 2015, el concepto de vector aparece en el eje de geometría en primer medio, cumpliendo el siguiente objetivo específico "Notación y representación gráfica de vectores en el plano cartesiano y aplicación de la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas" (Ministerio de Educación, 2009), para cumplir lo antes propuesto el texto de estudio de primero medio entregado por el ministerio de educación nos recomienda seguir la secuencia.

Pablo estaba observando una mosca cuyo movimiento lo imaginó representado en el plano cartesiano ¿Cómo podría representar geométricamente su trayectoria?

Pablo podría representar el desplazamiento de la mosca a través de un vector $\overrightarrow{AB}$ que se denomina vector de desplazamiento. Para ello puede seguir los pasos:



Paso 1 Identificar el punto final e inicial del desplazamiento.
Es posible visualizar que la abscisa del punto A se incrementa en 4 unidades y que su ordenada se incrementa en 2, por lo tanto, el punto inicial es (1, 2) y el final es $(1 + 4 = 5) \rightarrow (2 + 2 = 4) \rightarrow (5, 4)$.

Paso 2 Determinar las coordenadas o componentes del vector de desplazamiento.
Para ello se restan las abscisas de los puntos final e inicial y luego se restan las ordenadas de los mismos.

$$\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (1, 2) = (5 - 1, 4 - 2) = (4, 2)$$

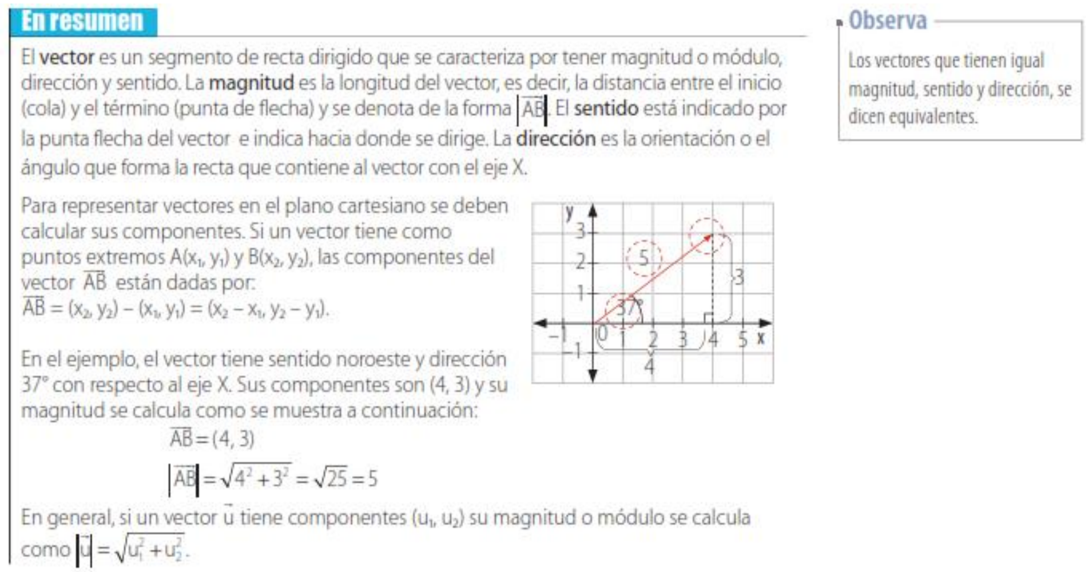
Paso 3 Identificar el vector desplazamiento.
Es el vector $\vec{u}$, que tiene origen o inicio en el punto (0, 0) y extremo o final en (4, 2), y corresponde a $\overrightarrow{AB}$ trasladado al origen del plano cartesiano.

Razona y comenta

- ¿Qué vector representaría el desplazamiento de la mosca desde su posición final a la inicial? ¿Qué diferencias tiene con el vector $\overrightarrow{AB}$?
- Si la mosca vuela hasta el origen y luego se desplaza al punto (4, –2), ¿cuál es el vector que representa este desplazamiento? ¿Qué diferencia tiene con $\overrightarrow{AB}$?
- Si la mosca se desplaza desde el punto (2, 1) hasta el punto (6, 3), ¿cuál es el vector de desplazamiento? ¿Qué diferencia tiene con el vector $\overrightarrow{AB}$?

Figura 2-1: Problematización del vector por el texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2015, pp 180).

En la imagen se observa que el contenido trabajado se presenta a través de su representación gráfica, ilustrando que los educandos no son partes del proceso de construcción del conocimiento. Es más, se vislumbra que ocupan el vector desplazamiento un conocimiento que no han trabajado con anterioridad desplazamiento.



En resumen

El **vector** es un segmento de recta dirigido que se caracteriza por tener magnitud o módulo, dirección y sentido. La **magnitud** es la longitud del vector, es decir, la distancia entre el inicio (cola) y el término (punta de flecha) y se denota de la forma $|\overline{AB}|$. El **sentido** está indicado por la punta flecha del vector e indica hacia donde se dirige. La **dirección** es la orientación o el ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje X.

Para representar vectores en el plano cartesiano se deben calcular sus componentes. Si un vector tiene como puntos extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las componentes del vector $\overline{AB}$ están dadas por:
$\overline{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

En el ejemplo, el vector tiene sentido noroeste y dirección 37° con respecto al eje X. Sus componentes son (4, 3) y su magnitud se calcula como se muestra a continuación:

$$\overline{AB} = (4, 3)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

En general, si un vector $\vec{u}$ tiene componentes (u_1, u_2) su magnitud o módulo se calcula como $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Observa

Los vectores que tienen igual magnitud, sentido y dirección, se dicen equivalentes.

Figura 2-2: Definición del vector según texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2015, pp 181).

Se ilustra que luego de presentar la situación antes planteada, se formaliza el conocimiento sin antes trabajar o vislumbrar los componentes del vector. En esta institucionalización se observa que es de manera algebraica y muestra **TODOS LOS COMPONENTES DEL VECTOR**, nombrándolos y dándole las definiciones.

También se aprecia que los educandos no son parte de la construcción de estos componentes, debido a que se entrega la formalización del concepto, es más dejan de lado el contexto para trabajar con las definiciones de manera algebraica. Luego de esto, se presentan una serie de ejercicios los cuales deben realizar los estudiantes:

Representa los siguientes puntos en el plano cartesiano.

a) A(−5, 8) **c)** C(6, −3) **e)** E(−5;7,6)

b) B(−1, −2) **d)** D(8, 15) **f)** $F\left(-\frac{1}{4};2,9\right)$

Figura 2-3: Ejercicios entregados por el texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2015, pp.181)

7. **Calcula** las componentes de los siguientes vectores.

$\overrightarrow{MN}$; si M(5,2) y N(-3,-6)
$\overrightarrow{MN}$ = N(−3, −6) − M(5, 6) = (−3 − 5, −6 − 6) = (−8, −12)

a) $\overrightarrow{AB}$; si A(5, 6) y B(0, 1).

b) $\overrightarrow{CD}$; si C(−1, 3) y D(−4, 5).

c) $\overrightarrow{EF}$; si E(−3, −8) y (−9, −3)

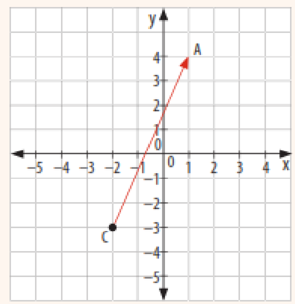
d) $\overrightarrow{GH}$; si G(1,1; 3) y H(4,1; 3).

e) $\overrightarrow{IJ}$; si $I\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $J\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}\right)$

f) $\overrightarrow{KL}$; si $K\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ y L(−0,5; −3).

Figura 2-4: Ejercicios entregados por el texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2015, pp.182)

11. **Descubre el error.** La profesora de Fabián le pide que a partir del vector dibujado en plano cartesiano, indique las componentes del vector $\overline{CA}$.



Luego, Fabián hizo el siguiente procedimiento:
$\overline{CA}$ = C(−2, −3) − A(1, 4) = (−2 − 1, −3 − 4) = (−3, −7)
¿Cuál es el error que cometió Fabián en su procedimiento?

Figura 2-5: Ejercicios entregados por el texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2015, pp.183)

En las imágenes se observar que el tratamiento del vector toma una posición más algebrista, pese a que se encuentra en el eje de geometría. En un comienzo se entrega un contexto enfocándose en el movimiento de una mosca (dicho movimiento no asume relevancia en la identificación de los conceptos trabajados), este no es utilizado para la construcción del conocimiento ni los componentes que este posee, mas aún, en la formalización y en los ejercicios propuesto el contexto es dejado de lado, en dónde se prioriza el desarrollo algebraico de los vectores, mas que los procesos geométricos que deben considerar los estudiantes.

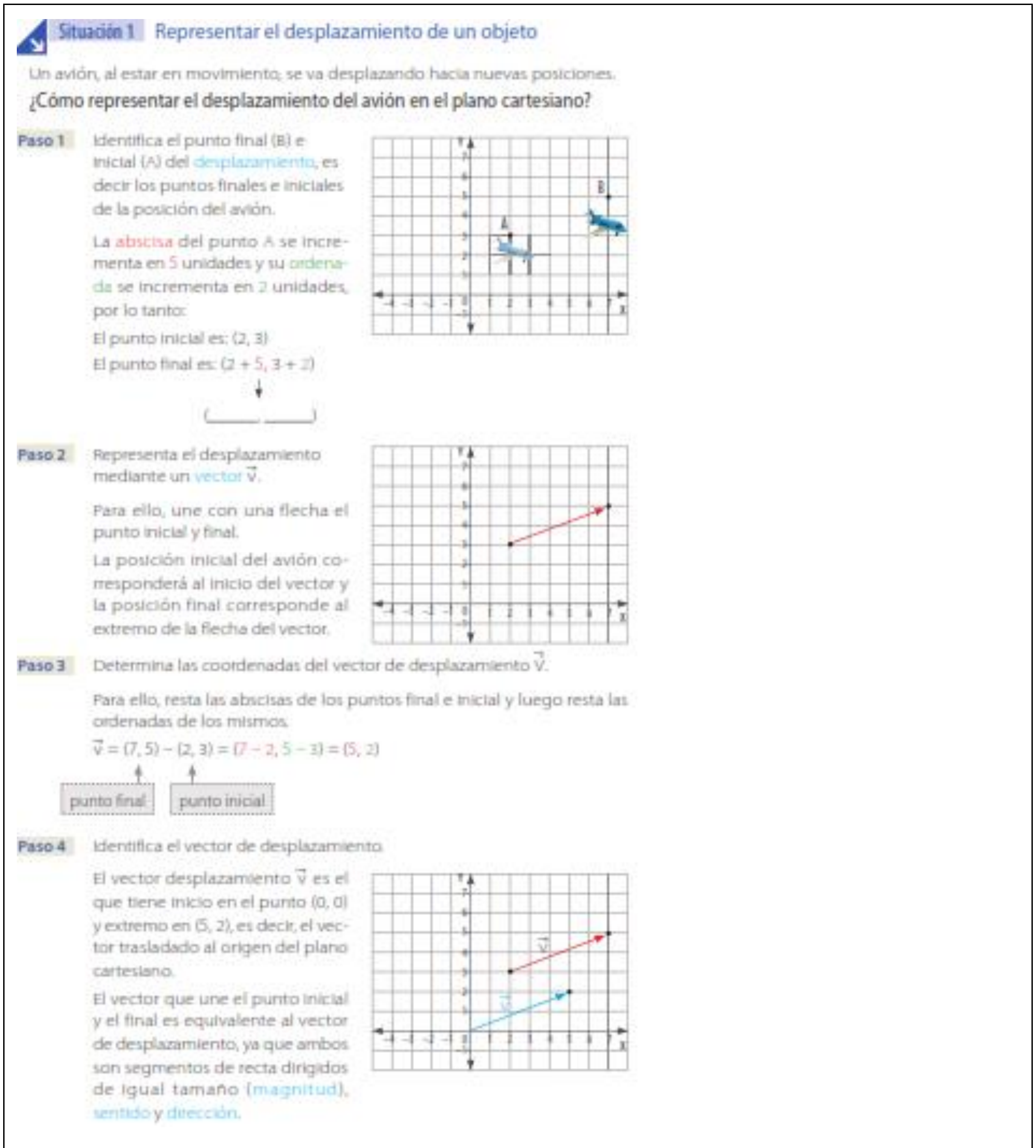
Con esto se deja de lado la posibilidad de que un educando comprenda los componentes de un vector, ya que solo fueron nombrados en la institucionalización del concepto, no siendo considerados en el proceso de construcción del conocimiento para así tener un mejor entendimiento de los que se está trabajando.

Se vislumbra que la noción trabajada no relaciona el contexto ficticio propuesto y la resolución de problema para facilitar el aprendizaje de los educandos, siendo este el enfoque que propone el Ministerio de Educación.

En el año 2015 se realiza un ajuste curricular en la educación chilena, el concepto a trabajar se encuentra en séptimo básico, en el eje de geometría. Este posee el siguiente **aprendizaje esperado** "Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica" (Ministerio de Educación, 2015). Para dicho aprendizaje, los indicadores de evaluación que indican las nuevas bases curriculares son los siguientes:

- Construyen segmentos y figuras en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, usando coordenadas enteras.
- Dibujan figuras 2D a partir de los pares de coordenadas dadas, y leen y comunican las coordenadas de figuras 2D dadas en el sistema de coordenadas.
- Conjeturan la forma y la ubicación de figuras 2D (rectángulo, cuadrado, paralelogramo y trapecio) a partir de los cuatro pares de coordenadas dadas, y las verifican pictóricamente.
- Dibujan figuras 2D y descubren que las formas se mantienen si se traslada el sistema, aunque las coordenadas se cambian.

Como se observa en los indicadores, no se habla sobre la noción de vector y sus componentes, debido a esto se recurrió al texto de estudio de este nivel, para analizar el tratamiento que propone el ministerio en este concepto, esta secuencia se vislumbra de la siguiente forma:



Situación 1 Representar el desplazamiento de un objeto

Un avión, al estar en movimiento, se va desplazando hacia nuevas posiciones.

¿Cómo representar el desplazamiento del avión en el plano cartesiano?

Paso 1 Identifica el punto final (B) e inicial (A) del desplazamiento, es decir los puntos finales e iniciales de la posición del avión.

La abscisa del punto A se incrementa en 5 unidades y su ordenada se incrementa en 2 unidades, por lo tanto:

El punto inicial es: (2, 3)

El punto final es: (2 + 5, 3 + 2)

(____, ____)

Paso 2 Representa el desplazamiento mediante un vector $\vec{v}$.

Para ello, une con una flecha el punto inicial y final.

La posición inicial del avión corresponderá al inicio del vector y la posición final corresponde al extremo de la flecha del vector.

Paso 3 Determina las coordenadas del vector de desplazamiento $\vec{v}$.

Para ello, resta las abscisas de los puntos final e inicial y luego resta las ordenadas de los mismos.

$\vec{v} = (7, 5) - (2, 3) = (7 - 2, 5 - 3) = (5, 2)$

punto final punto inicial

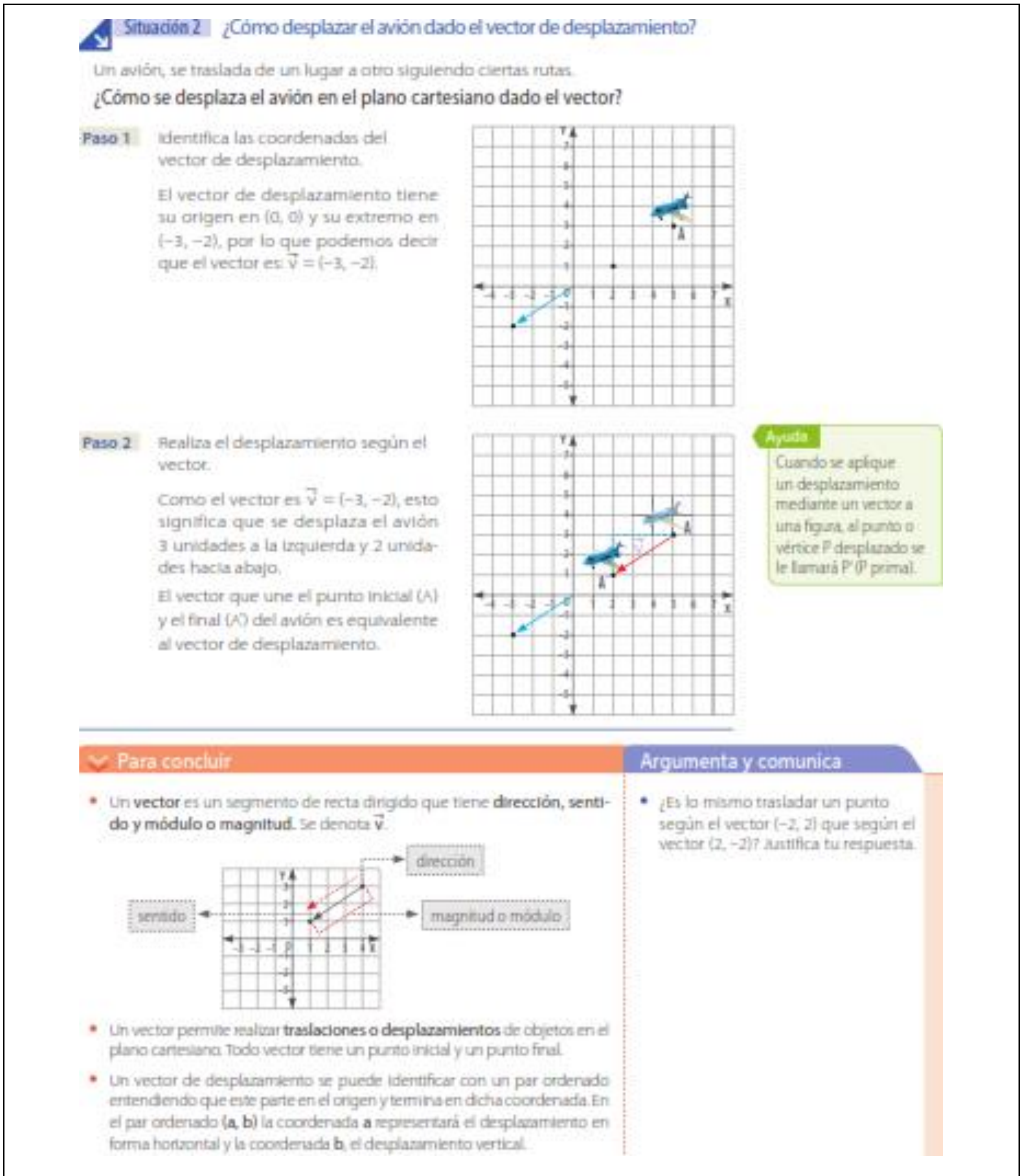
Paso 4 Identifica el vector de desplazamiento.

El vector desplazamiento $\vec{v}$ es el que tiene inicio en el punto (0, 0) y extremo en (5, 2), es decir, el vector trasladado al origen del plano cartesiano.

El vector que une el punto inicial y el final es equivalente al vector de desplazamiento, ya que ambos son segmentos de recta dirigidos de igual tamaño (magnitud), sentido y dirección.

Figura 2-6: Problematización del vector por el texto de estudio de séptimo básico (MINEDUC 2016, pp 262).

Se observa en la imagen el tratamiento del vector es similar a lo presentado en primer año medio, solo realizando un cambio de contexto de una mosca a un avión. Se repite la idea de desplazamiento de la figura y excluye al estudiante de la construcción de los componentes del vector.


Situación 2 ¿Cómo desplazar el avión dado el vector de desplazamiento?

Un avión, se traslada de un lugar a otro siguiendo ciertas rutas.

¿Cómo se desplaza el avión en el plano cartesiano dado el vector?

Paso 1 Identifica las coordenadas del vector de desplazamiento.

El vector de desplazamiento tiene su origen en (0, 0) y su extremo en (−3, −2), por lo que podemos decir que el vector es: $\vec{v} = (-3, -2)$.

Paso 2 Realiza el desplazamiento según el vector.

Como el vector es $\vec{v} = (-3, -2)$, esto significa que se desplaza el avión 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo.

El vector que une el punto inicial (A) y el final (A') del avión es equivalente al vector de desplazamiento.

Ayuda

Cuando se aplique un desplazamiento mediante un vector a una figura, al punto o vértice P desplazado se le llamará P' (P prima).

Para concluir

- Un **vector** es un segmento de recta dirigido que tiene **dirección, sentido y módulo o magnitud**. Se denota $\vec{v}$.

- Un vector permite realizar **traslaciones o desplazamientos** de objetos en el plano cartesiano. Todo vector tiene un punto inicial y un punto final.
- Un vector de desplazamiento se puede identificar con un par ordenado entendiendo que este parte en el origen y termina en dicha coordenada. En el par ordenado **(a, b)** la coordenada **a** representará el desplazamiento en forma horizontal y la coordenada **b**, el desplazamiento vertical.

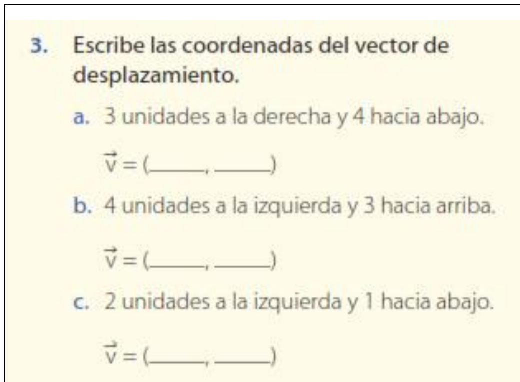
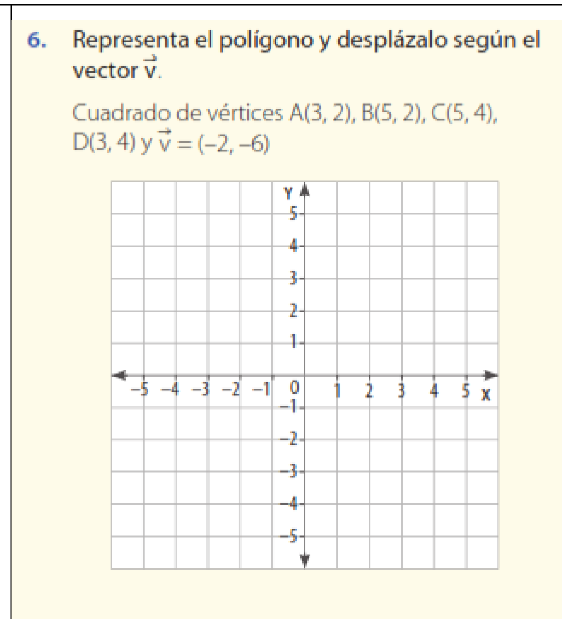
Argumenta y comunica

- ¿Es lo mismo trasladar un punto según el vector (−2, 2) que según el vector (2, −2)? Justifica tu respuesta.

Figura 2-7: Situación 2 y definición del vector según texto de estudio de primero medio (MINEDUC 2016, pp 263).

Se ilustra que al igual que en primero medio el contenido es formalizado de manera algebraica con lo cual excluye a los estudiantes en la construcción de los componentes del vector. Cabe recalcar que entrega concepto y definiciones en dicha institucionalización.

En las siguientes imágenes del texto de estudio nos encontramos con los ejercicios propuestos, estos son:

 **3.** Escribe las coordenadas del vector de desplazamiento. a. 3 unidades a la derecha y 4 hacia abajo. $\vec{v} = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$ b. 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba. $\vec{v} = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$ c. 2 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo. $\vec{v} = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$	 **6.** Representa el polígono y desplázalo según el vector $\vec{v}$. Cuadrado de vértices A(3, 2), B(5, 2), C(5, 4), D(3, 4) y $\vec{v} = (-2, -6)$
Figura 2-8: Ejercicios entregados por el texto de estudio de séptimo básico (MINEDUC 2015, pp. 264)	**Figura 2-9:** Ejercicios entregados por el texto de estudio de séptimo básico (MINEDUC 2015, pp. 265)

En las ilustraciones se observa que no se cumple una parte del aprendizaje esperado que dice “vectores de forma concreta (juegos)”, más bien lo propuesto por el texto del estudiante se centra en el trabajo algebraico sobre el vector. Se utiliza un contexto al igual que en el curso anterior, el que no es considerado para que los estudiantes vayan construyendo el concepto de vector.

Luego se presenta la formalización del vector de forma algebraica. Al trabajar con los ejercicios propuestos se observa la predominancia hacia el álgebra. Los estudiantes deben realizar suma de vectores, lo que no está contemplado en los objetivos y tampoco en el trabajo previo de los educandos.

Como se notó el ajuste curricular realizado fue modificar el nivel en el que se formalizaba la noción de vector, donde en una primera instancia se encontraba en un primer año de enseñanza media, para ahora ser tratado en un séptimo básico. También se destaca que el tratamiento del concepto al ser ajustado, solo se realizó un cambio de contexto (de una mosca en primero medio, a un avión en séptimo básico), siendo los ejercicios propuestos muy similares en ambos niveles y no cumpliendo con los objetivos propuestos, debido a que no se encuentra presente la idea de juego.

Por esto motivos esta investigación se propone desarrollar un análisis socioepistemológico, con el fin de reconocer las prácticas que permiten el surgimiento de la noción de vector. De tal forma de proponer un diseño de situación que resalte el uso de lo vectorial en un escenario lúdico para niños de 7 básico.

2.3. Progresión escolar de la noción de vector

En esta sección se presenta cuando los estudiantes de manera implícita o explícita trabajan con el concepto de vector. El tratamiento de esta noción se observa de manera explícita en cuarto año de enseñanza básica en la asignatura de ciencias naturales, luego se presenta de manera implícita cuando utilizan el concepto de vector en un quinto año de enseñanza básica, en matemática.

En cuarto año de enseñanza básica, se vislumbra el concepto en la asignatura de ciencias naturales, el aprendizaje esperado es el siguiente: Demostrar, por medio de la investigación experimental, los efectos de la aplicación de fuerzas sobre objetos, considerando cambios en la forma, la rapidez y la dirección del movimiento, entre otros (Ministerio de Educación, 2015), para cumplir dicho aprendizaje, el texto de estudio propone la siguiente secuencia.

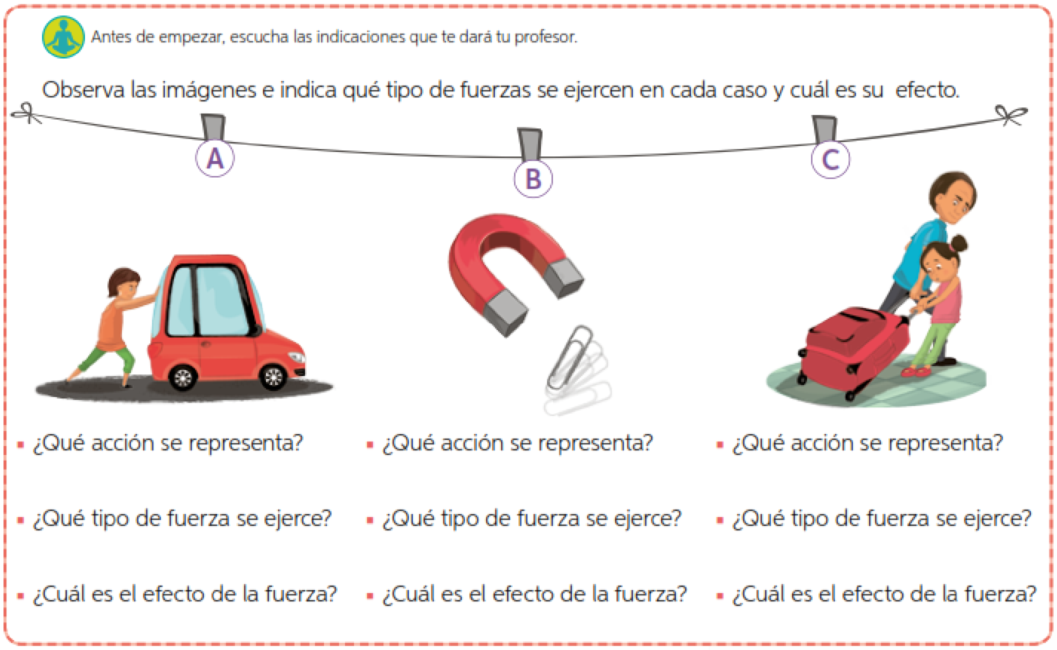


Figura 2-10: Actividad que muestra cómo se trabaja el concepto de fuerza en cuarto de enseñanza básica (MINEDUC. 2018, pp.166).

Como se ilustra en la imagen expuesta, no se trabaja con el concepto de vector en sí, se representa la fuerza realizada por diferentes objetos o personas. En consideración de dicha representación se espera que los estudiantes presenten sus respuestas de forma escrita o dibujando estas fuerzas.

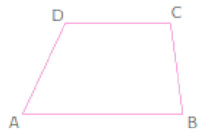
Cabe recalcar que la fuerza es una magnitud vectorial, por esta razón se considera que los estudiantes trabajan con la noción de vector antes de que se exponga formalmente dicho concepto.

El aprendizaje esperado en quinto año de enseñanza básica es: Demostrar que comprenden el concepto de congruencia, usando la traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico (Ministerio de Educación, 2015), a través de sus planes y programas proponen seguir lo siguiente.

2

Comprueban congruencia de lados en cuadriláteros trasladados. Por ejemplo:

a trasladan el cuadrilátero A B C D, puesto en una cuadrícula, según la indicación: 5 hacia la izquierda y 3 unidades hacia abajo



› denotan mediante A'B'C'D' el cuadrilátero que se obtiene producto de la traslación

Resuelven:

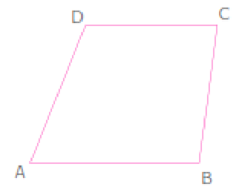
› en los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D':
  - **a** La medida de los lados AB y A'B' es ____________
  - **b** La medida de los lados BC y B'C' es ____________
  - **c** La medida de los lados CD y C'D' es ____________
  - **d** La medida de los lados AD y A'D' es ____________

Contestan la siguiente pregunta:

› ¿qué concluye respecto de la longitud de los lados de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'?

Figura 2-11: Ejercicios propuesto por el plan y programa de quinto básico (MINEDUC 2015, pp. 97).

b trasladan ahora el cuadrilátero ABCD de la figura, que está en una cuadrícula, 6 unidades hacia abajo y 7 unidades hacia la derecha.



› denotan mediante A'B'C'D' el cuadrilátero que se obtiene producto de la traslación.

Completan:

› en los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D':
  - **a** la medida de los ángulos DAB y D'A'B' es ____________
  - **b** la medida de los ángulos ABC y A'B'C' es ____________
  - **c** la medida de los ángulos BCD y B'C'D' es ____________
  - **d** la medida de los ángulos ADC y A'D'C' es ____________

Responden la pregunta:

› ¿Qué concluye respecto de la medida de los ángulos de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'?

Figura 2-12: Ejercicios propuesto por el plan y programa de quinto básico (MINEDUC 2015, pp. 98).

Al momento de trasladar la figura mediante coordenadas, usan implícitamente el concepto de vector, dándole un sentido y una dirección.

Con esto se observa que la noción de vector se encuentra dentro del currículo chileno antes de que sea expuesto como contenido como tal, teniendo diferentes tratamientos, pero trabajando con la noción en sí.

En consideración de las dos actividades antes expuestas se refuerza la idea de los componentes del vector presentes en el vector, debido a que la fuerza posee magnitud y sentido. Y las trasformaciones isométricas poseen una figura original y final (se hace alusión al punto inicial y punto final)

2.4. El juego dentro de la matemática

En este apartado se trabaja con la noción de juego dentro de la educación matemática, relatando la relevancia que asume este concepto en los procesos de aprendizajes de los estudiantes. Esto es considerado debido a que como fue expuesto en este escrito el objetivo a trabajar desde el 2015 en adelante incluye dicha idea para proponer el concepto de vector.

Para tal fin, se estudia el juego debido a que existen diversas razones para utilizar esta estrategia didáctica dentro del aula. Las que según Muñiz-Rodríguez, Alonso y Rodríguez-Muñiz (2014); son actividades atractivas para los estudiantes, encontrándolas novedosas. Favoreciendo las relaciones sociales y el trabajo en equipo.

Butler (1988) citado en González, Molina y Sánchez (2014) relata que la motivación es la principal ventaja del juego, reportando que al utilizar este recurso didáctico incrementa la habilidad de resolución de problemas. Con esto se ilustra que al recurrir a esta noción dentro de una actividad los estudiantes llegan con otra perspectiva para desarrollar alguna noción en particular.

Hirsh-Pasek (2007) comenta que los niños aprenden mejor en ambientes lúdicos, a través de juegos guiados. Por añadidura el juego tiene un efecto positivo, flexible, que deja contentas a las personas.

Dado lo antes mencionado, el uso del juego en la educación matemática es una estrategia que permite adquirir competencias de una manera divertida y atractiva.

También se observa una serie de ventajas dentro del currículo de matemática, donde se distinguen las siguientes; rompe la rutina de los ejercicios mecánicos, les proporciona autoestima-autovaloración, conduce a investigar nuevas estrategias para resolver problemas y finalmente requiere la partición activa de los alumnos en la resolución de problemas (Muñoz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñoz, 2014; Gómez, 1990).

Con esto se ilustra una serie de ventajas para agregar actividades relacionadas con el juego dentro de las prácticas pedagógicas, mas aún se observa beneficios cognitivos al momento de relacionar dicha noción en el currículo de matemática. Con este fin se pretende incorporar el juego en una propuesta de enseñanza de la geometría, en la que se trabaja con la noción de vector, estimando la construcción de los componentes que este posee.

2.5. Enseñanza del vector

En esta sección se presentan las diferentes investigaciones donde se observa la enseñanza de la noción de vector, de manera implícita o explícitamente, y en los diversos niveles educativos en que se instaura esta noción (básico, medio o superior).

Miranda (2004), propone un modelo de enseñanza-aprendizaje en álgebra lineal, el autor relata que existen dificultades en el aprendizaje de esta noción, debido a que los contenidos abarcados en esta materia son a partir de la definición de vectores, espacios vectoriales, bases y transformaciones lineales. El investigador recalca que uno de los conceptos importantes dentro del álgebra lineal es la noción de vector y la de espacios vectoriales.

Dado esto, se ilustra la relevancia que toma el concepto de vector dentro de la educación superior y lo elemental que es, dentro del álgebra lineal.

Flores-García, González-Quezada, Alfaro-Avena, Hernández-Palacios, Barrón-López & Chávez-Pierce (2015), plantean una investigación dónde detectan y caracterizan las dificultades que poseen los alumnos en el aprendizaje de las operaciones con suma de vectores en su contexto. Los autores nos proponen que para entender la mecánica Newtoniana, es necesario tener un entendimiento sobre la suma de vectores.

Dentro del escrito antes mencionado, los investigadores muestran estudios sobre la noción de vector, una de ella es Knight (1995), explorando las habilidades de los estudiantes en reconocer, utilizar y evaluar los vectores y sus componentes. Concluyendo que la mayoría de los estudiantes inician los cursos introductorios con falencia en el conocimiento de vectores.

El otro estudio es de Nguyen y Meltzer (2003), realizaron una evaluación en estudiantes universitarios e identifican como realizan la suma de vectores, en donde se ilustra que los estudiantes tienen una preponderancia a contestar utilizando el álgebra de la suma de vectores.

Se observa que dentro de esta investigación se estudia una de las operaciones con los vectores; la suma, tomando relevancia la dificultad que poseen los estudiantes al momento de trabajar con esta componente.

Salgado & Trigueros (2014), proponen una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios basada en la teoría APOE, en donde reportan los resultados obtenidos por estudiantes en los contenidos del álgebra lineal antes expuestos, mostrando dificultad en el aprendizaje de estos contenidos.

Cabe señalar, que la noción de vector se encuentra implícitamente dentro de álgebra lineal. Los autores comentan las dificultades presentes dentro del aprendizaje de esta noción están relacionadas con la naturaleza de los conceptos. Debido a esto se observa que la noción de vector asume relevancia en el desarrollo del álgebra lineal.

Costa, Arlego & Otero (2014), presentan una investigación que plantea una propuesta de enseñanza del Cálculo Vectorial en el contexto de una Facultad de Ingeniería, bajo la teoría de las transposiciones didácticas. Este estudio ilustra la noción de vector de forma implícita, donde se trabaja con el cálculo vectorial teniendo como base el concepto de vector dentro de sus lineamientos.

Gutiérrez & Martin (2015) muestran las dificultades en el entendimiento de conceptos vectoriales y operaciones con vectores. Los autores relatan la importancia de alcanzar la comprensión total de las propiedades básicas de los vectores, para entender correctamente el mecanismo implícito en las operaciones entre vectores. A la vez se ilustra la importancia que tiene la relación de los fenómenos naturales con la enseñanza y el aprendizaje de la física. (Fernández ,2009 citado en Gutiérrez & Martin, 2014).

En este escrito se observa la relevancia que toma el concepto de vector dentro del estudio de las operaciones entre los vectores, con esto se vislumbra la necesidad de entender esta noción y sus componentes para evitar las dificultades presentes en los estudiantes. También recalcan la relación existente de dicho concepto con los fenómenos naturales.

Chi-Pool, Martin-González, Menéndez-Domínguez & Espinoza-Romero (2018), proponen un estudio que presenta los resultados sobre un sistema de realidad aumentada para asistir el aprendizaje de vectores en física para estudiantes. Estos plantean que la enseñanza de las ciencias básicas siempre ha sido una problemática más aún cuando se trabaja con la noción de vector y su relación con la vida real.

Cabe destacar que este artículo se ilustra la necesidad de relacionar los conceptos de la física-matemática con la vida real, más aún se presentan los vectores como entidades geométricas que caracterizan cantidades físicas, debido a que poseen magnitud y dirección.

Fernández, Báez & López (2015), han caracterizado los procesos de enseñanza del Álgebra de Vectores dentro de la física, bajo la perspectiva de la educación matemática. Los autores comentan que hablar de vectores en las aplicaciones físicas, es hablar de matemática como herramienta para trabajar los diferentes conceptos físicos.

Los autores reconocen la relevancia de la matemática para desarrollar los conceptos físicos. En este punto se ilustra la relevancia que posee la noción de vector dentro de la educación matemática.

Parraguez, Lezama & Jiménez (2016), analizan la forma con que aprenden los estudiantes universitarios, se muestra como los estudiantes trabajan con el concepto de coordenadas de un vector, pero poseen dificultades para utilizarlo en la construcción de la matriz de coordenadas de vectores.

Los autores relatan que en la teoría de cambio de base se hace uso del concepto de coordenadas de vectores. Con esto se vislumbra la necesidad de trabajar con los vectores y sus componentes para los conceptos utilizados en la matemática y la física universitaria.

Martín, Pérez & Martínez-López (2017), desarrollan una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de espacio vectorial. En este escrito se evidencian insuficiencias en la concepción didáctica del concepto de espacio Vectorial, esto trae consigo que los estudiantes coloquen un mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos y tengan dificultad en la compresión del significado del concepto.

En esta investigación se evidencia la falta de propuestas didácticas en las que se abarcan los conceptos de espacios vectoriales, más aún queda implícito el uso de la noción de vector dentro de los espacios vectoriales.

González (2017), plantea el uso de las TIC en la estrategia didáctica de la física, específicamente en el contenido de la suma de vectores en el nivel Medio Superior de la Universidad, los investigadores plantean que en el área de la física la mayor dificultad se presenta en el concepto de vector, más específicamente en la suma vectorial. Aquí se observa la necesidad de trabajar con dicho concepto, debido a que se presentan dificultades en el entendimiento de la noción de vector.

Finalmente se encuentra Gallardo, Flores, Aguilar & Pérez (2018), exponen un método de trabajo en los análisis cinemáticos de orden superior del cuerpo rígido debido a que está basado en derivadas temporales de vectores que relacionan cuerpos rígidos en movimiento general. En esta investigación se propone trabajar con vectores de forma implícita.

Como se puede observar en los estudios antes realizados, se denota la necesidad de investigar los diversos campos del vector, debido a que se encuentra una escases de propuestas didácticas en torno a esta noción, ya sea implícita o explícitamente. También se plasma la necesidad de relacionar dicho concepto con la realidad y las dificultades que este trae en los diversos niveles educativos. Dado esto, se estudia la noción de vector y sus componentes desde la relación entre la realidad y la matemática, con esto se pretende realizar la conexión entre uno de sus usos, el movimiento y sus componentes dentro de la matemática.

Capítulo III: Marco Teórico

En el siguiente apartado se presenta el sustento teórico de esta investigación, en donde se trabaja con el constructo teórico de la Socioepistemología y los componentes de este; el discurso matemático escolar y los fenómenos de adherencia, opacidad y exclusión. Luego de esto, se encuentra una epistemología del vector en la que se presenta el nacimiento del concepto de vector, para continuar con la epistemología y finalmente se exponen los componentes matemáticos que este posee.

3.1. Socioepistemología

La Socioepistemología es una aproximación que se encuentra dentro de la matemática educativa, tiene como fin abordar la producción y difusión del conocimiento bajo la mirada de múltiples perspectivas, explicando la construcción social del conocimiento matemático, integrando el estudio de las epistemologías del conocimiento, la dimensión sociocultural y los procesos cognitivos asociados (Cantoral y Farfán, 1998, citado en Cordero, 2006; Cantoral y Farfán, 2003, citado en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006; Cordero, 2016; Espinoza y Jiménez, 2004).

Dado lo antes mencionado, en esta investigación se consideran los parámetros que este sustento teórico posee, debido a que se propone estudiar los conocimientos matemáticos a través de su construcción social, tal y como menciona Cantoral y Reyes-Gasperini (2015) "una visión socioepistemológica asume a las prácticas sociales como la base de la construcción del conocimiento matemático de toda persona" (pp.98).

Según Gómez y Cordero (2013); Gómez y Cordero (2010); Opazo, Cordero y Silva-Crocci (2017); Gómez y Cordero (2016); Reyes (2016), indican que la Socioepistemología entrega la categoría de matemática funcional cambiando el foco de los objetos matemáticos y llevándolo hacia las prácticas, con esto se pretende que se logre un aprendizaje con bases en los usos del conocimiento.

Por lo tanto, es menester darle un vuelco a la mirada tradicionalista del concepto de vector, y se comience a trabajar con los usos que este propone. Debido a lo antes mencionado en esta investigación se trabaja con uno de los principales usos de vector "el movimiento", construyendo los componentes de este bajo esta noción, tal y como se presenta en la sección 3.4.2, llamado epistemología.

En Cordero (2005) citado en Cordero y Gómez (2010), la funcionalidad permite entender la naturaleza dual de la matemática, la que integra a la vida para transformarla.

Con el fin de desarrollar el pensamiento matemático la Socioepistemología incorpora cuatro componentes, estas son; la dimensión cognitiva (propias del funcionamiento mental), la dimensión didáctica (propias de la conformación de sistemas didácticos), la dimensión epistemológica (propias de la naturaleza y significados del pensamiento matemático) y finalmente la dimensión social (la síntesis de los objetos y herramientas de una sociedad) (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014; Espinoza y Jiménez, 2004; Montiel, 2015; Crespo, 2007).

En particular, la Teoría Socioepistemológica descansa en estos cuatro principios fundamentales que se explican de manera articulada y sustentan la idea fundamental de la Socioepistemología (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015)

En cuanto a la dimensión cognitiva, Cantoral et al. (2006); Soto y Cantoral (2014) señalan que ha reducido a la acción de apropiarse de objetos que existen objetiva y previamente, a la experiencia humana, haciendo alusión a las representaciones o construcciones mentales de los conceptos.

Sobre la dimensión epistemológica, se pretende estudiar la naturaleza y desarrollo de las nociones, considerando que el conocimiento es situado y que debemos tomar en cuenta la organización de los grupos humanos que los llevan a construir conocimiento matemático de una forma y no de otra. (Soto 2013; y García y Cantoral 2003)

Sobre la dimensión didáctica, Soto (2013), plantea que se deben estudiar los procesos de institucionalización del conocimiento en el aula. Soslayando que el conocimiento se manifiesta a través de sus usos, no sólo en lo institucional sino también en diferentes contextos: cotidiano, cultural, histórico entre otros.

Finalmente se encuentra la dimensión social, Cantoral & Reyes-Gasperini (2014) postulan que los conocimientos abstractos y aislados de la realidad, no solo están asociados a abstracciones como lo presenta el discurso matemático escolar, sino que tiene un carácter funcional, situacional, histórico que está al nivel de la actividad.

La siguiente imagen, presentan las cuatro dimensiones según Cantoral y Farfán citado en Soto (2013).

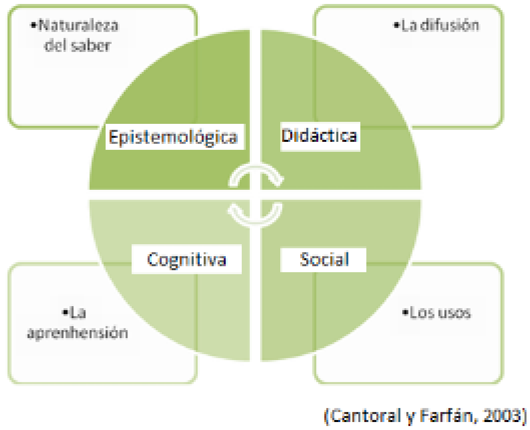


Figura 3-1: Dimensiones de la Socioepistemología. (Cantoral & Farfán, 2003)

Dadas estas cuatro dimensiones que propone la Socioepistemología, y teniendo en cuenta que esta investigación se encuentra bajo esta perspectiva, se presenta la siguiente tabla en la que se relaciona estos cuatros componentes de la Socioepistemología con la problematización del vector.

Tabla 3-I: Relación del vector con las dimensiones de la Socioepistemología

Dimensiones de la Socioepistemología	Noción de vector
Dimensión cognitiva	Se ilustra la apreciación del objeto adquirido previamente a la experiencia humana, cuando el estudiante desarrolla los conceptos matemáticos bajo la noción de juego, con esto se pretende que el educando desarrolle una serie de competencias para la resolución de problemas. Es menester resaltar las habilidades cognitivas que trae el uso de dicha noción para entrar más en detalle véase Capítulo 2, sección 2.4.
Dimensión epistemológica	Se observa la naturaleza del saber al realizar un análisis epistemológico de la noción de vector, ilustrando el cómo y qué fue necesario para el nacimiento de esta noción. A través de esto se aprecia un concepto que fue clave en la construcción de dicho conocimiento y sus componentes. Para más especificaciones acuda al capítulo 3, sección 3.4.2.
Dimensión didáctica	Esta dimensión se presenta al momento de analizar los diversos elementos curriculares que tenga instaurada la noción de vector. También al distinguir diversas investigaciones en el que se ha trabajado con dicho concepto. Esto se observa en el capítulo 2, sección 2,2; 2,3 y 2,4, presentes en este escrito.
Dimensión social	Dentro de la epistemología del vector se detalla cuáles son los usos que permitieron la construcción de este conocimiento, junto a sus componentes. Esto nos permite conocer qué procedimientos favorecen el aprendizaje de la noción en juego. Es menester que en

	este análisis epistemológico resalta uno de estos usos.

Debido a los componentes y las características de la teoría socioepistemológica, se pretende construir una propuesta de enseñanza la que esté bajo esta perspectiva, considerando la relevancia que poseen los usos de la noción de vector en la construcción de este conocimiento matemático.

3.2. Discurso Matemático Escolar (dME)

En Soto y Catoral (2014) se conciben al *discurso matemático escolar* (dME) como un sistema de razón. Es decir, un conocimiento que regula la acción y las representaciones sociales de los individuos, que forma categorías y que fabrica identidades. En otras palabras, se refiere a la manera en cómo se usa, se interpreta y se comparte la matemática escolar, con sus diferentes actores.

El dME se encuentra presente en: los planes y programas de estudio, libros de texto, exposición de aula, también en las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini, 2015), es por esta razón que se ha recurrido a las diversas investigaciones, situaciones y materiales de apoyo en donde se encuentre presente la noción de vector, para poder identificar los usos, las interpretaciones y mirada que se le entrega a esta noción de la matemática.

La teoría Socioepistemológica tiene como objeto de estudio al dME, encontrando las siguientes características descritas en Soto (2010); Soto, Gómez, Silva y Cordero (2012) y Soto, Gómez, Silva y Cordero (2014):

- **Atomización de los conceptos:** No se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento, centrándose en la enseñanza y aprendizaje de conceptos, teoremas y demostraciones.
- **Carácter hegemónico:** Existe una supremacía de argumentaciones, significaciones y procedimientos, frente a otras. No permite considerar otras argumentaciones dentro la matemática escolar.
- **Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continúo:** Los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden, no permite trastocar argumentaciones, procedimientos y significados asociados al objeto matemático.

- **Carácter utilitario y no funcional del conocimiento:** la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. No permite ver que el conocimiento se construye para transformar la realidad.
- **Falta de marcos de referencias para resignificar la matemática escolar:** Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras disciplinas. Con lo que deja al margen la funcionalidad del conocimiento y por ende las prácticas de los diferentes grupos e individuo.

Las características antes expuestas se observan en el siguiente mapa del dME propuesto por Soto (2010), citado en Soto, Gómez, Silva & Cordero (2012).

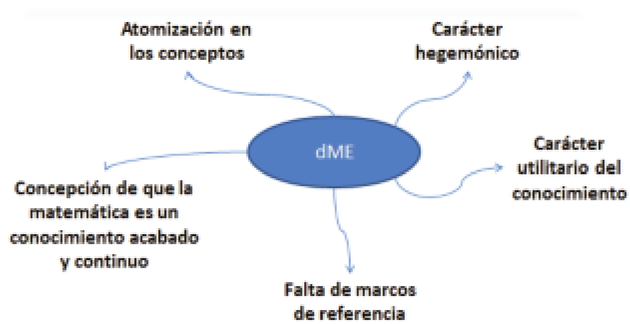


Figura 3-2: Mapa del dME. (Soto, 2010)

Dada las cualidades antes expuestas se analiza la noción con la que se trabaja en esta investigación: el vector, para ello se presenta la siguiente tabla que muestra las características del dME con dicho concepto.

Tabla 3-II: Análisis de las características del dME con la noción de vector

Característica del dME	Análisis del concepto de vector
Atomización de los conceptos	Se observa en los diversos materiales curriculares que el concepto de vector posee un mismo lineamiento de enseñanza, pese a que se intenta ubicar el concepto en una aplicación este se centra en la enseñanza del concepto, sin tomar en cuenta los contextos sociales y culturales que posee esta noción y así construir dicho concepto. Tal y como se observa en el capítulo 2, de este escrito.
Carácter hegemónico	Considerando los análisis antes realizados, en particular en el capítulo 2, sección 2.2, se ilustra que la visión dada a la noción de vector tiene una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, enfocada a la parte algebraica del concepto, soslayando las diferentes argumentaciones, ya sean físicas o geométricas, que posee el elemento a trabajar.
Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo	Se observa que el concepto de vector es presentado, en diversos instrumentos curriculares, siguiendo una misma secuencia. En estos se ilustra la representación del objeto y los componentes de una forma similar, no incluyendo diferentes argumentaciones, procedimientos o significados.
Carácter utilitario y no funcional del conocimiento	Debido a que la noción tratada tiene una utilidad y es presentada en algunos de los elementos curriculares, estos no consideran la funcionalidad del concepto y menos la

	utiliza para la construcción del conocimiento con el que se está trabajando.
Falta de marcos de referencias para resignificar la matemática escolar	Es menester recalcar que a pesar de que en los diferentes elementos curriculares se presenta la noción de vector a través de un contexto, este no responde a necesidades de otras disciplinas, es mas este contexto no es utilizado en la construcción del conocimiento en sí, por lo que deja de lado a la funcionalidad que el concepto posee.

Dado lo anterior, se ilustra que el dME genera una *violencia simbólica* al momento de “imponer significados, socialmente establecidos y legitimados” (Bourdien & Passeron, 2005. Citado en Soto, 2010).

Debido a que en esta investigación se pretende *rediseñar el discurso matemático escolar* del concepto de vector a través de la construcción social del conocimiento matemático, utilizando una situación y un contexto que hace emerger a la noción en juego: el movimiento (Véase capítulo 3, sección 3.4.2), debido a que se hace menester fomentar una matemática funcional, aquella matemática que se integra a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente en la vida (Cordero,2005).

3.3. Adherencia, opacidad y exclusión

Dado a que el dME es un agente que produce una violencia simbólica al imponer argumentaciones, significados y procedimientos, a través de este e interpretado desde su construcción se reconocen tres fenómenos, la adherencia al dME, la exclusión de la construcción de conocimiento y la opacidad de los argumentos del cotidiano.

El primer fenómeno a trabajar es el: *fenómeno adherencia*, este lo relacionamos con el hecho de propagar un conocimiento que fue construido bajo la necesidad de otras regiones (Gómez, Silva, Cordero & Soto, 2014).

Esta propagación trae consigo una serie de consecuencias, debido a que al ser utilizado en un marco de referencia que usa diferentes necesidades al que trae este conocimiento, causa un cambio en la función del saber (Gómez, Silva, Cordero & Soto, 2014).

Soto, Gómez, Silva & Cordero (2012), relatan que esta idea de adherencia es fundamental debido a que se hace referencia al quehacer disciplinar y al uso de los constructos teóricos, los que necesitan constantemente ser resignificados.

Dada la noción de vector, se observa una adherencia a este concepto, ya que no están instauradas las prácticas sociales propias de Latinoamérica, mas aun el conocimiento es entregado generalmente de forma similar en los elementos curriculares e investigaciones, sin considerar los usos en donde emergió la noción, tal y como señalan Gómez, Silva, Cordero & Soto (2014): "el fenómeno de adherencia no permite tanto al estudiante como al docente cuestionar ni trastocar la matemática escolar".

El segundo fenómeno en juego es el *fenómeno de exclusión*, el que se encuentra presente en el discurso matemático escolar, ya que este se caracteriza por lo hegemónico y utilitario, desprovisto de marcos de referencia, con los cuales impone significado, argumentaciones y procedimientos que se centran en el objeto matemático. Con esto se evita el carácter funcional del conocimiento matemático, debido a que este discurso nos ha excluido de la construcción del conocimiento matemático. (Soto & Cantoral, 2014)

Dado lo antes mencionado este dME produce una violencia simbólica, generando una *exclusión escolar* que según (Cantoral & Soto, 2014) existen dos tipos, en uno se explicitarán las características del sistema de razón -dME- que fundamenta a la *Matemática Educativa*, el cual delimita que queda dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Y por otro lado, se evidencia cómo ese sistema de razón a partir de sus características y de la legitimidad social que goza, impone significados, procedimientos y argumentaciones que los actores del sistema didáctico reconocen e interiorizan, reconociendo en ellas hegemonía y superioridad.

A continuación, se presenta el modelo de exclusión propuesto por Cantoral & Soto (2014):

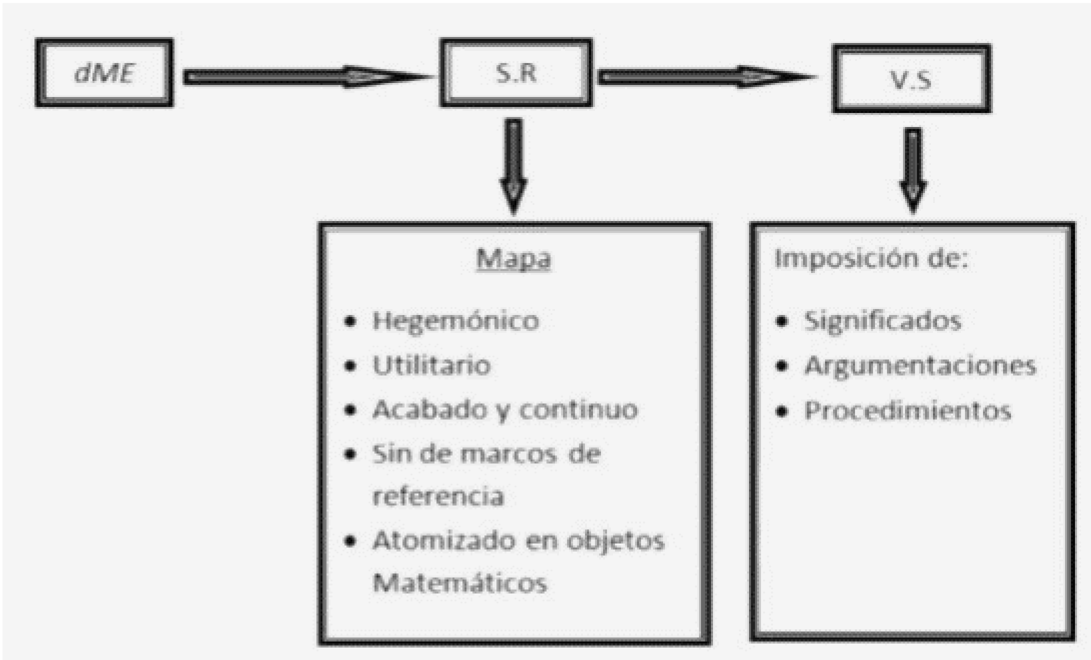


Figura 3-3: Modelo de exclusión (Cantoral & Soto, 2014)

El dME es un *sistema de razón* (S.R) que produce *violencia simbólica*, a partir de imposición de argumentaciones, significados y procedimientos. El S.R queda expresado en el mapa compuesto por las características del dME. (Cantoral & Soto, 2014)

Debido a lo antes mencionado, se perciben los dos tipos de exclusión, la primera es entorno al dME, pretendiendo rediseñar este discurso ya que es hegemónico, utilitario, es acabado y continuo, es sin marcos de referencia y atomiza los objetos matemáticos. Y la segunda se evidencia una clara violencia simbólica, debido a que los procedimientos son impuestos, sin considerar al estudiante e imponiendo los significados y argumentaciones, esto queda plasmado en el Capítulo 2, en dónde se observa estos dos tipos de exclusión dentro del contenido tratado.

Finalmente se presenta el último fenómeno a trabajar, el *fenómeno de opacidad*, este hace referencia a no consideración de la matemática del cotidiano en la matemática escolar, estos argumentos del cotidiano están opacados en el dME. (Silva-Crocci, Gómez, Soto & Cordero, 2015; Gómez & Cordero, 2016; Gómez y Cordero, 2013)

Esto quiere decir que el dME actual, es una barrera que impide la relación entre el cotidiano y la matemática escolar. Debido a que la matemática escolar opaca la vida cotidiana y por consiguiente el conocimiento del cotidiano, se encuentra opaco en los marcos de referencia de la matemática escolar (Gómez et al, 2014).

Dado lo anterior, cabe recalcar que el dME que está involucrado con la noción de vector se encuentra dentro del fenómeno de opacidad, ya que se impide relacionar el concepto a trabajar con el cotidiano, por su predominancia hacia el álgebra.

Debido a esto se diseña una propuesta de enseñanza sobre la noción de vector, donde se pretende evitar los fenómenos antes expuestos y se considera uno de sus usos, el cual se encuentra en el cotidiano de las personas, este es el movimiento, y a través de este concepto se pretende instaurar los principales componentes de un vector.

3.4. Epistemología del vector

En esta sección se presenta la epistemología de la noción en juego, partiendo por el nacimiento del vector donde se muestra un análisis histórico de cómo fue el nacimiento del concepto en los aspectos físicos y matemáticos. Luego se ilustra la epistemología en la que se profundiza con algunas investigaciones, en el que se vislumbra la relevancia del vector en la construcción de diversos conceptos. Finalmente se ilustran los elementos matemáticos con los que se trabaja a lo largo de este escrito.

3.4.1. Nacimiento del concepto de vector

En Zea (2013), se relata que el vector surge de la integración histórica de las nociones de **magnitud, número y dirección**. En consideración de dos corrientes, la matemática y la física.

Por el lado matemático: el autor plantea la evolución del álgebra que acoge objetos no necesariamente con características numéricas, es decir los vectores.

A continuación, se detalla la línea histórica propuesta por el autor:

En una primera instancia ***Euclides***, este estableció un acercamiento entre número y magnitud, en el libro V de los Elementos, genera el ambiente propio para la representación de las cantidades numéricas.

Wallis, Wessel, Argand entre otros: incorporan la representación geométrica de los números complejos como parejas ordenadas y muestran que pueden utilizar para representar fuerza en el plano.

Grassmann: Empieza un acercamiento moderno con el análisis vectorial con la introducción del concepto combinación lineal, sin ese apelativo. Además, definió las cantidades extensivas (hipernúmeros de n componentes) es decir, un vector de n coordenadas.

Hamilton: formaliza los números complejos como parejas de par ordenada y trata de generalizarlo al espacio con la creación de sus cuaterniones.

Por el lado de la física manifiesta la necesidad de dotar a los físicos de una herramienta básica para la modelación de algunos fenómenos naturales. Por ejemplo, la matematización del movimiento.

Galileo: Evidencia que algunos fenómenos no se encuentran restringidos a una sola dimensión y podían explicarse a través de las matemáticas. Por ejemplo, el movimiento parabólico.

Newton: Asume implícitamente la noción de vector en la ley de paralelogramos de fuerzas, la cual es de vital importancia a la hora de mostrar como las entidades vectoriales podrían usarse en aplicaciones para la física.

Fourier: Empieza a emerger el análisis como rama de las matemáticas, con sus objetos propios. En su obra Théorie Analytique de la Chaleur, prefigura la noción de vector e instaura una nueva propuesta metodológica en la matematización de algunos fenómenos físicos.

Maxwell, Gibbs y Heaviside: Evidencian la parte vectorial del cuaternión (vector) como la herramienta útil a la hora de intentar matematizar los fenómenos de la naturaleza.

Según Costa, Di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa y Guarepi (2008), se considera importante que el alumno no solo incorpore conocimientos, sino que también adquiera competencias, como son el trabajo en equipo, el uso de la tecnología, la interrelación y aplicación de contenidos aprendidos, la capacidad de análisis, síntesis y evaluación, Con esto propone una acción interdisciplinaria entre la matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial, utilizando la teoría de Vergnaud.

Debido a lo antes mencionado, se observa que en el nacimiento del vector tiene dos grandes afluentes: la línea matemática y la línea física. Con este fin se ilustra que en el primer componente busca extender los conocimientos del álgebra ya conocida, y el segundo se vislumbra la relevancia de matematizar los fenómenos naturales, en especial la noción de movimiento.

3.4.2. Epistemología

La enseñanza y aprendizaje de los vectores en los diversos niveles de la educación no han sido profundamente abordadas, sin embargo existen estudios sobre la epistemología del vector, el análisis vectorial y el producto de vectores (Costa & Arlego, 2011; Crowe, 1994; Distéfano, Aznar, Figueroa, & Moler, 2011; Guerra, 2015; Martínez-Sierra, 2005; Martínez-Sierra

& Benoit, 2008; Montiel, 2006; Morales & Ripamonti, 2011; Rosso & Barros, 2011; Zea, 2013) y en particular para reconstruir la epistemología del vector se utiliza como referencia principal el estudio de Zea (2013).

Las investigaciones coinciden en que el nacimiento del vector emerge del estudio de aspectos físicos, ya que se exigía matematizar los fenómenos naturales, siendo el álgebra la que genera un ambiente propicio para atender a estos nuevos objetos.

Por esta razón Zea (2013), reconoce dos afluentes en el surgimiento de la noción de vector; la primera es el desarrollo del álgebra como disciplina abstracta que va acogiendo objetos no necesariamente numéricos; y la segunda, la matematización de algunos fenómenos físicos. Esto se vislumbra en Crowe (1994) citado en Martínez-Sierra & Benoit (2008) donde señala que el análisis vectorial en un inicio se encuentra entre dos tradiciones matemáticas; la primera concierne la noción de número y cantidad y su desarrollo, desde los naturales a los irracionales transcendentales, incluyendo a los complejos e hipercomplejos, y sus respectivas operaciones algebraicas, la segunda consiste en la búsqueda de la representación de la realidad física por medio de los conceptos matemáticos.

Dado que el álgebra es un afluente en el nacimiento del vector Crowe (1994) comenta sobre cartas no publicadas de Leibniz en las cuales menciona que es deseable la creación de un área de las matemáticas que "expresen situaciones directamente como el álgebra expresa magnitudes directamente". En diferentes escritos se hace alusión que Leibniz especulaba que álgebra como estaba pensada, no decía nada de las construcciones geométricas de una figura, en conclusión, él buscaba un método que sirviera para analizar, interpretar y modelar la naturaleza.

En cuanto al segundo afluente Zea (2013) relata que las primeras huellas de un tratamiento vectorial lo encontramos a principios del siglo XVII, cuando la física exigió a la matemática la descripción cuantitativa del **movimiento**. El autor propone que uno de los primeros pensadores en trabajar con el tratamiento vectorial fue Galileo, que se dio cuenta en la trayectoria del **movimiento** parabólico, que se componía de un **movimiento** horizontal y otro vertical; para describirlo era necesario combinar dos **movimientos** mediante una nueva operación "suma", la cual no se podía realizar por los medios convencionales; había la necesidad de incorporar un nuevo método.

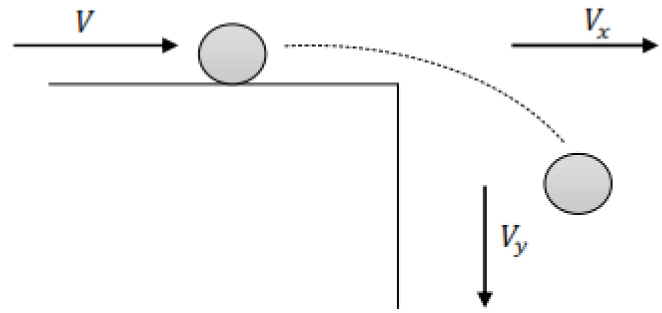


Figura 3-4: Muestra la descomposición de un movimiento *V* en dos tipos: un *movimiento* horizontal V_x, es el que trata de conservar la bola y otro vertical acelerado V_y, es producido *por* la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre los cuerpos. (Zea, 2013; pp. 56)

Este es un punto clave en la construcción del concepto a trabajar, ya que se siente la necesidad de modelar fenómenos de la física. Uno de los fenómenos naturales con el que se trabaja es el **movimiento** y la relación con el concepto de vector, es por esto que Crowe (1994) comenta que Isaac Newton publica su Principia Mathematica, donde expone la idea de un paralelogramo de fuerzas.

Su declaración es: "un cuerpo, actuando sobre dos fuerzas simultáneas, se describirá la diagonal de un paralelogramo en el mismo tiempo, ya que sería describir los lados por esas fuerzas separadas". En la siguiente imagen se presenta la diagonal descrita por Newton.

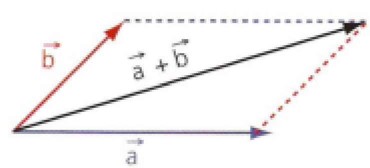


Figura 3-5: Muestra el resultado de la suma de dos fuerzas. Baeza & Fehrman (2008). Geometría y Trigonometría–Manual Esencial. *Editorial Santillana*.

Newton describía el concepto de vector, pero se acercó a esta noción con sus nuevas fuerzas, ya que estas poseían magnitud y dirección.

Finalmente, logra matematizar el **movimiento** mediante líneas rectas con ciertas direcciones, es por esto que Newton (1993), citado en Zea (2013) expone que:

“he cultivado las matemáticas en cuanto se relacionaban con la filosofía (estudio de la naturaleza), puesto que el objeto de ella debe ser identificar los caracteres matemáticos de la naturaleza; pues toda la dificultad de la filosofía consiste en pasar de los fenómenos del movimiento a la investigación desde el punto de vista formal, de las fuerzas (caracteres) de la naturaleza”

Dado lo anterior, se observa que Newton tenía como objetivo identificar los componentes matemáticos dentro del estudio de la naturaleza, mas aún detalla su mirada en los **fenómenos del movimiento**.

En Marquina, Ridaura, Álvarez, Marquina & Gómez (1995) y Molina (2014) expresan que Newton centra su investigación en los aspectos matemáticos que permiten universalizar la fuerza a causa de los cuerpos celestes alrededor de un cuerpo central, esto queda plasmado en los Libros Primero y Segundo de su principia, el que habla sobre el **movimiento** de los cuerpos celestes.

Estas ideas fueron esenciales, al momento de querer matematizar el **movimiento**, abriendo paso para poder mostrar que las entidades vectoriales se podrían usar en las aplicaciones físicas, también es esencial recalcar que se encuentra la idea de **movimiento** dentro de estos problemas, debido a qué al querer matematizar las fuerzas de la naturaleza, lo que se busca es matematizar dicho concepto.

En el sentido de querer matematizar los fenómenos naturales, Fourier (1822) citado en Zea (2013), relata que la relación con la naturaleza genera directrices en el pensamiento.

Por estos motivos, que lo vectorial es esencial al momento de querer matematizar el **movimiento**, varias aplicaciones de la física y de algunos fenómenos de la naturaleza tal y como lo realizó Grassman, en primera instancia, plantea problemas físicos relacionados con la ley de la inercia, las velocidades y las fuerzas a partir del cálculo diferencial e integral de vectores (Zea, 2013).

En base a lo antes mencionado, junto a los fenómenos de la naturaleza Grassmann (1939) citado en Zea (2013) presenta un estudio de las mareas, la cual contenía la presentación de un sistema de análisis espacial basado en vectores, en el que considera los primeros tratados del análisis vectorial.

Finalmente, el desarrollo del análisis vectorial surge a través de darle una herramienta a los físicos para matematizar algunos fenómenos de la naturaleza, uno de ellos fue el **movimiento**, siendo necesario visualizar el espacio físico como un espacio de objeto matemático llamado vector (Zea, 2013).

Es por estas razones, que se diseña una propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre el concepto de vector, en la que predomine el **movimiento**, dado a que fue uno de los ejes centrales cuando se intentó matematizar los fenómenos de la física, en sus diversas formas naturales. Estos constructos son esenciales para el trabajo de la epistemología del vector, el análisis vectorial y el producto de vectores. Dado lo antes mencionado, se pretende que los estudiantes vayan construyendo las partes o componentes de un vector, a través del estudio del **movimiento**.

Otro lineamiento del concepto de vector en relación con el componente de número está ligado con la evolución de los números negativos que fue fuertemente influenciado por el proceso de incorporar el concepto de segmento dirigido y la representación geométrica de los números complejos. Por lo antes mencionado, Wessel (1799) expone por primera vez la representación geométrica de los números complejos, su gran objetivo era representar analíticamente la dirección. Gauss resuelve esta interpretación geométrica, buscando entidades comparables a los números complejos que podrían ser utilizados en el espacio tridimensional. Estas mismas interpretaciones y cuestionamiento las tenía Argand, Warren y Mourey.

En la búsqueda de un sistema que analice el espacio tridimensional Hamilton en 1843 descubrió los cuaterniones que es uno de los principales sistemas de análisis vectorial. Guerra (2015) hace alusión a esta búsqueda relatando:

"El producto Vectorial nace a partir del descubrimiento de los Cuaterniones por Hamilton. Hamilton en esos años en sus trabajos sobre mecánica, comienza una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones"

Con esto se da el nacimiento de los cuaterniones a través del análisis geométrico en tres dimensiones. Según Zea (2013) la teoría de cuaterniones constituye el paso intermedio entre los complejos representados en el plano y el análisis vectorial moderno.

Otro adherente de los cuaterniones es Peter Tait, éste comienza con la preocupación de matematizar la física, es por esto que comienza sus investigaciones de los cuaterniones en las aplicaciones físicas. Maxwell se había instruido con los trabajos de Tait, ya que tenían una relación de amistad, y finalmente termina escribiendo sus propios tratados de los cuaterniones en forma cartesiana.

Dado lo antes mencionado, Maxwell mostró que los vectores eran el aparato teórico-práctico que realmente necesitaban los físicos a la hora de querer matematizar algunos fenómenos de la naturaleza. (Zea, 2013)

Finalmente se puede observar que el tratamiento del vector se ha visto a través de diversas problemáticas que se fueron presentando en diferentes épocas, y con ellas pudieron llegar a un consenso en cuanto a un lenguaje determinado y una forma concreta de ver este concepto, en base a esto y a los afluentes históricos presentes es que Zea (2013) propone la siguiente triada para trabajar el concepto de vector.

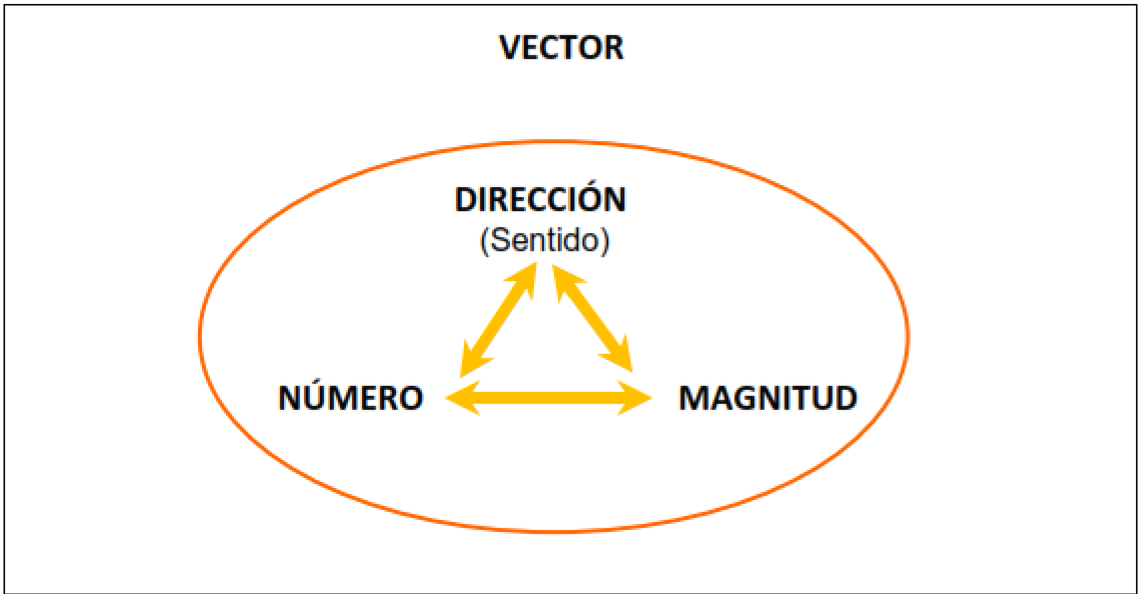


Figura 3-6: Muestra los elementos de la triada implícitos en la definición formal de vector y las posibles interrelaciones entre dichos elementos. (Zea 2013, pp.19)

El autor relata que a través de esta triada es posible llegar a la noción formal de vector, estando relacionados en todo momento, esto quiere decir que estos 3 componentes se presentan cuando se trabaja con el concepto de vector.

Esta triada asume relevancia, ya que se puede ubicar la construcción del vector a través de los diversos estudios realizados en este análisis epistemológico del concepto de vector, por esto Zea (2013) propone el siguiente panorama genérico que ubica los grandes momentos de los componentes del vector en estos dos afluentes.

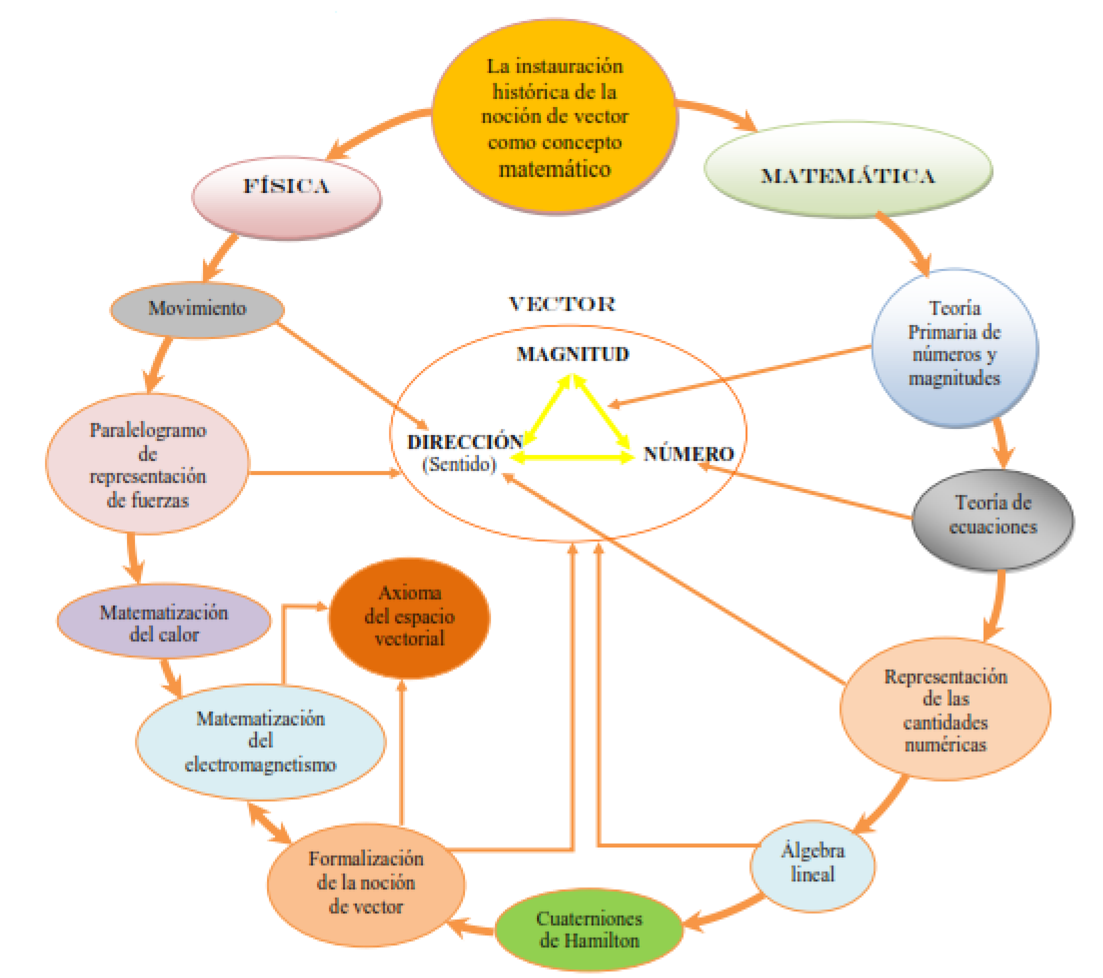


Figura 3-7: Esquema que muestra la relación histórica del concepto de vector, con la triada antes expuesta. (Zea 2013, pp.20)

Se observa cómo los distintos afluentes de la historia del concepto de vector se van entrelazando con los componentes del vector y le van dando un sentido a la construcción del concepto tratado. Debido a esto se realiza una propuesta de enseñanza que contenga como principal actor uno de sus usos, el movimiento. Para luego trabajar con esta triada, la cual será modificada, ya que nos ubicaremos en el nivel de séptimo básico. Ésta se encuentra divida en 3 momentos, el primero haciendo referencia al componente de número en triada, en el que se trabaja con el punto inicial y el punto final de un vector; el segundo se ocupa de la magnitud; y el tercero del sentido.

3.4.3. Vector en el plano

En esta sección se ilustra la definición de la noción de vector a través de los siguientes libros y páginas web para su construcción, esto son; Cálculo y Geometría Analítica de Larson & Hostetler (1999), El Cálculo de Leithold (1998), MatesFácil, ejercicios resultos de matemática de Llopis (s.f.), Cálculo Vectorial de Marsden & Tromba (2004), Cáclulo de Purcell, Varberg, & Rigdon (2007) y Fisic Education de Valenzuela (s.f.).

3.4.3.1. Definición de vector

Las aplicaciones matemáticas con frecuencia se relacionan con magnitudes que se pueden caracterizar mediante un número real en una escala adecuada. Existen otras magnitudes, como fuerza, velocidad y aceleración, que involucran un valor numérico y una dirección, de modo que no se pueden representar complemente por un número real. Para dar solución a esta problemática se define la noción de **vector** como un segmento rectilíneo dirigido, el cual posee un punto inicial, punto final, longitud (magnitud), dirección y sentido. Denotándose como $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ y se suele utilizar letras en minúscula en negrita para denotar estos; $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{u}}$, y $\vec{\boldsymbol{w}}$.

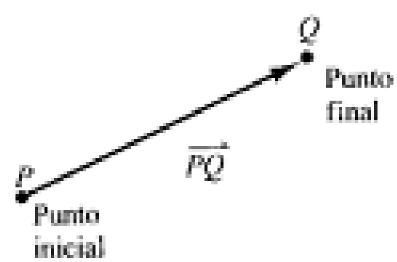


Figura 3-8: Ejemplo 1, ilustración de un vector. (Larson & Hostetler, 1999, pp.970)

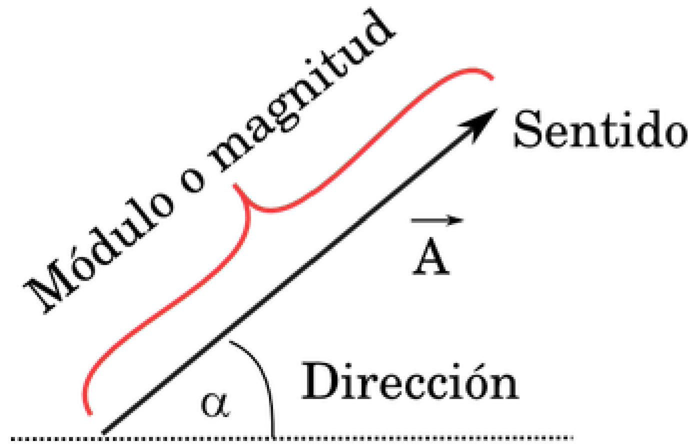


Figura 3-9: Ejemplo 2, ilustración de algunos de los componentes de un vector. (Valenzuela, s.f.)

3.4.3.2. Componentes de un vector

Si v es un vector en el plano con punto inicial en el origen y punto final (x, y), la expresión en componentes de v viene dada por:

$$v = \langle x, y \rangle$$

Las coordenadas x e y se llaman **componentes de v**. Si tanto el punto inicial como el final son el origen, v se llama *vector cero* (o *vector nulo*) y se denota por:

$$0 = \langle 0,0 \rangle.$$

De esta definición, dos vectores $\langle x, y \rangle$ y $\langle a, b \rangle$ son iguales si y solo si

$$x = a$$

$$y = b$$

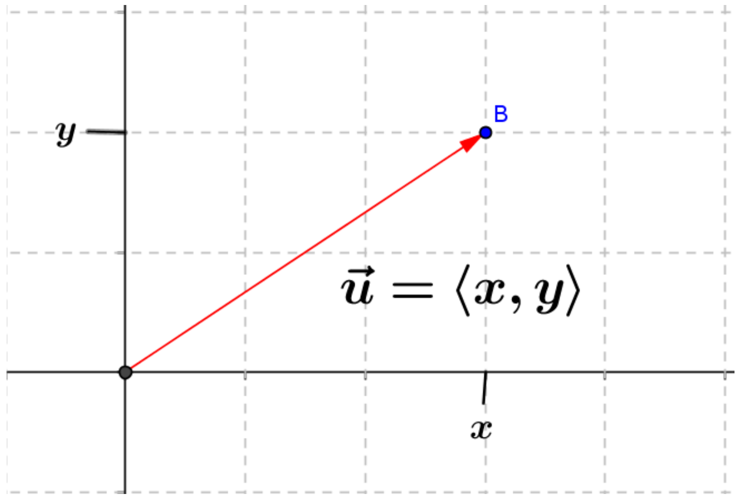


Imagen 3.1: $\vec{u} = \langle x, y \rangle$, es un vector que como punto inicial tiene el $(0,0)$ y punto final $B(x, y)$.

Sin embargo, se puede representar cualquier vector en el plano cartesiano, no necesariamente partiendo del origen.

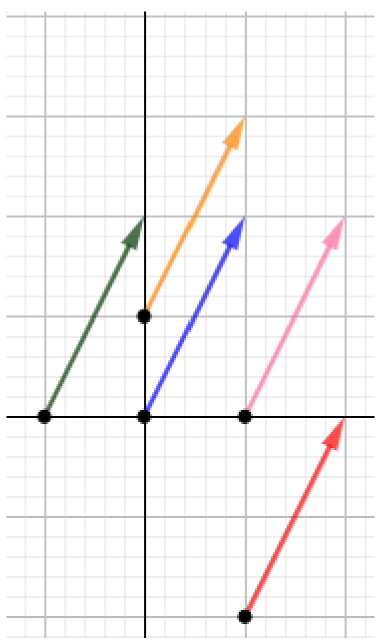


Figura 3-10: Representación del mismo vector, partiendo de cualquier otro punto en el plano. (Llopis, s.f.)

3.4.3.3. Módulo de un vector

El módulo de un vector $\vec{u}$, denotado por $\|\vec{u}\|$, es la longitud (magnitud) de cualquiera de sus representaciones.

Teorema: Si $\vec{u}$, es el vector $\langle x, y\rangle$, entonces $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Demostración: Considere el vector $\vec{u} = \langle x, y\rangle$, el cual tiene como punto de origen el C$(0,0)$ y un punto $P(x, y)$

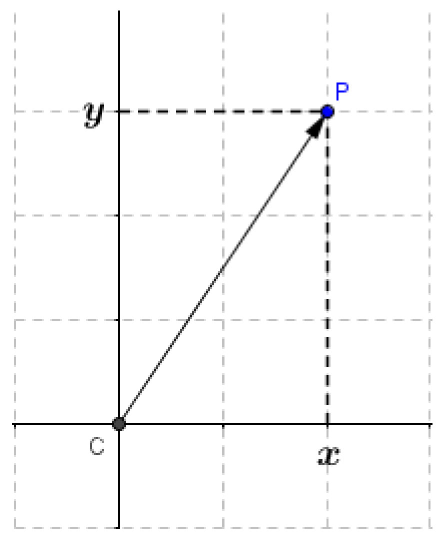


Imagen 3.2: Representación gráfica del vector $\vec{u}$.

Para continuar, vamos a considerar el triángulo rectángulo CXP, para poder calcular el valor del vector $\vec{u}$, es necesario saber el valor de los segmentos $\overline{CX}$ y $\overline{PX}$.

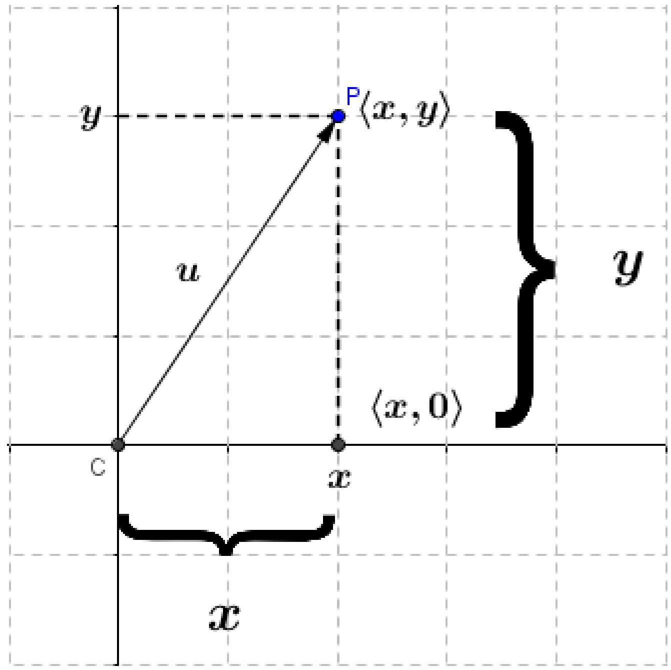


Imagen 3.3: Representación de los valores faltantes de los segmentos $\overline{CX}$ y $\overline{PX}$.

Finalmente, y utilizando el teorema de Pitágoras, resulta

$$u^2 = x^2 + y^2/\sqrt{}$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto, resulta que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Considerando que los puntos no se encuentren en el origen.

Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos iniciales y final de un segmento dirigido, la expresión en componentes del vector v, representado por $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle q_1 - p_{1,} q_{2-} p_2\rangle$$

Además, la longitud (magnitud) de v es

$$\|v\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

3.4.3.4. *Dirección*

Corresponde a la inclinación de la recta, y representa el ángulo entre ella y un eje horizontal imaginario. También se pueden utilizar los ejes de coordenadas cartesiana (x e y) como también los puntos cardinales para la dirección.

Por lo tanto, se puede definir a partir de las rectas a la que pertenece el vector. Si dos vectores están en la misma recta o en una recta paralela, tienen la misma dirección.

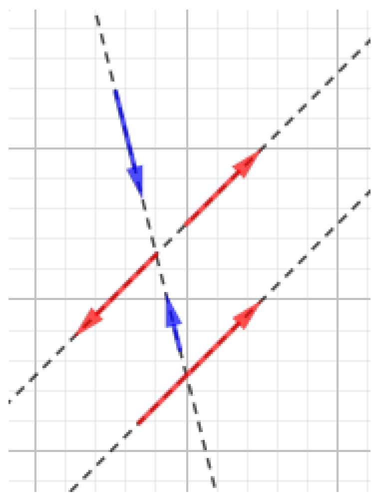


Figura 3-11: Los tres vectores de color rojo tiene la misma dirección, al igual que los dos azules. (Llopis, s.f.)

Entonces existen vectores de distinto módulo que pueden tener la misma dirección, al igual que vectores que no importa a dónde apunten ni su tamaño, pero pueden tener la misma dirección. **En esta investigación no se considera la dirección con relación al ángulo de inclinación ya que los estudiantes a trabajar se encuentran en un nivel de enseñanza básica.**

3.4.3.5. *Sentido*

Está indicado por la punta de la flecha (signo positivo que por lo general no se coloca, o un signo negativo). No corresponde comparar el sentido de dos vectores que no tienen la misma dirección, de modo que se habla solamente de vectores con el mismo sentido o con sentido opuesto.

Por ejemplo:

Un vector $\vec{v}$ parte de un punto A y termina en un punto B

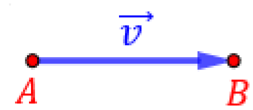


Figura 3-12: Representación del vector $\vec{v}$. (Llopis, s.f.)

El vector $\vec{w}$ que parte del punto B y termina en el punto A tiene sentido opuesto

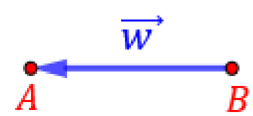


Figura 3-13: Representación del vector $\vec{w}$. (Llopis, s.f.)

Ambos vectores unen los mismos puntos, pero en sentidos contrarios. Miden lo mismo y tienen la misma dirección.

Capítulo IV: Metodología

En este apartado se trabaja con la metodología de esta investigación, la que tiene un enfoque cualitativo debido a que utiliza la recolección y análisis de los datos para revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación. A la vez, tiene como objetivo describir un fenómeno en particular; el vector. Pretendiendo entregar un entendimiento más profundo de la noción en juego.

Se trabaja con un estudio exploratorio debido a que se ilustra que existen pocos temas de investigación en relación con la noción a trabajar y así comprender de mejor forma el concepto de vector. La elección de la muestra para realizar esta investigación se ve afectada debido a la situación mundial de pandemia, la que se encuentra detallada en esta sección.

Finalmente se presenta la metodología de la investigación, qué es la ingeniería didáctica, ésta nos provee de los pasos a seguir para realizar esta indagación.

4.1. Ingeniería didáctica

Se trabaja con esta metodología debido a que se basa en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta & Wilhelmi; 2013), es por esto que Chevallard (1982) citado en Artigue, Doudy, Moreno & Gómez (1995) define lo que es el problema de la ingeniería didáctica, y comenta que es el problema de la acción y de los medios para la acción, sobre el sistema de enseñanza. Con esto se vislumbra que la ingeniería didáctica es una metodología que abarca las concepciones de un contenido, hasta la realización y observación de las secuencias dentro de la enseñanza, para posterior realizar el análisis de estas observaciones.

Esta ingeniería didáctica, está compuesta por 4 fases, estas son:

- Análisis preliminar
- Concepción y análisis a priori
- Experimentación
- A posteriori y evaluación

A continuación, se detallan estas 4 fases de la ingeniería didáctica, según Artigue et al., (1995) la primera es el análisis preliminar, la cual la clasifica en los siguientes puntos:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. Se observa dicho análisis en "la epistemología del vector", donde se hace un recorrido desde surgimiento hasta las últimas investigaciones realizadas al contenido.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos. Se presenta este apartado en donde se encuentra el tratamiento del vector en los diversos niveles de la educación, ilustrando el método utilizado en diversos elementos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que permiten su evolución. Se vislumbran los obstáculos dentro de la geometría. También las concepciones de los estudiantes dentro del eje, como del contenido, a la vez se presentan las dificultades ilustradas en la historia de la noción para poder desarrollar el contenido en sí.
- El análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Se analizan los diversos instrumentos curriculares en la donde se encuentra la noción de vector y cómo se sitúa en el nivel de séptimo básico.

Como segunda fase, se presenta la concepción y el análisis a priori, Artigue et al., (1995), relatan que el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones

En este momento es donde se distinguen los dos niveles, el primero; las variables macro-didácticas o globales, concerniente a la organización global de la ingeniería. Y el segundo, las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase. Según Brousseau (1986) relata sobre las variables y nos comenta que tanto unas como otras pueden ser en sí variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoque la enseñanza. Sin embargo, en el nivel micro-didáctico esta segunda distinción es clásica, ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de organización y la gestión del medio.

Con esto se pueden definir las siguientes variables, para esta investigación:

- La macro variable es el **movimiento**, debido a qué en base al análisis epistemológico realizado se resaltó dicha noción, y en base a esto se realizan todos los momentos de la secuencia.
- Las micro variables serán los momentos a considerar en la propuesta, están son: **Punto de inicio-final, magnitud y sentido**. Estos componentes son los que se encuentran en juego y se espera generar un conocimiento a partir de estos.

Luego de presentar estas variables, continúa el análisis a priori el que según Artigue et al., (1995), tienen como objetivo "determinar en qué las selecciones hechas permitan controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado", para realizar este análisis y para prever los campos de comportamiento y asegurar los comportamientos esperados, se trabaja con la siguiente tabla.

Tabla 4-I: Análisis de las preguntas de la propuesta.

Pregunta	Estrategia esperada	Respuesta esperada	Dificultades

En esta tabla se ilustra las preguntas de la propuesta, luego de esto, se muestra las estrategias esperadas, esto hace referencia a las posibles estrategias que realizarán los estudiantes para poder dar respuestas a la situación, continuando con las respuestas esperadas, en esta sección se busca mostrar cuáles son las respuestas que deberían entregar los estudiantes, y finalmente están las dificultades, en la que se ilustra cuáles podrían ser las problemáticas presentes dentro del desarrollo de los cuestionamientos.

Luego se presenta la fase de experimentación que según De Farías (2006) relata que es la fase de realización con cierta población de estudiantes. En la que se realizan los siguientes pasos:

- La explicación de objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Esta fase es explicada en Capitulo 4, sección 4.2, debido a que mundialmente estamos enfrentando una pandemia, con la que cambian las condiciones de realización dentro del aula.

Finalmente se presenta la cuarta fase de la ingeniería didáctica; el análisis a posteriori y la evaluación. Qué según Artigue, et al. (1995) se basa en la recolección de datos de la experimentación, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, y las respuestas entregadas por los educandos. En este análisis se presenta en un primer lugar un resumen de las descripciones de los estudiantes, completando la siguiente tabla.

Tabla 4-II: Características estudiantes.

Estudiante	Modalidad colegio	Dependencia colegio	Curso	Noción de vector

Luego de esto se ilustran las diversas respuestas entregadas por los estudiantes, mediante fotos, clasificándolas por las respuestas que coincidan con la esperada por el autor y las posibles dificultades que tengan los estudiantes.

A continuación, se vislumbra la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, en el que se compara lo que se esperaba en esta investigación con las respuestas entregadas por los educandos. Estas características se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 4-III: Resumen de respuestas entregadas por los estudiantes.

Número de pregunta	Respuesta esperada	Respuesta no esperada	Dificultad

Finalmente se presenta el rediseño, que se enfoca en las respuestas entregadas por los estudiantes, este se encuentra divido en dos secciones; el simple, orientada a un rediseño de las preguntas que generaron dificultad, y el complejo dirigido al rediseño de las micro variables indicadas con anterioridad.

Con esta metodología se pretende realizar los diversos constructos de esta investigación.

1.2. Experimentación en pandemia

Esta investigación ha sido desarrollada dentro de un contexto de pandemia, la que se ha visto afectada por la propagación del COVID 19, que ha causado un impacto a nivel mundial, trayendo consigo una serie de restricciones debido a la propagación de este virus (Picón, de Caballero & Paredes, 2020).

Esto trae un cambio de modalidad en la educación presencial, siendo reemplazada por actividades en línea o virtuales a causa de este distanciamiento social provocado por el COVID 19. (Pericacho, Rosado, Pons de Villanueva & Arbea, 2020)

Es por estas razones, que el papel de los docentes ha sido fundamental en el desarrollo de las actividades a distancia, ya que han debido implementar una nueva modalidad de trabajo adaptándose a las nuevas tecnologías de la información y comunicación (NTIC). Algunas de las herramientas utilizadas en esta nueva modalidad son las siguientes: Blackboard Collaborate, Google Meet, Zoom o Microsoft Teams. (Picón, de Caballero & Paredes, 2020; Torrecillas, 2020).

Dado lo antes mencionado y debido al contexto que se lleva a cabo la experimentación de esta investigación, esta se realiza mediante una videollamada por la plataforma Google Meet, la cual será grabada (previo envío consentimiento informado a los padres o tutores).

Esta se lleva a cabo en dos días con 2 estudiantes respectivamente, estos educandos son de diferentes colegios debido a la pandemia. Dos de ellos cursan octavo básico y los restantes están en séptimo básico. A estos se les envió la propuesta con anterioridad para que puedan imprimirla y tenerla el día que se realizará la experimentación.

Finalmente se les solicitará a los alumnos que envíen vía correo electrónico fotos de sus respuestas para ser analizadas.

Capítulo V: Diseño y Análisis

En este apartado se presenta el diseño de la propuesta a experimentar donde se muestran los componentes buscados en cada pregunta. Luego de esto, se vislumbra el análisis a priori en el que se ilustra, la estrategia a utilizar por los estudiantes al momento de enfrentarse a las preguntas, continuando con las respuestas esperadas por el autor y finalmente con las posibles dificultades que podrían presentar los educandos.

Luego se vislumbra el análisis a posteriori, en el que se presentan las respuestas entregadas por los estudiantes, ilustrando las respuestas que se esperaban, las respuestas que no eran esperadas, pero respondieron de manera correcta y, finalmente, las respuestas que tuvieron dificultad. Dentro de este análisis también se encuentra una breve descripción de los estudiantes que fueron expuestos a la propuesta.

También se incluye una entrevista a un estudiante en particular, debido a las respuestas que este entregó dentro de la propuesta.

Y, finalmente se proponen dos rediseños de la propuesta; uno simple, que va dirigido al cambio de preguntas en las que se presentaron dificultades y otro complejo, enfocado en una modificación de las micro variables.

5.1. Diseño

En la presente sección se describe el diseño de la propuesta de enseñanza que se argumenta a través de la **epistemología del vector** que se caracterizó en la sección del marco teórico.

De la epistemología del vector se reconocen los afluentes de cambio que tuvo durante el proceso de desarrollo para llegar a la definición con la cuál trabajamos hoy en día, con esto podemos reconocer dos variables para el diseño propuesto, la macro: considerando el estudio del movimiento, y las micro: que son el punto inicial y punto final, la magnitud y el sentido, estas determinan los momentos del diseño de aprendizaje.

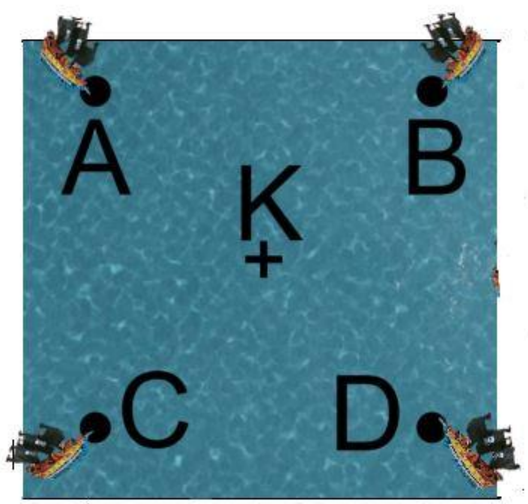
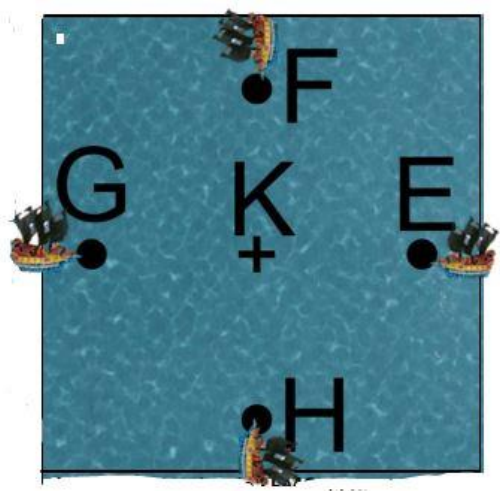
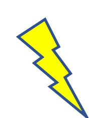
De esta forma el diseño se organizó en 3 momentos, el primero denominado punto de inicio y punto final, donde se relaciona el movimiento de barcos y/o tripulantes desde un punto de inicio, llegando a un lugar específico; el tesoro o los otros barcos.

En este primer momento, se presenta la problemática abordada para trabajar con la noción de vector. Esta se basa en el concepto de **movimiento** y utiliza el juego como herramienta didáctica.

El contexto se trata sobre la búsqueda de un “tesoro” y cómo dos grupos necesitan diversas instrucciones para poder llegar a su cometido.

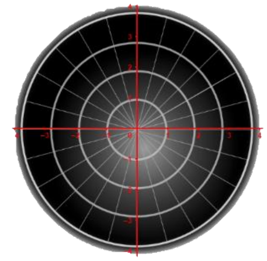
MOMENTO 1:

En lo oscuro del mar atlántico, se encuentra un tesoro hundido en la cuidad de Atlántida. Dos diferentes grupos de piratas, PLEMC y LEMC, quieren obtener el tesoro y para ello deben recurrir a diversos datos que no conocen.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Pantalla del radar de PLEMC: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo
</td>
<td>Pantalla del radar de LEMC: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo
</td>
</tr>
</table>

Las preguntas de este momento buscan generar que los estudiantes, utilicen el **movimiento** y determinen el punto inicial y el punto final: donde se trabaja con un radar de coordenadas (papel diamante con el plano cartesiano).

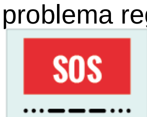
1. **¡Comunícate con los barcos!**
   Utiliza el "**radar de coordenadas**" y escribe las posiciones exactas de cada barco de LEMC y PLEMC. Luego debes dibujar en las pantallas de los radares los trayectos que harían **TODOS** los barcos para llegar al tesoro. **¡No olvides los símbolos!**



En esta pregunta se observa que los estudiantes deben **ubicar en el plano cartesiano** y mostrar los **movimientos** que deben realizar los barcos marcando las **trayectorias** ejecutadas por los barcos.

2. **¡ALERTA! ¡ALERTA!**

Bencina baja
Ha aparecido este símbolo en los barcos que se encuentran en los puntos **B** y **H**. Los barcos más cercanos deben ayudar a solucionar el problema regalando bencina.

¡Ayuda a los barcos! 

Comunícales desde dónde deben partir y hasta dónde deben llegar.

En este segundo cuestionamiento se busca que los alumnos logren a través del **movimiento** de los barcos identificar el **punto de inicio** y **el punto final**. Esto con la finalidad de ayudar a los barcos que necesiten combustible.

3. **¡NOS PERDIMOS!**

Los barcos que ayudaron deben volver a su posición original para continuar buscando el tesoro.

Comunica el camino de retorno que deben realizar los barcos para volver a su posición.

Este cuestionamiento es clave si los estudiantes no logran identificar el **punto inicial** y **punto final** en la interrogante anterior.

Dado lo anterior, en esta pregunta se busca que los educandos retomen la idea de **punto inicial** y **punto final**, donde se refuerzan estos conceptos a través de la noción de **movimiento** de los barcos para volver a su posición original.

4. ¿Qué elemento se consideraron para dar las indicaciones en los recorridos o trayectos de los barcos?

En este cuestionamiento se pretende que los estudiantes relacionen el **movimiento** de los barcos y para poder cumplir con este, deben identificar un punto de partida (**punto de inicio**) y un punto de llegada (**punto final**)

En el segundo momento, llamado "Magnitud", se pretende que los educandos relacionen los **movimientos** realizados para poder obtener distancias o cuantificar el camino recorrido por los barcos, en esta sección se aspira que los estudiantes utilicen diversas estrategias como lo son: el uso de la regla o contar los cuadrados del plano cartesiano para medir. Las preguntas de este momento son las siguientes:

Momento 2:

5. ¡Comenzó la carrera!

¿Es posible determinar cuál grupo llegará primero al tesoro? Justifica tu respuesta.

Con esta pregunta se pretende que los estudiantes logren instaurar la idea de **distancia** utilizando los componentes visuales para justificar su respuesta.

¡FALLÓ LA PANTALLA DEL RADAR!

Debemos ayudar a los barcos de ambos grupos para llegar al tesoro, para ello reúnete con tu compañero y **elijan un barco de LEMC y otro de PLEMC**

6. Con el radar ubica el barco que elegiste. ¿Cuántos espacios debe moverse el barco para llegar al tesoro? Comunícale a tu grupo.

En este cuestionamiento se busca que los educandos a través de sus conocimientos reconozcan el **movimiento** que deben realizar los barcos para poder llegar al tesoro. Se pretende que los estudiantes utilicen la palabra "espacios" para dar respuesta a dicho cuestionamiento.

7. ¡Necesitamos saber la posición del otro grupo!

Pregúntale a tu compañero que barco eligió

Comunícale a tu grupo cuántos espacio debe moverse el barco del otro equipo

Esta pregunta tiene como finalidad reparar los posibles errores que puedan cometer los estudiantes en la interrogante anterior, debido a esto se busca que los alumnos logren comunicar el **movimiento** que deben realizar los barcos seleccionados por su compañero.

8. Utilizando tu regla, mide las distancias de **TODOS** los barcos al tesoro, discute con tu compañera quien va a ganar la carrera y comunícalo a tu grupo.

En este cuestionamiento, se pretende que los educandos comparen la **distancia o magnitud** que posee cada barco para identificar qué grupo se encuentra más próximo al tesoro.

9. ¿Por qué gana ese equipo? Argumenta.

En esta interrogante se busca que los estudiantes justifiquen la respuesta anterior donde se utiliza el concepto de **distancia o magnitud** para argumentar su respuesta.

Finalmente, se encuentra el tercer momento, que lleva por nombre “Sentido”, en este intervalo se pretende que, a través de la variable didáctica la rosa de los vientos, los estudiantes diferencien que los vectores pueden tener la misma magnitud, pero diferentes sentidos. Esto a través del **movimiento** de los barcos.

Momento 3:

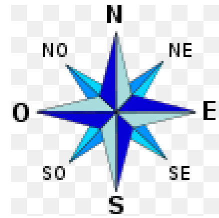
10. ¡Seguimos sin tener señal en el radar!

Debemos comenzar a dar las directrices para llegar al tesoro, considerando tu barco ¿podrías dar todas las instrucciones para navegar y llegar al tesoro? Justifica tu respuesta

En esta pregunta se pretende que los estudiantes logren identificar que pese a los conceptos trabajados con anterioridad deben utilizar el **sentido** de los barcos para dar indicaciones y llegar al tesoro.

11. ¡Se rompió la brújula del barco!

Ayuda al barco que elegiste y utilizando la rosa de los vientos, ¿En qué sentido se debe mover para llegar al tesoro?



En este cuestionamiento, se busca que los estudiantes comiencen a introducir el concepto de **sentido** utilizando la variable didáctica: la **rosa de los vientos**, para orientar el **movimiento** que deben realizar los barcos para poder llegar al tesoro.

12. Ubica el barco que está opuesto al tuyo, y considerando el sentido que debe tomar este barco para llegar al tesoro, ¿es el mismo que el de tu barco? Comunícate con el equipo para dar las indicaciones.

En base al **movimiento** que deben realizar los barcos. Esta pregunta pretende que los estudiantes comiencen a introducir los siguientes conceptos: **dirección y sentido**, mediante la problemática antes expuesta. También se busca que los estudiantes pueden **identificar** esta diferencia.

13. ¿Pasará con todos los barcos?

Compara la respuesta con tu compañero, ¿Tienen alguna similitud? Justifica.

Si en el caso anterior el estudiante no logró vislumbrar la diferencia expuesta, con este cuestionamiento se pretende que con la ayuda de su compañero pueda instaurar los conceptos de **dirección y sentido.**

14. ¡Analicemos la situación!

En un nuevo radar, dibuja el trayecto de tu barco para llegar al tesoro y realiza lo mismo con el barco opuesto al tuyo. ¿Qué sucedió con los caminos?

En esta pregunta se pretende que los estudiantes visualicen la diferencia trabajada con anterioridad, que los barcos tienen la misma **dirección,** pero diferente **sentido**, y se utiliza la variable didáctica el plano cartesiano. También se trabaja con el **movimiento** de los barcos para distinguir dicha diferencia.

15. ¡Comunícate con tu equipo!

Considerando que los trayectos de los barcos llegan al tesoro. ¿Se encuentran en una misma recta los trayectos de los barcos? y ¿en qué se diferencian estos trayectos?

Finalmente se busca complementar las diferencias antes utilizadas. Y en base al **movimiento** puedan diferenciar el **sentido** de la **dirección.**

En la siguiente tabla se resume cada momento del diseño con su argumentación epistemológica.

Tabla 5-I: Situación didáctica sobre el vector.

			Estudiando el vector
Situación didáctica sobre el vector	Momento 1	Punto Inicial-Punto Final	Con este apartado se pretende que los educandos identifiquen la necesidad de utilizar los puntos referenciales para entregar indicaciones, donde muestren un punto de inicio y un punto final, en el que se trabaja con una variable didáctica: el plano cartesiano. Se utiliza la noción de **movimiento** de los barcos para relacionar dicho concepto y establecer conclusiones respecto a la utilidad del punto inicial y punto final.
	Momento 2	Magnitud	Se estudia el **movimiento** realizado de los barcos para relacionarlo con **la magnitud de un vector**, donde se utiliza la variable didáctica: la regla. Con este momento se pretende que los estudiantes asimilen las distancias o magnitudes de un vector y cómo va siendo necesario al momento de construir dicho concepto.
	Momento 3	Sentido	Con esta sección se pretende que a través del **movimiento** junto a la variable didáctica la rosa de los vientos, los estudiantes, puedan determinar los **sentidos** de los vectores y diferenciarlo de la **dirección**. Así concluir con todos los componentes que el concepto propone.

Esta situación de aprendizaje busca *rediseñar el discurso matemático escolar*, debido a que éste es hegemónico (existe una supremacía de argumentaciones); ya que el concepto de vector, como es expuesto en los textos de estudios, prioriza los procedimientos algebraicos de la noción.

Atomiza los conceptos (no considera contextos sociales y culturales); en consideración de los textos de estudios que entrega el Ministerio de Educación y teniendo presente que estos poseen un contexto, este no es relevante en la construcción del conocimiento, más aún no es utilizado en la construcción del concepto a trabajar.

Tiene la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo (los objetivos son presentados como si siempre hubiesen existido y en ese orden); se presenta el concepto de vector como un conocimiento acabado y presentan la misma secuencia de aprendizaje para trabajar dicha noción.

Es de carácter utilitario y no funcional del conocimiento (busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logra integrar el conocimiento a la vida para transformarla); ya se ha mencionado que el Ministerio propone un contexto en sí, pero este no es utilizado para que los estudiantes logren darle una relevancia y sea de utilidad para ellos en la construcción de los componentes del vector.

Finalmente la falta de marcos de referencias para resignificar la matemática escolar (se ha soslayado que la matemática responde a otras disciplinas); como se ha mencionado con anterioridad, los textos proponen ejercicios a realizar, pero estos son enfocados en el desarrollo algebraico que posee el concepto de vector.

El diseño de situación también busca evitar los fenómenos presentes en la Socioepistemología, se aprecia que la propuesta busca no adherir al discurso matemático escolar tradicional del vector, para ello se considera la construcción histórica-epistemológica del concepto de vector y se relaciona con un cotidiano común en los estudiantes, el **movimiento**, con esto no se replica el modelo entregado del vector y se trabaja con las necesidades culturales y regionales de los educandos.

La intención del diseño es hacer parte al estudiante de la construcción del conocimiento matemático, de esta forma los conceptos claves se van descubriendo en cada momento, estos son: punto inicial, punto final, magnitud y sentido. Se busca evitar la imposición de significados y procedimientos, promoviendo las argumentaciones provenientes de los usos del vector en el juego. Debido a que estos conocimientos se van construyendo, considerando al estudiante como un centro de aprendizaje.

Finalmente, esta propuesta considera un cotidiano común dentro del estudiante, en la que se va priorizando el juego antes que una supremacía de argumentaciones y procedimientos que se enfoquen en el álgebra.

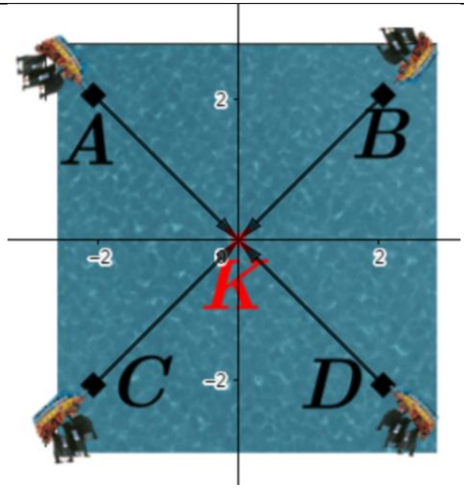
Se pretende vislumbrar que dentro de esta propuesta de investigación se intenta evitar los fenómenos expuestos de la Socioepistemología y se espera rediseñar el discurso matemático escolar que está instaurado en la educación chilena.

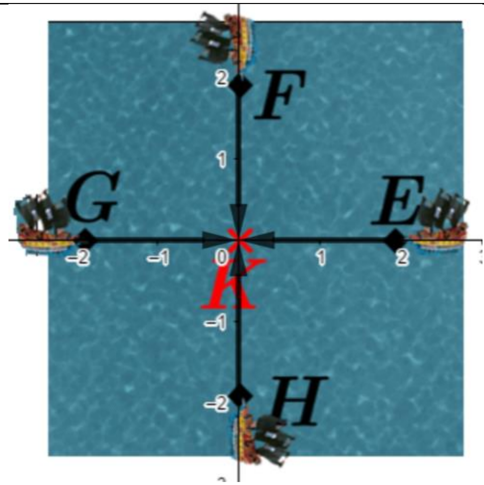
Cabe recalcar que la propuesta fue diseñada bajo el modelo de la construcción social del conocimiento, considerando los aspectos históricos-epistemológicos, es por esto que a continuación se presenta un análisis pregunta a pregunta.

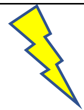
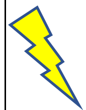
5.2. Análisis a priori

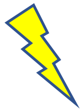
En este apartado se presenta el análisis a priori de la investigación, en donde se presenta un análisis de las preguntas de la propuesta a tomar, también se consideran los elementos como: estrategia esperada, respuesta esperada y dificultades que pueda tener el estudiante al momento de desarrollar las preguntas de la propuesta.

Primer momento **PUNTO DE INICIO** y **PUNTO FINAL**.			
Pregunta	**Estrategia esperada**	**Respuesta esperada**	**Dificultades**
1. ¡Comunícate con los barcos! Utiliza el "**radar de coordenadas**" y escribe las posiciones exactas de cada barco de LEMC y PLEMC. Luego debes dibujar en las pantallas de los radares los trayectos que harían **TODOS** los barcos para llegar al tesoro. **¡No olvides los símbolos!**	✓ Ubicar el origen relacionándolo con el tesoro. ✓ Ubicar los barcos y relacionándolos con los puntos en el plano cartesiano.	Para dibujar el trayecto, debe presentar lo siguiente. Para el grupo de PLEMC, se espera que el mapa resulte de la siguiente forma:	La dificultad presente en esta pregunta es que los estudiantes no relacionen el tesoro como el punto de origen (0,0), conllevando que los puntos de los barcos no se encuentren en la ubicación que se espera. Otro obstáculo es no realizar los dibujos para la comunicación con los equipos, ya que sin ellos no podrá dar las instrucciones a cada equipo.

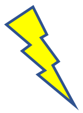
		 **Imagen 5.1:** Representación de las trayectorias de PLEMC. En cuanto al equipo de PLEMC, el mapa debe resultar de la siguiente forma:	

		 **Imagen 5.2:** Representación de las trayectorias de LEMC. En relación a las coordenas de los barcos, estas son:  $A(-2,2)$ $B(2,2)$ $C(-2,-2)$ $D(2,-2)$	

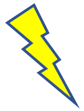
		 $E(2{,}0)$ $F(0{,}2)$ $G(-2{,}0)$ $H(0,-2)$	
2. ¡ALERTA! ¡ALERTA!  **Bencina baja** Ha aparecido este símbolo en los barcos que se encuentran en los puntos **B** y **H**. Los barcos más cercanos deben ayudar a solucionar el problema regalando bencina. **¡Ayuda a los barcos!**  Comunícales desde dónde deben partir y hasta dónde deben llegar.	✓ Identificar los barcos **B** y **H.** ✓ Identificar la ubicación de los barcos más cercanos a **B** y **H**. ✓ Comunicar los **puntos de inicio** y los **puntos finales** para poder llegar a los barcos.	 El barco A parte del $(-2{,}2)$ y debe llegar hasta B $(2{,}2)$ El barco D parte del $(2,-2)$ y debe llegar hasta B $(2{,}2)$  El barco E parte del $(2{,}0)$ y debe llegar hasta H $(0,-2)$ El barco G parte del $(-2{,}0)$ y debe llegar hasta H $(0,-2)$	La dificultad presente en este cuestionamiento es que los estudiantes no logren identificar los barcos más cercanos para poder compartir bencina. Otro obstáculo presente es que no entregue las indicaciones solicitadas mostrando el punto de partida y el punto de llegada.

3. ¡NOS PERDIMOS!  Los barcos que ayudaron deben volver a su posición original para continuar buscando el tesoro. Comunica el camino de retorno que deben realizar los barcos para volver a su posición.	✓ Identificar el punto de retorno de los barcos. ✓ Comunicar los **puntos de inicio** y los **puntos finales** para poder llegar al punto pedido.	 El barco A que parte de B $(2{,}2)$ y debe llegar hasta A $(-2{,}2)$ El barco D que parte de B $(2{,}2)$ y debe llegar hasta D $(2,-2)$  El barco E que parte de H $(0,-2)$ y debe llegar hasta E $(2{,}0)$ El barco G que parte de H $(0,-2)$ y debe llegar hasta G $(-2{,}0)$	Una dificultad presente en este cuestionamiento es que no identifiquen que los barcos deben retornar a su posición inicial. Otro obstáculo presente es que no entregue las indicaciones solicitadas mostrando el punto de partida y el punto de llegada.
4. ¿Qué elemento se consideraron para dar las indicaciones en los recorridos o trayectos de los barcos?	✓ Evaluar los elementos para entregar indicaciones. ✓ Apreciar que el **punto inicial** y el **punto final** son esencial al momento de entregar indicaciones.	Se consideró un punto de partida y un punto de llegada.	La dificultad presente dentro de este cuestionamiento es que los estudiantes no logren identificar qué necesitaron para dar las indicaciones de los barcos y así obtener los puntos de referencias.

Segundo momento **MAGNITUD.**			
Pregunta	**Estrategia esperada**	**Respuesta esperada**	**Dificultades**
5. ¡Comenzó la carrera! ¿Es posible determinar cuál grupo llegará primero al tesoro? Justifica tu respuesta.	✓ Inferir que grupo se encuentra más cercano al tesoro. ✓ Identificar las **distancias** de cada grupo.	El grupo ganador es LEMC. Está más cerca del tesoro.	La dificultad presente en esta pregunta es que los estudiantes no logren identificar cuál grupo se encuentra más cercano al tesoro.
 **¡FALLÓ LA PANTALLA DEL RADAR!** Debemos ayudar a los barcos de ambos grupos para llegar al tesoro, para ello reúnete con tu compañero y **elijan un barco de LEMC y otro de PLEMC** **6.** Con el radar ubica el barco que elegiste. ¿Cuántos	✓ Ubicar el barco en el plano cartesiano. ✓ Valorar los movimientos que debe realizar el barco para poder llegar al tesoro. ✓ Comunicar el **movimiento** del barco al tesoro.	 Si escogió el barco ubicado en punto **A**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia abajo y dos hacia la derecha o dos espacios hacia la derecha y dos hacia abajo. Si escogió el barco ubicado en punto **B**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios	Una dificultad presente en esta pregunta es que exista una problemática en la elección de equipos o barcos, otra acotación es que los estudiantes no puedan comunicar los movimientos de los barcos de manera correcta, utilizando otro tipo de lenguaje al esperado. Otro obstáculo presente es no realizar los dibujos para la

espacios debe moverse el barco para llegar al tesoro? Comunícale a tu grupo.		hacia abajo y dos hacia la izquierda o dos espacios hacia la izquierda y dos hacia abajo. Si escogió el barco ubicado en punto **D**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia arriba y dos hacia la izquierda o dos espacios hacia la izquierda y dos hacia arriba. Si escogió el barco ubicado en punto **C**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia arriba y dos hacia la derecha o dos espacios hacia la derecha y dos hacia arriba.  Si escogió el barco ubicado en punto **F**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia abajo. Si escogió el barco ubicado en punto **E**, la respuesta debe ser:	comunicación con los equipos, ya que sin ellos no podrá dar las instrucciones, generando una confusión en sus repuestas.

		Debo moverme dos espacios hacia la izquierda. Si escogió el barco ubicado en punto **H**, la respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia arriba. Si escogió el barco ubicado en punto **G**, respuesta debe ser: Debo moverme dos espacios hacia la derecha.	
7. ¡Necesitamos saber la posición del otro grupo!  Pregúntale a tu compañero que barco eligió Comunícale a tu grupo cuántos espacio debe moverse el barco del otro equipo	✓ Comunicar la elección del barco elegido. ✓ Comunicar los **movimientos** que debe hacer el barco de su compañero para poder llegar al punto pedido.	 Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **F**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia abajo. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **E**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia la izquierda. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **H**, la respuesta	Una dificultad presente en esta pregunta es que los estudiantes no quieran comunicar la elección que realizaron, esto dificultaría el proceso de la propuesta. Otra acotación es que los estudiantes no puedan comunicar los movimientos de los barcos de manera correcta, utilizando otro tipo de lenguaje al esperado. Otro obstáculo presente es no realizar los dibujos para la comunicación con los equipos, ya que sin ellos no podrá dar las

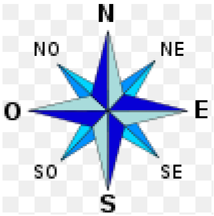
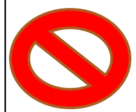
		debe ser: Debe moverme dos espacios hacia arriba. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **G**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia la derecha.  Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **A**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia abajo y dos hacia la derecha o dos espacios hacia la derecha y dos hacia abajo. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **B**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia abajo y dos hacia la izquierda o dos espacios hacia la izquierda y dos hacia abajo. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **D**, la respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia arriba y dos hacia	instrucciones, generando una confusión en sus repuestas.

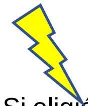
		la izquierda o dos espacios hacia la izquierda y dos hacia arriba. Si tu compañero escogió el barco ubicado en punto **C**, respuesta debe ser: Debe moverme dos espacios hacia arriba y dos hacia la derecha o dos espacios hacia la derecha y dos hacia arriba.	
8. Utilizando tu regla, mide las distancias de **TODOS** los barcos al tesoro, discute con tu compañera quien va a ganar la carrera y comunícalo a tu grupo.	✓ Utilizar la regla graduada para las **distancias** en la que se ubica cada barco. ✓ Identificar las **distancias** de cada barco poder llegar al tesoro. ✓ Decidir que grupo se encuentra más cerca del tesoro.	Los barcos de PLEMC tienen la siguiente distancia. El barco que se encuentra en **A** está aproximadamente a 4 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **B** está aproximadamente a 4 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **C** está aproximadamente a 4 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **D** está aproximadamente a 4 cm del tesoro.	Una dificultad es cuando el estudiante no quiera utilizar la regla para medir lo pedido. Otra problemática se presenta si el estudiante no sabe distinguir el orden de los números dentro del conjunto de los racionales. Otro obstáculo presente es que no realice los dibujos para la comunicación con los equipos, ya que sin ellos no podrá dar las instrucciones.

		Los barcos de LEMC tienen la siguiente distancia. El barco que se encuentra en **F** está a 2,8 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **E** está a 2,8 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **G** está a 2,8 cm del tesoro. El barco que se encuentra en **H** está a 2,8 cm del tesoro.  Va a ganar LEMC, ya que las distancia son menores a las nuestras.  Vamos a ganar	
9. ¿Por qué gana ese equipo? Argumenta.	✓ Decidir cuál grupo se encuentra más cercano al tesoro.	Porque está más cerca del tesoro, considerando las distancias que tienen hasta llegar al tesoro.	La dificultad presente es que no pueda relacionar la distancia con la cercanía o lejanía del tesoro.

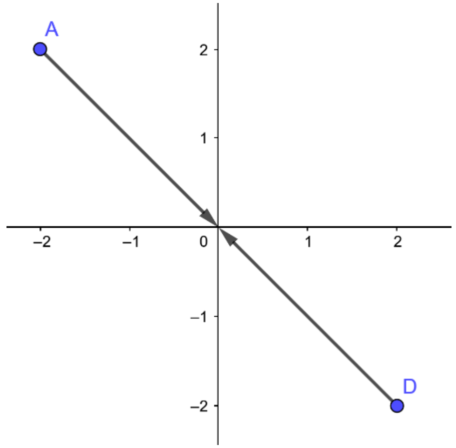
	✓ Clasificar los grupos y mostrar cuál tiene más posibilidades de llegar a el tesoro.		

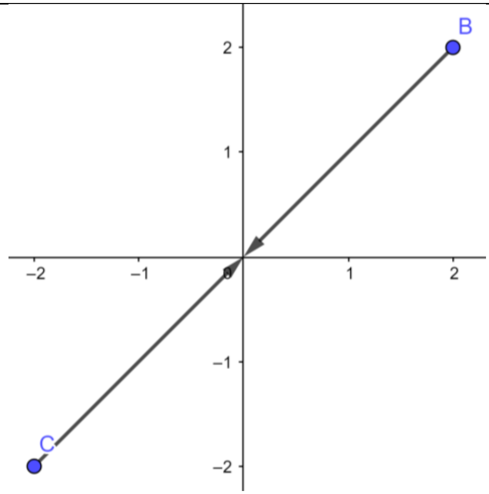
Tercer momento **SENTIDO.**			
Pregunta	**Estrategia esperada**	**Respuesta esperada**	**Dificultades**
10. ¡Seguimos sin tener señal en el radar! Debemos comenzar a dar las directrices para llegar al tesoro, considerando tu barco ¿podrías dar todas las instrucciones para navegar y llegar al tesoro? Justifica tu respuesta	✓ Analizar la información obtenida y así extraer conclusiones. ✓ Decidir respecto a las conclusiones de las instrucciones que debe entregar.	No se pueden dar las direcciones, ya que me falta orientar el barco hacia dónde debe moverse.	Una dificultad presente en este cuestionamiento es que los estudiantes piensen que los componentes anteriores pueden dar con el lugar específico donde está el tesoro.
11. ¡Se rompió la brújula del barco!  Ayuda al barco que elegiste y utilizando la rosa de los vientos, ¿En qué sentido se	✓ Utilizar la rosa de los vientos para entregar el **sentido** hacia donde debe navegar. ✓ Decidir respecto a cómo debe ubicar la rosa de los vientos. ✓ Comunicar el sentido en el que se debe mover cada barco.	Si está en el equipo de **PLEMC**: Si eligió el barco que se encuentra en **A**, se debe mover hacia el sureste para poder llegar al tesoro. Si eligió el barco que se encuentra en **B**, se debe mover hacia el suroeste para poder llegar al tesoro.	La dificultad presente dentro de este cuestionamiento es que el estudiante no logre identificar los puntos cardinales que entrega la rosa de los vientos. Otra problemática es que utilice de forma errada la rosa de los vientos, esto quiere decir que

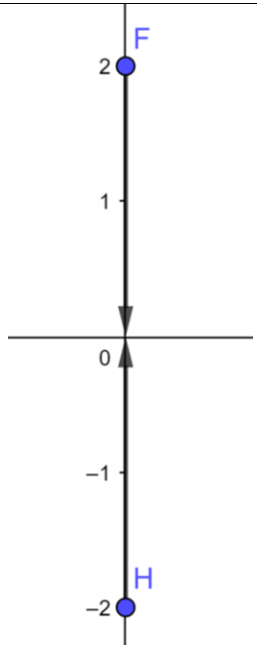
debe mover para llegar al tesoro? 		Si eligió el barco que se encuentra en **C**, se debe mover hacia el noreste para poder llegar al tesoro. Si eligió el barco que se encuentra en **D**, se debe mover hacia el noroeste para poder llegar al tesoro. Si está en el equipo de **LEMC:** Si eligió el barco que se encuentra en **F**, se debe mover hacia el sur para poder llegar al tesoro. Si eligió el barco que se encuentra en **E**, se debe mover hacia el oeste para poder llegar al tesoro. Si eligió el barco que se encuentra en **H**, se debe mover hacia el norte para poder llegar al tesoro. Si eligió el barco que se encuentra en **G**, se debe mover hacia el este para poder llegar al tesoro.	no la ubique en la posición correcta.
12. Ubica el barco que está opuesto al tuyo, y considerando el sentido que	✓ Identificar el **sentido** del barco opuesto al suyo.		La problemática presente en esta pregunta es que el estudiante no logre identificar

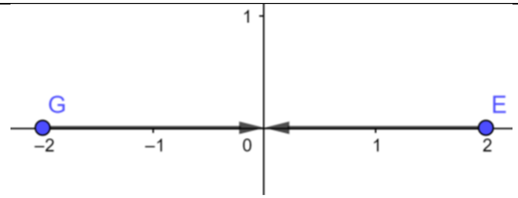
debe tomar este barco para llegar al tesoro, ¿es el mismo que el de tu barco? Comunícate con el equipo para dar las indicaciones.	✓ Comunicar el **sentido** que debe realizar dicho barco.	Si eligió el barco que se encuentra en **A**, su barco opuesto es el que se encuentra en **D**. No es el mismo sentido ya que este último se debe dirigir hacia el noroeste. Si eligió **D**, su barco opuesto es **A** y no es el mismo sentido ya que este barco se dirige hacia el sureste. Si eligió el barco que se encuentra en **B**, su barco opuesto es el que se encuentra en **C**. No es el mismo sentido ya que este último se debe dirigir hacia el noreste. Si eligió **C**, su barco opuesto es **B** y no es el mismo sentido ya que este barco se dirige hacia el suroeste.  Si eligió el barco que se encuentra en **F**, su barco opuesto es el que se encuentra en **H**. No es el mismo sentido ya que este último se debe dirigir hacia el norte. Si eligió **H**, su barco opuesto es **F** y no es el mismo sentido ya que este barco se dirige hacia el sur.	cuál es el barco que se encuentra opuesto al suyo. Otra dificultad es que no utilice la rosa de los vientos de forma correcta y entregue cualquier sentido. Otro obstáculo es que utilice de forma errada la rosa de los vientos, esto quiere decir que no la ubique en la posición correcta. Otra dificultad presente es no realizar los dibujos para la comunicación con los equipos, ya que sin ellos no podrá dar las instrucciones, generando una confusión en sus repuestas.

		Si eligió el barco que se encuentra en **E**, su barco opuesto es el que se encuentra en **G**. No es el mismo sentido ya que este último se debe dirigir hacia el este. Si eligió **G**, su barco opuesto es **E** y no es el mismo sentido ya que este barco se dirige hacia el oeste.	
13. ¿Pasará con todos los barcos?  Compara la respuesta con tu compañero, ¿Tienen alguna similitud? Justifica	✓ Comunicar el sentido que debe moverse su barco a su compañero. ✓ Comparar las repuestas y encuentren que sus similitudes.	La similitud que se encuentra es que ambos barcos tienen diferente sentido o que su sentido es opuesto en ambos barcos.	La dificultad presente es que los estudiantes no quieran comunicar a su compañero para entregar la información. Otra problemática es que no logren identificar que los barcos tienen diferentes puntos cardinales, por ende, tendrán que viajar en diferentes sentidos para poder llegar al tesoro.
14. ¡Analicemos la situación!  En un nuevo radar, dibuja el trayecto de	✓ Dibujar la gráfica del **sentido** que deben realizar los barcos para poder llegar al tesoro. ✓ Identificar que los **sentidos** se unen en el tesoro.	En el equipo de **PLEMC**:	La dificultad presente dentro de esta problemática es que los estudiantes no logren dibujar la recta hasta el tesoro (0,0). Otra problemática es que los alumnos no logren identificar

tu barco para llegar al tesoro y realiza lo mismo con el barco opuesto al tuyo. ¿Qué sucedió con los caminos?		Si el estudiante escogió el barco que se encuentra en el punto **A** o en el punto **D**, resulta la siguiente imagen: **Imagen 5.3:** Representación de las  trayectorias de los barcos A y D. Si el estudiante escogió el barco que se encuentra en el punto **B** o en el punto **C**, resulta la siguiente imagen:	que los caminos se unen si llegan al mismo punto.

		 **Imagen 5.4:** Representación de las trayectorias de los barcos B y C. En el equipo de **LEMC**: Si el estudiante escogió el barco que se encuentra en el punto **F** o en el punto **H**, resulta la siguiente imagen:	

		 **Imagen 5.5:** Representación de las trayectorias de los barcos F y H. Si el estudiante escogió el barco que se encuentra en el punto **E** o en el punto **G**, resulta la siguiente imagen:	

		 **Imagen 5.6:** Representación de las trayectorias de los barcos G y E.	
15. ¡Comunícate con tu equipo! Considerando que los trayectos de los barcos llegan al tesoro. ¿Se  encuentran en una misma recta los trayectos de los barcos? y ¿en qué se diferencian estos trayectos?	✓ Identificar que los caminos de los barcos se encuentran en una misma recta. ✓ Diferenciar que el **sentido** de los barcos es distinto, pero se encuentra en una misma recta.	Si se encuentran en una misma recta. Se diferencian en que tiene diferente sentido o están en sentido contrario.	Una dificultad presente en este cuestionamiento es que el estudiante no logre identificar la recta con la que se comprometen los caminos. Otra problemática es que no identifiquen que las rectas se encuentren en diferentes sentidos.

5.3. Análisis a posteriori

En esta sección se presentan los análisis luego de realizar la experimentación de la propuesta, se presentan los aspectos generales de los estudiantes. Posteriormente, se ilustra el análisis a posteriori, en el que se analizan las respuestas entregadas por los educandos.

5.3.1. Aspectos generales

Para desarrollar la experimentación de la propuesta, se seleccionó a 4 estudiantes de distinto establecimiento educacional, dos de ellos de un colegio particular subvencionado y los otros dos de un establecimiento particular pagado. Dentro de los educandos se distinguen dos niveles de enseñanza básica; séptimo y octavo. Todos ellos cumplen con las características de un alumno inicial. Es menester resaltar que los estudiantes de colegio particular poseen el ramo de física desde el nivel de séptimo básico.

A continuación, se presenta una **tabla 4-II** resumen con las características de los estudiantes en cuestión.

Estudiante	**Modalidad colegio**	**Dependencia colegio**	**Curso**	**Noción de vector**
E1	Científico-Humanista	Particular subvencionado	8º básico	No
E2	Científico-Humanista	Particular subvencionado	8º básico	No
E3	Científico-Humanista	Particular Pagado	7º básico	Si
E4	Científico-Humanista	Particular Pagado	7º básico	Si

La propuesta se realizó en dos ocasiones, ya que los estudiantes son de diferentes sistemas educacionales y niveles. En una primera instancia, el E1 y E2 en una reunión mediante la plataforma Google Meet, tardando aproximadamente 100 minutos en finalizar la actividad. El resto de los estudiantes, vale decir E3 y E4, fueron citados al día siguiente por la misma plataforma antes mencionada, tardando un tiempo similar en acabar la secuencia. En ambas ocasiones, se originó un ambiente propicio para el completo desarrollo de la actividad. Cabe destacar que los alumnos juntos con los apoderados accedieron de forma voluntaria a la experimentación.

Las instrucciones entregadas fueron las siguientes:

- Leer la propuesta.
- Responder de forma clara y ordenada.
- El profesor les recuerda cómo ubicar puntos en el plano cartesiano.

Al comenzar la experimentación, se nota a los estudiantes algo tímidos y nerviosos, sin embargo, en el proceso obtuvieron confianza en sí mismos y continuaron de manera óptima. Pese a que es una nueva forma de experimentar, los alumnos mostraron entusiasmo por completar la propuesta.

Finalmente, se solicita a todos los estudiantes que envíen sus respuestas por fotos o PDF vía correo electrónico, para completar el análisis de estas respuestas.

5.3.2. Descripción

En esta fase del trabajo, es posible encontrar las soluciones que dieron los estudiantes a las interrogantes presentes en la propuesta. Además, se presenta evidencia de éstas divididas por momentos, presentando imágenes de las respuestas de los cuatro educandos (en el caso que las imágenes sean borrosas se reemplazará por una tabla), ilustrando la respuesta que no era la esperada con la que sí lo era.

5.3.2.1. Momento 1: Punto Inicial – Punto Final

<table>
<tr>
<td colspan="2">

1. ¡Comunícate con los barcos!

Utiliza el "**radar de coordenadas**" y escribe las posiciones exactas de cada barco de LEMC y PLEMC. Luego debes dibujar en las pantallas de los radares los trayectos que harían **TODOS** los barcos para llegar al tesoro. **¡No olvides los símbolos!**

</td>
</tr>
<tr>
<td>

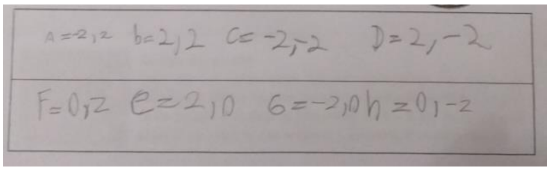


Imagen 5.7: Respuesta dada por E1 y E3.

Se observa que los estudiantes distinguieron bien los puntos en los cuales se encontraban los barcos. Esta es la respuesta coincide con la esperada.

</td>
<td>

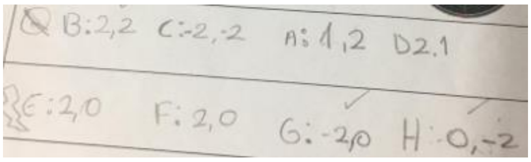


Imagen 5.8: Respuesta dada por E2 y E4.

Pese que los estudiantes respondieron algunos de los puntos de forma errónea, esto no es relevante para el desarrollo de la propuesta. Cabe destacar que los educandos entregaron puntos en el plano cartesiano.

</td>
</tr>
</table>

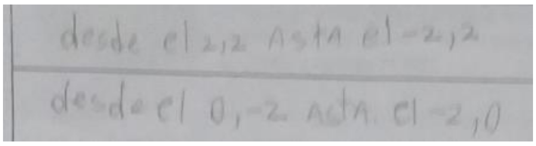
2. ¡ALERTA! ¡ALERTA!

Bencina baja

Ha aparecido este símbolo en los barcos que se encuentran en los puntos **B** y **H**. Los barcos más cercanos deben ayudar a solucionar el problema regalando bencina.

¡Ayuda a los barcos! 

Comunícales desde dónde deben partir y hasta dónde deben llegar.

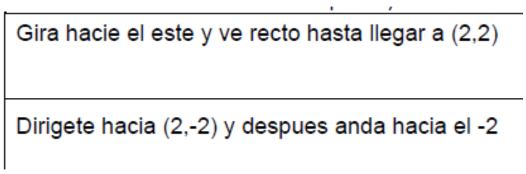


desde el 2,2 Asta el -2,2
desde el 0,-2 asta el -2,0

Desde el 2,2 asta el -2,2
Desde el 0,-2 asta el -2,0

Imagen 5.9: Respuesta dada por E3 y E4.

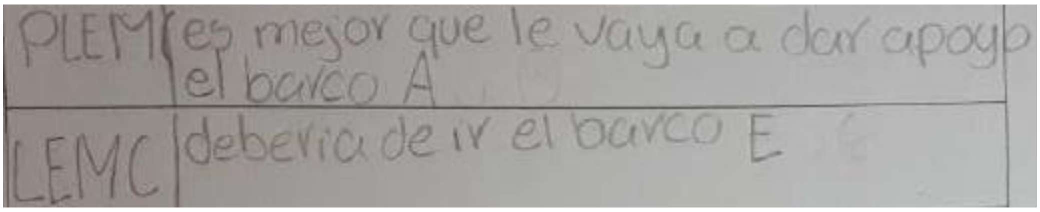
Se ilustra que los estudiantes entregan una indicación clara entregando un punto de partida y uno de llegada. Esta es la respuesta esperada de los educandos.



Gira hacie el este y ve recto hasta llegar a (2,2)
Dirigete hacia (2,-2) y despues anda hacia el -2

Imagen 5.10: Respuesta dada por E2.

Se observa que el educando logra entregar indicaciones para poder llegar al barco pedido, soslayando el punto de inicio y utilizando el sentido para dar respuesta al cuestionamiento.



PLEM	es mejor que le vaya a dar apoyo el barco A
LEMC	deberia de ir el barco E

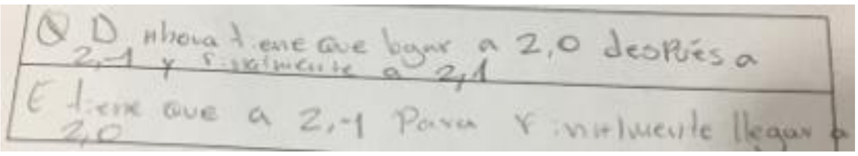
Imagen 5.11: Respuesta dada por E1.

Se vislumbra que el estudiante presenta una dificultad, ya que solo respondió qué barco lo iba a ayudar omitiendo los puntos de inicio y de término.

3. ¡NOS PERDIMOS!

Los barcos que ayudaron deben volver a su posición original para continuar buscando el tesoro.

Comunica el camino de retorno que deben realizar los barcos para volver a su posición.

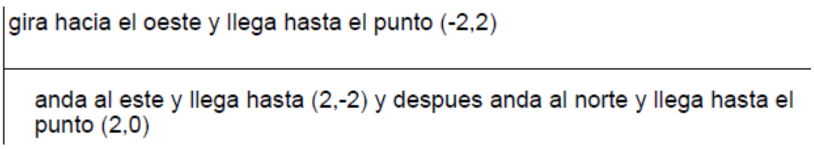


D Ahora tiene que bajar a 2,0 después a 2,-1 y finalmente a 2,1

E tiene que a 2,-1 para y finalmente llegar a 2,0

Imagen 5.12: Respuesta dada por E4.

Se ilustra que el educando logra entregar un punto de partida y otro de término. Siendo esta la respuesta esperada.

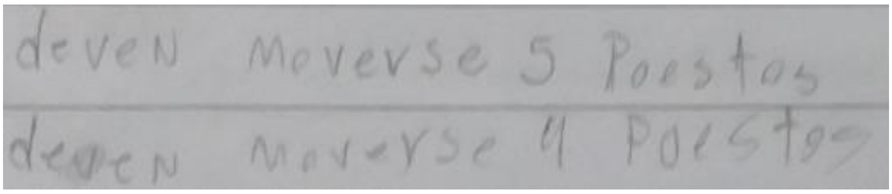


gira hacia el oeste y llega hasta el punto (-2,2)

anda al este y llega hasta (2,-2) y despues anda al norte y llega hasta el punto (2,0)

Imagen 5.13: Respuesta dada por E1 y E2.

Se observa que los educandos entregaron indicaciones para poder llegar al barco pedido, mostrando el sentido con el que se deben mover los barcos. Esta respuesta no difiere del todo a lo pedido, debido a que muestran puntos de referencia pero estos agregaron otra componente.



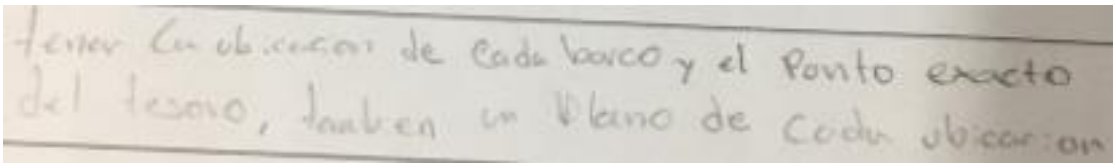
deven moverse 5 puestos

deven moverse 4 puestos

Imagen 5.14: Respuesta dada por E3.

Pese que en la pregunta anterior el E3 respondió de forma correcta, en este cuestionamiento el estudiante utilizó la magnitud para devolverse a la posición original, soslayando el punto de inicio y de término. Esto genera una dificultad en la respuesta del educando.

4. ¿Qué elemento se consideraron para dar las indicaciones en los recorridos o trayectos de los barcos?


tener la ubicacion de cada barco y el Punto exacto del tesoro, tanben un Plano de Cada ubicacion

Tener la ubicación de cada barco y el punto exacto del tesoro, también un plano de cada ubicación

Imagen 5.15: Respuesta dada por E4.

Se ilustra que el estudiante logra identificar los elementos necesarios para dar las indicaciones pedidas. Considerando esta como la respuesta esperada de los alumnos.

El plano cartesiano y la brujula.

Imagen 5.16: Respuesta dada por E1, E2 y E3.

Los estudiantes no lograron reconocer cuáles fueron las indicaciones que entregaron en las respuesta anteriores, generando una dificultad ya que no lograron identificar un punto de inicio y de término.

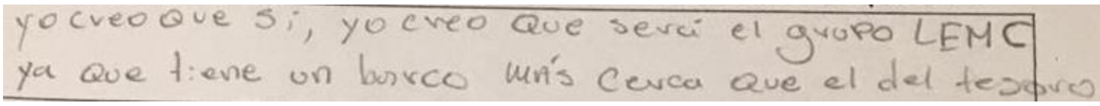
5.3.2.2. Momento 2: Magnitud

<table>
<tr><td>

5. ¡Comenzó la carrera!

¿Es posible determinar cuál grupo llegará primero al tesoro? Justifica tu respuesta.

</td></tr>
<tr><td>

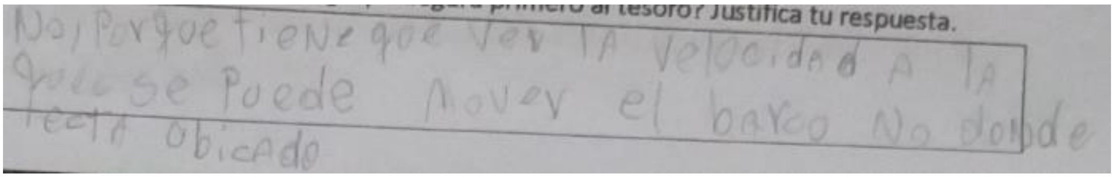


yo creo que si, yo creo que será el grupo LEMC ya que tiene un barco más cerca que el del tesoro

Imagen 5.17: Respuesta dada por E2 y E4.

Lo estudiantes logran identificar grupo se encuentra más cerca del tesoro. Esta es la respuesta esperada por educandos.

</td></tr>
<tr><td>



No, Porque tiene que ver la velocidad a la que se puede mover el barco no donde esta obicado

Imagen 5.18: Respuesta dada por E1 y E3.

En esta pregunta los estudiantes E1 y E3 presentaron una dificultad al contestarla, debido a que consideraron diversos factores extra al entregar su respuesta. Como por ejemplo la velocidad de los barcos y si los barcos se mueven en zigzag.

</td></tr>
</table>

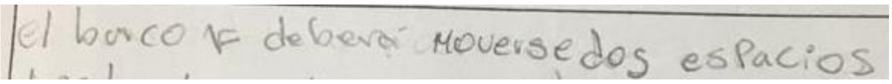
<table>
<tr><td>

¡FALLÓ LA PANTALLA DEL RADAR!

Debemos ayudar a los barcos de ambos grupos para llegar al tesoro, para ello reúnete con tu compañero y **elijan un barco de LEMC y otro de PLEMC**

6. Con el radar ubica el barco que elegiste. ¿Cuántos espacios debe moverse el barco para llegar al tesoro? Comunícale a tu grupo.

</td></tr>
<tr><td>



el barco F deberá moverse dos espacios

Imagen 5.19: Respuesta dada por E2, E3 y E4.

Lo estudiantes logran identificar cuántos espacios se deben mover los barcos para llegar al tesoro. Siendo esta la respuesta esperada por los educandos.

</td></tr>
</table>

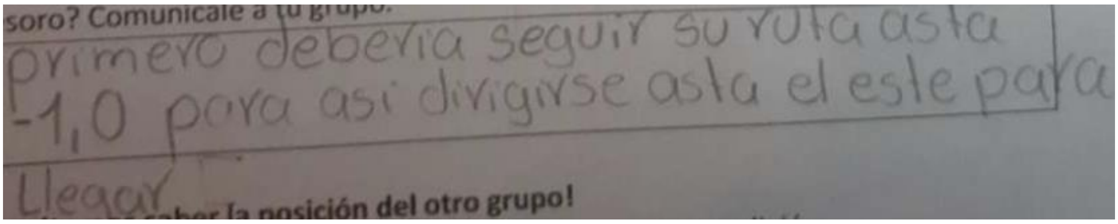


Imagen 5.20: Respuesta dada por E1.

En esta pregunta E1 no cuenta los espacios que debe moverse el barco, sino que entrega indicaciones para llegar al tesoro, generando una dificultad en su futuro análisis. Cabe destacar que este estudiante está considerando movimientos en zigzag.

7. ¡Necesitamos saber la posición del otro grupo!

Pregúntale a tu compañero que barco eligió

Comunícale a tu grupo cuántos espacios deben moverse el barco del otro equipo.

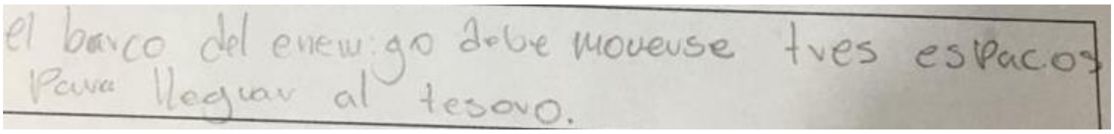


Imagen 5.21: Respuesta dada por E1, E3 y E4.

Pese que no es la respuesta esperada, los estudiantes logran utilizar un sistema de medición, contando los espacios que deben realizar los barcos para llegar al tesoro. Considerando esta como una respuesta no esperada.

Debe ir al oeste hasta llegar a cero el tesoro.

Imagen 5.22: Respuesta dada por E2.

En esta pregunta E2 presenta dificultad ya que utiliza el sentido y no cuenta la cantidad de espacios que debe moverse para llegar al tesoro.

8. Utilizando tu regla, mide las distancias de **TODOS** los barcos al tesoro, discute con tu compañera quien va a ganar la carrera y comunícalo a tu grupo.

El equipo LEMC todos los barcos se tienen que mover 2 espacios y llegan al tesoro pero los otros se tienen que mover 4 espacios.	**El grupo más cercano al tesoro es:** El equipo LEMC

Imagen 5.23: Respuesta dada por E2, E3 y E4.

Los estudiantes logran medir y entregar los resultados, esto se plasma en una diversidad de respuestas, debido a que algunos midieron hasta los barcos (no al punto). Por esas razones los educandos logran identificar cuál de los grupos se encuentra más cerca de los barcos.

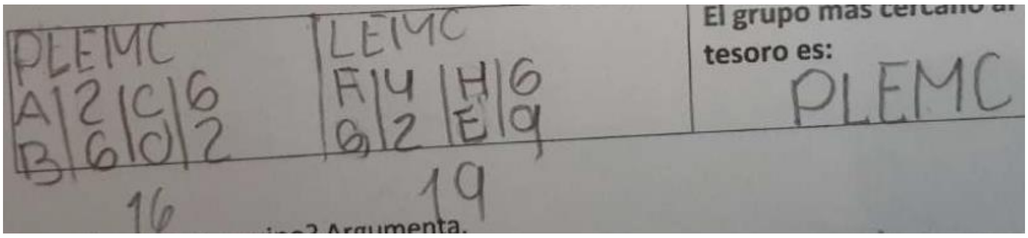


Imagen 5.24: Respuesta dada por E1.

En esta pregunta E1 presenta dificultad ya que mide en zigzag los movimientos de los barcos, midiendo de forma errónea las distancias pedidas. Concluyendo diferente a sus compañeros.

9. ¿Por qué gana ese equipo? Argumenta.

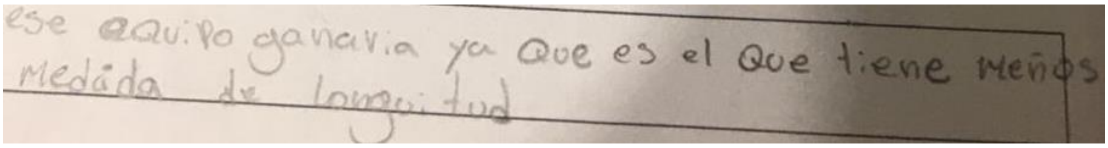
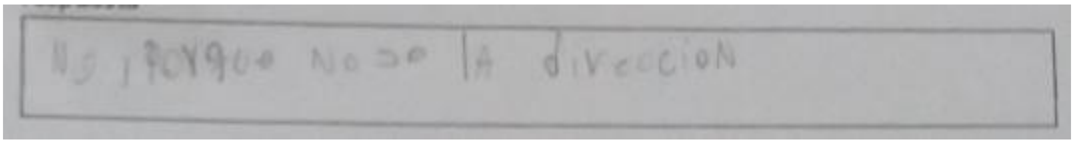
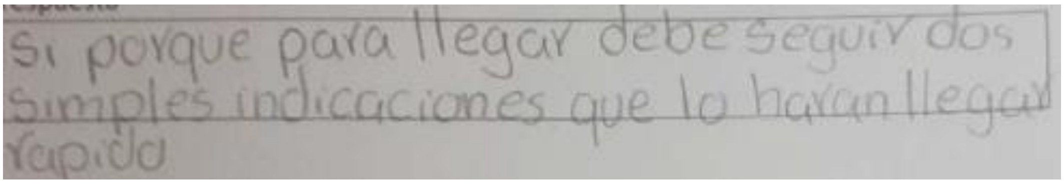


Imagen 5.25: Respuesta dada por E1, E2, E3 y E4.

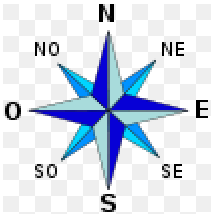
Los estudiantes logran establecer conclusiones respecto a que el equipo ganador es porque tiene menor camino que recorrer o menor longitud para llegar al tesoro. Pese a que E1 en la pregunta anterior tuvo una dificultad, en este cuestionamiento logró identificar lo solicitado.

5.3.2.3. Momento 3: Sentido

10. ¡Seguimos sin tener señal en el radar! Debemos comenzar a dar las directrices para llegar al tesoro, considerando tu barco ¿podrías dar todas las instrucciones para navegar y llegar al tesoro? Justifica tu respuesta.
 No, porque no se la direccion **No, porque no se la dirección** **Imagen 5.26:** Respuesta dada por E3. En este cuestionamiento el estudiante logra identificar la necesidad de tener otro elemento para dar las indicaciones y llegar al tesoro. Siendo la respuesta esperada por los educandos.
 Si porque para llegar debe seguir dos simples indicaciones que lo haran llegar rapido **Imagen 5.27:** Respuesta dada por E1, E2 y E4. Las respuestas entregadas por los estudiantes presentan una dificultad, ya que consideran suficientes las indicaciones antes entregadas para poder llegar al tesoro, no considerando las direcciones en qué se deben mover los barcos para llegar al tesoro.

11. ¡Se rompió la brújula del barco!

Ayuda al barco que elegiste y utilizando la rosa de los vientos, ¿En qué sentido se debe mover para llegar al tesoro?



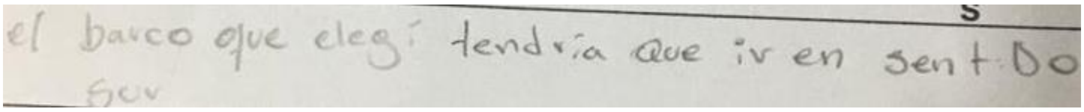


Imagen 5.28: Respuesta dada por E1, E2, E3 y E4.

Se ilustra que la respuesta entregada por los estudiantes posee el uso de la rosa de los vientos, todos llegaron a la respuesta esperada.

12. Ubica el barco que está opuesto al tuyo, y considerando el sentido que debe tomar este barco para llegar al tesoro, ¿es el mismo que el de tu barco? Comunícate con el equipo para dar las indicaciones

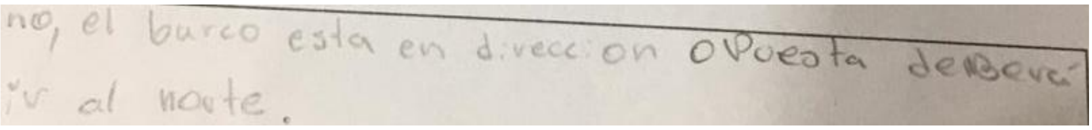


Imagen 5.29: Respuesta dada por E2, E3 y E4.

Se ilustra que la respuesta entregada por los estudiantes posee el uso de la rosa de los vientos y reconoce las direcciones opuestas de los barcos, todos llegaron a la respuesta esperada.

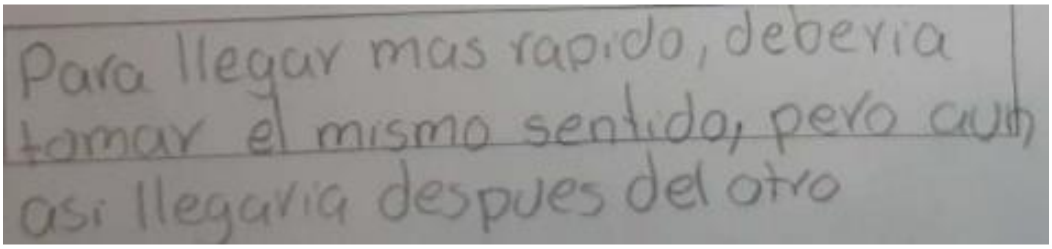


Imagen 5.30: Respuesta dada por E1.

El estudiante E1 tuvo dificultades para entender la pregunta, ya que comenta “para llegar mas rápido”, con lo que se asume que el educando estaba viendo la mejor opción para llegar al tesoro.

13. ¿Pasará con todos los barcos?

Compara la respuesta con tu compañero, ¿Tienen alguna similitud? Justifica.

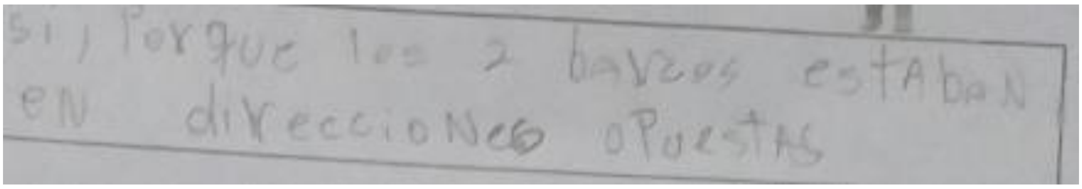

si, Porque los 2 barcos estaban en direcciones opuestas

Imagen 5.31: Respuesta dada por E3.

La respuesta dada por esta estudiante es la que se espera.

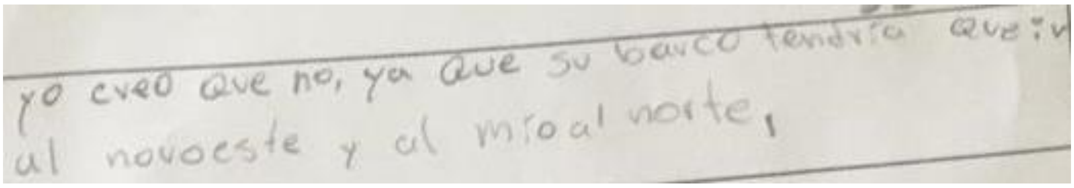

yo creo que no, ya que su barco tendria que ir al noroeste y al mio al norte,

Imagen 5.32: Respuesta dada por E1, E2 y E4.

Estos estudiantes no lograron llegar a la respuesta esperada, generando una dificultad en sus aseveraciones ya que no logran analizar que pese a que son distintos barcos poseen la misma similitud.

14. ¡Analicemos la situación!

En un nuevo radar, dibuja el trayecto de tu barco para llegar al tesoro y realiza lo mismo con el barco opuesto al tuyo. ¿Qué sucedió con los caminos?

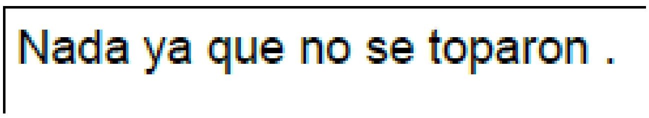

Nada ya que no se toparon .

Imagen 5.33: Respuesta dada por E2, E3 y E4.

La respuesta dada por estos estudiantes es la que se espera. Mostrando que se encuentran en un punto en común.

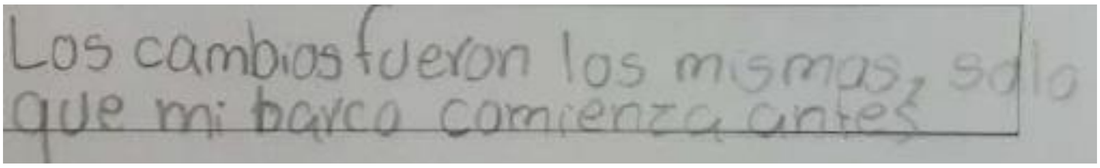

Los cambios fueron los mismos, solo que mi barco comienza antes

Imagen 5.34: Respuesta dada por E1.

En esta respuesta se puede ilustrar que la estudiante confundió la palabra “camino” por “cambio” generando una dificultad en su aseveración.

15. ¡Comunícate con tu equipo!

Considerando que los trayectos de los barcos llegan al tesoro. ¿Se encuentran en una misma recta los trayectos de los barcos? y ¿en qué se diferencian estos trayectos?

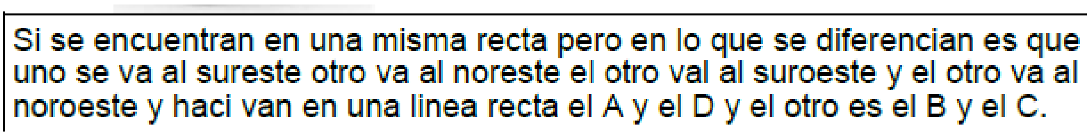

Si se encuentran en una misma recta pero en lo que se diferencian es que uno se va al sureste otro va al noreste el otro val al suroeste y el otro va al noroeste y haci van en una linea recta el A y el D y el otro es el B y el C.

Imagen 5.35: Respuesta dada por E2, E3 y E4.

Las respuestas entregadas por estos estudiantes logran diferenciar la dirección del sentido sin tener la noción entregada. Esta era la respuesta esperada de los educandos.

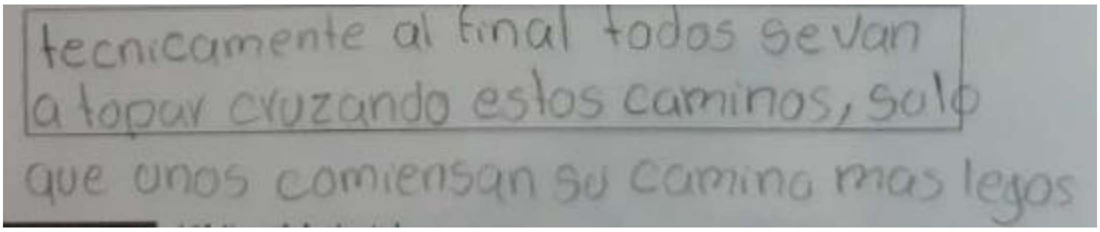

tecnicamente al final todos se van a topar cruzando estos caminos, solo que unos comiensan su camino mas legos

Imagen 5.36: Respuesta dada por E1.

En esta respuesta se puede ilustrar que la estudiante logra interpretar que los caminos se unen en una recta, pero no identifica los cuestionamientos que se le están realizando.

5.3.3. Confrontación

En esta sección se presenta la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, en el que se comparan las respuestas esperadas por el autor y las respuestas entregadas por los estudiantes que se le aplicó la propuesta. Estas se resumen en la siguiente **tabla 4-III,** presentada en la sección de ingeniería didáctica.

Dicha tabla se encuentra divida en cuatro columnas; la primera es el número de preguntas, la segunda corresponde a las respuestas de los estudiantes, la que coincide con la propuesta por el autor, la tercera hace referencia a una respuesta no esperada, pero cumple con lo preguntado y finalmente los estudiantes que tuvieron dificultades al contestar las preguntas.

Número de pregunta	Respuesta esperada	Respuesta no esperada	Dificultad
1	E1 y E3	E2 y E4	-
2	E3 y E4	E2	E1
3	E4	E1 y E2	E3
4	E4	-	E1, E2 y E3
5	E2 y E4	-	E1 y E3
6	E2, E3 y E4	-	E1
7	-	E1, E3 y E4	E2
8	E2, E3 y E4	-	E1
9	E1, E2, E3 y E4	-	-
10	E3	-	E1, E2 y E4
11	E1, E2, E3 y E4	-	-
12	E2, E3 y E4	-	E1
13	E3	-	E1, E2 y E4

14	**E2, E3 y E4**	**-**	**E1**
15	**E2, E3 y E4**	**-**	**E1**

Se observa que las preguntas que presentaron dificultad son la 4 del momento 1; **punto de inicio y punto final** y los cuestionamientos 10 y 13, del momento 3; **sentido**.

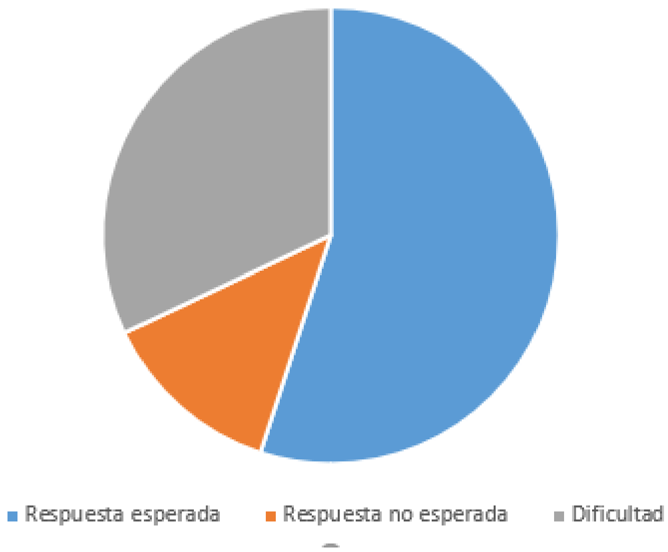


Imagen 5.37: Gráfico resumen de las respuestas entregadas por los estudiantes.

Se ilustra que más del 50% de respuestas coincidió con las que esperaba el autor, también cabe recalcar que más de 25% de las contestaciones estuvieron con dificultad estas ya fueron expresada con anterioridad.

A continuación, mediante la siguiente tabla se presenta un porcentaje de logro de los estudiantes en cuanto a la cantidad de respuestas esperadas.

Tabla 5-II: Porcentaje de respuestas esperadas por los estudiantes.

Estudiantes	Porcentaje de respuestas logradas
E1	**20%**
E2	**53%**
E3	**73%**
E4	**73%**

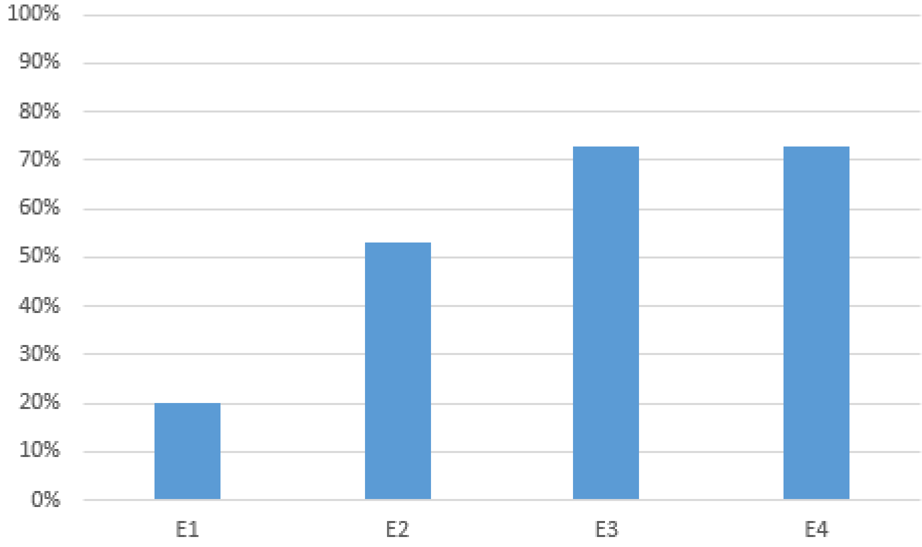


Imagen 5.38: Grafico de los porcentajes de las respuestas esperadas por los estudiantes

Se observa que los estudiantes obtuvieron un alto porcentaje de logro, siendo el E1 un punto aislado, ya que las diferencias que posee con los demás educandos es mayor. Esto queda plasmado en una sección aparte en donde se ilustra una entrevista a E1.

Siguiendo con los análisis, se presenta la siguiente tabla. Mostrando la cantidad de respuesta logradas por los estudiantes por momentos, cabe recalcar que solo 4 estudiantes rindieron la propuesta.

Tabla 5-III: Porcentaje de respuestas logradas divida por momentos.

	Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Porcentaje	**69%**	**75%**	**63%**

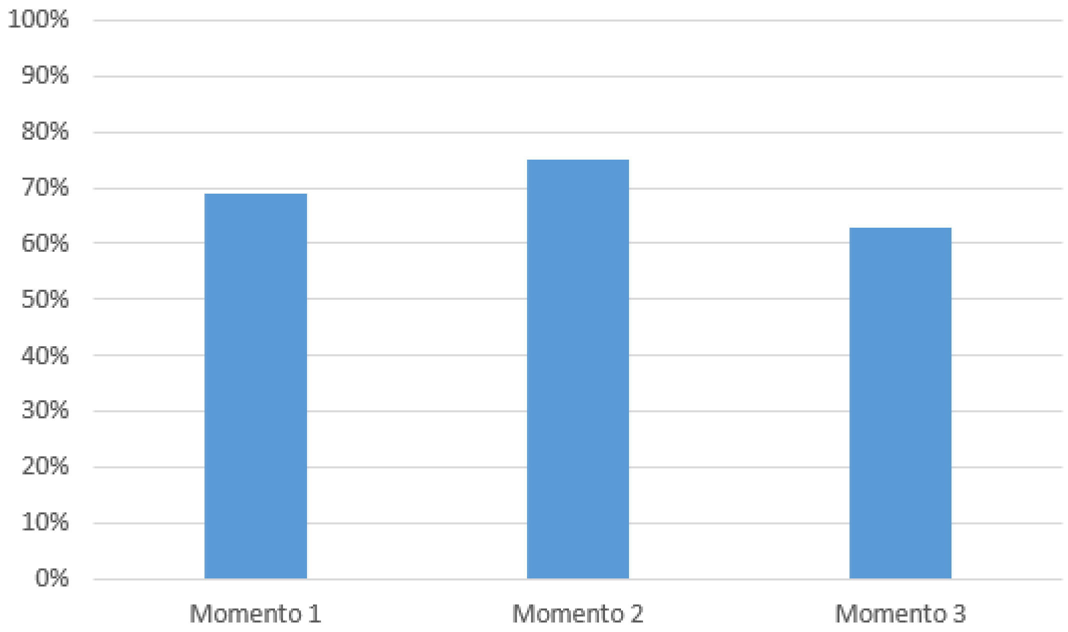


Imagen 5.39: Grafico que representa los porcentajes de logros dividas por momentos

Se ilustra una alta aprobación en las respuestas de los estudiantes dividas por momentos. Con esto se infiere que la propuesta tuvo una buena recepción dentro de la contestación de los estudiantes, teniendo dificultad en algunas preguntas, pero esto no causó obstáculo en los diferentes cuestionamientos.

5.3.4. Entrevista al E1

Se ilustra que uno de los estudiantes obtuvo un porcentaje de respuestas erróneas de alto nivel. Con este fin se realiza una entrevista con el estudiante en cuestión para clarificar las respuestas que este entregó.

Dentro de las preguntas realizadas a E1, se consulta el significado de las imágenes presentes a continuación respondiendo:

- Son las indicaciones que entregaba la propuesta.
- Uno de los dibujos es PLEMC y el otro el LEMC, porque decía eso la guía en una parte de guía.

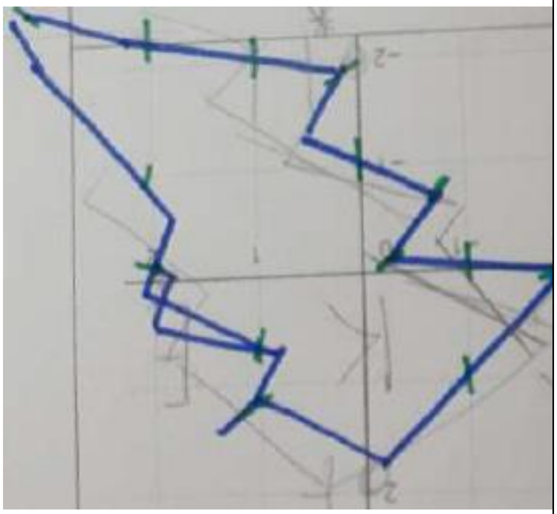
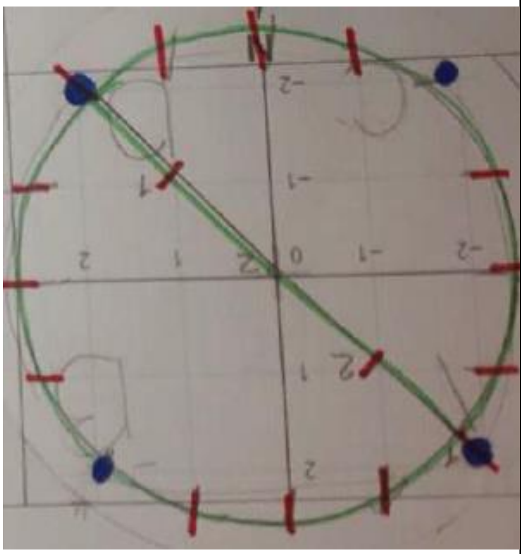
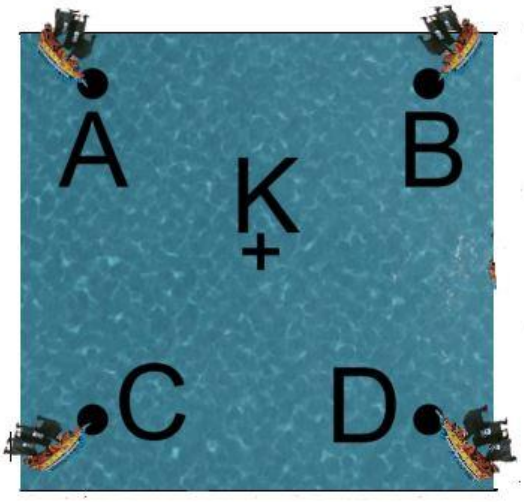
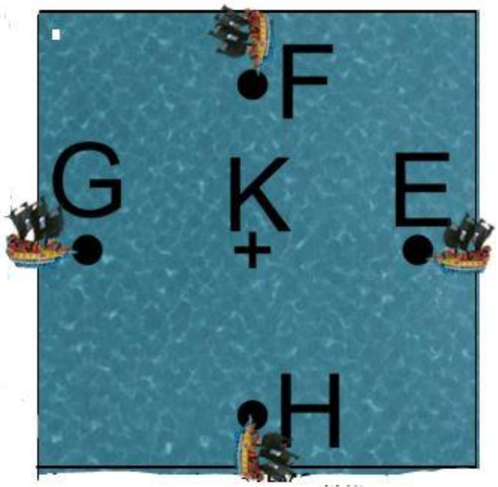
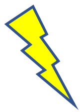
	

Imagen 5.40: Gráfico entregado por E1, en el que muestra movimientos zigzagueantes llegando un punto totalmente diferente a dónde estaba el tesoro. Movimiento de **LEMC**, considerado por el educando.	**Imagen 5.41:** Gráfico entregado por E1 en el que se vislumbran caminos curvos para poder moverse y llegar al tesoro. Movimiento de **PLEMC**, considerado por el educando.

Se ilustra que el estudiante mostró dificultades desde el comienzo de la propuesta, confundiendo las indicaciones entregadas en la propuesta.

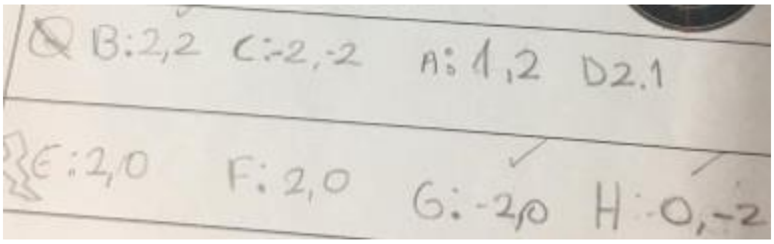
	
Pantalla del radar de **PLEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. **Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo** 	Pantalla del radar de **LEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. **Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo** 

Se evidencia que la indicación entregada, es “**Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo**”, y lo que infirió el estudiante es que los símbolos son la ubicación de los barcos, donde se modifica el sentido de la propuesta.

Dado lo anterior, E1 logra identificar los puntos y los relaciona con los símbolos antes expuestos. Al considerar estos emblemas, se enfoca en contestar a partir de estos dibujos el resto de la propuesta.

Esto se ilustra solo en este educando, ya que uno de ellos comprendió el fin de esta indicación, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

Imagen 5.42: Respuesta de E4 en la pregunta 1.



Se observa que este educando comprendió cómo se utilizaban los símbolos.

Cuando E1 comenzó la propuesta le generó dificultad la lectura de las indicaciones, es más este instauró sus propias reglas para seguir con el desarrollo del diseño. Finalmente al consultar por algunas respuestas que no cumplían con las esperadas, E1 presentó confusión al leer las indicaciones entregadas donde cambia en algunas palabras del enunciado.

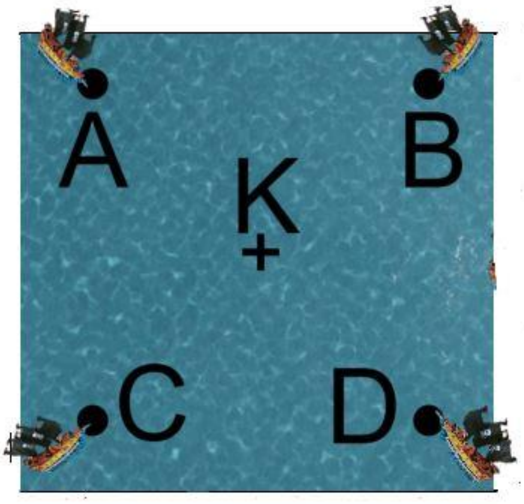
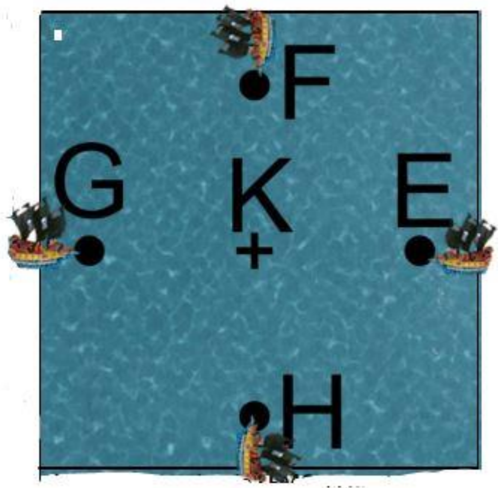
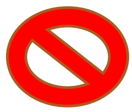
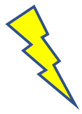
5.3.5. Rediseño

En esta sección se presentan dos tipos de rediseño uno llamado **simple** que abarca una reformulación de las preguntas que tuvieron un alto grado de reprobación cuándo contestaron la propuesta los estudiantes. Y otro denominado **complejo** que abarca un rediseño a nivel de micro variables, este asume relevancia debido a que rompe con los esquemas con los que se trabaja el concepto de vector.

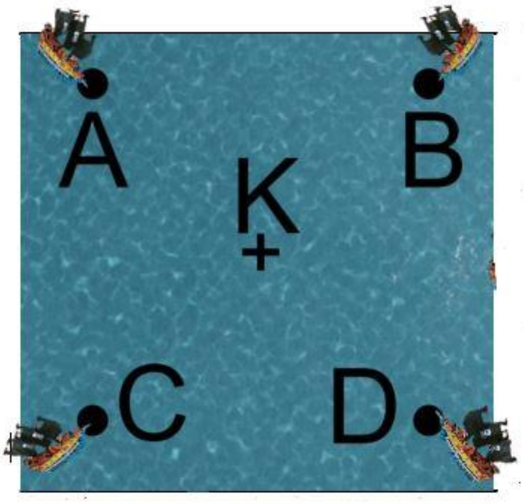
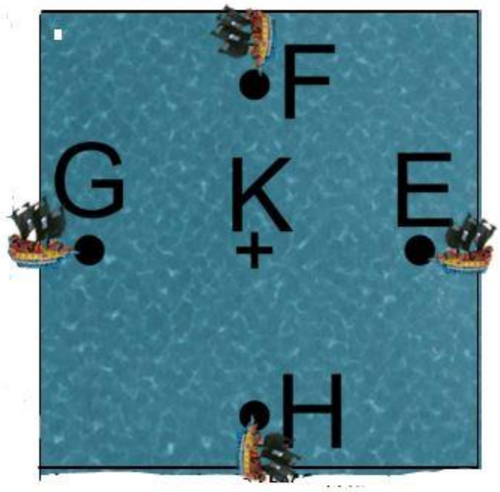
5.3.5.1 Rediseño simple

En esta sección se presenta el rediseño en términos de preguntas que propone el autor para la propuesta ya expuesta, con esto se busca un desarrollo integro de los momentos que esta entrega.

Para desarrollar de manera óptima la propuesta, se propone cambiar una instrucción entregada a los estudiantes, esta es:

	
Pantalla del radar de **PLEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. **Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo** 	Pantalla del radar de **LEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro. **Para comunicarte con este equipo debes dibujar el siguiente símbolo** 

Se pretende eliminar lo ennegrecido, debido a que generó confusión en uno de los estudiantes, se propone dejar de la siguiente forma la propuesta:

	
Pantalla del radar de **PLEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro.	Pantalla del radar de **LEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro.

Y en la casilla de respuesta agregar, cuando sea necesario lo siguiente:

LEMC	
PLEMC	

Con esto se busca que los estudiantes continúen con la idea de juego y se puedan comunicar de manera efectiva con los tripulantes de los barcos

Las preguntas que se deben rediseñar son:

En el **Momento 1: Punto inicial y punto final**, se debe modificar la pregunta 4, que posee las siguientes características.

Tabla 5-IV: Propuesta de rediseño de la pregunta 4.

Pregunta Antigua	Preguntan propuesta
4. ¿Qué elemento se consideraron para dar las indicaciones en los recorridos o trayectos de los barcos?	4. ¿Qué indicaciones se entregaron para el recorrido o trayecto de los barcos?

Este cuestionamiento generó conflicto por la palabra "elementos", debido a que los estudiantes se centraron en contestar elementos con los que trabajaron. Con esto se pretende que los estudiantes indiquen cuáles fueron los puntos de referencia que utilizaron.

Los siguientes cuestionamientos se encuentran en el **momento 3** de la propuesta llamada **sentido**, en la que existieron dos preguntas descendidas, estas son la pregunta 10 y 13.

Tabla 5-V: Propuesta de rediseño de la pregunta 10.

Pregunta Antigua	Preguntan propuesta
10. ¡Seguimos sin tener señal en el radar! Debemos comenzar a dar las directrices para llegar al tesoro, considerando tu barco ¿podrías dar todas las instrucciones para navegar y llegar al tesoro? Justifica tu respuesta	**10. ¡Seguimos sin tener señal en el radar!** Debemos comenzar a dar las directrices para llegar al tesoro, considerando tu barco y la información obtenida anteriormente. ¿Podrías entregar las indicaciones para que el barco llegue al tesoro? Justifica tu respuesta.

Se evidenció que este cuestionamiento tuvo un alto grado de dificultad en los educandos que contestaron la propuesta, debido a esto se pretende que en esta nueva pregunta los estudiantes logren identificar la necesidad de mostrar un **sentido** para poder llegar al tesoro.

Para continuar los cuestionamientos que tuvieron un alto grado de reprobación se presenta la pregunta 13

Tabla 5-VI: Propuesta de rediseño de la pregunta 13.

Pregunta Antigua	Preguntan propuesta
13. ¿Pasará con todos los barcos? Compara la respuesta con tu compañero, ¿Tienen alguna similitud? Justifica. 	**13. ¿Pasará con todos los barcos?** Compara la respuesta con tu compañero. ¿Los barcos de tu compañero también estaban en dirección opuesta? Justifica. 

En esta pregunta se presenta dificultad, debido a que los estudiantes no lograron comprender la interrogante, confundiendo la palabra “similitud”. Es por esto, que con la nueva interrogante se pretende que los educandos logren identificar que los barcos de los compañeros se encuentran en dirección opuesta.

5.3.5.2 Rediseño complejo

En este rediseño se pretende trabajar con las micro variables estas son: **punto de inicio – punto final, magnitud y sentido**, en las que se observó que por la naturaleza intrínseca de los estudiantes presentaron de manera intuitiva algunos de estos conceptos antes de que fueran trabajados, con esto se ilustra que la naturaleza del saber se presenta de distinto orden al propuesto.

Con este rediseño se pretende trabajar la noción de vector y construir sus componentes, siguiendo la secuencia que se presenta a continuación:

- Primer momento: **Sentido**
- Segundo momento: **Punto de inicio – Punto de término**
- Tercer momento: **Magnitud**

Se pretende que a través del recorrido de este rediseño los estudiantes puedan instaurar el concepto de vector considerando cada uno de sus componentes. Esta nueva propuesta se ilustra en los anexos de este escrito.

Capítulo VI: Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones de la investigación divida en cuatro secciones, en donde se detalla las deducciones del autor en cuanto a las diferentes partes de este escrito.

6.1. En relación con los objetivos propuestos.

Esta investigación abordó la problemática de la enseñanza de la noción de vector, a partir de un estudio socioepistemológico que destaca los escenarios de construcción del conocimiento matemático y las prácticas que permitieron su emergencia. Para tal fin se propone: Diseñar y validar una propuesta de enseñanza para la noción de vector en séptimo básico, a partir de un estudio socioepistemológico. Con el fin de fortalecer el uso de esta noción en contexto de movimiento y juegos.

Para cumplir dicho objetivo, los antecedentes de la investigación destacan que el año 2015 se realizó un ajuste curricular de los objetivos entregados por el Ministerio de Educación en el currículo de matemática. En este ajuste se observa que el tratamiento del vector en los textos de estudios fue trasladado desde primer año medio a séptimo básico cambiando solo el contexto de la noción (de una mosca a un avión), donde prevalece el desarrollo algebrista en ambos niveles.

Con esta problemática se plantean los objetivos específicos de la investigación, los cuales son:

- Identificar el tratamiento del vector de diferentes instrumentos curriculares
- Analizar la epistemología de la noción de vector
- Diseñar una propuesta de enseñanza utilizando una metodología de juego
- Evaluar la propuesta de enseñanza a través de una ingeniería didáctica

A través del análisis minucioso de las herramientas curriculares se infiere una discordancia entre el objetivo propuesto y los textos curriculares que entrega el Ministerio. Ya que si bien los objetivos señalan la importancia del carácter lúdico de la aproximación a la noción de vector se mantiene en los textos la visión algebrista en el tratamiento del concepto y sus componentes (punto inicial-punto final, magnitud y sentido). Asimismo, se distingue un mismo lineamiento en la enseñanza de esta noción.

Del análisis epistemológico de la noción de vector y a través de la epistemología propuesta por Zea (2013), se logró recabar información acerca de los dos afluentes que fueron parte en la construcción de esta noción. Donde se ilustra que uno de los usos más preponderante en la construcción de este, es el concepto de movimiento, debido a que esta noción se encuentra presente al momento de querer matematizar los fenómenos naturales.

Otro aspecto relevante en la construcción de la noción de vector son los componentes de este, puesto que los momentos históricos que este concepto posee se dividen de acuerdo a dichos componentes que son: Punto Inicial- Punto Final, Magnitud y Sentido.

Para trabajar con el movimiento junto a los componentes del vector, se utiliza la noción de juego para construir una propuesta de enseñanza-aprendizaje, debido a que Hirsh-Pasek (2007) comenta que los niños aprenden mejor en ambientes lúdicos, a través de juegos guiados. El juego tiene un efecto positivo, flexible, que deja contentas a las personas. Por lo anterior la propuesta de aprendizaje sobre la noción de vector se enmarca en el objetivo que propone el Ministerio de Educación, junto con los elementos que este posee.

En relación con la evaluación, se analizan en profundidad las respuestas de los estudiantes, donde se muestra una aprobación del 75% en dichas contestaciones, además se logra inferir una alta aprobación en las respuestas de los diferentes momentos propuestos en esta investigación, siendo este superior al 60%.

6.2. En relación con lo teórico

Al analizar el *discurso matemático escolar* de la noción de vector, se infiere que no se reconoce los usos que este concepto trae consigo. Pese a que se trabaja con un contexto de movimiento este no es relevante en la construcción del concepto y sus componentes (Punto Inicial-Punto Final, Magnitud y Sentido).

Dado lo anterior se distingue que no se utilizan los constructos epistemológicos y sociales del concepto de vector, debido a que los lineamientos de enseñanza propuestos poseen una visión algebrista y no hace partícipe a los educandos en la construcción de dicha noción.

De los fenómenos presentes en el *discurso matemático escolar*, se ilustra la cohesión al fenómeno de adherencia, debido que el docente y los estudiantes no cuestionan ni trastocan el conocimiento de la noción de vector. En consideración del fenómeno de exclusión se observa que este dME es un *sistema de razón* que produce *violencia simbólica*, debido a que los procedimientos son impuestos, sin considerar al estudiante e imponiendo los significados y argumentaciones del concepto de vector. Y el último fenómeno presente es el de opacidad, puesto que impide relacionar la noción de vector con el cotidiano, por su predominancia hacia el álgebra.

Considerando lo antes mencionado se *rediseña el discurso matemático escolar* de la noción de vector, donde se incluye el juego y el movimiento en la construcción de sus componentes y así formalizar dicha noción. Con este rediseño se procura soslayar el fenómeno de adherencia, exclusión y opacidad, debido a que se construye una propuesta en base a la funcionalidad de la noción de vector, siendo los estudiantes el centro del aprendizaje en la construcción de cada componente (Punto Inicial-Punto Final, Magnitud y Sentido).

6.3. En relación con los resultados

Al analizar las respuestas entregada por los estudiantes, se infiere una alta aprobación en la entrega de sus contestaciones, cumpliendo con las respuestas esperadas que el autor propuso. En consideración de las dificultades presentes en los educandos, se ilustra que es en relación con la redacción de los cuestionamientos confundiendo el enfoque de la pregunta debido a palabras específicas. Por esto, se proponen nuevas redacciones de dichas interrogantes.

También se distingue que en el primer momento Punto Inicial -Punto Final, los educandos de forma intuitiva logran instaurar la noción de sentido y con esto entregar diversas indicaciones para poder llegar a los puntos requeridos.

Por ende, se vislumbra que los estudiantes dentro de su naturaleza intrínseca encuentran el sentido antes que los puntos de inicio y punto final, esto asume relevancia debido a que la teoría Socioepistemológica, busca incluir el cotidiano de las personas dentro de la construcción del conocimiento matemático.

Dado lo antes mencionado se ilustra la forma natural de dar indicaciones de los estudiantes cuando se trata de un movimiento cualquiera, esto es esencial dentro de la enseñanza del vector ya que el orden en que se propone en los diversos instrumentos en los que se trabaja con esta noción, posee el siguiente orden; primero punto de inicio y de término, luego magnitud y finalmente sentido y dirección (en base al ángulo de inclinación de la recta).

Debido a lo anterior se propone un rediseño de la propuesta, incluyendo el conocimiento natural que se da entre los estudiantes. Con esto el orden con el que se pretende que los educandos aprendan la noción de vector es: sentido y dirección (sin considerar el ángulo de inclinación, ya que los estudiantes de encuentran en séptimo básico), luego punto de inicio y punto de término y finalmente magnitud (considerada como longitud o distancias, sin utilizar el concepto de raíz cuadrada).

Con esto se pretende que los estudiantes puedan comprender la noción de vector y logren identificar los componentes que este posee, para no generar futuras dificultades en los diversos niveles en que se utiliza dicha noción.

6.4. En relación con las proyecciones y recomendaciones

Con el fin de recalcar la trascendencia de este escrito el diseño de esta propuesta pretende ser una innovación en el ámbito de la educación matemática, debido a que propone una nueva mirada del concepto trabajado.

También se vislumbra que dicha propuesta mejora el aprendizaje de los estudiantes, por la razón que facilita los procesos de entendimiento de los diferentes componentes del vector, siendo los educandos el centro dentro del desarrollo de esta investigación.

Asimismo, se observa que es un aporte en el eje de geometría. Debido a lo expuesto dentro de esta tesis, es menester incluir contenidos lúdicos y que desarrollen las habilidades que esta sección de la matemática propone.

Se busca que sea un material de apoyo a los docentes y profesores en formación, debido a que se pretende fomentar los procesos de aprendizajes de los estudiantes bajo la noción de juego y así facilitar la labor de estos.

A la vez, se destaca la relevancia que tiene dicha propuesta, debido a que existen pocas investigaciones que trabajen con esta noción, pese a que es transversal en los diferentes procesos de la educación matemática y de la física.

Se insta a que pongan en juego el rediseño esta nueva propuesta, considerando todos los elementos antes expuestos y en condiciones normales, fuera de una pandemia.

Uno de los propósitos del trabajo es ser un aporte en el ámbito de la enseñanza de la matemática, sobre todo cuando se hable de geometría, y que los docentes tengan un posible material de trabajo con el uso del juego, en particular, ser de ayuda para diferentes cursos de geometría, en el que se pueden enfocar en las soluciones entregadas y hacer un análisis detallado de estas.

Finalmente cabe recalcar, que el material de apoyo también ayude en la enseñanza de la física, debido a que el concepto trabajado es transversal en ambas material y sirve de introducción para enseñar las operaciones entre vectores.

Bibliografía

Alsina, C. (2009). Geometría y realidad. *Colección digital eudoxus, 1*(2).

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar.

Arteaga, S. (2007). *Las concepciones de profesores de primaria sobre la geometría y la enseñanza de los polígonos.* (Doctoral dissetation, UPN-Ajusco).

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática .

Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral.* México: LIBROS MCGRAW-HILL DE MÉXICO S.A.

Barajas, C., & Peralta, M. d. (2013). Rediseño del discurso escolar desde la creación de talleres: experiencia de formación docente del semillero matemático. In *Simposio Nororiental de Matemática (Vol. 1*, pp. 315-319.

Barreto, J. (s.f). *DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU APLICACIÓN DIDACTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.*

Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza - aprendizaje. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6*(2), 107-132.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 9(2),* 227-251.

Cantoral, R., & López, J. I. (2010). La socioepistemología: Un estudio de su racionalidad. *Paradigma, XXXI*(1), 103-122.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 9*(1), 83-102.

Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). *Socioepistemología de la Predicción .*

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (8), 9-28.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 18*(1), 5-17.

Caro, P., & Breccia, M. C. (2009). La geometría nos rodea. *Revista iberoamericana de educación matemática, UNION*(17), 85-95.

Carrillo, T., Cetina, M., & Yerbes, J. (2013). Saberes matemáticos escolarizables. Un análisis desde la perspectiva socioepistemológica. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa, 3,* 3-12.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(3), 265-286.

Cordero, F. (2006). *La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar.*

Cordero, F. (2016). La función social del docente de matemáticas: Pluralidad, transversalidad y reciprocidad.

Cordero, F., & Gómez, K. (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico.

Cordero, F., Gómez, K., Soto, D., & Silva-Crocci, H. (2014). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar .

Costa, V., & Arlego, M. (2011). Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: Una revisión bibliográfica. *Actas del, I congreso internacional de enseñanza de las ciencias y la matemática,(I CIECyM) y II Encuentro nacional en Enseñanza de las Ciencias (II ENEM)* (págs. 88-94).

Costa, V., Arlego, M., & Otero, M. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e innovación Educativa Universitaria*, *7,* 20-40.

Crespo, C. (2007). *LA ARGUMENTACIONES MATEMÁTICAS DESDE LA VISIÓN DE LA SOCIEPISTEMOLOGÍA. MÉXICO: Tesis de Doctorado, CICATA, IPN*.

Crowe, M. (1994). *A history of vector analisys: The evolution of the idea of a vectorial system.* Courier Corporation.

Chi-Pool, A., Martin-Gonzalez, A., Menendez-Dominguez, V., & Espinosa-Romero, A. (2018). Aprendizaje de Vectores Euclidianos utilizando un Sistema de Realidad Aumentada . *Research in Computing Science* .

de Castro, C., López, D., & Escorial, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *Pulso. Revista de Educación*, (34), 103-124.

De Farias, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

Distéfano, M., Aznar, M., Figueroa, S., & Moler, E. (2011). Conflictos semióticos asociados a los errores en la interpretación de la representación geométrica-vectorial de los números complejos. *Acta del, I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* , (págs. 233-240). Tandil, Argentina .

Edo, M., & Artés, M. (2016). Juego y aprendizaje matemático en educación infantil. Investigación en didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática en la Infancia*, 33-44.

Espinosa, C., & Jiménez, A. (2014). Construcción del concepto de razón y razón constante desde la óptica socioepistemológica. *Praxis & Saber, 5*(9), 53-80.

Espinoza, L., & Cantoral, R. (2010). *Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange.*

Espinoza, L., & Cantoral, R. (2011). *Una caracterización de los contextos de significación desde la socioepistemología .*

Farfán, R., & Ferrari, M. (2002). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* México.

Fernández, A., Báez, N., & López, W. (2015). Enseñanza del álgebra de vectores con enfoque por competencias a implementarse en física de edecación secundaria. *Ciencia e interculturalidad: revista para el diálogo intercientífico e intercular de, 16(1),* 7-19.

Flores-García, S., González-Quezada, M., Alfaro-Avena, L., Hernández-Palacios, A., Barrón-López, J., & Chávez-Pierce, J. (2015). Uso de vectores en su propio contexto. Parte I. *Cultura Científica y Tecnológia,* (26).

Gallardo, J., Flores, E., Aguilar, C., & Pérez, L. (2018). Aceleración de Coriolis, un método de fácil enseñanza/aprendizaje (Coriolis acceleration, an easy teaching-learning method). *Pistas Educativas 40*(131).

García, C., & Cantoral, R. (2003). Estudio socioepistemológico del significado de la tercera derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16*(3), 1-6.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). LA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO. *Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME, 8*.

Gómez, I. (1990). Los juegos de estrategia en el curriculum de matemáticas. *VII Jornadas de Estudio Sobre la Investigación en la Escuela. Cambio educativo y desarrollo profesional,* 323-330.

Gómez, K., & Cordero, F. (2010). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico.*

Gómez, K., & Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. *CLAME*, 1325-1332.

Gómez, K., & Cordero, F. (2016). El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la ingeniería agrónoma. *Investigación e innovación en Matemática Educativa, 1*, 157-164.

González, M. (2017). Uso de TIC en la estrategia didáctica de física: Suma de vectores, en el nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Campeche. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, 17*.

González, A., Molina, J., & Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: Investigación sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 26*(3), 109-133.

Gorgorió, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Núria, P., Roca, M., & Xifré, Á. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: Un ejemplo, las rotaciones. *SUMA,* 33, 59-71.

Guerra, R. & Parraguez, M. (2015). Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamientos a partir de un análisis históricoepistemológico. *RECHIEM*. *Revista Chilena de Educación Matemática, 9(1),* 52-57.

Guerrero, F., & Herrera, J. (2015). *Diseño de una propuesta de enseñanza de la ecuación vectorial de la recta en espacio para 4° año medio usando geogebra 5.* Trabajo Fin de Grado no publicado. Universidad de Santiago de Chile.

Gutierrez, E., & Martín, J. (2015). Dificultades en el aprendizaje de vectores, en los estudiantes que cursan materias del ciclo introductorio de la FCEF y N. de la UNC. *Revista de enseñanza de la física*, *27(2),* 89-96.

Guzmán, I. (2009). Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 19, 22-33.

Henríquez-Rivas, C., & Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30(54), 45-66.

Hinojos, J., & Farfán, R. (2017). Breve recorrido por el discurso matemático escolar de la serie de Fourier en el contexto del ingeniero en electrónica.

Larson, R., & Hostetler, R. (1999). *Cálculo y Geometría Analítica* (No. 515 L 318515 L 318).

Leithold, L. (1998). El Cálculo Séptima ed., 343.

López, R., & Anido, M. (2004). El medio computacional como material didáctico en la enseñanza gráfico-visual. *XVI CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA GRÁFICA-ZARAGOZA. RETRIEVED FROM http://www.egrafica.unizar.es/ingegraf/pdf/comunicacion17117.pdf.*

Llopis, J. L. (s.f.). *MatesFacil, ejercicios resueltos de matemática*. Recuperado el 21 de Abril de 2020, de https://www.matesfacil.com/

Marquina, J., Ridaura, R., Álvarez, J., Marquina, V., & Gómez, R. (1995). Philosophia Naturalis Principia Mathematica: consideraciones en torno a su estructura matemática. *Revista Mexicana de física, 42(6),* 1051-1059.

Marsden, J., & Tromba, A. (2004). *Cálculo Vectorial* (QUINTA ed.). Madrir: PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Martín, Á., Pérez, O., & Martínez-López, Y. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de espacio vectorial. *REFCalE: Revista Electrónica y Formación y Calidad Educativa. ISSN 1390-9010, 5(2),* 195-209.

Martinez-Sierra. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(2), 195-218.

Martínez-Sierra, G., & Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Joutnal of Physics Education,* 2(2), 16.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2014). *Texto del estudiante de matemática, primero medio.* Ediciones SM Chile S. A.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2015). *Texto del estudiante de matemática, séptimo básico.* Ediciones SM Chile S. A.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2015). *Bases Curriculares de séptimo básico a segundo medio.*

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2016). *Programa de estudio de matemática, séptimo básico.*

Miranda, E. (2004). Generación de modelos de enseñanza-aprendizaje en álgebra lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Molina, S. (2014). La metodología de Newton y la demostración de la realidad de la fuerza. *Estudios de Filosofía* (50*), 131-154.

Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica . 818-823.

Montiel, G. (2013). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* (Doctoral dissertation).

Morales, A., & RIpamonti, C. (2011). El problema del tiempo en la visualizacioón del cambio. Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional a través de la graficación-modelación y aplicación de la tecnología en la matemática escolar. *Acta del, I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, (págs. 465-471). Tandil, Argentina .

Muñoz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. (2014). EL uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 39, 19-33.

O'Farrill, Y. d. (2000). Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. Óptima-Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 3*(2), 99-129.

Opazo, C., Cordero, F., & Silva-Crocci, H. (2017). La identidad disciplinar desde la construcción social del conocimiento matemático. Un programa permanente de la formación del docente.

Parraguez, M., Lezama, J., & Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34(2),* 192-150.

Pérez, R. (2019). *Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar.* (Doctoral dissertation, Instituo Politécnico Nacional).

Pérez, S., & Guillén, G. (2009). Planteamiento de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la geometría en secundaria a través de diferentes enfoques. Utilización de un curso-taller como técnica para la obtención de datos. In *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander*. *En línea. Disponible en: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/PerezGuillen09.pdf.*

Pericacho, M., Rosado, J., Pons de Villanueva, J., & Arbea, L. (2020). Experiencias de Docencia Virtual en Facultades de Medicina Españolas durante la pandemia COVID-19 (I): Anatomía, Fisiología, Fisiopatología, Oncología. *Revista Española de Educación Mèdica, 1(1),* 32-39.

Picón, G., de Caballero, G., & Paredes, J. (2020). Desempeño y formación docente en competencias digitales en clases no presenciales durante la pandemia COVID-19.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.*(Doctoral dissertation, Tesis de doctorado. México: Cinvestav).

Reyes, D., & Cantoral, R. (2013). El empoderamiento docente desde la teoría socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 26(1).

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360-382.

Rosso, A., & Barros, J. (2011). Permanecia de algunos conceptos de espacios vectoriales y su operatividad. *Actas del, I congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, (págs. 479-486). Tandil, Argentina .

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática, 26(3),* 75-107.

Samper, C., Leguizamón, C., & Camargo, L. (2001). Razonamiento en Geometría. *Revista EMA, 6*(2), 141-158.

Sánchez, G. (1997). La enseñanza de la geometría en el momento actual y el futuro inmediato. *SUMA,* 25, 17-22.

Silva, H., & Cordero, F. (2010). La identidad y la adherencia en la formación del matemático educativo en latinoamérica.

Silva-Crocci. (2015). Matemática Educativa, Latinoamérica, adherencia e identidad disciplinar. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 9*(1), 7-121.

Silva-Crocci, H., Soto, D., Gómez, K., & Cordero, F. (2015). La construcción social del conocimiento matemático y el discurso matemático escolar, aproximaciones a un programa permanente de formación del docente.

Soto, D. (2013). *La dialéctica exclusión-inclusción entre el discurso matemático escolar y la construccón social del conocimiento matemático.* (Doctoral dissertation, Instituto Politécnico Nacional).

Soto, D., & Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática?

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544.

Soto, D., & Reyes-Gasperini, D. (2011). En búsqueda de la exclusión en el discurso matemático escolar.

Soto, D., Gómez, K., Silva, H., & Cordero, F. (2012). Exclusión, cotidiano e identidad: Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática.

Torrecillas, C. (2020). El reto de la docencia online para las universidades públicas españolas ante la pandemia del Covid-19. *ICEI*.

Tuyub, I., Cantoral, R., & Cordero, F. (2009). Un estudio socioepistemológico en la práctica toxicológica. *Actas latinoamericanas de matemática educativa*, *22,* 1245-1254.

Valenzuela, D. (s.f.). *Fisic Education*. Recuperado el 21 de Abril de 2020, de https://www.fisic.ch/

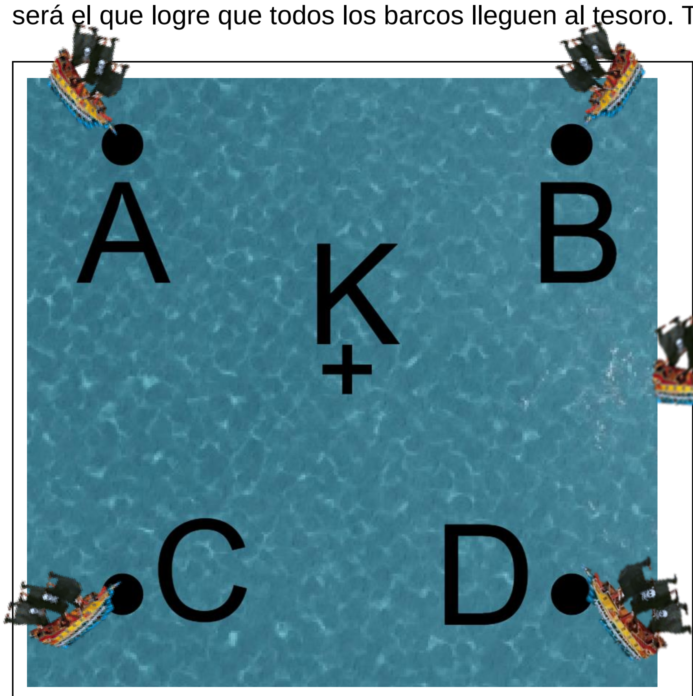
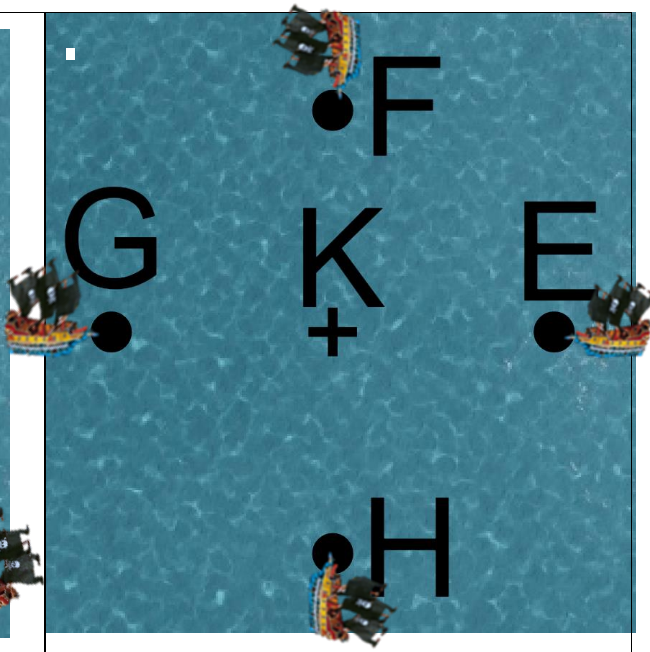
Yojcom, D., & Cantoral, R. (2011). La epistemología de la matemática maya.

Zea, C. A. (2013). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.* (Doctoral dissertation, Maestría en educación con énfasis en educación matemática-Universidad del Valle).

Anexos

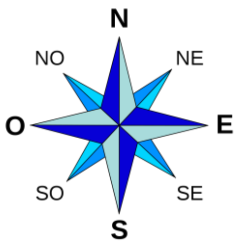
MOMENTO 1:

En lo oscuro del mar Atlántico, se encuentra un tesoro hundido en la cuidad de Atlántida. Dos diferentes grupos de piratas, PLEMC y LEMC, quieren obtener el tesoro. El grupo ganador será el que logre que todos los barcos lleguen al tesoro. Tú los debes ayudar.

	
Pantalla del radar de **PLEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro.	Pantalla del radar de **LEMC**: El punto “k”, o el del centro es la ubicación exacta del tesoro.

1. ¡Se rompió la brújula del barco!

Elige un barco y utiliza la rosa de los vientos, ¿En qué sentido se debe mover para llegar al tesoro?



2. Ubica el barco que está opuesto al tuyo, y considerando el sentido que debe tomar este barco para llegar al tesoro, ¿es el mismo que el de tu barco? Comunícate con el equipo para dar las indicaciones

3. **¿Pasará con todos los barcos?**

Compara la respuesta con tu compañero. ¿Los barcos de tu compañero también estaban en dirección opuesta? Justifica.

4. **¡Analicemos la situación!**

En un nuevo radar, dibuja el trayecto de tu barco para llegar al tesoro y realiza lo mismo con el barco opuesto al tuyo. ¿Qué sucedió con los caminos?

5. ¡Comunícate con tu equipo!

Considerando que los trayectos de los barcos llegan al tesoro. ¿Se encuentran en una misma recta los trayectos de los barcos? y ¿en qué se diferencian estos trayectos?

¡Código del pirata!

Para dar las instrucciones finales, fue necesario darle un **sentido** orientándolos hacia donde deben dirigirse. Considerando que se encontraban en la misma recta, la que denominaremos **dirección**

Momento 2:

6. ¿Es posible conocer la ubicación de los barcos? Justifica tu respuesta

7. **¡Comunícate con los barcos!**

Utiliza el “**radar de coordenadas**” y escribe las posiciones exactas de cada barco de LEMC y PLEMC. Luego debes dibujar en las pantallas de los radares los trayectos que harían **TODOS** los barcos para llegar al tesoro. **¡No olvides los símbolos!**

LEMC	
PLEMC	

8. **¡ALERTA! ¡ALERTA!**

Bencina baja

Ha aparecido este símbolo en los barcos que se encuentran en los puntos **B** y **H**. Los barcos más cercanos deben ayudar a solucionar el problema regalando bencina.

¡Ayuda a los barcos!

Comunícales desde dónde deben partir y hasta dónde deben llegar.

Punto de partida	Punto de llegada

9. ¡NOS PERDIMOS!

Los barcos que ayudaron deben volver a su posición original para continuar buscando el tesoro.

Comunica el camino de retorno que deben realizar los barcos para volver a su posición.

Punto de partida	Punto de llegada

10. ¿Qué indicaciones se entregaron para el recorrido o trayecto de los barcos?

¡Código del pirata!

Para dar las indicaciones fue necesario saber los puntos de referencia de los barcos, ya sea su punto de partida (origen), como su punto de llegada (extremo). Si A y B son dos puntos en el plano cartesiano, con origen A y extremo B se simboliza $\overrightarrow{AB}$

Momento 3:

11. ¡Comenzó la carrera!

¿Es posible determinar cuál grupo llegará primero al tesoro? Justifica tu respuesta.

¡FALLÓ LA PANTALLA DEL RADAR!

Debemos ayudar a los barcos de ambos grupos para llegar al tesoro, para ello reúnete con tu compañero y **elijan un barco de LEMC y otro de PLEMC**

12. Con el radar ubica el barco que elegiste. ¿Cuántos espacios debe moverse el barco para llegar al tesoro? Comunícale a tu grupo.

13. ¡Necesitamos saber la posición del otro grupo!

Pregúntale a tu compañero que barco eligió

Comunícale a tu grupo cuántos espacio debe moverse el barco del otro equipo

14. Utilizando tu regla, mide las distancias de **TODOS** los barcos al tesoro, discute con tu compañero quién va a ganar la carrera y comunícalo a tu grupo.

	El grupo más cercano al tesoro es:

15. ¿Por qué gana ese equipo? Argumenta.

¡Código del pirata!

Para tomar la decisión de cuál grupo se encuentra más cerca del tesoro, fue necesario saber la distancia o **magnitud** (que hace referencia a la longitud de un segmento) de los barcos al tesoro

¡FELICITACIONES LLEGARON AL TESORO!