UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación

CONCEPTUALIZACIÓN DEL OBJETO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL A PARTIR DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

Christian Iván Martínez Pino

Profesores Guía: Carlos Vanegas Ortega

Gladys Bobadilla Abarca

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento con los requisitos para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

Santiago, Chile

2021

RESUMEN

El objetivo de este trabajo de graduación es caracterizar el proceso de conceptualización que alcanzan estudiantes universitarios cuando abordan la unidad temática de transformaciones lineales a partir de una propuesta didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele. Para cumplir este propósito se utilizó una metodología cualitativa, con un diseño no experimental, longitudinal de panel; lo que significa que se observó el fenómeno en su entorno natural y los sujetos de estudio fueron evaluados a medida que avanzaba la secuencia. De modo general, los resultados muestran que al secuenciar los contenidos abstractos del álgebra lineal a partir de un modelo de enseñanza geométrico, los estudiantes desarrollan la capacidad de razonar de manera visual el objeto de transformación lineal, lo que les permite establecer vínculos concretos con otros conceptos matemáticos más simples, como por ejemplo el de isometría o el de matriz asociada. Todo esto conlleva a que el objeto de aprendizaje no sea razonado de una manera mecánica, sino que tenga un significado concreto para el estudiante.

Palabras clave: Modelo de Van Hiele, Didáctica de la geometría, Álgebra lineal, Transformación lineal, Conceptualización

ABSTRACT

The objective of this document is to characterize the conceptualization process achieved by university students when they approach the thematic unit of linear transformations based on a didactic proposal based on Van Hiele theoretical model. To fulfill this purpose, a qualitative methodology, with a non-experimental, longitudinal panel design, was used. This means that the phenomenon was observed in its natural environment and the study subjects were evaluated as the sequence progressed. In general, the results show that by sequencing the abstract contents of linear algebra from a geometric teaching model, students develop the ability to visually reason the linear transformation object, allowing them to establish specific links with other simpler mathematical concepts, such as isometry or associated matrix. All this means that the object of learning is not reasoned in a mechanical way but has a specific meaning for the student.

Keywords: Van Hiele Model, Didactics of Geometry, Linear Algebra, Linear Transformation, Conceptualization

DEDICATORIA

El más fuerte dándote abrazos,

el más grande siempre al querer,

el pequeño cuando me enfado,

el que no querrá ni una vez perder…

Pequeño gigante

qué se te ha ocurrido esta vez

para que me quede

y vayamos juntos después

hacia lugares que jamás imaginé

y que de tu mano descubriré.

Dedicado a mis sobrinos Mateo, Tomas y Lucas quienes día a día entregan felicidad.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a mis padres por la paciencia y comprensión que me han entregado durante toda mi vida. Este escrito también es un reflejo del esfuerzo y trabajo que han desarrollado ellos durante toda su vida.

En segundo lugar, agradezco a mis sobrinos Mateo, Tomas y Lucas; quienes a partir de su ingenuidad, espontaneidad y naturalidad me ayudaron a buscar la inspiración en momentos que los ánimos no abundaban.

Para finalizar, agradezco a mi profesor guía Carlos Vanegas Ortega, quien a partir de su profesionalismo, entusiasmo y carisma generó en mí un icono de buen profesor, el cual me acompañará durante el desarrollo de toda mi vida profesional.

"Enseñar no es transferir conocimientos, sino crear las posibilidades para su producción. Quien enseña aprende al enseñar y quien enseña aprende a aprender"

Paulo Freire

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Variados son los estudios que clasifican o describen los problemas de aprendizaje que presentan los estudiantes a la hora de comenzar a instruirse en un curso de álgebra líneal (Días Alvez et al., 1995; Dorier J-L, 1995; Dorier J-L et al., 2000; Kú Darly et al., 2008). Principalmente, las dificultades se asocian al poco -o en ocasiones nulo- conocimiento previo que los estudiantes poseen de la teoría de conjuntos, a esto se le suma el hecho que el curso de álgebra lineal suele ser el primer acercamiento que los estudiantes poseen con la matemática abstracta.

Una solución planteada por algunos autores es el acercamiento práctico que permite la geometría para abordar los conceptos abstractos del álgebra lineal (Dorier Jean-Luc et al., 2000). Esto basado en el vínculo teórico que se establece entre el pensamiento geométrico y el pensamiento algebraico, siendo el primero de estos un facilitador del segundo (Duval R. , 2000).

Ante esta situación, durante esta investigación se propone la aplicación de una intervención didáctica basada en el modelo geométrico de Van Hiele. Específicamente, la secuencia aborda la unidad temática de transformaciones lineales. Es decir, se planifica una intervención didáctica de un concepto relacionado con el álgebra lineal, la cual intenta promover en el estudiante un razonamiento geométrico, el cual irá evolucionando hacia un pensamiento de tipo algebraico

Por tanto, esta investigación se centra en estudiar los resultados que presentaron 4 estudiantes universitarios. El escrito comienza contextualizando y detallando la problemática. Durante el capítulo 1 se explican y profundizan los elementos que dificultan el aprendizaje del álgebra lineal, además de explicitar los objetivos y la pregunta de investigación.

El segundo capítulo tiene el propósito de presentarle al lector el marco teórico que sustenta las ideas y las estrategias utilizadas. Durante esta sección se enfatiza en la relación existente entre el pensamiento geométrico y el pensamiento algebraico, además de detallar los niveles y fases el modelo geométrico de Van Hiele.

En el tercer capítulo se entra de lleno en la metodología utilizada. Durante esta sección se detallan elementos como el tipo de metodología, el diseño metodológico utilizado y las características particulares de la muestra. Además, se realiza una presentación exhaustiva de los instrumentos pedagógicos empleados durante la intervención. Específicamente se conectan dichos instrumentos con el modelo de Van Hiele y se expresan cómo estos pueden ser utilizados para medir el nivel de razonamiento de los estudiantes.

El capítulo 4 refleja los niveles de razonamiento alcanzados por los 4 estudiantes analizados en la investigación. Durante este apartado se detalla el proceso de conceptualización que desarrolla cada estudiante, con relación al objeto de transformación lineal. Específicamente se detallan cómo las diferentes actividades van ayudando a alcanzar los distintos niveles de razonamiento, además, se analiza la capacidad que poseen los estudiantes de transitar entre el objeto de transformación lineal y otros objetos matemáticos.

Finalmente, se presenta el capítulo 5, en el cual se establecen las conclusiones y comentarios finales de la investigación; para ello se hace referencia al cumplimiento de los objetivos y a la respuesta de la pregunta de investigación. Además, se explicitan las limitaciones del estudio y, a partir de ellas, se plantean proyecciones que permitirán seguir profundizando sobre la enseñanza del álgebra lineal y su relación con el pensamiento geométrico.

1 CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES GENERALES

1.1 PROBLEMÁTICA QUE ABORDA EL PROYECTO

La problemática que aborda este trabajo de investigación son las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes universitarios a la hora de cursar la asignatura de álgebra lineal. Específicamente el proyecto considera la realidad que viven los estudiantes de primer año de pregrado, a la hora de comprender los conceptos relacionados con transformaciones lineales.

La problemática se justifica en los siguientes subtemas a partir de una exhaustiva revisión bibliográfica, en donde, se puede señalar que las dificultades típicas de enseñanza asociadas a la didáctica (Chevallard et al., 1998) se ven acentuadas por las características abstractas del álgebra lineal. A continuación, se argumenta cómo la gran diversidad de representaciones semióticas, la naturaleza epistemológica de esta rama de las matemáticas y los problemas con los diseños didácticos inciden negativamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo cual lleva a que los contenidos no sean comprendidos e interpretados en concordancia con los conocimientos algebraicos.

1.2 ANTECEDENTES DE LA PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

Una gran cantidad de problemas, serios y complejos, está afectando al sistema educativo. El hecho de que el sistema educacional se caracterice por ser segregador (Valenzuela J.P. et al., 2010; Bellei C., 2013) y entregar conocimientos desprovistos de contexto y con déficits didácticos (Navas, 2018), se convierten en unas de las raíces principales de las problemáticas relacionada con el aprendizaje. Esta última realidad se ve acentuada aún más si se acota el contexto a la asignatura de matemáticas, ya que es conocido el masivo rechazo social que se ha instaurado hacia este tipo de conocimiento (Hidalgo Alonso et al., 2004).

Si bien, el problema es transversal a todos los niveles, en el caso del álgebra lineal, en tanto contenido universitario, las instituciones de educación superior deben asumir la responsabilidad de comenzar a buscar soluciones. Sin querer ahondar en las causas del problema, se debe mencionar que uno de los principales factores que se asocia al aprendizaje de las matemáticas recae en la forma de enseñarlas (Chevallard et al., 1998). Actualmente las matemáticas son enseñadas de una forma poco contextualizada, lo que Chevallard llama “el paradigma de visita de obras” (Chevallard, 2013), en donde se entregan soluciones a problemas ni siquiera enunciados. Esto conlleva a percibir a las matemáticas como una necesidad escolar (Chevallard et al., 1998), por lo cual resulta válido, desde la perspectiva del estudiante, memorizar el contenido y posteriormente olvidarlo (Chevallard, 2013). Toda esta situación conlleva a un proceso de aprendizaje deficiente, que va encarrilando al estudiante en un camino sin vuelta atrás, ya que con el pasar del tiempo, los conceptos erróneos, sumados a innumerables baches teóricos y procedimentales, son una barrera infranqueable de sobrepasar, sobre todo en cursos de nivel superior.

Ahora bien, aunque gran cantidad de avances teóricos se han producido en la academia, esto no quiere decir que se estén poniendo en práctica, pues para poder realizar cambios macros a nivel educacional, como lo es la forma de enseñanza, se necesita de un apoyo político, tanto nacional como institucional. Es por esto que la realidad de las aulas universitarias no está muy lejos de lo que sucede en las escuelas, en donde los estudiantes no solo deben afrontar el reto universitario en compañía de profesores poco preparados en conocimientos sobre la docencia, debido a las deficiencias que estos poseen en su formación inicial (Ortegón, 2013), sino que también existe una compresión errónea, a nivel de instituciones educativas, del concepto de competencias profesionales del docente, ya que muchas de ellas entienden la competencia profesional del docente desde una perspectiva netamente intelectual (Tirado, 2009), dejando poco espacio a las competencias sociales, didácticas y éticas, las cuales son indispensables a la hora de generar mejores procesos de enseñanza. A estas dificultades se le añaden una serie de otros problemas relacionados con variables económicas, psicosociales o vocacionales del estudiante, las cuales irremediablemente terminan influyendo en su proceso de aprendizaje.

En lo que atinge a este estudio, distintas son las perspectivas para argumentar la necesidad de generar una planificación prolija a la hora de intentar que los estudiantes logren alcanzar el aprendizaje matemático, más aún si se habla de álgebra lineal, ya que la gran cantidad de aplicaciones que puede llegar a tener esta rama de la matemática hace que se enseñe en gran parte de los programas de educación superior (Trigueros y Oktaç, 2010). Según Dorier y Sierpinska (2001) existe un problema tanto en la forma de enseñar como en la de planificar la enseñanza del álgebra lineal, esto ha llevado a países como Estados Unidos a crear instituciones especializadas en la didáctica del álgebra lineal; ejemplo de esto es el grupo de estudio del curriculum del álgebra lineal (LACSG), el cual ha propuestos variadas modificaciones a la forma de enseñanza de esta área de la matemática. En el mismo contexto, algunos países de Europa como Francia, Marruecos o Polonia ya vienen ejecutando cambios, pasando desde un enfoque teórico hacia uno más práctico.

Los errores de comprensión de los conceptos asociados al álgebra lineal son abordados por una gran cantidad de autores (Dorier y Sierpinska, 2001; Dorier J-L et al., 2000; Trigueros y Oktaç, 2010; Caserio et al., 2007; Rosso y Barros, 2013), y varían en su clasificación e importancia según cada investigación. No obstante, es posible visualizar una clara recurrencia entre los factores aludidos por los autores, entre los que destacan: la naturaleza epistemológica de la rama matemática; el uso de diferentes representaciones semióticas; y los problemas con los diseños didácticos. Todas estas situaciones se van interrelacionando para complejizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde los estudiantes son los principales afectados.

Para comprender el fenómeno, se hace necesario profundizar en cada uno de los puntos señalados en el párrafo anterior. No obstante, es importante tener claro que estos aspectos son inseparables en los procesos reales de enseñanza y aprendizaje (Dorier y Sierpinska, 2001), ya que se manifiestan de forma simultánea tanto en estudiantes como en profesores. Por ende, sería un error abórdalos individuamente a la hora de generar una intervención didáctica.

1.2.1 Naturaleza epistemológica del álgebra lineal

Al igual que todas las ramas del conocimiento de la humanidad, el álgebra lineal desarrolla su evolución a lo largo de la historia. Problemas tan amplios como la distribución de cosecha, la repartición de presupuesto, o el cálculo de estabilidad estructural de un edificio pueden platearse en términos de un sistema de ecuaciones lineales. Por estas características es que existen vestigios de documentos tan antiguos como el *Papiro de Rhind* (1650 A.C.), *Tablitas de croquetta* (2100 A.C.), o *Nueve capítulos sobre el arte matemático* (150 A.C)[1] que hablan -en parte- sobre métodos de solución de ecuaciones lineales (Luzardo y Peña, 2006).

Estos datos confirman el hecho de que el pensamiento lineal es un concepto que ha sido transversal a toda la historia las matemáticas, pues engloba conceptos tan simples como ecuaciones de primer orden hasta concetos más abstractos como transformaciones lineales. Debido a esto, gran cantidad de matemáticos como Euler, Gauss, Cramer, Hamilton, Grassmann, entre otros[2], han construido las bases para desarrollar el álgebra lineal que se conoce hoy en día, el cual puede definirse -en términos históricos- como el proceso que unificó la geometría analítica con el álgebra moderna.

Dicho esto, es relevante aclarar que el proceso de axiomatización del álgebra lineal no estuvo exento de dificultades, es más, fue un proceso que demoró más de 2 siglos en desarrollase. El primer paso que se dio en este sentido fue el desarrollo del método analítico -geometría analítica- introducido, de forma independiente, a partir de los trabajos realizados por Rene descartes y Perret de Fermat (Dorier J.-L. , 1995), el que básicamente consiste en la representación de

1 Las fechas están aproximadas y fueron obtenidas a partir del trabajo de Luzardo y Peña (Luzardo y Peña, 2006).

2 Para más detalle sobre los aportes realizados por diversos matemáticos a la concepción del álgebra lineal, revisar el trabajo *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory* (Dorier Jean-Luc. , 1995).

situaciones geométricas a partir de elementos algebraicos. Esta nueva forma de concebir la geometría, relacionándola con el álgebra, generó gran resistencia en su época, la cual es análoga a la que se genera en los estudiantes al relacionar elementos algebraicos y geométricos (Eslava y Villegas, 1998; García et al., 2006). Ejemplo de esto es lo que Leibniz señala, en 1679, en una carta enviada a Huygens:

> "Todavía no estoy satisfecho con el álgebra porque no da los métodos más cortos o las construcciones más bellas en geometría. Por eso creo que, en lo que se refiere a la geometría, necesitamos otro análisis que sea claramente geométrico o lineal y que exprese la situación directamente como el álgebra expresa magnitudes" (Dorier J.-L. , 1995, p. 234 - Traducción propia).

Leibniz continua y señala:

> "El álgebra es la característica de los números indeterminados o magnitudes solamente, pero no expresa la situación, los ángulos y el movimiento directamente. Por lo tanto, es a la vez difícil analizar las propiedades de una figura por cálculo, y aún más difícil encontrar demostraciones geométricas y construcciones muy convenientes, incluso cuando se completa el cálculo algebraico" (Dorier J.-L. , 1995, p. 234 - Traducción propia).

Sin caer en analizar el fallo de su crítica, tan obvias para el lector actual, es importante observar que, desde el punto de vista de Leibniz, el análisis algebraico estaba incompleto, ya que no facilitaba las situaciones, sino que les agregaba mayor complejidad. Esta visión contraria sobre la injerencia del álgebra en asuntos geométricos se convirtió, paradójicamente, en uno de los principales impulsores del desarrollo del álgebra y la geometría analítica, ya que para aclarar de mejor manera la relación entre ambas, se desarrollaron una gran cantidad de herramientas matemáticas en los siglos venideros.

Si se analiza el contenido del comentario desde un punto de vista didáctico, este tiene implicancias relevantes, ya que la crítica de Leibniz radica -en parte- en el hecho de que para resolver los problemas geométricos de su época no se hacía necesario la irrupción algebraica. Esta situación es muy similar a la realidad que enfrentan los estudiantes de primer año universitario a la hora de enfrentar el curso de álgebra lineal, ya que como se argumentará más adelante, la mayoría de los problemas relacionados a espacios vectoriales finitos pueden ser resueltos sin la necesidad de definir esta estructura algebraica (Dorier y Sierpinska, 2001).

Sin caer en detalles sobre el desarrollo histórico que tuvieron los conceptos matemáticos relacionados con álgebra lineal -no es el objetivo de este documento-, se puede mencionar que dicho proceso puede dividirse en 2 grandes periodos: génesis; y estructuración formal. En el primero de estos periodos, el cual se extiende desde mediados del siglo XVIII hasta mediados del siglo XIX[3], autores como Cramer y Euler entregaron las primeras conceptualizaciones de elementos como el determinante y la dependencia lineal entre ecuaciones de primer orden (Dorier J.-L. , 1995). Posteriormente, con el pasar de los años y los primeros acercamientos de la geometría hacia dimensiones superiores, matemáticos como Bellavitis y Hamilton hicieron grandes aportes en lo que respecta a la suma y producto de vectores en el espacio. El punto de inflexión, que representa la transición entre el periodo de génesis y estructuración formal, se produce en 1844, a partir del trabajo presentado por el lingüista y matemático alemán Hermann Günther Grassmann, el cual se titula *Lineale Ausdehnungslehre* [teoría lineal de la extensión], en donde el espacio y la geometría son teorizados de una forma muy peculiar para su época, ya que los conceptos que Grassmann utiliza para desarrollar sus ideas estaban autocontenidos y eran independientes del resto de las matemáticas. Esta forma de presentar los resultados posee una relevancia importante, ya que puede considerarse como la primera axiomatización de los conceptos de espacios y vectores (Dorier J.-L. , 1995). Posteriormente, durante el periodo de estructuración formal se realizan grandes avances en lo que respecta axiomatización y definiciones, por ejemplo, Frobenius (1875) define formalmente la idea de rango, mientras Peano (1888) realiza la primera axiomatización de un espacio vector. Ya en el siglo XX matemáticos italianos como Marcolongo y Forti (1909) presentan grandes resultados relacionados con la axiomatización de los sistemas lineales, mientras el alemán Steinitz (1910) define con precisión la idea de dependencia lineal en la estructura algebraica de campo.

Cabe destacar que todos estos avances se realizaron en ambientes matemáticos variados, es decir, fueron desarrollándose de forma independiente a partir de los trabajos derivados de contextos como el análisis funcional, las formas cuadráticas, las estructuras algebraicas, la geometría analítica, entre otros. Estos avances tuvieron su punto de unificación a partir de las concepciones lineales y las concepciones geométricas, lo que en la práctica se reflejaba en la aparición del concepto de determinantes en mucho de ellos.

Con todos estos argumentos puestos en consideración, el álgebra lineal se estructura de forma axiomática a partir del trabajo doctoral *Sur les opérations dans les ensembles abstraf'ts et lent applicatinoux equations integrables* realizada por Stefan Banach a principio de los años 20. En esta obra Banach axiomatiza lo que hoy se llama Espacios de Banach, o también conocido como

---

3 Los periodos de tiempo enunciados son aproximaciones, y se justifican en el hecho que dentro de ellos se produjo gran cantidad del trabajo matemático relacionado con concepciones lineales, sin perjuicio de lo anterior pueden existir trabajos que hayan tenido gran influencia y no se encuentren dentro del periodo enunciado.

espacio vectorial completo, el cual consiste básicamente en un espacio de funciones con dimensión infinita.

Con el pasar de los años, la axiomatización entregó un lenguaje universal que poseía la ventaja de facilitar la transición en una gran variedad de ambientes, ya que muchas de las estructuras como matrices, polinomios, funciones, vectores, entre otras, podían ser analizados de forma general en una gran cantidad de contextos, a partir de la idea de espacio vectorial. Debido a esto, se estableció de forma tácita que el lenguaje ideal que se debe utilizar para abordar situaciones lineales debe ser el lenguaje formal proveniente de la axiomatización de Banach.

La importancia de esta última afirmación recae en el hecho que, desde un punto de vista epistemológico, la relevancia de la axiomatización del álgebra lineal radica en el poder de unificación que entrega a distintas áreas de las matemáticas, no así en su poder de resolución de problemas (Dorier y Sierpinska, 2001), ya que si no se está hablando de situaciones de dimensión infinita no numerable, no se hace necesario -en gran medida- el uso del lenguaje formal, ya que la ganancia que produce el uso de este lenguaje en términos de unificación, generalización y simplificación es solo visible para un experto (Dorier y Sierpinska, 2001). Es más, para el contexto de un alumno de pregrado, la mayoría de los problemas a los que se ve enfrentado pueden ser resuelto sin entrar en la concepción de espacio vectorial. Esto posee implicancias didácticas importantes, pues para comprender la idea de espacio vectorial se hace necesario utilizar un nuevo nivel de abstracción. Especificamente, se posiciona el concepto de espacio vectorial como una abstracción de elementos ya abstractos, como lo son vectores, series, matrices, funciones, entre otros. Esto conlleva a un importante cambio en el nivel de cognición necesario para la comprensión, ya que, desde el punto de vista del estudiante, conceptos matemáticos como matrices, vectores, dimensión o transformaciones lineales deben integrarse en un proceso de abstracción de nivel superior.

1.2.2 El lenguaje del álgebra lineal

Una de las principales diferencias entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento es que los objetos[4] -objetos matemáticos- que esta utiliza viven netamente en el mundo de las ideas. Dicho de una forma más práctica, los objetos son netamente abstractos, pues no hay forma alguna que una persona pueda entrar en contacto físico con elementos como funciones, limite, integrales, matrices, entre otros. Es debido a esta realidad que la matemática basa la construcción

4 Para poder facilitar la comprensión del texto, se recalca que, durante este apartado, cuando el autor se refiera a la palabra objeto, se estará haciendo referencia a la idea de objeto matemático.

de su conocimiento a partir de un sistema lógico-deductivo, pues no puede contrastar sus postulados a partir de la observación de objetos reales (Gómez-Granell, 1989).

Esta realidad particular posee implicancias didácticas importantes, ya que para poder entrar en contacto con dichos objetos se hace estrictamente necesario representarlos a través de un sistema de simbolización. Debido a esto es que muchos autores categorizan la actividad matemática como una actividad netamente simbólica (D'Amore, 2006; Sánchez, 2014; Duval, 2006), en donde las representaciones actúan como puente entre el objeto y el alumno. Esto conlleva a entender que el tipo de representación que el docente utiliza es una herramienta fundamental en el proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1997), ya que en la práctica, el estudiante no entra en contacto con el objeto matemático, sino que se contacta con una representación semiótica de este (D'Amore, 2004). Por lo cual, toda representación semiótica que se utiliza en el proceso de transposición didáctica tiene un papel fundamental en el desarrollo del aprendizaje, ya que estos interfieren de forma directa en el proceso de conceptualización (D'Amore, 2004).

La importancia que poseen los sistemas de representaciones en el contexto matemático, sumado a las limitaciones propias del lenguaje natural, cuya gramática y sintaxis son extraordinariamente engañosas (Sancho, 2009) ha levantado la necesidad de desarrollar un lenguaje matemático propio, denominado lenguaje formal (Dorier J.-L. , 1995), el cual se caracteriza por englobar los aspectos formales en la sintaxis y no en vocabulario. Dicho de otra forma, en el lenguaje matemático las expresiones semánticas son suprimidas para obtener una mejor operatividad (Sancho, 2009).

En un contexto didáctico, el lenguaje formal y el lenguaje natural están en continua interconexión, pues es muy normal que el profesor busque matizar el formalismo matemático a partir del uso del lenguaje natural. Sin embargo, en muchas circunstancias esta relación sufre disociaciones, pues es recurrente que el alumno no posea las herramientas para transitar de un lenguaje a otro, o también suele ocurrir que el uso de uno interfiere con la utilización del otro, es decir, la explicación en palabras coloquiales que utiliza el docente se ve enfrentada con la definición matemática entregada por el mismo profesor (Rosso y Barros, 2013). Ambas situaciones terminan interfiriendo con el proceso de aprendizaje, lo que lleva al alumno a no comprender de buena manera el objeto matemático en cuestión.

Dentro del contexto del lenguaje utilizado en curso de álgebra lineal, variados son los autores que identifican un uso excesivo del formalismo matemático (Dorier y Sierpinska, 2001; Rosso y Barros, 2013). El *obstáculo del formalismo* (Dorier y Sierpinska, 2001) tiene sus orígenes, en la naturaleza epistemológica del álgebra lineal, en donde la axiomatización del concepto de espacio vectorial -realidad referida en párrafos anteriores-, ha llevado a utilizar en exceso el formalismo matemático a la hora de aplicar el proceso de transposición didáctica. Ya a fines de los años 80, en el trabajo de Robert y Robinet (1989, citado en Dorier y Sierpinska, 2001) se hacían explícitas las preocupaciones que manifestaban los estudiantes a la hora de cursar la asignatura de álgebra lineal. Específicamente se señala que existía una abrumadora cantidad de definiciones y teoremas formales a la hora de sumergirse en un curso de álgebra lineal. A esta situación -ya problemática- se le debe añadir la poca conexión que sentían los alumnos con estas “nuevas matemáticas”, debido a que tenían un vínculo muy pobre con los contenidos que ellos dominaban. Quedaba de manifiesto que los estudiantes tenían la sensación de no encontrar un camino claro en este nuevo contexto, ya que en palabras de los autores (Dorier y Sierpinska, 2001), los alumnos acaban de aterrizar en un mundo completamente nuevo. En contraparte, los profesores manifestaban preocupación por el poco dominio que poseían sus alumnos en lo que respecta a teoría de conjuntos y geometría cartesiana, lo que hacía dificultoso contextualizar los conceptos abstractos del álgebra lineal. Todas estas situaciones tenían como resultado una nula interpretación de los conceptos formales del álgebra lineal en ambientes más intuitivos como la geometría o los sistemas de ecuaciones lineales (Dorier et al., 2000).

Dicho de otra forma, el principal problema que presenta el obstáculo del formalismo es que el uso de este lenguaje conlleva a un uso excesivo de representaciones algebraicas, las cuales tiene muy poco significado cognitivo para un estudiante de primer año de pregrado, ya que estas son una generalización de situaciones. Es decir, se sumerge al estudiante en un mundo de características abstractas -álgebra lineal-, y el sistema de representación que se utiliza para explicar las situaciones también es abstracto, por lo cual no resulta raro encontrar dificultades en el aprendizaje de esta asignatura.

Paradójicamente, ante esta realidad muchos docentes intentan diversificar el uso de representaciones semióticas, siempre en la medida de lo que el *status quo* permite[5]. Dicha diversificación se realiza con el propósito de explicar y contextualizar de mejor manera los objetos matemáticos. Sin embargo, en muchas ocasiones esta situación termina siendo perjudicial para el estudiante, pues no siempre resulta claro que estas representaciones simbolicen a un mismo objeto. Además, es necesario considerar el hecho de que, en condiciones normales, el docente no siempre es consciente de la relevancia que poseen los sistemas de representación en términos didácticos, lo que en la práctica se traduce en una gran cantidad de transiciones en términos semióticos, es decir, el docente tiende a transitar de una representación a otra sin siquiera

[5] Esta expresión hace referencia a que, si bien el docente intenta presentar aplicaciones en términos aritméticos y geométricos, el contexto general sigue siendo netamente algebraico.

explicitar los motivos de las equivalencias, lo que inevitablemente termina perjudicando el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

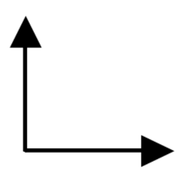
- **Tipos de representaciones**

Mas allá de la gran variedad de representaciones como lo son los registros gráficos, los registros tabulares y los registros simbólicos del lenguaje formal que son transversales a todas las enseñanzas de las matemáticas, dentro de un curso de álgebra lineal es posible identificar 3 tipos de lenguaje: el geométrico, el aritmético y el algebraico (Rosso y Barros, 2013).

- Lenguaje algebraico: el lenguaje algebraico consiste básicamente en la generalización de elementos como matrices, polinomios, vectores, rango, entre otros (Dorier y Sierpinska, 2001).
- Lenguaje geométrico: corresponde a todos los elementos que son posibles de visualizar en el espacio bidimensional y en el tridimensional, entre los que destacan segmentos, líneas, líneas dirigidas, figuras geométricas, cuerpos geométricos, rectas, planos, entre otros (Dorier y Sierpinska, 2001).
- Lenguaje aritmético: corresponde a la explicitación de algún elemento comprendido en el lenguaje algebraico.

Para facilitar la comprensión y poder diferenciar de mejor manera a cada uno de estos elementos, se procede a presentar la Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Tipos de representación del concepto de base

Concepto	Representación		
	Geométrica	**Aritmética**	**Algebraica**
Base		$\left\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right\}$	$\{e_1, e_2\}$

Fuente: Elaboración propia basada en Rosso y Barros (2013)

Como es posible visualizar en la Tabla 1.1, un objeto matemático puede ser representado a partir de una diversidad de representaciones semióticas. Esta realidad particular refleja una de las principales dificultades a la hora de sumergirse en un curso de álgebra lineal, pues como se mencionó en párrafos anteriores, las equivalencias entre los tipos de representaciones no siempre son obvias para un estudiante, lo que termina perjudicando el proceso de comunicación entre docente y alumno, debido a que el código que se utiliza para trasmitir el mensaje no es comprendido por el receptor.

1.2.3 Los problemas con los diseños didácticos

Debido a los problemas referidos en los apartados anteriores, es que durante las últimas décadas se han propuesto una gran cantidad de cambios para planificar, secuenciar y desarrollar de mejor manera la enseñanza del álgebra lineal. Sin embargo, la mayoría de estos esfuerzos se caracterizan por diversificar las herramientas utilizadas en el aula, y no por cambiar la estrategia o estructura de cómo se aborda la asignatura. Ejemplo de esta realidad son los estudios de Vílchez (2015) y Rico et al. (2004), los cuales utilizan herramientas como softwares y calculadores para contextualizar de mejor manera algunos conceptos relacionados con el álgebra lineal.

Si bien, estos recursos facilitan en cierto grado la comprensión de algunos conceptos, no logran abordar en su totalidad las raíces de las dificultades. Pues los problemas relacionados con la diversidad de representaciones semióticas siguen estando presentes, y las dificultades epistemológicas son abordadas solo en parte, ya que se sigue planificando las actividades docentes dentro de un *status quo* predominantemente axiomático.

Es debido a esta realidad que algunas instituciones como LACSG e investigadores como Dubinsky (1997), Sierpinska (2001) y Dorier (2000) han propuesto un cambio más macro a la hora de planificar la enseñanza del álgebra lineal, pues mencionan que para facilitar el aprendizaje del álgebra lineal es recomendable acercarse a los conceptos matemáticos que aborda la asignatura a través de un primer curso introductorio, el cual enfatice aspectos geométricos y aborde los conceptos de matrices, vectores, polinomios a través de su representación en R^n y no de su generalización como como un espacio vectorial (Costa y Rossignoli, 2017). Es decir, resulta beneficioso secuenciar una introducción geométrica de los conceptos que aborda la asignatura del álgebra lineal, ya que a partir de dicha contextualización se introduce de forma general los conceptos de matrices, dependencia lineal, transformaciones lineales, entre otras, las cuales son desconocidas para la mayoría de los estudiantes.

Considerando esta realidad, se sustenta la idea de secuenciar el aprendizaje del álgebra lineal a partir de conceptos geométricos. Específicamente, poder abordar la idea de transformación lineal a partir de sus aplicaciones geométricas como son las isometrías, para después poder profundizarla a partir de la relación que esta posee con el concepto de funciones, parece un punto de partida interesante para poder facilitar la comprensión de estos conceptos. Ahora bien, usar como nexo las concepciones geométricas para facilitar el aprendizaje del álgebra lineal parece ser un buen comienzo, a la luz de los argumentos mencionados en los párrafos anteriores. Pero esto se debe considerar solo como un punto de partida, pues las particularidades de la geometría conllevan a que la forma de aprenderlas y enseñarlas sea distinta a otras áreas de las matemáticas.

Ante esta disyuntiva, variados son los estudios que proponen distintos modelos para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Para ejemplificar esta realidad se puede enunciar los trabajos de Rodríguez y Ricardo (2007) o Cruz y Téllez (2018), quienes proponen distintas metodologías para secuenciar y planificar los contenidos. No obstante, en el contexto de la didáctica de la geometría existe un modelo que brota naturalmente a la hora de querer secuenciar, planificar y construir los conceptos geométricos, este es el Modelo de Van Hiele. El cual es utilizado por gran cantidad de autores (Jaime Pastor, 1993; Lobo, 2004; Maguiña, 2013) para abordar la enseñanza de un elemento geométrico determinado.

Ante esta realidad, el autor de este trabajo de graduación ha decidido utilizar el modelo de Van Hiele como marco general para guiar la secuencia didáctica. Ante esta situación, es importante argumentar ¿por qué utilizar Van Hiele para gestionar el aprendizaje del álgebra lineal? Los párrafos posteriores intentarán zanjar este cuestionamiento.

1.2.4 ¿Por qué usar Van Hiele para gestionar el aprendizaje de álgebra lineal?

Como se mencionó anteriormente, múltiples son los estudios que intentan dar solución a los problemas de aprendizaje que emergen a la hora de instruirse en el álgebra lineal. Variados trabajos intentan abordar esta problemática, por ejemplo, las investigaciones de Trigueros, Oktaç y Kú (Trigueros y Oktaç, 2010; Kú et al., 2008), abordaban los temas del aprendizaje desde una postura cognitiva, en donde los autores intentan dar explicación a cómo los estudiantes construyen su razonamiento matemático. En esta misma área, pero situados desde una perspectiva más práctica, investigaciones como las de Trigueros y Salgado (2014) o de Roa-Fuentes y Parraguez (2017) presentan una descomposición genética aplicada en el aula a través de una secuencia didáctica y presentan sus resultados, en donde, la mayoría de los alumnos logran interiorizar los conceptos como el de matriz cambio de base, vectores propios o valores propios a un nivel intermedio -procesos según la clasificación de APOE-. En dichas investigaciones se evidencia una mejora en los resultados de aprendizaje de los estudiantes, esto debido a la planificación teórica de los contenidos. Esto es importantísimo, ya que en muchas ocasiones existe un bajo interés en el profesorado universitario en el uso de diversas metodologías de enseñanza (Eulate, 2006).

Existe un denominador común en todos los trabajos citados anteriormente, y en la mayoría de las investigaciones que intentan implementar una secuencia didáctica en el ámbito del álgebra lineal: se sitúan desde la teoría de APOE. Esto se debe -probablemente- a la conexión existente entre Dubinsky y el álgebra lineal. Dubinsky fue uno de los gestores de la adaptación de la teoría de APOE (Trigueros y Oktaç, 2010), además de ser un reconocido investigador en el ámbito de la didáctica de la matemática y el álgebra lineal (Dubinsky, 1997; Dubinsky, et al., 2002). Esto, sumado a la facilidad que posee la teoría de APOE para adaptarse de buena manera a la matemática abstracta, explica en gran medida esta realidad. Ahora bien, es una certeza que existen buenos resultados cuando se aplica una secuencia didáctica en un curso de álgebra lineal basados en la teoría de APOE, pero la mayoría de los alumnos solo logra alcanzar el nivel de procesos, y un porcentaje bajísimo llega a adquirir el nivel de objeto (Kú et al., 2008). Teniendo en cuenta que un proceso es la profundización de una acción, en donde se logra relacionar la acción adquirida en la etapa anterior con ideas previas que posee el estudiante, esto implica que aún no es posible visualizar el fenómeno matemático como un todo, por lo cual resulta poco ambicioso como docentes gestionar el aprendizaje de los alumnos solo hasta este nivel. Por lo que, es necesario pensar en algún otro modelo teórico que ayude a los profesores a situar a los estudiantes en un nivel de razonamiento mayor.

Ante esta situación, los niveles de Van Hiele ofrecen una opción atractiva, debido a que si se sitúa el análisis en el nivel 3 de clasificación -nivel teórico en donde se desea situar al estudiante en este trabajo de graduación-, el estudiante no solo es capaz de generar relaciones entre propiedades de los conceptos y determinar las condiciones de suficiencia -condiciones similares al nivel de procesos en la teoría de APOE-, sino que también logra seguir la secuencia lógica de una demostración matemática, lo que implica que comienza a sumergirse en la axiomática de la matemática.

Sin perjuicio de todo lo anterior, es importante mencionar que la contextualización geométrica del álgebra lineal debe ser vista como un primer acercamiento a ideas más abstractas, en donde los conceptos deben ser bien comprendidos en lo que respecta a su estructura, y especialmente a su alcance. Pues si dicha conceptualización no está ciento por ciento clara, existe la posibilidad que a la hora que se desee pasar hacia la generalización de un espacio vectorial, esta termine transformándose en un obstáculo didáctico para el estudiante, ya que el alumno no logra disociar las aplicaciones geométricas del concepto general (Dorier y Sierpinska, 2001).

El modelo de Van Hiele fue pensado como una herramienta para facilitar la planificación docente en el ámbito de la geometría y, por consiguiente, el aprendizaje de los alumnos en esa área. Por lo que resulta aparentemente contradictorio pensar en dicho modelo para gestionar un curso de álgebra lineal, ya que es sabido que una de las principales características de esta rama de la matemática es su naturaleza abstracta, esta particularidad colisiona con la esencia visual de Van Hiele. Por ende, si se desea emplear el modelo de Van Hiele para administrar una secuencia didáctica, lo primero que el docente debe pensar es en cómo visualizar los fenómenos matemáticos que desea estudiar.

El objeto que tratará la secuencia didáctica es el de transformación. La idea de visualización geométrica nace no tan difícilmente, ya que, si se particulariza para espacios vectoriales "graficables", como lo son $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, resulta obvio pensar en conceptos como isometrías o transformaciones espaciales, las cuales, si se describen de forma sucinta -hablando en términos geométricos- consisten en transformar líneas en líneas. Además, es importante decir que dicha visualización le será familiar al estudiante, debido a que gran cantidad de los contenidos matemáticos con los que se ha familiarizado durante su etapa escolar son observados constantemente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A partir de la problemática planteada al inicio de este capítulo y argumentada durante los apartados anteriores, surge la necesidad de generar contribuciones a la enseñanza del álgebra lineal, específicamente, en los contenidos realizados con la noción de transformación lineal. Para cumplir dicho propósito, se propone el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele, cuyo foco está en el desarrollo del pensamiento geométrico y algebraico de estudiante de primer año universitario. Dicho esto, la pregunta de investigación que guiará este trabajo es:

> *¿Cómo se desarrolla el proceso de conceptualización de estudiantes universitarios cuando abordan la unidad temática de transformaciones lineales a partir de una propuesta didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele?*

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo general

Caracterizar el proceso de conceptualización que alcanzan estudiantes universitarios cuando abordan la unidad temática de transformaciones lineales a partir de una propuesta didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar los niveles de comprensión que alcanzan estudiantes universitarios del concepto de transformación lineal, a partir de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico propuestos en el modelo teórico de Van Hiele.
- Describir los niveles de comprensión que alcanzan estudiantes universitarios del concepto de transformación lineal, a partir de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico propuestos en el modelo teórico de Van Hiele.
- Analizar los factores de la secuencia didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele que inciden en el desarrollo de los niveles de comprensión del concepto de transformación lineal por parte de estudiantes universitarios.

2 CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

El marco referencial que orienta este trabajo de graduación se divide en 2 grandes temas. En primera instancia se abordarán las ideas de pensamiento algebraico y geométrico. Específicamente se tratará de evidenciar el nexo existente entre ambos mundos, argumentando a favor de cómo las características visuales de la geometría pueden matizar las particularidades abstractas del álgebra, las cuales suelen ser un obstáculo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Barallobres, 2017; Dorier y Sierpinska, 2001; Dorier et al., 2000). Luego se profundizará en las características teóricas del modelo de Van Hiele, el cual es el pilar fundamental de este proyecto, ya que éste guiará la planificación docente, la aplicación de la intervención y el posterior análisis de resultados.

2.1 EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Antes de comenzar a profundizar las ideas relacionadas con el pensamiento algebraico y geométrico, se desea explicitar la estructura de este apartado. Esto se realiza con el propósito de facilitar la comprensión de los párrafos venideros, ya que en ella se evidenciará la conexión existente entre álgebra y geometría, argumento que sustentará gran parte de los pilares teóricos que se entregarán posteriormente.

La estructura general de este apartado consiste en contextualizar los conceptos de pensamiento algebraico y pensamiento geométrico. En la práctica, dicha contextualización se traduce en la entrega de una definición y la posterior caracterización de ambas nociones, así el lector tendrá claridad del alcance que poseen en este escrito los términos utilizados. Para finalizar, se evidenciará la relación que presentan ambos conceptos, es decir, se entregarán argumentos a favor de cómo la naturaleza visual de la geometría facilita la comprensión de la naturaleza generalizadora del álgebra.

2.1.1 El pensamiento algebraico

Es sabido que, a la hora de interiorizar cualquier tipo de información, los procesos cognitivos difieren dependiendo de la tarea que se desee realizar (Silva Córdova, 2006). Es decir, el proceso de razonamiento que emplea un individuo cuando se enfrente a un problema matemático no es el mismo que se utiliza para componer una partitura. La diferenciación entre procesos cognitivos puede variar incluso dentro de la misma rama científica. Por ejemplo, en la rama de matemáticas está documentado que los procesos de razonamiento difieren entre el álgebra, la geometría, la aritmética, la probabilidad, entre otros (Soler-Alvarez y Pérez, 2014).

En el contexto de la didáctica de las matemáticas, variadas son las investigaciones que abordan la noción de pensamiento algebraico (Godino y Font, 2003; Sancho, 2009; Vergel, 2015). Esta situación tiene sus orígenes gracias al aporte que ha tenido la psicología cognitiva en el área de la didáctica. Es por este motivo que gran cantidad de autores han intentado definir y describir los distintivos tipos de relaciones cognitivas que se manifiestan en un individuo cuando abordan un ambiente determinado de las matemáticas. En específico, el área del álgebra es una de las más abordadas, pues es uno de los campos en el cual la mayoría de los estudiantes presentan dificultades de aprendizaje (Castro, 2012; Sancho, 2009).

Es por situaciones como estas que resulta importante poder definir con claridad el término de pensamiento algebraico, pues dependiendo del contexto y el autor este puede variar en su significado. Por ejemplo, Vergel (2015) comprende el pensamiento algebraico como una forma particular de pensar matemáticas, específicamente el autor lo considera como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. Resulta claro que, en la definición de Vergel, el pensamiento algebraico posee características de índole cultural, ya que se subentiende que este es determinado por el contexto histórico y social en el cual se desarrolla.

En el mismo contexto, pero abordando la situación desde una arista diferente, Serres (2011) define el pensamiento algebraico como el proceso de generalización que se utiliza para formular expresiones algebraicas, patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza como base la simbología algebraica, y tiene como propósito final la resolución de un problema determinado. Esta definición posee un alcance mucho más concreto que la anterior, pues en síntesis relaciona el proceso cognitivo con la praxis matemática. Es por este motivo que, para los efectos y alcances de esta investigación, cuando se haga referencia al termino “pensamiento algebraico” se utilizará la definición de Serres (2011).

De acuerdo con Radford y Peirce (2005), las características del pensamiento algebraico pueden sintetizarse en 3 grandes tópicos: el sentido de indeterminación; la forma de análisis y la expresión semiótica de sus objetos. La primera de las particularidades hace referencia a la contraparte de la determinación numérica, es decir, el álgebra siempre tendrá un interés generalizador a través de objetos (incógnitas, variables y parámetros). Mientras tanto, la forma de análisis se relaciona con la forma de trabajar los objetos, dicho de otra forma, el álgebra reconoce la relación de objeto a través de su carácter operatorio[6]. Por último, la tercera particularidad hace referencia a la manera simbólica de nombrar los objetos, realidad profundizada en el subtema anterior.

En el mismo contexto, Godino y Font (2003) señalan que el pensamiento algebraico se caracteriza por: reconocer, ampliar y generalizar patrones de regularidad, transitar entre distintos contextos matemáticos, por ejemplo, numéricos y geométricos.

Si bien los términos utilizados por los autores son distintos, es evidente que ambas caracterizaciones tienen el pilar generalizador en común. En síntesis, es posible mencionar que la principal característica del pensamiento algebraico es su particularidad generalizadora, lo que Radford y Peirce (2005) denominan “sentido de indeterminación”, en donde la forma de análisis se traduce en la capacidad de operar y dar sentido a esas operaciones. Todos estos procesos son comunicados a través de un medio de representación, lo que Radford clasifica como “la expresión semiótica de sus objetos”.

Esto hechos son relevantes, ya que ambos autores hacen referencia -directa e indirectamente- al papel que juega el sistema de representación, el cual fue profundizado en el capítulo anterior, pues es una de las dificultades asociadas al aprendizaje del álgebra lineal.

2.1.2 El pensamiento geométrico

Una de las principales consecuencias que ha tenido la irrupción de la matemática moderna en el sistema educativo, es el énfasis que se le ha dado a la generalización de situaciones (Pinto, 2005). Esto ha llevado a dejar un poco de lado el estudio de situaciones a través de experiencias visuales, ya que se tiende a pensar en estas como un caso particular, lo cual va en contra del sentido de generalización del álgebra. Durante los últimos años se ha comenzado a dejar de lado esta realidad, ya que, desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, se ha llegado a la conclusión de que se debe volver a retomar el sentido espacial, intuitivo y visual de toda la matemática (Álvarez, 2005), esto sin dejar de lado los beneficios generalizadores del álgebra.

Es en este contexto que se plantea que el razonamiento[7] espacial o geométrico es esencial para el desarrollo del pensamiento científico, ya que este es utilizado para representar, manipular y relacionar todo tipo de información (Álvarez, 2005). Es por este motivo que la geometría se presenta como un espacio de alta exigencia cognitiva, pues, a diferencia de otros tipos de pensamiento, este presenta como particularidad el manejo de figuras (Charry y Ayala, 2015), las

[6] La acepción de operación hace referencia al sentido matemático de la palabra, es decir, los elementos se operan entre si a través de sumas, restas, multiplicación, división, unión, intersección, implicancias lógicas, entre otros.

[7] Para los alcances de este proyecto, razonamiento y pensamiento son sinónimos

cuales se vinculan con objetos o propiedades matemáticas, lo que lleva de forma natural a los estudiantes a visualizar, construir y razonar en diferentes formas y momentos (Duval, 2000).

En este sentido, el pensamiento geométrico se define a partir de lo visual, pues para poder dar sentido a una idea matemática, esta debe ser representada esquemáticamente, es decir, el esquema condensa el significado de la idea, el cual puede ser contrastado e interpretado a través de los sentidos (Duval, 2000, citado en Charry y Ayala, 2015).

Es importante aclarar que, a diferencia de un fenómeno común, ver o visualizar en geometría no es sólo observar el esquema, ya que el proceso de visualización entrega la posibilidad de reconfigurar las ideas, lo que lleva al proceso de razonamiento a un salto en lo que respecta al nivel cognitivo (Duval, 2004).

Duval (2004) identifica dos formas de visualizar en geometría: visualización icónica y visualización no icónica. El primer tipo de clasificación hace referencia a un primer acercamiento, en donde los individuos aprecian la figura a través de sus sentidos y es sólo vista como un ícono, es decir, es una forma en donde no se logran reconocer propiedades. Mientras tanto, la clasificación no icónica reconoce las formas en virtud de sus limitaciones y propiedades, así pues, la visualización no icónica permite al individuo anexar propiedades teóricas al objeto.

Como se explicitará más adelante, cuando se aborde el modelo teórico de Van Hiele, el proceso de visualización se categoriza en etapas. En donde en primera instancia el estudiante sólo observa el objeto y su forma, no logrando identificar propiedades o limitaciones (visualización icónica). Mientras tanto, entre mayores sean las instancias de visualización, el individuo podrá desarrollar la capacidad de entregar o anexar propiedades a la figura (visualización no icónica). Es decir, la figura trasmuta desde una forma a un objeto, el cual posee características y propiedades. Sin querer adelantar conclusiones, es posible mencionar que esta situación da pie a que el individuo pueda clasificar y generalizar aspectos desde una forma matemática, pues ya es capaz de reconocer y comprender la situación, esta es una de las condiciones mencionadas por Godino y Font (2003) para desarrollar el pensamiento algebraico.

Es relevante mencionar que la visualización geométrica cumple un rol fundamental dentro de los procesos de pensamiento geométrico, pues a partir de este el individuo puede apreciar y contrastar teorías a través de sus sentidos, lo que conlleva a iniciar un desarrollo del razonamiento cognitivo distinto al que se da en otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, el algebraico.

2.1.3 El vínculo entre el pensamiento algebraico y lo geométrico

Antes de comenzar a desarrollar los vínculos entre el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico desde un punto de vista cognitivo, se quisiera entregar una aproximación desde una perspectiva histórica. Pues esta servirá como un primer acercamiento a la situación, ayudando así a contextualizarla y a comprender de mejor manera las dificultades y los alcances que posee el nexo cognitivo.

Si bien, Zeuthen en 1886 denominó álgebra geométrica al segundo de los libros de Euclides (Puig, 1998), este vínculo se circunscribe solo al periodo de apogeo de la cultura griega y a algunos autores, pues en la generalidad de los casos el álgebra desarrollada durante mediados de la edad antigua y toda la edad media puede clasificarse en "álgebra retórica" y "álgebra sincopada" (Puig, 1998). Términos acuñados por Puig[8], para hacer referencia a los distintos tipos de álgebra desarrolladas durante la historia. Es por este motivo que, desde un punto de vista histórico, álgebra y geometría estuvieron desconectadas la mayor parte del tiempo. Ya que el desarrollo del álgebra, antes de la irrupción del álgebra moderna, se contextualizaba a la solución de ecuaciones, dejando de lado la posibilidad de abordar otras ramas de las matemáticas (Luzardo y Peña, 2006).

En contraparte, el desarrollo de la geometría estuvo estancada luego del declive de la cultura griega, pues no se hicieron grandes avances ni a fines de la edad antigua ni durante toda la edad media. Reflejo de esta realidad es que grandes problemas de la geometría griega como la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo fueron resueltos de forma definitiva a partir de las herramientas otorgadas por la teoría de Galois, la cual, a grandes rasgos, relaciona la teoría de cuerpos con la teoría de grupos (Guerrero, 2002). Contexto netamente algebraico, desarrollado durante el siglo XIX.

Fue solo a principios del siglo XVII que la geometría y el álgebra comenzaron a unificarse. Esto sucede luego que Descartes y Fermat publicaran sus trabajos que definían una nueva geometría: la geometría analítica, lo que Puig (1998) denomina álgebra simbólica. En palabras sencillas, este método consiste en definir situaciones geométricas a partir de herramientas algebraicas. Descartes y Fermat fueron los primeros en mostrar que se puede pensar de forma geométrica y algebraica al mismo tiempo, en donde las particularidades de cada razonamiento son complementarias.

[8] Puig utiliza el término de "álgebra retorica" para referirse al álgebra que desarrollan las culturas a partir de un lenguaje vernáculo. Mientras que el termino de "álgebra sincopada" lo obtiene de la investigación de Nesselman, el cual hace referencia a que se observan lenguaje técnico en el desarrollo de las obras.

Esta situación es conocida por la mayoría de las personas familiarizadas con la matemática, pero existe otra realidad más tenue, que no es apreciada por la gran mayoría. El vínculo entre el álgebra moderna y geometría. Si bien es posible argumentar que el desarrollo del álgebra moderna tiene sus bases en geometría, esta relación es más indirecta pues la formalización de conceptos vinculados con estructuras algebraicas nace a partir de problemas relacionados con las mismas estructuras. El vínculo entre álgebra abstracta y geometría proviene de la posibilidad que entrega el álgebra para comprender la geometría en términos de espacios vectoriales y transformaciones lineales, ubicando a la geometría como parte del estudio del álgebra lineal (Losada, 2007).

Ante estos argumentos, es posible vincular álgebra y geometría no sólo desde un punto de vista histórico, sino también práctico, ya que muchas herramientas algebraicas pueden tener interpretación y aplicación geométrica. No obstante, estos nexos no son suficientes para demostrar el vínculo desde un contexto cognitivo.

A partir de las características de ambos pensamientos, es posible observar que el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico difieren tanto en el proceso como en los resultados, pues la construcción de significado asociado a los conceptos geométricos es muy distinta de los algebraicos (Losada, 2007). Parece ser que estas diferencias tienen su origen en la facilidad con la que se puede considerar el caso general en geometría y la gran dificultad de considerarlo en un contexto algebraico. Por ejemplo, la generalización de las soluciones de ecuaciones polinómicas se realizó a partir de la abstracción y sistematización de estructuras algebraicas vinculadas con la extensión del cuerpo de los racionales, contexto muy alejado de ambientes intuitivos como los de medir y contar. En cambio, los entes geométricos fueron generalizados desde un principio por medio de la abstracción a partir de la visualización. Es decir, resulta obvio que la generalización algebraica presenta mayores dificultades que la geométrica. Este argumento puede refutarse desde un punto de vista histórico, pues los griegos trabajaron con la generalización geométrica 2300 años antes que los europeos lograran generalizar el contexto algebraico.

Para poder argumentar a favor de cómo ambos razonamientos pueden ser complementarios, se recurrirá a un ejemplo de geometría analítica, en donde se mostrará cómo la visualización y el enfoque geométrico, permiten facilitar la generalización algebraica.

Proposición:

Sean L_1 y L_2 dos rectas cuyas ecuaciones asociadas vienen dadas respectivamente por:

$$y = m_1 x + b_1\ ,\ \ m_1, b_1\ \in \mathbb{R}$$

$$y = m_2 x + b_2\ ,\ \ m_2, b_2\ \in \mathbb{R}$$

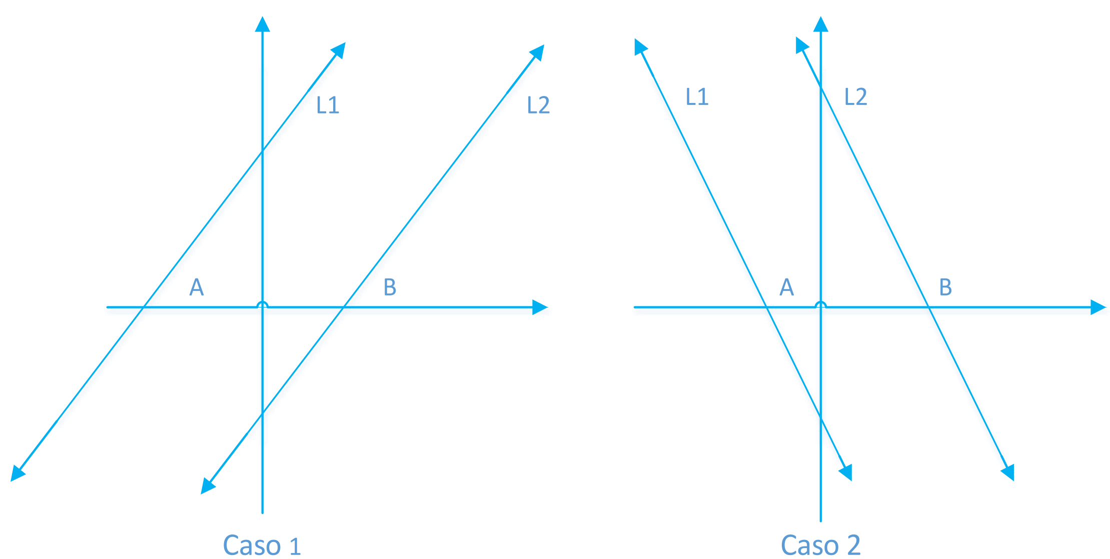
Entonces:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Demostración:

Se debe tomar en consideración dos posibles casos. Pues cuando se considere como hipótesis de la demostración la información proveniente de las pendientes, no es trivial que un ángulo sea agudo u obtuso. Esta realidad se visualiza de mejor manera en Figura 2.1.

Figura 2.1: Visualización de la situación problema



Fuente: Elaboración propia

Donde A y B son los ángulos formados por las rectas L_1 y L_2 y el eje de las abscisas. En primera instancia trabajaremos la proposición de izquierda a derecha ($\Rightarrow$), para posteriormente analizar el caso inverso ($\Leftarrow$). Es decir:

Por demostrar:

- $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ primera proposición
- $m_1 = m_2 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$ segunda proposición

Para la primera proposición se tiene que:

Sean dos rectas $L_1 \wedge L_2$, tal que $L_1 \parallel L_2$, dispuestas como se observa en la Figura 2.1, entonces:

$L_1 \parallel L_2 \Longrightarrow A = B$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas (naturaleza geométrica)

$\tan(A) = \tan(B) \Longrightarrow m_1 = m_2$ por definición de pendiente de una recta (naturaleza algebraica)

Esta demostración es análoga para el caso 2 que se observan en la Figura 2.1.

Para estudiar la segunda proposición se deben evaluar los 2 casos, ya que en el primero de ellos los ángulos son agudos, mientras que en el segundo se observan ángulos obtusos. En este punto es en donde la característica visual de la geometría ayuda a generalizar la realidad algebraica. (naturaleza visual)

$m_1 = m_2$ (caso 1)

$\Longrightarrow \tan(A) = \tan(B)$ por definición de pendiente de rectas

$\Longrightarrow \mathrm{Arctan}(\tan(A)) = Arctan(\tan(B))$

$\Longrightarrow A = B \Longrightarrow L_1 \parallel L_2$ por teorema de la geometría euclidiana[9] (naturaleza algebraica)

$m_1 = m_2$ (caso 2)

$\Longrightarrow \tan(A) = \tan(B)$ por definición de pendiente de rectas

$\Longrightarrow -\tan(\pi - A) = -\tan(\pi - B)$ por propiedad trigonométrica de la función tangente

$\Longrightarrow \tan(\pi - A) = \tan(\pi - B)$ por trabajo aritmético

$\Longrightarrow \arctan(\tan(\pi - A)) = Arctan(\tan(\pi - A))$

$\Longrightarrow \pi - A = \pi - B \Longrightarrow A = B \Longrightarrow L_1 \parallel L_2$ por teorema de la geometría euclidiana

Q.E.D.

[9] Si dos rectas cortadas por una tercera y forman ángulos correspondientes iguales, entonces las dos primeras rectas son paralelas.

A partir de la demostración anterior, es posible observar cómo la visualización geometría explicitada en la Figura 2.1, ayuda a la plantear de una forma más sencilla la solución de la problemática. Y no solo esto, sino que también al plantear una estrategia de resolución visual fue posible explicitar más de un caso, lo que ayudó a generalizar de mejor manera la situación.

Por tanto, resulta evidente que las características visuales del pensamiento geométrico facilitan el proceso de generalización, lo que permite avanzar teóricamente en un problema determinado. Estas particularidades tienen implicancias didácticas relevantes para los procesos de aprendizaje matemático, pues al familiarizar a un individuo con los procesos de generalización geométrica, se facilita el desarrollo de los procesos de generalización algebraica (Losada, 2007).

2.1.4 El razonamiento en álgebra lineal y su vinculación con la geometría

Antes de comenzar a desarrollar las particularices del modelo de Van Hiele, se desea conectar a la última y principal dimensión de este proyecto. La cual es el álgebra lineal y su vínculo con la geometría.

Siguiendo a Dorier y Sierpinska (2001), una de las características del pensamiento necesaria para el aprendizaje del álgebra lineal es la flexibilidad cognitiva. Según dichos autores, el álgebra lineal es un modelo aplicable a varios contextos matemáticos, pues ocupa diversos marcos, registros de representación semiótica y puntos de vista al mismo tiempo. Esta situación requiere que el alumno pueda moverse libremente entre todos los ambientes antes mencionados.

Si bien se ha hablado de la importancia de que el alumno pueda moverse en distintos registros semióticos, el nivel de abstracción necesaria para razonar en álgebra lineal hace que la representación cartesiana de un subespacio vectorial no sea un simple cambio de registro semiótico. Según Alves-Dias et al. (1995), las representaciones cartesianas y paramétricas de un subespacio vectorial no se pueden considerar con un mero cambio de registro semiótico pues este ocupa procesos cognitivos más complejos como son las ideas de rango y dualidad. En la práctica, el estudiante debe entender que un conjunto de ecuaciones lineales en n variables están vinculadas con un conjunto generador, el cual genera un subespacio de un espacio vectorial y puede ser representado por ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Este proceso de transición necesario para poder desarrollar las ideas del álgebra lineal es donde se vinculan el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico, pues el estudiante debe tener la capacidad de comprender cómo lo objetos generalizados en un sistema algebraico pueden tener representación gráfica en un espacio vectorial como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Las investigaciones demuestran que este es uno de los puntos más conflictivos a la hora de abordar la asignatura de álgebra lineal (Dorier y Sierpinska, 2001; Días et al., 1995), pues muchos estudiantes no logran obtener la capacidad de flexibilidad cognitiva, mientras que otros la reducen a aspectos netamente algorítmicos, perdiendo así la posibilidad de interpretar de mejor manera situaciones abstractas.

A esta realidad debe sumársele un argumento mencionado anteriormente, el cual explicitaba que para muchos estudiantes universitarios el curso de álgebra lineal es el primer vínculo que tienen con objetos matemáticos como matrices, transformaciones lineales, entre otros. Por lo cual, comprender estos conceptos dentro de un proceso de abstracción mayor, como es entender qué es un espacio vectorial, dificulta la tarea de enseñanza y aprendizaje. Es por estos motivos que variados autores han propuesto una nueva estrategia de aprendizaje, la cual consiste en abordar los conceptos relacionados con el álgebra lineal desde una perspectiva geométrica (Dorier y Sierpinska, 2001; Dorier et al., 2000; Dubinsky, 1997). Con esto, es posible entregar las primeras nociones de objetos más concretos utilizados en álgebra lineal -como matrices o transformaciones lineales-, además de ayudar al proceso de la flexibilidad cognitiva, pues a diferencia de las formas de enseñanza clásica, la estrategia basada en la geometría explicita el vínculo entre ambos ambientes.

Ante todos estos argumentos, parece factible planificar una unidad temática del curso de álgebra lineal a partir de concepciones geométricas. No obstante, no basta con estos, ya que al igual que el álgebra, la geometría posee sus propias dificultades didácticas. Para poder solucionar esta problemática se propone la utilización del modelo teórico de Van Hiele, el cual posee gran aceptación científica en lo que respecta la enseñanza de la geometría.

2.2 EL MODELO DE VAN HIELE

El modelo geométrico de Van Hiele tiene sus inicios en la Universidad de Utrecht, Holanda, a partir de los trabajos doctorales presentados por Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes entregaron un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría geometría (Vargas y Araya, 2013) (Vargas & Araya, 2013). El modelo describe cómo el estudiante construye el razonamiento geométrico clasificandolo en 5 niveles de una estructura escalonada, es decir, que para alcanzar el siguiente nivel el alumno debe pasar por el nivel anterior. Es importante mencionar que para que el alumno alcance un nivel establecido, este debe conseguir determinados logros de aprendizaje. Además, la teoría señala distintas pautas metodológicas, las cuales son denominadas fases y tienen como objetivo apoyar al profesorado a la hora de estructurar y planificar la secuencia de los contenidos.

Para construir la clasificación de los niveles de Van Hiele se ha utilizado como insumos principales los trabajos realizados por Vargas y Gamboa (2013), y por Netsy Lobo (2004). Se hace esta aclaración debido a que, dependiendo de los autores, la clasificación, tanto de los nombres de los niveles como de la numeración de estos varían un poco -algunos parten del 0 y otros del 1-.

Los niveles de razonamientos o de construcción del conocimiento por los cuales debe ir avanzando el estudiante son los siguientes:

- **Nivel 1 (Reconocimiento o Visualización):** En esta etapa el estudiante es capaz de reconocer las figuras de forma visual a partir de un todo, en donde no logra diferenciar ni partes ni componentes de la figura (Vargas y Araya, 2013). En este punto el alumno no es capaz de reconocer ni caracterizar las propiedades de la figura. Por ejemplo, el individuo es capaz de reconocer un triángulo, pero no es consciente de las propiedades que definen un triángulo.
- **Nivel 2 (Análisis):** En este punto el alumno logra reconocer y analizar las distintas características y propiedades que componen la figura, pero no es capaz de relacionar o clasificar las propiedades que determinan una familia de figuras (Vargas y Araya, 2013). Esta relación pudiese ser alcanzada en este nivel solo a través del trabajo empírico o experimental. Además, una característica importante de este nivel es que el individuo aún no lo logra elaborar definiciones formales.
- **Nivel 3 (Clasificación):** En este nivel el alumno ya consigue establecer relaciones lógicas entre los objetos, infiriendo e interrelacionando nuevas propiedades entre las familias de las figuras. Además, logra identificar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, es por esto, que las definiciones adquieren un significado real para el estudiante (Vargas y Araya, 2013). Si bien es capaz de seguir la secuencia lógica de una demostración, solo lo comprende de forma aislada y no logra globalizar toda la demostración, ya que no entiende el sistema axiomático en el cual está trabajando.
- **Nivel 4 (Deducción Formal):** En esta etapa el estudiante ya es capaz de comprender la estructura axiomática de la matemática, por lo cual logra realizar deducciones y demostraciones lógicas formales. También consigue entender que a partir de proposiciones distintas se puede llegar a demostrar un mismo teorema (Vargas y Araya, 2013). No obstante, aún no logra un conocimiento global del sistema axiomático de la matemática, por lo que no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.
- **Nivel 5 (Rigor):** En este nivel el individuo posee las competencias necesarias para analizar la estructura axiomática de diferentes geometrías y compararlas entre sí. Además, logra captar la geometría en su forma abstracta (Vargas y Araya, 2013). Es importante aclarar que este nivel es alcanzado sólo por matemáticos puros o estudiantes avanzados de las Facultades de Ciencia (Lobo, 2004).

Ya con los niveles de Van Hiele explicitados, es preciso definir y caracterizar las fases del modelo, las que tienen la finalidad de guiar al docente a la hora de estructurar la secuencia didáctica que facilite el cambio en el nivel de razonamiento del alumno. La particularidad de las fases del modelo es que no son exclusivas de un nivel determinado, sino que en cada nivel el estudiante debe ir progresando a través de estas fases (Vargas y Araya, 2013), es decir, son transversales a todos los niveles. Al igual que en la sección anterior se aclara que la información base para generar las definiciones que vendrán a continuación fue obtenida de los trabajos de Vargas y Gamboa (2013), Fouz y Donosti (2005) y Adela Jaime Pastor (1993). Las fases de aprendizaje del modelo son las siguientes:

- **Fase 1 (Información):** En esta fase el estudiante se vincula con el tema de estudio, en otras palabras, conoce el campo de estudio que va a iniciar. Este momento es relevante, ya que a partir de esto el alumno logra saber qué tipo de problemas va a resolver, qué materiales utilizará, entre otros (Vargas y Araya, 2013). Es de vital importancia mencionar que en esta sección el profesor debe identificar los conocimientos previos que posee el estudiante sobre el nuevo tema a tratar (Jaime Pastor, 1993).
- **Fase 2 (Orientación Dirigida):** El profesor orienta a los estudiantes a través de problemas planteados por él o por los mismos estudiantes, con el objetivo de que los alumnos comprendan y asimilen los distintos componentes y propiedades de los conceptos que se están construyendo (Jaime Pastor, 1993). Se debe mencionar que en el caso que sea necesario, en esta fase, el profesor debe guiar a los estudiantes a la solución de las actividades si estos no logran llegar de forma independiente (Jaime Pastor, 1993).
- **Fase 3 (Explicitación):** En esta etapa es vital la interacción, tanto entre estudiantes, como entre profesor y estudiantes, ya que el estudiantado debe intentar expresar en palabras los resultados que han obtenido (Vargas y Araya, 2013). Como en esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos en cuanto a contenidos (Jaime Pastor, 1993), el rol del docente debe estar enfocado en corregir el lenguaje utilizado por sus estudiantes (Fouz y Donosti, 2005).
- **Fase 4 (Orientación Libre):** La finalidad de esta fase recae en consolidar el conocimiento obtenido en las fases previas (Vargas y Araya, 2013). Para esto los estudiantes deberán resolver actividades y problemas que no sean una aplicación directa de algún algoritmo, sino que deberán ser obligados a plantear vínculos entre las distintas propiedades que han aprendido.
- **Fase 5 (Integración):** Durante esta fase se sintetizarán los conocimientos obtenidos en las fases anteriores, por ende, no es una fase en donde se trabajen contenidos, sino que se debe lograr que los alumnos adquieran una visión global de los temas tratados.

Durante esta etapa el profesor debe explicitar alguna forma de síntesis que ayude a los alumnos a obtener la integración.

Además de los niveles y las fases, el modelo de Van Hiele posee características particulares, las cuales lo diferencian de otros modelos -APOE, Jorba y Sanmartí, etc.-. Sin intención de profundizar en demasía en este ámbito, se procede a definir de forma somera las distintas características que posee el modelo.

- **Secuencialidad:** Esta característica hace referencia a que para alcanzar un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido los niveles anteriores (Jaime Pastor, 1993).
- **Especificidad del lenguaje:** Los distintos niveles de razonamientos que posee el estudiante no solo se ven reflejados en su capacidad para resolver problemas, sino que también se observa una evolución en la forma de expresarse y el significado que se le entrega al vocabulario (Vargas y Araya, 2013).
- **Continuidad:** Siguiendo a Adela Jaime Pastor (1993, p. 16) "esta propiedad hace referencia a cómo se produce el paso de un nivel a otro". Al comienzo, Van Hiele señaló que el paso se materializaba de una forma violenta, no obstante investigaciones posteriores señalan que un individuo puede transitar y razonar simultáneamente en 2 niveles consecutivos. Esta dualidad hace referencia a la continuidad del modelo.
- **Localidad:** Por localidad se entiende que el estudiante puede razonar en distintos niveles dependiendo del área de la geometría en el cual esté trabajando (Vargas y Araya, 2013). En otras palabras, que un alumno posea el nivel 3 (clasificación) en el ámbito de homotecia, no implica que posea el mismo nivel en el área de circunferencias.

3 CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE TRABAJO

El propósito principal de este apartado consiste en explicitar el diseño metodológico que se ocupó en la investigación. Primero, la abstracción metodológica permite visualizar de una forma mucho más sistemática el trabajo de graduacióno, lo cual facilita la visualización de todos los procesos y actividades que la engloban. Segundo, dicha abstracción permite tener una conciencia mayor en lo que respecta a posibles herramientas o métodos que optimicen los procesos. Tercero, se hace posible presentar la metodología a través de distintas formas de representación, lo que facilita en gran medida el entendimiento de los lectores.

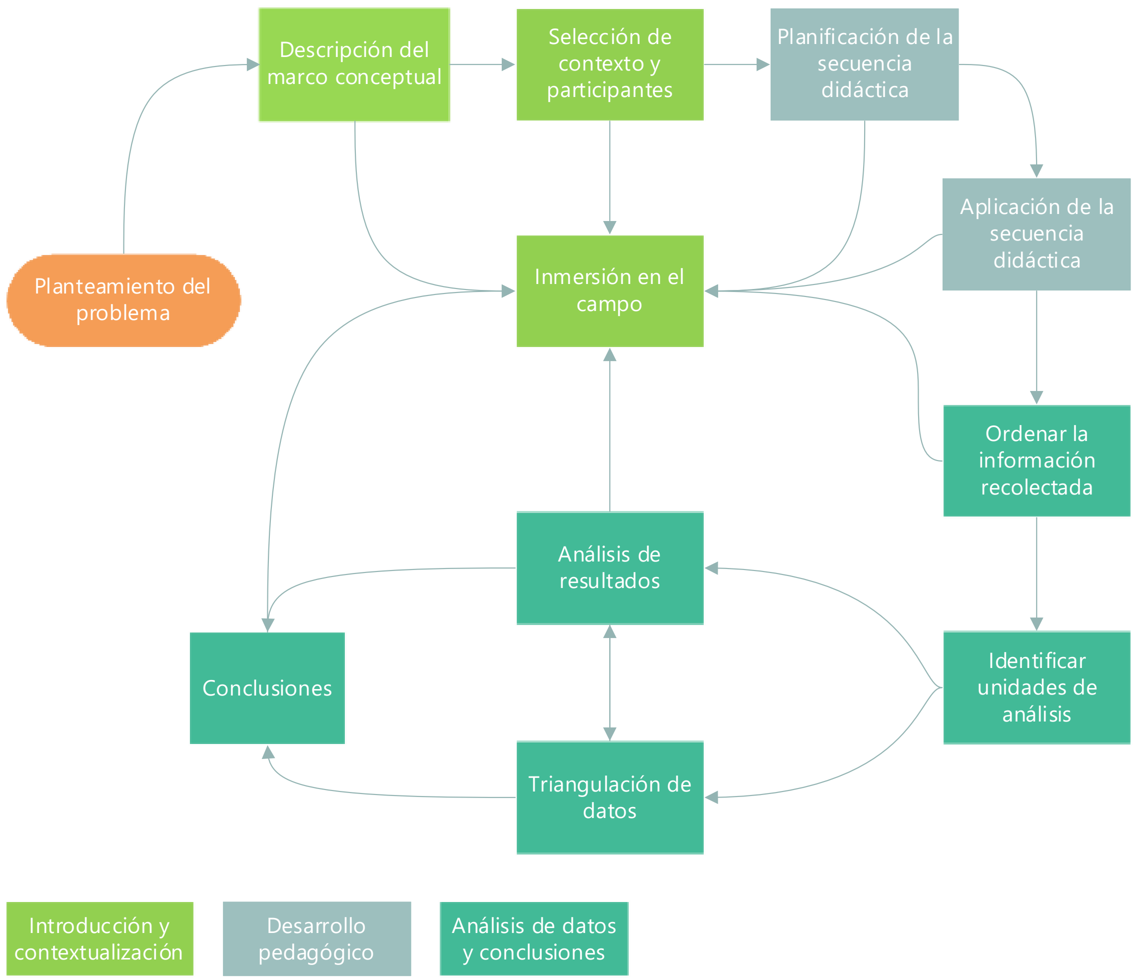
Con esto claro, se explicita que durante este apartado se detallarán aspectos como el alcance, el tipo de muestra, el diseño metodológico, los instrumentos y las actividades realizadas. Además de describir las distintas tareas planteadas para cumplir el objetivo de la investigación. Esto permitirá visualizar la coherencia interna del proyecto.

3.1 TIPO DE METODOLOGÍA

El enfoque utilizado para plantear la metodología del proyecto es un enfoque cualitativo (Hernández et al., 2014), pues las herramientas que proporciona este paradigma con relación a la introspección, descripción y análisis de situaciones son más apropiadas para poder abordar el objetivo general propuesto en apartados anteriores. Esto se debe, principalmente, al hecho de que a la hora de caracterizar el proceso de conceptualización se hace necesario comprender en profundidad la situación que viven los estudiantes. Para esto se hace imperativo ejecutar tareas relacionadas con la interpretación y descripción detallada de las distintas respuestas que irán entregando los alumnos a lo largo del ciclo de actividades implementadas. Ambos procesos (describir e interpretar) se ajustan de mejor manera a la metodologia de índole cualitativa, ya que esta se caracteriza por su perspectiva interpretativa y por su búsqueda de analizar en profundidad las situaciones de interés (Sandín, 2003; Hernández et al., 2014). Además, es importante mencionar que las herramientas que proporciona la metodología cualitativa con relación al análisis de datos no numéricos como lo son textos o párrafos, los cuales son la principal fuente de información que tuvo este proyecto, son esenciales para comprender de manera detallada el nivel de razonamiento que logra alcanzar un estudiante.

Para ayudar a evidenciar cómo la metodología cualitativa ayuda a sistematizar y abordar la situación de interés, en la Figura 3.1 se puede observar un diagrama general relacionado con la estructura de la metodología cualitativa contextualizada a esta investigación.

Figura 3.1: Metodología cualitativa contextualizada al proyecto



Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 3.1 es posible visualizar la estructura de la metodología cualitativa, la cual guió en gran parte el desarrollo del proyecto. Específicamente se explicita la influencia que posee la variable de inversión en el campo, la cual es transversal a todo el proceso de investigación. En la práctica esto se traduce en la lectura constante de material científico para apoyar o reevaluar las decisiones tomadas. Con el avanzar de la lectura se observará cómo las actividades vinculadas con el desarrollo pedagógico y el análisis de datos quedarán descritas y secuenciadas.

3.2 ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con Hernández et al. (2014) variados son las clasificaciones para determinar el tipo de alcance que posee un estudio. Si bien, no se tiene la intención de detallar cada una de dichas clasificaciones, es posible mencionar que los estudios con alcances descriptivos poseen la finalidad de especificar propiedades, características o perfiles de un fenómeno o situación de interés. Dicho esto, resulta claro que en lo que respecta al alcance de la investigación, esta posee un alcance descriptivo, pues busca describir y caracterizar el proceso de conceptualización que alcanzan los estudiantes cuando abordan la idea de transformación lineal.

3.1 SUJETOS DE ESTUDIO

Para el desarrollo de esta investigación se trabajó con un curso de álgebra lineal de 24 estudiantes, pertenecientes a la carrera de Ingeniería en Estadística de la Universidad de Santiago de Chile. Cabe destacar que si bien el curso es de 24 estudiantes sólo se logró trabajar de forma óptima con 4 de ellos. Pues debido a las dificultades que presentan los estudiantes en el contexto de clases online, la mayoría de ellos o prefería trabajar de forma individual o su asistencia a las sesiones era intermitente, lo que dificultó el estudio del proceso de conceptualización. Por lo cual el posterior análisis que se presentará en el próximo capitulo se centrará sólo en los 4 estudiantes que participaron de manera regular durante toda la intervención. Las características de los 4 estudiantes se especificarán en el capítulo de resultados.

Intentando contextualizar, es posible mencionar que la muestra se caracteriza por estar compuesta por estudiantes de primer año universitario, es decir, sujetos entre 18 a 20 lustros. Otro elemento importante para destacar es el perfil del grupo, pues al trabajar con alumnos del área de ingeniería, el curso de álgebra lineal suele ser el primer acercamiento que estos tienen a la matemática abstracta. Situación que debe ser tenida en cuenta a la hora de construir las conclusiones.

En síntesis, la muestra puede ser clasificada como una muestra de casos tipos (Hernández et al., 2014) y fue elegida debido a que las características que esta poseía eran idóneas para responder la pregunta de investigación planteada en el capítulo 1. Entre dichas características, destaca el hecho que el curso de álgebra que se le imparte a los estudiantes es el primer acercamiento que estos tienen a la matemática abstracta, por lo cual no existen conocimientos previos que pudiesen distorsionar los resultados.

3.2 DISEÑO METODOLÓGICO

Para poder explicitar el diseño metodológico utilizado en el proyecto, nace la necesidad de evidenciar las particularidades de este, pues así se puede observar de forma integral la relación existente entre las características y la estrategia utilizada para abordar la problemática. El propósito general de esta investigación consiste en caracterizar el proceso de conceptualización que alcanzan estudiantes universitarios cuando abordan la unidad temática de transformaciones lineales a partir de una propuesta didáctica basada en el modelo teórico de Van Hiele. Es decir, los sujetos de estudio son los alumnos, los cuales serán observados durante la aplicación de la secuencia de aprendizaje.

Estas características se ajustan de buena manera a lo que Hernández et al. (2014) denominan diseño no experimental, longitudinal de panel. Pues en primera instancia se busca observar un fenómeno en su contexto natural -no experimental-, es decir, analizar a los estudiantes dentro del aula[10]. Y, en segundo lugar, se pretende analizar a los mismos sujetos en más de un momento -longitudinal de panel-.

Dicho esto, el estudio se estructuró en 1 etapa general, la cual es:

- Etapa 1: Desarrollo del ciclo de Van Hiele.

Antes de comenzar a profundizar y especificar esta etapa, en la Tabla 3.1 se presenta la relación entre los procesos generales y los objetivos de la investigación.

Tabla 3.1: Resumen de actividades

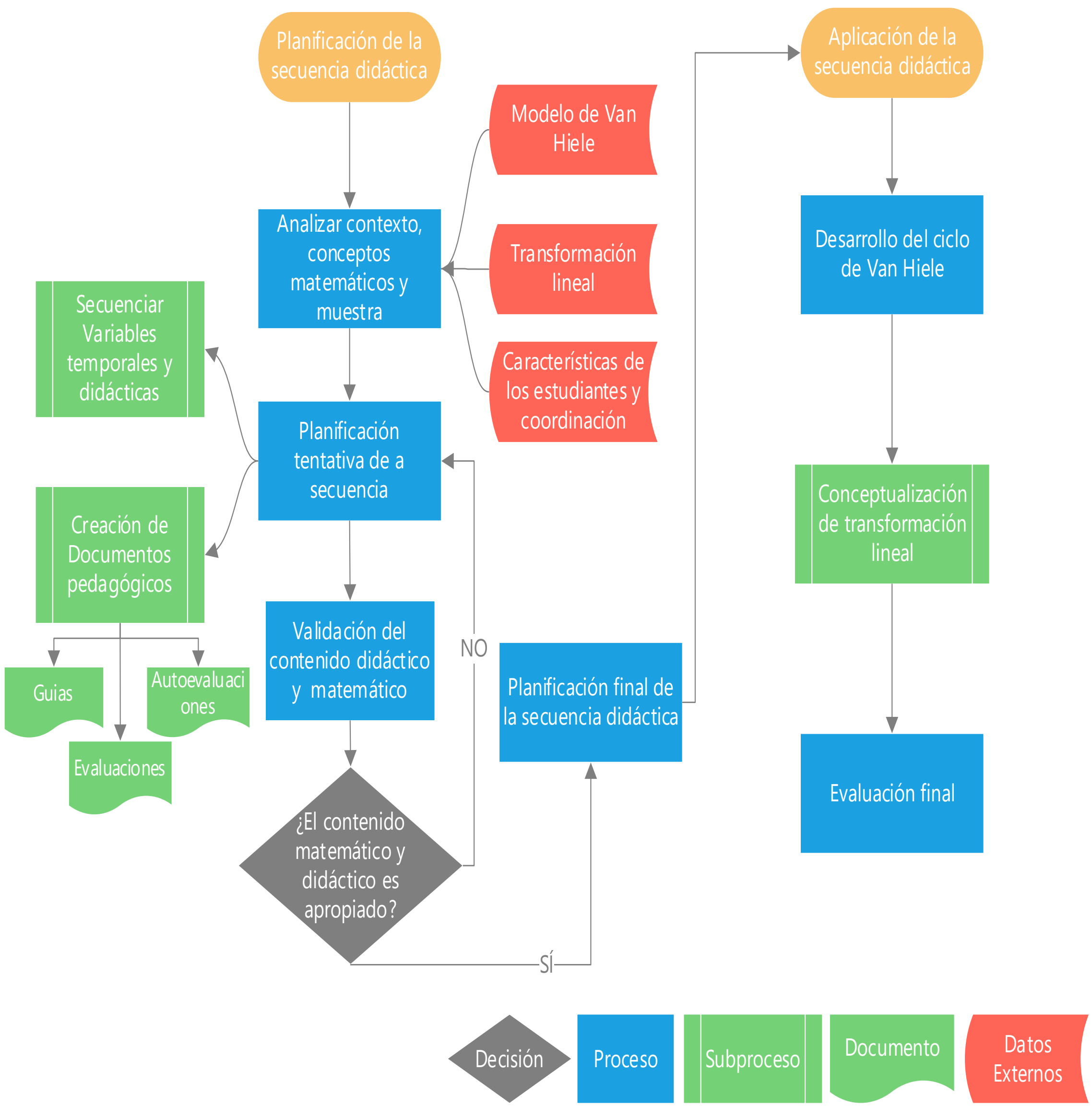
Etapa	**Procesos generales**	**Objetivos relacionados**
Desarrollo del ciclo de Van Hiele	-Visualizar el concepto de transformación lineal a través de isometrías en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. -Analizar las características de las transformaciones lineales a partir de la multiplicación de matrices -Demostrar las condiciones de suficiencia de una transformación lineal.	Identificar los niveles de comprensión que alcanzan estudiantes universitarios del concepto de transformación lineal, a partir de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico propuestos en el modelo teórico de Van Hiele. Describir los niveles de comprensión que alcanzan estudiantes universitarios del concepto de transformación lineal, a partir de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico propuestos en el modelo teórico de Van Hiele.

Fuente: Elaboración propia

[10] Cabe recordar que debido a la emergencia sanitaria las actividades se realizaron de forma virtual

Además, con el propósito de visualizar de forma sistemática el diseño metodológico, se presenta la Figura 3.2, la cual consiste en un diagrama de flujos, en donde se evidencia el encadenamiento de las actividades.

Figura 3.2: Diagrama metodológico de la investigación



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.2 es posible divisar cómo se conectan cada uno de los procesos que intervienen en este proyecto. En la parte izquierda de la figura se observa el trabajo de planificación, en donde se realizan procesos como el análisis del contexto y el diseño de una planificación tentativa, para posteriormente generar una validación científica de esta. En este punto se concentra parte del trabajo del investigador, pues se generan micro resultados como los documentos pedagógicos y la planificación docente. Mientras en la parte derecha de la figura se evidencian las actividades relacionadas con la aplicación en el aula, es decir, los procesos y actividades relacionadas con la aplicación de la secuencia. La relevancia de a Figura 3.2 recae en que en ella se evidencia la abstracción metodológica de la investigación, la cual puede ser utilizada para replantear o mejorar algunas situaciones.

3.2.1 La secuencia didáctica

La secuencia de aprendizaje está estructurada a partir del modelo de Van Hiele, es decir, se profundiza en la noción de transformación lineal usando como pilar dicho modelo geométrico. La planificación se compone de 4 clases, en formato virtual, de una hora cada una. Durante el ciclo los estudiantes desarrollaron una serie de 10 actividades, las cuales están secuenciadas en función a los distintos niveles propuestos por el modelo – visualización, análisis, clasificación-. En resumen, los estudiantes lograron observar de forma esquemática el comportamiento de distintas aplicaciones lineales, para posteriormente, analizar, clasificar y deducir sus características y propiedades.

La idea general de la secuencia es poder "aterrizar" la naturaleza abstracta del álgebra lineal a través de la visualización geométrica de los conceptos trabajados. Para esto se construyeron distintos recursos pedagógicos, los cuales se fueron entrelazando junto con el trabajo realizado en clases para facilitar la comprensión de los objetos de estudio. Específicamente la secuencia consta de 5 guías, un ciclo de videos y 2 actividades grupales de discusión. Para estas últimas se planificaron un conjunto de preguntas (preguntas para guiar la discusión – PGD[11]) las cuales ayudaron a guiar el proceso de discusión que ejecutaron los estudiantes.

- **Planificación de la secuencia**

Antes de comenzar a especificar las particularidades de la etapa de planificación, se deben tener en cuenta el contexto en donde se aplicará la secuencia didáctica. Debido a la realidad sanitaria nacional y mundial, todas las instituciones universitarias están desarrollando sus actividades académicas de forma virtual. Por lo cual, las actividades docentes que componen la secuencia didáctica se desarrollaron de forma online a través de la plataforma Zoom. Esto tiene implicancias importantes en lo que respecta al tiempo disponible, ya que a diferencia de un formato presencial las clases poseen una duración de sólo una hora. Para poder superar esta dificultad se

---

11 Desde ahora en adelante cuando se haga referencias a las preguntas para guiar la discusión se podrán mencionar a partir de su codificación, la cual será PGD. Siendo PGD1 la primera y PGD2 la segunda

construyeron materiales pedagógicos en forma de videos, los cuales fueron subidos a una plataforma online en donde los estudiantes tendríann que manejarlos como ellos estimen conveniente. Esto se realiza con el propósito de optimizar los tiempos de interacción entre profesor-alumno y alumno-alumno.

Para facilitar la comprensión de los párrafos venideros, se presenta la Tabla 3.2, en la cual es posible observar las principales características de los recursos pedagógicos, además de anexar la codificación correspondiente a cada recurso.

Tabla 3.2: Descripción general de recursos pedagógicos

Material pedagógico	**Objetivo**	**Descripción general**
Guía 1 (G1)	Contextualización inicial	En este material se entregan definiciones y ejemplos generales sobre isometrías.
Guía 2 a 5 (G2; G3; G4; G5)	Desarrollo de los objetos matemáticos	La estructura de estos materiales se divide en 2 grandes etapas. En primera instancia los alumnos debieron resolver problemas matemáticos, mientras en la segunda sección deben construir explicaciones o definiciones de los procesos estudiados. En estos documentos se abordan todas las ideas que se desarrollaron en la secuencia didáctica.
Video 1 y 2 (V1; V2)	Entregar herramientas de cálculo para el desarrollo de las actividades	Durante el ciclo de videos se entregaron herramientas de cálculo necesarias para entrar en los niveles de análisis y clasificación. En estos recursos se abordaron conceptos teóricos los cuales fueron discutidos con posterioridad en clases.
Preguntas para guiar la discusión (PGD1; PGD2)	Facilitar la discusión que se generara en las actividades grupales	En estos documentos se presentan algunas afirmaciones e igualdades matemáticas, las cuales debieron ser analizadas por el grupo, para posteriormente concluir la veracidad de dichas afirmaciones.

Fuente: Elaboración propia

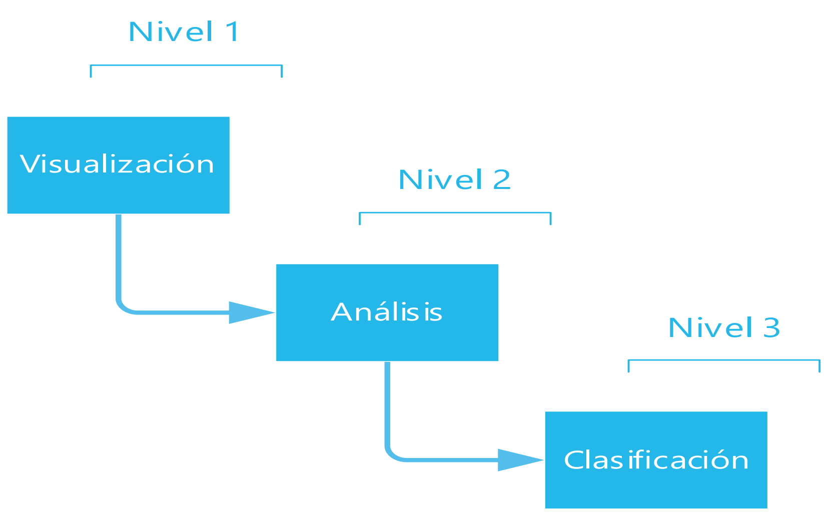
Los documentos referidos en la tabla anterior entregaron información sobre cómo avanzan los alumnos a medida que se desarrolla la secuencia, además de contextualizar a los estudiantes con los objetos matemáticos que se desarrollaron en el ciclo de aprendizaje.

Antes de comenzar a detallar las características de cada clase, cabe mencionar que, en el caso particular de las guías 2,3,4,5, PGD1 y PGD2, estas tienen la singularidad de ser el instrumento de medición con los cuales se analizará el desarrollo del razonamiento matemático que presenten los alumnos, ya que a partir de las expresiones verbales que presenten los estudiantes será posible analizar su retórica y clasificarla. Esta realidad será profundizada en el apartado de "análisis de instrumento" que se presentará en los párrafos venideros.

Dicho esto, la unidad didáctica está planificada para desarrollarse en el transcurso de 6 horas pedagógicas, es decir, 4 a 5 sesiones de 1 hora, esto se traduce en una extensión temporal que varía entre 1 o 2 semanas, dependiendo de la cantidad de clases semanales programadas por la coordinación de la asignatura.

Como se mencionó anteriormente, cada etapa de la secuencia intentó seguir la estructura correspondiente a las fases de Van Hiele. No obstante, se debe tener en cuenta la factibilidad del ciclo de aprendizaje en lo que respecta al tiempo disponible, por lo que las fases de información e integración se omitieron, e intentaron ser abordadas de una forma implícita y resumida. Para la implementación de las etapas, la metodología general consistió en introducir al alumno en una problemática, la que fue proporcionada por el profesor a través de guías o problemas -orientación dirigida-, para luego avanzar a una etapa de discusión en donde se afinaron los conceptos trabajados a partir de la comunicación oral -explicitación-, para finalizar, el alumno debió consolidar sus conocimientos con base en ciertos ejercicios propuestos por el profesor -orientación libre-.

Figura 3.3: Estructura de la secuencia basada en el modelo de Van Hiele



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.3 es posible observar cómo el modelo de Van Hiele estructura las fases de la investigación. Los estudiantes avanzaron en cada ciclo de una forma escalonada, transitando cada nivel de Van Hiele de una forma progresiva.

A continuación, se presentará la Tabla 3.3, en la que se detallan de forma general el conjunto de actividades correspondientes a cada clase. También, en la sección de anexos, se adjunta la planificación docente, en donde se mencionan los diferentes objetivos de aprendizaje[12] que persigue la secuencia

Tabla 3.3: Actividades y descripciones principales desglosadas por clase

Clase	Conceptos por desarrollar	Descripción general	Material de apoyo
0	Presentación y contextualización	-Presentación entre estudiantes e investigador -Se les explicó de forma general a los estudiantes en qué consistía la intervención -Entrega de guía 1.	Guía 1
1	Isometrías y transformaciones isométricas	-Consultas respecto a la guía 1. -Actividad 1: Desarrollo de la guía 2 (isometrías) -Actividad 2: Visualización de Transformaciones lineales en el plano y el espacio. -Actividad 3: Separar el curso en grupos y generar discusión que aborden los contenidos observados en las actividades previas. - Entregar videos introductorios para la próxima clase	GeoGebra. PowerPoint. Preguntas para guiar discusión. Video introductorio 1.

12 No se debe confundir los objetivos de aprendizaje de la planificación docentes con los objetivos planteados en la investigación, ya que, si bien ambos se relacionan, se construyeron abordando contextos diferentes.

2	Matriz asociada a una transformación lineal	-Consultas respecto al video. -Actividad 4: Desarrollo de la guía 3 en parejas. -Actividad 5: Comparar y debatir la similitud de los resultados obtenidos en la guía 2 y 3. -Actividad 6: Desarrollar guía 4 como trabajo personal. -Entregar video introductorio 2	Video introductorio 2
3	Transformación lineal y Condiciones de suficiencia	-Actividad 7: Separar el curso en grupos de discusión y entregar preguntas a debatir. -Actividad 8: Desarrollar presentaciones con las conclusiones de la actividad previa. -Entregar guía 4 y mencionar su relación con el video introductorio 2.	PowerPoint 1
4		-Actividad 9: Desarrollo de guía 5. -Actividad 10: discusión y conclusión sobre los ejercicios de la actividad anterior.	

Fuente: Elaboración propia

- **Aplicación de la secuencia**

Durante el ciclo se pretende secuenciar la noción de transformación lineal, tomando como base el modelo de Van Hiele. Para lograr este cometido se consideraron los conceptos de isometrías (rotaciones, reflexiones), matriz asociada a una transformación lineal y condiciones de suficiencia para definir una transformación lineal, dichos conceptos se vinculan con los distintos niveles del modelo. Esta situación se puede visualizar en la Figura 3.4.

Figura 3.4: Relación entre los conceptos matemáticos y los niveles de Van Hiele

Fuente: Elaboración propia

Para poder visualizar se recurrió a las isometrías en $\mathbb{R}^2$, para poder analizar se utilizaron las matrices asociadas a una transformación lineal y para poder clasificar se estudiaron las condiciones de suficiencia una transformación lineal. Todas estas situaciones se detallarán con mayor profundidad en párrafos posteriores.

Al mismo tiempo, y con el propósito de facilitar el proceso de transposición didáctica, se utilizaron distintas herramientas pedagógicas, entre las que destacan: el uso de software, y la construcción de recursos pedagógicos que ayudaron a los estudiantes a secuenciar cada etapa. Dichas herramientas quedan explicitadas en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Recursos utilizadas durante la intervención

Recursos	**Tipo de herramienta**	**Propósito de su uso**	**Cantidad de veces que se utiliza durante el ciclo**	**Actividad con la que se relaciona**
GeoGebra	Software	Ilustrar situaciones	1	Actividad 2
PowerPoint	Software	Construir presentaciones	2	Actividad 2 y 6
Videos Introductorios	Material pedagógico	Introducir conceptos matemáticos	2	Actividad 4 y 8
Guías (1 a 5)	Material Pedagógico	Contextualización previa y desarrollo de conceptos matemáticos	4	Actividad 1, 4 y 8
Preguntas para guiar la discusión	Material pedagógico	Preguntas que se entregan para poder guiar la discusión que se genere en clases	2	Actividad 3 y 7

Fuente: Elaboración propia

Es importantes destacar que las actividades referidas en la tabla anterior quedarán definidas en los próximos apartados.

- **Etapa 1: Visualización (Clase 1)**

Actividad 1: Para comenzar el desarrollo de esta actividad se debe generar una breve introducción en torno a las ideas de isometrías, ya que posiblemente es un tema que los alumnos no recuerden con claridad. Para cumplir este propósito se les solicitó a los estudiantes que revisen -idealmente de forma previa- la guía 1. Dicha guía cumple la función de contextualizar, pues entrega definiciones y ejemplos básicos.

Con esto claro se debe mencionar que el objetivo de la actividad número 1 consiste en visualizar y generar isometrías en $\mathbb{R}^2$. Para esto se elaboró la guía 2, la cual es adjuntada de forma resumida en este apartado y de forma completa en la sección de anexos. La idea principal de esta actividad es que el alumno logre observar el comportamiento geométrico de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, a través del trabajo personal.

Actividad 2: La meta de esta actividad es observar el comportamiento de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Para cumplir este propósito se desarrollaron 2 trabajos. Primero se exhibieron algunos videos, en los cuales se mostraron distintas distorsiones del plano (transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$). La finalidad de dicho trabajo radica en que los estudiantes lograrán diferenciar visualmente las propiedades y diferencias entre una transformación lineal y una no lineal. En segunda instancia, se trabajaron con transformaciones en el espacio, para esto se utilizó el software de GeoGebra, el cual permitió a los estudiantes poder visualizar cómo se comporta las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^3$.

Actividad 3: La actividad consiste en poder discutir los resultados observados en los trabajos anteriores. En este punto el profesor actuó como guía de la clase, construyendo preguntas y dando la posibilidad a los estudiantes a que generen sus propios ejemplos. Al mismo tiempo se abrió un espacio de discusión, en donde los estudiantes pudieron comparar las características similares observadas entre los ejemplos planteados entre las distintas dimensiones. Para esto se pueden plantear preguntas que guíen la discusión, las cuales pueden ser: ¿qué similitudes se pueden observar entre las trasformaciones en distintos planos?; ¿puede que una transformación lineal no sea una isometría?

- ✓ **Instrumento de medición**

Guía 2: Transformaciones isométricas

Para realizar esta actividad necesitarás hojas milimetradas regla y transportador, este último de uso opcional. Recuerda entregar tus resultados, ya que serán utilizados en evaluaciones posteriores.

1. En el plano cartesiano adjuntado realiza las siguientes actividades:
   a. Dibuja la figura cuyos vértices son: A=(1,1) ; B=(4,-1) ; C=(4,3) ; D=(2,2)
   b. Realiza una simetría respecto al eje de las ordenadas
   c. Realiza una rotación respecto al origen en 90°
   d. Traslada la figura según el vector de traslación $\vec{T}$(2,-1)
   e. Realiza una transformación de la figura siguiendo las siguientes instrucciones:
      i. Reflejarla con respecto al eje Y
      ii. Duplicar su longitud con respecto al eje de las ordenadas
2. Responde las siguientes preguntas:
   a. ¿El apartado "e" puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta.
   a. ¿Como relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu repuesta.
   b. ¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.

PGD1: Preguntas para guiar la discusión

1. ¿Existen diferencias entre las isometrías visualizadas en los distintos planos?
2. ¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?
   - ¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?
3. ¿Puede que una transformación lineal no sea una isometría?

- **Etapa 2: Análisis (clase 2)**

Actividad 4: Esta actividad toma como insumos la guía 2, a partir de la cual el estudiante realizó las mismas isometrías planteadas en dicha guía, pero a través de la operación matricial, es decir, el alumno transformó líneas en líneas multiplicando matrices. Este punto es importante, ya que fue el primer vínculo tangible entre la materia trabajada en unidades pasadas y el concepto de transformación lineal. Para realizar esta actividad el profesor facilitó, de manera previa, el video número 1, en donde se entregó una breve explicación teórica de cómo construir la matriz asociada a una transformación lineal, con la cual los estudiantes fueron capaces de trabajar la guía 3. El objetivo de esta actividad recae en vincular la transformación lineal con su operador matricial o también llamada matriz asociada a una transformación lineal. Cabe mencionar que el proceso de resolución de la guía se realizó en parejas, lo que implica que se estuvo trabajando las fases de orientación dirigida y explicitación de forma simultánea.

Actividad 5: La actividad consistió en generar un breve espacio de discusión, en donde sea posible comentar y debatir las similitudes y diferencias encontradas en los resultados de la guía 2 y guía 3. En este punto el profesor fue el responsable de aplicar la fase de orientación dirigida y explicitación, buscando que las conclusiones de los estudiantes sean congruentes con el nivel de análisis del modelo de Van Hiele.

Actividad 6: Para la actividad se pensó generalizar la idea de operador matricial en otros espacios vectoriales que no sean vectores, como lo pueden ser polinomios o matrices. Esto se generó a través de una explicación teórica construida a partir del segundo video y el posterior trabajo personal de los estudiantes en la Guía 4. Esta actividad tiene el objetivo de que no se genere el obstáculo didáctico que los espacios vectoriales se restringen sólo a vectores.

- ✓ **Instrumento de medición**

Guía 3: Isometrías y matrices

Para realizar esta actividad necesitarás el trabajo que realizaste en la guía número 2. Sigue minuciosamente las instrucciones que vendrán a continuación.

1. Ejercicios
    a. Construye las transformaciones realizadas en el ítem 1 apartado 1.b, 1.c de la guía N°1 en forma de multiplicación de matrices
    b. Aplica las transformaciones obtenidas en el apartado 1.b y 1.c a los elementos del conjunto $\alpha = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ en forma de multiplicación de matrices.
    c. A partir del trabajo realizado en clases generaliza la matriz asociada a la rotación respecto al origen en R^2
    d. Explicita la matriz asociada a la rotación en 90°
    e. Calcula la matriz asociada a la transformación realizada en el apartado 1.e (guía 1). Además, multiplica dicha matriz por cada vértice de la figura trabajada en la guía 1. Grafica tu resultado

2. Preguntas
    a. ¿Como relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu repuesta.
    b. ¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.
    c. Define con tus palabras el concepto de transformación lineal
    d. Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal

Guía 4: transformaciones lineales y espacios vectoriales

1. Encuentre la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales
   a. Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$, tal que $T = (x, y, z) = (x + y - z, 0)$
   b. Sea $T: R^2 \rightarrow R_{[x]^1}$, tal que $T(a, b) = 2a + 2b - (a + b)x$. Para este apartado considere las bases $\alpha = \{(1,0); (1,1)\} \in a\ R^2$ y $\beta = \{1,1 - x\} \in R_{[x]^1}$
2. Generalice la matriz asociada a una transformación lineal, a partir de los canónicos de R^n, la cual toma como conjunto de partida a R^n, y como conjunto de llegada a R^m. Recuerde que $T(x) = Ax$, siendo A la matriz asociada a la transformación y x un vector de R^n
3. Define con tus palabras los conceptos de transformación lineal y el de matriz asociada a una transformación lineal

- **Etapa 3: Clasificación (Clase 3 y 4)**

Actividad 7 (clase 3): El objetivo de esta actividad consiste en definir y formalizar el concepto de transformación lineal. Para esto se separó al curso en grupos y trabajaron con base en el material PGD2, en donde a través de ciertas preguntas guiadas lograron generar conclusiones con respecto a los conceptos trabajados durante el ciclo, las que posteriormente fueron compartidas con todos sus compañeros. Se espera que los alumnos sean capaces de acercarse a las condiciones de linealidad. Al igual que en la actividad anterior las fases de orientación dirigida y explicitación se realizaron de forma simultánea.

Actividad 8 (clase 3): Posterior al análisis grupal generado en la actividad anterior, se procedió a realizar una breve presentación con las conclusiones de cada grupo. La importancia de esta etapa recae en que las conclusiones consensuadas en la actividad grupal fueron debatidas por todo el curso.

Actividad 9 (clase 4): Para poder trabajar en la fase de orientación libre, se procedió a realizar la guía número 5, la cual tiene el objetivo de trabajar ejercicios relacionados con las condiciones de linealidad de una transformación lineal, es decir, los alumnos demostraron si una función definida entre espacios vectoriales es una transformación lineal o no.

Actividad 10 (clase 4): Para finalizar la sesión se procedió a abrir un espacio de discusión, en donde se debatió sobre los resultados obtenidos en la actividad 9. De esta manera los estudiantes pudieron observar las diferencias entre sus desarrollos matemáticos.

- ✓ **Instrumento de medición**

Guía 5: Condiciones de suficiencia

1. Determine si las siguientes aplicaciones son o no lineales. Justifique su respuesta.
   a. Sea $T: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = |x|$
   b. Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, y)$

c. Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T(x, y) = (x^2, y)$

d. Sea $T: M_{R_2} \rightarrow R$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + 3b - d$

2. Demuestre que $F: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ \forall\ a, b, c, d \in R$ es una transformación lineal.

3. Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y + z, x + z)$.Demuestre que $T \in \mathbb{L}_R(R^3, R^2)$
4. Sea $T: M_{R_2} \rightarrow M_{R_2}$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - c & b \\ d + c & d + a \end{pmatrix}$. Demuestre que $T \in \mathbb{L}_R\left(M_{R_2}, M_{R_2}\right)$.
5. Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.
6. ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu respuesta.

PGD2: Preguntas para guiar la discusión

1. Sea T: $\mathbb{v} \rightarrow \mathbb{w}$ una función definida entre 2 espacios vectoriales. Considere verdadera la siguiente afirmación:

$T(v)$=$T(-v)$; donde $v \in \mathbb{v} \land T(v) \in \mathbb{w}$.

Recuerde que $T(v)$ es la imagen del vector v.

¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático

2. Sea T: $\mathbb{v} \rightarrow \mathbb{w}$ una función definida entre 2 espacios vectoriales. Sea $\alpha = \{V_1, V_2, V_3 \ldots V_n\}$ una base del dominio.

Recuerde que, si tomamos un vector $u \in \mathbb{v}$, este vector puede ser expresado como una combinación lineal de su base, es decir:

$$u \in \mathbb{v} \Rightarrow u = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 \ldots a_nV_n \qquad con\ a_i \in \mathbb{R}$$

Si aplicamos la función a la combinación lineal

$$f(u) = f(a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 \ldots + a_nV_n) \qquad con\ a_i \in \mathbb{R}$$

Dicho esto, considere verdadera la siguiente afirmación.

$$f(a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 \ldots a_nV_n) \ = a_1f(V_1) + a_2f(V_2) + a_3f(V_3) \ldots + a_nf(V_n)$$

¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo

3.2.2 Análisis de los instrumentos de medición

Para poder realizar el análisis del instrumento de medición se deben tener en cuenta 2 factores fundamentales:

- Las características del modelo de Van Hiele
- La estructura de las guías

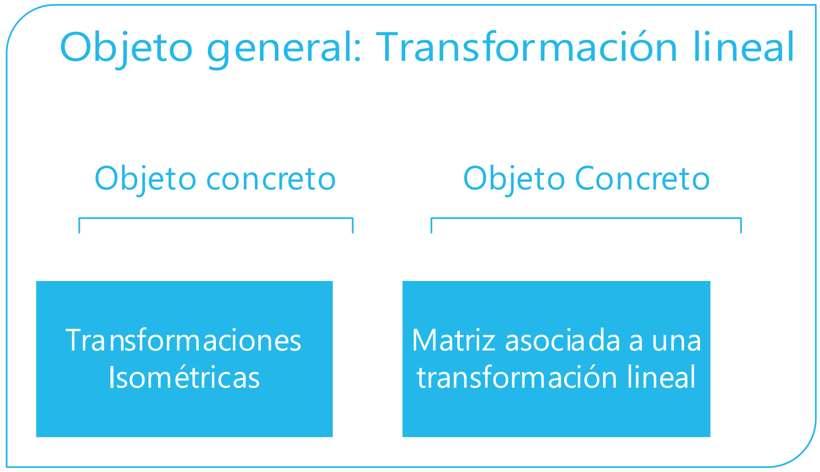
Entre las particularidades principales que caracterizan el modelo de Van Hiele, se encuentra la continuidad, la localidad, la secuencialidad y la especificidad en el lenguaje. Si bien todas estas particularidades inciden en la planificación de la secuencia, la localidad y la especificidad en el lenguaje toman especial relevancia sobres las demás a la hora de planificar y evaluar un ciclo de aprendizaje en álgebra lineal, pues ambas ideas se relacionan con las dificultadades de aprendizaje documentadas en el capítulo uno (Dorier et al., 2000).

La **localidad** hace referencia a que un estudiante puede transitar en distintos niveles de razonamiento dependiendo del concepto geométrico que se esté conceptualizando. Esta característica toma especial relevancia debido al ambiente particular en el cual se desarrolla la secuencia de aprendizaje, pues al situarse dentro de un contexto en donde las características abstractas de los objetos abundan, se hace necesario que el estudiante domine y transite entre una diversidad de objetos matemáticos. En un curso de álgebra lineal las relaciones geométricas no suelan ser tan directas, más bien son indirectas, pues las aplicaciones se manifiestan en objetos matemático más simple y concretos (Dorier y Sierpinska, 2001).

Por ejemplo, dentro del ciclo el concepto analizado es el de transformación lineal, ante esto se recurrió a otro objeto matemático para lograr visualizarlo como lo son las isometrías. Es decir, la aplicación geométrica de una transformación lineal se manifiesta a través de otro objeto matemático. Es relevante tener conciencia de esta situación pues, que un estudiante logre analizar y clasificar las distintas características de una isometría, no quiere decir que logre analizar y clasificar la idea de transformación lineal. Dicho esto, resulta obvio que el proceso de conceptualización transita en una doble dimensión de objetos, en donde a partir de elementos más básicos se intenta aproximar a conceptos generales. En la práctica, esta realidad se evidencia de forma clara en las etapas de menor nivel, ya que es en estas etapas donde los objetos más simples toman mayor injerencia.

Se realiza esta aclaración, debido a que las preguntas que se encuentran en las guías pueden hacer referencia al concepto particular -isometrías o matriz asociada- y no al general -transformación lineal-, lo que pudiese generar cierto tipo de confusión en el análisis. Dicho esto, se adjunta Figura 3.5, en donde es posible visualizar cómo se relacionan los distintos objetos matemáticos en cada ciclo.

Figura 3.5: Objetos matemáticos que componen cada ciclo



Fuente: Elaboración Propia

En apartados posteriores se diferenciará y limitará claramente la relación existente entre los objetos concretos y el objeto general. Pues es una situación que debe estar totalmente comprendida a la hora de analizar los resultados.

En lo que respecta a la **especificidad en el lenguaje**, esta característica hace referencia a que el desarrollo cognitivo que presenta el estudiante, no solo se ve reflejado en su capacidad de resolver problemas, sino que también en la forma de expresarse que este posea y en el significado que le da a las que utiliza. Esta singularidad, permite analizar el nivel de Van Hiele que alcanza un estudiante a partir del estudio de sus expresiones escritas o verbales.

Debido a esto, la estructura general que presentan las guías seleccionadas como instrumentos de medición es siempre la misma. En primera instancia se presentan problemas matemáticos relacionados con los temas a tratar, para posteriormente solicitar a los estudiantes que expliciten explicaciones o definiciones respecto a situaciones o conceptos determinados. Estas últimas preguntas permitirán estudiar el proceso de conceptualización que van desarrollando los estudiantes, pues se evidenciará el uso que el alumno le da a las palabras. Para poder analizar de mejor manera esta situación, las guías presentan algunas preguntas recurrentes, con esto se espera poder observar de mejor manera cómo el estudiante desarrolla y conceptualiza los distintos conceptos abordados durante el ciclo de aprendizaje. Es debido a esto último que en las guías relacionadas con las etapas de visualización o análisis pueden existir preguntas de clasificación o viceversa

- **Análisis de los instrumentos de medición**

Durante este apartado se estudiarán las preguntas de los instrumentos de medición, analizando por separado el objeto matemático al cual apuntan. En primera instancia, se evaluarán las guías 2,3,4 y 5, para posteriormente analizar las preguntas para guiar la discusión (PGD).

- **Guía 2**

A continuación, se presenta la Tabla 3.5, en donde se explicita las relaciones entre los objetos concretos y el objeto general. En específico, la tabla aborda la guía 2, en donde se encadenan las nociones de transformación isométrica y transformación lineal.

Tabla 3.5: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para la guía 2 (G2)

Preguntas	**Objeto**	
	Transformación isométrica	**Transformación lineal**
¿El apartado "e" puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta	En lo que respecta a la idea de transformación isométrica esta pregunta apunta al nivel 2, ya que se espera que los estudiantes puedan analizar las diferencias existentes entre ambos objetos	El nivel de razonamiento al cual apunta la pregunta es al nivel 1 (visualización), ya que se espera que el alumno logre inferir de forma visual que la transformación realizada en el apartado 1 no es una transformación isométrica, sino que otro tipo de transformación (lineal). Al mismo tiempo, dependiendo de los argumentos que desarrolle en su justificación se podrán evaluar si existe la presencia de elementos que caractericen otro nivel.
¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.	El nivel al cual apunta esta pregunta es al nivel 3, pues se espera que el estudiante identifique las características que posee una isometría y establezca relaciones lógicas con algún otro elemento matemático.	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es el nivel 2 (análisis), pues se espera que los estudiantes logren reconocer propiedades y características de las transformaciones lineales y las relacionen con algún otro elemento.

Fuente: Elaboración propia

- **Guía 3**

A continuación, se presenta la Tabla 3.6, en donde se explicita las relaciones entre el objeto general y concreto de la guía 3. En específico, la tabla aborda las nociones de matriz asociada a una transformación lineal y transformación lineal. Cabe destacar que, para evaluar el desarrollo de los niveles anteriores, algunas preguntas pueden hacer referencia a conceptos de la guía anterior. De igual modo esta situación se explicitará en la tabla.

Tabla 3.6: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para la guía 3 (G3)

Preguntas	**Objeto**		
	Transformación isométrica	**Matriz asociada a la transformación lineal**	**Transformación lineal**
¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.	El nivel al cual apunta esta pregunta es al nivel 3, pues se espera que el estudiante identifique las características que posee una isometría y establezca relaciones lógicas con algún otro elemento matemático	Esta pregunta no aplica para esta categoría	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es el nivel 2 (análisis), pues se espera que los estudiantes logren reconocer propiedades y características de las transformaciones lineales y las relacionen con algún otro elemento.
Define con tus palabras el concepto de transformación lineal	Esta pregunta no aplica para esta categoría	Esta pregunta no aplica para esta categoría	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues busca que los estudiantes elaboren una definición de los conceptos identificando, en medida de lo posible, ciertas condiciones de suficiencia

Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal	Esta pregunta no aplica para esta categoría	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues busca que los estudiantes elaboren una definición del concepto de matriz asociada identificado sus principales características	Esta pregunta no aplica para esta categoría

Fuente: Elaboración propia

- **Guía 4**

A diferencia de la guía 2 y 3, las preguntas de la guía 4 hacen referencia a las 3 nociones que se trabajarán en el ciclo, pues resume todo el proceso anterior. Esto queda evidenciado de mejor manera en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para la guía 4 (G4)

Preguntas	**Objeto**		
	Transformación isométrica	**Matriz asociada a la transformación lineal**	**Transformación lineal**
¿Cuáles son las características de una transformación lineal? Menciona los elementos que la definen	Esta pregunta no aplica para esta categoría	Esta pregunta no aplica para esta categoría	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (Clasificación), pues busca que los estudiantes expliciten componentes o propiedades que componen una transformación lineal
Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal	Esta pregunta no aplica para esta categoría	el nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues busca que los estudiantes elaboren una definición del concepto de matriz asociada identificado sus principales características	Esta pregunta no aplica para esta categoría

Fuente: Elaboración propia

- **Guía 5**

A diferencia de las guías anteriores, la guía 5 posee la particularidad de sólo abordar la noción de transformación lineal. Esto se debe al hecho que cuando se abordó esta guía los estudiantes ya habían avanzado por los niveles de visualización y análisis, por lo cual no se hace necesarios evaluar los objetos concretos. Esta situación queda resumida en la Tabla 3.8

Tabla 3.8: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para la guía 5 (G5)

Preguntas	**Objeto**
	Transformación lineal
Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues busca que los estudiantes establezcan relaciones entre las condiciones de linealidad y las condiciones de cerradura de un espacio vectorial. Es importante señalar que para responder esta pregunta el alumno necesita comprender de buena manera el concepto de espacio vectorial.
Define con tus palabras el concepto de transformación lineal .	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues busca que los estudiantes elaboren una definición de los conceptos identificando, en medida de lo posible, ciertas condiciones de suficiencia

Fuente: Elaboración propia

- **PGD1**

En contraposición de las guías 2, 3, y 4, las preguntas generadas en las guías codificadas como PGD solo buscan evaluar un objeto. Además, se debe tener en consideración que, a diferencia de los instrumentos anteriores, las guías PGD se desarrollan de forma grupal. El análisis de la guía PGD1 queda resumido de mejor manera a partir de la Tabla 3.9, en donde se mencionan los niveles de razonamiento de Van Hiele al que apunta cada pregunta.

Tabla 3.9: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para PGD1

Preguntas	Objeto
	Transformación isométrica
¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 1 (Visualización), pues busca que los estudiantes expresen los cambios visuales que se generan a la hora de trabajar con una transformación isométrica.
¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?	El nivel de razonamiento al cual apunta es el nivel 2 (análisis), pues se esperan que los estudiantes mencionen componentes o propiedades de las transformaciones isométricas.

Fuente: Elaboración propia

- PGD2

Al Igual que el instrumento anterior, el instrumento PGD2 se desarrolló de manera grupal. Dicho instrumento busca medir los niveles de conceptualización referidos al objeto de transformación lineal, intentado que los estudiantes logren agrupar todos los conocimientos construidos en las actividades anteriores y terminen concluyendo con las condiciones de suficiencia de las transformaciones lineales. El análisis del instrumento queda resumido a partir de la Tabla 3.10.

Tabla 3.10: Relación entre preguntas y niveles de razonamiento para PGD2

Preguntas	Objeto
	Transformación lineal
Sea T: $\mathbb{v} \to \mathbb{w}$ una función definida entre 2 espacios vectoriales. Considere verdadera la siguiente afirmación: $T(v)$=$T(-v)$; donde $v \in \mathbb{v} \wedge T(v) \in \mathbb{w}$. Recuerde que $T(v)$ es la imagen del vector v. ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues se espera que los estudiantes sean capaces de explicitar la primera condición de suficiencia de las transformaciones lineales.
Sea T: $\mathbb{v} \to \mathbb{w}$ una función definida entre 2 espacios vectoriales. Considere verdadera la siguiente afirmación: $T(v)$=$T(-v)$; donde $v \in \mathbb{v} \wedge T(v) \in \mathbb{w}$. Recuerde que $T(v)$ es la imagen del vector v. ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático	El nivel de razonamiento al cual apunta esta pregunta es al nivel 3 (clasificación), pues se espera que los estudiantes sean capaces de explicitar la segunda condición de suficiencia de las transformaciones lineales.

Fuente: Elaboración propia

Para finalizar con el apartado referido al análisis de los instrumentos, se desea explicitar la metodología que se utilizó para organizar los datos recolectados durante la intervención. Para ordenar y resumir la información obtenida, se usaron tablas análogas a las utilizadas en el trabajo de Labra (2019), las cuales poseen la estructura percibida en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11: Matriz de análisis

Respuesta Textual	Unidad de Análisis.	Significado	Características del nivel de razonamiento.	Nivel de razonamiento alcanzado.

Fuente: Elaboración propia basada en (Labra, 2019).

Un elemento importante que se observa luego de analizar la Tabla 3.11, son las características de los niveles de razonamiento. Las características del nivel de razonamiento hacen referencia a particularidades o elementos del lenguaje que se visualizan en el estudiante a la hora de estudiar el desarrollo de su razonamiento, y hacen posible clasificarlo en un nivel determinado. En trabajos investigativos de índole práctico, como por ejemplo el de Labra (2019), las características de los niveles de razonamiento son definidas a partir de trabajos previos de índole teórico, como pueden ser los de Fouz y Donosti (2005).

No obstante, existe una particularidad que lleva a que utilizar este tipo de definiciones no sea lo más idóneo para esta investigación. En los trabajos como los de Labra (2019) o Lobo (2004), el contexto de aplicación son estudiantes de enseñanza media y básica respectivamente, por ende, el objeto matemático evaluado es un objeto netamente geométrico. En contraparte, el contexto de aplicación de esta investigación es un ambiente universitario, y el objeto matemático evaluado es el de transformación lineal, el cual no es una noción geométrica *per se*, sino que es un objeto abstracto el cual tiene aplicaciones de carácter geométrico. Esto lleva a que las características de los niveles de razonamiento definidas en obras como las de Fouz y Donosti (2005) no sean apropiadas para esta investigación.

Debido a estos motivos se decidió construir y definir las características de los niveles de razonamientos tomando en consideración las particularidades abstractas del álgebra lineal y los distintos niveles propuestos por el modelo de Van Hiele. Para esta última situación se tomó en consideración el trabajo de variados autores. Entre los cuales destacan Jaime (1993); Fouz y Donosti (2005); Vargas y Araya (2013); y Lobo (2004).

- Características de los niveles de razonamiento
  - Nivel 1:

    A) Se describe el objeto general por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándose a elementos familiares de entorno. No hay lenguaje geométrico ni algebraico básico para nombrar a los componentes de los objetos por su nombre correcto.

B) Se percibe el objeto general con relación al objeto concreto visualizable. No existe la capacidad de diferenciar entre el objeto general y el objeto concreto. Es decir, los objetos se perciben en su totalidad como una unidad.

- Nivel 2

C) Se perciben los componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos concretos, pero no logran establecer las relaciones con el objeto general. Esto lo obtienen tanto de la observación como de la experimentación.

D) De una manera informal pueden describir objetos por sus propiedades, pero no pueden relacionar unas propiedades con otras. No pueden elaborar definiciones formales.

E) El estudiante diferencia el objeto genera del objeto concreto, pero no es capaz de explicitar correctamente esas diferencias.

- Nivel 3

F) Se describen los objetos de una manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. En este punto el estudiante es capaz de comprender que las aplicaciones geométricas del objeto general son solo una sección de este.

Se debe dejar en claro que las características de los niveles de razonamiento serán utilizadas para clasificar las respuestas de los estudiantes en función a una pregunta especifica. Sin embargo, debido a las particularidades de la metodología utilizada, en donde se realiza más de una pregunta por objeto matemático, puede existir el caso en que en una consulta se obtenga el nivel 2 y en otra el nivel 3, en relación con un mismo objeto. Para clarificar esta situación se analizarán las particularidades de cada caso, siempre considerando la estructura general del modelo de Van Hiele. Es decir, para clasificar a un estudiante en nivel 1, su razonamiento debe ser netamente visual, para clasificar un estudiante en nivel 2 el estudiante deberá reconocer componentes y propiedades del objeto analizado, mientras que para clasificar al estudiante en el nivel 3, éste debe poseer la capacidad de definir el concepto de manera formal y además mencionar en esta definición las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir el objeto matemático evaluado.

3.3 PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Para poder comenzar con el procesamiento de la información, la primera actividad que se debe realizar es el ordenamiento de esta. Para esto se construyeron carpetas personalizadas por alumno, en donde se encontraban todas las guías, evaluaciones, coevaluaciones que desarrolló el estudiante durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje. El criterio utilizado para ordenar la información fue cronológico, por lo cual cada portafolio fue ordenado de forma temporal. Esto se realiza para poder visualizar el desarrollo en los niveles de razonamiento que presenta el estudiante y observar de manera más clara en qué momentos se presentan ciertas dificultades en el aprendizaje.

Durante los procesos de investigación cualitativa, es muy normal que la información recolectada se presente de formas variadas (Hernández et al., 2014), por lo cual se hace necesario reducir los datos recolectados. Para cumplir este propósito se recurrirá a la herramienta de matrices, las cuales tendrán la estructura señalada en la Tabla 3.11. Las matrices permitirán presentar las respuestas de los estudiantes de una forma resumida y segmentada, en donde se evidenciarán distintas unidades de análisis.

Específicamente, los datos se estructuraron en una tabla tipo -matriz-. La cual tiene como principales variables: las respuestas textuales; las unidades de análisis, las características de las unidades de análisis y, la relación existente entre las unidades de análisis y el nivel de razonamiento que presentan el estudiante. Esta realidad posibilitó estudiar de forma más estructurada las respuestas que presenten los alumnos y así establecer el nivel de razonamiento matemático que logran alcanzar en cada etapa de la secuencia.

Parece importante mencionar que la estructura que regirá el capítulo de análisis de resultados consistirá en relato caso a caso, en donde se estudiará los niveles de razonamientos alcanzados por los estudiantes respecto a los objetos concretos y el general. Además de esto, se analizará la incidencia que poseen las actividades en el desarrollo de los niveles de razonamiento. Posteriormente, se estudiará la capacidad de transitar entre objetos concretos y generales. Finamente, se resumirá los resultados identificando patrones comunes percibidos en los 4 casos estudiados. Sin perjuicio de lo anterior, esta estructura se detallará en el capítulo 4.

4 CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS

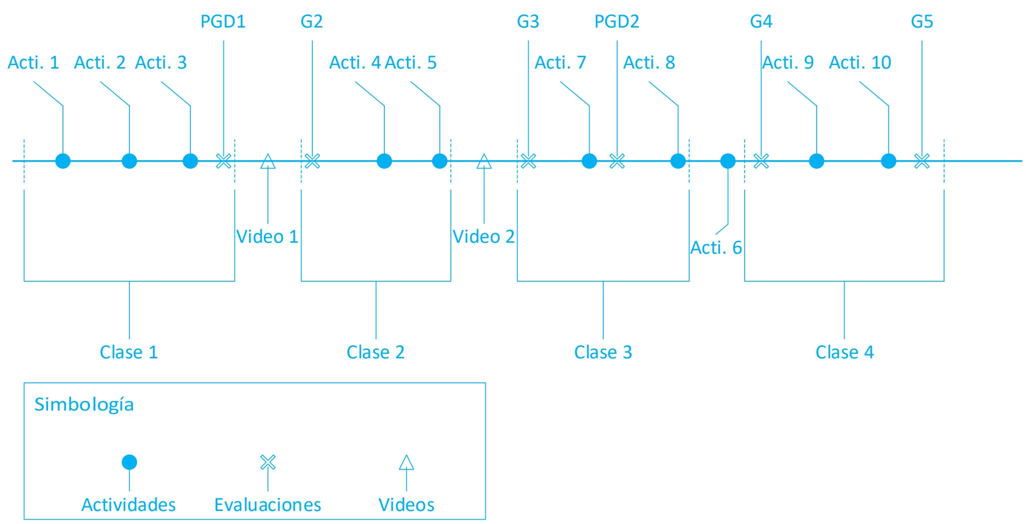
Durante este capítulo se explicitarán los resultados obtenidos en la investigación. Específicamente, se analizará cómo evolucionaron los niveles de razonamiento de los estudiantes a medida que avanzaba la intervención.

Antes de comenzar a estudiar el proceso de conceptualización de los estudiantes, se desea explicitar la estructura de análisis que tiene este capítulo. Esto se realiza con el propósito de facilitar la comprensión de los lectores y evitar algunas confusiones que se pudiesen presentar durante la lectura.

La estructura de análisis será caso a caso. Es decir, se estudiará el desarrollo de los 4 estudiantes por separado. En primera instancia, se evaluará el desarrollo de los niveles de razonamientos de los objetos concretos de isometrías y matriz asociada, para posteriormente analizar el proceso de conceptualización del objeto general de transformación lineal. Posteriormente se vincularán ambos análisis, explicando cómo el desarrollo de los niveles de razonamiento de los objetos concretos ayuda o dificultan el desarrollo del objeto general.

Luego, se analizará qué elementos de la secuencia didáctica inciden en que el estudiante logre avanzar de nivel o no. Para cumplir este propósito se debe tener claro la estructura cronología de la intervención. Para facilitar la compresión de la última afirmación se presenta la Figura 4.1 y la Tabla 4.1, en donde se detalla la cronología del ciclo de aprendizaje.

Figura 4.1: Diagrama cronológico de la secuencia didáctica



Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.1: Características y orden cronológico de los momentos de evaluación

Tipo de evaluación	**Evaluación grupal o individual**	**Objeto Evaluado**	**Momento de la evaluación**	**Características del momento de evaluación**
Preguntas para guiar discusión (PGD1)	Grupal – Parejas	Transformación isométrica	Clase 1 – Actividad 3	Discusión en parejas luego de desarrollar la guía 2
Preguntas de Guía 2 (G2)	Individual	Transformación isométrica	Clase 2 – al comienzo de la clase	Respuestas individuales luego de desarrollar las actividades de la clase 1
Preguntas Guía 3 (G3)	Individual	Matriz asociada – Transformación lineal	Clase 3 – Al comienzo de la clase	Respuestas individuales luego de desarrollar las actividades de la clase 2.
Preguntas para guiar la discusión (PGD2)	Grupal	Transformación lineal (condiciones de suficiencia)	Clase 3 – actividad 7 y 8. Durante el desarrollo de la clase	Respuestas grupales a través de una presentación luego de generar una discusión grupal.
Preguntas Guía 4 (G4)	Individual	Matriz asociada- Transformación lineal	Clase 4 – Al comienzo de la clase 4	Respuestas individuales luego de desarrollar las actividades de las clases 2 y 3.
Preguntas Guía 5 (G5)	Individual	Transformación lineal	Clase 4 – Al finalizar la clase 4	Respuestas individuales luego de desarrollar las actividades de discusión de la clase 4.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.1 es posible apreciar una línea de tiempo donde se ordenan las actividades, evaluaciones y videos desarrollados clase a clase. Las acciones desarrolladas dentro de la clase se visualizan en la parte superior de la línea de tiempo, mientras las que se desarrollaron de manera individual por el estudiante se observan bajo la línea de tiempo. Cabe destacar que, debido al poco tiempo disponible para desarrollar algunas actividades, la actividad 6 no se logró ejecutar y se solicitó a los estudiantes que la intentaran realizar individualmente. No obstante, debido al diálogo establecido con los estudiantes durante la clase 4, estos informaron que no lograron efectuar la actividad.

En síntesis, en la Figura 4.1 y en la Tabla 4.1 se presentan en orden cronológico los momentos en los cuales los estudiantes responden a las consultas sobre el contenido desarrollado durante la secuencia. Además, se deja de manifiesto las actividades y conceptos previos desarrollados a la hora de evaluar cada objeto. Se espera que esto ayude a entender el orden y los motivos que están detrás de cada momento de evaluación.

A continuación, se procede a presentar los resultados y análisis obtenidos para cada estudiante.

4.1 ESTUDIANTE 1

4.1.1 Transformación isométrica

Para el análisis del objeto concreto de transformación isométrica se tomaron en consideración las respuestas obtenidas durante la actividad 3 (PGD1) y la guía 2 (G2)[13]. Si bien las preguntas de las guías y actividades fueron explicitadas en el capítulo anterior, se tiene la intención de facilitar en el mayor grado posible la comprensión del lector, es por este motivo que se vuelven a exhibir de forma resumida y codificada. Esta situación se repetirá para cada sección del análisis.

- *PGD1.2: ¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?*
- *PGD1.4: ¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?*
- *G2.1: ¿El apartado "1.d" puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta.*

Con esto claro, se proceden a exhibir las tablas de análisis de cada pregunta referida a la noción de transformación isométrica.

[13] La codificación del material es presentada en la Tabla 4.1

Tabla 4.2: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta PGD1.2

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Son cambios de posición de una figura determinada, que no alteran la forma ni el tamaño de la figura original	Son cambios de posición de una figura determinada	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1
	que no alteran la forma ni el tamaño de la figura original	Se señalan las condiciones necesarias y suficientes	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.3: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta PGD1.4

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Las características de la trasformación de una figura del plano al realizar la isometría no varían las dimensiones ni el área de esta figura, la figura inicial y la final son semejantes	isometría no varían las dimensiones ni el área de esta figura	Describen objetos por sus propiedades	D	Nivel 2
	la figura inicial y la final son semejantes	Describen objetos por sus propiedades, pero no logran relacionar unas propiedades con otras	D	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

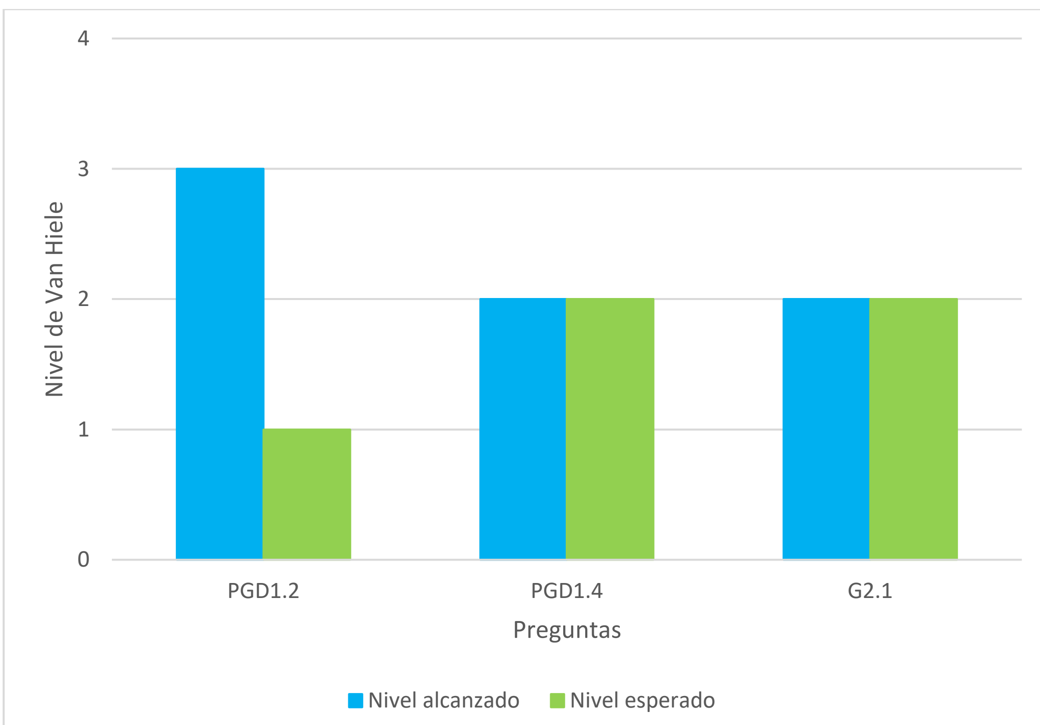
Tabla 4.4: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G2.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
No, ya que en ese ejercicio se aumentó la medida de la figura y la condición para que se cumpla la isometría es que se conserve la medida.	y la condición para que se cumpla la isometría es que se conserve la medida	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Para poder ordenar y resumir la información analizada en las tablas anteriores, se presenta la Figura 4.2, en donde se puede apreciar el desglose por pregunta de los niveles alcanzado por el estudiante 1 para el objeto de transformación isométrica.

Figura 4.2: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 1 con relación al objeto de transformación isométrica



Fuente: Elaboración propia

La primera situación que llama la atención es que para la pregunta PGD1.2 el estudiante alcanza el nivel 3, siendo que la pregunta apunta al nivel 1. Esto se debe a que el estudiante en vez de responder la consulta “¿Qué hace una isometría?”, entrega una definición del objeto. Esta situación no debe resultar extraña, debido a que la noción de transformación isométrica es un objeto trabajado anteriormente durante su proceso de escolarización, por lo cual es una idea ya conceptualizada. A esta situación se le debe agregar que al comienzo de la intervención se les entregó a los alumnos la guía 1, la cual consistía en un resumen conceptual del objeto de isometría y en donde se mencionaba una definición de este. Ambas situaciones ayudan a explicar el suceso.

Para las otras 2 consultas (PGD1.4 y G2.1) se observa que el estudiante es capaz de percibir los componentes de una transformación isométrica, y a la vez, describir el objeto por sus propiedades. Esto conlleva a que para dichas consultas el estudiante logre alcanzar rápidamente el nivel al cual se apuntaba.

En síntesis, el estudiante 1 alcanza el nivel 3, en lo que a transformaciones isométricas respecta, pues, pues como plantea Vargas y Araya (2013) este no solo es capaz de mencionar y describir al objeto por sus propiedades, sino que logra generar una definición de este.

4.1.2 Matriz asociada

En lo que respecta al objeto de matriz asociada se analizó sólo una pregunta, pero con la particularidad que esta consulta fue realizada en 2 momentos de la secuencia. La pregunta analizada fue:

- *G3.3 y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal.*

La clasificación de las respuestas según los niveles de Van Hiele quedan expresadas a partir de la Tabla 4.5 y 4.6

Tabla 4.5: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Son operaciones lineales a la matriz canónica, el cual modifica la dirección, sentido y o módulo de un vector	son operaciones lineales a la matriz canónica	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2
	el cual modifica la dirección, sentido y o módulo de un vector	Se señalan condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir – De una manera informal puede describir el objeto por sus propiedades	F-D	Nivel 2-3

Fuente: Elaboración Propia

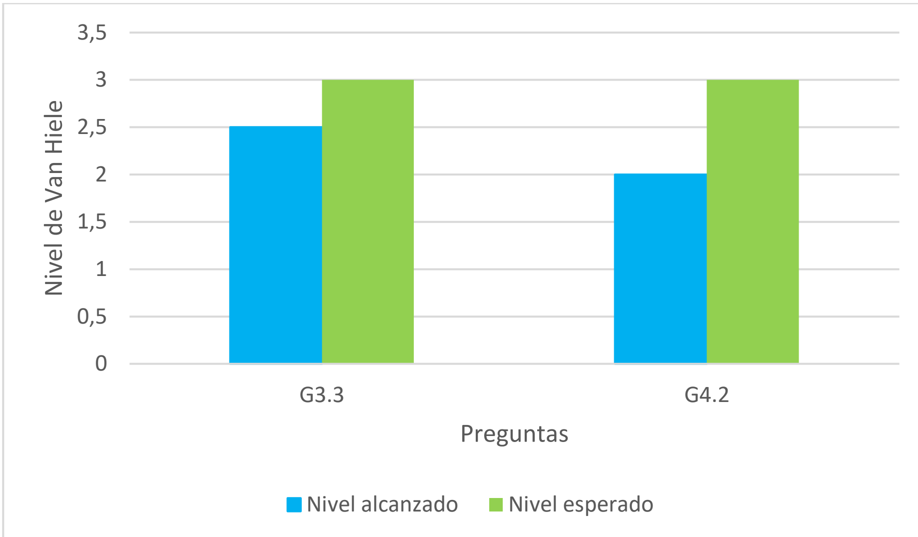
Tabla 4.6: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G4.2

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Es una matriz que modifica la dimensión inicial de un vector dado	Es una matriz	Se describe asemejándola a elementos familiares	B	Nivel 1
	que modifica la dimensión inicial de un vector dado	De una manera informal puede describir el objeto por sus propiedades	D	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Para poder estudiar los resultados obtenidos por el estudiante 1 con relación al objeto de matriz asociada a una transformación lineal, se presenta la Figura 4.3

Figura 4.3: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 1 con relación al objeto de matriz asociada



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.3 se puede apreciar los niveles de Van Hiele que obtiene el estudiante 1 a la hora de referirse al objeto de matriz asociada. Al estar consultado por una definición, los niveles a los cuales apuntan las preguntas son el nivel 3. Para el caso de la consulta G3.3 la definición se acerca a la noción de operador lineal, pues el estudiante la define como “operaciones lineales a la matriz canónica”, además menciona que dicha matriz modifica la dirección, sentido y o módulo de un vector. No obstante, las relaciones que establece son en función a la noción grafica de vector y no a su versión abstracta como elemento de un espacio vectorial. Es por estos motivos que el nivel que alcanza el estudiante es un nivel de transición entre el análisis y la clasificación, pues se acerca a una definición formal, pero aún no logra visualizar la generalidad del concepto (Fuys et al.,1998), pues su razonamiento sigue basándose en la manipulación visual del objeto (Vargas y Araya, 2013).

Esta realidad se ve ratificada a partir de los resultados visualizados en la pregunta G4.2. En dicha consulta, el estudiante define el concepto de matriz asociada como matriz, es decir, deja de lado la noción de operador lineal. Además, si bien menciona la idea de modificación de dimensión, esta sigue siendo superficial. Es decir, el estudiante 1 decrece en lo que se refiere a definición formal del objeto, aunque aún sigue reconociendo propiedades y componentes (Jaime Pastor, 1993). Por estos motivos es que en lo que respecta a la pregunta G4.2 el estudiante 1 logra alcanzar el nivel 2.

Una posible circunstancia que pudiese explicar el fenómeno de decrecimiento en el nivel de razonamiento es que al no comprender el propósito de que la misma pregunta se efectuase en 2 momentos distintos, el estudiante quisiese generar una nueva respuesta con la finalidad de no repetir la primera de ellas. Este argumento se sustenta a partir de una consulta que realizó el estudiante 1 durante la sesión 3, en donde señaló que había ciertas preguntas que ya había respondido anteriormente y no entendía el motivo de que se le volvían a consultar.

En resumen, en lo que a matriz asociada respecte el estudiante 1 puede ser clasificado en un nivel de análisis (nivel 2), pues según Vargas y Araya (2013) en general reconoce propiedades, pero no logra establecer las relaciones formales entre dichas propiedades.

4.1.3 Transformación lineal

Para estudiar el proceso de conceptualización del objeto de transformación lineal se tomaron en consideración preguntas de las guías 3,4, 5 y PGD2. Las cuales se explicitan con sus respectivos códigos a continuación

- *G3.3 Y G5.3: Define con tus palabras el concepto de transformación lineal*
- *G4.1: ¿Cuáles son las características de una transformación lineal? Menciona los elementos que la definen*
- *G5.1: Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.*
- *PGD2.1 y PGD2.2: ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático.*

Cabe destacar que las preguntas PGD2.1 Y PGD2.2 se respondieron de formal grupal, en donde el grupo estaba conformado por los estudiantes 1,2,3 y 4. Es por este motivo que, las tablas referidas a esa consulta son idénticas en los análisis de los 4 estudiantes. Además, para comprender bien la pregunta se debe tener en consideración el contexto explicitado en la Tabla 3.10.

Con estas consideraciones se procede a explicitar los análisis de los niveles de razonamiento de Van Hiele para cada pregunta, los cuales quedan resumidos a partir de la Tabla 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11.

Tabla 4.7: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características de nivel de razonamiento**	**Nivel alcanzado**
La transformación lineal es una función que transforma un espacio vectorial en otro.	La transformación lineal es una función	Se perciben los componentes y propiedades	C	Nivel 2
	que transforma un espacio vectorial en otro	De una manera informal se describe la figura por sus propiedades	D	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.8: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta PGD2.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características de nivel de razonamiento**	**Nivel alcanzado**
La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar.	La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.9: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G4.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Visualmente que si tengo una función lineal al aplicarle la transformación esta tiene que seguir siendo lineal, además el origen tiene que ser el mismo. La transformación lineal es un espacio vectorial conserva la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.	Visualmente que si tengo una función lineal al aplicarle la transformación esta tiene que seguir siendo lineal	Se perciben por su apariencia física	B	Nivel 1
	además, el origen tiene que ser el mismo	Se perciben propiedades	C	Nivel 2
	La transformación lineal es un espacio vectorial conserva la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.	Se señalan las condiciones necesarias	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.10: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G5.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
La relación que hay es que conserven la suma, el producto de un escalar por un vector y que el origen sea el mismo.	La relación que hay es que conserven la suma	Se señalan condiciones necesarias	F	Nivel 3
	el producto de un escalar por un vector	Se señalan condiciones necesarias	F	Nivel 3
	y que el origen sea el mismo.	Se señalan condiciones necesarias	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

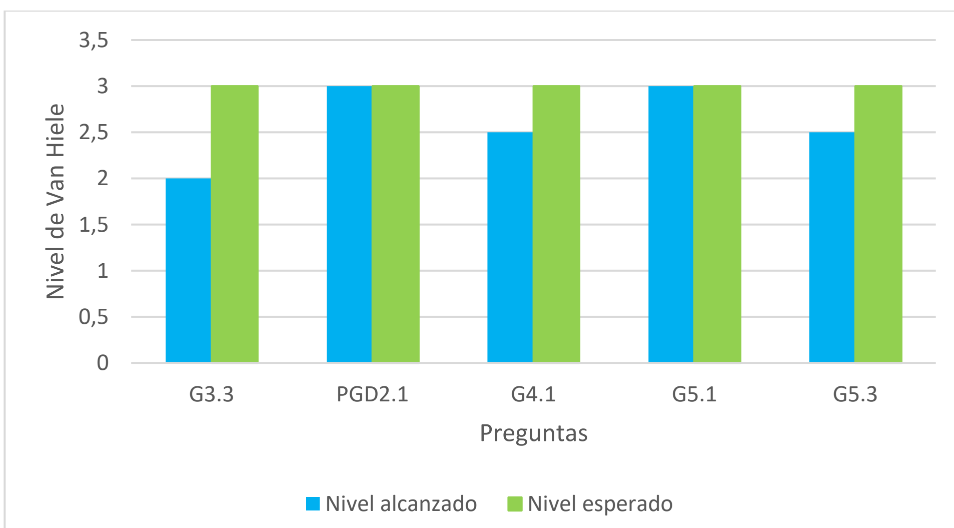
Tabla 4.11: Análisis de la respuesta del estudiante 1 para la pregunta G5.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Una transformación lineal es una función entre espacios vectoriales con el objetivo de transformar un espacio vectorial en otro	Una transformación lineal es una función	Se describe el objeto de una manera formal	F	Nivel 3
	entre espacios vectoriales	Se perciben componentes- Se diferencia el objeto general del concreto	C – E	Nivel 2
	con el objetivo de transformar un espacio vectorial en otro	Se perciben propiedades	D	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

El resumen de los análisis realizados en las tablas anteriores se puede observar de mejor manera a partir de la Figura 4.4.

Figura 4.4: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 1 con relación al objeto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Para abordar de manera detallada y ordenada los resultados observados en la Figura 4.4, se deben asociar las preguntas en 2 grupos. El primer grupo corresponde a las preguntas PGD2.1, PG4.1 y PG5.1, mientras el segundo se conforma por las preguntas G3.3 Y G5.5. las agrupaciones se definen en función a las características intrinsecas de las consultas, pues el primer grupo hace referencias a las propiedades que definen a una transformación lineal, mientras el segundo, busca que los estudiantes elaboren una definición del concepto.

En general, para el primer grupo de consultas se observa que el estudiante 1 posee una buena comprensión de las condiciones de suficiencia que debe poseer una transformación, refiriéndose a conservación de la suma y la conservación de la multiplicación por escalar de una manera formal, lo que conlleva a que este alcance el nivel 3 en 2 de las preguntas. La consulta que no alcanza el nivel de 3 y es clasificada en un nivel de transición entre 2 y 3 es la pregunta G4.1, en la cual se observan algunos errores de coherencia en la redacción de la respuesta. No obstante, es claro que la estudiante 1 reconoce las condiciones necesarias y suficientes para que una transformación sea considerara lineal (Fuys et al., 1998). Es más, en la Tabla 4.6 se observa que este también reconoce las condiciones visuales de una transformación lineal, pues habla de transformar líneas en líneas y mantener el origen fijo, condiciones que si bien son de nivel inferior no siempre son reconocidas por los estudiantes (Maturana y Parraguez, 2013).

En lo que respecta al segundo grupo de consultas, el cual busca que el estudiante 1 elabore definiciones del objeto evaluado. No se observa un desarrollo considerable, ya que a la hora de responder la pregunta G3.3, el estudiante lo hace de una forma formal pero resumida, pues define a la transformación lineal como una función entre 2 espacios vectoriales. Es decir, la respuesta presenta formalidad matemática, pero no se explicitan las condiciones necesarias y suficientes. Mientras que, cuando el estudiante aborda la consulta G5.3 utiliza el mismo formato de respuesta, definiendo el objeto como una función, pero no menciona las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal.

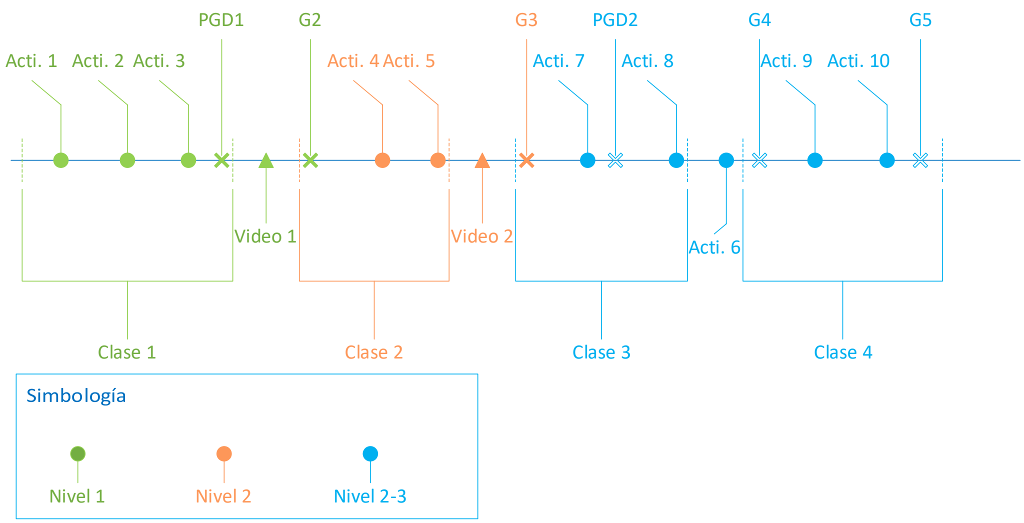
Esta última realidad, no quiere decir que el estudiante no sea consciente de las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal, pues como se señaló anteriormente, éste las menciona de manera formal y detallada en otras consultas. No obstante, el concepto aún no madura al nivel de clasificación, en donde a la hora de construir una definición sea necesario explicitar dichas condiciones.

En resumen, el estudiante 1 alcanza un estado de transición entre en nivel de análisis (nivel 2) y clasificación (nivel 3), ya que reconoce las condiciones necesarias y suficientes, pero no es capaz de englobar dichas condiciones en una definición formal (Fuys et al., 1998).

4.1.4 Influencia de las actividades en el proceso de conceptualización del estudiante 1

Lo interesante en este análisis es poder observar el proceso de conceptualización del objeto general -transformación lineal-, ya que este es el pilar fundamental de la estructura de la secuencia didáctica. La Figura 4.5 sintetiza el desarrollo del proceso de conceptualización del estudiante 1 cuando aborda la noción de transformación lineal.

Figura 4.5: Diagrama cronológico del desarrollo de los niveles de razonamiento del estudiante 1 cuando aborda el concepto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.5 se puede apreciar cómo las 2 primeras clases cumplen sus objetivos, pues el estudiante transita en el nivel de visualización y análisis durante las clases 1 y 2 respectivamente.

El primer paso, que se da para formar el nivel de visualización es la actividad 1 y 2, en las cuales se observó el comportamiento visual de las transformaciones lineales en el plano y en el espacio, posteriormente esta situación se afianzó durante la actividad 3, en donde a partir de la interacción entre pares se logran consolidar los fenómenos observados. El punto de inflexión se genera al inicio de la clase 2, en donde se evalúa en trabajo realizado en la clase anterior, en este punto el estudiante es capaz de diferenciar -de una manera visual- correctamente la noción de isometría con el de transformación lineal, lo que lleva a concluir que él ya desarrolló el primer nivel de razonamiento de Van Hiele.

En lo que se refiere a nivel de análisis, el desarrollo de la guía 3 (actividad 4) y su posterior discusión (actividad 5) le entregan al estudiante 1 la posibilidad de reconocer componentes y propiedades de una transformación lineal, lo que conlleva a que este logre alcanzar el nivel de análisis. Esta realidad se puede corroborar a partir de los resultados observados en la Tabla 4.5, en la cual el estudiante entrega su primera definición del concepto de transformación lineal, aludiendo a sus componentes y algunas propiedades.

Durante las siguientes 2 clases el estudiante intenta alcanzar el nivel de clasificación, aunque no lo logra conseguirlo, pues no es capaz de definir de una manera formal el concepto y al mismo tiempo aludir a las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal. No obstante, sí se observa que es capaz de mencionar dichas condiciones cuando se le consulta de forma directa por ellas. En el punto de evaluación G4, el estudiante ya es capaz de mencionar las condiciones necesarias. Esto se debe al trabajo realizado durante la clase anterior (clase 3), pues al realizar las actividades 7 y 8 -PGD2 y posterior discusión-, el estudiante 1 logra acercarse a las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación lineal.

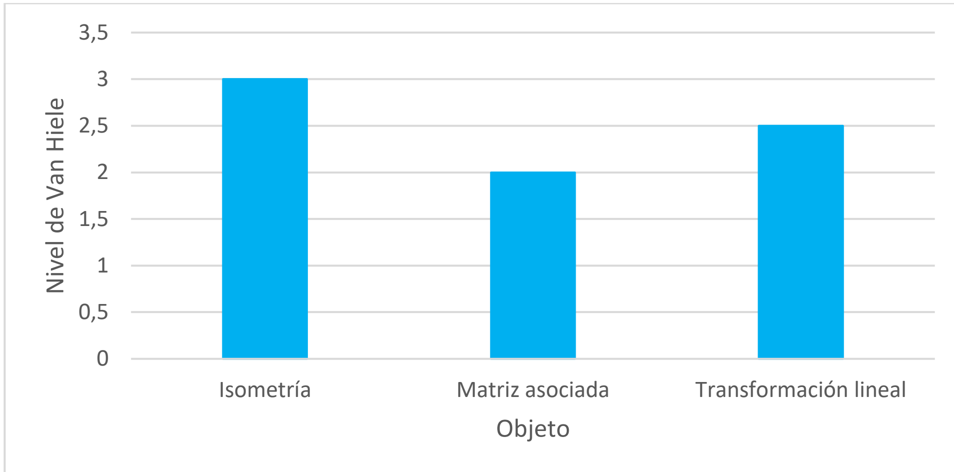
Las actividades 9 y 10 no lograron que el estudiante definiera correctamente la noción de transformación lineal a través del concepto de función. Por lo cual, su nivel de razonamiento al finalizar la secuencia fue clasificado como una transición entre el nivel de clasificación y el nivel de análisis.

4.1.5 Capacidad del estudiante 1 para diferenciar y transitar entre objetos.

Con la finalidad de profundizar los resultados presentados en los apartados previos, se desea estudiar cómo el estudiante 1 es capaz de transitar entre los distintos objetos matemáticos que aborda la secuencia. Específicamente se analizarán las transiciones que realiza el estudiante entre los objetos concretos y el objeto general. Es decir, se evaluará cómo el estudiante diferencia los conceptos de isometría con el de transformación lineal, y el de matriz asociada con el de transformación lineal.

Un primer elemento que se debe tener claro para comprender el proceso de conceptualización y diferenciación que realiza el estudiante 1, son los niveles alcanzados por él con relación a los 3 objetos abordaos en la secuencia. La Figura 4.6 resume esta situación.

Figura 4.6: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 1 al finalizar la secuencia



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.6 se logra apreciar que en lo que respecta al objeto de transformación lineal, el estudiante 1 logra alcanzar un nivel de transición entre análisis y clasificación, es decir, reconoce las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir el objeto, pero aún no es capaz de expresarlas de una manera formal. Mientras que, para las nociones de isometría y matriz asociada, este logra llegar al nivel 3 y 2 respectivamente.

➢ Transición entre isometría y transformación lineal.

Para el estudio del fenómeno de transición entre isometría y transformación lineal se consideraron como marco inicial las preguntas PGD1.3, G2.2 y G3.2. Aunque dependiendo de las respuestas que haya entregado el estudiante en alguna de las otras consultas, estas se pudiesen agregar al análisis. A continuación, se presentan las preguntan mencionadas anteriormente.

- *PGD1.3: ¿Puede que una transformación lineal no sea una isometría? Justifica tu respuesta.*
- *G2.2: ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu respuesta.*
- *G3.2: ¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.*

Para el estudio de las respuestas, se utilizará una metodología similar a las presentada para estructurar los análisis de Van Hiele, pero esta enfatizará en la capacidad de diferenciación y no en el nivel de razonamiento alcanzado. En las Tabla 4.12, 4.13 y 4.14 es posible apreciar cómo el estudiante transita entre la noción de isometría y transformación lineal.

Tabla 4.12: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta PGD1.3

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Puede que no sea isometría cuando esta diagonaliza la recta.	Puede que no sea isometría	El estudiante es capaz de comprender que existe una diferencia CONDICIONAL entre el objeto general y el objeto concreto
	cuando esta diagonaliza la recta.	El argumento que entrega para establecer la diferencia es erróneo. Aún no es consciente que el objeto concreto es parte del objeto general pues no es capaz de abstraer las propiedades y posteriores diferencias entre ambos

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.13: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta G2.2

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Como en este caso estamos viendo vectores, y se sabe que los vectores se pueden escribir matricialmente y las transformaciones isométricas ocupa estos dos.	Como en este caso estamos viendo vectores, y se sabe que los vectores se pueden escribir matricialmente	El estudiante es consciente de la transición semiótica entre vectores y matrices
	y las transformaciones isométricas ocupa estos dos.	Relaciona vectores y matrices con el concepto de transformación isométrica. La cual es una transformación lineal.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.14: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta G3.2

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Que las transformaciones isométricas aparte de escribirse de manera vectorial se pueden calcular de manera matricial.	Que las transformaciones isométricas aparte de escribirse de manera vectorial	El estudiante es capaz de reconocer que un componente de las transformaciones isométricas son los vectores. Situación que puede ser considerada como el primer elemento para posteriormente generar relaciones más profundas, como por ejemplo con el objeto de transformación lineal
	se pueden calcular de manera matricial.	El estudiante es consciente de que se puede transitar de la escritura vectorial y matricial cuando se aborda el objeto de isometría.

Fuente: Elaboración Propia

De manera general, es posible concluir que el estudiante 1 es consciente de la diferencia que existente entre los conceptos de transformación isométrica y transformación lineal, pues como se observa en la Tabla 4.12, éste responde correctamente a la pregunta que se refiere a esta situación. No obstante, aún no es capaz de detallar claramente dichas las diferencias. Esto tiene sentido pues el estudiante, en este punto de la secuencia sólo clasifica el objeto de isometría y comprende a las transformaciones lineales de manera netamente visual, lo cual no le permite discriminar detalladamente ambas nociones.

También, en las respuestas del estudiante se observan los primeros atisbos de comprensión del objeto de matriz asociada. Pues en sus respuestas se menciona, de manera implícita, que la matriz asociada ayuda a transitar entre distintas representaciones semióticas de las transformaciones lineales.

Una consecuencia importante de la capacidad de transitar -de manera visual- entre los objetos de isometría y transformación lineal, es que el estudiante alcanza rápidamente el primer nivel de Van Hiele, pues como se percibe en la Figura 4.5, sólo bastó una clase para estructurar de manera solida en nivel de visualización.

En síntesis, la clasificación del objeto concreto facilita la comprensión -en este caso la visualización- del objeto general.

- Matriz asociada y transformación lineal

Para estructurar el estudio del proceso de transición que realiza el estudiante 1 entre los objetos de matriz asociada y transformación lineal se consideraron las preguntas G3.1, G3.4 y G4.2, las cuales se proceden a explicitar.

- *G3.1: ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu repuesta.*
- *G3.4 Y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal*

Los análisis se presentan en función a los resultados observados en las Tabla 4.15, 4.16 y 4.17.

Tabla 4.15: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta G3.4

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Se relaciona con la materia de matrices y vectores, ya que para hacer dichas transformaciones se puede calcular usando matrices como dije anteriormente	Se relaciona con la materia de matrices y vectores	El estudiante logra establecer un vínculo entre el objeto concreto y la noción de vectores
	ya que para hacer dichas transformaciones se puede calcular usando matrices como dije anteriormente	El estudiante vincula el objeto general con el objeto concreto de matriz asociada. Esto conlleva a que la transición entre las distintas representaciones semióticas del objeto general tenga un sentido concreto para el estudiante, pues como él menciona, ambas formas se pueden usar para calcular transformaciones.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.16: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta G3.1

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Son operaciones lineales a la matriz canónica, el cual modifica la dirección, sentido y o módulo de un vector	son operaciones lineales a la matriz canónica,	El estudiante establece un vínculo entre la noción de matriz asociada y base, aunque este es difuso y poco claro. De forma paralela hace referencia a que el objeto concreto puede ser definido como operaciones lineales, situación que se acerca a la noción de operador lineal que posee la matriz asociada.
	el cual modifica la dirección, sentido y o módulo de un vector	El estudiante es capaz de comprender que la matriz asociada transforma un vector inicial en un vector final. En este punto su descripción se basa en características visuales, pues habla de dirección sentido y modulo.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.17: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 1 en función a la respuesta de la pregunta G4.2

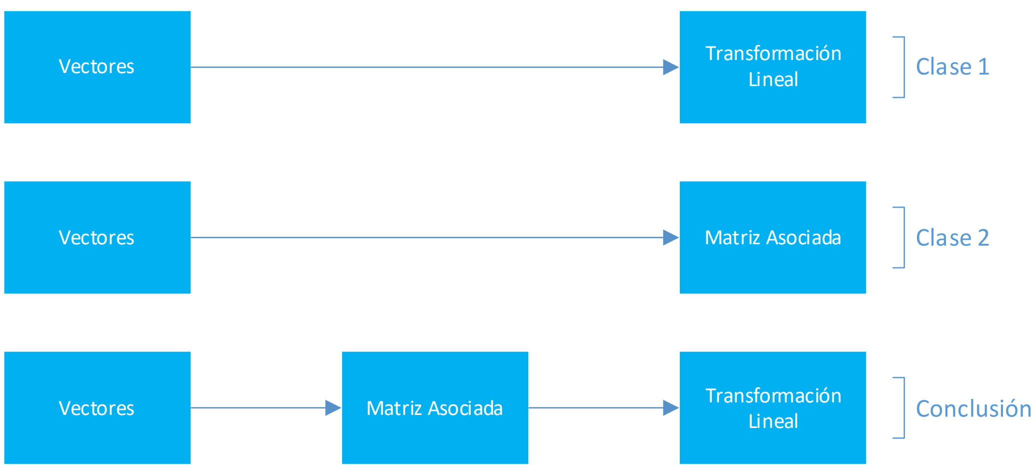
Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Es una matriz que modifica la dimensión inicial de un vector dado	Es una matriz que modifica la dimensión inicial de un vector dado	El estudiante vincula la noción ya construida de matriz asociada con el de dimensión, en este punto el estudiante comprende que la transformación lineal no solo transforma vectores en el mismo espacio vectorial, sino que esta puede ocupar espacios vectoriales con dimensiones distintas

Fuente: Elaboración Propia

En función a los resultados observados en las tablas anteriores, se puede señalar que el estudiante vincula el objeto de matriz asociada con variados conceptos del curso del álgebra lineal. Por ejemplo, en la Tabla 4.16 se percibe cómo el estudiante 1 relaciona de forma débil las nociones de matriz asociada y base -usa el término canónica- de un espacio vectorial. Además, en la Tabla 4.17, vincula a la matriz asociada con el concepto de dimensión. En este punto de la secuencia el alumno ya percibe la noción de matriz asociada de forma más abstracta, pues al mencionar que la matriz puede cambiar la dimensión de los espacios vectoriales, deja de pensar en la transformación como un endomorfismo -como lo había trabajado hasta la clase 2- y amplia la noción de aplicación lineal. No obstante, no es posible concluir que el estudiante vincule el objeto de transformación lineal con otro tipo de espacios vectoriales (polinomios, matrices, funciones, u otros) que no sean vectores.

Una transición importante que adquiere el estudiante durante el desarrollo de la secuencia es la capacidad de relacionar el concepto de vectores con el de matriz asociada (ver Tabla 4.15). A partir de este primer vínculo, el alumno genera un razonamiento transitivo para terminar relacionando el objeto concreto -matriz asociada- con el objeto general. Dicho razonamiento se explica debido a que durante la clase 1 el estudiante vincula el concepto de vectores con el de transformación lineal, posteriormente, al desarrollar la clase 2 se relaciona vectores con el de matriz asociada, lo que lo lleva a concluir que es posible relacionar la noción de matriz asociada con la de transformación lineal. Todo lo anterior queda resumido a partir de la Figura 4.7.

Figura 4.7: Relaciones entre objetos matemáticos que establece el estudiante 1, durante el proceso de conceptualización de la matriz asociada a una transformación



Fuente: Elaboración propia

El proceso de razonamiento observado en la Figura 4.7 es relevante, ya que a partir de este el alumno puede entregarles sentido a las transiciones realizadas entre las distintas representaciones semióticas del curso de álgebra lineal, sobre todo a la transición vector-matriz, lo cual ayudará a disminuir las dificultades asociadas a la comprensión de los contenidos (Dorier et al., 2000; Dorier & Sierpinska, 2001).

4.2 ESTUDIANTE 2

4.2.1 Transformación isométrica

Al igual que el estudiante 1, las preguntas para analizar el objeto de transformación isométrica se obtuvieron a partir del instrumento PGD1 y la guía 2. Para facilitar la comprensión de la lectura de los significados de los códigos, se vuelven a presentar las preguntas utilizadas para evaluar el objeto de transformación lineal. Dicha situación se repetirá para los demás estudiantes.

- *PGD1.2: ¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?*
- *PGD1.4: ¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?*
- *G2.1: ¿El apartado “1.d” puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta*

El análisis de Van Hiele del objeto de transformación isométrica para el estudiante 2 queda resumido a partir de las Tabla 4.18, 4.13 y 4.14.

Tabla 4.18: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta PGD1.2

Respuestas Textual (PG1.2-B)	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Son cambios de posición de una figura determinada, que no alteran la forma ni el tamaño de la figura original	Son cambios de posición de una figura determinada	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1
	que no alteran la forma ni el tamaño de la figura original	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.19: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta PGD1.4

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Las características de la trasformación de una figura del plano al realizar la isometría no varían las dimensiones ni el área de esta figura, la figura inicial y la final son semejantes	al realizar la isometría no varían las dimensiones ni el área de esta figura	Describen al objeto por sus propiedades	D	Nivel 2
	la figura inicial y la final son semejantes	Describe el objeto por sus propiedades, pero no logra relacionarlas	D	Nivel 2

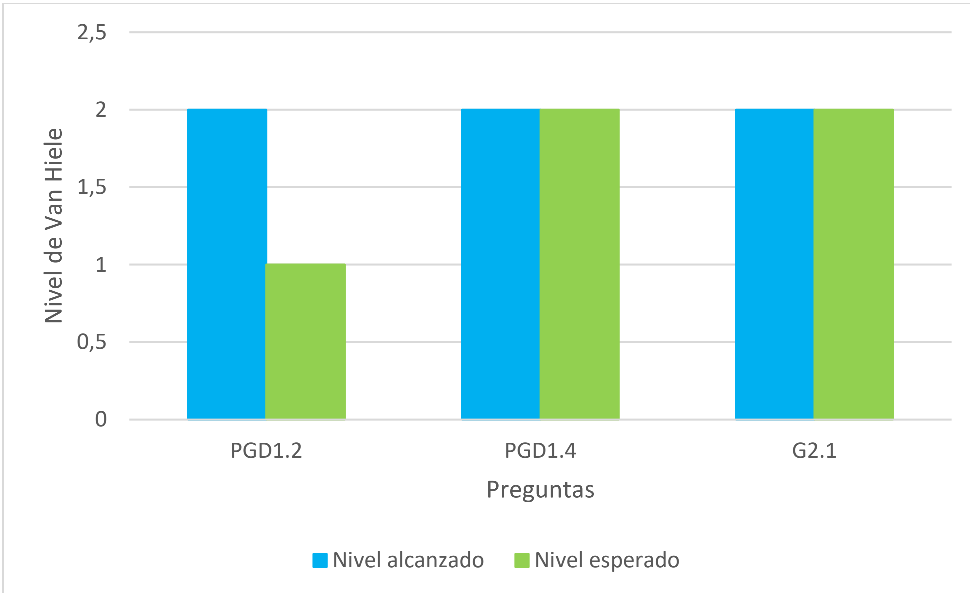
Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.20: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G2.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
No puede considerarse una isometría, porque el tamaño de la figura cambia cuando la reflejamos	porque el tamaño de la figura cambia cuando la reflejamos	Se describe el objeto por su apariencia física – Se perciben componentes y propiedades	A-C	Nivel 1-2

Fuente: Elaboración Propia

Figura 4.8: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 2 en relación con el objeto de transformación isométrica



Fuente: Elaboración propia

Como muestra la figura 4.8, al igual que el estudiante 1, el estudiante 2 alcanza un nivel superior al planificado en la pregunta PGD1.2. Si bien en este caso no se presenta una definición del concepto, sí se observan ciertas descripciones relacionadas con las condiciones y propiedades de una transformación isométrica, lo que lleva a clasificar al estudiante en un nivel de análisis. Los argumentos entregados para explicar esta situación son homólogos a los mencionados en el análisis del estudiante 1.

Para el caso de la pregunta PGD1.4, es estudiante desarrolla una respuesta que puede ser clasificada dentro del nivel de análisis, pues describe al objeto por sus propiedades, pero no logra abordarlo de una manera formal, ya que utiliza el termino de semejanza14 y no de congruencia. Afirmación que no permite clasificarlo en el nivel 3.

Para el caso de la consulta G2.1, el alumno alcanza un nivel de análisis, pues reconoce que la transformación consultada no es una isometría y en su argumento se observan nociones visuales y analíticas. Estas últimas expresan, de manera implícita, las condiciones de suficiencia de una

14 Hay que recordar que si bien cuando a una figura se le aplica una transformación isométrica esta es semejante (específicamente congruente), que se está hablando de figuras semejantes, no necesariamente quiere decir que estas estén bajo una transformación isométrica.

isometría, pues señala que al cambiar la medida de la figura la transformación deja de ser una isometría.

A modo resumen, el estudiante 2 logra alcanzar un nivel de análisis en lo que respecta al objeto de isometría (Vargas y Araya, 2013; Fuys et al., 1998; Labra, 2019). No obstante, es importante destacar que durante el desarrollo de la secuencia no se aludió directamente a nivel de clasificación de isometría, por lo cual existe la posibilidad que el estudiante haya podido alcanzar el nivel de clasificación, sin que este último haya sido evaluado.

4.2.2 Matriz asociada

En lo que se refiere al objeto de matriz asociada, las preguntas analizadas fueron las mismas que para el estudiante 1. Las cuales se explicitan y codifican a continuación

- *G3.3 y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal*

El análisis de las respuestas según los niveles de Van Hiele quedan expresadas a partir de la Tabla 4.21 y 4.22

Tabla 4.21: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
A través de la matriz asociada puedo hacer un cambio en el vector (dirección, sentido, etc.) y con esto puede conseguir una transformación lineal	a través de la matriz asociada puedo hacer un cambio en el vector (dirección, sentido, etc.)	Descripciones Visuales – De una manera informal puede describir el objeto por sus propiedades	B-D	Nivel 1-2
	y con esto puede conseguir una transformación lineal	Se diferencia el objeto general del concreto, pero no explicita correctamente las diferencias	E	Nivel 2

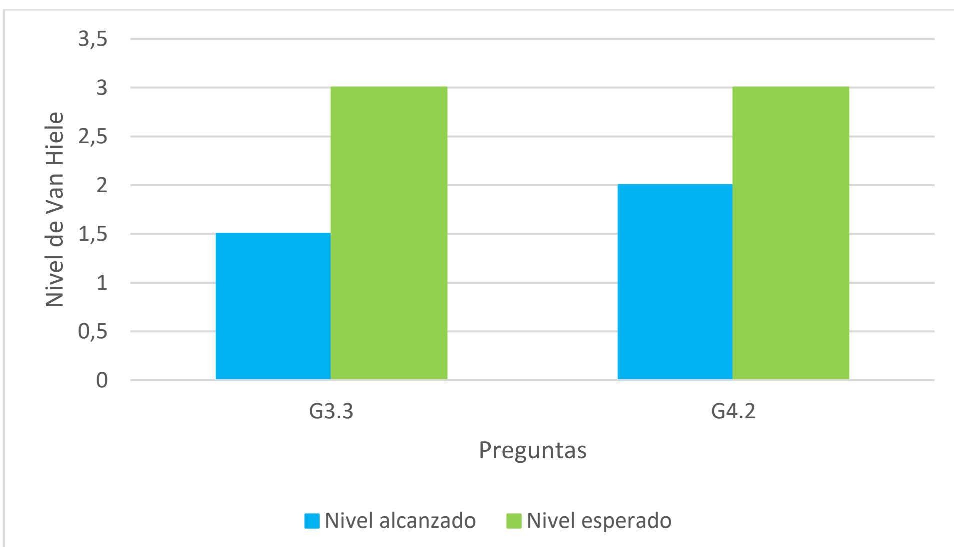
Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.22: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G4.2

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
La matriz asociada es aquella matriz con la que se puede hacer la transformación lineal, o sea, transformar un vector v en un vector w por una multiplicación de v con la matriz asociada.	La matriz asociada es aquella matriz con la que se puede hacer la transformación lineal	Se diferencia el objeto general del concreto	E	Nivel 2
	o sea, transformar un vector v en un vector w	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	por una multiplicación de v con la matriz asociada.	Se perciben componentes	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Figura 4.9: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 2 en relación con el objeto de matriz asociada



Fuente: Elaboración propia

La Figura 4.9 busca sintetizar los análisis desarrollados en la Tabla 4.21 y 4.22. Para la consulta G3.3 el estudiante no logra redactar una definición, más bien describe el objeto por sus propiedades visuales (Duval, 2004; Vargas y Araya, 2013). Al mismo tiempo hace referencia a la conexión existente entre la matriz asociada y la transformación lineal, situación que no es solamente visual, sino que requiere de un proceso de análisis. Es por estos motivos que para la pregunta G3.3 el estudiante 2 es clasificado en un nivel de transición entre el nivel de visualización y análisis.

En lo que respecta a la pregunta G4.2, el estudiante 2 logra redactar una definición, pero esta no es de carácter formal, pues señala “la matriz asociada es aquella matriz…”, es decir define un término utilizando el mismo término. Mas adelante en su respuesta, se observan que es capaz de identificar ciertos componentes del objeto matemático, ya que aborda la idea de transformar un vector v en un vector w a través de la multiplicación de matrices. Debido a esto es posible clasificar la respuesta del estudiante 2 en un nivel de análisis.

En síntesis, y considerando ambas respuestas, se puede establecer que el estudiante 2 logra conceptualizar el objeto de matriz asociada hasta un nivel de análisis, pues reconoce sus componentes (Jaime Pastor, 1993; Labra, 2019) .

4.2.3 Transformación lineal

Al igual que el estudiante 1, las preguntas utilizadas para estructurar el estudio fueron:

- *G3.3 Y G5.3: Define con tus palabras el concepto de transformación lineal*
- *G4.1: ¿Cuáles son las características de una transformación lineal? Menciona los elementos que la definen*
- *G5.1: Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.*
- *PGD2.1 y PGD2.2: ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático.*

Los análisis de Van Hiele referidos al objeto de transformación lineal para el estudiante 2 quedan explicitados a partir de las Tabla 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 y 4.27.

Tabla 4.23: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual (pregunta A en guía 3)	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Transformación de vectores por rotación o reflexión con el origen fijo y manteniendo su forma vectorial	Transformación de vectores por rotación o reflexión	Se describen por su apariencia física	B	Nivel 1
	con el origen fijo	Se describen por su apariencia física	B	Nivel 1
	y manteniendo su forma vectorial	Se describen por su apariencia física	B	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.24: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta PGD2.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características de nivel de razonamiento	Nivel alcanzado
La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar.	La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.25: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G4.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Una transformación lineal tiene que preservar la suma y preservar la multiplicación. Tiene dos espacios vectoriales (dominio y condominio) y una función que va entre esos dos espacios.	Una transformación lineal tiene que preservar la suma y preservar la multiplicación	Se perciben propiedades necesarias y suficientes	F	Nivel 3
	Tiene dos espacios vectoriales (dominio y condominio) y una función que va entre esos dos espacios.	Se perciben componentes	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.26: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G5.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Las condiciones de linealidad se dan por las condiciones de espacios vectoriales, ya que las condiciones de linealidad preservan las operaciones de suma y multiplicación que se presentan en las condiciones de espacios vectoriales	Las condiciones de linealidad se dan por las condiciones de espacios vectoriales	Se relaciona el objeto general con el concreto	E	Nivel 2
	ya que las condiciones de linealidad preservan las operaciones de suma y multiplicación que se presentan en las condiciones de espacios vectoriales	Se señalan las condiciones necesarias y suficientes	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

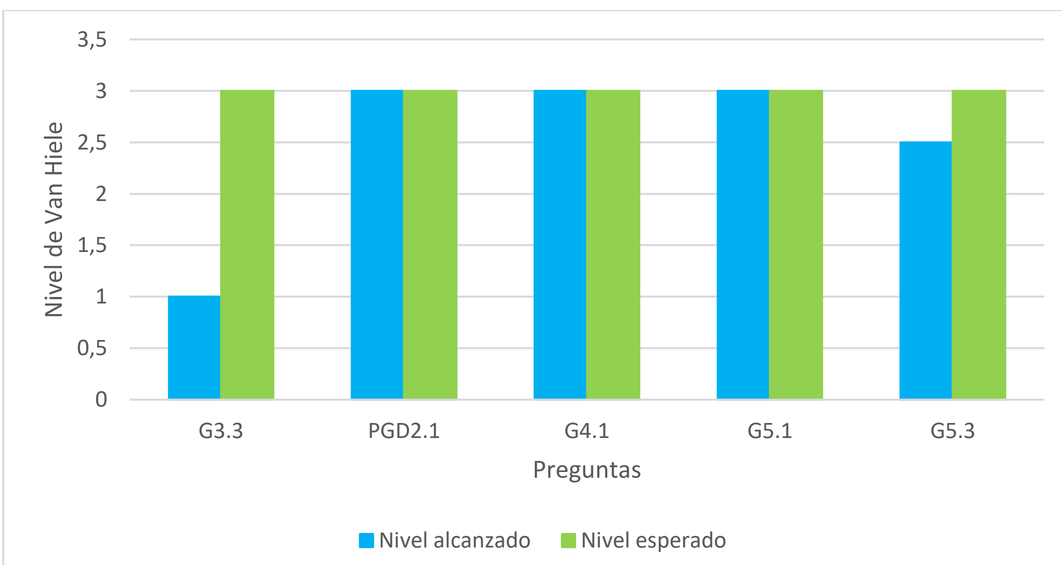
Tabla 4.27: Análisis de la respuesta del estudiante 2 para la pregunta G5.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Es una transformación que ocurre entre dos espacios vectoriales. Esta transformación se realiza a través de una función, transforma vectores en vectores respetando el origen de estos.	Es una transformación que ocurre entre dos espacios vectoriales	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	Esta transformación se realiza a través de una función	Se describe el objeto de una manera formal	F	Nivel 3
	transforma vectores en vectores respetando el origen de estos.	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

El compendio de las tablas queda explicitado a partir de la Figura 4.10.

Figura 4.10: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 2 en relación con el objeto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Al igual que el caso anterior, para ordenar y detallar el análisis, se hace necesario asociar las preguntas en los 2 grupos definidos anterior. Cabe recordar que, como se señaló previamente, la pregunta PGD2.1 fue abordada de manera grupal, por lo cual no se profundizará en el análisis de esta, ya que este ya se realizó en el caso del estudiante 1.

En lo que se refiere al grupo 1 de preguntas, el estudiante muestra una clara comprensión de las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación lineal, pues como se observa en la Figura 4.10 el estudiante alcanza un nivel de clasificación siempre que se le consulta por las condiciones que debe cumplir una transformación lineal.

Detallando un poco, en la consulta G4.1, el estudiante 2 reconoce los principales componentes y propiedades de una transformación lineal, además de esto señala las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación lineal, pues menciona que esta debe preservar la suma y la multiplicación por escalares. Esto lleva a que cumpla todas las condiciones necesarias para alcanzar un nivel de clasificación (nivel 3) (Fuys et al. , 1998).

Para la pregunta G5.1, el estudiante elabora su respuesta de una forma directa, pues señala que una transformación debe preservar la suma y la multiplicación por escalar y posteriormente se menciona que estas propiedades provienen de las condiciones de suficiencia para que un conjunto sea considerado espacio vectorial. Es decir, explicita las condiciones necesarias y suficientes para que una transformación sea considerada lineal (Jaime Pastor, 1993), además, relaciona dichas condiciones con las propiedades de espacios vectoriales.

Para el segundo grupo de preguntas (G3.3 Y G5.3), las respuestas del estudiante evidencian un claro avance, pues empieza en un nivel netamente de visualización y termina acercándose al nivel de clasificación.

Profundizando en la primera respuesta del estudiante 2 (G3.3), en esta no se observa una definición, sino que más bien una descripción basada en las características visuales, pues se utiliza el concepto de rotación y reflexión. Además, menciona propiedades visuales de una transformación lineal como son “mantener el origen fijo” y “manteniendo su forma vectorial”.

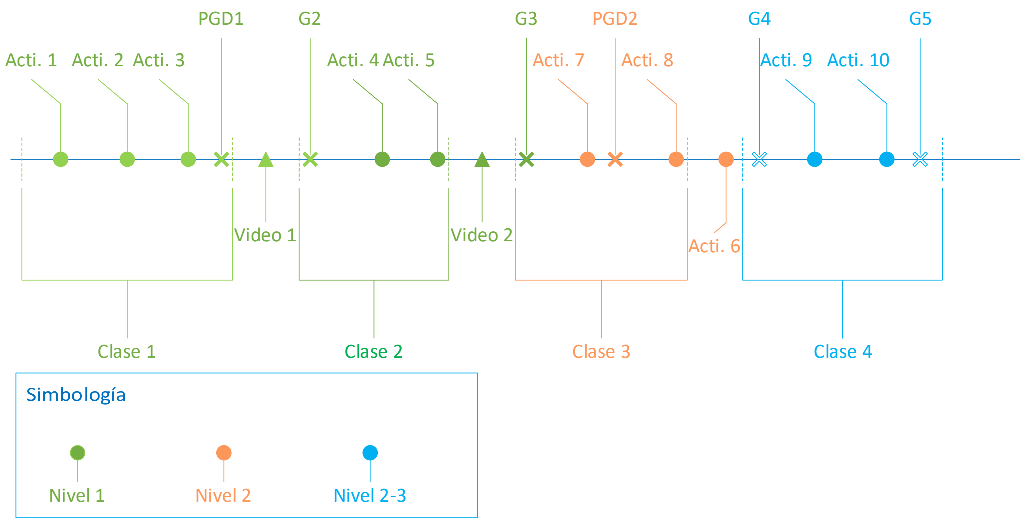
Al abordar la consulta G5.3, el estudiante es capaz de definir el concepto de transformación de manera formal, pues lo relaciona con la idea de función, pero aún no comprende que a la hora de elaborar una definición formal se hace necesario expresar las condiciones necesarias que debe cumplir el objeto, lo que lleva al clasificarlo en un nivel de transición 2-3

Al finalizar la secuencia, el estudiante 2 aún no es capaz de redactar una definición formal del concepto de transformación lineal, aunque sí señala las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir este objeto, cuando se le consultan de manera directa. Esto lleva a clasificar al estudiante 2 en un nivel de transición entre análisis y clasificación (Vargas y Araya, 2013; Labra, 2019; Fuys et al. , 1998).

4.2.4 Influencia de las actividades en el proceso de conceptualización del estudiante 2.

Para visualizar el proceso de conceptualización que construye el estudiante 2 cuando aborda la noción de transformación lineal, se procede a presentar la Figura 4.11.

Figura 4.11: Diagrama cronológico del desarrollo de los niveles de razonamiento del estudiante 2 cuando aborda el concepto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Al igual que el estudiante 1, se percibe que el estudiante 2 estabiliza el nivel de visualización a partir de su respuesta a la pregunta G2.1 (ver Tabla 4.20). En este punto el alumno ya es capaz de reconocer que existe una diferencia entre el concepto de isometría -elemento visual- y el concepto de transformación lineal. Es decir, la secuencia de actividades 1, 2 y 3 cumplen su propósito, pues logran generar en el estudiante la noción visual del objeto de transformación lineal

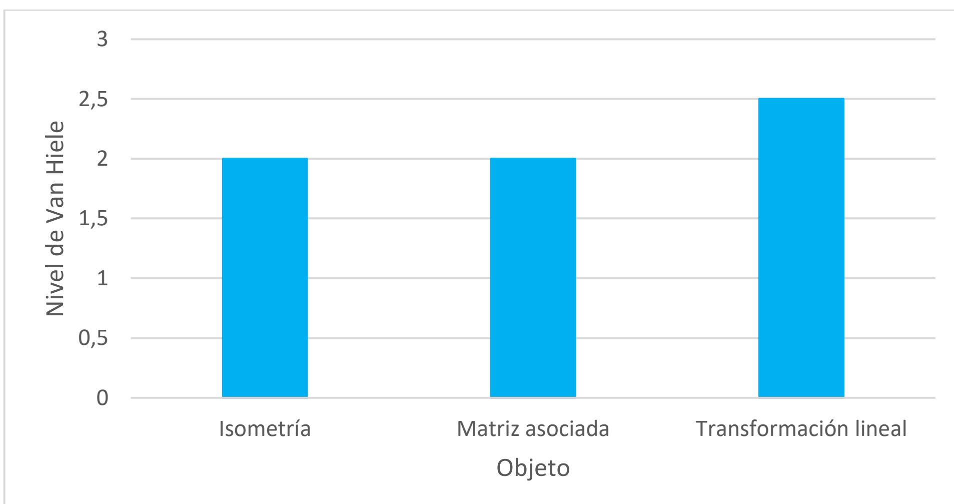
En lo que se refiere al nivel de análisis, se observa que para estabilizar dicho nivel el estudiante 2 necesita de 3 sesiones, pues es solo al inicio de la clase 4 (G4) que se evidencia que este logra percibir componentes y propiedades de una transformación lineal (ver Tabla 4.22). Las actividades 4 y 5 no lograron que el estudiante percibiese la relación existente entre el concepto de matriz y el de transformación lineal, ya que a la hora de evaluar dichas actividades (G3) las respuestas del estudiante seguían basándose en elementos visuales (ver Tabla 4.21).

Al momento de evaluar las actividades (G5) de la clase 4, se observa un desarrollo del nivel de conceptualización del objeto de transformación lineal, en comparación a las clases anteriores, pues el alumno es capaz de relacionar las nociones de transformación y función. Situación que anteriormente no se percibía, ya que sus descripciones no eran formales, sino que visuales(Fuys et al. , 1998). Esta realidad puede explicarse a partir de las actividades desarrolladas en la clase 4, en donde a través del trabajo personal y de la discusión entre pares (Berrocal y Melero, 1995), los estudiantes lograron aproximarse a las condiciones de suficiencia. Esta actividad se basaba en relacionar el concepto de transformación con el de espacio vectorial, y sus respectivas condiciones, por lo cual es probable que, a la hora de racionalizar dichos vínculos, apareciera la noción de función.

4.2.5 Capacidad del estudiante 2 para diferenciar y transitar entre objetos.

Para poder comenzar el estudio de los procesos de transición que genera el estudiante 2, es importante tener claro los niveles de razonamiento alcanzados por el estudiante, con relación a los 3 objetos evaluados. Para resumir dicha situación se presenta la Figura 4.12, en donde es posible observar los niveles de Van Hiele desarrollados por el estudiante.

Figura 4.12: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 2 al finalizar la secuencia



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.12, se percibe que el estudiante 2 alcanza al menos el nivel de análisis en los 3 objetos abordados en la secuencia. Es decir, el alumno es capaz de reconocer compontes y propiedades de los objetos concretos y del objeto general (Fuys et al. , 1998). No obstante, no es posible asegurar que este reconozca las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir cada concepto.

A continuación, se estudiarán las capacidades que presenta el alumno a la hora de diferenciar y transitar entre el objeto de transformación isométrica y transformación lineal.

- Transición entre isometría y transformación lineal.

A diferencia del estudiante 1, para estudiar el vínculo que establece el estudiante 2 entre los conceptos de isometría y transformación lineal, sólo se consideraron las preguntas PGD1.3 Y G2.2, pues en la respuesta a la pregunta G3.2 no se observaron razonamientos distintos a los expresados en las 2 consultas antes mencionadas.

- *PGD1.3: ¿Puede que una transformación lineal no sea una isometría? Justifica tu respuesta.*
- *G2.2: ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu respuesta.*

El detalle del análisis de las respuestas que entrega el estudiante 2 queda expresado a partir de las Tabla 4.28 y 4.29

Tabla 4.28: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 2 en función a la respuesta de la pregunta PGD1.3

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Puede que no sea isometría cuando esta diagonaliza la recta.	Puede que no sea isometría	El estudiante es capaz de comprender que existe una diferencia CONDICIONAL entre el objeto general y el objeto concreto
	cuando esta diagonaliza la recta.	El argumento que entrega para establecer la diferencia es erróneo. Aun no es consciente que el objeto concreto es parte del objeto general pues no es capaz de abstraer las propiedades y posteriores diferencias entre ambos

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.29: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 2 en función a la respuesta de la pregunta G2.2

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado
En el caso de transformaciones lineales podemos rotar los vectores, manteniendo el origen fijo y manteniendo su forma (línea en línea)	En el caso de transformaciones lineales podemos rotar los vectores	En este punto el estudiante compara la isometría de rotación, con la de transformación. El alumno comprende que el objeto concreto (isometría) es parte del objeto general (transformación lineal)
	manteniendo el origen fijo y manteniendo su forma (línea en línea)	Además de la relación expresada anteriormente, el alumno entrega las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal, pero razonadas de una forma visual. Es decir, en este punto es capaz de diferenciar y clasificar una isometría y una transformación lineal de manera visual.

Fuente: Elaboración Propia

En la Tabla 4.28, es posible apreciar que el estudiante es consciente de que existe una diferencia entre los conceptos de isometría y transformación lineal. No obstante, se percibe que al momento de elaborar esta respuesta el alumno no comprende de manera idónea los motivos de esta diferencia pues, como se visualiza en la Tabla 4.28, el argumento que entrega es erróneo. Esta situación es esperable, ya que la respuesta fue elabora al inicio de la secuencia didáctica (clase 1) por lo cual las nociones no han madurado.

Luego de desarrollar las actividades 4 y 5 (clase 2), el alumno comprende y razona, de una manera visual, las condiciones que debe cumplir una transformación lineal. Pues como se observa en la tabla 4.29 este menciona que una transformación lineal mantiene el origen fijo, además de transformar líneas en líneas. Esta evolución en el proceso de razonamiento del estudiante le permite concluir que el objeto concreto (isometría) es parte del objeto general (transformación lineal).

En síntesis, se observa que el estudiante 2 diferencia y transita entre los objetos de isometría y transformación lineal de manera correcta, pues es capaz de diferenciarlos a partir de las características visuales de cada objeto.

➢ Matriz asociada y transformación lineal

Para estructurar el estudio del proceso de transición que realiza el estudiante 2 entre los objetos de matriz asociada y transformación lineal se consideraron las preguntas G3.4 Y G4.2. Pues en la consulta G3.1 no se apreciaron afirmaciones que vincularan los objetos evaluados. Dicho esto, y con el propósito de facilitar la compresión de los análisis, se vuelven a enunciar las preguntas.

- *G3.4 Y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal*

Los análisis se presentan en función a los resultados observados en las Tabla 4.30 y 4.31.

Tabla 4.30: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 2 en función a la respuesta de la pregunta G3.4

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
A través de la matriz asociada puedo hacer un cambio en el vector (dirección, sentido, etc.) y con esto puede conseguir una transformación lineal	a través de la matriz asociada puedo hacer un cambio en el vector (dirección, sentido, etc.)	El estudiante vincula la noción de matriz asociada y la de vector. Señalando que a través de operaciones matemáticas puede modificar la dirección, sentido y modulo del vector.
	y con esto puede conseguir una transformación lineal	El estudiante relaciona los objetos de matriz asociada y transformación lineal, pero no de manera formal, pues queda en duda si el estudiante reconoce a la matriz asociada como un componente de la transformación lineal.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.31: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 2 en función a la respuesta de la pregunta G4.2

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
La matriz asociada es aquella matriz con la que se puede hacer la transformación lineal, o sea, transformar un vector v en un vector w por una multiplicación de v con la matriz asociada.	La matriz asociada es aquella matriz con la que se puede hacer la transformación lineal.	En este punto el estudiante si es capaz de reconocer a la matriz asociada como un componente de la transformación lineal
	o sea, transformar un vector v en un vector w por una multiplicación de v con la matriz asociada.	Es alumno reconoce que trabajar a la transformación lineal de manera matricial es análogo a trabajarla de manera vectorial.

Fuente: Elaboración Propia

A partir de las Tabla 4.30 y 4.31 es posible concluir que la primera relación que establece el estudiante 2, es entre los objetos de matriz y vectores. Todo esto a partir de un razonamiento netamente visual. Esto tiene sentido, pues el objetivo de las actividades 4 y 5 era que el estudiante vislumbrase las similitudes entre ambas representaciones semióticas, dando así la posibilidad a que este analizase estos fenómenos y pudiera evolucionar en su nivel de razonamiento.

El segundo vínculo que se percibe, es entre el objeto de matriz asociada y transformación lineal, pero en este punto de la secuencia, no queda totalmente claro que el estudiante perciba a la matriz asociada como un componente de la transformación lineal. Para dejar claro esta situación, se necesitó de otra sesión, ya que como se observa en la Tabla 4.31, luego del desarrollo de las actividades 7 y 8, el alumno sí expresa claramente a la matriz asociada como un componente de la transformación lineal. Esto le permite comprender que las representaciones semióticas basadas en vectores son análogas a las representaciones basadas en matrices, lo cual le entrega la posibilidad de transitar entre ambas representaciones (Rojas, 2014).

En general, se observa que el estudiante 2 sí es capaz de transitar entre el objeto de matriz asociada y el de transformación lineal, pero no en la profundidad deseada, pues solo se hace mención a las propiedades que posee el objeto concreto desde un paradigma visual, y en ningún momento se hace referencia a conceptos más abstractos como el de dimensión y cómo este último se relaciona con ambos conceptos. Esta realidad se explica porque ninguno de los 2 objetos llega a madurar hasta un nivel de clasificación, en el cual se esperaría que la noción de dimensión y el vínculo que posee con ambos objetos se estableciera de manera natural.

4.3 ESTUDIANTE 3

4.3.1 Transformación isométrica

En análisis de Van Hiele referido al objeto de transformación isométrica se utilizó las siguientes preguntas:

- *PGD1.2: ¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?*
- *PGD1.4: ¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?*
- *G2.1: ¿El apartado "1.d" puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta*

Los niveles de razonamiento alcanzados por el estudiante 3 quedan resumidos a partir de la Tabla 4.32, 4.33 y 4.34

Tabla 4.32: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta PGD1.2

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Gráficamente una transformación isométrica cambia la posición de la figura en el plano o el espacio	cambia la posición de la figura en el plano o el espacio	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.33: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta PGD1.4

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Las características de las transformaciones realizadas por isometrías son que esta tiene una figura inicial, una operación y la figura resultante es del mismo tamaño que la figura original, pero en distinta posición	son que esta tiene una figura inicial, una operación y la figura resultante	Se perciben componentes del objeto	C	Nivel 2
	resultante es del mismo tamaño que la figura original	Se perciben propiedades	C	Nivel 2
	pero en distinta posición	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

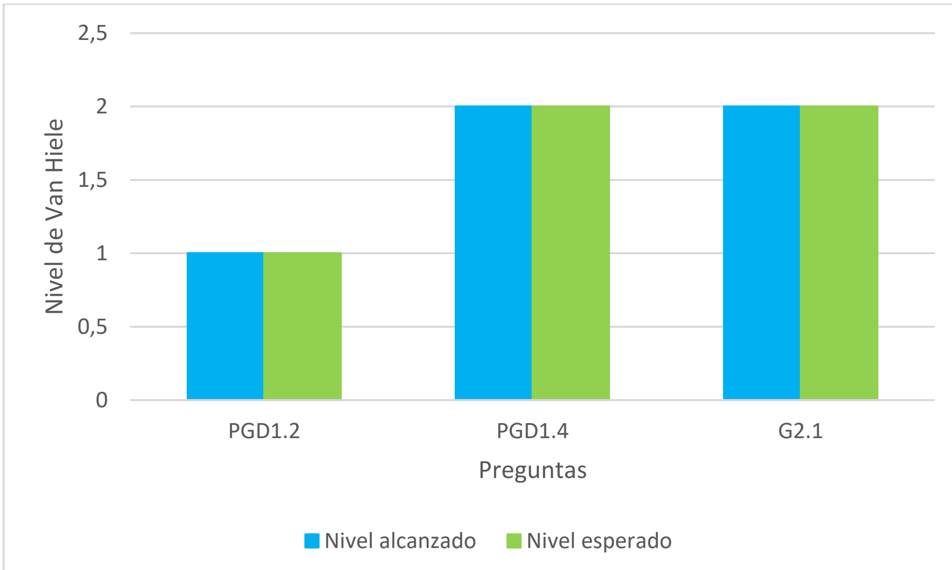
Tabla 4.34: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G2.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
En la parte donde pide aumentar la longitud en 2 unidades, no se considera una isometría, ya que esta significa, igual medida	En la parte donde pide aumentar la longitud en 2 unidades, no se considera una isometría	Se perciben propiedades	C	Nivel 2
	ya que esta significa, igual medida	Se perciben propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Con el propósito de sintetizar los análisis presentados en las tablas anteriores, se construye la Figura 4.13, en donde se observan los niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 con relación al objeto de transformación isométrica.

Figura 4.13: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 en relación con el objeto de transformación isométrica



Fuente: Elaboración propia

A diferencia de los 2 casos anteriores, en la respuesta de la pregunta PGD1.2 el estudiante 3 elabora su respuesta tomando solo consideraciones visuales, pues señala que, desde un punto de vista gráfico, una isometría genera un cambio de posición de una figura. Lo cual según Labra (2019) claramente representa un nivel de conceptualización visual.

Para la consulta PGD1.4, el estudiante es capaz de nombrar los componentes que se ven involucrados cuando se aborda el objeto de isometría, ya que señala que el objeto posee una figura inicial, una operación y una figura resultante, además de esto, menciona que la figura resultante debe ser del mismo tamaño que la figura original, es decir reconoce propiedades (Vargas y Araya, 2013). Es debido a estos argumentos que la respuesta generada por el estudiante 3, con relación a la pregunta PGD4.1, puede clasificarse en un nivel de análisis.

En lo que respecta a la interrogante G2.1, el estudiante 3 es capaz de reconocer las propiedades de una isometría y diferenciarla del objeto de transformación lineal, ya que explicita que la transformación mencionada cambia el tamaño de la figura original, por lo cual no puede considerarse una isometría. Esta situación lleva a clasificar la respuesta del alumno en un nivel de análisis.

En general, se observa que el estudiante es capaz de mencionar las condiciones necesarias y suficientes (Fuys et al. , 1998) que debe cumplir el objeto de transformación isométrica, por lo cual es posible clasificarlo en un nivel de transición entre análisis y clasificación (nivel 2-3).

4.3.2 Matriz asociada

Al igual que los casos anteriores el objeto de matriz asociada fue analizado a partir de la pregunta:

- *G3.3 y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal.*

Los análisis de Van Hiele para esta pregunta quedan resumidos en función a los resultados observados en la Tabla 4.35 y 4.26.

Tabla 4.35: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Es una matriz que representa la operación, que indica el cambio que quiero realizar y al multiplicarlo con la matriz inicial, obtengo mi transformación.	Es una matriz que representa la operación que indica el cambio que quiero realizar	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3
	y al multiplicarlo con la matriz inicial, obtengo mi transformación	Se perciben componentes	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

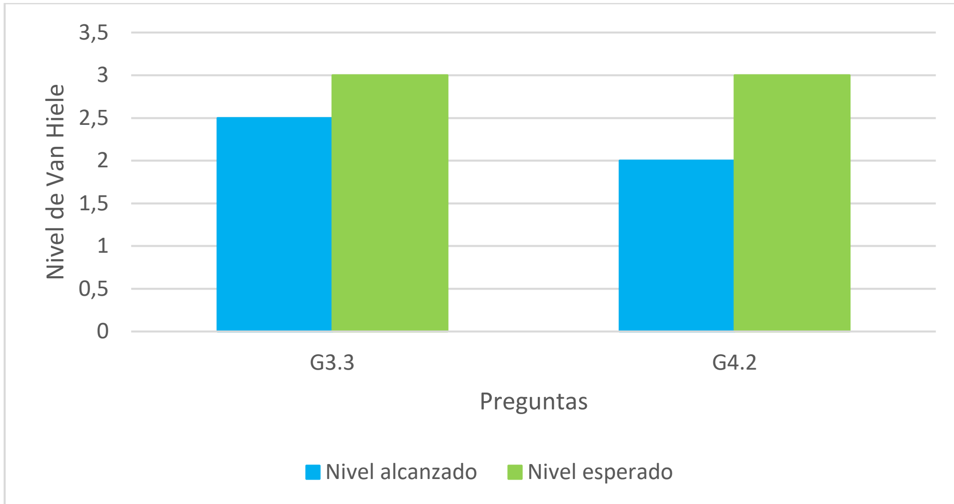
Tabla 4.36: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G4.2

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Es una matriz que representa una generalización de "movimiento" que deseo realizar dentro del plano, en $\mathbb{R}^2$ o espacio, en $\mathbb{R}^3$, y se opera con el vector columna que contiene las coordenadas respectivas a los puntos de la figura.	es una matriz que representa una generalización de "movimiento" que deseo realizar dentro del plano	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2
	en $\mathbb{R}^2$, o espacio, en $\mathbb{R}^3$	Se describen por su apariencia física	A	Nivel 1
	y se opera con el vector columna que contiene las coordenadas respectivas a los puntos de la figura	Se describe los componentes de una manera formal	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 4.14 se pueden apreciar de mejor manera los niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3, con relación al objeto de matriz asociada a una transformación lineal.

Figura 4.14: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 en relación con el objeto de matriz asociada



Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 4.35 es posible visualizar la respuesta entregada por el estudiante 3 a la hora de abordar la interrogante G3.3. En ella se observa un intento por definir de manera formal el objeto de matriz asociada, pues se presenta la noción de operador lineal de una manera implícita (Nivel 3). Posteriormente, el estudiante no profundiza en las propiedades y componentes del objeto, sino que los señala de manera sucinta (nivel 2). Al finalizar su respuesta, señala "así obtengo mi transformación", este último elemento refleja que el estudiante es capaz de diferenciar el objeto de matriz asociada con el objeto de transformación lineal. Todas estas situaciones llevan a clasificar la respuesta de la pregunta G3.3 en un nivel de transición 2-3, pues aún no se señalan las propiedades de la matriz asociada, pero sí presenta elementos pertenecientes al nivel 3.

En lo que respecta a la respuesta de la consulta G4.2, se modifica el concepto de operador lineal por generalizador de movimiento, lo que se puede considerar un retroceso en términos formales, pues la idea de movimiento se relaciona con la transformación visual que el ocurre a un vector en el espacio, mientras que la noción de operador lineal se vincula con las condiciones abstractas que debe cumplir cualquier objeto para que sea considerado lineal. También, durante esta respuesta se reconoce componentes y propiedades de la matriz asociada, aunque dichos componentes no se generalizan a todos los espacios vectoriales, sino que se contextualizan a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Estas situaciones llevan a clasificar al estudiante 2 en un nivel de análisis (nivel 2).

Tomando en consideración ambas respuestas, el estudiante 3 puede ser clasificado en un nivel de transición entre análisis y clasificación, pues logra de elaborar una definición en términos formales, y por otro lado, reconoce propiedades del objeto consultado (Lobo, 2004), aunque estas no son las suficientes, ya que aún no logra generalizar el concepto hacia otros espacios vectoriales que no sean $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

4.3.3 Transformación lineal

El estudio del objeto de transformación lineal consideró las siguientes consultas de la secuencia didáctica:

- *G3.3 Y G5.3: Define con tus palabras el concepto de transformación lineal*
- *G4.1: ¿Cuáles son las características de una transformación lineal? Menciona los elementos que la definen*
- *G5.1: Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.*
- *PGD2.1 y PGD2.2: ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático.*

Los análisis de Van Hiele para cada pregunta quedan sintetizados a partir de las Tabla 4.37, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41 y 4.42

Tabla 4.37: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Es una operación realizada a puntos, escritos de manera vectorial, para obtener una nueva matriz con el cambio deseado.	Es una operación realizada a puntos	Describe el objeto asemejándolo a elementos familiares	A	Nivel 1
	escritos de manera vectorial	Reconoce componentes	C	Nivel 2
	para obtener una nueva matriz con el cambio deseado	Se perciben componentes del objeto concreto, pero no se logra relacionar correctamente con el objeto general	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.38: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta PGD2.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características de nivel de razonamiento**	**Nivel alcanzado**
La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar.	La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.39: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G4.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
La suma se conversa, y la multiplicación, con sus propiedades respectivas.	La suma se conversa, y la multiplicación con sus propiedades respectivas.	Se señalan las condiciones necesarias	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.40: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G5.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Al trabajarlo de manera lineal, se pueden ver propiedades como la preservación de la suma, y de la multiplicación, propiedades necesarias para que sea espacio vectorial.	Al trabajarlo de manera lineal se pueden ver propiedades como la preservación de la suma, y de la multiplicación	Se señalan las condiciones necesarias y suficientes	F	Nivel 3
	propiedades necesarias para que sea espacio vectorial.	Se diferencia el objeto general del concreto, complementado las condiciones de sufuciencias señaldas anteriormente	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.41: Análisis de la respuesta del estudiante 3 para la pregunta G5.3

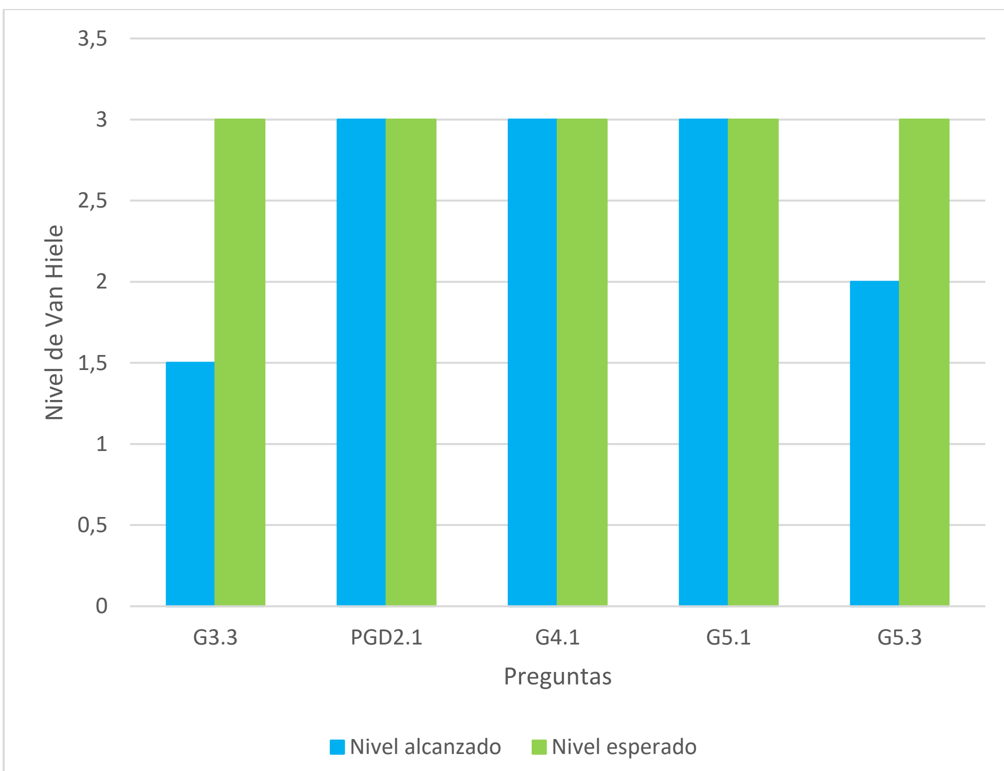
Respuestas Textual (pregunta A en guía 5)	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Al inicio del curso se dio una mirada más geométrica, que altera a la figura que habíamos dibujado, conforme pasaba el curso, nos dimos cuenta que también se puede escribir de manera matricial, siendo parte de este concepto matemático, como	Al inicio del curso se dio una mirada más geométrica, que altera a la figura que habíamos dibujado	Se describe al objeto por su apariencia física	A	Nivel 1
	conforme pasaba el curso, nos dimos cuenta que también se puede escribir de manera matricial, siendo parte de este concepto matemático	Se perciben componentes	C	Nivel 2

la matriz generalizada a la operación, y al final del curso, nos llevamos este concepto, como un concepto en "solitario" con sus propiedades y maneras de escribirlas.	como la matriz generalizada a la operación	Se diferencias los objetos concretos del general	E	Nivel 2
	y al final del curso, nos llevamos este concepto, como un concepto en "solitario" con sus propiedades y maneras de escribirlas.	Se perciben componentes y propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

La Figura 4.15 muestra un compendio de los niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 cuando aborda el concepto de transformación lineal.

Figura 4.15: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 en relación con el objeto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Para el primer grupo de consultas (PGD2.1, G4.1 Y G5.1), es posible apreciar que el estudiante 3 es capaz de mencionar de manera formal las condiciones necesarias y suficientes (Lobo, 2004) que debe cumplir una transformación para ser considera una transformación lineal. Además de eso, en la respuesta relacionada con la pregunta G5.1, el estudiante explicita las condiciones (Labra, 2019) y además las relaciona con las propiedades de espacios vectoriales. Esto lleva a clasificar al estudiante 3 en un nivel de clasificación para todas las consultas del grupo 1.

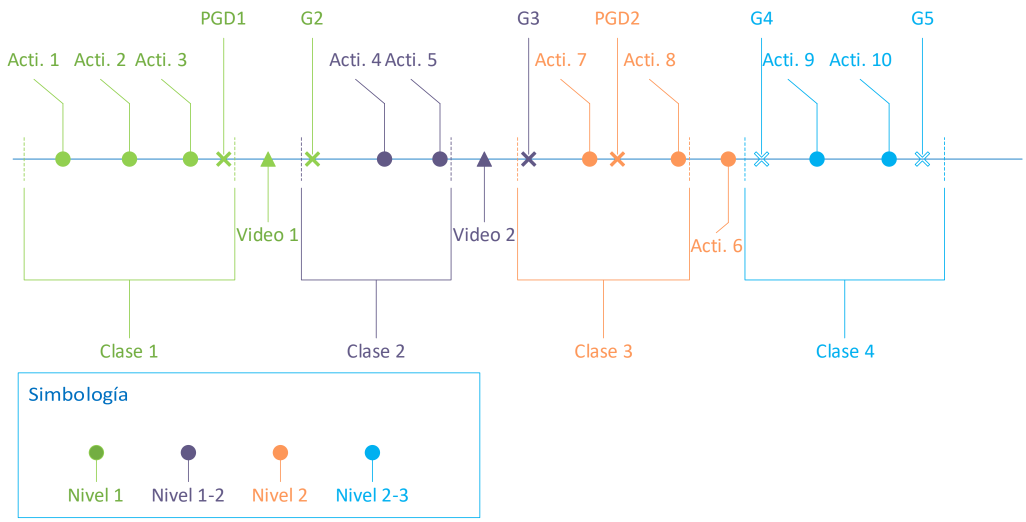
En lo que se refiere a la elaboración de definiciones, el estudiante alcanza un nivel máximo de análisis (nivel 2). Desglosando un poco este fenómeno, es posible observar que durante el desarrollo de la respuesta de la consulta G3.3, el estudiante redacta su respuesta intentando generar una definición, pero esta se basa en componentes mayoritariamente visuales (Rojas, 2014; Duval, 2006), es por este motivo que para dicha consulta se clasifica en un nivel de transición entre visualización y análisis. Para la segunda interrogante de este grupo (G5.3) se observa que el estudiante no construye una definición, sino más bien un relato en donde va mencionando las propiedades visuales y analíticas de este. Al final de su respuesta menciona que la transformación lineal posee propiedades, pero no las explicita -a diferencia de las respuestas del grupo 1-. Es debido a estas situaciones que, en lo que se refiere a la consulta G5.3, se clasifica al estudiante en un nivel de análisis, pues aún no es capaza de elaborar una definición formal del concepto de transformación lineal.

Considerando ambos grupos de pregunta, el estudiante puede clasificarse en un nivel de transición entre análisis y clasificación, ya que reconoce con claridad las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal, pero aún no es capaz de elaborar una definición forma del objeto.

4.3.4 Influencia de las actividades en el proceso de conceptualización del estudiante 3

Con la finalidad de sintetizar el proceso de conceptualización del estudiante 3, a la hora de abordar la noción de transformación lineal, se presenta la Figura 4.16.

Figura 4.16: Diagrama cronológico del desarrollo de los niveles de razonamiento del estudiante 3 cuando aborda el concepto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Del mismo modo que los casos anteriores, el nivel de visualización se obtiene luego del desarrollo de las actividades 1, 2 y 3. Pues a la hora de consultar sobre la diferencia entre isometría y transformación lineal (ver Tabla 4.34) el alumno comprende que una transformación lineal puede que no sea una isometría.

En contraparte, y a diferencia de los casos anteriores, en la Figura 4.16 se observa un proceso de transición entre el nivel de visualización y el nivel de análisis. Esta realidad se desarrolla durante la clase 2, en donde a partir de la evaluación de las actividades 4 y 5 (G3) se percibe que el estudiante 3 aún no es capaz de razonar de forma analítica sobre los componentes y propiedades de una transformación lineal, pues si bien este percibe componentes y propiedades (ver Tabla 4.37), estos son descriptos, en su mayoría, a partir de características visuales. Es decir, en el caso del estudiante 3, las actividades 4 y 5 no fueron suficientes para estabilizar el nivel de análisis, no obstante, sí se percibe que el desarrollo de dichas actividades encamina al alumno a desarrollar el segundo nivel de Van Hiele.

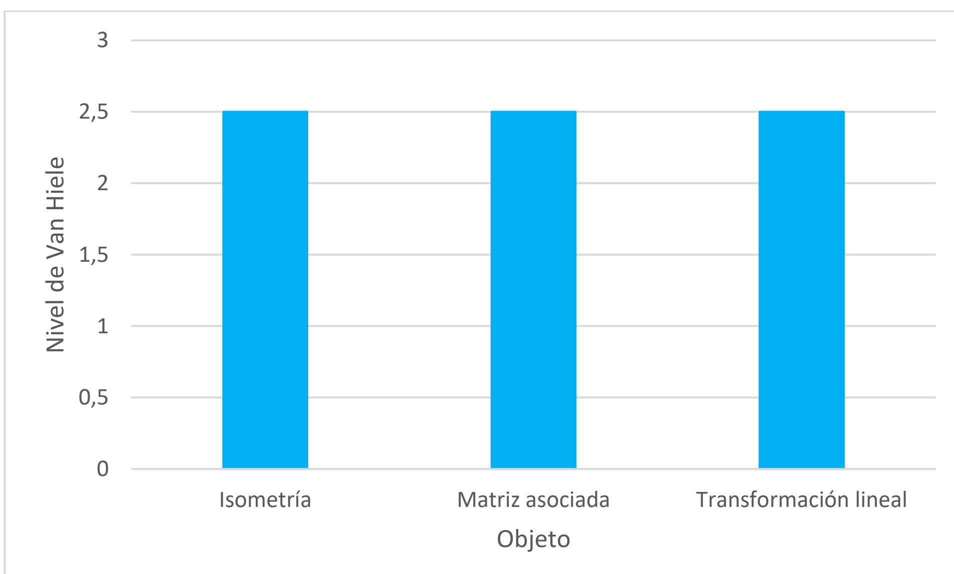
En nivel de análisis se consolida luego de desarrollar la tercera sesión. Es importante mencionar que las actividades que componían esta clase estaban planificadas para comenzar a alcanzar el nivel de clasificación. Es decir, para desarrollar el nivel de análisis el alumno tuvo que verse enfrentado a actividades de clasificación. Es probable que la actividad 7, la cual consistían en una discusión grupal, ayudase a abstraer en mayor medida la noción de transformación lineal, pues en este punto el estudiante 1 ya analizaba correctamente propiedades y componentes de dicho objeto, lo que probablemente ayudó a inducir y madurar el objeto a sus demás compañeros, entre ellos el estudiante 3.

Al finalizar la secuencia el estudiante puede ser clasificado en un nivel de transición 2-3, esta situación es alcanzada luego de desarrollar las actividades 9 y 10, en donde a partir del trabajo personal y la posterior discusión, se observa una clara comprensión de cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una transformación sea considerada lineal.

4.3.5 Capacidad del estudiante 3 para diferenciar y transitar entre objetos.

Al igual que los casos anteriores, a partir de la Figura 4.17 se presenta de manera resumida los niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 para cada objeto matemático abordado en la secuencia. Esto se realiza con el objetivo de tener un contexto general sobre el desempeño del estudiante.

Figura 4.17: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 3 al finalizar la secuencia



Fuente: Elaboración propia

El estudiante 3 es quien presenta un mayor desarrollo promedio, con relación a los 3 objetos evaluados, pues cómo es posible apreciar en la Figura 4.17, para los 3 casos alcanza un nivel de transición entre los niveles de análisis y clasificación.

A continuación, se presenta el análisis de la capacidad de diferenciación que presenta el estudiante 3, con relación a los objetos de isometría y transformación lineal.

- Transición entre isometría y transformación lineal.

Con el propósito de analizar la capacidad de transitar entre objetos que desarrolla el estudiante 2, se seleccionaron y estudiaron las respuestas a las preguntas PGD1.3 y G3.2. Las cuales se presentan a continuación.

- *PGD1.3: ¿Puede que una transformación lineal no sea una isometría? Justifica tu respuesta.*
- *G3.2: ¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.*

El detalle de dicho análisis queda referido en las Tabla 4.42 y 4.43

Tabla 4.42: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 3 en función a la respuesta de la pregunta PGD1.3

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Sí puede pasar esto, ya que como vimos en el ejemplo visto en clases, en el plano la figura aumentaba su tamaño al duplicar la coordenada Y, lo cual según las isometrías esto no debería pasar ya que se debería mantener el tamaño de la figura	Sí puede pasar esto, ya que como vimos en el ejemplo visto en clases, en el plano la figura aumentaba su tamaño al duplicar la coordenada Y	El estudiante logra diferenciar entre las nociones de isometría y transformación. En este punto el alumno es consciente de que el conjunto de las transformaciones isométricas son un subconjunto del conjunto de las transformaciones lineales.
	lo cual según las isometrías esto no debería pasar ya que se debería mantener el tamaño de la figura	El alumno reconoce las condiciones necesarias que debe cumplir una isometría a través de un razonamiento visual, esto le permite diferenciar entre el objeto general y el objeto concreto.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.43: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 3 en función a la respuesta de la pregunta G3.2

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado
Con matrices, ya que la alteración realizada por la transformación se puede escribir de manera matricial operada con el vector escrito de la misma manera	con matrices, ya que la alteración realizada por la transformación se puede escribir de manera matricial	El alumno vincula el concepto de isometría con el de matriz, a partir de acá genera una segunda relación con el concepto de transformación lineal. Es decir, el alumno reconoce el vínculo que existe entre los 3 objetos evaluados en la secuencia.
	operada con el vector escrito de la misma manera	El alumno es capaz de comprender que la transformación lineal puede ser representada de manera matricial como vectorial. Esto le permite comprender la transición entre las distintas representaciones semióticas.

Fuente: Elaboración Propia

Al igual que los 2 casos anteriores, se observa que el estudiante 3 es capaz de diferenciar las nociones de isometría y transformación lineal a partir de un razonamiento visual. Esta situación le permite comprender que el conjunto de las isometrías son un subconjunto de las transformaciones lineales. Esto se evidencia a partir de los resultados observados en la Tabla 4.42. Estas conclusiones son posibles a partir de las actividades desarrolladas en la clase 1, la posibilidad de visualizar isometrías y transformaciones lineales en el plano y en el espacio, le entrega al estudiante la capacidad de diferenciar ambos objetos, y así, transitar y razonar entre ellos. Es decir, la visualización del fenómeno facilita la comprensión inicial de este (Dorier et al. , 2000; Duval, 2006; Rojas, 2014).

Posteriormente, en la respuesta a la pregunta G3.2, el estudiante conecta los conceptos de isometría con el de matriz, a partir de las actividades desarrolladas durante la clase 2. Esto le permite razonar por transitividad y conectar la idea de isometría con el de transformación lineal. Es decir, en este punto el alumno ya posee una comprensión aceptable de la noción de matriz asociada, lo cual le permite vincular los 3 objetos evaluados en la secuencia. La Figura 4.18 resume esta situación.

Figura 4.18: Vínculos que establece el estudiante 3, en relación con los objetos abordados por la secuencia didáctica

Fuente: Elaboración propia

- Matriz asociada y transformación lineal

Para estructurar el estudio del proceso de transición que realiza el estudiante 2 entre los objetos de matriz asociada y transformación lineal, se consideraron las preguntas G3.1 y G3.4.

- *G3.1: ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu respuesta.*
- *G3.4 Y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal*

Los análisis se presentan en función a los resultados observados en las Tabla 4.15, 4.16 y 4.17.

Tabla 4.44: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 3 en función a la respuesta de la pregunta G3.1

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
En varios aspectos se puede relacionar, una de ellas es que las transformaciones pueden ser vistas como matrices y operadas, respetando las propiedades necesarias, para obtener una matriz resultante, que indica a la figura después del cambio.	En varios aspectos se puede relacionar, una de ellas es que las transformaciones pueden ser vistas como matrices y operadas	El estudiante es capaz de conectar el objeto concreto con el objeto general. Es más, menciona que operar con una matriz asociada es lo mismo que operador con una transformación. Es decir, el estudiante razona una equivalencia entre la matriz asociada y la transformación lineal
	respetando las propiedades necesarias, para obtener una matriz resultante, que indica a la figura después del cambio.	El estudiante comprende que el resultado obtenido luego de operar la matriz asociada y vector (escrito de forma matricial) es análogo a realizar un vector transformado de manera vectorial.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.45: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 3 en función a la respuesta de la pregunta G3.4

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Es una matriz que representa la operación, que indica el cambio que quiero realizar y al multiplicarlo con la matriz inicial, obtengo mi transformación.	Es una matriz que representa la operación, que indica el cambio que quiero realizar	El estudiante conecta los conceptos de vector y matriz asociada, en la forma de operar dichos conceptos
	y al multiplicarlo con la matriz inicial, obtengo mi transformación.	Posteriormente relaciona ambos conceptos (vector y matriz) con el de transformación lineal

Fuente: Elaboración Propia

El primer vínculo concreto que percibe el estudiante 3 a la hora de relacionar los objetos de matriz asociada y de transformación lineal, es a partir de la dimensión operatoria, pues como él señala, la matriz asociada indica la operación que quiero realizar, y el resultado de dicha operación tiene como resultado una transformación lineal (ver tabla 4.42). Es decir, el estudiante reconoce la equivalencia entre efectuar una transformación lineal de manera vectorial o realizarla de manera matricial. Esto le entrega la posibilidad de darle sentido a la transición semiótica entre vectores y matrices.

En la respuesta a la consulta G3.4, se percibe que el estudiante estable una relación similar a la que se presenta en la Figura 4.18, pero en vez de utilizar la noción de transformación isométrica, utiliza la de vectores para generar un vínculo con el objeto de matriz asociada y así relacionar ambos con el de transformación lineal.

En general, es posible mencionar que el estudiante logra transitar entre el objeto de matriz asociada y transformación lineal de manera aceptable, pues genera este vínculo apoyándose en la noción visual de isometría y de vectores. Pero aún no es capaz de razonar en un nivel más abstracto, en donde quede claro que la matriz asociada puede ser un puente entre espacios vectoriales de distinto tipo (funciones, matrices, polinomios, etc.) y de distinta dimensión.

4.4 ESTUDIANTE 4

4.4.1 Transformación isométrica

El estudio del objeto de transformación isométrica del estudiante 4 siguió la misma metodología que los casos anteriores. Es decir, las preguntas utilizadas fueron:

- *PGD1.2: ¿Qué hace gráficamente una transformación isométrica?*
- *PGD1.4: ¿Cuáles son las características de la transformación que realiza una isometría?*
- *G2.1: ¿El apartado "1.d" puede considerarse una isometría? Justifica tu respuesta*

Los análisis de Van Hiele quedan explicitados en las Tabla 4.46, 4.47 y 4.48.

Tabla 4.46: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta PGD1.2

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Gráficamente una transformación isométrica cambia la posición de la figura en el plano o el espacio	cambia la posición de la figura en el plano o el espacio	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.47: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta PGD1.4

Respuestas Textual (PG1.4-D)	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Las características de las transformaciones realizadas por isometrías son que esta tiene una figura inicial, una operación y la figura resultante es del mismo tamaño que la figura original, pero en distinta posición	una operación y la figura resultante	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	y la figura resultante es del mismo tamaño que la figura original	Se perciben propiedades	C	Nivel 2
	pero en distinta posición	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

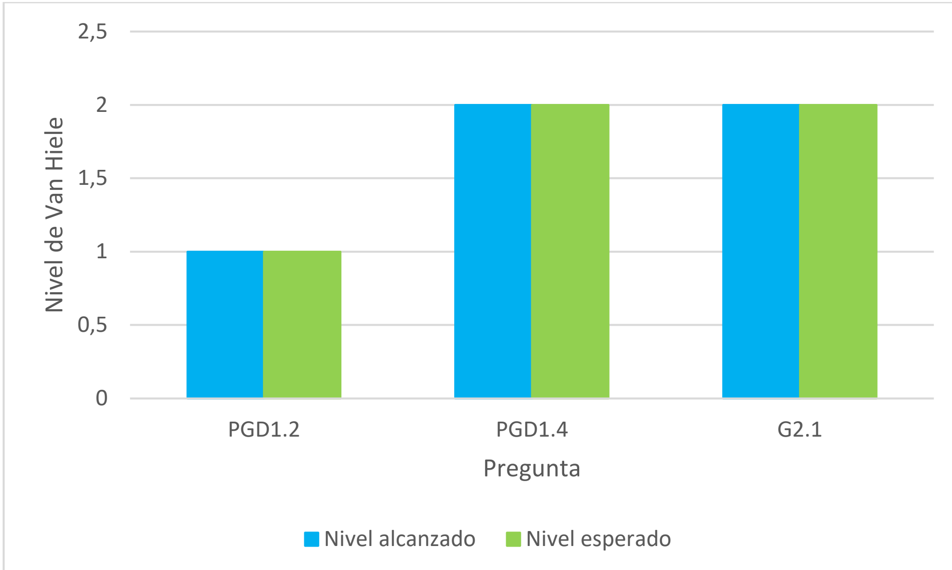
Tabla 4.48: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G2.1

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
No es una isométrica ya que en la pregunta nos pide aumentar al doble la figura y una isometría debe ser igual medidas	ya que en la pregunta nos pide aumentar al doble la figura y una isometría debe ser igual medidas	Se perciben propiedades	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

Los niveles de Van Hiele obtenidos por el estudiante 4, con relación al objeto de transformación isométrica se visualizan en la Figura 4.19.

Figura 4.19: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 4 en relación con el objeto de transformación isométrica



Fuente: Elaboración propia

A la hora de abordar la pregunta PGD1.2, el estudiante 4 alcanza el nivel al cual apunta la interrogante, es decir, el nivel de visualización. Esta clasificación se evidencia a partir de la redacción que elabora el alumno, pues señala: "gráficamente una transformación isométrica cambia la posición de la figura en el plano o en el espacio", respuesta que hace referencia a las características visuales del objeto evaluado (Lobo, 2004).

En lo que respecta a la pregunta PGD4.1, el estudiante analiza el objeto y lo describe por sus componentes y propiedades, entre las que menciona está que una transformación isométrica es una operación que cambia la posición de una figura, pero no altera el tamaño de esta. Debido a ello, es posible clasificar al alumno en un nivel de análisis, pues percibe componentes y propiedades del objeto (Fuys et al. , 1998)

Para la última consulta (G2.1), el estudiante ratifica el nivel de análisis obtenido en la pregunta anterior, ya que responde de manera correcta y reconoce que la transformación aludida no es una isometría, pues esta modifica la distancia entre los vértices que la componen.

A modo de síntesis, es posible clasificar al estudiante 4 en el nivel de análisis, pues a partir de sus respuestas se aprecia que este reconoce las propiedades y componentes de una transformación isométrica.

4.4.2 Matriz asociada

La pregunta utilizada para evaluar el objeto de matriz asociada fue:

- *G3.3 y G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal.*

Los análisis de Van Hiele del estudiante 4 quedan resumidos a partir de la Tabla 4.49 y 4.50.

Tabla 4.49: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
En el álgebra lineal las transformaciones lineales se pueden representar mediante matrices	En el álgebra lineal las transformaciones lineales se pueden representar mediante matrices	No hace referencia en ningún momento al concepto consultado	*	Nivel 0

Fuente: Elaboración Propia

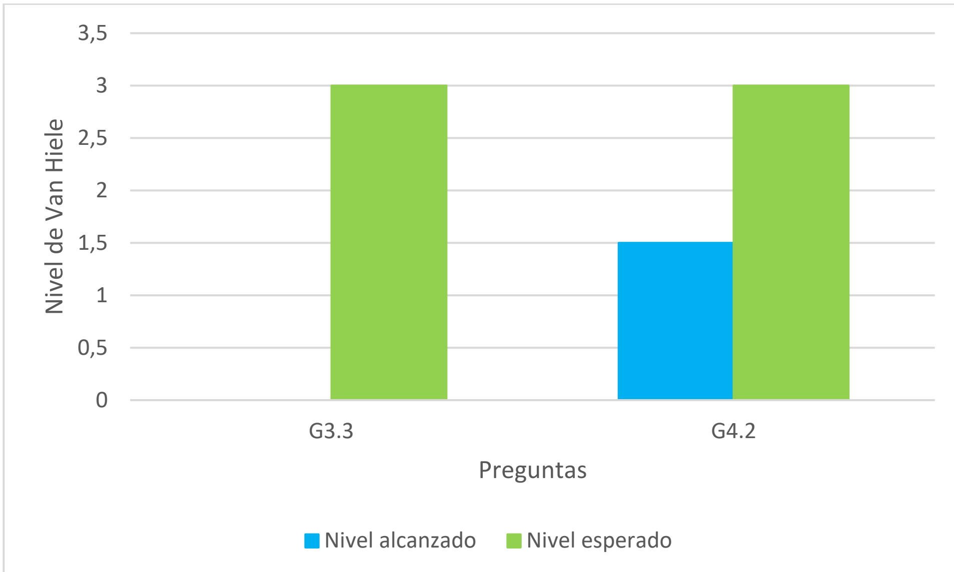
Tabla 4.50: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G4.2

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Se trata de que a partir de unos vectores y expresiones analíticas se le hace una transformación para poder encontrar la matriz asociada a la trasformación anteriormente descrita y toda esta matriz está en base de algunas bases	Se trata de que a partir de unos vectores y expresiones analíticas	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	se le hace una transformación para poder encontrar la matriz asociada a la trasformación anteriormente descrita	Se diferencia el objeto general del concreto	E	Nivel 2
	y toda esta matriz está en base de algunas bases	Se perciben componentes	C	Nivel 2

Fuente: Elaboración Propia

La Figura 4.20 busca sintetizar los análisis y los niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante cuando aborda la noción de matriz asociada a una transformación lineal.

Figura 4.20: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 4 en relación con el objeto de matriz asociada



Fuente: Elaboración propia

Para la primera pregunta (G3.3), el estudiante 4 no logra alcanzar ningún nivel de Van Hiele, pues en su respuesta no hace referencia al objeto consultado, sino que habla de las matrices y las transformaciones, pero en ningún momento menciona la idea de matriz asociada a la transformación lineal. Es debido a esto que no fue posible clasificar la respuesta en ninguno de los niveles de Van Hiele.

En lo que se refiere a la respuesta de la pregunta G4.2, el estudiante muestra un desarrollo en el nivel de razonamiento (en comparación a la pregunta G3.3), ya que esta vez sí logra referirse al objeto consultado. No obstante, no se observa una redacción clara y formal en torno a la definición del objeto, más bien se visualiza un enunciado en donde se describe al objeto por algunos de sus componentes, y al mismo tiempo intenta conectarlos (de manera errónea) con otro objeto visto durante el curso (base de un espacio vectorial).

Todos estos elementos hacen que el alumno 4 sea clasificado en un nivel de transición entre la visualización y el análisis (nivel 1-2).

4.4.3 Transformación lineal

Con el propósito de facilitar la lectura, se vuelven a explicitar las preguntas utilizadas para evaluar el objeto de transformación lineal:

- *G3.3 Y G5.3: Define con tus palabras el concepto de transformación lineal.*
- *G4.1: ¿Cuáles son las características de una transformación lineal? Menciona los elementos que la definen.*
- *G5.1: Describe con tus palabras la relación existente entre las condiciones de linealidad de una función definida entre espacios vectoriales y las condiciones internas para que un conjunto sea considerado un espacio vectorial.*
- *PGD2.1 y PGD2.2: ¿Cuál es la propiedad aritmética que hace posible la igualdad? Explicite el desarrollo matemático.*

Los análisis de acuerdo con el modelo de Van Hiele para cada respuesta de estudiante 4, se presentan a continuación.

Tabla 4.51: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G3.3

Respuestas Textual	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Una transformación lineal, es una transformación entre dos espacios vectoriales. También encuentro que es un homomorfismo entre espacios vectoriales	Una transformación lineal, es una transformación entre dos espacios vectoriales	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	También encuentro que es un homomorfismo entre espacios vectoriales	Se describen los objetos de manera formal y se señalan las condiciones necesarias y suficientes	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.52: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta PGD2.1

Respuestas Textual	Unidad de análisis	Significado	Características de nivel de razonamiento	Nivel alcanzado
La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar.	La propiedad aritmética que hace posible esta igualdad es la conservación del producto de un vector por un escalar	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.53: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G4.1

Respuestas Textual (pregunta B guía 4)	Unidad de análisis	Significado	Características del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
Una transformación lineal es una función y por lo tanto tiene dominio y codominio, pero estos son espacios vectoriales. También tienen mucho que ver con la geometría	Una transformación lineal es una función	Se describe los objetos de manera formal	F	Nivel 3
	y por lo tanto tiene dominio y codominio	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	pero estos son espacios vectoriales.	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	También tienen mucho que ver con la geometría	Se describe el objeto por su apariencia física	A	Nivel 1

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.54: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G5.1

<table>
<tr><th>Respuestas Textual</th><th>Unidad de análisis</th><th>Significado</th><th>Características del nivel de razonamiento</th><th>Nivel de razonamiento alcanzado</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Las condiciones de linealidad son las condiciones que debe cumplir una transformación para que realmente sea una transformación lineal que son la condición de la suma y la del producto por un escalar. En cambio, las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea espacio vectorial son que sea un grupo abeliano, elemento inverso, conmutatividad, distributiva en la suma vectorial, en la suma escalar, asociatividad en los escalares en la ponderación y el 1 actúa como neutro.</td><td>Las condiciones de linealidad son las condiciones que debe cumplir una transformación para que realmente sea una transformación lineal</td><td>Se señalan condiciones necesarias y suficientes</td><td>F</td><td>Nivel 3</td></tr>
<tr><td>que son la condición de la suma y la del producto por un escalar.</td><td>Se señalan condiciones necesarias y suficientes</td><td>F</td><td>Nivel 3</td></tr>
<tr><td>En cambio, las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea espacio vectorial son que sea un grupo abeliano, elemento inverso, conmutatividad, distributiva en la suma vectorial</td><td>Se perciben componentes y propiedades</td><td>C</td><td>Nivel 2</td></tr>
<tr><td>en la suma escalar, asociatividad en los escalares en la ponderación y el 1 actúa como neutro.</td><td>Se perciben componentes y propiedades</td><td>C</td><td>Nivel 2</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración Propia

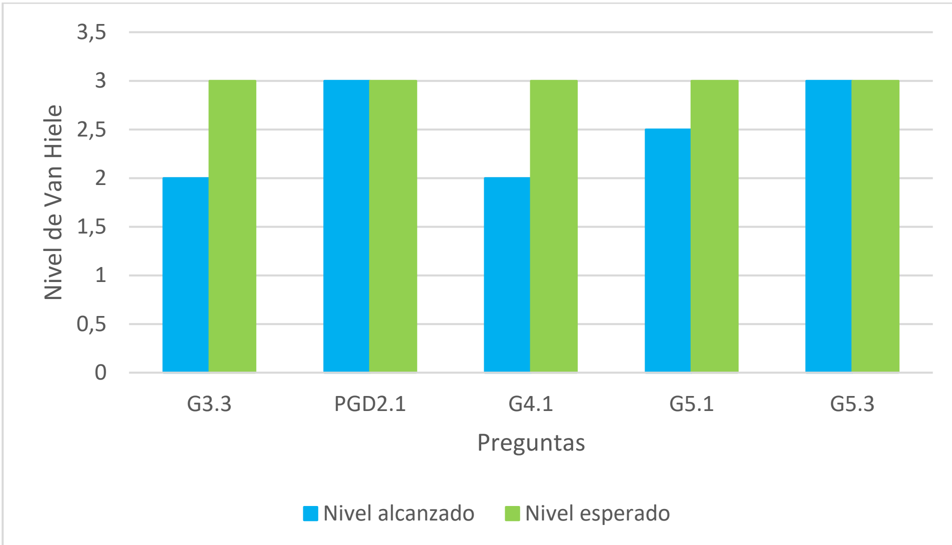
Tabla 4.55: Análisis de la respuesta del estudiante 4 para la pregunta G5.1

Respuestas Textual (pregunta A guía 5)	**Unidad de análisis**	**Significado**	**Características del nivel de razonamiento**	**Nivel de razonamiento alcanzado**
Una transformación lineal es una función, por lo tanto, tiene dominio y condominio y tiene en particular que estos son espacios vectoriales. Hay espacios vectoriales y una función que va de estos dos espacios es decir una transformación. Pero no todas las funciones que se transforman en vectores son trasformaciones lineales hay que cumplir condiciones que son la suma vectorial y la multiplicación por un escalar	Una transformación lineal es una función	Se describen los objetos de una manera formal	F	Nivel 3
	por lo tanto, tiene dominio y condominio	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	y tiene en particular que estos son espacios vectoriales	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	Hay espacios vectoriales y una función que va de estos dos espacios es decir una transformación	Se perciben componentes	C	Nivel 2
	Pero no todas las funciones que se transforman en vectores son trasformaciones lineales hay que cumplir condiciones que son la suma vectorial y la multiplicación por un escalar	Se señalan las condiciones necesarias y suficientes	F	Nivel 3

Fuente: Elaboración Propia

Con la finalidad de sintetizar las tablas esbozadas previamente, se procede a presentar la Figura 4.21, en donde es posible apreciar los niveles de Van Hiele que alcanza el estudiante 4 a la hora de trabajar la noción de transformación isométrica.

Figura 4.21: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 4 en relación con el objeto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia

Entrando a analizar el primer grupo de preguntas (PGD2.1, G4.1 Y G5.1), se observa que el estudiante 4 es capaz de reconocer las propiedades necesarias y suficientes (Vargas y Araya, 2013) que debe cumplir una transformación lineal.

En la pregunta G4.1, se percibe que el estudiante reconoce el concepto de transformación lineal como una función, es decir, lo conceptualiza de una manera formal (Fuys et al. , 1998). Además, explicita que la transformación relaciona dos espacios vectoriales, dicho de otra forma, percibe los componentes que conforman el objeto evaluado. Es debido a estas descripciones que se puede catalogar la respuesta de la pregunta G4.1 dentro del nivel de análisis.

En lo que se refiere a la interrogante G5.1, se observa que el estudiante es capaz de reconocer las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación para ser catalogada como transformación lineal. Además, señala algunas propiedades que definen un espacio vectorial. Pero no logra relacionar dichas condiciones con las propiedades de cerradura bajo la suma y bajo la multiplicación por escalares de un espacio vectorial. Es por este motivo que en lo que respecta a la pregunta G5.1 el estudiante puede ser clasificado en un nivel de transición entre análisis y clasificación (Nivel 2-3).

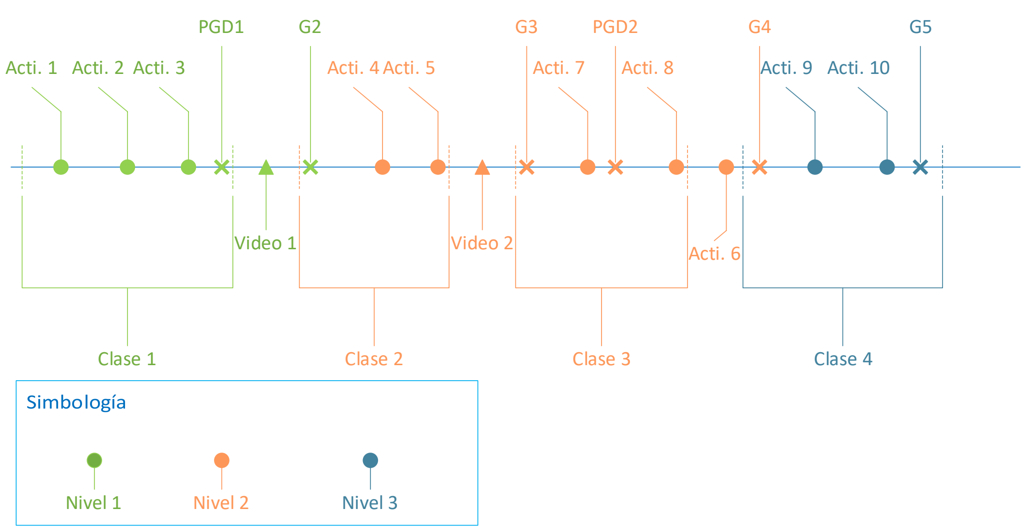
En lo que se refiere al segundo grupo (G3.3 y G5.3), el estudiante 4 logra redactar las respuestas en forma de definición formal (Fouz y Donosti, 2005), pues define el objeto de transformación lineal como una función. El desarrollo del concepto se ve reflejado en el hecho que a la hora de abordar la definición en la interrogante G3.3 el alumno no es capaz de reconocer las propiedades necesarias y suficientes de una transformación lineal, pues si bien menciona que la transformación lineal es un homomorfismo de espacios vectoriales, no se puede aseverar que el estudiante comprenda y clasifique la noción de homomorfismo. Mientras que a la hora de responder la consulta G5.3, el estudiante hace un repaso por los componentes de una transformación lineal además de explicitar las condiciones necesarias y suficientes (Labra, 2019) que debe cumplir esta.

En síntesis, al momento de evaluar la pregunta G3.3 el estudiante alcanza un nivel de análisis, en contraparte cuando se estudia su comportamiento en función a la interrogante G5.3 este alcanza un nivel de clasificación (nivel 3).

4.4.4 Influencia de las actividades en el proceso de conceptualización del estudiante 4

Al igual que los casos anteriores, y con la finalidad de estudiar la influencia de las actividades desarrolladas en el proceso de razonamiento del estudiante, se procede a presentar Figura 4.22.

Figura 4.22: Diagrama cronológico del desarrollo de los niveles de razonamiento del estudiante 4 cuando aborda el concepto de transformación lineal



Fuente: Elaboración propia.

Del mismo modo que los casos anteriores, el estudiante 4 estabiliza el nivel de visualización a partir de las actividades 1, 2 y 3. Se observa que luego de desarrollar dichas actividades, el estudiante logra diferenciar los conceptos de isometría y transformación lineal en función a un razonamiento visual (ver Tabla 4.48). Esta situación ratifica los resultados observados en los casos anteriores, en donde a partir de las actividades 1, 2 y 3 los alumnos son capaces conceptualizar visualmente la noción de transformación lineal.

Durante la evaluación de la guía 3 (G3) se percibe que el alumno es capaz de reconocer componentes y propiedades de una transformación lineal. Es decir, en este punto el estudiante ya ha alcanzado el nivel de análisis. Este salto se explica a partir de las actividades que se encuentran entre los momentos de evaluación G2 y G3. Luego de realizar transformaciones lineales a partir de la multiplicación de matrices (actividad 4) y su posterior discusión (actividad 5), el alumno integra componentes un poco más abstractos a su razonamiento visual, lo que conlleva que dicho razonamiento evolucione a un nivel superior (nivel 2) (D'Amore, 2006).

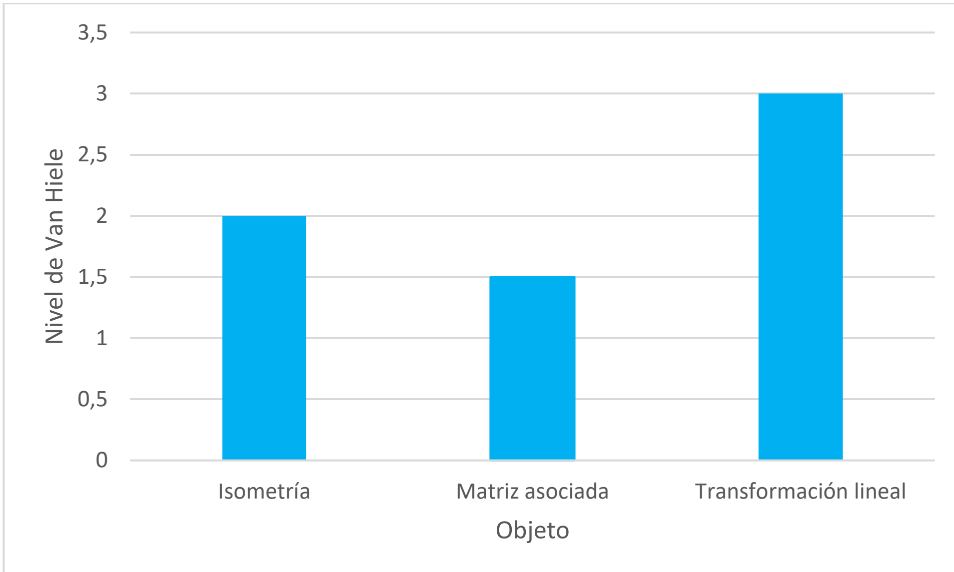
Durante el quinto punto de evaluación (G4), el estudiante no muestra resultados suficientes como para catalogarlos en un nivel 3 o de transición entre clasificación y análisis, por lo cual sigue siendo clasificado en un nivel de análisis. No obstante, existen algunos indicios que éste ya comienza a generar un avance en su razonamiento, pues durante la actividad 7 (actividad grupal), el conjunto fue capaz de definir e inferir adecuadamente la primera condición de suficiencia que debe cumplir una transformación para ser catalogada lineal (ver Tabla 4.52).

Al finalizar la intervención (G5), el alumno logra reconocer y explicitar las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una transformación lineal, además de poder integrar dichas condiciones en una definición formal del concepto. Por estos motivos, el estudiante es catalogado dentro de un nivel de clasificación. Esta situación se origina luego de desarrollar las actividades 9 y 10, en donde el estudiante se ve enfrentado a intentar demostrar formalmente que una transformación cumple con las condiciones de linealidad, además de discutir de manera grupal los resultados encontrados. Se puede concluir, que en lo que respecta al estudiante 4, las actividades 9 y 10 logran generar en él un salto en el nivel de razonamiento, pues reconoce y explicita las condiciones de suficiencia dentro de una definición formal del objeto de transformación lineal.

4.4.5 Capacidad del estudiante 4 para diferenciar y transitar entre objetos

Los niveles de razonamiento alcanzados por el estudiante 4, al finalizar la secuencia, con relación a los 3 objetos abordados, quedan resumidos en la Figura 4.23.

Figura 4.23: Niveles de Van Hiele alcanzados por el estudiante 2 al finalizar la secuencia



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.23, es posible apreciar que el estudiante 4 es el único en alcanzar el nivel de clasificación del objeto general (transformación lineal). Mientras que, en lo que respecta a el concepto de isometría este logra razonar en un nivel de análisis. En lo que se refiere a la noción de matriz asociada, el estudiante 4 solo logra razonar en un nivel de transición entre análisis y visualización. Esta situación genera el cuestionamiento sobre cuáles son los elementos que ayudan al estudiante a razonar el objeto de transformación lineal en un nivel de clasificación. Se espera poder acercarse a la respuesta de dicha pregunta en los párrafos posteriores.

➢ Transición entre isometría y transformación lineal.

Al igual que el estudiante 1, las consultas analizadas para estudiar el fenómeno de transición entre isometría y transformación lineal fueron las interrogantes PGD1.3, G2.2 Y G3.2.

- *PGD1.3: ¿Puede que una transformación lineal no sea una isometría? Justifica tu respuesta.*
- *G2.2: ¿Cómo relacionarías esta actividad con la materia que has visto durante el ramo de álgebra 2 (álgebra lineal)? En cualquier caso, justifica tu respuesta.*
- *G3.2: ¿Crees que las transformaciones isométricas tienen alguna relación con algún otro concepto matemático (matrices, funciones, derivadas, etc.)? Justifica tu respuesta.*

El detalle de dicho análisis queda referido en las Tabla 4.56, 4.57 y 4.58.

Tabla 4.56: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 4 en función a la respuesta de la pregunta PGD1.3

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado
Puede que no sea isometría cuando esta diagonaliza la recta.	Puede que no sea isometría	El estudiante es capaz de comprender que existe una diferencia CONDICIONAL entre el objeto general y el objeto concreto
	cuando esta diagonaliza la recta.	El argumento que entrega para establecer la diferencia es erróneo. Aún no es consciente que el objeto concreto es parte del objeto general pues no es capaz de abstraer las propiedades y posteriores diferencias entre ambos

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.57: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 4 en función a la respuesta de la pregunta G2.2

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado
Se ve relacionada con matrices y con vectores ya que se podía escribir por vértices cómo vectores y de manera matricial igual	Se ve relacionada con matrices y con vectores	El estudiante vincula los objetos de matriz y vectores
	ya que se podía escribir por vértices cómo vectores y de manera matricial igual	Establece que las representaciones semióticas entre matrices y vectores son análogas. Es decir, el estudiante es capaz de transitar y comprender ambos tipos de representaciones.

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.58: Análisis del proceso de transición de las nociones de isometría y transformación lineal que genera el estudiante 4 en función a la respuesta de la pregunta G3.2

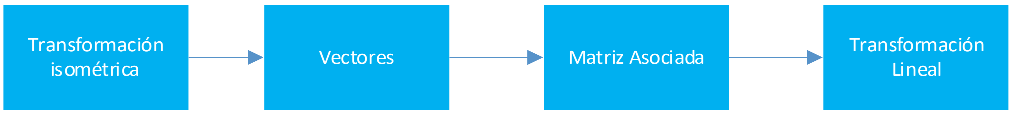
Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Las transformaciones isométricas tienen relación con vectores y matrices también ya que se pueden hacer las transformaciones a través de matrices	Las transformaciones isométricas tienen relación con vectores y matrices también	En el primer segmento de la respuesta el estudiante conecta las nociones de isometría, vectores y matrices. Es decir, el estudiante comprende que los vectores y las matrices pueden ser considerados como componentes de una transformación isométrica
	ya que se pueden hacer las transformaciones a través de matrices	En el segundo segmento, el alumno relaciona la noción de transformación, con el de matriz. Es decir, vincula los 3 objetos evaluados por la secuencia y además añade a estos la noción de vectores. El estudiante es capaz de comprender que los vectores y las matrices pueden ser componentes de una transformación isométrica o una transformación lineal, además de entender que una transformación isométrica es una transformación lineal.

Fuente: Elaboración Propia

En primera instancia, se aprecia un fenómeno similar al de los casos anteriores, pues se observa que el estudiante 4 es capaz de establecer un vínculo y posteriormente diferenciar las nociones de isometría y transformación lineal en función a un razonamiento visual. Es decir, el alumno diferencia ambos conceptos a partir de las características visuales que presentan dichos objetos. Esta circunstancia se debe a las actividades 1,2 y 3, en donde el estudiante logró observar el comportamiento visual de una isometría y una transformación lineal. Esto le entrega la posibilidad al sujeto de diferencias ambos conceptos, lo que conlleva a que este pueda transitar mentalmente entre una transformación lineal y una isometría.

Una diferencia que se observa en las relaciones que establece el estudiante 4, es que este vincula las nociones de isometría, vector y matriz asociada, para posteriormente vincular esta última con el concepto de transformación lineal. Dicho de otra manera, durante sus respuestas el estudiante conecta las nociones de isometrías y vectores, para posteriormente utilizar estos objetos y relacionarlos con los demás. Esta situación queda resumida a partir de la Figura 4.24

Figura 4.24: Vínculos que establece el estudiante 4, en relación con los objetos abordados por la secuencia didáctica



Fuente: Elaboración Propia

- Matriz asociada y transformación lineal

Para estructurar el estudio del proceso de transición que realiza el estudiante 4 sólo se consideró la pregunta G4.2, pues fue en la única que se observaron vínculos directos entre los objetos evaluados.

- *G4.2: Define con tus palabras el concepto de matriz asociada a una transformación lineal*

Los análisis se presentan en función a los resultados observados en la Tabla 4.59.

Tabla 4.59: Análisis del proceso de transición de las nociones de matriz asociada y transformación lineal que genera el estudiante 4 en función a la respuesta de la pregunta G4.2

Respuesta textual	**Unidad de análisis**	**Significado**
Se trata de que a partir de unos vectores y expresiones analíticas se le hace una transformación para poder encontrar la matriz asociada a la transformación anteriormente descrita y toda esta matriz está en base de algunas bases	Se trata de que a partir de unos vectores y expresiones analíticas se le hace una transformación	Vincula los conceptos de vectores y transformación lineal. Dicho de otra forma, reconoce a los vectores como componentes de una transformación lineal
	para poder encontrar la matriz asociada a la transformación anteriormente descrita	Percibe que la matriz asociada es un componente de la transformación lineal
	y toda esta matriz está en base de algunas bases	Vincula a la matriz asociada con la noción de bases

Fuente: Elaboración Propia

En la respuesta entregada por el estudiante 4 se ratifican los resultados observados en la Figura 4.24, pues se observa que el estudiante es capaz de percibir a los vectores y a la matriz asociada como componentes de una transformación, lo cual corresponde con las características de un nivel de análisis (Vargas y Araya, 2013). Esta situación se explica, debido a que al momento de elaborar la respuesta a la pregunta G4.1 (clase 3), el estudiante es capaz de razonar las transformaciones lineales en un nivel de análisis, lo cual quiere decir que es capaz de reconocer componentes y propiedades, entre estos componentes se encuentra la matriz asociada.

Al finalizar su respuesta, el estudiante hace mención del concepto de base, si bien dicha mención es muy efímera, es una situación relevante, pues como se profundizará en el siguiente capítulo, este vínculo puede ser utilizado como pilar para visualizar y comprender de buena manera el objeto de matriz asociada a una transformación lineal.

En síntesis, el alumno es capaz de transitar entre las nociones de transformación lineal y matriz asociada, pero no en profundidad, pues las relaciones que establece entre ambos objetos son intuitivas, y no están formalizadas ni en el plano visual ni en el plano abstracto.

4.5 REFLEXIONES GENERALES DE LA SECUENCIA

A modo de síntesis, se desea presentar los resultados generalizados de la secuencia, esto con el propósito de facilitar a comprensión de las posteriores conclusiones, las cuales se desarrollarán con base en estos resultados.

El primer resultado común a los 4 casos analizados es la consolidación temprana del nivel de visualización del objeto de transformación lineal. Los 4 estudiantes logran establecer diferencias entre el concepto de isometría y transformación línea, lo que conlleva a que puedan generar un razonamiento visual de este último concepto. Si bien los razonamientos cada estudiante tiene sus particularidades, pues, por ejemplo, el estudiante 2 es capaz de señalar las condiciones visuales que debe cumplir una isometría y una transformación, y desde este punto comenzar a discriminar -situación que no se observa en los otros 3 casos-, es claro que el primer nivel de Van Hiele es alcanzados por los 4 alumnos al finalizar la clase 1. Es debido a la influencia de las actividades 1, 2 y 3, en donde los estudiantes visualizaron el comportamiento de ambos objetos matemático, tanto en el plano como en el espacio, que se logra construir el pilar visual del concepto de transformación lineal.

Otro resultado interesante observado en la secuencia es la capacidad que construyen los estudiantes para transitar entre la representación de vector y matriz. Esta situación es relevante, pues como se mencionó en el capítulo 1, una de las principales dificultades asociada al aprendizaje del álgebra lineal son los problemas relacionados con los distintos tipos de representaciones semióticas que se utilizan en esta área de la matemática (Dias et al. , 1995; Dorier et al. , 2000; Dorier y Sierpinska, 2001). Esta situación se explica a partir del desarrollo de las actividades 4 y 5, en donde los estudiantes realizaron transformaciones isométricas multiplicando matrices, dichas transformaciones eran las mismas que realizaron en la actividad 1 de manera vectorial, por lo cual lograron observar de forma práctica la equivalencia existente entre matriz y vector. Las consecuencias de este fenómeno no se circunscriben solo a la capacidad de transitar entre distintas representaciones semióticas, sino que también establecen las bases para generar otro tipo de relaciones, pues como se mencionó en el análisis de los 4 casos, es a partir del vínculo matriz-vector que se logran generar el vínculo isometría, matriz asociada y transformación lineal. Lo anterior llevó a que los estudiantes sean capaces de transitar -a distintos niveles- entre los objetos matemáticos evaluados en la secuencia didáctica.

Hasta ahora solo se han mencionado consecuencias positivas de la secuencia, sin embargo, también se percibieron algunas dificultades. Por ejemplo, en todos los casos se observan dificultades para transitar desde un nivel de análisis hacia un nivel de clasificación, pues los estudiantes 2, 3 y 4 permanecen en el nivel de análisis hasta la sesión 3. Situación contraria a la planificada, ya que se esperaba que a partir de las actividades desarrolladas en la clase 3 estos alcanzaran a lo menos un nivel de transición entre análisis y clasificación, como lo desarrolla el estudiante 1. Este hecho se ratifica a partir de los resultados finales de la secuencia, pues 3 de los 4 estudiantes no logran alcanzar un nivel completo de clasificación (nivel 3).

Esta dificultad se atribuye a la poca profundidad que se logró alcanzar en el desarrollo del proceso de conceptualización del objeto de matriz asociada, pues por una parte, la actividad 6 que buscaba generalizar la noción de matriz asociada a otros espacios vectoriales no se logró implementar, mientras que, por otra, no existía la capacidad de razonar visualmente el objeto de matriz asociada. Situación que termina perjudicando el proceso de conceptualización de los estudiantes, ya que ellos eran capaces de comprender propiedades de una matriz asociada (nivel 2), pero a la hora de querer profundizar hacia un nivel de clasificación, esta transición se veía dificultada por no poseer un razonamiento visual del concepto.

En síntesis, se observan resultados más que aceptables, pues si bien no se logró alcanzar el nivel de clasificación del objeto de transformación lineal en todos los casos sí se logró, al menos, un nivel de transición entre análisis y clasificación. Esto permite concluir que la secuencia de actividades contribuyó a que todos los estudiantes fueran capaces de: razonar de manera visual el objeto de transformación lineal; reconocer componentes y propiedades de una transformación lineal; señalar las condiciones necesarias y suficientes que cumple una transformación lineal.

5 CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

En este capítulo se presentarán las conclusiones, limitaciones y proyecciones de la investigación. Para ello, se va a realizar una síntesis de los principales resultados del estudio, los cuales darán respuesta tanto a la pregunta de investigación, como al cumplimiento del objetivo general del proyecto.

De manera general, se señala que los estudiantes obtienen rápidamente el nivel de visualización. En este nivel ellos son capaces de reconocer el comportamiento óptico que debe poseer el objeto de transformación lineal. La velocidad con la que los estudiantes alcanzan el nivel 1 de Van Hiele, se explica a partir del conocimiento previo que estos poseían del primer objeto concreto (isometría). Es a partir de dicho objeto que los estudiantes logran reconocer el comportamiento lineal de una transformación, además de obtener la capacidad de diferenciar entre una transformación isométrica y otro tipo de transformaciones lineales, lo que los lleva a generalizar -visualmente- la noción de transformación lineal.

Posteriormente, durante las sesiones 2 y 3, los estudiantes adquieren la capacidad de reconocer las propiedades y componentes de una aplicación lineal. Es decir, son capaces de evolucionar en su nivel de razonamiento, transitando desde un pensamiento visual a uno analítico, o lo que Duval (2000) llama visualización no icónica. El principal elemento que ayuda a los estudiantes a desarrollar dicho proceso de evolución son las actividades 4 y 5, en donde el alumno se vio enfrentado a construir transformaciones lineales a partir de la multiplicación de matrices. Este hecho da pie a otro fenómeno: durante la adquisición del nivel de análisis los estudiantes obtienen la capacidad de darle sentido a la transición semiótica entre matriz y vector. Todo esto permite que el estudiante logre reconocer el objeto de matriz asociada como un componente de la transformación lineal.

Las consecuencias didácticas de esta última afirmación radican en que a partir de una plafificacion didáctica basada en la visualización, y específicamente en el modelo de Van Hiele, en donde se aborden los objetos a partir de su representación aritmética y geométrica (Rosso y Barros, 2013) se logra otorgar un sentido de equivalencia a los objetos estudiados. Es decir, las dificultades asociadas al lenguaje utilizado en álgebra lineal (Dias et al. , 1995; Dorier et al. , 2000; Dorier J.-L. , 1995; Kú et al. , 2008; Caserio et al. , 2007; Robert y Robinet, 1989; Rosso y Barros, 2013) pueden ser abordadas de mejor manera a partir de aplicaciones geométricas.

Finalmente, durante las sesiones 3 y 4, los participantes logran reconocer y señalar las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación lineal, aunque solo cuando se les consulta de manera directa (Nivel 2-3), pues solo uno de los cuatro participantes es capaz de explicitar las condiciones de suficiencia cuando estas son consultadas de manera indirecta (definición). Una de las causas para explicar este hallazgo es la nula capacidad que se observa en los estudiantes de visualizar el objeto de matriz asociada. Para solucionar esta situación se sugiere abordar la noción visual de la matriz asociada al momento de afrontar el concepto de base; más específicamente la noción de cambio de base. Durante el desarrollo común de un curso de álgebra lineal, la idea de cambio de base o de matriz cambio, es abordada de manera previa a la de transformación lineal, lo que permitiría construir una noción visual del objeto de matriz asociada antes de iniciar la secuencia de Van Hiele. Detallando un poco, se recomienda que se grafiquen 2 conjuntos bases cualquiera y se muestre cómo el tránsito de base a base puede ser expresado a partir de la matriz cambio de base, la cual es equivalente a una matriz asociada.

Durante el desarrollo de la investigación se logró identificar los niveles de razonamiento geométrico que alcanzaron cada uno de los estudiantes que participaron en la intervención, tanto para el objeto de transformación lineal, como para el de matriz asociada e isometría. Como se mencionó anteriormente, se observaron buenos resultados pues al finalizar la secuencia, los estudiantes son capaces de reconocer y explicitar de manera formal las condiciones de suficiencia que debe cumplir una transformación para ser considerada lineal. La importancia de este resultado radica en el hecho que los estudiantes no solo repiten de forma mecánica las condiciones de suficiencia, sino que para ellos estas tienen un significado concreto, ya que como se evidenció durante el capítulo de análisis, para los estudiantes las condiciones de linealidad poseen un significado visual: transformar líneas en líneas.

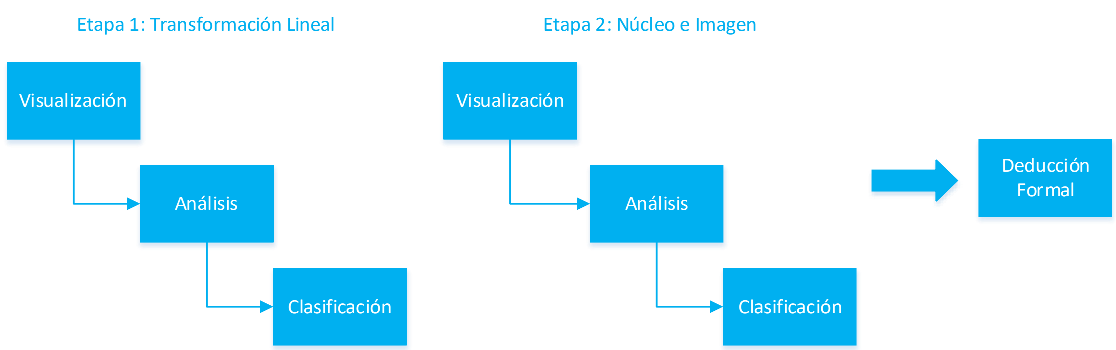
Este último resultado posee una relevancia didáctica considerable, pues queda en evidencia que, a partir del razonamiento geométrico, las etapas de visualización icónica y no icónica (Duval, 2000), las cuales se vínculan con los 2 primeros niveles de razonamiento de Van Hiele, no sólo possen un componente de razonamiento geométrico, sino que son el primer paso para construir un proceso de abstración algebraico. Esto se debe a que cuando el estudiante comienza a entregarle propiedades al objeto geométrico, este comienza a transitar hacia un razonamiento algebraico, pues dichas propiedades también pueden ser representadas y razonadas de manera algebraica. Es decir, la figura no solo condensa el significado de la idea (Duval, 2000), sino que también facilita la profundización de esta.

Todas estas situaciones permiten afirmar que se cumplió el objetivo general del proyecto, el cual consistía en caracterizar el proceso de conceptualización de los estudiantes cuando abordan el concepto de transformación lineal. Pues a partir del avance cronológico que estos van presentando durante el desarrollo de la secuencia, es posible explicitar las particularidades de sus procesos de razonamiento.

En síntesis, no solo se consiguió clasificar a los estudiantes dentro de un nivel de razonamiento geométrico, sino que también se logró demostrar que el razonamiento geométrico que construye un estudiante de una transformación lineal facilita el proceso de generalización, o lo que Serres (2011) define como pensamiento algebraico. Al describir el proceso de conceptualización que estos generan cuando abordan la noción de transformación lineal queda de manifiesto cómo la visualización facilita el proceso de abstracción algebraica.

Los buenos resultados observados permiten sugerir la idea de extender la secuencia didáctica a un **segundo ciclo de Van Hiele**, el cual circunscriba los elementos de núcleo e imagen de una transformación lineal. Dicho ciclo, podría buscar llevar a los estudiantes no solo a un nivel de clasificación (nivel 3), sino que los debiese desafiar a conseguir un nivel de deducción formal (Nivel 4) a través de la demostración de uno de los resultados más importantes del álgebra lineal: el teorema de la dimensión. La estructura de esta propuesta se presenta de manera diagramática en la Figura 5.1

Figura 5.1: Diagrama de la secuencia propuesta



Fuente: Elaboración propia

La estructura general de este segundo ciclo consiste en aterrizar la naturaleza abstracta de los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal, tomando como puente la noción de función, más específicamente la representación de conjuntos que posee este último objeto. La idea es poder conectar la noción de transformación lineal de manera visual con la noción de función. Con esto realizado, lo estudiantes podrán visualizar al núcleo como subconjuntos del dominio y del codominio respectivamente, donde, con el pasar de las actividades, comprenderán que estos subconjuntos son subespacios vectoriales. Se espera así entregarles un pilar visual a las nociones de núcleo e imagen. A continuación, se detallan las actividades propuestas para este segundo ciclo, además las guías consideradas que se adjuntan en la sección de anexos.

Etapa 1: Visualización

- Actividad 11: el objetivo de esta actividad recae en que el estudiante logre relacionar el concepto de transformación lineal con el de función, de una forma visual, todo esto a partir del diagrama de funciones. La actividad básicamente consiste en mostrar a través de un archivo PowerPoint distintos ejemplos sencillos de espacios vectoriales.
- Actividad 12: la actividad 12 se centra en clasificar los tipos de funciones (inyectiva, biyectiva, sobreyectiva). Una posible metodología para explicar estas ideas puede ser generar un ejemplo tomando a los alumnos y las sillas del aula. El ejemplo consiste en sacar a los estudiantes del aula, para luego ir sentándolos uno por uno, para posteriormente analizar si existen sillas vacías. Si existen sillas vacías, la función que relaciona alumnos y sillas será inyectiva pero no sobreyectiva, si no quedan sillas vacías la función será inyectiva y sobreyectiva, por ende, biyectiva. Es importante aclarar qué sucede si 2 alumnos se sientan en la misma silla, ya que en esa situación la función deja de ser inyectiva.
- Actividad 13: La última actividad de la etapa de visualización tendrá el propósito de instaurar de forma visual, y parcialmente de forma matemática, los conceptos de núcleo, imagen y preimagen de una transformación lineal, siempre apoyándose en el diagrama de funciones. Es decir, presentar las nociones del álgebra lineal como subconjuntos del dominio o del codominio según corresponda. Esto con la intención de que los estudiantes posean las herramientas necesarias para trabajar las guías que se realizarán en la etapa de análisis

Etapa 2: Análisis

- Actividad 14: El propósito de esta actividad recae básicamente en observar el comportamiento del núcleo y la imagen de una transformación lineal a través del trabajo personal del estudiante. Para este efecto se entregará la guía 6 a los estudiantes, quienes deberán desarrollarla durante la clase. La fase de Van Hiele a partir de la cual se construye esta actividad es la orientación dirigida.
- Actividad 15: La actividad 15 pretende que los estudiantes sean capaces de vincular la idea de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad con la dimensión de un espacio vectorial, y cómo el núcleo puede relacionarse con alguna de estas características. Para cumplir este objetivo se desarrollará la guía 6. Debido a las condiciones específicas de la guía, la que presenta varias preguntas en donde se le incita al alumno a generar sus propias definiciones, se solicitará a los estudiantes que formen grupos de 3 integrantes, con el propósito de que a través de la discusión entre pares vayan refinando sus conclusiones y definiciones. Durante esta etapa las fases de explicitación y orientación libre se efectuarán de forma simultánea.

Etapa 3: Clasificación

- Actividad 15: esta actividad posee la finalidad de formalizar matemáticamente los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal y cómo esta primera idea se relaciona con la inyectividad de una transformación lineal[15]. Se espera que todo el trabajo anterior actúe como orientación dirigida, explicitación y orientación libre, ya que básicamente esta actividad se sitúa desde la perspectiva de integración. Para guiar esta actividad se debe tener presente en todo momento el diagrama de funciones, además de explicitar algunas preguntas, por ejemplo: "¿cómo controlar la inyectividad desde el interior del espacio vectorial?"

Etapa 4: Teorema de la dimensión

- Evaluación final: La actividad final consiste en una evaluación para el aprendizaje, es decir, durante el desarrollo de esta actividad el estudiante comprenda nuevas situaciones a partir de la evaluación. Durante esta etapa se desafiará a los estudiantes a demostrar el teorema de la dimensión[16]. Esto se planteará de forma tal, que se le entregarán ciertas pistas para comenzar la demostración, como pueden ser algunos conjuntos de partida y una transformación lineal que los relacione -ambos generalizados a $\mathbb{R}^n$-.

En lo que respecta a las **limitaciones y proyecciones** de la secuencia implementada, es posible señalar que una de las principales restricciones observadas durante la aplicación de la secuencia fue la extensión temporal de esta. La limitada cantidad de tiempo con el cual se contó, perjudicó en algunos sentidos la aplicación de las actividades, pues por ejemplo, no fue posible realizar la actividad número 6, la cual consistía en la profundización del concepto de matriz asociada, lo que, a la luz de los resultados, influyó de manera negativa en el proceso de conceptualización de los estudiantes. En este mismo sentido, la baja cantidad de tiempo sumado al formato online, en el cual se llevó a cabo la intervención, llevaron a que las fases del modelo de Van Hiele se ejecutaran de manera comprimida, condiciones que no son las ideales.

Otra desventaja que presenta la aplicación es la baja cantidad de estudiantes que se utilizaron para desarrollar los análisis. Esta situación, sumada al paradigma cualitativo desde donde se sitúa esta investigación, no permite generalizar los resultados observados. Sin embargo, esta

---

15 Se recuerda que si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y existe una transformación T que $\in L_{\Bbbk}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, entonces: $T\ inyectiva \iff Ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$

16 Se recuerda que si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales, tal que la $\dim(\mathbb{V}) = n$ con $n \in a\,\mathbb{N}$, y $T \in L_{\Bbbk}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, entonces: $Dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = Dim_{\mathbb{K}}\big(Ker(T)\big) + Dim_k(Img(T))$

investigación abre la posibilidad a que se desarrollen otro tipo de metodologías con las cuales sí sea posible generalizar ciertos patrones de razonamiento geométrico y algebraico.

Una posible proyección es que a la luz de los resultados observados durante el capítulo 4, es posible afirmar que implementar una secuencia didáctica de índole geométrica dentro del curso de álgebra lineal, ayuda a los estudiantes a sobrellevar de mejor manera la dificultad asociada a las transiciones semióticas de los conceptos algebraicos. Específicamente se observa que al trabajar de manera visual el concepto de transformación lineal, se genera una mejor comprensión de la relación existente entre la transición semiótica de matriz y vector, pues todos los estudiantes lograron establecer relaciones entre las nociones de vector y matriz, las cuales fueron utilizadas como puente para establecer relaciones más complejas. No obstante, existe la posibilidad que esta relación haya sido generada de manera previa a la secuencia, por lo cual, para concluir con mayor certeza este tipo de afirmaciones se necesita seguir investigando en esta área.

Para finalizar, este escrito puede considerarse como una invitación a los docentes universitarios a que innoven en el desarrollo de nuevas metodologías de enseñanza del álgebra lineal. Como se mencionó en el capítulo 1, la versatilidad de esta área de la matemática lleva a que se enseñe en gran parte de las mallas de carreras universitaria. Esta realidad, sumada a las dificultadas asociadas al aprendizaje de esta asignatura, lleva a que los estudiantes -en la generalidad de los casos- no desarrollen la capacidad de aplicar los conceptos del álgebra lineal en situaciones cotidianas de su vida profesional. Por lo cual, poder generar nuevas metodologías de enseñanza que faciliten la comprensión de los objetos abstractos del álgebra lineal abre la posibilidad de generar futuras innovaciones u optimizaciones de procesos o actividades. Ante esta última situación, el modelo de Van Hiele se muestra como un marco posibilitador para continuar en la construcción de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática, ya que los resultados mostraron el desarrollo de un pensamiento geométrico-algebraico, el cual les permite a los estudiantes razonar, transitar y relacionar comprensiones de la geometría y del álgebra.

6 Bibliografía

Álvarez, C. R. (2005). Mentefactos y niveles de razonamiento geométrico, según Van Hiele, en alumnas de licenciatura en pedagogía infantil. *Zona Próxima*(6), 82-93.

Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Unión: Revista Iberoamerica de educación matemática*(51), 27-47.

Bellei C, C. (2013). El estudio de la segregación socioeconómica y académica de la educación chilena. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 39*(1), 325-345.

Berrocal, P. F., & Melero, M. A. (1995). *La interacción social en contextos educativos.* Madrid: Siglo XXI.

Caserio, M., Guzmán, M., & Vozzi, A. M. (2007). Dificultades en el aprendizaje de matemática. Obstáculos y Errores en el aprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 91-95). Camagüey: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. E. Castro, Á. C. Fuente, J. D. Piquet, M. d. Martínez, r. G. García, & L. O. Cañada, *Investigación en educación matemática XVI* (págs. 75-94). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Charry, L. B., & Ayala, Y. B. (2015). *Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza.* Universidad del Valle.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1998). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Biblioteca del Normalista de la SEP.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de Ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería, 12*(23), 49-55.

Cruz, I. A., & Téllez, N. S. (2018). La integración de los contenidos geométricos: Un modelo Didáctico para su tratamiento. *Opuntia Brava, 6*(1), 61-69.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 90-106.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, 9*(1), 177-195.

Dias, A., Artigue, M., & Equipe, D. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra. *Proceedings of the 19th PME conference* (págs. 42-49). Paris: Universidad de Paris.

Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton, *teaching and learning of mathematics at university level* (p. 255-273). Springer.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J.-L. Dorier, *In On the teaching of linear algebra* (p. 85-124). Springer.

Dorier, J.-L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia mathematica, 22*(3), 227-261.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA NOTES*, 85-106.

Dubinsky, E., Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., & Trigueros, M. A. (2002). *Learning linear algebra with ISETL.* RUMEC.

Duval, R. (2000). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática, 28*, 1-7.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y ... una quinta. En M. d. ciencia, *Números formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 159-188). Secretaría general técnica.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 146-168.

Eslava, M., & Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Tesina de diplomado.* Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Eulate, Y. Á. (2006). Planificar la enseñanza universitaria para el desarrollo de competencias. *Educativo Siglo XXI, 24*, 17-34.

Fouz, F., & Donosti, B. d. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la geometría.* Bilbao.

Fuys, D. G. (1998). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Virginia: NCTM.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1998). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 1-196.

García, C., Oktaç, A., & Ramírez, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 413-418). Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Los autores.

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenaguaje matemático: Un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 1*(3-4), 5-16.

Guerrero, L. E. (2002). La cuadratura del círculo y otros problemas de la geometría. *CIENCIAS*(065).

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2014). *metodología de la investigación.* McGRAW-HILL.

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., & Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*(334), 75-95.

Jaime Pastor, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento (Tesina Doctoral).* Valencia.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, 20*(2), 65-89.

Labra, J. (2019). *Desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media cuando abordan el concepto de homotecia. Tesina de Magíster.* Santiago.

Lobo, N. (2004). Aplicación del modelo propuesto en la teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometria. *Multiciencias , 4*(1).

Losada, M. F. (2007). Aspectos del pensamiento geométrico escolar y sus divergencias con el pesamiento algebraico. *Memorias XVII Encuentro de Geometría y V encuentro de Aritmética* (págs. 67-90). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luzardo, D., & Peña, A. J. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

Maguiña, A. T. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (págs. 1719-1726). Montevideo: SEMUR.

Martinez, P. (2007). *Aprender y enseñar: Los estilos de enseñanza y aprendizaje desde la práctica de aula.* Bilbao: Mensajero.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). Una mirada cognitiva a las transformaciones lineales. Articulación entre sus tres interpretaciones: funcional-matricial-geométrica. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (págs. 1993-2000). Montevideo: SEMUR.

Navas, A. (2018). *Lecciones de matemáticas para el recreo.* Santiago: Planeta.

Ortegón, J. O. (2013). Conceptualización y evaluación de las competencias para el análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. *Revista Científica, 2*(16), 87-108.

Pinto, N. B. (2005). Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional, 5*(16), 25-38.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. *Investigaciones en matemática educativa II*, 109-131.

Radford, L., & Peirce, C. S. (2005). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez, *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter* (Vol. 1, p. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Rico, L., Castro, E., & Ortiz, J. (2004). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: Un estudio con profesores en formación (Tesina de maestría). *Investigación en educación matemática : Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 273-282). Servicio de Publicaciones.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario. *Formación universitaria, 10*(4), 15-32.

Robert, A., & Robinet, J. (1989). Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. *Cahier de Didactique des Mathématiques, 53*.

Rodríguez, M. L., & Ricardo, L. (2007). El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en arquitectos de la escuela cubana. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(3), 421-261.

Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos. Tesina Doctoral.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rosso, ,. A., & Barros, J. C. (2013). Entramado de lenguajes en álgebra lineal. En S. d. Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (p. 1156-1163). Montevideo: SEMUR.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática, 26*(3), 75-107.

Sánchez, J. M. (2014). Los registros semióticos como elementos de personalización en el aprendizaje. *Revista de educación educativa, 4*(9), 27-57.

Sancho, A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente. Tesina doctoral.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones.* McGraw-Hill.

Serres Voisin, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *SAPIENS, 9*(1), 122-142.

Silva Córdova, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación de la Universidad La Salle*.

Soler-Alvarez, M., & Pérez, V. M. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2*(32), 191-219.

Tirado, M. C. (2009). Docencia universitaria y competencias didácticas. *Scielo, 31*(125).

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista iberoamericana de investigación en matemática educativa, 13*(4), 373-385.

Valenzuela, J. P., Bellei, C., & De Los Ríos, D. (2010). Segregación Escolar en Chile. *Fin de ciclo*, 209-229.

Vargas, G., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y al enseñanza de la gemetría. *UNICIENCIA, 27*(1), 74-94.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vílchez, E. (2015). Paquete VilGebra: recurso didáctico a través del uso del software Mathematica en el campo del álgebra lineal. *Revista Digital Matemática, 15*(1), 1-73.

7 ANEXOS

Tabla 7.1: Planificación docente

Unidad: Transformaciones lineales		
Contenido científico	Transformación lineal; núcleo de una transformación lineal; imagen de una transformación lineal	
	Conceptual	• Relacionar los conceptos de transformación con la idea de espacios vectoriales. • Relacionar el concepto de transformación lineal con la noción de isometría y matriz asociada.
	Procedimental	• Generar isometrías en $\mathbb{R}^2$. • Construir isometrías a partir de operatoria matricial. • Demostrar si funciones definidas entre espacios vectoriales cumplen las condiciones de linealidad.
	Actitudinal	• Concepción de grupo; comunicación efectiva; autonomía
Objetivo	Interiorizar y analizar de forma visual y abstracta las propiedades de una transformación lineal y sus conceptos relacionados	
Objetivos específicos	1. Lograr que los estudiantes sean capaces de reconocer una transformación lineal de forma visual. 2. Interiorizar a los estudiantes en las propiedades que definen una transformación lineal. 3. Mostrar a los estudiantes la relevancia de trabajo grupal y el trabajo autónomo. 4. Conseguir que los alumnos sean capaces de construir distintas representaciones semióticas de los conceptos de transformación lineal.	
Aprendizajes esperados	1. El alumno reconoce de forma visual y teórica cuando una transformación representa una transformación lineal. 2. El alumno demuestra si una función definida entre 2 espacios vectoriales es una transformación lineal.	
Destinatarios	Alumnos pertenecientes al primer año de la malla curricular de ingeniería estadística	
Temporalidad	4 sesiones de 60 minutos cada una	
Recursos	Guías, GeoGebra y otros	

Fuente: Elaboración propia

Guía 1: Transformaciones isométricas

Objetivo: Definir y clasificar el concepto de transformaciones isométricas

---

Una transformación geométrica indica que una figura es alterada o sometida a algún tipo de cambio. En este contexto es necesario tener en cuenta los siguientes elementos:

- La figura original
- La operación que describe el cambio (transformación geométrica)
- La figura que se obtiene después del cambio

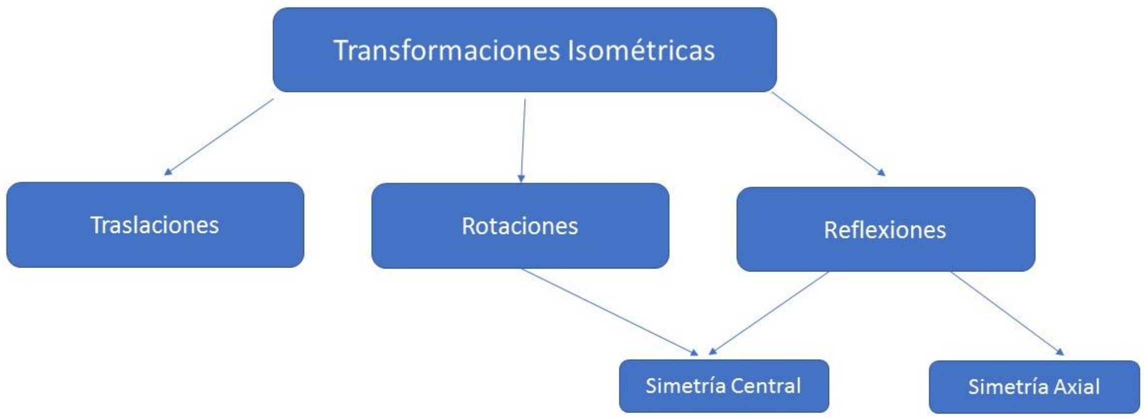
en esta guía se describirá algunas transformaciones geométricas, popularmente conocidas como transformaciones isométricas.

La palabra isometría es una palabra compuesta de origen griego, que fusiona los conceptos de iso y metría.

Isometría	Iso = Igual
	Metría = Medida

Transformaciones isométricas: Son cambios de posición de una figura determinada, que no alteran la forma ni el tamaño de la figura original.

Entre las transformaciones isométricas están **las traslaciones, las rotaciones** (Giros) y **las reflexiones** (simetrías), que serán definidas a continuaciones



<u>Traslación</u>: Corresponde a una transformación isométrica que mueve todos los puntos que componen la figura en una misma dirección, sentido y longitud. Toda traslación queda definida a partir de un **vector de traslación.**

Observaciones

- La figura conserva todas sus dimensiones, tanto lineales como angulares
- La figura jamás rota, es decir, en Angulo formado con la horizontal no varia
- No importa el numero de traslaciones que se realicen, siempre es posible resumirla en una única
- En el plano cartesiano, toda traslación queda definida por el vector de traslación T (X, Y)

<u>Rotaciones</u>: Son aquellas isometrías que permiten girar todos los puntos de un plano. Cada punto gira siguiendo un arco que tiene un centro y un ángulo determinado. Es por este motivo que, toda rotación queda definida a partir de un **centro de rotación** y por un **ángulo de giro**.

Si la rotación se efectúa en sentido contrario a como giran las manecillas del reloj, se dice que la rotación es **positiva o antihoraria**; en caso contrario, se dice que la rotación es **negativa u horaria.**

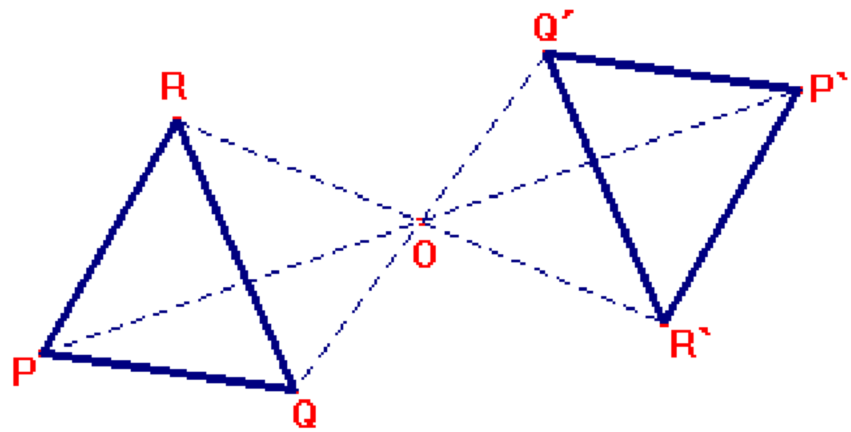
Observaciones:

- Una rotación con centro en P y ángulo de giro a, se representa por R (P, a). Si la rotación es negativa, se representa por R (P, -a)
- Si rotamos en el plano cartesiano, en el primer cuadrante y respecto al origen en un ángulo de giro 90°, 180°,270° o 360°, las coordenadas de los puntos obtenidos vienen dados por la siguiente tabla.

Punto inicial	R (0,90°)	R (0,180°)	R (0,270°)	R (0,360°)
(x, y)	(-y, x)	(-x, -y)	(y, -x)	(x, y)

Simetrías: Las simetrías o reflexiones, son aquellas transformaciones isométricas que invierten os puntos y las figuras del plano. Esta reflexión puede ser respecto de un punto (simetría central o puntual) o respecto a una recta (simetría axial)

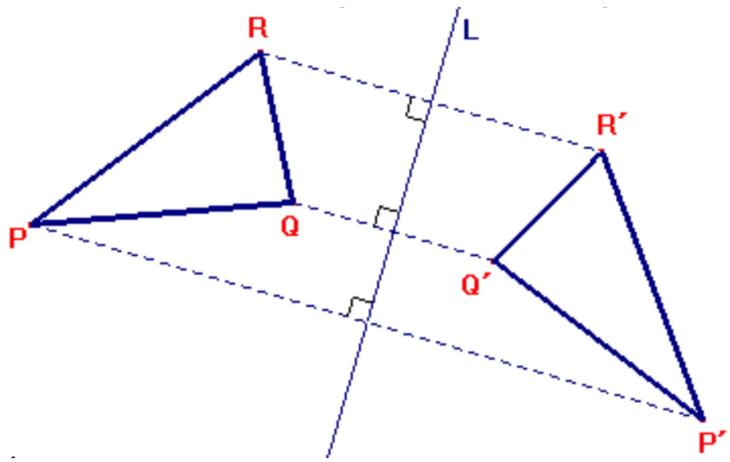
Simetría Central: Dado un punto fijo O del plano, se llama simetría con respecto a O a aquella transformación que lleva cada punto P del plano a una posición P´, de modo que P´ está en la recta OP, a distinto lado con respecto a O, y la distancia que separa a OP es la misma que separa OP´. El punto O se llama centro de simetría y P con P´ son puntos correspondientes u homólogos de la simetría.



Observaciones:

- Una simetría respecto de un punto O, equivale a una rotación en 180° de centro en O

Simetría Axial: Dado una recta fija L del plano, se llama simetría axial con respecto a L o reflexión con respecto a L, a aquella isometría que transforma a todo punto P en P´, donde estos son puntos homólogos y la recta P´P es perpendicular a L.



Observaciones

- El punto medio de P´P está en L

Las definiciones utilizadas en esta guía son informales en un contexto matemático más avanzando, pero resumen de forma sucinta el concepto que está detrás. De igual modo se deja la definición formal de isometría.

Una isometría es una aplicación matemática entre 2 espacios métricos, en donde dicha aplicación conserva la distancia existente entre los puntos, es decir, es un morfismo de espacio métricos. Por ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. f se llamará isometría si $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

- **Guías segundo ciclo**

Guía N°5 Imagen y núcleo

Objetivo: Estudiar el comportamiento del núcleo y la imagen de una transformación lineal

---

1. Determine la imagen de la transformación lineal en cada caso:
   - Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y + z, x + z)$. Determine la imagen del vector 0_{R^3}
   - Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y, 1 + z)$. Determine la imagen de la trasformación lineal
   - Sea $T: R_{[x]^2} \rightarrow R_{[x]^2}$ tal que: $T(1 + x) = 1 + x^2; T(x + x^2) = x - x^2; T(1 + x^2) = 1 + x + x^2$. Determine $T(4 - x + 3x)^2$ y además determine (si es posible) la imagen de la transformación lineal
2. Sea $T = R^2 \rightarrow R^2$, tal que $m_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determine la pre-imagen de Sy W, tal que $S = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ y de $W = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
3. Sea $T = R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ .Determine el núcleo de la trasformación lineal
4. Sea $T: R_{[x]^2} \rightarrow R^2$, tal que $T = (ax^2 + bx + c) = (a + b, c)$. Encuentre el núcleo de la transformación lineal.
5. Explique por qué en la ecuación que se utiliza para determinar el núcleo de una transformación lineal la igualdad se hace al $0_{\mathbb{W}}$ (cero vector del conjunto de llegada)
6. Que función (aritmética) cumple el $0_{\mathbb{V}}$(cero vector) dentro de un espacio vectorial.

Guía N°6 dimensión e isomorfismos

Objetivo: Relacionar los conceptos de inyectividad, biyectividad y sobreyectividad con el de dimensión.

---

1. Sea $T: R^3 \to R^3,$ tal que Sea $T(x, y, z) = (x + ky, x - 3y - z, 5y + (k - 1)z)$.Determine los valores de k, para que la transformación sea biyectiva
2. Hallar la expresión analítica de una transformación lineal, tal que $T: R^3 \to R^2$ y verifique las siguientes condiciones:
    - $(0,3) \varepsilon\, Ker(T)$
    - $Img(T) = \{(x, y, z)\ \varepsilon\ R^3 / x - 2y = 0; y + z = 0\}$
3. Clasifique (biyectiva, inyectiva, sobreyectiva) la transformación encontrada en el apartado anterior
4. Explique con sus palabras y con un diagrama lo que sucede cuando la transformación en inyectiva. Para la explicación y el diagrama considere los conceptos de imagen, núcleo, dominio, recorrido y sub-espacio
5. Explique con sus palabras y a través de un diagrama lo que sucede cuando la transformación es sobreyectiva. Para la explicación y el diagrama considere los conceptos de imagen, núcleo, dominio, recorrido y sub-espacio
6. Explique con sus palabras y a través de un diagrama lo que sucede cuando la transformación es biyectiva. Para la explicación y el diagrama considere los conceptos de imagen, núcleo, dominio, recorrido y sub-espacio
7. Que inecuaciones matemáticas puedes explicitar que relacionen los conceptos de inyectividad, biyectividad y sobreyectividad con el de dimensión del conjunto de llegada. Explica las inecuaciones obtenidas.