UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

LA DEMOSTRACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA ESCOLAR

CRISTIÁN LEONCIO VALENZUELA LILLO

Profesor Guía:

Samuel Navarro Hernández

Trabajo de titulación para optar al grado de Magister en Educación Matemática

SANTIAGO - CHILE

2019

Resumen

En la actualidad los profesores de matemática enseñan muchos contenidos y la mayor parte de ellos orientados a la preparación de pruebas estandarizadas (Simce, P.S.U.), lo que desvirtúa la enseñanza de la matemática en sí, dejando de lado algunos temas que no forman parte de las preguntas de estas pruebas, como es el caso de la Demostración, el cual es un tema fundamental en el estudio de la matemática a nivel superior, lo que provoca deficientes resultados académicos por parte de los estudiantes a nivel de primer año de las carreras de ingeniería y ciencias.

Por otro lado siendo rigurosos en la enseñanza de la matemática, en el currículo nacional no está presente la enseñanza de la demostración, sino que es parte de algunas materias, donde en la mayoría de los casos los profesores soslayan incluso su realización como parte de la validación del contenido que es enseñado, este problema es el que motiva la realización del presente trabajo.

El presente trabajo es una investigación experimental cuantitativa que se realiza con dos cursos de enseñanza media de un colegio particular subvencionado de Santiago.

La hipótesis central del trabajo es ver en qué medida la realización de una secuencia didáctica permite mejorar el aprendizaje de la demostración por Inducción en estudiantes de cuarto medio.

A partir de la experiencia realizada con los estudiantes no se observa una mayor incidencia de la secuencia didáctica en uno de los cursos, pero sí se observan importantes elementos que permiten analizar cómo los estudiantes llegan a desarrollar el método de demostración por inducción. Es importante destacar el hecho de que la experiencia es absolutamente nueva para los estudiantes y representa una primera aproximación a la enseñanza de la demostración.

Mis sinceros agradecimientos a mi familia por su apoyo constante, y a los

Profesores: Dr Felipe Villarroel y Dr. Samuel Navarro

Tabla de contenido

1. Planteamiento del Problema

1.1. Descripción

Un profesor plantea a sus alumnos en la pizarra lo siguiente: “La suma de dos números pares es par”, los estudiantes responden: es obvio 2 + 2 = 4; 2 + 6 = 8; 4 + 8 = 12, y así siguen respondiendo. A lo que el profesor pregunta ¿ Siempre será así?, ¿o habrá un caso en que no se cumpla?. Un estudiante responde: “es claro que siempre será así ya que por ejemplo 120 + 230 = 350, es par y le puedo dar más casos con números mayores”. El profesor plantea lo siguiente: “$n^2 + n + 41$, es siempre un número primo, para todo n natural”, los estudiantes responden con algunos casos: para n =1, n=2, n=3, n=4,…., después de un rato un estudiante dice, pero profesor para n = 41, da 1763, el cual es divisible por 41, a lo que el profesor dice: “¿que hemos aprendido de lo anterior?”.

La situación planteada es un caso que puede pasar en una sala de clases; cuando se plantean situaciones donde debemos verificar afirmaciones que hacemos en Matemática, donde no siempre se discute la situación y sólo se entrega la respuesta por el profesor no instando a los estudiantes a plantearse por qué la afirmación es válida, es decir, se enseña sin demostrar lo que se afirma en Matemática, se soslaya la prueba de lo que afirmamos, debido en parte a que algunos docentes dicen que el demostrar en algunos casos les confunde más que lo que les aclara el concepto a los estudiantes (Larios, 2002).

La presente tesis es una investigación cuantitativa, cuasi-experimental que pretende analizar el papel que juega la demostración en el aula escolar en el desarrollo del pensamiento formal de los estudiantes, a través de la aplicación del método de inducción en demostraciones, siendo el foco más que la demostración misma, el proceso como los estudiantes aplican el método. Para lo cual, primeramente se hace un recorrido histórico y epistemológico sobre la demostración respecto a estudios que se han realizado, hasta ahora, dejando en claro que en Chile es escasa la investigación que se ha realizado a excepción de algunas tesis, (Peña y Elbia, 2006; Padilla,1985). Posteriormente se realiza un experimento con dos cursos del diferenciado de IV Medio del área Matemática del colegio particular subvencionado Alicante de Maipú, donde en uno de ellos se aplica una secuencia didáctica respecto al tema de demostración por inducción, basado en los pasos que plantean tanto Castro, Cañadas y Molina (2010) como también en el estudio hecho por (Balacheff, 2000).

La idea fue verificar empíricamente si existió algún efecto en la aplicación de la secuencia didáctica en el desempeño de la demostración por inducción de un curso con respecto del otro; para finalmente, a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo de lo que ocurrió, poder ver si existió concordancia con las investigaciones hechas hasta ahora sobre el aprendizaje de la demostración y verificar que el comportamiento de los estudiantes es similar a lo anterior.

Finalmente lo que se pretende con este trabajo es dar una primera aproximación a la implementación en la asignatura de Matemática de la demostración, como una herramienta habitual en la enseñanza de la Matemática, de tal manera que esta herramienta incida favorablemente en la continuidad de los estudios en la universidad y no exista esa brecha que actualmente existe entre lo que se aprende en el colegio y luego en la universidad, y yendo un paso más allá, el lograr que el estudiante no sólo aplique en la demostración un razonamiento lógico sino que lo aplique en la forma de analizar situaciones que se le presenten en diversos ámbitos de su vida.

1.2. Antecedentes

En las últimas tres décadas el tema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en Matemática en todos los niveles educativos ha tomado relevancia debido a que muchos investigadores en educación han cuestionado todo lo referente a los métodos en la enseñanza y aprendizaje de ésta, prueba de ello son las dos ediciones de los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* (2000, 2005), donde se destaca el razonamiento y la demostración como uno de los cinco estándares de procesos que los estudiantes deberían conocer y ser capaces de usar con mayor precisión y complejidad a medida que avanzan en su escolaridad. En la más reciente de dichas publicaciones se sugiere que los programas de enseñanza en todos los niveles desde educación infantil hasta educación secundaria deberían formar al estudiante para lograr:

- "Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la matemática
- Formular e investigar conjeturas matemáticas
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración".
  (Principios y Estándares para la educación matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 2003, p. 59)

En Chile el currículo le otorga una menor importancia a la demostración y su enseñanza y aprendizaje en el aula escolar, sólo en algunos casos aparece como objetivo en la unidad de Congruencia y Semejanza de Triángulos en primero medio, al igual que en la unidad de números complejos de tercero medio. Es decir el tema de la demostración, tanto en su enseñanza como en su utilización en el aula, nos ofrece una gran oportunidad para ser investigado en el país, tomando como guía los múltiples estudios que se han realizado y se realizan afuera del país, destacando para este estudio en especial las investigaciones de Balacheff y Castro, Cañadas y Molina, con su modelo de enseñanza para la demostración en el aula.

Como un ejemplo respecto a la incidencia que puede tener el preparar de mejor manera a nuestros estudiantes para que el primer año universitario no sea un fracaso, tenemos la cantidad de alumnos aprobados y reprobados del curso Calculo I de ingeniería en la Usach, en porcentajes.

Año	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Aprobados	44.3	41.7	64.5	59.1	46.1	43.1	47.1
Reprobados	55.7	58.3	35.5	40.9	53.9	56.9	52.9

Unidad de Informática Usach (2018)

Como podemos observar existe un significativo número de reprobaciones de los estudiantes de primer año de Ingeniería en el curso de cálculo I, donde es parte de su programa el uso de distintos tipos de demostración.

1.3. Justificación

A través del tiempo y de acuerdo a los resultados académicos en Matemática en los primeros años de las carreras de Ingeniería y ciencias se ha observado que el pasar del colegio a la Universidad para los estudiantes representa un cambio difícil de asimilar para el estudiante, en especial en Matemática, donde al estudiante se le enseña principalmente a calcular mediante procesos mecánicos y se le entregan las proposiciones y teoremas sin demostración, es verdad que en algunos casos ésta se escapa a los conocimientos que deberían tener los estudiantes en este nivel, pero en otros casos es posible enseñarla contribuyendo a que el estudiante pueda comprender el porqué del concepto. Por mi experiencia de más de 27 años de docencia he podido observar que la mayoría de los profesores evitan demostrar en el aula, y están aún menos dispuestos a enseñar métodos de demostración, principalmente por prejuicio respecto a la comprensión que tendrán los estudiantes de esta. Esta es la razón principal de este trabajo, ser un primer acercamiento a desarrollar el pensamiento formal en el estudiante a través de la demostración por inducción, abriendo el camino a los demás métodos de demostración, lo cual permitirá ser un aporte más a que el paso del colegio a la universidad sea menos accidentado, y que el estudiante tenga las herramientas necesarias para poder comprender más allá del cálculo u operatoria, por qué un concepto matemático es válido o no.

Es importante el hacer notar que la curiosidad propia del niño, que no ha tenido una formación escolar, como cuando está en prekinder, es totalmente libre y pura en el sentido de no estar condicionada a lo que le dicen los mayores, en este caso sus profesores, los cuales generalmente les decimos lo que tiene que hacer y cómo hacerlo, logrando un estudiante al final de su educación formal condicionado a lo que se le enseñó, justamente esto es lo que no deberíamos hacer con respecto a la enseñanza de la demostración, nuestra labor sería entonces el conducir las inquietudes de nuestros estudiantes dejándolos en total libertad, con el fin de mostrar todas sus ideas frente a cualquier problemática presentada, esa es la razón de que en este trabajo, más adelante en la secuencia didáctica, se comienza con problemas muy generales donde los estudiantes deben sólo identificar patrones, dejando en total libertad el cómo lo hagan.

Objetivos

Objetivo General:

- Desarrollar las habilidades necesarias de los estudiantes de cuarto medio para el aprendizaje de la demostración por inducción matemática.

Objetivos Específicos:

- Desarrollar las habilidades necesarias de los estudiantes de cuarto medio a través del método de Inducción Matemática en la demostración de expresiones del tipo: fórmulas de sumatorias, desigualdades con números naturales y criterios de divisibilidad.

- Comprobar la incidencia de la secuencia didáctica basada en el modelo de Castro, Cabañas y Molina, aplicada en uno de los cursos, en el aprendizaje de la demostración mediante el método de inducción Matemática

2. Marco Teórico

2.1. Contexto Histórico sobre los orígenes de la Inducción.

El concepto de pensamiento inductivo ya estaba presente en los escritos de Aristóteles el cual planteaba: "La inducción es un tránsito de las cosas individuales a los conceptos universales", es decir ya estaba presente la esencia de este pensamiento que es generalizar a partir de lo particular. Posteriormente hubo acercamientos al pensamiento inductivo en matemáticos árabes, los cuales no lo tenían muy claro y sólo lo aplicaban para probar algunos resultados, no es hasta el año 1494 que nace el clérigo Francisco Maurolico quien utiliza el llamado método de recurrencia para probar algunos resultados en aritmética, como lo muestra el siguiente ejemplo al probar la proposición: La suma de los n primeros números impares es igual al n-ésimo número cuadrado. Maurolico realiza lo siguiente: Vemos que $1 + 3 = 4$, segundo número cuadrado. Este 4 agregado al tercer impar, que es 5, da 9; tercer número cuadrado. Análogamente $9 + 7 = 16$, cuarto número cuadrado. Y así sucesivamente. La proposición queda demostrada apoyándose en un teorema anterior de Maurolico: "Todo número cuadrado más el siguiente impar es igual al cuadrado del siguiente"

Si nos fijamos bien en el procedimiento seguido, notamos que en primer lugar se hace la verificación de la propiedad para un primer elemento; después se busca convalidar dicha propiedad respecto de un elemento diverso del primero; por fin se observa, que el proceso es hereditario y que continua sin modificaciones indefinidamente. Como vemos, tenemos el origen del método inductivo, respecto a los pasos que se debían seguir, este autor es anterior a Blaise Pascal (1623-1662), el cual se creía que fue el primero en usar el método inductivo, eso sí, Pascal fue el primero en usarlo en forma más precisa y detallada, como se expone en el siguiente caso, respecto a la demostración de una proposición sobre triángulos:

"El primer paso, es evidente por sí mismo, es que la proposición es cierta en un primer caso, como se verifica con solo observar la disposición del triángulo.

El segundo paso, nos dice que si la proposición vale en cualquier caso, valdrá necesariamente en el siguiente".

Cabe hacer notar que Pascal mantenía una gran correspondencia con el matemático francés Pierre de Fermat (1601 a 1655), y este había desarrollado un método de demostración llamado "El descenso infinito", el cual, se puede graficar con el siguiente ejemplo: probar que todo número primo de la forma 4n +1 se puede escribir como suma de dos cuadrados, consistía en partir suponiendo lo contrario de lo que quiero probar y así supongo que algún número primo de la forma 4n + 1 no es la suma de dos cuadrados. Entonces demuestro que existe otro número primo menor que aquel y también de la forma 4n + 1, que tampoco es suma de dos cuadrados. De este caso, a su vez, desciendo a otro primo menor todavía pero de la misma forma, que tampoco es suma de dos cuadrados. Y continúo así hasta llegar al 5, el menor de todos los primos de la forma 4n + 1, del cual en virtud de la demostración que vengo siguiendo debo afirmar que no es igual a la suma de dos cuadrados. He aquí, al cabo, una contradicción, pues $5 = 2^2 + 1^2$.

El gran problema de este método es que Fermat no explicó cómo se pasaba de un caso al otro, para tener la certeza de que la propiedad erróneamente supuesta se transfería en forma necesaria durante el retroceso.

Si analizamos detenidamente lo que hacía Fermat era una manera distinta de hacer el método de inducción, es decir aproximadamente al revés, por otro lado Fermat sabía que un número entero positivo no se puede disminuir en forma indefinida, cosa que se aproxima al principio del buen orden, lo cual garantiza el hecho de que el proceso de descenso sea finito. Posteriormente Jacob Bernoulli (1654 – 1705) hizo a partir de 1686 el uso más extenso del método inductivo dejándolo incorporado definitivamente como método demostrativo.

Al correr del tiempo aparecen en escena dos grandes matemáticos: Richard Dedekind (1831-1916) y Giuseppe Peano (1858 – 1932), los cuales pretenden fundamentar la aritmética a partir de un conjunto de ideas primitivas, cada uno por un camino distinto, para nuestro caso nos detendremos en lo realizado por Peano, el cual decidió considerar al número natural directamente, dando de él una definición implícita por la vía axiomática, estas se fundamentan en tres ideas: número, primer elemento y siguiente, estas ideas primitivas quedan caracterizadas por cinco axiomas:

1. El 1 es un número natural, entonces 1 está en el conjunto N de los números naturales.
2. Todo número natural *n* tiene un sucesor *n** (este axioma es usado para definir posteriormente la suma).
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.

4. Si hay dos números naturales *n* y *m* con el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto de números naturales, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.(gazeta de matemática, 1964, p.2)

El quinto de los cuales constituye el principio de inducción completa, el cual no es tan claro e intuitivo como los cuatro que le anteceden.

Alessandro Padoa (1868 – 1937), elaboró entre 1902 y 1906 una fundamentación más estricta, apoyándose solamente en dos ideas primitivas: la de ***número*** y la de ***siguiente***, y enunció cuatro axiomas siendo el último el de Inducción Completa.

En 1908, Mario Pieri (1860 – 1913) modificó aún más la axiomática de la escuela italiana, movido por la opinión de que el principio de inducción completa es una proposición más complicada que la de los restantes axiomas. Así, empleando como ideas primitivas la de número y la de siguiente, propone cuatro axiomas, el último de los cuales reemplaza a la inducción completa y es el principio del buen orden: " En cualquier clase no nula de números naturales, existe por lo menos uno que no es el siguiente de ningún número de la clase"(gazeta de matemática, 1964, p.13)). Es decir Pieri establece como axioma el principio del buen orden y como proposición la inducción completa, lo que finalmente se obtiene es que el conjunto de los números naturales está bien ordenado, es decir, cualquier subconjunto de él posee un primer elemento y el teorema de la inducción completa queda como:

"Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado ***m***, basta verificar:

a) Que P se verifica para ***m***

b) Que supuesto que P se verifica para $\boldsymbol{n \geq m}$**,** se prueba que P se verifica para n + 1".(gazeta de matemática, 1964,p.18)

A partir del siglo XIX, se generó una revisión de los fundamentos de la matemática, y en especial del principio de inducción, el cual confrontó dos posiciones al respecto, una era de que el principio de inducción completa se podía demostrar a partir del principio del buen orden y al otra postura era que no se podía demostrar ya que al hacerlo se caería en el uso de algún axioma equivalente, esta última postura la sostenía Henri Poincaré (1854 – 1912). La tesis promovida por Poincaré y sus adversarios era saber si la diferencia entre la lógica y la matemática es insalvable o no. Las tesis de Poincaré tuvo adeptos y adversarios. Entre sus adversarios tenemos a Alessandro Padoa (1868 – 1957) quien sostuvo que Poincaré se equivocaba al afirmar que el principio de inducción implicaba una infinidad de silogismos. Al contrario dice, consiste únicamente en una proposición cuya premisa es la afirmación simultánea de sólo dos condiciones, ya que si tuviera infinidad de silogismo carecería de utilidad, el principio se limita a asegurar la validez de una propiedad para cualquier número; y decir cualquiera significa todos los números. Dentro de todos los adversarios de Poincaré está el filósofo matemático Bertrand Russell (1872 – 1970), quien mantenía la tesis logicista de que la matemática no es otra cosa que lógica y en cuanto al principio de inducción, sostuvo que puede considerárselo una simple definición, siendo innecesario darle la categoría de axioma fundamental del número natural.

Finalmente a pesar de las posturas contrarias antes descritas, aparece una definición que es resultado de una síntesis de la postura de Peano y es la que se usa actualmente del principio de inducción completa, debida al matemático serbio Duro Kurepa (1907 – 1993), la cual plantea:

Si un conjunto S satisface:

a) $1 \in S$
b) Las relaciones $n \in \mathbb{N}, n \in S$ implican $n+1 \in S$; entonces $\mathbb{N} \subseteq S$

Por lo visto hasta ahora, el principio de inducción tiene una historia que se adentra en lo más profundo de la fundamentación matemática, siendo un principio que generó mucha controversia al igual que en su tiempo el quinto postulado de Euclides. La demostración por inducción es una herramienta útil que nos ha permitido demostrar variadas proposiciones en diversos campos de la Matemática, es por esto y su ordenada estructura para ser enseñada que se eligió como ejemplo de tipo de demostración para este estudio.

Por otro lado también es importante contextualizar respecto a la enseñanza y aprendizaje de la demostración desde el punto de vista de la educación matemática, y es por eso que a continuación se describen las distintas corrientes investigativas en el área de la enseñanza y aprendizaje de la demostración.

2.2. Distintas corrientes en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática en el aula

Los estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han desarrollado desde distintas perspectivas, las cuales permiten tener una visión de este proceso. A continuación describiremos los aspectos principales de estas corrientes:

2.2.1. Línea Histórico – Epistemológica

En esta línea lo que se ha pretendido por los investigadores es mostrar que la demostración ha sido vista bajo diferentes perspectivas por los matemáticos a través del tiempo en las diferentes culturas y épocas, destacándose tres momentos claves:

1. “En Grecia la demostración buscaba convencer en medio del debate
2. En el siglo XVII se buscaba que las demostraciones aclararan más que convencieran, y los métodos de descubrimiento jugaban un papel central.
3. En el siglo XIX se regresa a un rigor que permita hacer frente a las nuevas concepciones de los objetos matemáticos, que trajo consigo problemas de fundamentos de la Matemática y la aceptación de teorías anti-intuitivas o no visibles” (Arsac, 1988, p. 247-280)

Es decir la demostración nace como una forma de validar el conocimiento adquirido, y sus métodos han ido refinándose, desde lo que en un principio era convencer y validar las estructuras lógicas que subyacen en la demostración hasta ser en sí un proceso de creación del conocimiento.

En el presente trabajo la línea teórica sobre el aprendizaje y enseñanza de la demostración se basa en los trabajos realizados por Nicolás Balacheff , y además en la aplicación de un modelo para la implementación de una secuencia didáctica, a partir del trabajo de Castro, Cañadas y Molina (2010)

Con respecto al estatus otorgado a la demostración Balacheff distingue 5 posiciones:

- “La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación del conocimiento. En ese sentido, la demostración matemática podría ser vista, debido a sus relaciones privilegiadas con la lógica, como una referencia para procesos de validación en otros ámbitos y como el mejor ejemplo de racionalidad. Esto parece haber sido sistematizado de manera bastante radical por los educadores matemáticos estadounidenses de la primera mitad del siglo pasado.

- La demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica y particular, ligada al contenido matemático. El esquema de demostración de una persona es algo completamente subjetivo, que puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra y de una generación a otra. Así los esquemas de demostración son idiosincrásicos y varían de un campo a otro, incluso dentro de la matemática.

- La demostración es una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de la matemática misma. La demostración es connatural al pensamiento matemático y el razonamiento deductivo, que sustenta el proceso de validar y diferencia a la matemática de las ciencias empíricas. El proceso de construcción de una demostración es claramente complejo y riguroso; se trata de partir de lo que se sabe, las propiedades matemáticas que ya se conocen o se pueden asumir, identificar lo que se va a deducir y organizar un conjunto de transformaciones necesarias para inferir lo segundo a partir del conjunto inicial de propiedades, usando esquemas de razonamiento lógico.

- La demostración es una herramienta necesaria para la matemática, cuya utilidad se percibe en sus aplicaciones. La demostración adquiere significado en el juego dialéctico entre formular una demostración y comunicar su significado. Esta dialéctica se debería explotar en la enseñanza combinando procesos sociales de verificación con la elaboración de demostraciones en el marco de sistemas teóricos. En ese sentido, la contribución más importante de la demostración a la educación matemática es la comunicación de la comprensión matemática. Un currículo de matemática que tiene como objetivo reflejar el verdadero papel de la demostración rigurosa de la matemática debe presentarla como una herramienta indispensable de la matemática.

- La demostración es un campo autónomo específico de la matemática. Un teorema sólo es aceptable porque es sistematizado en una teoría, con una total autonomía de cualquier verificación o argumentación a nivel empírico. Esta posición se basa claramente en el reconocimiento de una característica específica de la matemática: la organización teórica de acuerdo a axiomas, definiciones y teoremas.” (Balacheff ,2008, p.501-512)

A partir de lo que plantea Balacheff podemos deducir que el aporte más importante del proceso de demostración, cualquiera sea su tipo, es la validación del conocimiento matemático por parte del estudiante, ya que es él, el que lo valida mediante un primer acercamiento empírico (un simple ejemplo de una situación matemática), para posteriormente a través de un planteamiento formal llegar a su demostración.

2.2.2. Línea con respecto al Currículo

En esta línea los investigadores han buscado la relación entre el estatus que tiene la demostración a nivel del currículo y se han planteado las siguientes preguntas: ¿qué relación tiene la enseñanza de la demostración y la concepción que tienen de ella los estudiantes?, ¿cuál es el estatus de la demostración en la escuela?

Batista y Clements (1995), plantean que el currículo de secundaria debe estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento gradualmente, conduciéndolos a comprender los defectos de las justificaciones visuales y empíricas para que descubran y comiencen a usar componentes críticos del pensamiento formal.

Por otro lado, Godino y Recio (2001) plantean que la enseñanza de la matemática debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como que sean conscientes de las relaciones dialécticas entre ellas.

En nuestro país la demostración no aparece en forma explícita en el currículo, sólo se toca de soslayo, al plantear que los estudiantes en ciertos niveles de la enseñanza deben desarrollar el pensamiento analítico, junto al de crítica; pero por ejemplo no se explican metodologías para la enseñanza de la demostración en los diferentes niveles escolares. Por lo cual tenemos una oportunidad para partir a través de un método de demostración, como es la inducción, el cual debiera ser parte del currículo en forma definitiva.

En el presente trabajo se plantea una forma de cómo podría abordarse la enseñanza de la demostración, la cual puede perfeccionarse e incorporarse al currículo, ya que como hemos dicho permite validar el conocimiento y al mismo tiempo permite en el estudiante desarrollar sus habilidades del pensamiento formal.

3. El aprendizaje y enseñanza de la Demostración por Inducción Matemática

El razonamiento inductivo es un medio potente de construcción del conocimiento ya que permite a partir de un concepto particular, poder generalizar a conceptos más abstractos, es ahí donde radica su importancia, además este método nos permite pasar en forma gradual desde la verificación de casos concretos a poder plantear conjeturas, que pueden ser verdaderas o falsas lo que genera un ambiente de discusión entre los estudiantes, como lo que plantea Balacheff (1988), "la interacción social", enriqueciendo su aprendizaje y preparándolos para el paso más complejo que es el demostrar. En este trabajo ha resultado ser muy adecuado el modelo planteado por Castro, Cañadas y Molina (2004), ya que se estructura desde lo más básico a lo más elaborado en el proceso de aprendizaje de la demostración; los pasos planteados son:

i) *Trabajo con casos particulares:* En esta etapa los estudiantes analizan casos particulares, concretos y fáciles de observar.
ii) *Organización de casos particulares:* En esta etapa los estudiantes ordenan los datos obtenidos de la forma más adecuada para visualizar regularidades.
iii) *Identificación de patrones:* En esta etapa los estudiantes visualizan los patrones y regularidades de los datos previamente ordenados, en esta etapa es posible detectar los contraejemplos.
iv) *Formulación de conjeturas:* En esta etapa los estudiantes plantean afirmaciones con base en lo previamente descubierto en la etapa anterior, es una etapa de discusión.

v) *Justificación de las conjeturas:* En esta etapa los estudiantes argumentan sobre la veracidad de lo descubierto, lo cual lo hacen en una primera etapa en forma intuitiva fundamentando sólo con ejemplos.

vi) *Generalización:* En esta etapa los estudiantes plantean o extienden su planteamiento más allá de los casos particulares analizados.

vii) *Demostración:* Esta etapa es quizás la más compleja para los estudiantes ya que se debe formalizar y justificar lo planteado sin dejar lugar a dudas, siguiendo un proceso de pasos lógicos que posee la inducción matemática.

En este trabajo la demostración por inducción es solo un tipo de demostración, y se eligió debido a que presenta una secuencia ordenada de pasos, lo que permite al profesor enseñarla de una forma más cercana al estudiante, ya que los pasos del proceso están bien delimitados y ordenados, es decir no requiere mayor creación, como una demostración directa, ni una fuerte base en las propiedades de la lógica en su desarrollo, como quizás sea necesario en la demostración por el absurdo o la demostración por contraposición. Por otro lado como dice Pólya: “el razonamiento inductivo es el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico mediante el descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares” Pólya (citado en Castro, Cañadas y Castro (2010). Lo que se pretende como fin último es que el estudiante pueda desarrollar todo tipo de demostraciones en el tiempo, teniendo presente que su enseñanza debe ser desde los primeros años de escolaridad, ya que por la experiencia de todos los estudios hechos, el proceso de demostrar requiere habilidades superiores en el estudiante que deben desarrollarse en forma paulatina desde lo más concreto en un inicio hasta lo más abstracto en una última etapa, como lo plantean autores como Larios, Mariotti, Boero y Balacheff.

De acuerdo a todo lo visto anteriormente existe coincidencia entre los investigadores respecto al orden en el aprendizaje de la demostración, respecto a esto tenemos lo que nos dice Cañadas, Castro y Molina (2014):

Numerosas investigaciones de las últimas décadas entre las que se encuentran las realizadas por Maher y Martino (1996) y Waring, Orton y Roper (1999) centradas en los procesos de validación formal han evidenciado la existencia de dificultades en la realización de estos procesos por parte de los alumnos de los niveles medios. Alguna de estas dificultades se han atribuido a que los estudiantes no pueden adquirir las habilidades de razonamiento necesarias para llegar a hacer y comprender una demostración matemática formal de manera inmediata, sino que necesitan un periodo de tiempo para adaptarse y es conveniente que sigan una progresión lógica en el desarrollo de su razonamiento” (p. 7)

De acuerdo a uno de los objetivos específicos planteados podemos plantear la siguiente hipótesis:

H_1: El aplicar una secuencia didáctica basada en el modelo de Castro, Cabañas y Molina (2014) a un curso de IV Medio Diferenciado Matemático, mejora los resultados en el aprendizaje del método de demostración de inducción.

H_0: El aplicar una secuencia didáctica basada en el modelo de Castro, Cañadas y Molina (2014), a un curso de IV Medio Diferenciado Matemático, no mejoran sus resultados en el aprendizaje del método de demostración de inducción.

4. Marco Metodológico

En este caso el trabajo es del tipo experimental, con una variable independiente y una variable dependiente:

X: aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Cabañas, Castro y Molina (2014), para el aprendizaje de la demostración por inducción.

Y: nivel de aprendizaje de los estudiantes del método de demostración por inducción.

Por otro lado el grupo experimental es un curso de IV Medio del diferenciado matemático y el grupo control es otro IV Medio de iguales características.

4.1. Descripción de la muestra

La muestra elegida fue dos cursos de IV Medio (C y D), del plan diferenciado Matemático del colegio Alicante de Maipú, colegio particular subvencionado Humanista-Científico de la comuna de Maipú, que tiene una matrícula de 3600 alumnos desde prekínder a IV Medio, los alumnos tienen una condición económica de nivel medio y el colegio no tiene incorporado programa PIIE. La razón de elegir este colegio fue sólo porque resultaba más práctico para realizar la investigación (dado que el investigador trabajaba en el lugar), y los cursos debido a que los dos eran del plan diferenciado de matemática y donde además se autorizó por parte de coordinación del colegio el realizar la investigación.

Al describir los cursos en estudio se puede decir que: El IV Medio C posee 37 alumnos y estaba a cargo de la profesora en paralelo, mientras que el IV Medio D, posee 39 alumnos, y estaba a cargo del investigador; en cada uno de los cursos existe una clara inclinación a la Matemática ya que los estudiantes pretenden estudiar carreras del área científica: ingeniería, bioquímica, física, etc, y donde además un gran número de alumnos tenía excelentes resultados académicos, en la asignatura.

En este experimento el IV Medio D, es el grupo experimental, es decir el curso donde aplicamos la secuencia didáctica (Anexo 1), mientras que en el otro curso se aplicó una planificación estándar (Anexo 4), basada completamente en el texto Matemática Educación Media Plan Electivo III y IV Medio de editorial Santillana 1998; esta secuencia se aplicó durante 3 semanas, y al final del periodo se aplicó una prueba validada en base a los ejercicios planteados en la secuencia didáctica (Anexo 3). La situación de aprendizaje fue completamente nueva para los alumnos ya que jamás habían hecho demostraciones anteriormente, sólo tenían conocimiento de:

a) Las Sucesiones y sus propiedades
b) Concepto de Sumatoria y sus propiedades

En un principio hubo grandes dificultades para apropiarse del tema, ya que no estaban acostumbrados a explicar los resultados que siempre habían usado, teniéndolos por cierto, a lo más habían probado distintos casos usando valores numéricos, esa era la constatación de una afirmación matemática para los estudiantes hasta ahora.

Durante la aplicación de la secuencia se trabajó en paralelo con el otro curso, pero en forma absolutamente independiente, además la variable profesor no afectó el estudio, ya que por política del colegio, los profesores deben desarrollar las clases en base a una planificación común y metodología similar para no generar diferencias en el aprendizaje de los estudiantes.

4.2. La Secuencia Didáctica

En un principio se decidió buscar información escrita como digital sobre didáctica en el tema de la inducción Matemática, pero lamentablemente no se encontró nada, ya que el tema se estudia principalmente a nivel superior. Por lo cual debido a esta situación, se planteó el problema desde el punto de vista del investigador, es decir se preguntó, poniéndose en el lugar del estudiante:¿Cómo sería más simple y natural aprender a demostrar usando el principio de inducción?

Y por otro lado es aquí donde el usar el modelo de Castro, Cabañas y Molina (2010), y el experimento realizado por Balacheff, en su trabajo: “Procesos de prueba en los alumnos de matemática” (Balacheff, 2000) con su grupo de alumnos, lo que nos permitió tener una idea más acabada de lo que queríamos hacer

Para ello me centré en 3 situaciones de demostración donde era común el usar la inducción, ya que representan situaciones que generalizan resultados con números naturales:

a) Probar fórmulas de Sumatorias como por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Probar desigualdades con números naturales como por ejemplo:

$$2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Probar criterios de Divisibilidad, como por ejemplo:

$n^2 + n$, es divisible por 2 $\forall n \in \mathbb{N}$

Cada uno de los casos mencionados los incorporé en las 3 guías para trabajar en forma grupal en el IV Medio D. En el otro curso se desarrollaron los temas basándose sólo en la planificación (Anexo 4). Veamos una breve descripción de estas guías:

Guía N°1: En esta guía se plantean situaciones de los 3 casos mencionados donde deben conjeturar fórmulas y verificar resultados. En un primer ejercicio se pide deducir fórmulas para algunas sumatorias, es decir, encontrar un patrón a partir de la verificación de casos.

En otro ejercicio se pide determinar para qué número son divisibles ciertas expresiones, donde también los estudiantes deben verificar para distintos casos la afirmación, en este caso no se busca un patrón, sino que un comportamiento continuo, y es en este caso donde es más factible encontrar un contraejemplo si se requiere.

Y finalmente en, la guía se pide verificar algunas desigualdades con números naturales, pudiendo presentarse en este caso el contraejemplo si se requiere.

Guía N°2: En esta guía se plantean demostraciones usando inducción, para lo cual en un primer ejercicio se pide elegir aquella demostración de las tarjetas que se encuentre perfectamente desarrollada y además, exponer frente al curso la razón de porqué la otra demostración está incorrecta. En este caso el estudiante debe centrase en los pasos de las demostraciones y encontrar el error si es que lo hay.

En un segundo tipo de ejercicio el estudiante debe armar la demostración mediante el ordenamiento de los pasos dados en tarjetas y pegarlos en la guía. En este caso se busca que el estudiante tenga claro el orden de los pasos en una demostración por inducción. Este ejercicio refuerza lo que hicimos en la primera parte de la guía.

Finalmente, se dan un conjunto de ejercicios donde el estudiante debe demostrar usando inducción.

Guía N°3: En este caso lo que pretende esta guía es que los estudiante no sólo entiendan el proceso de demostrar por inducción como un proceso mecánico de pasos sin un sentido, por lo cual se fundamenta el proceso pidiéndoles que establezcan las relaciones entre distintos conceptos como: Axiomas de Peano, Principio del Buen Orden, y los pasos de la inducción. Después de relacionar estos conceptos los estudiantes deben responder algunas preguntas, que pueden ser discutidas entre ellos, socializando el conocimiento.

Todas las guías son discutidas y resueltas en las clases a través de los distintos avances de los estudiantes.

Al terminar el desarrollo de las guías se le aplicó a ambos cursos una prueba para determinar el nivel de aprendizaje de la demostración por inducción usando la secuencia didáctica, y poder contrastar con los estudiantes del otro curso, que sólo habían trabajado los ejercicios del texto Santillana.

4.3. Análisis de los Datos

El siguiente estudio experimental con hipótesis causal, se realizó en el colegio Alicante de Maipú, el cual es un colegio particular subvencionado que actualmente es una fundación sin fines de lucro, que tiene 15 años de funcionamiento con una matrícula de 3700 alumnos desde prekinder a IV Medio, con una clara tendencia academicista.

Durante el mes de Octubre se aplicó la planificación sobre Inducción Matemática, en ambos cursos en base al texto de Matemática III y IV Electivo Santillana y al finalizar esta se tomó el pre-test (Anexo 3), a ambos cursos. Posteriormente en el curso grupo experimental se aplica la secuencia didáctica y en el otro se realizan ejercicios del texto en base a la planificación.

A continuación se muestran los resultados del análisis estadístico de emparejamiento de ambos cursos, donde se usó el software estadístico SPSS

4.3.1. Emparejamiento de datos.

Curso de los estudiantes

Resumen del procesamiento de los casos

	Curso de los estudiantes	Casos			
		Válidos		Perdidos	
		N	Porcentaje	N	Porcentaje
Notas de Matemáticas	IV Medio C	37	100,0%	0	0,0%
	IV Medio D	39	100,0%	0	0,0%

El análisis fue sobre el total de la muestra, donde no se dio el caso de alumnos que se ausentaran y después se reintegraran, como se aprecia en la tabla.

Descriptivos: Rendimiento en Matemática

Curso de los estudiantes			Estadístico
IV Medio C			
	Media		**5,7486**
Intervalo de confianza para la media al 95%		Límite	5,5593
inferior			5,9380
		Límite	5,7566
superior			5,8000
	Media recortada al 5%		,323
	Mediana		,56795
	Varianza		4,40
	Desv. típ.		7,00
	Mínimo		2,60
	Máximo		,70
	Rango		-,331
	Amplitud intercuartil		,240
	Asimetría		
	Curtosis		

Curso de los estudiantes			Estadístico
IV Medio D			
	Media		**5,6179**
Intervalo de confianza para la media al 95%		Límite	5,3954
inferior			5,8405
		Límite	5,6370
superior			5,6000
	Media recortada al 5%		,472
	Mediana		,68667
	Varianza		3,90
	Desv. típ.		6,70
	Mínimo		2,80
	Máximo		1,10
	Rango		-,218
	Amplitud intercuartil		-,464
	Asimetría		
	Curtosis		

De acuerdo a los datos que aparecen en las tablas podemos afirmar que los cursos poseen medias muy similares, por lo cual sería interesante saber si esta similitud, es casual o se debe a su nivel académico, es decir son cursos similares en rendimiento académico en Matemática, que es lo que nos gustaría que pasara, para ello planteamos la hipótesis nula, de la variable independiente:

Rendimiento académico anual en la asignatura de Matemática.

H_1 : Existe una diferencia significativa entre ambos cursos (IV Medio C y IV Medio D) en el rendimiento académico.

H_0: No existe una diferencia significativa entre ambos cursos (IV Medio C y IV Medio D) en el rendimiento académico

Luego, como son muestras independientes y pequeñas, usaremos la prueba de T de Student para comparar las medias de ambos cursos y poder corroborar la hipótesis nula de que no existe una diferencia significativa en el rendimiento académico de ambos cursos ; pero primero debemos corroborar que ambas muestras son normales, para lo cual utilizamos la prueba de Kolmogorov- Smirnov, ya que la muestra posee más de 30 individuos (Ruiz, 2015).

Posteriormente usaremos la prueba de Levene, para verificar si hay igualdad de Varianzas.

Pruebas de normalidad

	Curso de los estudiantes	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico
Notas de Matemáticas	IV Medio C	,126	37	**,142**	,977
	IV Medio D	,114	39	**,200**[*]	,966

Si observamos el nivel de significancia en la prueba de Kolmogorov – Smirnov notamos que ambos cursos poseen un valor mayor a 0.05 (0.142 y 0.200), por tanto, podemos decir que ambas muestras son normales con un nivel de confianza del 95%.

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias
		F	Sig.	t
Notas de Matemáticas	Se ha asumido varianzas iguales	2,914	,092	,902
	No se ha asumido varianzas iguales			,906

Prueba de muestras independientes

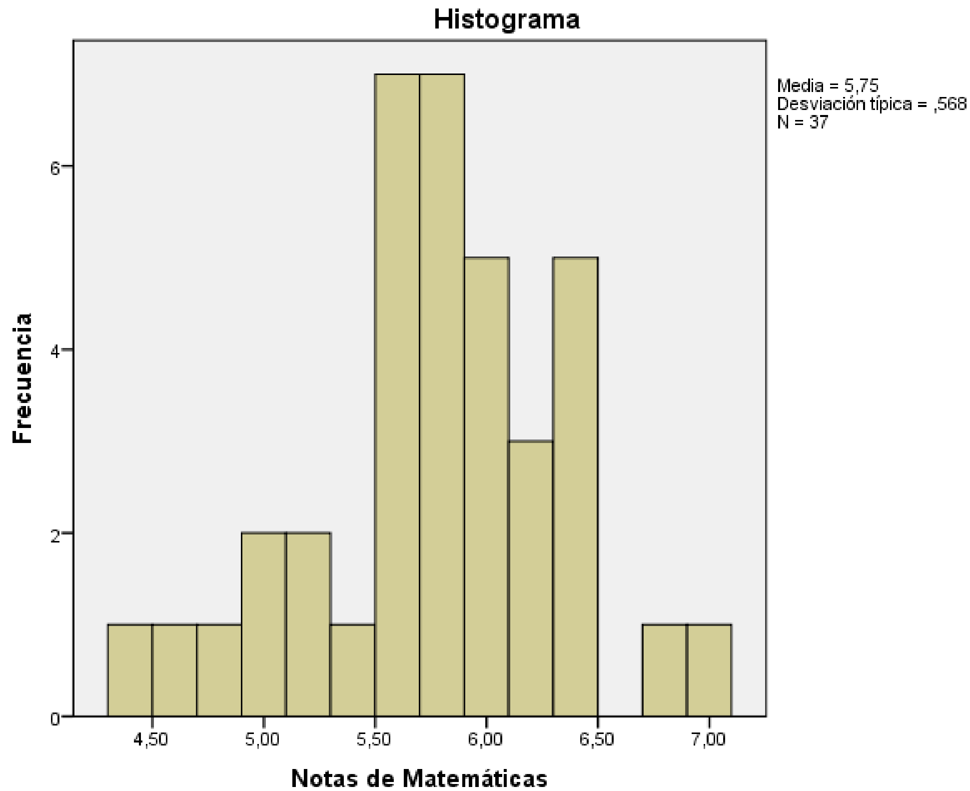
		Prueba T para la igualdad de medias		
		gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias
Notas de Matemáticas	Se ha asumido varianzas iguales	74	**,370**	,13070
	No se ha asumido varianzas iguales	72,674	,368	,13070

de acuerdo a la prueba de Levene para varianzas, podemos decir que se asumen varianzas iguales y de acuerdo a esto podemos concluir que el valor de significancia de la prueba T es 0.370, es decir con un 95% de nivel de confianza podemos aceptar la hipótesis nula.

Es decir, no existe una diferencia significativa entre ambos cursos en el rendimiento académico.

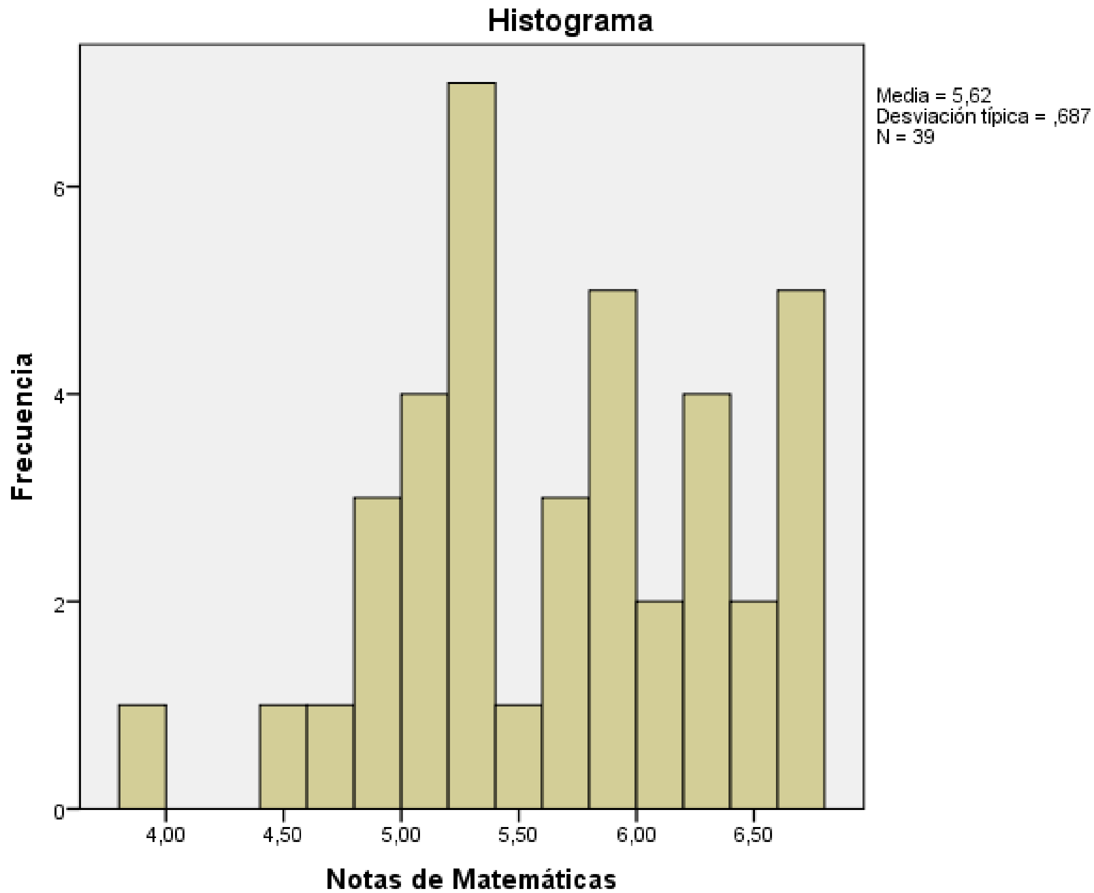
Curso de los estudiantes = IV Medio C

Histogramas



Curso de los estudiantes = IV Medio D

Histogramas



Al observar los gráficos anteriores, podemos ver que ambos cursos tienen una tendencia a tener una distribución normal, siendo en el curso que es grupo control, más marcada esta tendencia.

Durante las dos últimas semanas de Octubre se aplicó la planificación sobre inducción Matemática, en ambos cursos con base en el texto de Matemática III y IV Electivo Santillana y al finalizar esta se tomó el pre-test (Anexo 3), a ambos cursos para poder determinar el nivel de aprendizaje de la demostración por inducción adquirido a partir de la planificación basada en el texto de Santillana. Posteriormente en el curso experimental se aplica la secuencia didáctica y en el otro se realizan ejercicios del texto con base en la planificación basada en el texto.

Posteriormente y finalizado el proceso de aplicación de la secuencia didáctica en el curso experimental, se aplicó el post-test de demostración por inducción para poder determinar si existía una diferencia en el nivel alcanzado de aprendizaje en ambos cursos.

4.4. Análisis de la implementación de la secuencia didáctica

La secuencia se desarrolló en Octubre del 2018, en concordancia con los contenidos contemplados en la planificación en ese periodo el cual era, inducción Matemática.

Durante la semana del 01 al 07 de Octubre se aplicó y revisó la guía N°1. En la actividad los estudiantes presentan dificultades en encontrar el patrón de las fórmulas de sumatoria y en verificar las desigualdades.

Durante la semana del 10 al 14 de Octubre se aplicó y revisó la guía N°2. En este caso la mayor dificultad se presentó al realizar la demostración completa de las proposiciones

Durante la semana del 24 al 28 de Octubre se aplicó y revisó la guía N°3. Los estudiantes presentan dificultades al relacionar la axiomática con la estructura de la demostración por inducción. Posteriormente y finalizando el proceso se aplicó el post-test.

En una primera instancia en la guía n°1 los estudiantes realizan pruebas empíricas con casos particulares y concretos al tratar de encontrar el patrón de las fórmulas de sumatoria planteadas (Etapa trabajo con casos particulares), en algunos grupos de estudiantes verifican más de 3 casos para verificar la fórmula (identificación de patrones), la cual vuelven a revisar, después de esto los estudiantes representan la fórmula con ciertas dudas (formulación de conjeturas). En esta etapa algunos grupos han encontrado una fórmula y otros otra, lo cual genera discusión entre los distintos grupos (Justificación de las conjeturas), en esta etapa se plantean los contraejemplos, lo cual representa un tema importante, ya que permite que los estudiantes puedan argumentar para defender sus planteamientos.

Este hecho genera el rechazo de la conjetura en forma inmediata destrozando todas las verificaciones hechas, generando en los estudiantes una falsa ilusión sobre el resultado encontrado; en esta experiencia esto provocó que los estudiantes no quisieran seguir verificando en el caso de los problemas de divisibilidad, cuando planteaban un divisor equivocado o usaban una secuencia errada al mayorar una desigualdad.

Ejemplos de preguntas:

a) Deducir una fórmula para: $\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+................+\frac{1}{n(n+1)}$

b) Conjetura una fórmula para la suma de los términos de una progresión aritmética

En la guía n°2 se realizaron ejercicios más cercanos a lo que es la demostración, el proceso de validación formal como le llama (Castro, Molina, Cañada,2014), eso sí que de manera gradual ya que como estos plantean: “Numerosas investigaciones de las últimas décadas entre las que se encuentran las realizadas por Maher, Martino (1996) y Waring, Orton , Roper (1999), centradas en los procesos de validación formal han evidenciado la existencia de dificultades en la realización de estos procesos por parte de los estudiantes de los niveles educativos medios”.

En nuestro caso los estudiantes no tuvieron mayor dificultad en encontrar el error en las demostraciones planteadas, prueba de ello son los resultados del test en esta parte, pero sí un poco más en explicar el error. Tampoco generó mayor dificultad el ordenar los pasos de las demostraciones. Pero lo que sí originó muchas dificultades en los estudiantes fueron los desarrollos de las demostraciones de las proposiciones planteadas, en especial las desigualdades, donde el error común era pasar de una parte a otra mayorando las expresiones sin justificación.

En la guía N°3, se plantean preguntas sobre el contexto teórico de la demostración por inducción, hasta ahora los estudiantes habían desarrollado ejercicios en forma casi mecánica, por lo cual era necesario verificar que entendieran lo que estaban haciendo, en un principio les costó bastante poder relacionar el Principio del buen orden, con los axiomas de Peano y la Inducción en sí, pero posteriormente con el desarrollo y discusión de las preguntas planteadas, los estudiantes le encontraron más sentido al significado de lo que hacían al realizar los pasos de la inducción.

Ejemplos de preguntas y respuestas:

1. ¿Qué podrías decir de la siguiente expresión: n^2+n-1 es un número primo $\forall n \in \mathbb{N}$?

   En esta pregunta los estudiantes tienden en forma instintiva a verificar con unos 3 casos y posteriormente generalizar
2. ¿Por qué es válido suponer que una expresión que se cumple para un número finito de números naturales debe cumplirse para todo el conjunto $\mathbb{N}$?

   En esta pregunta los estudiantes dudan en que el probar para un número de casos finitos, se pueda afirmar en general.

La realización de las guías representó para los estudiantes una experiencia nueva respecto al tipo de ejercicios de los que estaban acostumbrados, ya que todo lo que hacían debía ser justificado, actividad a la cual no están acostumbrados nuestros estudiantes debido a que en el currículo no aparece la demostración y los profesores en general evitan hacerlas, quizás representa un mayor trabajo de parte del profesor, pero por lo que pude observar, vale la pena el sacrificio ya que nuestros estudiantes son moldeables en el desarrollo de sus habilidades, respetando su iniciativa por supuesto, y está en nosotros el incentivar el desarrollo de esas habilidades, en nuestro caso el pensamiento formal.

4.5. Análisis del Pre-Test y Post-Test

Al final del periodo de la planificación de la Unidad de Inducción Matemática se aplicó a ambos cursos un post-test que tenía por objetivo principal el ver el grado de aprendizaje de los estudiantes en la aplicación de la demostración por inducción en 3 casos:

a) Demostrar fórmulas de sumatorias
b) Demostrar desigualdades con números naturales
c) Demostrar criterios de divisibilidad.

En ambos cursos se aplicó una misma planificación con los mismos contenidos y ejercicios, basados en el texto Matemática Electivo de III y IV Medio de Santillana. Además ambas se hicieron en el mismo periodo de tiempo.

La prueba se realizó al finalizar la Unidad de Inducción a fines de octubre en la misma fecha y al mismo tiempo, ya que es costumbre en el colegio realizar las pruebas de cursos paralelos en el mismo día y hora para evitar la filtración de información.

A continuación se muestran los resultados del pre-test y post-test, se debe recordar que se aplicó la misma prueba como pre y post test, ya que la idea era determinar si había alguna diferencia en el aprendizaje de la demostración en el curso de control y el experimental.

Estadísticos de grupo

	Curso de los estudiantes	N	Media	Desviación típ.
Notas de Matemáticas	IV Medio C	37	5,7486	,56795
	IV Medio D	39	5,6179	,68667
Puntajes Pre Test	IV Medio C	37	11,9730	2,77375
	IV Medio D	39	13,1026	3,64038
Puntajes Post Test	IV Medio C	37	14,0270	1,89277
	IV Medio D	39	14,1795	2,79917

Observamos que a primera vista ambos cursos mejoran levemente en los resultados del post test, y que el curso experimental tuvo un puntaje levemente mayor que el curso control, por lo cual podríamos inferir a priori que la secuencia tuvo un efecto muy marginal en el aprendizaje de la demostración por inducción, además podemos ver que en rendimiento académico el curso IV C es levemente mejor que el IV D. Todos estos análisis son a nivel muy general, por lo cual debemos corroborar estas inferencias con la prueba t de Student para validar lo que pasó. Como podemos apreciar a partir de la revisión estadística de las muestras estas no nos aportan un conocimiento acabado del desempeño de los estudiantes en el proceso de demostración, como en el trabajo de Balacheff: "Procesos de Prueba en los alumnos en Matemática" (2000), donde se lleva a cabo la construcción por parte de los estudiantes de la demostración de la fórmula del número de diagonales de un polígono y como los estudiantes construyen la demostración. En nuestro caso la riqueza del análisis de la experiencia lo entregará el análisis cualitativo que haremos del post-test en el apartado 4.8

A continuación se muestran los datos del pre-test y post-test

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias
		F	Sig.	t
Notas de Matemáticas	Se ha asumido varianzas iguales	2,914	,092	,902
	No se ha asumido varianzas iguales			,906
Puntajes Pre Test	Se ha asumido varianzas iguales	,611	,437	-1,516
	No se ha asumido varianzas iguales			-1,526
Puntajes Post Test	Se ha asumido varianzas iguales	5,759	,019	-,277
	No se ha asumido varianzas iguales			-,279

Prueba de muestras independientes

		Prueba T para la igualdad de medias		
		gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias
Notas de Matemáticas	Se ha asumido varianzas iguales	74	,370	,13070
	No se ha asumido varianzas iguales	72,674	,368	,13070
Puntajes Pre Test	Se ha asumido varianzas iguales	74	,134	-1,12959
	No se ha asumido varianzas iguales	70,765	,131	-1,12959
Puntajes Post Test	Se ha asumido varianzas iguales	74	,783	-,15246
	No se ha asumido varianzas iguales	67,022	,781	-,15246

De acuerdo a los datos de la tabla, tenemos que debido a la prueba de Levene se asumieron varianzas iguales, por lo cual el valor de significancia de la prueba t de Student en ambos es mayor que 0.05, por lo cual aceptamos la hipótesis nula, que en nuestro caso era:

H_o: El aplicar una secuencia didáctica basada en el modelo de Castro, Cañadas y Molina (2004), a un curso de IV Medio Diferenciado Matemático, no mejoran sus resultados en el aprendizaje del método de demostración de inducción.

Es decir no existe una leve mejoría en los resultados del post-test al aplicar la secuencia didáctica en el curso experimental, por lo cual la riqueza del análisis de la experiencia vendrá al revisar los pasos que hicieron los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica.

4.6. Análisis cualitativo del post – test

A continuación haremos una revisión ítem por ítem del post-test, analizando las respuestas dadas por los estudiantes, destacando las dudas y aciertos presentados.

Ítem 1

I. En la siguiente demostración por inducción existe un error, marca donde está el error y explica el porqué de éste. 2 ptos

Proposición: La expresión:

Dem: $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Verifiquemos que se cumple para n = 1

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2}$$

Supongamos que se cumple para n = k

Probemos que se cumple para n = k+1

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}}$$

Lo cual demuestra la expresión

En esta pregunta el estudiante debía marcar el paso donde había un error, y además explicar en qué consistía este error

En el siguiente cuadro se muestra el porcentaje de respuestas dadas por los estudiantes frente a cada situación:

Situación por parte del estudiante	% de respuestas
Los estudiantes no marcan ningún paso de la demostración	25
Los estudiantes marcan la opción correcta, pero no justifican porqué está erróneo.	37
Los estudiantes marcan la opción correcta, justificando que faltaba desarrollar la igualdad	38

A partir de la tabla podemos decir que un grupo de estudiantes no visualizan el error pensando que esta correcta la demostración, y otro grupo le parece dudosa la igualdad, pero no saben cómo justificarla.

Y finalmente un grupo hace un desarrollo más acabado de la igualdad como medio de justificación, ya que les parece poco clara la igualdad.

De acuerdo a lo anterior tenemos que un 38% de los estudiantes responde bien la pregunta y un 62% lo hacen en forma incorrecta, lo que se explica debido a que existe un aprendizaje de los pasos de la demostración por inducción y un manejo algebraico de la situación, esto último representa un fenómeno que se repite dentro de la prueba, es decir los estudiantes conocen la estructura de la demostración pero sus herramientas algebraicas no les permiten desarrollar en forma acabada la demostración. Otra explicación puede fundamentarse en lo que plantea Boero (1999):

"El concepto de unidad cognitiva de un teorema, está basado precisamente en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la construcción posible de una prueba. Si esta unidad se rompe,

P86jg -+kh .como cuando se pide " demuestre que…", se pierde la continuidad y solo se recupera cuando existe una re-aprobación del enunciado a través de un ciclo completo: explorar, conjeturar, explorar y reorganizar una nueva demostración."(p. 113-120)

Ítem 2.

II. Ordena en forma lógica la secuencia de la demostración de la siguiente proposición,(ordena por los números que aparecen en el margen superior izquierdo).3 puntos

Pruebe que $1^3+2^3+3^3+..............+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

1	$1^3+2^3+........+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$
2	P.D.: $\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$ $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$
3	$1^3=\left[\frac{1}{2}1(1+1)\right]^2$

En esta pregunta el estudiante debía ordenar la secuencia de la demostración que estaba hecha en tarjetas individuales, de acuerdo a lo visto, la actividad no representó una dificultad mayor, y es justamente el ítem que mejor resultado tuvo.

Situación por parte del estudiante	% de respuestas
Los estudiantes se confunden entre la opción 1 y 3	6
Los estudiantes responden correctamente el orden	94

En este caso el estudiante puede resolver la situación en forma mecánica, fijándose en ciertos detalles como en la parte 1, y el proceso de demostración en 2. Algunos estudiantes plantearon que se equivocaron sólo por no fijarse en las expresiones, pero de haber revisado la pregunta por segunda vez, no se hubieran equivocado.

Ítem 3.

Realiza la demostración de las siguientes proposiciones usando inducción, $\forall n \in \mathbb{N}$: 4 ptos c/u

a) Demuestre que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, es divisible por 9

b) Demuestre que $\sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Demuestre que $2n < n^2 + 2$

En esta pregunta, los estudiantes debían demostrar cada uno de los tres tipos de casos vistos, haciendo todo el proceso. Fue la pregunta que tuvo mayores dificultades para los estudiantes, ya que se cometieron muchos errores, sobre todo en la operatoria algebraica utilizada.

Situación por parte del estudiante	% de respuestas
Los estudiantes se saltan pasos de la demostración, principalmente la verificación para n = 1.	19
Los estudiantes no plantean la expresión que se quiere demostrar para el caso n= k (hipótesis de Inducción)	35
Los estudiantes no pueden realizar la operatoria algebraica requerida en la tesis inductiva	56

Los estudiantes piensan que el escribir el paso para verificar la expresión para n = 1, está demás, no lo consideran necesario, se subentiende, o lo encuentran obvio. Esta situación nos permite apreciar que algunos estudiantes no comprenden el proceso de inducción y sólo lo realizan como un proceso mecánico, a pesar de haber visto la relación entre la inducción y el principio del buen orden. Al respecto es interesante lo que nos plantea Larios (2002)

"Es común que cuando se pretende que los alumnos hagan demostraciones en la clases de Matemática se proporcionen afirmaciones y luego se les pida, tras algunos ejemplos, que construyan una demostración más o menos deductiva. En este proceso no se solicita que los alumnos construyan conjeturas o elaboren el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruyan el proceso que, previamente, alguien había realizado."(p. 110)

Esto puede explicar por una parte el que suceda lo anterior.

El otro error detectado es que los estudiantes no plantean la tesis inductiva, y se pasan a la demostración de inmediato, incluso los que escriben la expresión para la tesis realizan la operatoria algebraica de la demostración en este mismo apartado. De nuevo tenemos una situación similar a la anterior en que el estudiante no le otorga importancia a los pasos de la inducción y sólo piensan que lo que interesa es realizar la operatoria algebraica en forma inmediata.

Finalmente un error que se repite en varias partes a pesar de plantear correctamente los pasos de la demostración, es la poca habilidad en la operatoria algebraica de los estudiantes, el factorizar es un problema para muchos, al igual que trabajar con desigualdades donde deben mayorar o disminuir una expresión. Esta situación es independiente a las habilidades que deben desarrollar para demostrar, y representa un problema transversal dentro de la enseñanza de la matemática.

Otra situación que se dio fue que la mayoría de los estudiantes tienen poco desarrollado el espíritu crítico frente a una afirmación, para ellos las proposiciones presentadas son correctas a priori, debido a que las presentaba el profesor o porque aparecían en el texto, sólo algunos dudaron de la veracidad de algunas proposiciones presentadas, ya que las verificaban mediante casos particulares desde un principio.

Otra característica observada que se presentó en forma reiterada mientras se desarrollaba el post test es inseguridad frente a lo desarrollado a pesar que en la mayoría de las ocasiones el resultado presentado era correcto o cercano.

5. Conclusiones

Nuestro objetivo inicial era que los estudiantes pudieran desarrollar el proceso de demostración por inducción mediante la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Cañadas, Molina y Castro (2004) y posteriormente poder contrastar la eficacia de esta secuencia versus una planificación basada en un texto (Santillana). A partir de los datos obtenidos observamos que el objetivo de lograr una diferencia significativa entre los cursos respecto del aprendizaje de la demostración por inducción usando la secuencia didáctica no se logró marcadamente de acuerdo a los números que nos entrega la estadística en ambos cursos independiente de la metodología aplicada, ya que de acuerdo a los resultados el curso al cual no se le aplicó la didáctica tuvo resultados muy levemente inferiores, que al que se le aplicó, con lo cual podemos pensar que intervinieron otros factores: tipo de estudiantes, el profesor, nivel de profundidad en los ejercicios, y novedad del contenido.

En un principio la idea del trabajo era centrarme en el experimento llevado a cabo a pesar de las limitantes de los elementos estadísticos presentes: (tamaño de las muestras, por ejemplo), y poder analizar la efectividad de la secuencia respecto a la planificación, pero al aplicar la secuencia pude descubrir elementos que presentaban una mayor importancia para el estudio, y este era el desarrollo de las habilidades de los estudiantes a través de la aplicación de la secuencia didáctica, por ejemplo como los estudiantes abordaban la demostración a partir de la observación de patrones comunes y cómo después de un buen periodo de tiempo podían demostrar , en nuestro caso mediante la inducción y es en esto donde radica la parte más rica del presente estudio.

A partir del desarrollo de la secuencia se pudieron obtener los siguientes elementos que participaron en el proceso de aprendizaje de la demostración por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes buscan patrones dándose un número pequeño de casos, convenciéndose apenas pueden verificar los resultados de la fórmula encontrada, es decir sólo en algunos casos utilizan el contraejemplo, como en el caso de la afirmación: $n^2 - n + 41$, es primo para todo natural, no verifican en general el caso $n = 41$. De acuerdo a esto es importante insistir como docentes en despertar el análisis crítico en el estudiante, el cuestionar una afirmación, fundamentar, quizás una de las grandes falencias que poseen las pruebas de alternativas.
2. Una vez que los estudiantes encontraban las fórmulas las discutían con sus compañeros, donde esta debía resistir las pruebas a la que las sometían, esto generaba como dice Balacheff (2000) una: “socialización del conocimiento”, los estudiantes mostraban un gran entusiasmo de haber encontrado una fórmula válida, pensando que por cumplir para ciertos valores su validez estaba probada. Es aquí donde el docente debe inculcar en sus estudiante cautela frente a los resultados encontrados y destacarles el hecho de que una conjetura se cumpla para muchos valores no

prueba que sea cierta, quizás a modo de motivación en esta parte es bueno relatarles a los estudiantes la muchas conjeturas que aún no están validadas en la matemática actual y que incluso algunas han sido sometidas a verificación mediante poderosos computadores.

3. Un hecho importante que estuvo presente en todo el desarrollo de la secuencia didáctica por parte de los estudiantes y que tiene que ver con un elemento ajeno al tema estudiado, fueron las pocas habilidades demostradas por lo estudiantes en la operatoria algebraica, lo que interfirió en la fluidez del desarrollo de la demostración, y en algunos casos, a pesar de que los estudiantes mostraban claridad respecto a lo que debían hacer, no podían mostrarlo en el desarrollo de la demostración. Esto nos dice que como docentes debemos insistir en aquella operatoria mecánica, que posteriormente permitirá al estudiante usarla como herramienta para un fin superior, es decir contextualizar cuando enseñamos.

4. Otro elemento que en un principio no contemplé, fue que el método de demostración por inducción tiende a ser un método un poco mecánico en su desarrollo, lo cual generó en algunos estudiantes la memorización de los pasos, perdiendo el sentido inicial que se pretendía y que era validar el conocimiento matemático a través de este método, es decir, que los estudiantes pudieran tener un fundamento de por qué era válido lo que se les enseñaba, a pesar de haber realizado una guía sobre el principio del buen orden y los axiomas de Peano, lo cual representó un tema demasiado abstracto para ellos y tendieron a no relacionarlo con la inducción. Quizás en este caso los profesores no deberíamos tentarnos a entregar todos los conocimientos que quisiéramos en un afán de que aprendan todo lo que nos gustaría, en este caso representó una dificultad para los estudiantes en vez de una aclaración.

Finalmente podemos decir qué de acuerdo a la experiencia realizada con los estudiantes, es posible enseñar eficientemente a demostrar a los estudiantes mediante la metodología adecuada, es quizás aquí donde debemos concentrarnos, en buscar las estrategias pertinentes, un camino en el cual se ha avanzado bastante es en la resolución de problemas, y como en el caso de Balacheff, el plantear un problema podría ser el inicio al desarrollo del aprendizaje de la demostración, la clave está en elegir el problema adecuado que nos permita despertar en el estudiante la curiosidad en un primer instante, para que después esa curiosidad lo motive a encontrar la respuesta y poder generalizarla, nosotros como educadores tenemos una tarea pendiente, y es el momento de comenzar.

6. Discusión

Como dice Balacheff: “La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación del conocimiento”(Balacheff, 2008,p. 501-512) esa es la esencia de la demostración y esto es lo que debemos inculcar a nuestros estudiantes a través de novedosas prácticas pedagógicas. En este trabajo sólo se ha pretendido hacer ver algo que no estamos haciendo y es muy importante que lo empecemos hacer en todos los niveles educativos, desde los más pequeños a los más grandes, por lo cual la tarea para los docentes es perfeccionarse en la enseñanza de la demostración, para que en la clase no sólo se demuestren aisladamente algunas proposiciones de acuerdo a alguna temática que se presente, sino enseñar al estudiante como validar aquellas afirmaciones matemáticas que se les enseñe.

Como se ha dicho en varias partes del trabajo la enseñanza de la demostración es prácticamente nula en nuestro país, lo cual nos ofrece una oportunidad para implementar este conocimiento en las aulas escolares, desde 1° Básico a IV Medio, con el fin de desarrollar el pensamiento formal en los estudiantes y el poder además permitir que su tránsito a la universidad sea menos traumático. Existen las bases teóricas suficientes para fundamentar su implementación, por lo tanto debe haber una capacitación por parte de los docentes y una convicción de parte de ellos en la conveniencia de la enseñanza de la demostración. Por otro lado se deben generar buenas prácticas metodológicas para lograr el interés de parte de los estudiantes teniendo presente que la materia no es trivial de aprender.

Otro aspecto importante que vincula el aprendizaje de la demostración con la enseñanza de la matemática actual, es que el aprender más tempranamente a demostrar permitirá desarrollar la capacidad de los estudiantes a enfrentar de mejor manera distintos tipos de problemas, sobre todo aquellos que generen expresiones generales sobre un tema, es decir por ejemplo a partir de la observación de datos extraídos de la naturaleza los estudiantes podrían relacionarlos y encontrar un patrón que posteriormente se convertiría en una fórmula, la cual probarían para posteriormente aplicarlas en diversas situaciones. Es decir la enseñanza de la demostración abre una serie de posibilidades en un aprendizaje más integral de estudiante, no es sólo formar matemáticos más preparados. Unos ejemplos interesantes de este tipo de problemas serían los siguientes:

“En una comunidad que tiene 53 municipios se plantean que todos ellos estén comunicados por carretera de todas las formas posibles. Para ello van a construir un tramo de carretera entre cada dos municipios. ¿Cuántos tramos de carretera serán necesarios?

Otro problema interesante que aparece en el texto del profesor Miguel de Guzmán es:

“Demostrar por inducción sobre el número de arcos que en todo grafo el número de vértices de grado impar es siempre par”

Es importante también tener presente que el desarrollo del aprendizaje de la demostración requerirá un trabajo desde los primeros años de estudio del estudiante, donde en un primer instante se debiera enseñar a los niños a despertar su curiosidad frente a distintos fenómenos sencillos de su alrededor, no sólo del ámbito matemático, y tratar de que encuentren una respuesta a esos fenómenos, como dice Polya: “Primero intuir, luego probar” (1966). Es importante aprovechar la curiosidad típica de los niños en sus primeros años de estudio, para posteriormente a medida que se avance en la escolaridad, se irían planteando situaciones de una complejidad mayor donde esa curiosidad intuitiva inicial se formalice guiada por el docente en un análisis más detallado que conduzca a la necesidad de probar dichas aseveraciones, todo este trabajo desarrollado a través de todo el periodo escolar al final permitiría a estos estudiantes desenvolverse sin mayores problemas en los estudios superiores y más importante aún se logrará desarrollar en los estudiantes un espíritu crítico frente a lo que se les enseña.

Como dice el profesor Miguel de Guzmán: “La demostración es un arte que se domina con el ejercicio, reflexivo, mediante la observación y la asimilación de los diferentes métodos que para ello se han ideado a lo largo de los muchos siglos de historia de la Matemática” (2003,p. 12)

Bibliografía

Alvarado Monroy Angelina, González Astudillo María Teresa (2009). "La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso". Enseñanza de las ciencias vol. 28 p. 73-84. http://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/189097.

Balacheff Nicolás (2000). "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas". http://Researchgate.net/publication/46396114. 2000

Castro Encarnación, Cañadas Maria Consuelo, Molina Marta (2010). "El razonamiento inductivo como generador del conocimiento matemático". UNO 54, p. 55-67 http://digibug.ugr.es/handle/10481/26079. 2016.

Crespo Cecilia, Ponteville Christine (2003). "Las funciones de la demostración en el aula de Matemática". Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/5954/1/CrespoFuncionesAlme2005.pdf

Crespo Cecilia (2016). "Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa p. 243-251. http://funes.uniandes.edu.co/11169/. 2016

Del Busto Eduardo "La Inducción Matemática" (1964). La Gazeta Matemática n° 96, p. 2. http://gazeta.spm.pt/fichagazeta?id=96

Fiallo Jorge, Camargo Leonor, Gutiérrez Ángel (2013) "Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en Matemáticas". Revista Integración vol 31 N°2

Guzmán Miguel de (2004). "Cómo hablar, resolver en matemáticas". Madrid. Editorial Anaya Series: Base universitaria. Iniciación al método matemático

Herrera Portilla Yeimy (2013). "una aproximación a la demostración mediante una secuencia de problemas abiertos desde la teoría de la mediación semiótica". http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4774/1/CB-0478741.pdf

Larios Victor (2002). “Demostraciones y Conjeturas en la escuela media” Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas año 2, num. 3

Marmolejo Efrén, Solano María del Carmen (2005). “Convención sobre la Demostración Geométrica”. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 18 http://funes.uniandes.edu.co/5906/1/MarmolejoConvencionAlme2005.pdf

Molina Oscar, Luque Carolina, Robayo Alejandro (2014). “Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura”. Revista pedagógica, n°35, pp. 39 - 61 http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/2723.

Padilla Luis (1985). “Un estudio sobre las demostraciones en la enseñanza de la matemática a nivel de educación media” Tesis para obtener el grado de licenciado en educación matemática y computación Usach. Chile.

Peña Hermosilla, Elbia Violeta (2006). “Explorando el uso de la estrategia de demostración por inducción en la matemática escolar”. Tesis para obtener el grado de licenciado en educación matemática y computación Usach. Chile

ANEXOS

Anexo N°1

<u>Guía N°1 de Inducción Matemática</u>

Tema: Conjeturar acerca de fórmulas de sumatorias, desigualdades y criterios de divisibilidad de expresiones con números naturales

Objetivos: a) Deducir las fórmulas de Sumatorias a partir de un patrón encontrado.
b) Probar en forma empírica la divisibilidad de expresiones en los naturales.
c) Verificar desigualdades usando propiedades de estas.

I. Deducir la fórmula para las siguientes sumatorias:

a) $\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

b) Conjetura una fórmula para la suma de los n primeros números pares

c) Conjetura una fórmula para la suma de los primeros n números impares

d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

e) Conjetura una fórmula para la suma de los términos de una progresión aritmética

f) Conjetura una fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica.

II. Determina para que números o expresión algebraica son siempre divisibles las siguientes expresiones:

1. $n^2(n^2+1)$
2. $x^n - y^n$, $x, y \in \mathbb{R}$
3. ¿Por cuánto es divisible el producto de dos números consecutivos?
4. n^3+5n
5. ¿Por cuánto es divisible la suma de los cubos de tres números consecutivos?
6. 5^n-4n-1

III. Verifica en qué casos las siguientes desigualdades se cumplen para todo n natural:

1. $n < 2^n$
2. $2n < n!$
3. $2n - 3 \leq 2^{n-2}$
4. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$
5. $3^n > 2^n + 7n$
6. $2^n > n^3$

Guía N°2 de Inducción Matemática

Tema: Determinar la validez de sumatorias, desigualdades y criterios de divisibilidad de números naturales, mediante la demostración por Inducción.

Objetivos: a) Verificar el procedimiento de la demostración por Inducción en los casos de:: sumatorias, desigualdades y criterios de divisibilidad.
b) Aplicar las propiedades del proceso de Inducción al ordenar los pasos de una demostración.
c) Aplicar los pasos de la demostración por Inducción en proposiciones dadas.

I. **Dadas las siguientes proposiciones, determine cuál de las demostraciones sugeridas es la correcta y explique con sus palabras porqué las otras no lo son.**

1. Prop. La expresión: $5^n - 4n - 1$,es divisible por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pegue aquí la tarjeta con la demostración correcta

2. Prop. La siguiente sumatoria se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\text{..........}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Pegue aquí la tarjeta con la demostración correcta

3. Prop. $2^n < n! \forall n \in \mathbb{N}$, n > 3

Pegue aquí la tarjeta con la demostración correcta

II. En cada una de las siguientes proposiciones, coloque en el orden lógico las etapas de la demostración de cada una.

1. Pruebe que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. **Pruebe que** $5^{2n}-1$, es divisible por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$

3. **Pruebe que** $2n-3 \leq 2^{n-2}$, $\forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}$

III. Realice la demostración usando inducción en cada caso, $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. Demuestre que $4n^3 + 5n$, es divisible por 3
2. Demuestre que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, es divisible por 9
3. Demuestre que $7^{2n} + 16n - 1$, es divisible por 64
4. Demuestre que $\sum_{1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$
5. Demuestre que $\sum_{1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. Demuestre que $\sum_{1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
7. Demuestre que $3n \leq 3^n$
8. Demuestre que $2n < n^2 + 2$
9. Demuestre que $(1+x)^n \geq 1 + nx$

<u>**Guía N°3 de Inducción Matemática**</u>

Tema: Relacionar los fundamentos de la Inducción Matemática con el proceso de demostración por Inducción.

Objetivos:
a) Relacionar el principio del buen orden con los axiomas de Peano
b) Relacionar los axiomas de Peano con el proceso de demostración

I. Establezca una relación y construya un mapa conceptual, con los siguientes conceptos:

Principio del Buen Orden

Axiomas de Peano

1. El 1 es un número natural, entonces 1 está en el conjunto N de los números naturales.
2. Todo número natural *n* tiene un sucesor *n** (este axioma es usado para definir posteriormente la suma).
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales *n* y *m* con el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto de números naturales, y dado un elemento cualquiera, el sucesor también pertenece al conjunto, entonces todos los

El principio del buen orden establece que todo conjunto que esté formado únicamente por números naturales tiene un primer elemento. Es decir, que el conjunto de los números naturales es bien ordenado.

Sea P_n la proposición que queremos probar.

Se demuestra que P_1 es cierta, esto es el primer valor cumple la proposición, luego, se demuestra que si P_n (hipótesis inductiva)es cierta, entonces P_{n+1} también lo es, finalmente por inducción concluimos que se cumple para todo $\mathbb{N}$

II. Responde las siguientes preguntas de acuerdo a lo que tú entendiste del proceso Inductivo.

3. ¿Qué podrías decir de la siguiente expresión: $n^2 + n - 1$ es un número primo $\forall n \in \mathbb{N}$?
4. ¿Por qué es válido suponer que una expresión que se cumple para un número finito de números naturales debe cumplirse para todo el conjunto $\mathbb{N}$?
5. ¿Por qué debe suponerse verdadero para n= k, para luego probar para n = k +1?
6. ¿En este tipo de demostración se parte de lo particular a lo general o al revés?
7. ¿Por qué no sería válido el principio del buen orden en $\mathbb{R}$?
8. ¿Se podría probar una relación con números reales, usando el principio de Inducción?

Anexo N°2: Ejemplo de tarjeta para pegar en la guía

Dem. La expresión: $5^n - 4n - 1$, es divisible por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Verifiquemos que se cumple para n = 1

$$5^1 - 4 \cdot 1 - 1 = 0$$

Luego se cumple para n = 1

Supongamos que se cumple para n = k

$$5^k - 4 \cdot k - 1 = 8 \cdot t$$

Ahora probemos que se cumple para n = k + 1

$$\begin{gathered} 5^{k+1} - 4 \cdot (k+1) - 1 = \\ 5^k \cdot 5 - 4k - 4 - 1 = \\ 5^k \cdot (4+1) - 4k - 4 - 1 = \\ 5^k \cdot 4 + 5^k - 4k - 4 - 1 = \\ 4 \cdot 5^k - 4 + 5^k - 4k - 1 = \\ 4 \cdot (5^k - 1) + 8 \cdot t \end{gathered}$$

Ahora bastaría probar que: $5^k - 1$, es divisible por 2, luego:

Verifiquemos que se cumple para n = 1

$$5^1 - 1 = 4$$

Supongamos que se cumple para n = k

$$5^k - 1 = 2t$$

Ahora probamos que se cumple para n = k + 1

$$5^{k+1} - 1 = 5^k \cdot 5 - 1 = 5^k \cdot (4+1) - 1 = 4 \cdot 5^k + 5^k - 1$$

Por hipótesis de inducción: $5^k - 1$ es divisible por 2, luego está probado, es decir

$5^n - 4n - 1$ es divisible por 8

Ejemplos de tarjetas que posteriormente deben ordenarse lógicamente en la guía:

1. **Pruebe que** $1^3+2^3+3^3+..............+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$1^3=\left[\frac{1}{2}1(1+1)\right]^2$$

$$1^3+2^3+.........+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$$

P.D: $\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$

$$\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Anexo 3:

Departamento de Matemática IV Medio

PRUEBA DE INDUCCIÓN
IVº MEDIO ELECTIVO

Nota:_____________

Nombre: .... Curso: ....Fecha: ....

OBJETIVOS:

Aplicar el método de demostración por Inducción en los siguientes casos:

a) Fórmulas de Sumatorias
b) Criterios de Divisibilidad
c) Desigualdades de expresiones con naturales

INSTRUCCIONES:

- Esta prueba consta de 3 ítems de desarrollo, con un tiempo máximo de 80 minutos.
- Cada pregunta debe ser contestada de forma individual, con lápiz grafito, en hojas de cuadernillo, indicando el número de pregunta y destacando el resultado final con lápiz pasta.
- Cuide la presentación de sus hojas de respuesta y sea ordenado.
- En esta evaluación está prohibido el uso de celulares.

II. En la siguiente demostración por inducción existe un error, marque donde está el error y explica el porqué de éste. 2 ptos

Proposición: La expresión:

Dem: $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Verifiquemos que se cumple para n = 1

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2}$$

Supongamos que se cumple para n = k

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Probemos que se cumple para n = k+1

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Lo cual demuestra la expresión

II. Ordene en forma lógica la secuencia de la demostración de la siguiente proposición,(ordene por los números que aparecen en el margen superior izquierdo).3 puntos

Pruebe que: $1^3+2^3+3^3+..............+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 \ \forall n\in\mathbb{N}$

1    $1^3+2^3+.........+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$
2   P.D.: $\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$ $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$
3    $1^3=\left[\frac{1}{2}1(1+1)\right]^2$

III. Realice la demostración de las siguientes proposiciones usando inducción, $\forall n\in\mathbb{N}$: 4 ptos c/u

a) Demuestre que $10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$, es divisible por 9

b) Demuestre que $\sum_{1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Demuestre que $2n<n^2+2$

Anexo 4:

PLANIFICACION CLASE A CLASE OCTUBRE

4º AÑO MEDIO ELECTIVO MATEMÁTICA

SEGUNDO SEMESTRE 2018

PROFESOR(A): Cristián Valenzuela – Karol Ivani

NOMBRE UNIDAD: INDUCCIÓN MATEMÁTICA

OBJETIVOS FUNDAMENTALES DE LA UNIDAD:

- Aplicar el método de Demostración por Inducción
- Aplicar las propiedades de las Matrices en la operatoria para 2x2 y 3x3

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD:

Identificar una conjetura
Demostrar una fórmula de Sumatoria por Inducción
Demostrar una fórmula de Desigualdad por Inducción
Demostrar una fórmula de Criterio de Divisibilidad por Inducción
Relacionar el Principio del Buen Orden y el método de demostración por Inducción
Relacionar los Axiomas de Peano y el método de demostración por Inducción
Identificar las propiedades de las matrices
Aplicar las propiedades de las matrices en la operatoria de 2x2 y 3x3
Determinar la matriz transpuesta e inversa en el caso 2x2 y 3x3

<table>
<tr><th>Nº CLASE</th><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LA CLASE</th><th>DESCRIPCION DE ACTIVIDADES</th><th>INDICADORES DE LOGRO</th></tr>
<tr><td rowspan="3">N° 01

01 al 05

de

Octubre

2 horas</td><td rowspan="3">Aplicar el método de Demostración de Inducción Matemática en sumatorias</td><td>INICIO:

A partir del siguiente caso se describe el método de demostración de Inducción:

$$1+2+3+4+...........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Planteando la hipótesis y la tesis.</td><td rowspan="3">Desarrollar el método de demostración por inducción en diversos casos de sumatorias</td></tr>
<tr><td>DESARROLLO:

. Se realizan ejercicios de demostración para los siguientes casos:

a) La suma de los primeros números pares
b) La suma de los primeros números impares
c) La suma de los primeros términos de una progresión aritmética

Se revisan en la pizarra los pasos realizados en cada caso</td></tr>
<tr><td>CIERRE:

Se consulta a los estudiantes que significa para ellos el proceso de inducción. ¿Cuál es el fin?¿qué significa el método inductivo?</td></tr>
</table>

N°2 **01 al 05** **de** **Octubre** **2 horas**	Aplicar el método de Demostración de Inducción Matemática en Desigualdades con números naturales	**INICIO:** A partir del siguiente caso se describe el método de demostración de Inducción: $2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Planteando la hipótesis y la tesis. **DESARROLLO:** Se realizan ejercicios de demostración para los siguientes casos: a) $n^2 > 2n-1$ b) $(n+1)^2 > 4n$ c) $n! > n$ Se revisan en la pizarra los pasos realizados en cada caso **CIERRE:** Se consulta a los estudiantes que estrategia les parece mejor en cada caso o si existe una sola forma de hacerlo. ¿Qué significa que se cumple para todo número natural?	Desarrollar el método de demostración por inducción en diversos casos de desigualdades

N°3 **01 al 05** **de** **Octubre** **1 hora**	Aplicar el método de Demostración de Inducción Matemática en Sumatorias	**INICIO:** Se realiza control N°3 sobre demostración por Inducción en Sumatorias **DESARROLLO:** Se realiza control N°3 sobre demostración por Inducción en Sumatorias **CIERRE:** Se realiza control N°3 sobre demostración por Inducción en Sumatorias	Aplicar el método de demostración por Inducción para expresiones que representan sumatorias
N°4 **08 al 12** **de** **Octubre** **2 horas**	Aplicar el método de Demostración de Inducción Matemática en criterios de divisibilidad de naturales	**INICIO:** Se muestra el siguiente ejemplo de criterio de divisibilidad: Demuestre que: $n(n+1)(2n+1)$ es divisible por 6 Se explica en detalle los pasos de la demostración y en especial el paso 3 de la operatoria algebraica. **DESARROLLO:** Se realizan ejercicios de demostración para los siguientes casos: a) $4n^3+5n$ es divisible por 3 b) $n(n+1)$ es divisible por 2 c)	Aplicar el método de demostración por Inducción para expresiones que representan criterios de divisibilidad

		CIERRE: Se consulta a los estudiantes sobre estrategias que usaron en el paso 3 para demostrar las expresiones.	
N°5 **08 al 12** **de** **Octubre** **2 horas**	Relacionar y fundamentar el método de demostración por Inducción mediante Peano y el principio del buen orden	**INICIO:** Se muestra ppt sobre los Axiomas de Peano y el Principio del Buen Orden Se comenta sobre el fundamento de la demostración por Inducción	Justificar el método de demostración por Inducción mediante los axiomas de Peano y el principio del buen orden
		DESARROLLO: Se realiza guía sobre demostración por Inducción en los 3 casos: a) Sumatoria b) Desigualdades c) Criterios de Divisibilidad d) Fundamentos de la Inducción	
		CIERRE: Se abre debate sobre la validez de la demostración por Inducción. Se preguntan cosas como: ¿Por qué es válido este método según Peano? ¿Qué relación tiene el método con el Axioma del Buen Orden?	
N°6	Aplicar la demostración por	**INICIO:** Se realiza Prueba N°3 sobre Demostración por Inducción	.Demostrar aplicando inducción en expresiones de sumatorias y

08 al 12 **de** **Octubre** **1 hora**	Inducción en los casos de: Sumatoria y Desigualdad es	**DESARROLLO:** Se realiza Prueba N°3 sobre Demostración por Inducción **CIERRE:** Se realiza Prueba N°3 sobre Demostración por Inducción	desigualdades
N°7 **15 al 19** **de** **Octubre** **2 horas**	Aplicar el método de Demostració n de Inducción Matemática en criterios de divisibilidad de naturales	**INICIO:** A partir del siguiente caso se describe el método de demostración de Inducción: $x^n - y^n$ es divisible por x - y $\forall n \in \mathbb{N}$ Planteando la hipótesis y la tesis. **DESARROLLO:** Se realizan ejercicios de demostración para los siguientes casos: e) $5^n - 4n - 1$ es divisible por 8 f) $4n^3 + 5n$ es divisible por 3 g) $n(n+1)$ es divisible por 2 Se revisan en la pizarra los pasos realizados en cada caso	Aplicar el método de demostración por Inducción para expresiones que representan criterios de divisibilidad

		CIERRE: Se consulta a los estudiantes que estrategia les parece mejor en cada caso o si existe una sola forma de hacerlo.	
N°8 **15 al 19** **de** **Octubre** **2 horas**	Aplicar la demostración por Inducción para los casos: a) Sumatorias b) Desigualdades c) Criterios de divisibilidad	**INICIO:** Se muestran los siguientes ejercicios de resumen para los casos de demostración: a) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ divisible por 9 $\forall n \in \mathbb{N}$ b) $\sum_{1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ c) $2n < n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Realizar la demostración por inducción para los casos de sumatorias, desigualdades y criterios de divisibilidad
		DESARROLLO: Se realiza guía de ejercicios sobre los distintos casos de demostración por inducción.	
		CIERRE: Se consulta a los estudiantes sobre las estrategias usadas en cada caso. ¿Hacen lo mismo siempre?¿cambian dependiendo el ejercicio?	

N°9 **15 al 19** **De** **Octubre** **1 hora**	Aplicar la demostración por Inducción para el caso: de Criterios de divisibilidad	**INICIO:** Se realiza prueba N°4 sobre demostración pro Inducción en el caso de Criterios de divisibilidad. **DESARROLLO:** Se realiza prueba N°4 sobre demostración pro Inducción en el caso de Criterios de divisibilidad. **CIERRE:** Se realiza prueba N°4 sobre demostración pro Inducción en el caso de Criterios de divisibilidad.	Aplicar el método de demostración por Inducción para expresiones que representan criterios de divisibilidad