

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación



**DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE
ENSEÑANZA MEDIA CUANDO ABORDAN EL CONCEPTO DE HOMOTECIA:**

Una propuesta didáctica basada en el Modelo de Van Hiele

Jorge Andrés Labra Peña

Profesor Guía: Carlos Mario Vanegas Ortega

Trabajo de graduación presentado a la
Facultad de Ciencia, en cumplimiento de los
requisitos exigidos para optar al grado de
Magíster en Educación Matemática.

Santiago – Chile
2019

© Jorge Andrés Labra Peña, 2019.

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial sin autorización previa y por escrito.

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado por la Comisión Examinadora del Departamento de Matemática y Ciencia Computación de la Universidad de Santiago de Chile, como requisito para optar al grado de Magíster en Educación Matemática.

Dra. Lorena Espinoza Salfate

Profesora Informante

Dra. Marta Salazar Aburto

Profesora Informante

Dr. Carlos Vanegas Ortega

Profesor Guía

RESUMEN

El objetivo de este estudio es caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele. Para ello, se utilizó una metodología cualitativa con un diseño no experimental, con el fin de describir cómo se transforma la forma de conceptualizar las homotecias, y con ello, los niveles de razonamiento geométrico. Para la identificación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico se utilizó un pre y post test que permitiesen hacer más robustas las comprensiones cualitativas. Los resultados muestran una adquisición completa del Nivel 0 por la gran mayoría de los estudiantes. Además, las actividades propuestas permitieron desarrollar el Nivel 0, y posibilitaron desarrollar de los primeros grados de adquisición del Nivel 1. Este logro se ve potenciado gracias a los recursos manipulativos y virtuales utilizados, el trabajo colaborativo entre los estudiantes y a la secuenciación de las actividades trabajadas en la unidad didáctica.

Palabras clave: *Didáctica de la geometría, Razonamiento geométrico, Modelo de Van Hiele.*

ABSTRACT

The aim of this study is to characterize the development of levels of geometric thought in twelfth-grade students, when they learn the concept of homothety through a didactic sequence based on Van Hiele model. A qualitative methodology with a non-experimental design was used in this study for describing how the concept of homothety transforms, and thus the geometric thought. A pretest-posttest design was used to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels to strengthen the analysis of the qualitative data. The main results show a complete acquisition of Level 0 for most students. In addition, the proposed activities allowed the development of Level 0, and enabled the development of the first levels of acquisition of Level 1. This achievement is enhanced thanks to the manipulative and virtual resources used, the collaborative work among students and the sequencing of activities worked in the didactic sequence.

Key words: *Teaching of geometry, Geometric thought, Van Hiele model.*

DEDICATORIA

*Dice una vieja leyenda
que cuando un humano acoge
y protege a un animal hasta la muerte,
un rayo de luz guía su camino para siempre...*

Para Lucky, mi perro de la suerte

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a mi profesor guía Carlos Vanegas que, con su carisma, entusiasmo, experiencia, profesionalismo y gran disposición, logró generar en mí la confianza y la inspiración que necesitaba para finalizar esta etapa con éxito, convirtiéndose en un gran modelo a seguir.

Agradezco también a la directora del colegio en donde se realizó el estudio, Señora Loreto Salas, por su colaboración con la investigación y por la confianza que depositó en mí.

Por último, agradezco a todos mis familiares y amigos por su paciencia y comprensión durante este largo proceso.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
DEDICATORIA.....	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	viii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	3
1.1 Antecedentes.....	3
1.2 Pregunta de Investigación.....	6
1.3 Objetivos.....	6
1.3.1 Objetivo General.....	6
1.3.2 Objetivos Específicos	6
1.4 Supuesto de la Investigación	7
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	8
2.1 Razonamiento Geométrico.....	8
2.2 Modelo de Van Hiele	9
2.2.1 Niveles de Razonamiento	10
2.2.2 Fases de Aprendizaje para el Desarrollo de los Niveles de Razonamiento	13
2.2.3 Características de las Secuencias Didácticas basadas en el Modelo de Van Hiele...	15
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	17
3.1 Tipo de Metodología.....	17
3.2 Alcance de la Investigación.....	17
3.3 Sujetos de estudio	18
3.4 Diseño Metodológico	18
3.4.1 Fase 1: Evaluación Inicial	19
3.4.2 Fase 2: Intervención	28

3.4.3 Fase 3: Evaluación Final	43
CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS.....	51
4.1 Resultados y análisis de la Fase 1	51
4.2 Resultados y análisis de la Fase 2.....	52
4.2.1 Guía N°1: El pantógrafo.....	53
4.2.2 Guía N°2: La cámara oscura	54
4.2.3 Guía N°3: Concepto de homotecia.....	56
4.2.4 Guía N°4: Propiedades de la homotecia	57
4.2.5 Resumen de los resultados derivados de la implementación de la secuencia didáctica	61
4.3 Resultados y análisis de la Fase 3.....	62
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	68
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72
ANEXOS	74
Formato Carta de Autorización para Directora.....	75
Formato Consentimiento Informado para Apoderados	76
Resultados del Pre y Post Test	77
Análisis del concepto de Homotecia	78
Guía N°1: El pantógrafo.....	78
Guía N°2: La cámara oscura	82
Guía N°3: Concepto de homotecia	86
Guía N°4: Propiedades de la homotecia	89

ÍNDICE DE TABLAS

Tablas del Capítulo II

Tabla 2.1: Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele	16
---	----

Tablas del Capítulo III

Tabla 3.1: Ponderaciones según el tipo de respuesta.....	26
--	----

Tabla 3.2: Ejemplo de cálculo de los grados de adquisición de niveles de razonamiento.....	27
--	----

Tabla 3.3: Matriz de análisis del concepto de homotecia	41
---	----

Tabla 3.4: Ejemplo del análisis del concepto de homotecia	42
---	----

Tablas del Capítulo IV

Tabla 4.1: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Pre-test.....	51
---	----

Tabla 4.2: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento de la Fase 3	62
--	----

Tabla 4.3: Resumen de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento en el Pre-test y Post-test	64
---	----

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Imágenes del Capítulo II

Imagen 2.1: Relación entre las Fases de Aprendizaje y los Niveles de Razonamiento	14
---	----

Imágenes del Capítulo III

Imagen 3.1: Ejemplo de respuesta a la pregunta 5 del Pre-test.....	26
--	----

Imagen 3.2: Interpretación cualitativa de los grados de adquisición	27
---	----

Imágenes del Capítulo IV

Imagen 4.1: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°1	53
--	----

Imagen 4.2: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°1	53
--	----

Imagen 4.3: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°2	54
--	----

Imagen 4.4: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°2	55
--	----

Imagen 4.5: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°2	55
--	----

Imagen 4.6: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°3	56
--	----

Imagen 4.7: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°3	57
--	----

Imagen 4.8: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°4	57
--	----

Imagen 4.9: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°4	58
--	----

Imagen 4.10: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°4	59
---	----

Imagen 4.11: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 1-2 en la Guía N°4	60
---	----

Imagen 4.12: Ejemplo de respuesta de Nivel 2 en la Guía N°4	61
---	----

Gráficos del Capítulo IV

Gráfico 4.1: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Pre-test	52
Gráfico 4.2: Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico en la secuencia didáctica ..	62
Gráfico 4.3: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Post-test.....	63
Gráfico 4.4: Grados de adquisición del Nivel 0 en el Pre-test y Post-test	65
Gráfico 4.5: Grados de adquisición del Nivel 1 en el Pre-test y Post-test	66
Gráfico 4.6: Grados de adquisición del Nivel 2 en el Pre-test y Post-test	67

INTRODUCCIÓN

Dentro de la Matemática, la Geometría tiene un importante rol formador del individuo, tanto en lo académico como en lo cultural, pues se aplica en diversos contextos, desarrolla el razonamiento lógico, y contribuye al desarrollo de habilidades como visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de forma lógica (Gamboa & Ballester, 2010).

Tanto en Chile como a nivel internacional, una de las áreas de la matemática que presenta mayores dificultades en las últimas décadas es la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, y esto se debe a que en los establecimientos educacionales apenas se trabaja, por lo que se ha considerado como urgente mejorar la preparación de los profesores chilenos en conocimientos geométricos y su enseñanza (Aravena & Gutiérrez, 2016). Este hecho se ve reflejado en los resultados que obtienen los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales, donde se evidencian serias dificultades que presentan en la comprensión de los problemas y en los procesos argumentativos-deductivos relacionados con nociones geométricas (Aravena & Caamaño, 2013).

En la actualidad, el modelo de Van Hiele ha demostrado ser la teoría más efectiva en lo que respecta a la enseñanza de la geometría y en la evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes (Iglesias & Ortiz, 2015). Evidencia de esto, es la variedad de investigaciones que han utilizado esta teoría para medir, evaluar o describir el nivel de razonamiento de estudiantes, analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes al experimentar secuencias didácticas basadas en este modelo y, caracterizar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento (Aravena & Gutiérrez, 2016).

Con el objetivo de realizar aportaciones a la enseñanza de la Geometría en Chile, se realizó una caracterización del desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele.

Para ello, se utilizó una metodología cualitativa con un diseño no experimental, longitudinal panel, lo que significa que se realizó un estudio de cómo se transforma el razonamiento geométrico con el tiempo, en este caso, durante el transcurso de una secuencia didáctica. Sin embargo, para la identificación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico se utilizaron técnicas cuantitativas de recolección de datos que permitan hacer más robustas las comprensiones cualitativas.

Este trabajo se organiza en cinco capítulos, los que se esbozan a continuación:

- En el Capítulo I, se realiza la contextualización del problema de investigación con base en la revisión de literatura nacional e internacional, que da lugar a la pregunta de investigación, y con ello, a los objetivos que guiarán el estudio. Por último, se plantea bajo qué supuesto se realiza la investigación.
- En el Capítulo II, se describe la postura teórica que se adopta en este trabajo sobre el Razonamiento Geométrico, y en particular, se caracteriza el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele con el fin de tener una perspectiva clara para abordar los objetivos planteados en el capítulo anterior e interpretar los resultados obtenidos en la investigación.
- En el Capítulo III, se define la metodología utilizada para alcanzar los objetivos planteados en el primer capítulo, delimitando sus alcances, los sujetos de estudio, el diseño que tiene cada fase de la investigación y los procedimientos de análisis con sus respectivos criterios de rigor cualitativo.
- En el Capítulo IV, se presentan los resultados obtenidos en cada una de las fases definidas en el capítulo anterior y con ello, el análisis e interpretación de estos.
- En el Capítulo V, se establecen las conclusiones de la investigación a partir del análisis de los resultados; para ello, se da cuenta del cumplimiento de los objetivos, se responde la pregunta de investigación y se establecen las proyecciones del estudio en función de las limitaciones del mismo.

Finalmente, se espera que este trabajo se constituya en un aporte para la enseñanza de la geometría, en especial, que sirva de referencia para el estudio del desarrollo del razonamiento geométrico y, además, que los recursos utilizados para el aprendizaje matemático y la secuencia didáctica le sean útiles a los profesores cuando vayan a enseñar homotecias.

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo, a partir de la revisión de literatura se presenta la contextualización del problema que da lugar a la pregunta de investigación, y con ello, a los objetivos que guiarán el estudio. Por último, se plantea bajo qué supuesto se realiza este estudio.

1.1 Antecedentes

Dentro de la Matemática, la Geometría tiene un importante rol formador del individuo, tanto en lo académico como en lo cultural, pues se aplica en diversos contextos, desarrolla el razonamiento lógico, y contribuye al desarrollo de habilidades como visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de forma lógica (Gamboa & Ballester, 2010).

Se podría decir que las razones para enseñar Geometría son más que suficientes, sin embargo, la mayoría de los docentes relaciona la Geometría con aspectos más bien métricos, o simplemente limitan sus clases a definir figuras o relaciones geométricas con dibujos (García & López, 2008).

Este fenómeno se podría explicar, en gran medida, por la crisis que sufrió la geometría euclidiana entre las décadas de los sesenta y de los ochenta, cuando surgió el *Movimiento de las Matemáticas Modernas* que, de forma indirecta, tensionó el currículum matemático, favoreciendo otros aspectos de la matemática como lo son, por ejemplo, la teoría de conjuntos, la lógica o las estructuras algebraicas, en detrimento de los conceptos, procedimientos y construcciones teóricas de la geometría bidimensional y tridimensional (Villani & Mammana, 2001).

Por supuesto, esos ajustes curriculares generaron consecuencias casi irreversibles en las generaciones que se formaron en las primeras etapas educativas de este proceso, pues muchos de esos estudiantes son actualmente profesores de matemática (Figueiras, Molero, Salvador, & Zuasti, 2000), lo que repercute directamente en los procesos de enseñanza y en los aprendizajes de los estudiantes de las nuevas generaciones. En otras palabras, si un profesor se formó con un currículum que minimizó la Geometría, es muy probable que también minimice su enseñanza a los estudiantes (Villani & Mammana, 2001).

La escasa formación en Geometría que recibieron dichas generaciones de docentes, explicaría también la tendencia de postergar su enseñanza (Vargas & Gamboa, 2013), priorizando otras áreas de la matemática que, sumado al enfoque tradicional para orientar las clases de matemáticas, en donde se privilegia la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades apoyadas de construcciones mecánicas y descontextualizadas, tienen como consecuencia, que los estudiantes perciban la Geometría como una disciplina compleja y poco relacionada con la realidad (Gamboa & Ballesterero, 2010).

En Chile, este panorama internacional no es muy distinto, pues una de las áreas de la matemática que presenta mayores dificultades en las últimas décadas es precisamente la Geometría, y esto se debe a que en los establecimientos educacionales apenas se trabaja, por lo que se ha considerado como urgente mejorar la preparación de los profesores chilenos en conocimientos geométricos y su enseñanza (Aravena & Gutiérrez, 2016). Este hecho se ve reflejado en los resultados que obtienen los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales, donde se evidencian serias dificultades que presentan en la comprensión de los problemas y en los procesos argumentativos-deductivos relacionados con nociones geométricas (Aravena & Caamaño, 2013).

A pesar de las reformas que se han impulsado en Chile desde fines del siglo pasado, en cuanto a la formación inicial y continua de los profesores en Geometría, estas dificultades persisten (Aravena & Caamaño, 2013). Prueba de ello, son los resultados de la investigación de Rodríguez, Carreño & Muñoz (2013), en donde se relacionan y caracterizan las prácticas de enseñanza en el aula, en el área de Geometría, junto con el dominio disciplinar de profesores de Enseñanza Básica y Media. Algunas de estos resultados son los siguientes:

- Profesores con débil dominio y articulación de conceptos geométricos.
- Profesores con gran habilidad en operatoria, particularmente, en la resolución de problemas clásicos.
- Profesores con claras deficiencias en la resolución de problemas que involucran distintos contenidos geométricos.
- Enseñanza enfocada mayormente en la transferencia de operatoria y procedimientos que los estudiantes debían replicar.
- Clases con escasa promoción del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Estas características dan cuenta del enfoque tradicional con el que se orienta la enseñanza de la Geometría, teniendo como consecuencia que los estudiantes tengan dificultades en la comprensión de conceptos y procesos geométricos, y más delicado aún, bajos niveles en el

desarrollo de procesos de razonamiento geométrico, perdiendo así oportunidades para mejorar capacidades esenciales como la visualización, la elaboración, análisis y comprensión de representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena & Caamaño, 2013).

Los antecedentes presentados revelan la crisis existente en Chile en torno a la enseñanza de la Geometría, y pone en tensión al profesorado de matemática para que reflexione y trabaje en búsqueda de soluciones que favorezcan el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes.

A nivel internacional, es reconocido que, una manera de favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico es mediante el diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas basada en el modelo de Van Hiele (Abreu & Barot, 2017; Aravena & Gutiérrez, 2016; Gamboa & Ballester, 2010; Iglesias & Ortiz, 2015; Proenza & Leyva, 2008; Rodríguez, Carreño & Muñoz, 2013; Vargas & Gamboa, 2013), que contemplen diversos recursos para el aprendizaje matemático, así como el contexto y las experiencias previas de los estudiantes.

Según Antonini y Martignone (2011), una forma de promover el razonamiento geométrico de los estudiantes, es la utilización de herramientas geométricas, como el pantógrafo, pues se destaca por sus bondades en la enseñanza de la demostración matemática, debido a que su implementación promueve en los estudiantes la formulación de conjeturas y de argumentaciones, cuando se trabajan transformaciones geométricas como la homotecia.

Por otra parte, Galleguillos y Candia (2011) encontraron que el uso de recursos tecnológicos como el procesador geométrico GeoGebra, tienen un carácter constructivista que permite a los estudiantes explorar, conjeturar, verificar propiedades geométricas, entre otros atributos, que sumados a un trabajo colaborativo entre estudiantes y a un rol de facilitador por parte del docente, generarían como resultado una mayor comprensión de los conceptos, y en consecuencia, un mayor desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Por lo tanto, los antecedentes muestran que el uso de recursos manipulativos y digitales, en el estudio de las transformaciones geométricas, posibilitan a los estudiantes trabajar procesos de visualización, exploración, argumentación, demostración, entre otras habilidades, que resultan fundamentales en el desarrollo su razonamiento geométrico.

Dentro de las investigaciones sobre transformaciones geométricas, los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de homotecia, han sido escasamente reportados, focalizando su uso en áreas del conocimiento distintos al educativo (González & Arias, 2017), lo que refuerza la

necesidad de investigar los efectos que tiene una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de homotecia, basada en recursos manipulativos y virtuales, sobre el desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media.

1.2 Pregunta de Investigación

A partir de la problemática planteada desde la revisión de antecedentes, surge la necesidad de realizar contribuciones a la enseñanza de la Geometría, en particular, a la enseñanza del concepto de homotecia. Para ello, se propone el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele para la enseñanza del concepto de homotecia, cuyo foco está en el desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, por lo que la pregunta de investigación que se responde en este estudio es:

¿Cómo se desarrollan los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele?

1.3 Objetivos

Para lograr responder a la pregunta de investigación planteada en el apartado anterior, es necesario alcanzar los objetivos que se enuncian a continuación.

1.3.1 Objetivo General

Caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele.

1.3.2 Objetivos Específicos

Alcanzar el objetivo general de la investigación, está condicionado al logro de los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, antes de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.
- Describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.
- Identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.

1.4 Supuesto de la Investigación

Este estudio se guía bajo el supuesto de que, abordar el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele, permitirá a cada estudiante de primer año de enseñanza media, el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico, lo que se podrá evidenciar no sólo durante el desarrollo de las clases, sino en los niveles alcanzados antes y después de la implementación de la secuencia didáctica. El desarrollo de razonamiento geométrico de cada estudiante es diferente y estará mediado por el tipo de recursos que se utilicen en las actividades que componen la secuencia didáctica.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe la postura teórica que se adopta en este trabajo de graduación sobre el Razonamiento Geométrico, y en particular, se caracteriza el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, con el fin de tener una perspectiva clara para abordar los objetivos planteados en el capítulo anterior e interpretar los resultados obtenidos en esta investigación.

2.1 Razonamiento Geométrico

Los orígenes del pensamiento pre-geométrico se remontan a los tiempos de antiguas civilizaciones como la egipcia, la babilónica y la china, en donde este tipo de pensamiento se relacionaba con actividades como la medición y la cuantificación. Sin embargo, se piensa que el razonamiento geométrico como tal, nació en la civilización griega, debido a sus grandes descubrimientos a través de procesos lógico-deductivos (Abreu & Barot, 2017).

Para Proenza & Leyva (2008), desarrollar el pensamiento geométrico supone explorar conscientemente el espacio, comparando los elementos observados, estableciendo relaciones entre esos elementos y expresando de forma verbal las acciones realizadas y las propiedades que se obtienen a partir de la observación. Así, como consecuencia de todas esas acciones, se lograría la adquisición de los conocimientos, la deducción de propiedades, la habilidad de construir modelos y la elaboración de conclusiones que permitan formular leyes generales y resolver problemas.

Para Samper, Leguizamón y Camargo (2001), existen diferentes tipos de razonamiento geométrico, destacando en particular el razonamiento visual, que va más allá del apoyo visual, pues implica aprender a mirar las figuras matemáticamente, lo que supone lograr establecer relaciones entre conceptos o información geométrica conocida; argumentar acerca de relaciones o propiedades geométricas; comprender los elementos que conforman una teoría geométrica; comprender los conceptos o procedimientos geométricos; y comunicar los resultados obtenidos a partir de las indagaciones en geometría.

Por lo tanto, se puede concluir que el razonamiento geométrico es un proceso complejo, en el que la visualización juega un rol fundamental (Gutiérrez, 2013), por lo que es importante lograr un cambio en el paradigma de la enseñanza de la geometría y buscar nuevas estrategias que apunten a la visualización y el razonamiento visual (Samper, Leguizamón, & Camargo, 2001),

seguidos de procesos de sistematización y generalización a lo largo del estudio de los contenidos geométricos (Proenza & Leyva, 2008), los que se obtienen promoviendo estrategias argumentativas durante su enseñanza (Samper, Leguizamón, & Camargo, 2001).

Dada la complejidad del proceso de desarrollo del pensamiento geométrico, existen autores como los esposos Van Hiele, quienes proponen un modelo teórico compuesto de niveles de maduración que se alcanzan de manera gradual (Gutiérrez, 2013), En esta tesis se ha optado por trabajar el razonamiento geométrico desde esta perspectiva teórica, y por tanto, a continuación se presentan sus características y potencialidades para los aprendizajes, así como las condiciones y orientaciones para la enseñanza.

2.2 Modelo de Van Hiele

Este modelo surgió en los años cincuenta, a partir de los trabajos doctorales del matrimonio de profesores de matemática, de nacionalidad holandesa, Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes impulsaron un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría (Vargas & Gamboa, 2013; Venegas, 2015).

De acuerdo con Jaime & Gutiérrez (1990), los esposos Van Hiele se desempeñaban como profesores de secundaria, y el interés por este tema surge debido a que Pierre Van Hiele, se dio cuenta que año tras año, pese a las distintas formas en que presentaba los contenidos de geometría a sus estudiantes, y a su creciente experiencia como profesor, estos no lograban comprender el contenido; aunque lo intentaban, no tenían éxito. Sin embargo, de un momento a otro, parecía que comprendían todo. Es en ese momento cuando propone la existencia de diferentes niveles de razonamiento, que progresarían siempre que los profesores crearan condiciones favorables para su desarrollo.

En la actualidad, el modelo de Van Hiele ha demostrado ser la teoría más efectiva en lo que respecta a la enseñanza de la geometría y en la evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes (Iglesias & Ortiz, 2015). Evidencia de esto, es la variedad de investigaciones que han utilizado esta teoría para medir, evaluar o describir el nivel de razonamiento de estudiantes, analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes al experimentar secuencias didácticas basadas en este modelo y, caracterizar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento (Aravena & Gutiérrez, 2016).

El modelo plantea, básicamente, que el aprendizaje de la geometría transita por cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la clasificación, la deducción formal y el rigor. Sin embargo, dadas las características de los estudiantes en contextos escolares, se piensa que el quinto nivel es inalcanzable, además se han reportado investigaciones que demuestran que estudiantes no universitarios, a lo sumo, alcanzan los tres primeros niveles (Fouz, 2005).

En realidad, el modelo de Van Hiele está compuesto por dos partes: una parte descriptiva, en que se explican cómo razonan los estudiantes, definiendo *niveles de razonamiento*; y otra parte prescriptiva, en donde se dan directrices a los profesores sobre cómo ayudar a los estudiantes para alcanzar un mayor nivel de razonamiento, a través de la definición de *fases de aprendizaje* (Jaime & Gutiérrez, 1990).

2.2.1 Niveles de Razonamiento

A continuación, a partir del trabajo de Fouz (2005), se presentará una síntesis de las características fundamentales de cada nivel de razonamiento, correspondiente a la primera parte del modelo de Van Hiele.

- **Nivel 0: Visualización**

En este nivel los estudiantes perciben los objetos como un todo, sin identificar sus propiedades, es decir, no reconocen explícitamente las componentes y propiedades de los objetos de estudio. La descripción de los objetos está centrada en su aspecto físico y asemejándolos con elementos conocidos de su entorno. En este nivel no existe un lenguaje básico de la geometría formal para describir los objetos por su nombre.

Ejemplo: Defina “rectángulo” y “cuadrado”.

Respuesta del estudiante:

Rectángulo: Figura con dos lados más largos y dos más cortos.

Cuadrado: Figura con cuatro lados iguales.

El estudiante que se encuentra en el Nivel 0, haría una definición de este tipo, debido a que solo hace una descripción de su aspecto físico, sin identificar propiedades propias de cada cuadrilátero.

- **Nivel 1: Análisis**

A diferencia del anterior, en este nivel los estudiantes sí logran percibir componentes o propiedades (condiciones necesarias) de los objetos de estudio, pero a partir de la observación o la experimentación. La descripción de estas componentes o propiedades se hace de manera informal y aislada, pues no logran establecer relaciones entre ellas, por lo que no son capaces de elaborar definiciones coherentes con los conceptos formales de la geometría.

Ejemplo: Defina “rectángulo” y “cuadrado”.

Respuesta del estudiante:

Rectángulo: Figura de cuatro lados, con cuatro ángulos rectos, con lados paralelos, con diagonales iguales.

Cuadrado: Figura con cuatro lados iguales, con cuatro ángulos rectos, con lados paralelos, con diagonales iguales.

En este caso, el estudiante que está en el Nivel 1, no logra construir una definición adecuada para “cuadrado” y “rectángulo”, pero sí es capaz de reconocer a cada cuadrilátero por sus propiedades (condiciones necesarias).

- **Nivel 2: Clasificación**

En este nivel las descripciones de los objetos son más cercanos a la geometría formal, pues logran establecer las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Logran reconocer relaciones entre sus propiedades y las consecuencias de ellas.

Ejemplo: Defina “rectángulo” y “cuadrado”.

Respuesta del estudiante:

Rectángulo: Cuadrilátero cuyos ángulos son rectos.

Cuadrado: Rectángulo cuyos lados son iguales.

El estudiante que alcance el Nivel 2, lograría definir los cuadriláteros a través de sus condiciones necesarias y suficientes, y en este caso, identificaría que todo cuadrado es un rectángulo, por lo que en este nivel se logran clasificaciones inclusivas, a diferencia de los dos niveles anteriores.

- **Nivel 3: Deducción Formal**

Alcanzar este nivel significa que se logran realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales. Además, se comprenden las relaciones entre propiedades y se formalizan sistemas axiomáticos, por lo que se adquiere una visión globalizadora de la matemática.

Ejemplo: Defina “rectángulo”.

Respuesta del estudiante:

- Rectángulo:*
- 1) *Cuadrilátero cuyos ángulos son rectos.*
 - 2) *Cuadrilátero con diagonales iguales que se cortan en el punto medio.*
 - 3) *Paralelogramo con un ángulo recto.*

Un estudiante que alcance el Nivel 3, puede comprender que existen diferentes maneras de definir una misma figura.

- **Nivel 4: Rigor**

En este último nivel de razonamiento se conoce la existencia de distintos sistemas axiomáticos, lo que permite trabajar con distintas geometrías. Al alcanzar el más alto nivel de rigor matemático, se puede trabajar la geometría de manera abstracta. De acuerdo con Fouz (2005), este nivel sólo es alcanzable en los niveles de educación superior, por lo cual, no será considerado para el análisis de los datos de esta tesis.

El desarrollo de los niveles descritos anteriormente puede ser independientes de los métodos de enseñanza escolar, pues su adquisición obedece a las experiencias de cada persona, es decir, a veces se obtienen fuera de la sala de clases como, por ejemplo, cuando los niños aprenden a través de juegos, o de su relación con los adultos, o incluso de la televisión. Sin embargo, el desarrollo de los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele en las clases de matemática, supone que el rol del profesorado es propiciar experiencias que posibiliten a los estudiantes la realización de procesos de razonamiento adecuados, que conforman las *fases de aprendizaje* que se describen en el siguiente subtema.

2.2.2 Fases de Aprendizaje para el Desarrollo de los Niveles de Razonamiento

Para detallar esta parte del modelo de Van Hiele, se utilizará como referencia el trabajo de Jaime & Gutiérrez (1990), en donde se definen las fases de aprendizaje como pautas para los docentes, de modo que les permita organizar y graduar la enseñanza, con el objetivo de proveer al estudiante de experiencias que le permitan avanzar al nivel superior de razonamiento en que se encuentran. A continuación, se describe cada una de ellas.

- ***Fase 1: Preguntas/Información***

Se trata de determinar el punto de partida de los estudiantes y el camino a seguir de las actividades siguientes, es decir, el profesor evalúa en qué nivel de razonamiento se encuentran sus estudiantes, y estos últimos, se informan sobre el campo de estudio que trabajarán.

- ***Fase 2: Orientación Dirigida***

En esta fase profesor propone actividades concretas, bien secuenciadas, para que los estudiantes descubran, comprendan, asimilen o apliquen las ideas, conceptos, propiedades o relaciones que son objeto de estudio. En esta fase se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

- ***Fase 3: Explicitación***

Es una fase de interacción entre estudiantes, en la que el rol del docente se reduce a la entrega de contenidos nuevos y a corregir el lenguaje de los estudiantes, conforme a lo requerido en ese nivel. Esta fase es de especial relevancia, pues al existir divergencias entre los estudiantes, estos deberán intentar justificar sus ideas, y para ello deberán analizarlas, ordenarlas y expresarlas con claridad.

- ***Fase 4: Orientación Libre***

En el desarrollo de esta fase aparecen actividades más complejas dirigidas a aplicar lo anteriormente aprendido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Esta fase les obliga a justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más específico.

- **Fase 5: Integración**

En esta fase no se trabajan contenidos nuevos, sino que sólo se sintetizan los ya estudiados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que reemplace a la que ya tenía, adquiriendo un nuevo nivel de razonamiento.

A modo de resumen, las fases de aprendizaje se deben ver como un estilo de enseñanza y de organización de la docencia. En la *Imagen 2.1* se representa las relaciones entre las fases de aprendizaje y los niveles de aprendizaje que permiten el desarrollo del razonamiento geométrico.

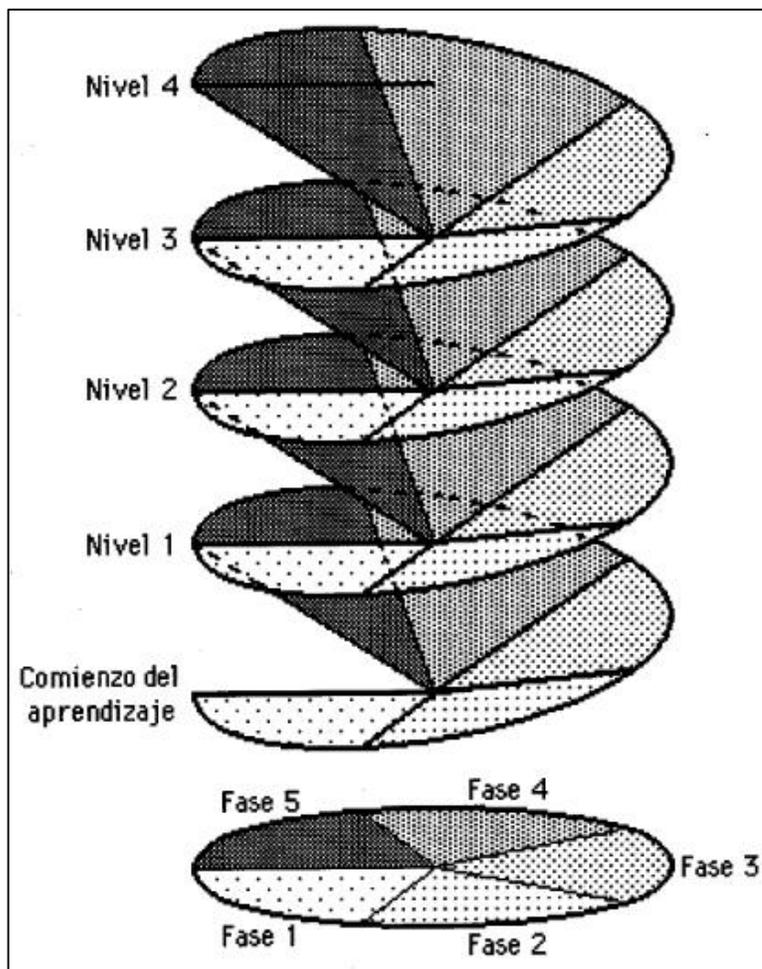


Imagen 2.1: Relación entre las Fases de Aprendizaje y los Niveles de Razonamiento.
Fuente: (Jaime & Gutiérrez, 1990, pág. 339)

Las fases de *Orientación Dirigida* y de *Orientación Libre* se enfocan en la secuenciación de las actividades para el aprendizaje de un tema y en la adquisición de un nivel de razonamiento. Por su parte, en la fase de *Explicitación* se dirigen todas las actividades para que intervengan los estudiantes. Finalmente, aunque las fases de *Preguntas/Información* y de *Integración* también son importantes, se puede prescindir de ellas cuando se observe que son innecesarias. Este tipo de decisiones del profesorado, deben estar articuladas con el conjunto de actividades diseñadas para el desarrollo de la clase; a continuación, se presentan las principales características que se deben considerar al momento de construir una secuencia didáctica que respondan a la propuesta teórica del modelo de Van Hiele.

2.2.3 Características de las Secuencias Didácticas basadas en el Modelo de Van Hiele

Según Vargas y Gamboa (2013), al momento de diseñar una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele, es necesario considerar algunas características fundamentales, las cuales se presentan a continuación.

- ***Secuencialidad***

Esta característica plantea que, si un nivel no ha logrado un grado de adquisición completo, no será posible alcanzar el nivel siguiente, es decir, un nivel siempre dependerá del anterior, por lo que se debe diagnosticar adecuadamente si un estudiante está preparado para pasar al siguiente nivel, siendo la edad un factor independiente del proceso.

- ***Recursividad***

El logro de un nivel de razonamiento siempre dependerá de la asimilación de las estrategias del nivel anterior. Como se muestra en la *Tabla 2.1*, esta idea señala que, lo que es implícito en un nivel, se convierte en explícito en el siguiente nivel. Para ello, los procesos de razonamiento se inscriben en familias de situaciones a las que se recurre en cada nivel, es decir, se aprovechan las mismas situaciones para que el aprendiz concentre todos sus esfuerzos cognitivos en la mejora de las estrategias o en el descubrimiento de nuevas formas de aproximarse al objeto geométrico.

Tabla 2.1: Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele.
 Fuente: (Jaime & Gutiérrez, 1990, pág. 312)

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 0	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 1	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 2	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 3	Deducción formal de teoremas	

- **Especificidad del lenguaje**

El desarrollo del razonamiento no solo se relaciona con la habilidad de resolver problemas, sino que el vocabulario matemático o la manera de expresar ideas es determinante en cada nivel, por lo que el profesor, como parte de sus procesos de transposición didáctica, debe adecuar su vocabulario, de acuerdo al nivel de sus estudiantes y al nivel de razonamiento que quiera trabajar.

- **Continuidad**

La progresión entre los niveles se hace de forma continua y pausada, es decir, de manera gradual. El aprendizaje no se desarrolla de forma repentina, sino que, mediante pequeños avances conexos que le permitan llegar al logro del nivel. De esa manera, la continuidad está estrechamente relacionada con la recursividad.

- **Localidad**

Esta característica hace referencia a que un estudiante puede razonar desde distintos niveles, de acuerdo con las áreas de la geometría que esté trabajando y que haya trabajado en sus experiencias previas (escolares y no escolares). Si se alcanza cierto nivel en un campo de la geometría, será más probable que el estudiante alcance ese mismo nivel en otros campos o temáticas de índole geométrico.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En este capítulo se define la metodología que se utilizó para alcanzar los objetivos planteados en el primer capítulo, delimitando sus alcances, los sujetos de estudio, el diseño que tiene la investigación y los procedimientos de análisis con sus respectivos criterios de rigor.

3.1 Tipo de Metodología

Esta investigación tiene una metodología cualitativa pues se centra en caracterizar los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes de primer año medio, cuando abordan el concepto de homotecia. La forma de lograr ese objetivo es a través de la descripción del desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico cuando los estudiantes abordan el concepto de homotecia. Para ello, se analizan las respuestas dadas por los estudiantes en las guías que desarrollan clase a clase. De acuerdo con Hernández et al. (2014) y Sandín (2003), este tipo de metodología se ajusta al objetivo planteado debido a su perspectiva interpretativa y su búsqueda por comprender en profundidad un fenómeno educativo, pues la interpretación de las respuestas de los estudiantes permitirán por un lado, situarlos en un cierto nivel de razonamiento geométrico, y por otro, analizar los factores que influyen, facilitan o dificultan la evolución de estos.

Así, con los resultados obtenidos de la investigación se pretende proporcionar una solución al problema planteado, en el caso particular de la enseñanza de la homotecia, lo que resulta ser un *uso instrumental* de este tipo de investigación (Sandín, 2003).

3.2 Alcance de la Investigación

Este estudio tiene un alcance descriptivo pues, como se planteó anteriormente, se busca describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes de primer año medio, cuando abordan el concepto de semejanza. De acuerdo con Hernández et al. (2014), los estudios descriptivos tienen como objetivo identificar propiedades y características importantes de un fenómeno, describiendo las tendencias de un grupo. Además, Sandín (2003) expone que los objetivos planteados en una investigación de tipo descriptiva permiten identificar elementos y logran describir los procesos del problema de investigación.

3.3 Sujetos de estudio

Para esta investigación se trabajó con 33 estudiantes de primer año medio, pertenecientes a un establecimiento educacional particular subvencionado de la comuna de El Bosque. Se seleccionaron a los estudiantes de este colegio porque allí existe una asignatura que se dedica al estudio de la unidad de geometría, de forma independiente durante el año, por lo que resulta ideal para los objetivos de este estudio.

Cabe destacar que, de acuerdo a los protocolos éticos de la investigación educativa, previo al inicio de la investigación, se solicitó formalmente a la directora del establecimiento, la autorización para llevar a cabo el estudio. Además, los apoderados de los estudiantes involucrados firmaron un consentimiento informado acerca del estudio y sus objetivos, enfatizando respecto al resguardo de la información proporcionada por los estudiantes y sus identidades. Ambos formatos de consentimiento informado se encuentran adjuntos en los anexos de este trabajo.

3.4 Diseño Metodológico

El diseño de esta investigación es no experimental, longitudinal panel, pues el objetivo general es *Caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele*, lo que significa que se realizará un estudio de cómo se transforma el razonamiento geométrico con el tiempo, en este caso, durante el transcurso de una secuencia didáctica. La elección de este diseño también se justifica porque la población de estudiantes que se analiza es siempre la misma (Hernández, Fernandez, & Baptista, 2014). Sin embargo, para la cuantificación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico, en el pre y post test se utilizarán técnicas cuantitativas de recolección de datos que permitan hacer más robustas las comprensiones cualitativas.

El estudio se estructuró en tres fases: Evaluación Inicial, Intervención y Evaluación Final. Las fases de Evaluación Inicial y Final consisten en dos test que se analizaron cuantitativamente, pues pretendían medir el grado de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento geométrico, antes y después de la aplicación de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de homotecia. Por otro lado, en la Fase de Intervención se aplicó la unidad didáctica, construida a partir de los lineamientos dados en el modelo de Van Hiele, y su análisis se llevó a cabo a través de la interpretación de las respuestas escritas por los estudiantes.

3.4.1 Fase 1: Evaluación Inicial

Esta primera fase tenía como propósito determinar los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico, desde el nivel 0 hasta el nivel 2, previo al estudio del concepto de homotecia, por lo tanto, responde al primer objetivo específico de esta investigación que es *Identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, antes de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.*

Para esta medición se construyó un test de razonamiento geométrico, utilizando como base las preguntas del test de Corberán et al. (1994) sobre polígonos, cuadriláteros y triángulos, temas que los estudiantes habían estudiado en años anteriores. Al tratarse de un test ya validado, se requirió el juicio de expertos para validar el instrumento.

3.4.1.1 Instrumento: Pre-test

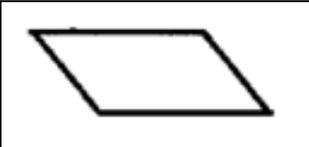
El pre-test diseñado para esta primera fase está conformado por cinco preguntas relacionadas con los conceptos de polígonos, cuadriláteros y triángulos. Cada pregunta apunta a diferentes niveles de razonamiento geométrico, las que se detallan a continuación.

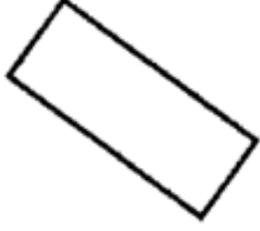
Pregunta 1

Lee detenidamente las siguientes definiciones y responde a las preguntas que se presentan a continuación:

- *Un cuadrado es un cuadrilátero que tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos rectos.*
- *Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los 4 ángulos rectos.*

- a) Coloca una **C** dentro de los cuadrados, y una **R** dentro de los rectángulos. Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura. Justifica tus respuestas en el espacio asignado.

	JUSTIFICACIÓN
	

b) Determina la veracidad de las siguientes afirmaciones, colocando **V** si es verdadera, y **F** si es falsa. Justifica cada respuesta. Puedes utilizar ejemplos para justificar.

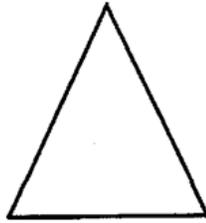
	JUSTIFICACIÓN
_____ Los cuadrados SIEMPRE son rectángulos.	
_____ Los cuadrados A VECES son rectángulos.	
_____ Los cuadrados NUNCA son rectángulos.	
_____ Los rectángulos SIEMPRE son cuadrados.	
_____ Los rectángulos A VECES son cuadrados.	
_____ Los rectángulos NUNCA son cuadrados.	

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta primera pregunta apunta a los niveles 1 y 2 del modelo de Van Hiele, puesto que se espera que los estudiantes hagan clasificaciones de los cuadriláteros, a partir de las definiciones que se les dan, la cuales pueden ser exclusivas (Nivel 1) o inclusivas (Nivel 2).

Pregunta 2

La siguiente figura es un **triángulo isósceles**. Haz una lista con todas las propiedades que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

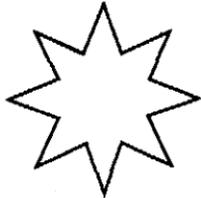
Esta pregunta pretende medir los niveles 0 y 1 de Van Hiele, pues se espera que los estudiantes enuncien la mayor cantidad de propiedades del triángulo que se presenta, y estas pueden ser más bien visuales (Nivel 0) o apuntar a propiedades matemáticas (Nivel 1).

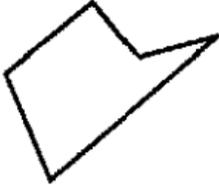
Pregunta 3

Lee detenidamente la siguiente definición:

*Un **ANLA** es un polígono que tiene como máximo 7 ángulos iguales y como mínimo dos lados paralelos.*

A partir de la definición anterior, indica si las siguientes figuras son ANLA, justificando en cada caso.

	¿ANLA? (Sí / No)	Justificación
		

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta pregunta mide los niveles 1 y 2 de Van Hiele, debido a que los estudiantes deben identificar si los polígonos verifican cierto conjunto de propiedades. Sus respuestas pueden estar enfocadas en las condiciones necesarias (Nivel 1) o en las condiciones suficientes (Nivel 2) que deben cumplir.

Pregunta 4

Escribe para cada uno de los triángulos que se presentan, todas las clasificaciones que se le puedan dar, según sus lados y según sus ángulos: Equilátero, Isósceles, Escaleno, Acutángulo, Rectángulo, Obtusángulo. Justifica tu respuesta en cada caso.

	Clasificación	Justificación
		
		
		
		
		

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

En esta pregunta se pretenden evaluar los niveles 0, 1 y 2 de Van Hiele, ya que se espera que los estudiantes realicen clasificaciones exclusivas (Nivel 1) o inclusivas (Nivel 2), dependiendo además de la justificación de su elección, que podría ser enfocada en la apariencia física (Nivel 0) o en propiedades matemáticas.

Pregunta 5

La siguiente figura es un **rombo**. Haz una lista con todas las propiedades que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Al igual que la pregunta 2, en esta última pregunta se miden los niveles 0 y 1 de Van Hiele, pues se espera que los estudiantes enuncien la mayor cantidad de propiedades del rombo que se presenta, y estas pueden ser más bien visuales (Nivel 0) o apuntar a propiedades matemáticas (Nivel 1).

3.4.1.2 Análisis del Instrumento

Corberán et al. (1994) consideran dos aspectos para la codificación de cada pregunta del test:

1) Determinar el **nivel de razonamiento** de la respuesta del estudiante, a partir de las propiedades que enuncie y su correspondencia con las características de cada nivel propuesto por Van Hiele.

2) Determinar el **tipo de respuesta**, la cual depende de la calidad matemática y la claridad con la que se manifiesta dicho nivel de razonamiento. Para ello se consideran los siguientes tipos de respuestas:

- **Tipo 0:** Ítems sin respuesta o con respuesta no codificable.
- **Tipo 1:** Respuestas que no se enmarcan en un determinado nivel de razonamiento y que además no proporcionan información sobre los niveles inferiores.
- **Tipo 2:** Respuestas incorrectas e incompletas en las que se pueden evidenciar ciertos indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se caracterizan por ser respuestas muy breves y pobres, que incluso contienen errores matemáticos o que no contestan de forma directa.
- **Tipo 3:** Respuestas correctas pero incompletas en las que se pueden identificar indicios de un cierto nivel de razonamiento. Por lo general, son respuestas muy breves y pobres, pero que no contienen errores matemáticos.
- **Tipo 4:** Respuestas que transitan entre dos niveles de razonamiento diferentes. Esto se debe a que combinan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem, dependiendo de la dificultad de este. Las respuestas pueden ser correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.
- **Tipo 5:** Respuestas bastante completas pero incorrectas, que reflejan claramente cierto nivel de razonamiento. El error en las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen caminos que no los llevan a la solución del problema.

- **Tipo 6:** Respuestas bastante completas y correctas que dan cuenta de un nivel de razonamiento determinado. Son respuestas claras y correctas pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema por completo o porque contienen errores poco significativos.
- **Tipo 7:** Respuestas matemáticamente correctas y completas que evidencian, sin duda alguna, un cierto nivel de razonamiento.

A continuación, la *Imagen 3.1* muestra un ejemplo de cómo se evalúa el nivel de razonamiento y el tipo de respuesta de un estudiante ante la pregunta 5, en donde se pedía listar la mayor cantidad de propiedades del rombo.

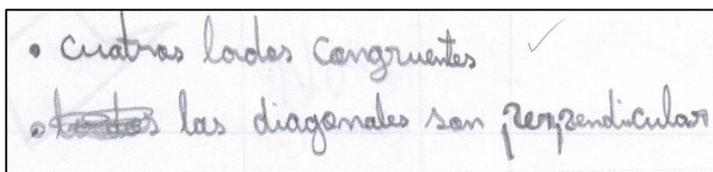


Imagen 3.1: Ejemplo de respuesta a la pregunta 5 del Pre-test

En este caso, se puede ver que la lista de propiedades es bastante corta, pero incluye propiedades matemáticas importantes, como lo es la igualdad de sus lados y la perpendicularidad de sus diagonales. Por este motivo, sería una respuesta que refleja características del *Nivel 1*, y sería de *Tipo 3*.

Una vez que se ha codificado cada una de las respuestas del pre-test, el proceso de evaluación de su nivel de razonamiento geométrico se completa observando en conjunto las respuestas a los diferentes ítems que pueden ser contestados en un determinado *Nivel* y ponderando, entre 0 y 100, cada respuesta en función de su *Tipo*, según los valores de la *Tabla 3.1* que se encuentra a continuación.

Tabla 3.1: Ponderaciones según el tipo de respuesta

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación	0	0	20	25	50	75	80	100

Por lo tanto, para determinar la adquisición del Nivel 0, se consideraron las preguntas 2, 4 y 5; para el Nivel 1 las preguntas 1, 2, 3, 4 y 5; y para el Nivel 2 las preguntas 1, 3 y 4.

Para concluir, el *grado de adquisición* de un determinado nivel de razonamiento, estará dado por la media aritmética de las ponderaciones correspondientes a tal nivel.

A continuación, la *Tabla 3.1* muestra un ejemplo del procedimiento necesario para calcular los grados de adquisición de cada nivel de razonamiento, del pre-test de un estudiante.

Tabla 3.2: Ejemplo de cálculo de los grados de adquisición de niveles de razonamiento

Pregunta	Nivel	Tipo	Ponderaciones		
			Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
1	2	7	-	100	100
2	1	6	100	80	-
3	1	2	-	20	0
4	1	6	100	80	0
5	0	6	80	0	-
Grados de adquisición			93,3	56	33,3

Como se puede observar en la *Tabla 3.1*, en la pregunta 2 se alcanzó el Nivel 1 con una respuesta de Tipo 6, por tanto, la ponderación del Nivel 1 es 80, pero además la ponderación del Nivel 0 es 100, debido a la propiedad de *Secuencialidad* de los niveles de razonamiento de Van Hiele, es decir, si se alcanzó el Nivel 1, quiere decir que se logró el nivel anterior. Algo análogo ocurre con la pregunta 3, en la que el nivel máximo era el 2, sin embargo, el estudiante logra el Nivel 1 con una respuesta de Tipo 2, por lo que este último nivel queda ponderado por 20, y el nivel 2 por 0.

Para interpretar los grados de adquisición obtenidos, desde un punto de vista cualitativo, se debe considerar la división del segmento 0 – 100, que se presenta en la *Imagen 3.2*.

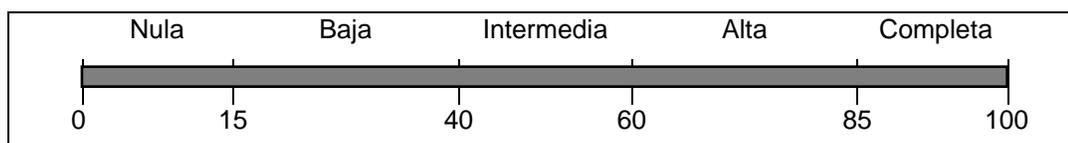


Imagen 3.2: Interpretación cualitativa de los grados de adquisición

Así, el estudiante del ejemplo anterior tiene una adquisición *completa* del Nivel 0, adquisición *intermedia* del Nivel 1 y un grado de adquisición *bajo* del Nivel 2.

3.4.2 Fase 2: Intervención

En esta segunda fase, se implementa la unidad didáctica en torno al concepto de homotecia. Los datos que se obtengan de esta etapa de la investigación responden al segundo objetivo específico: *Describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.*

Esta secuencia didáctica tiene una duración de cuatro clases de 90 minutos cada una. En cada sesión se trabaja con una guía de apoyo basada en el Modelo de Van Hiele, junto con otros recursos manipulativos. Cabe destacar que los estudiantes trabajan en grupos de forma colaborativa. Para la validación del instrumento se utilizó el juicio de expertos en dos procedimientos diferenciados (Sandín, 2003): primero, se solicitó a 5 profesores de matemática de educación media que revisaran las actividades de secuencia didáctica, quienes plantearon que, si bien había coherencia con el objetivo específico de la investigación, era necesario hacer ajustes de extensión y redacción para que estuviesen acordes al contexto de los estudiantes. Segundo, una vez realizados los cambios solicitados anteriormente, la unidad didáctica fue sometida a un proceso de evaluación por parte de un didacta de la matemática, quien emitió un juicio válido en términos de forma, coherencia y pertinencia del instrumento para la investigación.

3.4.2.1 Instrumento: Secuencia Didáctica¹

Guía N°1: El Pantógrafo

Descripción de la actividad

Esta primera actividad pretende introducir el concepto de homotecia, en particular, las *homotecias directas*. Para esto, los estudiantes deberán visualizar y analizar el funcionamiento del pantógrafo, para construir una primera definición de Homotecia. El nivel de razonamiento al que apunta es al de Visualización (Nivel 0).

¹ Las guías que se presentan en esta sección están ajustadas de manera que ocupen el menor espacio posible. Las guías reales tenían los espacios suficientes para las respuestas de los estudiantes.

Guía

¡A TRABAJAR!

Paso 1: Recorten el triángulo que se encuentra en la hoja anexa a la guía.

Paso 2: Dividan imaginariamente la cartulina en cuatro cuadrantes y peguen el triángulo en el centro del cuadrante izquierdo-inferior de la cartulina, con la orientación que ustedes escojan.

Paso 3: Instalen el pantógrafo en el borde izquierdo-inferior de la cartulina.

Paso 4: Realicen las ampliaciones (2 y 3) y reducciones ($1/2$ y $1/3$) del triángulo, utilizando el pantógrafo.

Paso 5: Escribe dentro de cada triángulo construido, el número correspondiente a la escala de ampliación o reducción que aparece en el pantógrafo.

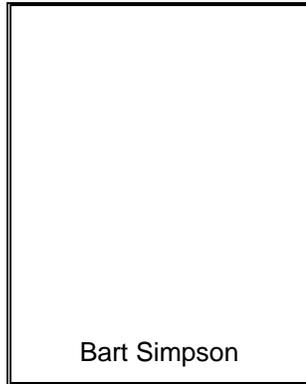
- 1) A simple vista, ¿Cómo son los triángulos obtenidos con el pantógrafo, respecto al triángulo original?

- 2) ¿Qué ocurre con las posiciones de los triángulos obtenidos en ampliaciones cada vez mayores?

- 3) Análogamente, ¿qué sucede con las posiciones de los triángulos obtenidos en reducciones cada vez menores?

Paso 6: Recorten la imagen de Bart Simpson que se encuentra en la hoja anexa a la guía.

Paso 7: Elaboren una estrategia para lograr dibujar a Bart Simpson dentro del siguiente cuadro, utilizando la mayor área posible.



4) Describan detalladamente la estrategia que utilizaron para hacer el dibujo de Bart Simpson.

Paso 8: Recorten la imagen de Lisa Simpson que se encuentra en la hoja anexa a la guía.

Paso 9: Elaboren una estrategia para lograr dibujar a Lisa Simpson dentro del siguiente cuadro, utilizando la mayor área posible.



5) Describan detalladamente la estrategia que utilizaron para hacer el dibujo de Lisa Simpson.

RESUMAMOS...

Cada construcción que han hecho con el pantógrafo recibe el nombre de HOMOTECIA.

Utilizando sus observaciones, elaboren una definición de Homotecia.

Guía N°2: La Cámara Oscura

Descripción de la actividad

En esta sesión se presenta otro tipo de homotecia: las *homotecias inversas*. Para esto se trabajará con la cámara oscura. El objetivo es que, con base en las nuevas características que identifiquen de este trabajo, logren elaborar una nueva definición de homotecia que incluya también las características observadas en el funcionamiento del pantógrafo, es decir, deben establecer características comunes. El nivel de razonamiento al que apunta es al de Visualización (Nivel 0).

Guía

¡A TRABAJAR!

Paso 1: Armen su cámara oscura de acuerdo con las instrucciones que les entregará el profesor.

Paso 2: Ubiquen uno de los objetos en un lugar bien iluminado, y frente a él, la cámara oscura.

Paso 3: Observen lo que ocurre con la imagen de la pantalla de la cámara, al acercar o alejar el objeto de ésta.

1) ¿Qué ocurre con la imagen de la pantalla al acercar el objeto a la cámara?

2) ¿Qué ocurre con la imagen de la pantalla al alejar el objeto de la cámara?

Paso 4: Regulen la distancia entre el objeto y la cámara oscura, de manera que la imagen proyectada en la pantalla cubra la mayor área posible (que logre abarcar desde el borde superior al inferior de la pantalla).

3) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

Paso 5: Utilizando el otro objeto, realicen el mismo procedimiento efectuado en el Paso 4.

4) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

5) De acuerdo con lo experimentado, ¿Qué diferencias existen entre las distancias a las que se ubican cada objeto? ¿De qué dependen?

Paso 6: Escojan uno de los objetos, y pónganlo frente a la cámara de tal manera que la imagen proyectada en la pantalla tenga el doble del tamaño de este (Si no les alcanza con el alto del objeto, utilicen como referencia su ancho).

6) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

Paso 7: Ahora ubiquen el objeto, de tal modo que la imagen de la pantalla tenga la mitad del tamaño del objeto.

7) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

Paso 8: Tomen el otro objeto nuevamente, y pónganlo frente a la cámara de tal manera que la imagen proyectada en la pantalla tenga el doble del tamaño de este (Si no les alcanza con el alto del objeto, utilicen como referencia su ancho).

8) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

Paso 9: Ahora ubiquen el objeto, de tal modo que la imagen de la pantalla tenga la mitad del tamaño del objeto.

9) Midan la distancia entre el objeto y la cámara oscura. Anótenla a continuación.

10) ¿Qué regularidad notaron al momento de ampliar al doble ambos objetos?

11) ¿Qué regularidad notaron al momento de reducir a la mitad ambos objetos?

12) Si quisiéramos que la imagen obtenida en la cámara sea del mismo tamaño que el objeto, ¿A qué distancia deberíamos ubicarlo?

Paso 10: Júntense con otra pareja y respondan las preguntas 13 y 14.

13) ¿Las distancias necesarias para ampliar al doble el tamaño del objeto fueron las mismas para cada cámara oscura? ¿Y para reducir a la mitad? ¿Y para conservar el tamaño?

14) ¿Qué relación existirá entre el largo su cámara oscura y las distancias obtenidas para ampliar al doble, reducir a la mitad y conservar el tamaño? ¿Ocurre lo mismo con la cámara oscura de la otra pareja?

15) Sin utilizar su cámara oscura, determinen la distancia que sería necesaria para que el tamaño de un objeto aumente al triple. Anoten su resultado.

16) Sin utilizar su cámara oscura, determinen la distancia que sería necesaria para que el tamaño de un objeto disminuya a la tercera parte. Anoten su resultado.

Paso 11: Utilizando su cámara oscura, comprueben si acertaron con las distancias de las preguntas 15 y 16.

RESUMAMOS...

Al igual que la actividad que trabajaron con el pantógrafo en la sesión anterior, el concepto involucrado en este fenómeno óptico de la cámara oscura también es la HOMOTECIA.

¿Qué características de la Homotecia se ven aplicadas en todo el trabajo con la cámara oscura?

Utilizando sus conclusiones de estas dos últimas sesiones, elaboren una nueva definición de Homotecia.

Guía N°3: Concepto de Homotecia

Descripción de la actividad

El objetivo de esta sesión es reconocer los elementos que componen una homotecia, a partir de lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, para lograr una definición del concepto que sea matemáticamente más rigurosa. El nivel de razonamiento al que apunta es al de Análisis (Nivel 1).

Guía

¡A TRABAJAR!

Paso 1: Tomen la cartulina donde dibujaron con el pantógrafo y etiqueten los vértices del triángulo original (A, B, C).

Paso 2: Etiqueten los vértices de los triángulos construidos con el pantógrafo, en relación con las escalas de ampliación o reducción (Por ejemplo: A_2, B_2, C_2 , para el triángulo hecho con factor de escala 2, y así con cada triángulo).

Paso 3: Intenten unir con una recta todos los vértices homólogos entre sí, esto es, con una recta todos los vértices homólogos de A, con una segunda recta los homólogos de B y con otra recta los homólogos de C.

1) ¿Qué ocurre con las rectas trazadas?

--

Paso 4: Midan las distancias entre el lugar donde estaba anclado el pantógrafo (O), con cada vértice de cada triángulo. Anótalas en la siguiente tabla.

Distancias a puntos originales		Distancias a puntos homólogos		¿Relación entre distancias a los originales y a los homólogos?
\overline{OA}		$\overline{OA_{1/3}}$		
		$\overline{OA_{1/2}}$		
		$\overline{OA_2}$		
		$\overline{OA_3}$		
\overline{OB}		$\overline{OB_{1/3}}$		
		$\overline{OB_{1/2}}$		
		$\overline{OB_2}$		
		$\overline{OB_3}$		
\overline{OC}		$\overline{OC_{1/3}}$		
		$\overline{OC_{1/2}}$		
		$\overline{OC_2}$		
		$\overline{OC_3}$		

Paso 5: Retomemos lo trabajado con la cámara oscura.

- 2) Representen en un dibujo el funcionamiento de la cámara oscura, cuando ampliaron al doble uno de los objetos, colocando las medidas que determinaron en la sesión anterior. Si es necesario pide ayuda a tu profesor.

- 3) Representen en un dibujo el funcionamiento de la cámara oscura, cuando redujeron a la mitad uno de los objetos, colocando las medidas que determinaron en la sesión anterior. Si es necesario pide ayuda a tu profesor.

4) ¿Qué tienen en común los esquemas anteriores, con los dibujos hechos con el pantógrafo?

5) ¿En qué se diferencia el funcionamiento del pantógrafo y el de la cámara oscura?

RESUMAMOS...

Recuerden que tanto en el funcionamiento del pantógrafo como en el de la cámara oscura, está presente el concepto de HOMOTECIA. Así que, junto con tu profesor definan el concepto de Homotecia y caractericen sus elementos. A continuación, identifíquenlos en ambas experiencias.

Guía N°4: Propiedades de la Homotecia

Descripción de la actividad

Los estudiantes ya han trabajado implícitamente con todos los tipos de homotecias, prescindiendo de las propiedades particulares de cada una, por lo que en esta actividad se crean las condiciones para hacerlas explícitas, mediante la utilización de una aplicación generada para esta secuencia didáctica, en el procesador geométrico GeoGebra bajo el nombre de “Homotecia.ggb”, cuya interfaz se muestra en la *Imagen 3.3*. El objetivo, por lo tanto, es clasificar estos tipos de homotecia y lograr elaborar una última definición del concepto, junto con la mayor cantidad de propiedades que hayan identificado a partir de la manipulación del recurso. El nivel de razonamiento al que apunta es al de Clasificación (Nivel 2).

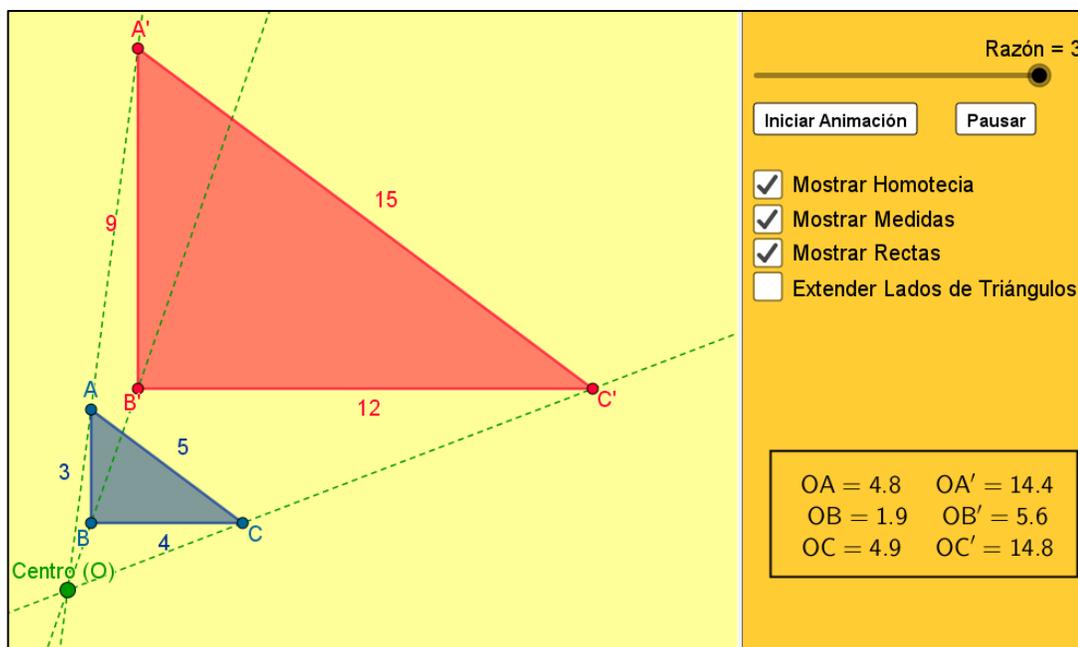


Imagen 3.3: Interfaz de aplicación generada en GeoGebra (Homotecia.ggb)

Guía

¡A TRABAJAR!

Paso 1: Abran el archivo “Homotecia.ggb”. Al triángulo azul que aparece en el plano, se le aplicará una homotecia respecto al centro de homotecia “O” y razón de homotecia dada por el deslizador “Razón”, que se encuentra en la parte superior derecha de la pantalla. El triángulo rojo corresponde al homotético del azul.

Paso 2: Presionen el botón “Iniciar Animación” y observen durante unos segundos, lo que ocurre en el plano cartesiano y en el deslizador “Razón”.

- 1) A simple vista, ¿Qué ocurre con la figura homotética a medida que cambian los valores de la “Razón”?

Paso 3: Presionen el botón “Pausar” y seleccionen las casillas “Mostrar Medidas” y “Mostrar Rectas” (Antes de continuar, verifiquen con su profesor la definición de Homotecia construida la clase anterior, analizando las medidas del cuadro inferior-derecho). Para contestar las siguientes preguntas, pueden utilizar el cursor para mover manualmente el deslizador.

Distinta orientación							
No existe figura							

Paso 4: Desmarquen la casilla “Mostrar Medidas” y seleccionen las casillas “Iniciar Animación”, “Extender Lados de Triángulos”, y a continuación mientras se mueve el deslizador “Razón”, seleccionen una a una las casillas “ AB y A'B' ”, “ BC y B'C' ” y “ CA y C'A' ”. Observen por unos segundos lo que ocurre con cada par de rectas.

9) ¿Qué ocurre con los lados homólogos de los triángulos?

RESUMAMOS...

Respondan las siguientes preguntas.

¿Qué tipo de homotecia es la que construye el pantógrafo? ¿Por qué?

¿Qué tipo de homotecia es la que se observa en la cámara oscura? ¿Por qué?

Resuman las propiedades de ambos tipos de homotecia.

3.4.2.2 Análisis del Instrumento

Para el análisis de esta fase, se consideraron las definiciones de homotecia que los estudiantes construyeron en cada guía trabajada en la unidad didáctica. Para organizar estos datos cualitativos, se utilizó una matriz en donde se analizó el significado de cada unidad de análisis que podía ser extraída de la respuesta textual de los estudiantes. A cada uno de estos significados se le asoció una característica de los niveles de razonamiento de Van Hiele, con el objetivo de

establecer finalmente cuál o cuáles niveles de razonamiento predominaban en dicha definición. A continuación, la *Tabla 3.3* presenta el formato de esta matriz de análisis.

Respuesta Textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado

Tabla 3.3: Matriz de análisis del concepto de homotecia

Las características de los niveles de razonamiento que se utilizaron para este análisis fueron extraídas del trabajo de Fouz (2005), siendo más evidenciables las siguientes:

- **Nivel 0:**

A) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.

B) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándolas a elementos familiares del entorno. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.

- **Nivel 1:**

C) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto de la observación como de la experimentación.

D) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no de relacionar unas propiedades con otras, o unas figuras con otras. No pueden elaborar definiciones.

- **Nivel 2:**

E) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones dentro de la geometría y los requisitos que siempre se requieren.

Para ejemplificar el uso de la *Tabla 3.3* mostrada anteriormente, a continuación, en la *Tabla 3.4* se muestra el análisis de la definición de homotecia de un grupo de estudiantes, construida en la segunda guía de la secuencia didáctica.

Tabla 3.4: Ejemplo del análisis del concepto de homotecia

Respuesta Textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
<i>Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.</i>	<i>Es el cambio de tamaño de figuras</i>	Describe apariencia física.	B	Nivel Transición 0-1
	<i>según su distancia</i>	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	<i>Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan</i>	Describe apariencia física	B	
	<i>La figura nueva es semejante a la original</i>	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	

Cuando una definición apunta a características de un mismo nivel de razonamiento, entonces el nivel de razonamiento alcanzado será ese mismo. En caso de que la definición apunte a características de dos niveles de razonamiento consecutivos, entonces el nivel de razonamiento alcanzado se establecerá como un *Nivel de Transición* de los niveles involucrados. En el ejemplo anterior, los estudiantes construyeron una definición que respondía a características tanto del Nivel 0 como del Nivel 1, por lo tanto, su nivel de razonamiento alcanzado se definió como Nivel de Transición 0-1.

3.4.3 Fase 3: Evaluación Final

Esta última fase tenía como propósito medir los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico, desde el nivel 0 hasta el nivel 2, después de haber transitado por todas las etapas de la secuencia didáctica propuesta para el estudio del concepto de homotecia, por lo tanto, los resultados de su implementación responden al tercer objetivo específico de esta investigación que es: *Identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele.*

Para la medición de esta fase se construyó un test de razonamiento geométrico, utilizando como referencia el tipo de preguntas del test de Corberán et al. (1994), es decir, una adaptación de ese tipo de preguntas, pero contextualizadas esta vez, desde el concepto de homotecia.

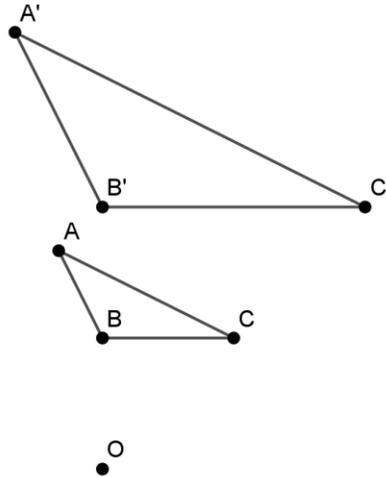
La validación de este nuevo instrumento fue realizada por juicio de expertos (Sandín, 2003), por los cual, dos didactas en el área (una nacional y otra internacional), consideraron que las preguntas eran comprensibles, pertinentes y coherentes para evaluar los niveles de razonamiento propuestos.

3.4.3.1 Instrumento: Post-test

El post-test diseñado para esta última fase está conformado por cinco preguntas relacionadas con el concepto de homotecia. Cada pregunta apunta a diferentes niveles de razonamiento geométrico, las que se detallan a continuación.

Pregunta 1

Al triángulo ABC se le aplicó una homotecia con centro O, transformándose en el triángulo A'B'C'. De acuerdo con esta homotecia, haz una lista con todas sus propiedades.

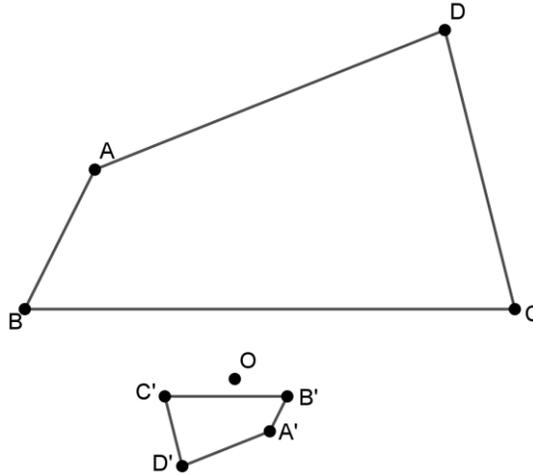


Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta pregunta está diseñada para evaluar los grados de adquisición de los niveles 0 y 1 de razonamiento geométrico, puesto que las respuestas que se esperarían podrían ser desde una perspectiva visual (Nivel 0) o acudiendo a las propiedades matemáticas involucradas (Nivel 1).

Pregunta 2

Al cuadrilátero ABCD se le aplicó una homotecia con centro O, transformándose en el cuadrilátero A'B'C'D'. De acuerdo con esta homotecia, haz una lista con todas sus propiedades.



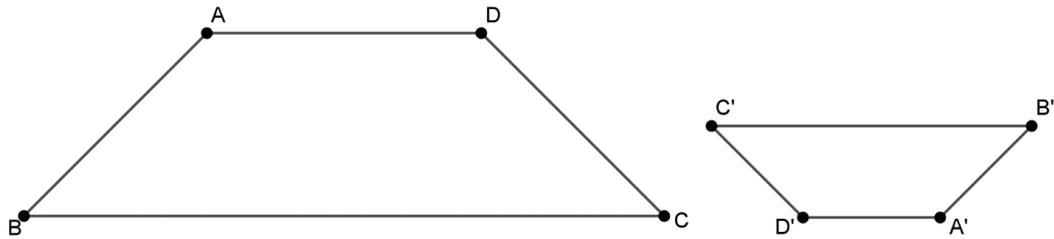
Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Al igual que la anterior, esta pregunta pretende evaluar los niveles 0 y 1 de razonamiento geométrico, debido a que las respuestas se pueden enmarcar desde un enfoque más bien visual (Nivel 0) o bien, de la enunciación de sus propiedades matemáticas (Nivel 1).

Pregunta 3

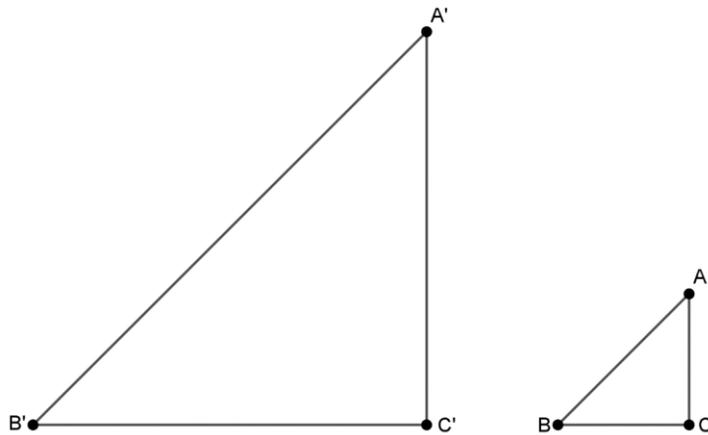
Coloca cuando corresponda en el esquema, una H si las figuras son Homotéticas y una S si son figuras Semejantes. Si es necesario, puedes escribir más de una letra en el esquema. Justifica cada elección.

a)



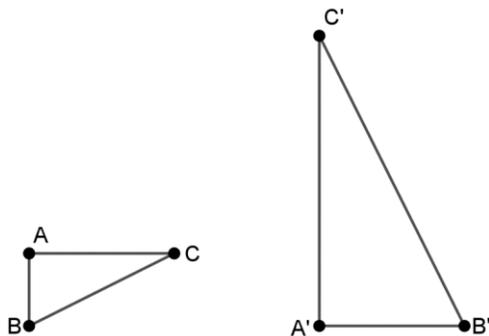
Justificación:

b)



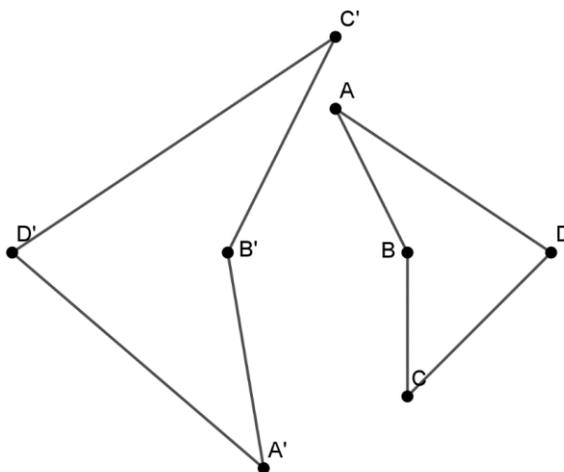
Justificación:

c)



Justificación

d)



Justificación:

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta tercera pregunta busca evaluar la adquisición de los niveles 0, 1 y 2 de razonamiento geométrico, puesto que las clasificaciones que se esperan pueden ser exclusivas (Nivel 1) o inclusivas (Nivel 2), dependiendo además de las justificaciones, que podrían enmarcarse desde un aspecto más bien visual (Nivel 0).

Pregunta 4

Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o Falsas (F), justificando tu elección.

a) _____ Dos figuras Homotéticas SIEMPRE son Semejantes.

b) _____ Dos figuras Homotéticas A VECES son Semejantes.

c) _____ Dos figuras Homotéticas NUNCA son Semejantes.

d) _____ Dos figuras Semejantes SIEMPRE son Homotéticas.

e) _____ Dos figuras Semejantes A VECES son Homotéticas.

f) _____ Dos figuras Semejantes NUNCA son Homotéticas.

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta pregunta busca medir la adquisición de los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico, pues se espera que identifiquen condiciones necesarias (Nivel 1) o suficientes (Nivel 2), de figuras homotéticas y de figuras semejantes.

Pregunta 5

Dibuja un polígono cualquiera en el recuadro de más abajo. Luego dibuja la figura homotética a esa (que no salga del recuadro), con las siguientes condiciones:

1. Las medidas de sus lados deben ser el doble de los de la figura original.
2. Debe ser obtenida mediante una homotecia inversa.
3. Sus lados homólogos deben ser paralelos entre sí.
4. El centro de homotecia debe estar en un vértice cualquiera de la figura original.
5. La distancia desde cada uno de sus vértices hacia el centro de homotecia debe ser el doble que la distancia de cada vértice original al centro de homotecia.
6. Su perímetro debe ser el doble del perímetro original.
7. Debe ser semejante a la figura original.

A partir de tu dibujo anterior responde:

a) ¿Cuál(es) de las condiciones que debía tener el dibujo consideraste SUFICIENTES para su construcción? Justifica cada una de tus elecciones. (Para no escribir nuevamente cada condición, puedes poner su número correspondiente)

b) En caso de no haber utilizado todas las condiciones, ¿Por qué no las escogiste? Justifica cada una. (Al igual que la pregunta anterior, puedes poner el número correspondiente a cada condición)

Niveles de Razonamiento a los que apunta la pregunta

Esta última pregunta tiene la finalidad de evaluar la adquisición de los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico, pues a partir de un conjunto de condiciones, deben dibujar una homotecia que las cumpla, y para ello, deberán distinguir las condiciones necesarias (Nivel 1) y las que son suficientes (Nivel 2).

3.4.3.2 Análisis del Instrumento

El análisis de este test se realizó de la misma manera que el pre-test, es decir, calculando los grados de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento geométrico, a partir de la identificación de los niveles de razonamiento alcanzados en cada pregunta, junto con los tipos de respuestas en cada una de ellas, determinando así sus ponderaciones.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se analizan e interpretan los resultados obtenidos en las tres fases que contempla el diseño metodológico. A continuación, se presentan los hallazgos de acuerdo con el orden de implementación.

4.1 Resultados y análisis de la Fase 1

La primera parte de este análisis tiene relación con *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, antes de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. A continuación, se describen los resultados obtenidos por el instrumento diseñado para esta fase, en la *Tabla 4.1* y el *Gráfico 4.1*.

Tabla 4.1: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Pre-test

Grado de Adquisición	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
Nula	13%	22%	53%
Baja	25%	34%	25%
Intermedia	0%	25%	16%
Alta	16%	19%	3%
Completa	47%	0%	3%

En la *Tabla 4.1* se destacan en verde los porcentajes más altos, correspondientes a los grados de adquisición con mayor logro de cada nivel de razonamiento. Se puede observar que casi la mitad de los estudiantes alcanzaron una adquisición completa del Nivel 0; sin embargo, a medida que el nivel aumenta, los mayores porcentajes se van desplazando hacia grados de adquisición cada vez menores, lo que implica que estos estudiantes no vivieron experiencias de aprendizaje relacionadas con polígonos, cuadriláteros y triángulos, que fueran suficientes para transitar hacia los niveles superiores (Fouz, 2005).

Para tener una mejor visualización de los resultados de este test, se presenta a continuación el *Gráfico 4.1*.

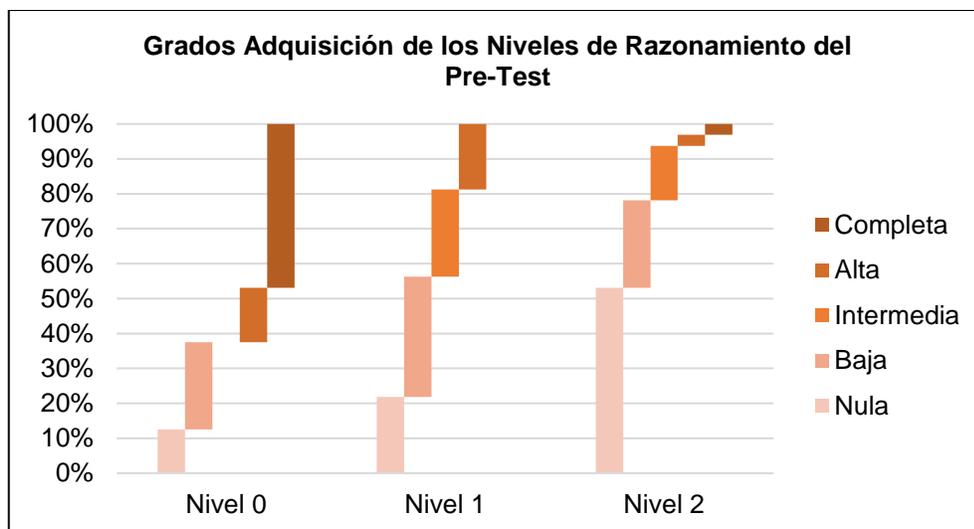


Gráfico 4.1: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Pre-test

A partir del Gráfico 4.1, se puede observar una gran concentración de estudiantes con una Alta y Completa adquisición del Nivel 0, pero a medida que aumenta el nivel de razonamiento, estos grados de adquisición superiores, se van perdiendo y predomina una concentración de estudiantes con Nula o Baja adquisición de los niveles superiores, de hecho en el Nivel 0, las adquisiciones Nula y Baja alcanzan juntas casi un 40%, y en el siguiente nivel alcanzan casi un 60%, terminando el Nivel 2 con alrededor de un 80% de estudiantes con Nula o Baja adquisición.

Si bien los conceptos evaluados en este test no están directamente relacionados con la Homotecia, sus resultados revelarían la experiencia previa de los estudiantes con relación al desarrollo del razonamiento geométrico, lo que sería un buen predictor del éxito que pueden tener en la Fase de Intervención de esta investigación, es decir, si alcanzaron tales grados de adquisición en los diferentes niveles de razonamiento, es muy probable que, a lo menos, alcancen esos mismos grados de adquisición en otras áreas de la geometría, que ente caso sería el estudio del concepto de Homotecia. Esta idea la aseguraría la propiedad de *Localidad* del modelo de Van Hiele (Vargas & Gamboa, 2013).

4.2 Resultados y análisis de la Fase 2

En esta segunda parte del análisis de los resultados se busca *describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. Para ello se consideraron las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes, en

cada una de las sesiones de la secuencia didáctica, para luego dividir cada respuesta en unidades de análisis más breves, con el objetivo de caracterizarlas de acuerdo con alguno de los descriptores de cada nivel de razonamiento geométrico (Fouz, 2005). Así, las definiciones que respondían a las características de un único nivel de razonamiento se clasificaron en tal nivel, y en aquellos casos en que se evidenciaban características de dos niveles distintos, se clasificaron en un nivel de transición de los niveles involucrados.

Para presentar estos resultados se mostrará lo que se obtuvo en cada una de las guías trabajadas en la secuencia didáctica.

4.2.1 Guía N°1: El pantógrafo

Esta primera guía se enfocó en introducir el concepto de homotecia mediante el uso del pantógrafo. Para ello, los estudiantes realizaron distintas construcciones, que permitieran reflexionar en torno a su funcionamiento. Por lo tanto, este material estaba dirigido a concretar el Nivel 0 de Visualización.

El 67% de las definiciones construidas por los estudiantes, luego de esta experimentación, se situaron en el Nivel 0 pues se centraban en aspectos visuales, es decir, descripciones físicas generales, que tendían a no diferenciar componentes propios de la homotecia. La *Imagen 4.1* muestra un ejemplo del tipo de respuesta que representa este tipo de razonamiento.

A rectangular box containing the handwritten text "Agrandar y achicar el dibujo" in pink ink.

Imagen 4.1: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°1

Por otro lado, el 33% restante apuntó más allá de los aspectos únicamente visuales, logrando identificar además alguna propiedad importante de la homotecia, como se puede apreciar en la *Imagen 4.2*.

A rectangular box containing the handwritten text "Una homotecia es un dibujo semejante a alguna figura 'original'." in blue ink.

Imagen 4.2: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°1

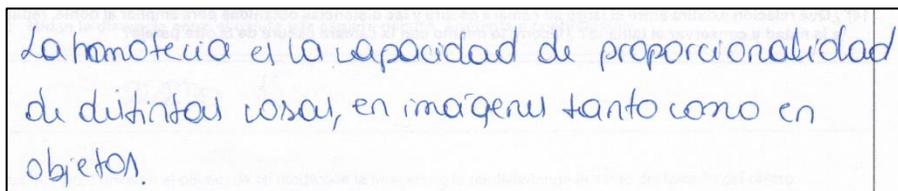
Este caso es interesante porque este grupo de estudiantes por un lado define el concepto de homotecia como “*un dibujo*”, lo cual representa un aspecto más bien físico (Nivel 0), pero luego agregan “*semejante a alguna figura original*”, y esto evidencia dos aspectos importantes: el primero es la relación de semejanza y el segundo es que identifican que es necesario una figura previa sobre la que se aplica la homotecia. Estos últimos elementos ponen de manifiesto características propias del siguiente nivel de razonamiento, el Nivel 1 de Análisis, en donde los estudiantes perciben propiedades o condiciones necesarias del concepto, ya sea mediante la observación o de la experimentación. Por lo tanto, este 33% de estudiantes cuyas respuestas se enmarcaban en el Nivel 0, pero que además cumplían con ciertas características del Nivel 1, se clasificaron, en el que Nivel de Transición 0-1.

A partir del análisis anterior, se puede concluir que el trabajo con el pantógrafo y la guía adjunta, lograron su objetivo y además, permitió que una parte de los estudiantes lograran percibir el concepto de semejanza como condición necesaria en una homotecia.

4.2.2 Guía N°2: La cámara oscura

Al igual que en la primera guía, este segundo material tenía como propósito continuar trabajando el Nivel 0, a través de otro recurso: la cámara oscura, que es un instrumento óptico que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real. Este nuevo recurso permitió tener otra perspectiva del concepto de homotecia pues adiciona elementos propios de una homotecia inversa, a diferencia del pantógrafo que construye únicamente homotecias directas.

El concepto de homotecia construido posterior al trabajo con la cámara oscura, apuntó al Nivel 0 en solo el 11% de los casos. Ejemplo de ello, es la respuesta de la *Imagen 4.3* que se presenta a continuación.



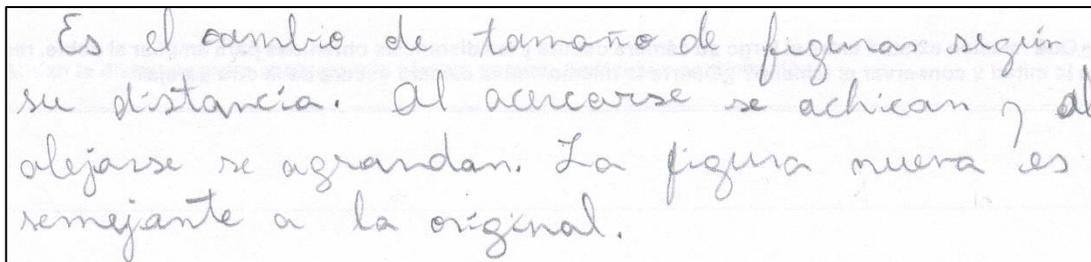
La homotecia es la capacidad de proporcionalidad de distintas cosas, en imágenes tanto como en objetos.

Imagen 4.3: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°2

En este caso, la parte clave de la definición habla de “*capacidad de proporcionalidad de distintas cosas*”, que hace referencia a que las figuras obtenidas en una homotecia son siempre

semejantes, sin embargo, al no existir un lenguaje geométrico adecuado para referirse a este hecho, corresponde al Nivel 0 de razonamiento.

El 78% de las definiciones se encontraron en el Nivel de Transición 0-1, como la que se observa a continuación en la *Imagen 4.4*.

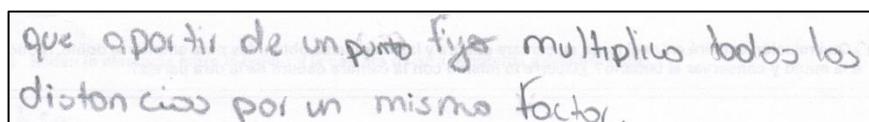


Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.

Imagen 4.4: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°2

Como se puede observar en la imagen anterior, inicialmente solo hace referencia al tamaño de las figuras homotéticas, siendo un aspecto puramente visual del Nivel 0, sin embargo, luego agrega elementos de Nivel 1, como que es “según su distancia”; haciendo alusión a la distancia entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia, lo cual resulta ser una componente importante en una homotecia, completando luego con que “al acercarse se achican y al alejarse se agrandan”. Para terminar, completa que “la nueva figura es semejante a la original”, que como se analizó en un ejemplo previo, corresponde a la identificación de una condición necesaria de una homotecia. Por todo lo anterior es que este tipo de respuesta queda clasificada en el Nivel de Transición 0-1.

Por último, el 11% restante logró identificar componentes más significativas desde el punto de vista matemático, sin embargo, no logran elaborar una definición matemáticamente coherente, quedando clasificados en el Nivel 1. La *Imagen 4.5* muestra un ejemplo de ello.



que a partir de un punto fijo multiplico todos los distancias por un mismo factor.

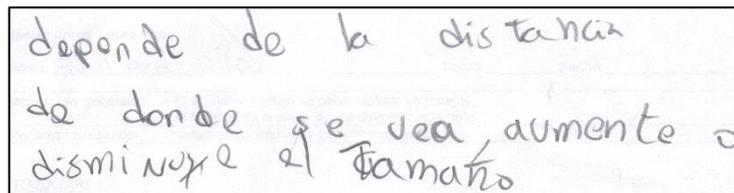
Imagen 4.5: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°2

Como se puede observar, este grupo de estudiantes logra percibir la existencia de un punto fijo, que sería el centro de homotecia; incluso, de manera un tanto incompleta, identifican que en una homotecia se “*multiplica todas las distancias por un mismo factor*”, entendiéndose que las distancias que existen entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia se ponderan por un mismo factor, es decir, por la razón de homotecia.

4.2.3 Guía N°3: Concepto de homotecia

En esta parte de la secuencia, se retomó lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, con el objetivo de identificar y formalizar los elementos comunes de ambas experiencias y con ello, lograr una definición más completa y formal del concepto de homotecia. Por lo tanto, esta parte de la secuencia tenía como propósito alcanzar el Nivel 1.

El 20% de las definiciones de homotecia contenía características del Nivel 0. Ejemplo de ello, es la que se presenta en la *Imagen 4.6*.



depende de la distancia
de donde se vea aumento o
disminuye el tamaño

Imagen 4.6: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°3

En esta definición de homotecia se aprecian elementos relacionados con la percepción visual, en el que se alude solamente a un cambio de tamaño, dependiendo del punto de vista del observador, lo que no resulta suficiente para alcanzar el nivel esperado.

En cuanto al Nivel de 1, fue alcanzado por el 80% restante de los estudiantes, construyendo definiciones como la que se muestra en la *Imagen 4.7*.

Genera figuras semejantes de acuerdo a una

- razón de homotecia
- centro de homotecia

Imagen 4.7: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°3

Se puede apreciar que aparecen conceptos fundamentales como: “*figuras semejantes*”, “*razón de homotecia*” y “*centro de homotecia*”, todo esto gracias a la experimentación con la aplicación en GeoGebra. Sin embargo, lo enunciado no tiene la estructura de una definición, motivo por el cual, queda clasificada en tal nivel.

4.2.4 Guía N°4: Propiedades de la homotecia

Esta última parte de la secuencia se utilizó como recurso digital la aplicación GeoGebra, con el fin de generalizar algunas propiedades de la homotecia y poner en evidencia a su vez, la existencia de diferentes tipos de homotecia; directas e inversas, es decir, se trata de establecer condiciones necesarias y suficientes para cada uno de estos tipos de homotecia, lo que es coherente si se tenía como propósito que los estudiantes alcanzaran el Nivel 2 de razonamiento geométrico (Fouz, 2005).

Posterior a este trabajo, el 23% de las definiciones continuaron en el Nivel 0, como se puede ver a continuación en la *Imagen 4.8*.

Directa: siempre es positivo y empieza desde el centro hacia adelante

Inversa: siempre es negativo y empieza desde el centro hacia afuera

Imagen 4.8: Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°4

Si bien se clasifican los dos tipos de homotecia, predominan aspectos visuales como “*empieza desde el centro hacia adelante*” o “*empieza desde el centro hacia afuera*”, no apareciendo ninguna propiedad geométrica relevante. Esto puede significar que este grupo de estudiantes no logró completar con éxito las actividades que involucraron el uso del pantógrafo y la cámara oscura, pues fue en esos trabajos en donde debieron haber adquirido un vocabulario básico, de aquellos conceptos claves relacionados con la homotecia, junto con la visualización de sus propiedades.

Solo el 8% de las definiciones quedó en el Nivel de Transición 0-1, como se puede observar en la *Imagen 4.9*.

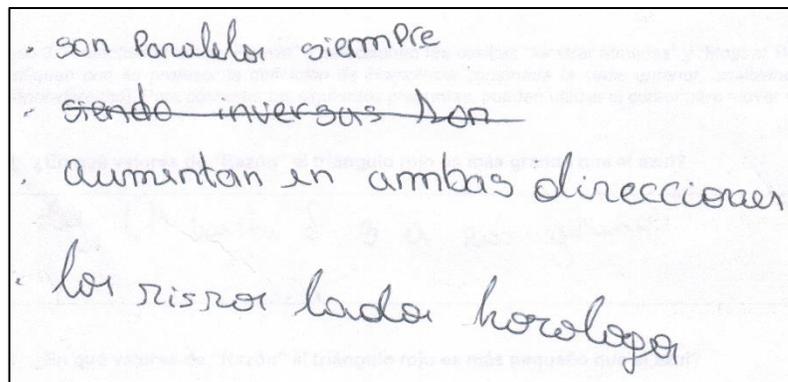


Imagen 4.9: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°41

Si bien no se hace una distinción entre los dos tipos de homotecia, y además se explicitan elementos visuales (Nivel 0) que no aportan al concepto, sí se logra identificar una propiedad geométrica importante a partir de la manipulación de la aplicación (Nivel 1): “*son paralelos siempre*”, haciendo referencia al paralelismo de los lados homólogos de las figuras homotéticas. Este cruce entre dos niveles de razonamiento justifica su clasificación en el Nivel de Transición 0-1.

Un 31% de las definiciones alcanzó el Nivel 1, como se puede ver a continuación en la *Imagen 4.10*.

Directa: Su razón siempre es positiva, las figuras están derechas, en una recta (a partir del centro cambia de dirección)

Inversa: Su razón es negativa y eso es lo que provoca que las imágenes se volteen

Imagen 4.10: Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°4

La respuesta anterior queda clasificada en el Nivel 1 porque se logra realizar una clasificación de la homotecia directa e inversa, a través de componentes derivadas de la observación, pero utilizando un lenguaje informal. Esto se aprecia claramente cuando se dice que en la homotecia directa *las "figuras están derechas"* y en la homotecia inversa *"las imágenes se voltean"*. Esto pudo haber ocurrido porque no logró identificar todas las características propias de cada tipo de homotecia a partir del análisis pantógrafo y la cámara oscura, ni de la manipulación de la aplicación en GeoGebra, por lo que solo se centró en la relación de la razón de homotecia y la disposición de la figura en el plano.

Un 8% de las respuestas transita entre los niveles 1 y 2, el que llamaremos a partir de ahora, Nivel de Transición 1-2. Un ejemplo de ello lo podemos encontrar a continuación en la *Imagen 4.11*.

Homotecia directa	homotecia inversa
- Los valores de la razón son positivos	- Los valores de la razón son negativos
- Tiene la misma orientación (0,1+)	- Tiene la misma orientación (-0,1-)
- Sus lados homólogos son paralelos	- Siguen siendo paralelos sus lados homólogos
- A mayor lejanía del triángulo original, mayor es el tamaño de sus lados	- A mayor lejanía del triángulo original, menor es el número de la razón
- Se ve más fácil en un pentágono oscuro	- Se ve más fácil en la cámara oscura

Imagen 4.11: Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 1-2 en la Guía N°4

En este caso, existe una clasificación de los tipos de homotecia, donde se muestran características comunes, que serían condiciones necesarias, como que “sus lados homólogos son paralelos”, y otras condiciones que son suficientes para cada tipo de homotecia, como por ejemplo que “los valores de la razón son positivos” en el caso de la homotecia directa, y “los valores de la razón son negativos” en el caso de la homotecia inversa. Hasta este punto parece que todo apunta a la adquisición del Nivel 2, sin embargo, en los últimos dos puntos de cada columna se hace alusión a aspectos obtenidos a partir de la manipulación de todos los recursos utilizados en la secuencia, utilizando para ello, un lenguaje más informal, lo que correspondería a características del Nivel 1. Por esta combinación de características de ambos niveles de razonamiento, es que se clasifica en el Nivel de Transición 1-2.

Finalmente, el 31% de las respuestas logró identificar las condiciones necesarias y suficientes de cada tipo de homotecia, como se muestra a continuación en la Imagen 4.12.

HD: la Figura homotética mantiene su orientación,
 en el punto de razón "1" las Figuras son del mismo
 tamaño. los valores de la razón son positivos;
 En los puntos que están entre 0 y 1 la ~~imagen~~^{Figura} es
 de menor tamaño y sobre 1 es más grande
 HI: la Figura homotética cambia su orientación,
 las Figuras son del mismo tamaño en el punto "1".
 Entre 0 y -1 la ~~imagen~~^{Figura} es de menor tamaño
 y sobre -1 la Figura aumenta su tamaño.

Imagen 4.12: Ejemplo de respuesta de Nivel 2 en la Guía N°4

En la respuesta anterior se puede ver claramente la clasificación de cada tipo de homotecia, pues se describe lo que ocurre con la orientación y el tamaño de una figura, de acuerdo con los distintos valores que puede tomar la razón de homotecia, lo que en conjunto constituyen condiciones suficientes para identificar cada tipo de homotecia. Además, en la descripción de cada tipo de homotecia se aprecia la utilización de un lenguaje matemático en que se reconocen conceptos clave como "figura homotética", "razón" y "orientación", respondiendo así al nivel esperado en esta última parte de la secuencia.

4.2.5 Resumen de los resultados derivados de la implementación de la secuencia didáctica

A modo de resumen, se muestra la adquisición de los distintos niveles de razonamiento geométrico, durante el transcurso de la secuencia didáctica.

A partir del *Gráfico 4.2* se puede inferir que las dos primeras guías, enfocadas en el Nivel 0, no solo permitieron a los estudiantes explorar y construir el concepto de homotecia a través de la visualización, sino que también resultó ser una oportunidad para identificar propiedades geométricas importantes que apuntan al nivel siguiente, como la relación de semejanza entre las figuras homotéticas y la disposición de éstas de acuerdo con su tamaño.

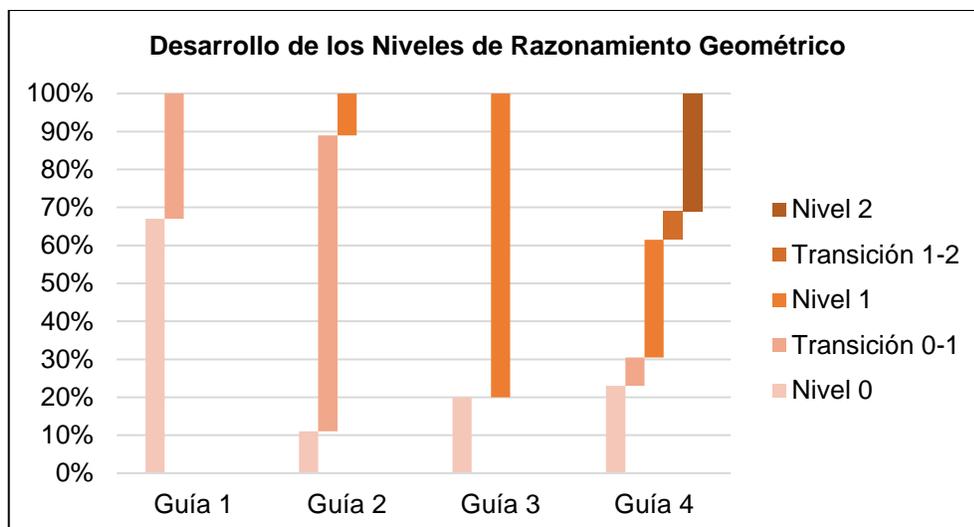


Gráfico 4.2: Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico en la secuencia didáctica

Gracias a la manipulación del pantógrafo, la cámara oscura, el procesador geométrico GeoGebra y junto con las preguntas de las guías, se logró promover el razonamiento y la construcción de un concepto de homotecia que evolucionó sostenidamente a lo largo de la secuencia, logrando obtener casi un 70% de estudiantes entre los niveles 1 y 2.

4.3 Resultados y análisis de la Fase 3

La última fase de este análisis tiene por objetivo *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. A continuación, se presentan los resultados obtenidos por el instrumento diseñado para esta fase, en la *Tabla 4.2* y el *Gráfico 4.3*.

Tabla 4.2: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Post-test

Grado de Adquisición	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
Nula	0%	15%	65%
Baja	10%	60%	20%
Intermedia	30%	5%	10%
Alta	20%	15%	5%
Completa	40%	5%	0%

En la *Tabla 4.2* se destacan en verde los porcentajes más altos de Post-test, correspondientes a los grados de adquisición con mayor logro de cada nivel de razonamiento. Se puede observar que 40% de los estudiantes alcanzaron una adquisición completa del Nivel 0, sin embargo, a medida que el nivel aumenta, los mayores porcentajes se van desplazando hacia grados de adquisición cada vez menores, de hecho, el 60% de los estudiantes tienen una Baja adquisición del Nivel 1 y el 65% una Nula adquisición del nivel 2, lo que implica que, el conjunto de experiencias de aprendizaje relacionadas con el concepto de homotecia, no fueron suficientes para que los estudiantes logran transitar hacia los niveles superiores (Fouz, 2005).

Para tener una mejor visualización de los resultados de este test, se presenta a continuación el *Gráfico 4.3*.

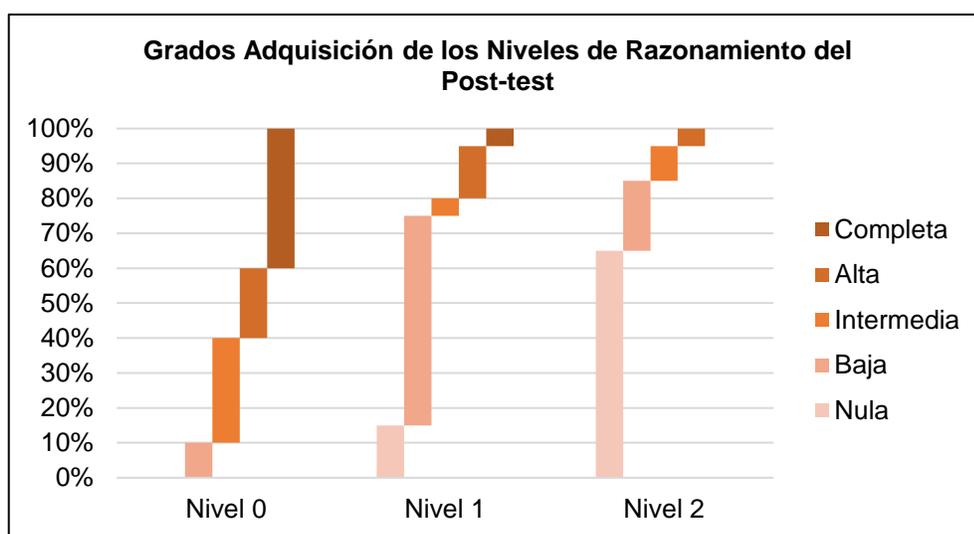


Gráfico 4.3: Grados de adquisición de los niveles de razonamiento del Post-test

Los resultados muestran que hubo un 60% de estudiantes que alcanzó una adquisición Alta o Completa del Nivel 0, lo que sugiere que las actividades orientadas a la visualización lograron su objetivo en gran medida, de hecho, solo el 10% de los estudiantes alcanzó una adquisición Baja. Cabe destacar que, contrario a lo que ocurrió en el pre-test, en este tes final no hubo estudiantes con grado Nulo de adquisición del Nivel 0.

Al avanzar al Nivel 1, la porción de estudiantes que lograron una Alta o Completa adquisición se reduce considerablemente, llegando solo a un 20%, lo cual deja entrever la falta de actividades orientadas al análisis en esta secuencia. De hecho, el 75% de los estudiantes alcanza una Nula o Baja adquisición de este nivel, lo que confirma esta carencia.

Por supuesto, al llegar al análisis del Nivel 2, se estrecha más el porcentaje de estudiantes que alcanza grados superiores de adquisición, llegando solo el 5% de ellos a una Alta adquisición del nivel, quedando un 85% de los estudiantes en Nula o Baja adquisición.

Estos resultados confirman la propiedad *Secuencial* del modelo de Van Hiele (Vargas & Gamboa, 2013), pues si no se logró una adquisición completa de un cierto nivel de razonamiento, es muy difícil alcanzar el siguiente.

A continuación, la *Tabla 4.3* muestra a modo de resumen, los grados de adquisición de cada nivel de razonamiento de tanto del pre-test como del post-test, con el objetivo de establecer algunas inferencias respecto al impacto de la secuencia didáctica en el desarrollo de los niveles de razonamiento de los estudiantes de la muestra.

Tabla 4.3: Resumen de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento en el Pre-test y Post-test

Grados de Adquisición	Nivel 0		Nivel 1		Nivel 2	
	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
Nula	13%	0%	22%	15%	53%	65%
Baja	25%	10%	34%	60%	25%	20%
Intermedia	0%	30%	25%	5%	16%	10%
Alta	16%	20%	19%	15%	3%	5%
Completa	47%	40%	0%	5%	3%	0%

A simple vista, no parecieran existir diferencias significativas en los grados de adquisición Alto y Completo, correspondientes a cada test. Además, en ninguna de estas pruebas se logran resultados sobresalientes en los niveles 1 y 2. Sin embargo, teóricamente el modelo de Van Hiele plantea que es incorrecto hacer comparaciones simples entre el pre-test y el post-test ya que el objeto geométrico sobre el que se mide el razonamiento es diferente en cada test (polígonos, cuadriláteros y triángulos en el pre-test y, homotecias en el post-test); por tanto, es necesario hacer el análisis sobre los grados de adquisición al interior de cada nivel (Aravena & Gutiérrez, 2016; Fouz, 2005; Vargas y Gamboa, 2013).

Para interpretar de mejor manera estos resultados, se analizarán los grados de adquisición por cada nivel de razonamiento. A continuación, el *Gráfico 4.4* presenta los grados de adquisición del pre y post test, respecto al Nivel 0.

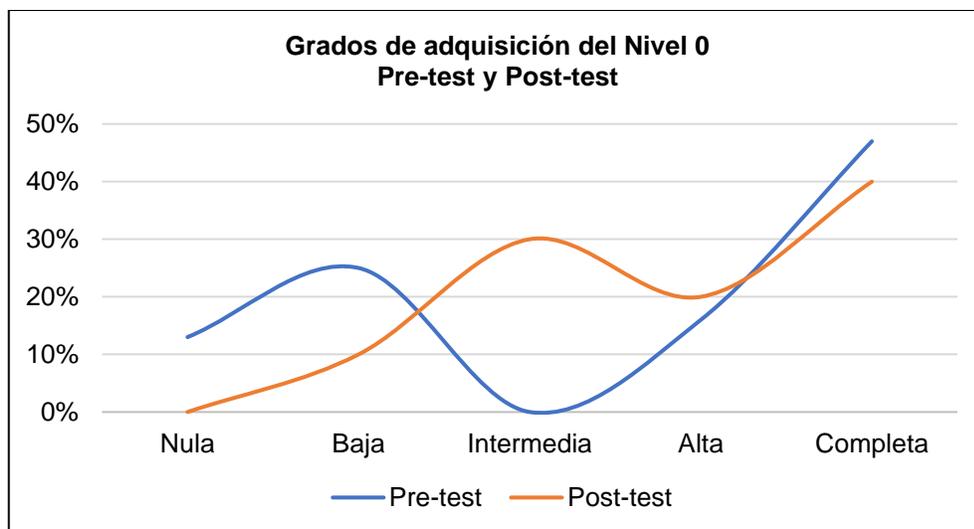


Gráfico 4.4: Grados de adquisición del Nivel 0 en el Pre-test y Post-test

Como se puede observar en el *Gráfico 4.4*, las adquisiciones Nula y Baja presentan mayores porcentajes en el Pre-test, lo que es positivo desde el punto de vista del impacto de la secuencia didáctica, puesto que los porcentajes de las adquisiciones Intermedia y Alta son ampliamente mejores en el Post-test, y esto en términos del desarrollo del razonamiento es favorable, porque el avance entre niveles se realiza de forma gradual, lo cual implica que estos estudiantes tendrían mayores probabilidades de alcanzar una adquisición superior; en contraposición a la gran concentración de estudiantes que obtienen Nula o Baja adquisición en el Pre-test, que tendrían menos probabilidades de alcanzar una adquisición Completa del Nivel 0. Dicho proceso estaría respaldado por la propiedad de *Continuidad* del razonamiento geométrico (Vargas & Gamboa, 2013). Respecto a la adquisición Completa del Nivel 0, la diferencia es levemente mejor el Pre-test, lo que podría explicarse porque polígonos, cuadriláteros y triángulos son conceptos geométricos que vienen ‘visualizando’ y aprendiendo desde la educación parvularia.

A continuación, el *Gráfico 4.5* muestra los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 1.

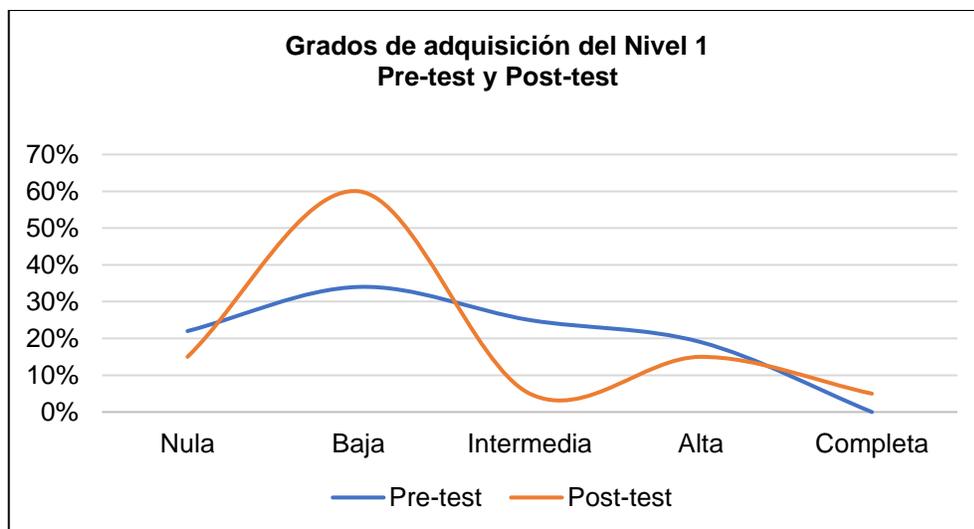


Gráfico 4.5: Grados de adquisición del Nivel 1 en el Pre-test y Post-test

En el *Gráfico 4.5* se evidencian mejores resultados en el Pre-test, por el hecho de ser más homogéneos sus resultados, pues en el caso de los grados de adquisición del Post-test existe una mayor dispersión, esto es, un gran porcentaje de estudiantes en Nula y Baja adquisición y una cantidad considerablemente menor de estudiantes en los grados superiores, lo que implica que se necesitaría movilizar a una mayor cantidad de estudiantes para alcanzar tales grados. Respecto al éxito de la secuencia didáctica en este nivel, se podría decir que faltó dedicar más tiempo y generar otras actividades que permitieran potenciar el análisis conjunto del pantógrafo y de la cámara oscura, para que logran establecer propiedades comunes del funcionamiento de ambos artefactos.

Por último, se presenta el *Gráfico 4.6* en donde se pueden observar los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 2.

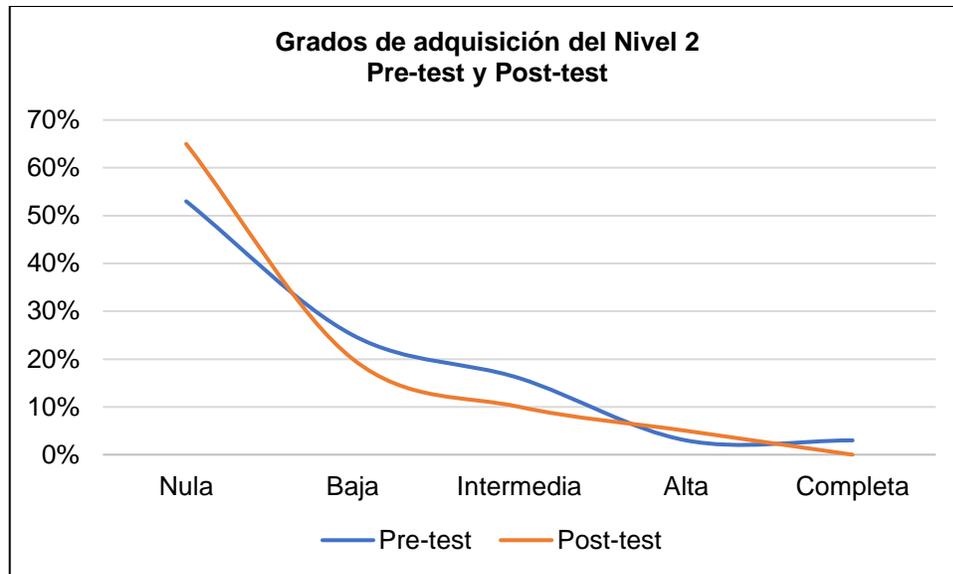


Gráfico 4.6: Grados de adquisición del Nivel 2 en el Pre-test y Post-test

En este caso, el Gráfico 4.6 muestra resultados igualmente deficientes en ambos test, es decir, ni en el estudio de polígonos, cuadriláteros y triángulos, ni en el estudio del concepto de homotecia, se lograron resultados satisfactorios en la adquisición Alta y Completa del Nivel 2, por el contrario, se logran elevados porcentajes en las adquisiciones Nula y Baja en ambas pruebas. Respecto a la secuencia didáctica, al no existir una satisfactoria transición entre los Niveles 0 y 1, alcanzar el Nivel 2 se convierte en un objetivo difícilmente alcanzable, esto debido a la *Secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas & Gamboa, 2013).

En resumen, en la secuencia didáctica se obtuvo un alto porcentaje de estudiantes entre los Niveles 1 y 2, de acuerdo al análisis de las definiciones de homotecia que construyeron. Sin embargo, este logro se ve opacado por los resultados del Post-test en donde estos porcentajes disminuyen considerablemente, con respecto a los grados de adquisición de esos niveles. Las causas de estos resultados pueden deberse a la falta de actividades de *Orientación Libre*, en donde los estudiantes aplicaran lo aprendido en cada fase, con el objetivo de lograr un mayor razonamiento y un mejor lenguaje geométrico (Jaime & Gutiérrez, 1990).

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

En este último apartado se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en cada una de las fases propuestas en el diseño metodológico, que darán respuesta a la pregunta de investigación y, en consecuencia, al objetivo general, cuyo cumplimiento permitirá emitir un juicio sobre el supuesto de este estudio. Finalmente, se presentan las limitaciones y proyecciones de esta investigación.

Respecto a la primera fase que buscaba *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, antes de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*, el Pre-test diseñado como instrumento de esta fase, logró establecer un punto de referencia acerca de los grados de adquisición de los tres niveles de razonamiento geométrico que teóricamente son alcanzables por la muestra de este estudio, que si bien no son comparables con los niveles de razonamiento de otras áreas de la Geometría, sí dan cuenta de las experiencias previas de los estudiantes, que harían más probable la adquisición de esos niveles de razonamiento, en otras áreas de la Geometría, en el caso de esta investigación, el concepto de Homotecia. Este hecho tendría relación con la característica de *Localidad* de los niveles de Van Hiele (Vargas & Gamboa, 2013).

Por tanto, en la primera fase se identificó que los estudiantes de primer año medio tenían altas probabilidades de enfrentar con éxito el Nivel 0 en otras experiencias de aprendizajes sobre geometría, pues en la mayoría de los estudiantes su razonamiento geométrico alcanza una adquisición Alta y Completa. En cuanto al Nivel 1, los resultados dan cuenta de una iniciación de este nivel, pues ningún estudiante llega a una adquisición Completa, y solo la mitad de ellos logra una adquisición Intermedia y Alta. Por último, en el Nivel 2, la mayoría de los estudiantes logra una Nula o Baja adquisición del nivel, lo que predecía bajas probabilidades de lograr una adquisición Completa de este nivel, al menos en el corto plazo.

Con relación a la segunda fase, que buscaba *describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*, se logró realizar la caracterización de las definiciones de Homotecia que construyeron los estudiantes de forma colaborativa, durante el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica. El análisis de estas respuestas permitió reconocer el rol de las actividades dirigidas al Nivel 0 de Visualización, que no solo se limitaron al desarrollo de tal nivel, sino que destacaron por posibilitar el desarrollo de habilidades correspondientes al Nivel 1 de Análisis, gracias a las

actividades con el pantógrafo y la cámara oscura, en que los estudiantes a través de la experimentación lograron identificar propiedades de la homotecia. Por lo tanto, coherente con lo que plantea la literatura (Jaime & Gutiérrez, 1990), las fases de *Orientación Dirigida* y *Explicitación* estuvieron presentes en todas las actividades de la secuencia didáctica.

Por lo tanto, en esta segunda fase las actividades relacionadas con el Nivel 0 lograron su objetivo y además, permitió posicionar a la mayoría de los estudiantes en un nivel de transición hacia el Nivel 1. Así, en la siguiente actividad propuesta para el Nivel 1, esos estudiantes en transición lograron finalmente consolidar el Nivel 1. Sin embargo, en la última actividad propuesta para el Nivel 2, fue más difícil el avance hacia tal nivel, pues en la actividad anterior no se logró una adecuada transición que permitiera alcanzar en Nivel 2 con mayor facilidad, lo que se condice con la baja porción estudiantes que lograron tal nivel.

Respecto a la tercera fase, que tenía como objetivo *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*, los resultados del Post-test lograron ratificar el rol de las actividades de Visualización, pues movilizaron a la gran mayoría de estudiantes hacia grados de adquisición altos, respecto al Nivel 0, e iniciados en el Nivel 1, hecho que ocurre en menor grado en el Pre-test. Por tanto, las actividades de la secuencia didáctica permitieron a la mayoría de los estudiantes a avanzar hacia la adquisición completa del Nivel 0 de razonamiento geométrico y, en consecuencia, apropiarse de los primeros grados de adquisición del nivel 1.

En cuanto al nivel 2, el Post-test no evidencia los mismos avances logrados en la fase 2, y esto se puede explicar por las siguientes dos razones:

- a) dado que en el Post-test no se lograron altos o completos grados de adquisición del Nivel 1, la característica de *Secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas & Gamboa, 2013) plantea que es natural no obtener buenos resultados en el Nivel 2;
- b) hay mejores en la fase 2 de la investigación porque allí se analizan razonamientos geométricos tanto individuales como grupales, es decir, el trabajo colaborativo permitió a los estudiantes dar cuenta de mejores grados de apropiación tanto del Nivel 1 como del 2.

Por lo tanto, para responder a la pregunta de investigación, se puede concluir que en el *desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele*, se puede decir que la visualización tuvo un rol predominante en el proceso

(Gutiérrez, 2013), junto con la utilización de distintos recursos manipulativos, que ayudaron a iniciar el razonamiento visual, pues los estudiantes, además de observar lo que hacían estos instrumentos, lograron establecer propiedades que en un inicio estaban implícitas (Antonini & Martignone, 2011; Samper, Leguizamón & Camargo, 2001). Por supuesto, las decisiones del profesorado son fundamentales a la hora de diseñar experiencias de aprendizaje, debido a que es este quien debe secuenciar las actividades, de tal modo que los estudiantes logren construir los conceptos y propiedades, mediante la interacción entre ellos, pues de esa manera argumentan de sus ideas, y así sistematizar los conocimientos aprendidos.

A partir de los resultados, se puede afirmar que el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico se realiza de forma gradual en el tiempo, por lo que los profesores deben generar procesos de enseñanza que permitan mejorar los grados de adquisición de cada nivel, para asegurar mejores resultados en el siguiente. Por ejemplo, la secuencia didáctica diseñada para este estudio, favoreció el desarrollo del Nivel 0 por lo que sería necesario implementar más actividades que permitan a los estudiantes lograr desarrollar sus grados de adquisición en los Niveles 1 y 2. Además, se debe tener en cuenta que cuando se alcanza cierto nivel de razonamiento en una determinada área de la Geometría, este no se transfiere a otras nociones geométricas, aunque entrega una idea de qué tan probable es alcanzar ese mismo nivel en otras áreas, siempre y cuando se acompañe con un proceso de enseñanza coherente y contextualizado para tal fin.

Este estudio se guiaba bajo el supuesto de que, abordar el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele, permitiría a cada estudiante de primer año de enseñanza media desarrollar sus niveles de razonamiento geométrico, lo que se podría evidenciar no sólo durante el desarrollo de las clases, sino en los niveles alcanzados antes y después de la implementación de la secuencia didáctica, entendiendo que el razonamiento geométrico de cada estudiante sería diferente y estaría mediado por el tipo de recursos que se implementaría en las actividades que componen la secuencia didáctica. Este supuesto queda demostrado con los resultados obtenidos porque:

a) en la fase 1 se demuestra la existencia de diferentes grados de adquisición en los niveles de razonamiento geométrico, por parte de los estudiantes;

b) además, la utilización de diversos recursos, tanto manipulativos como virtuales, junto con la adecuada gestión de las fases de aprendizaje, por parte del profesor, logró mejorar los grados de adquisición de los estudiantes, particularmente, en el Nivel 0, lo que es muy relevante pues es la base para construir los niveles procedentes. Esto además se complementa con la implementación de un trabajo colaborativo entre los estudiantes, que

permitió que elaboraran, a partir de las actividades, mejores acercamientos al concepto de homotecia.

c) Por último, en la fase 3 se confirma el progreso de los grados de adquisición de los estudiantes, en particular, del Nivel 0,

En cuanto a las limitaciones y proyecciones de este estudio, se puede mencionar que:

a) Al ser un estudio cualitativo, sus resultados no pueden ser generalizados, pero se abren las posibilidades a generar nuevas propuestas que permitan desarrollar el razonamiento geométrico, de otros conceptos matemáticos, que sean extensibles a otros niveles de la enseñanza media en Chile.

b) La secuencia didáctica propuesta en este estudio estuvo acotada a cuatro sesiones, lo cual supone una oportunidad de generar nuevas secuencias de aprendizaje en esta línea, cuya duración sea mayor y así, permitan al estudiantado alcanzar y apropiarse de los niveles 1 y 2, y quizás transitar a los primeros grados del Nivel 3.

Para finalizar, este trabajo se constituye en una invitación a los docentes de matemática para considerar el modelo de Van Hiele como un marco teórico útil para diseñar y organizar la enseñanza de la Geometría, pues promueve en los estudiantes la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas, la argumentación, entre otros procesos que resultan ser fundamentales para desarrollar su razonamiento geométrico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, J., & Barot, M. (2017). *Desarrollo del pensamiento geométrico (En construcción)*. Recuperado el 24 de Marzo de 2019, de <http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/DesarrolloDelPensamientoMatematico.pdf>
- Antonini, S., & Martignone, F. (2011). *Pantographs for geometrical transformatios: An explorative study on argumentation*. Obtenido de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_antonini_martignone.pdf
- Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 139-178.
- Aravena, M., & Gutiérrez, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias*, 107-128.
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A., & Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *SUMA*, 45-54.
- Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la Geometría*, (págs. 67-82).
- Galleguillos, J., & Candia, L. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias . *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*. Recife.
- Gamboa, R., & Ballesterero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 125-142.
- García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría* (Primera ed.). México D.F.: Intituto Nacional para la Evauación de la Educación.

- González, Y., & Arias, I. (2017). Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica. (Tesis). Colombia: Universidad Nacional.
- Gutiérrez, S. (2013). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria. *Visión Educativa IUNAES*, VII(15), 83-91.
- Hernández, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México D.F., México: McGraw-Hill.
- Iglesias, M., & Ortiz, J. (2015). *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación*. Venezuela.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares, & M. Sanchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla: Alfar. Obtenido de <https://www.uv.es/~gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Proenza, Y., & Leyva, L. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana De Educación*, 48(1), 1-7.
- Rodríguez, B., Carreño, X., & Muñoz, V. (Enero de 2013). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza? FONIDE.
- Samper, C., Leguizamón, C., & Camargo, L. (2001). Razonamiento en Geometría. *Revista EMA*, 6(2), 141-158.
- Sandín, M. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación: Fundamentos y tradiciones* (Primera ed.). Madrid, España: McGraw-Hill.
- Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA*, 27(1), 74-94. Obtenido de www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
- Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria*.
- Villani, V., & Mammana, C. (2001). *Perspectives en l'Ensenyament de la Geometria pel segle XXI*. Obtenido de <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>

ANEXOS

Formato Carta de Autorización para Directora

Estimada Directora **Loreto Salas**:

Me dirijo a usted en calidad de estudiante del programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile. Estoy realizando una investigación que busca caracterizar los niveles de razonamiento geométrico que adquieren los estudiantes, en el proceso de aprendizaje del concepto de Homotecia, contenido que forma parte de los planes y programas de estudio de primero medio, estipulados por el Ministerio de Educación. Me interesa realizar el estudio con los estudiantes del Primero Medio B de su institución, para lo cual solicito su autorización.

Para esta investigación será necesario aplicar dos test de razonamiento geométrico a los estudiantes; al inicio y al final de la aplicación de una unidad didáctica. Esta unidad tendrá una duración de seis clases de dos horas pedagógicas cada una. Además, se evaluará durante todo el proceso a través de actividades e instrumentos constructivistas que serán respondidas y entregadas por los estudiantes.

Toda la información proporcionada por los estudiantes, tanto en los test como en las actividades, será totalmente confidencial y se usarán sólo con propósitos académicos, codificando la información y manteniéndola en archivos seguros y resguardados, a los que sólo yo tendré acceso. Además, por protocolos éticos de la investigación, se garantiza la confidencialidad sobre la identidad de los estudiantes y la institución.

Si tiene alguna duda o desea obtener más información sobre este estudio, puede contactarse directamente con mi director de tesis, Dr. Carlos Vanegas Ortega, a través del correo electrónico carlos.vanegas.o@usach.cl. Para formalizar la autorización, le solicito firmar dos copias de esta carta, quedando usted con una de ellas.

Esperando su buena acogida y comprensión, agradezco su atención y apoyo, los cuales serán centrales en el éxito de la investigación.

Loreto Salas
Directora

Jorge Labra Peña
Investigador Responsable

Formato Consentimiento Informado para Apoderados

Estimado(a) apoderado(a):

Soy el profesor de la asignatura de Destrezas Matemáticas de su hijo(a). Me dirijo a usted debido a que estoy realizando una investigación para mejorar los conocimientos matemáticos que aprenden mis estudiantes. El estudio busca caracterizar los niveles de razonamiento geométrico que adquieren los estudiantes, en el proceso de aprendizaje del concepto de Homotecia, contenido que forma parte de los planes y programas de estudio de primero medio, estipulados por el Ministerio de Educación. Dado que la investigación involucra la participación de su hijo(a), es imprescindible contar con su consentimiento.

La participación de su hijo(a) en la investigación consiste en responder dos test de razonamiento geométrico. Además, en la evaluación de la asignatura se tomará en cuenta su participación en actividades didácticas que han sido diseñadas especialmente para mejorar sus aprendizajes matemáticos.

Toda la información proporcionada por su hijo (a), tanto en los test como en las actividades, será totalmente confidencial y se usarán sólo con propósitos académicos, codificando la información y manteniéndola en archivos seguros y resguardados, a los que sólo yo tendré acceso. Además, por protocolos éticos de la investigación, se garantiza la confidencialidad sobre la identidad de su hijo(a) y la institución. Si tiene alguna duda o desea obtener más información sobre este estudio, puede contactarse directamente conmigo al correo electrónico jorge.labra@usach.cl.

Si usted acepta que su hijo(a) participe de esta investigación, le pido completar y firmar el siguiente consentimiento y entregármelo o hacérmelo llegar.

Agradecido de antemano, se despide,

Jorge Labra Peña

AUTORIZACIÓN

Yo, _____, apoderado(a) de _____, autorizo su participación en la investigación que llevará a cabo el profesor Jorge Labra, que busca caracterizar los niveles de razonamiento geométrico que adquieren los estudiantes, en el proceso de aprendizaje del concepto de Homotecia.

Firma Apoderado(a)

Octubre de 2018

Resultados del Pre y Post Test

Simbología de interpretación cualitativa de los grados de adquisición:

Nula **Baja** **Intermedia** **Alta** **Completa** **No asiste**


	GRADOS DE ADQUISICIÓN PRE-TEST			GRADOS DE ADQUISICIÓN POST-TEST		
	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
E1	38	35	7	23	20	8
E2	100	24	0	N/A	N/A	N/A
E3	92	61	43	N/A	N/A	N/A
E4	100	68	87	100	96	62
E5	8	24	7	50	9	0
E6	93	44	17	N/A	N/A	N/A
E7	93	49	13	50	8	0
E8	20	8	0	67	20	7
E9	93	56	33	100	55	53
E10	67	71	52	100	37	8
E11	100	65	52	100	76	52
E12	93	49	43	N/A	N/A	N/A
E13	83	29	17	N/A	N/A	N/A
E14	92	34	7	50	60	25
E15	67	35	33	N/A	N/A	N/A
E16	93	49	33	N/A	N/A	N/A
E17	67	29	7	73	24	7
E18	0	40	17	N/A	N/A	N/A
E19	67	14	0	87	28	17
E20	100	44	17	N/A	N/A	N/A
E21	13	8	0	50	24	8
E22	38	24	0	23	24	8
E23	100	70	58	N/A	N/A	N/A
E24	7	24	8	N/A	N/A	N/A
E25	N/A	N/A	N/A	100	34	8
E26	85	40	7	50	24	8
E27	92	18	0	93	60	35
E28	33	5	0	73	24	0
E29	22	8	0	N/A	N/A	N/A
E30	33	4	0	100	24	17
E31	33	28	17	50	24	7
E32	23	13	0	67	9	0
E33	100	70	77	N/A	N/A	N/A

Análisis del concepto de Homotecia

Guía N°1: El pantógrafo (Nivel 0 – Visualización)

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
1) Es un dibujo semejante a alguna figura original.	Es un dibujo	Describe apariencia física.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Semejante	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
	A alguna figura original	Reconoce que la homotecia se aplica sobre una figura inicial.	C	
2) Capacidad de figuras o imágenes para disminuir o amplificar su forma, sin cambiar su estructura.	Capacidad de figuras o imágenes	Se entiende la homotecia como una propiedad de las figuras.	A	Nivel 0
	Para disminuir o amplificar su forma	Describe apariencia física.	B	
	Sin cambiar su estructura	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	
3) -	-	-	-	-
4) -	-	-	-	-

5) Agrandar y achicar el dibujo.	Agrandar y achicar el dibujo	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
6) Al formar una figura altera el tamaño, copiando de la misma forma la figura inicial mediante una herramienta.	Al formar una figura altera el tamaño	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
	Copiando de la misma forma la figura inicial	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	
	Mediante una herramienta	Centra el concepto en la utilización del pantógrafo.	B	
7) Es el aumento o reducción de imágenes o figuras con la ayuda de una herramienta llamada pantógrafo.	Es el aumento o reducción de imágenes o figuras	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
	Con la ayuda de una herramienta llamada pantógrafo	Centra el concepto en la utilización del pantógrafo.	B	
8) Es una forma de copiar figuras.	Es una forma de copiar figuras	Describe la homotecia como técnica.	A	Nivel 0
9) Es como proyectar un dibujo, figura, etc. Esto tiene variable como por ejemplo: el tamaño, la distancia, etc.	Es como proyectar un dibujo, figura, etc.	Describe apariencia física.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Esto tiene variable como por ejemplo: el tamaño, la distancia, etc.	Reconoce ciertos componentes de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	

10) Es como la transportación de un objeto geométrico, la cual disminuye o aumenta su porte pero mantienen sus ángulos.	Es como la transportación de un objeto geométrico	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
	La cual disminuye o aumenta su porte pero mantienen sus ángulos	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	
11) Es la acción de dibujar o transformar una figura aumentando o disminuyendo todas sus partes, sin afectar su proporción.	Es la acción de dibujar o transformar una figura	Describe la homotecia como técnica.	A	Nivel 0
	Aumentando o disminuyendo todas sus partes	Describe apariencia física.	B	
	Sin afectar su proporción	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	
12) Es una forma de amplificar o reducir figuras, imágenes, etc.	Es una forma de amplificar o reducir figuras, imágenes, etc.	Describe la homotecia como técnica.	A	Nivel 0

13) Podría significar que el pantógrafo crea una misma figura pero de diferente tamaño y posición.	Podría significar que el pantógrafo crea una misma figura	Centra el concepto en la utilización del pantógrafo.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Pero de diferente tamaño y posición	Reconoce ciertos componentes de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
14) Es cuando se modifican las medidas de algunas figuras, formando figuras semejantes.	Es cuando se modifican las medidas de algunas figuras	Describe apariencia física.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Formando figuras semejantes	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	

**Guía N°2: La cámara oscura
(Nivel 0 – Visualización)**

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
1) -	-	-	-	-
2) Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.	Es el cambio de tamaño de figuras	Describe apariencia física	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Según su distancia	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan	Describe apariencia física.	B	
	La figura nueva es semejante a la original	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
3) Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.	Es el cambio de tamaño de figuras	Describe apariencia física	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Según su distancia	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan	Describe apariencia física.	B	
	La figura nueva es semejante a la original	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	

4) La homotecia nos permite medir la distancia de un objeto con respecto a un punto fijo mientras dicho objeto se agranda o achica.	La homotecia nos permite medir la distancia de un objeto con respecto a un punto fijo	Identifica elementos importantes de la homotecia, pero no puede elaborar una definición.	D	Nivel de Transición 0 – 1
	Mientras dicho objeto se agranda o achica	Describe apariencia física.	B	
5) Es la capacidad de proporcionalidad de distintas cosas, en imágenes tanto como en objetos.	Es la capacidad de proporcionalidad de distintas cosas	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	Nivel 0
	En imágenes tanto como en objetos	Describe apariencia física.	B	
6) Ir agrandando o achicando el tamaño de una figura sin que estos dejen de ser semejantes.	Ir agrandando o achicando el tamaño de una figura	Describe apariencia física.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Sin que estos dejen de ser semejantes	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
7) Que a partir de un punto fijo multiplica todas las distancias por un mismo factor.	Que a partir de un punto fijo multiplica todas las distancias por un mismo factor	Identifica elementos importantes de la homotecia, pero no puede elaborar una definición.	D	Nivel 1

8) Corresponde a la amplificación o reducción de imágenes semejantes entre sí que varían tamaños pero no medidas a partir de distintas escalas de medida.	Corresponde a la amplificación o reducción de imágenes	Describe apariencia física.	B	Nivel de Transición 0 – 1
	Semejantes entre sí	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
	Que varían tamaños pero no medidas a partir de distintas escalas de medida	Describe apariencia física.	B	
9) -	-	-	-	-
10) Dependiendo de un punto que se acerca o aleja del objeto la imagen aumenta o disminuye su tamaño.	Dependiendo de un punto que se acerca o aleja del objeto	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	Nivel de Transición 0 – 1
	La imagen aumenta o disminuye su tamaño	Describe apariencia física.	B	

11) Es una forma de aumentar o disminuir el tamaño de una figura o invertirlas sin perder su forma.	Es una forma de aumentar o disminuir el tamaño de una figura	Describe la homotecia como técnica.	A	Nivel de Transición 0 – 1
	O invertirlas	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	Sin perder su forma	Implícitamente hace referencia a la semejanza, pero no utiliza un lenguaje geométrico correcto.	B	
12) -	-	-	-	-

**Guía N°3: Concepto de homotecia
(Nivel 1 – Análisis)**

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
1) - Centro de homotecia: punto fijo. - Razón de homotecia: ampliación o disminución del tamaño de una figura. - Homotecia: forma figuras semejantes.	Centro de homotecia: punto fijo	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	Nivel de Transición 0 – 1
	Razón de homotecia: ampliación o disminución del tamaño de una figura	Describe apariencia física.	B	
	Homotecia: forma figuras semejantes	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
2) Genera figuras semejantes de acuerdo a una: - Razón de homotecia - Centro de homotecia	Genera figuras semejantes	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	Nivel 1
	De acuerdo a una: - Razón de homotecia - Centro de homotecia	Reconoce componentes de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
3) -	-	-	-	-
4) -	-	-	-	-
5) -	-	-	-	-
6) -	-	-	-	-

7) Depende de la distancia de donde se vea, aumenta o disminuye de tamaño.	Depende de la distancia de donde se vea, aumenta o disminuye de tamaño	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
8) -	-	-	-	-
9) -	-	-	-	-
10) -	-	-	-	-
11) Transformación que genera figuras semejantes. - Centro de homotecia: es un punto fijo donde se intersectan las rectas que forman los homólogos. - Razón de homotecia: cuántas veces es más grande o más chica la nueva figura.	Transformación que genera figuras semejantes Centro de homotecia: es un punto fijo donde se intersectan las rectas que forman los homólogos Razón de homotecia: cuántas veces es más grande o más chica la nueva figura.	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	Nivel 1
		Reconoce componentes de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	

12) - Centro de homotecia: punto fijo. - Homotecia: genera figuras semejantes de acuerdo a una razón de homotecia. - Razón de homotecia: cuanto se agranda o se achica el objeto.	Centro de homotecia: punto fijo.	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	Nivel de Transición 0 – 1
	Homotecia: genera figuras semejantes de acuerdo a una razón de homotecia	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	
	Razón de homotecia: cuanto se agranda o se achica el objeto	Describe apariencia física.	B	
13) -	-	-	-	-

**Guía N°4: Propiedades de la homotecia
(Nivel 2 – Clasificación)**

Respuesta textual	Unidad de análisis	Significado	Característica del nivel de razonamiento	Nivel de razonamiento alcanzado
1) -	-	-	-	-
2) - Son paralelos siempre. - Aumentan en ambas direcciones. - Los mismos lados homólogos.	- Son paralelos siempre.	Reconoce una propiedad de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	Nivel de Transición 0 – 1
	- Aumentan en ambas direcciones. - Los mismos lados homólogos.	Describe apariencia física.	B	

<p>3) Homotecia directa: la figura homotética mantiene su orientación, en el punto de razón "1" las figuras son del mismo tamaño. Los valores de la razón son positivos. En los puntos que están entre 0 y 1 la figura es de menor tamaño y sobre 1 es más grande.</p> <p>Homotecia inversa: la figura homotética cambia su orientación, las figuras son del mismo tamaño en el punto "-1". Entre 0 y -1 la figura es de menor tamaño y sobre -1 la figura aumenta su tamaño.</p>	<p>Homotecia directa: la figura homotética mantiene su orientación, en el punto de razón "1" las figuras son del mismo tamaño. Los valores de la razón son positivos. En los puntos que están entre 0 y 1 la figura es de menor tamaño y sobre 1 es más grande.</p> <p>Homotecia inversa: la figura homotética cambia su orientación, las figuras son del mismo tamaño en el punto "-1". Entre 0 y -1 la figura es de menor tamaño y sobre -1 la figura aumenta su tamaño.</p>	<p>Clasifica los tipos de homotecia, describiéndola mediante sus condiciones suficientes.</p>	<p>E</p>	<p>Nivel 2</p>
---	--	---	----------	----------------

<p>4) Homotecia directa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los valores de la razón son positivos. - Tiene la misma orientación. - Sus lados homólogos son paralelos. 	<p>Homotecia directa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los valores de la razón son positivos. - Tiene la misma orientación. - Sus lados homólogos son paralelos. 	<p>Identifica condiciones necesarias y suficientes de la homotecia directa.</p>	<p>E</p>	<p>Nivel de Transición 1 – 2</p>
<ul style="list-style-type: none"> - A mayor lejanía del triángulo original, mayor es el tamaño de sus lados. - Se ve más fácil en un pantógrafo. 	<ul style="list-style-type: none"> - A mayor lejanía del triángulo original, mayor es el tamaño de sus lados. - Se ve más fácil en un pantógrafo. 	<p>Describe condiciones necesarias utilizando un lenguaje informal.</p>	<p>D</p>	
<p>Homotecia inversa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los valores de la razón son negativos. - Tiene la misma orientación. - Siguen siendo paralelos sus lados homólogos. 	<p>Homotecia inversa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los valores de la razón son negativos. - Tiene la misma orientación. - Siguen siendo paralelos sus lados homólogos. 	<p>Identifica condiciones necesarias y suficientes de la homotecia directa.</p>	<p>E</p>	
<ul style="list-style-type: none"> - A mayor lejanía del triángulo original, menor es el número de la razón. 	<ul style="list-style-type: none"> - A mayor lejanía del triángulo original, menor es el número de la razón. 	<p>Describe condiciones necesarias utilizando un lenguaje informal.</p>	<p>D</p>	

- Se ve más fácil en la cámara oscura.	- Se ve más fácil en la cámara oscura.			
5) Directas: siempre es positiva, empieza desde el centro hacia adelante. Inversas: siempre es negativa y empieza desde el centro hacia afuera.	Directas: siempre es positiva, empieza desde el centro hacia adelante. Inversas: siempre es negativa y empieza desde el centro hacia afuera.	Describe apariencia física.	B	Nivel 0
6) Homotecia directa: - Mantiene la orientación. - Valores positivos. - Aumenta y disminuye su tamaño. - Las rectas de lados homólogos se mantienen paralelas. Homotecia inversa: - Cambia su orientación. - Valores negativos. - Aumenta y disminuye su tamaño.	Homotecia directa: - Mantiene la orientación. - Valores positivos. - Aumenta y disminuye su tamaño. - Las rectas de lados homólogos se mantienen paralelas. Homotecia inversa: - Cambia su orientación. - Valores negativos. - Aumenta y disminuye su tamaño.	Clasifica los tipos de homotecia, describiéndola mediante sus condiciones necesarias y suficientes.	E	Nivel 2

- Las rectas de lados homólogos se mantienen paralelas.	- Las rectas de lados homólogos se mantienen paralelas.			
<p>7) Homotecias directas: Las figuras tienen la misma orientación, la figura homotética aumenta cuando la razón aumenta. La razón siempre es positiva. Cuando la razón es 1 las figuras son iguales, si es mayor que 1 la figura homotética será más grande, si es menor que 1 será más pequeña.</p> <p>Homotecias inversas: Las figuras tienen distinta orientación, la figura nueva aumenta cuando la razón disminuye. La razón siempre es negativa. Cuando la razón es -1 las figuras son iguales es</p>	<p>Homotecias directas: Las figuras tienen la misma orientación, la figura homotética aumenta cuando la razón aumenta. La razón siempre es positiva. Cuando la razón es 1 las figuras son iguales, si es mayor que 1 la figura homotética será más grande, si es menor que 1 será más pequeña.</p> <p>Homotecias inversas: Las figuras tienen distinta orientación, la figura nueva aumenta cuando la razón disminuye. La razón siempre es negativa. Cuando la razón es -1 las figuras son iguales es</p>	<p>Clasifica los tipos de homotecia, describiéndola mediante sus condiciones necesarias y suficientes.</p>	E	Nivel 2

tamaño, si es mayor que -1 la figura nueva será más pequeña, si es menor que -1 será más grande.	tamaño, si es mayor que -1 la figura nueva será más pequeña, si es menor que -1 será más grande.			
8) Directa: trabaja con números positivos solamente, y aumentan y disminuyen el tamaño sin cambiar su rotación.	Directa: trabaja con números positivos solamente, y aumentan y disminuyen el tamaño sin cambiar su rotación.	Describe condiciones necesarias y suficientes de la homotecia, utilizando un lenguaje informal.	D	Nivel 1
Inversa: trabaja con números negativos solamente y rota la imagen desde el punto “-0,1” Y en ambos tipos de homotecias los lados, AB con A'B', BC con B'C' y CA con C'A' siempre son paralelos.	Inversa: trabaja con números negativos solamente y rota la imagen desde el punto “-0,1”. Y en ambos tipos de homotecias los lados, AB con A'B', BC con B'C' y CA con C'A' siempre son paralelos.	Describe propiedades a partir de la experimentación.	C	

<p>9) La homotecia directa es la que trabaja desde el valor 0,1 hasta el 3 de la razón y también tiene la misma orientación con los lados homólogos (Pantógrafo)</p> <p>La homotecia inversa es la que trabaja desde el valor -0,1 hasta el valor -3 de la razón, tiene diferente orientación en base al triángulo original, los lados homólogos quedan iguales pero cambian (porque cambia de orientación) (Cámara oscura).</p>	<p>La homotecia directa es la que trabaja desde el valor 0,1 hasta el 3 de la razón y también tiene la misma orientación con los lados homólogos (Pantógrafo)</p> <p>La homotecia inversa es la que trabaja desde el valor -0,1 hasta el valor -3 de la razón, tiene diferente orientación en base al triángulo original, los lados homólogos quedan iguales pero cambian (porque cambia de orientación) (Cámara oscura).</p>	<p>Describe propiedades a partir de la experimentación.</p>	<p>C</p>	<p>Nivel 1</p>
--	---	---	----------	----------------

<p>10) Homotecia</p> <p>Directa Inversa</p> <p>N° positivos N° negativos</p> <p>Misma/distinta orientación</p> <p>(No existe figura)</p> <p> </p> <p>Mayor tamaño 0 Menor tamaño</p> <p>Los lados homólogos son siempre paralelos</p>	<p>Homotecia</p> <p>Directa Inversa</p> <p>N° positivos N° negativos</p> <p>Misma/distinta orientación</p> <p>(No existe figura)</p> <p> </p> <p>Mayor tamaño 0 Menor tamaño</p> <p>Los lados homólogos son siempre paralelos</p>	<p>Clasifica los tipos de homotecia, describiéndola mediante sus condiciones necesarias y suficientes.</p>	<p>E</p>	<p>Nivel 2</p>
<p>11) Directa: su razón siempre es positiva, las figuras están derechas, en una recta (a partir del cero cambia de dirección).</p> <p>Inversa: su razón es negativa y eso es lo que provoca que las imágenes se volteen.</p>	<p>Directa: su razón siempre es positiva, las figuras están derechas, en una recta (a partir del cero cambia de dirección).</p> <p>Inversa: su razón es negativa y eso es lo que provoca que las imágenes se volteen.</p>	<p>Describe condiciones necesarias utilizando un lenguaje informal.</p>	<p>D</p>	<p>Nivel 1</p>

<p>12) Homotecia directa: corresponde a los lados positivos.</p> <p>Homotecia inversa: en cambio, esta corresponde a los lados negativos.</p>	<p>Homotecia directa: corresponde a los lados positivos.</p> <p>Homotecia inversa: en cambio, esta corresponde a los lados negativos.</p>	<p>No diferencia atributos y componentes de los tipos de homotecia.</p>	<p>A</p>	<p>Nivel 0</p>
<p>13) Las (+) son directas y las (-) son inversas, el tamaño aumenta a partir de la razón 1 y -1, en el -1 y 1 se obtiene el mismo tamaño, el tamaño disminuye entre el -1 y el 1, obtiene la misma orientación a partir del 0, tiene una distinta orientación a partir desde el 0 hacia atrás, en el punto 0 se pierde la figura.</p>	<p>Las (+) son directas y las (-) son inversas, el tamaño aumenta a partir de la razón 1 y -1, en el -1 y 1 se obtiene el mismo tamaño, el tamaño disminuye entre el -1 y el 1, obtiene la misma orientación a partir del 0, tiene una distinta orientación a partir desde el 0 hacia atrás, en el punto 0 se pierde la figura.</p>	<p>Describe condiciones necesarias de los tipos de homotecia utilizando un lenguaje informal.</p>	<p>D</p>	<p>Nivel 1</p>

<p>14) Homotecias directas: homotecias con números positivos.</p> <p>Homotecias inversas: homotecias con números positivos.</p>	<p>Homotecias directas: homotecias con números positivos.</p> <p>Homotecias inversas: homotecias con números positivos.</p>	<p>No diferencia atributos y componentes de los tipos de homotecia.</p>	<p>A</p>	<p>Nivel 0</p>
---	---	---	----------	----------------