UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

UNIDAD DIDÁCTICA EN CÁLCULO DIFERENCIAL:

Material de apoyo para estudiantes de Pedagogía en Matemática

CAMILA DEL CARMEN SALGADO CANIUMIL

Profesor guía: Humberto Prado Castillo

Tesis para optar al grado de Magister en Educación Matemática

SANTIAGO DE CHILE

2018

Resumen

Durante los últimos años, diversos programas de pregrado universitario en Chile han adoptado la formación de profesionales mediante el desarollo de competencias y de habilidades. En este sentido, atendiendo al perfil y a las competencias que debe poseer el egresado de carreras relacionadas al ámbito de pedagogía en matemática, es que este trabajo tiene como objetivo aportar material de estudio para el futuro egresado de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.
Además, considerando los estándares de contenidos en los programas de formación de profesores, correspondientes al desarrollo de la matemática, y considerando también que el análisis matemático resulta complejo en los primeros años académicos, es que se construyó en particular una Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, la cual pretende reforzar y ampliar los conocimientos matemáticos correspondientes al área del cálculo, en conjunto con un desarrollo de competencias matemáticas y habilidades del pensamiento matemático.

Esta Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial se difundió a estudiantes que cursaban cálculo I en el segundo semestre del año 2017 de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, para que realizaran una evaluación al respecto, respondiendo un cuestionario básico y manifestando su opinión si así lo deseaban. El objetivo, interpretar la opinión de los alumnos, sacar conclusiones y proponer posibles mejoramientos al material.

Palabras claves: competencia matemática, habilidad de representación, cálculo diferencial.

Abstract

During the last few years, several university undergraduate programs in Chile have adopted the formation of professionals through the development of competences and mathematical thinking skills. In this sense, taking into account the profile and competences that a graduate from careers related to the field of pedagogy in mathematics must have, this work aims to provide study material to the future graduate of bachelor's degree in Mathematics and Computer Education of the Universidad de Santiago de Chile. Furthermore, considering the content standards in professor formation programs corresponding to mathematics development, and also that the mathematic analysis is complex in the first academic years, a Differential Calculus Didactic Unit was particularly created, which aims to reinforce and expand the mathematical knowledge corresponding to the calculus area in conjunction with the development of mathematical competences and mathematical thinking skills.

This Differential Calculus Didactic Unit was given to students that were taking calculus I in the second semester of Degree in Mathematics and Computer Education in 2017, so that they could evaluate this material, answering a basic questionnaire and expressing their opinions if they wished. The objective was to interpret the opinion of the students, draw conclusions and propose possible improvements to the material.

Key words: mathematical competence, ability to represent, differential calculus.

Dedicatoria

Dedico este trabajo de tesis a mi mamá y a mi papá, por sus años de apoyo incondicional. Este logro es para ustedes, por no dejar de creer en mi, y por ayudarme a creer en mi. Por todos los sacrificios que han hecho a lo largo de su matrimonio para entregar todas las herramientas posibles a mi hermano y a mi para enfrentar la vida, gracias. Esto es para ustedes. Los amo.

Agradecimientos

Por la realización de este trabajo, quisiera agradecer:

A mi profesor guía, Humberto Prado, quien confió en mis capacidades, y me respaldó en cada eventualidad que se me presentaba en el camino.

Al profesor Samuel Navarro, gracias a su ayuda fue posible difundir este trabajo entre estudiantes y ponerlo a prueba; y a la profesora Gladys Bobadilla, por sus intervenciones como mediadora en diversas situaciones, y por su constante apoyo y aliento.
A los profesores Patricio Montero y Héctor Silva, por su orientación y recomendaciones para escribir este proyecto, y el material facilitado.

A mis amigos: Juan José, Eduardo, Alberto, Jose y María José, que estuvieron ahí para ayudarme con matemática, con latex, o simplemente para escuchar mis descargos, aguantar mi estrés y darme ánimos para seguir adelante.
Y también agradecer a los ex compañeros de universidad que me entregaron su ayuda desinteresada cuando lo necesité.

A mi partner, amigo, compañero y amor, quien ha vivido el proceso más dificil de este trabajo, sobrellevando mi estrés, mis preocupaciones, mi desánimo y cansancio. Gracias mi Simpson.

Y por último, a mis padres, quienes han estado conmigo en todo este proceso, sin presionarme, solo apoyándome en todo lo que he necesitado: tiempo y contención. Y a mi Maxi, unos minutos con él bastaban para despejar mi mente, olvidar problemas y llenar mi alma de su alegria.

Contenidos

Lista de figuras

Capítulo 1

Contexto, necesidad y alcance del estudio

1.1 Antecedentes y contexto de la necesidad

La formación de profesionales mediante el desarrollo de competencias y el desarrollo de habilidades se ha vuelto más frecuente en la última década, postura que también se ha adoptado en algunos programas de pregrado universitario en Chile. En este aspecto, la Educación Matemática resulta ser un campo fértil para el desarrollo de éstas, en parte porque en la literatura existente el material disponible con el enfoque del desarrollo de competencias y habilidades es escaso (Corvalán and Montero, sf). Es entonces en el contexto de formar profesores competentes en el ámbito del pensamiento matemático que surge la necesidad de desarrollar un material bibliográfico que aporte en su formación como docente competente. En otras palabras, lo que se pretende es construir un material didáctico que contribuya en los cursos para el profesor de matemática en formación, y que además aporte en su desarrollo de competencias y habilidades matemáticas. Dicho material a construir mediante el enfoque mencionado, será una unidad didáctica que desarrolle particularmente el Cálculo Diferencial, pues si bien el cálculo es uno de los ejes fundamentales en los que se sustenta la matemática, también es conocido el hecho de la dificultad que presenta para los estudiantes universitarios el trabajo de abstracción que exige el cálculo para ser comprendido, y la complejidad que surge de estudiar otras representaciones que no correspondan a meros cálculos algebraicos. En este sentido, Michelè Artigue (Artigue, 1998) plantea que las investigaciones didácticas desarrolladas muestran la existencia de fuertes y persistentes dificultades en el área del análisis matemático (también llamado cálculo), reconociendo que los orígenes de éstas son diversos, pero que se implican y refuerzan mutuamente. Para facilitar el reconocimiento de estas dificultades, las sintetiza en tres categorías, enfatizando que no pueden ser consideradas como independientes; éstas son:

- Objetos Básicos: números reales, funciones y sucesiones;
- Conceptualización de la noción de límite y su dominio técnico;
- Ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico

Por su parte, P. Salinas y J.A. Alanís a través de diversos estudios, identificaron la problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, reconociendo la dificultad que existe en lograr que los estudiantes muestren una comprensión satisfactoria de sus conceptos y representaciones (Salinas and Alanís, 2009).

Los argumentos mencionados anteriormente, complementaron la iniciativa de construir una Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial como medio por el cual se pueda satisfacer las necesidades académicas para los estudiantes de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.

1.2 Problema y preguntas del estudio

El problema presente en la actualidad radica principalmente en la dificultad que existe a la hora de encontrar en la literatura universitaria libros que trabajen la matemática mediante el enfoque del desarrollo de competencias y habilidades, y que además, estén orientados a las carreras de pedagogía en matemática. En otras palabras, la necesidad que se pretende satisfacer mediante la elaboración de una Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, es precisamente la de desarrollar un material de apoyo para profesores en formación, que no solo les entregue los contenidos matemáticos a abordar, y tampoco de la misma manera en que están presentes en los textos que ya existen a disposición, sino que además esa difusión sea con el propósito de aportar en su formación y en la capacitación de ciertas competencias y habilidades matemáticas. Con estos antecedentes y con esta propuesta de lo que podría contrapesar la necesidad actual de formar profesionales competentes en el área de la educación matemática, es que surgen las siguientes interrogantes:

¿Qué es Competencia Matemática y Habilidad Matemática?

¿Cómo se describe un profesor matemáticamente competente?

¿Cuál sería una herramienta eficiente que se podría facilitar en el transcurso de la formación de profesores con competencias y habilidades matemáticas?

¿Por qué la construcción de un documento que aborde precisamente el Cálculo?

Las respuestas a las dos primeras preguntas pretenden describir y a la vez sustentar la idea de la importancia que existe en la actualidad de formar profesores con competencias y habilidades matemáticas desarrolladas. Con la tercera y cuarta pregunta se pretende dar una propuesta de solución a la necesidad que se presenta en este proyecto, en otras palabras, justificar el desarrollo de una Unidad Didáctica enfocada en el Cálculo Diferencial.

1.3 Objetivos del estudio

En términos generales, el propósito de este trabajo de investigación es desarrollar un material de apoyo para los cursos de cálculo de primer año de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, mediante la producción de una unidad didáctica que exponga el cálculo no de una manera convencional, sino que mediante una estrategia inductiva en la presentación de conceptos, es decir, una presentación de contenidos que no siga la estructura tradicional de los libros existentes, en los cuales se muestran los ejemplos y las aplicaciones de los conceptos como si fueran consecuencia natural de la teoría expuesta, y no como es en la práctica, donde la teoría resulta ser consecuencia de la formalización de experiencias.

Sin embargo, la unidad didáctica no es más que el medio por el cual se pretenden alcanzar los objetivos principales de este proyecto de tesis: aportar a una formación por competencias para el profesor, para lo cual son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas (Rico, 2006); asimismo, reforzar las competencias del futuro docente referidas al conocimiento matemático especializado, es decir, aquel conocimiento necesario para desempeñar las tareas de la enseñanza de la matemática a los estudiantes (Corvalán and Montero, sf); complementar el desarrollo del pensamiento matemático, en particular el referente a la habilidad de representación, la cual permite traducir situaciones de la vida cotidiana a un lenguaje coloquial, a uno algebraico o a un lenguaje gráfico (Min, 2015); y por último, contribuir en que el egresado de pedagogía en matemática satisfaga las expectativas y cumpla con las condiciones básicas que se espera haya desarrollado para el final de su formación, entre las cuales se puede mencionar ser un referente social, interactuar con estudiantes heterogéneos en forma individual, grupal y colectiva, autorregularse para su actualización y desarrollo profesional, entre otras características (Corvalán and Montero, sf).

1.4 Alcances del estudio

La unidad didáctica está diseñada para estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile que se encuentren cursando el primer año académico, pues son estos los estudiantes en los cuales se desea intervenir con la difusión de la unidad didáctica, para así contribuir en un cimiento sólido en la base de su formación, particularmente en el área del Cálculo Diferencial, reforzando algunas competencias y habilidades matemáticas necesarias y que, además, les permita satisfacer determinadas condiciones con las que se espera egresen, dentro de las cuales se ambiciona satisfacer que: Fundamente la existencia de múltiples aplicaciones de la matemática en otras ciencias y en situaciones reales con contextos personales, sociales, culturales y tecnológicos; Comunique mensajes matemáticos a diferentes audiencias usando una variedad de mensajes, mediante diversas formas de representación del conocimiento matemático; y Analice desde la perspectiva epistemológica e histórica objetos y relaciones matemáticas (Corvalán and Montero, sf).

De manera general se puede mencionar que, dentro de las posibles contribuciones que podría tener la elaboración de la unidad didáctica, se espera que mediante el desarrollo del Cálculo Diferencial, el egresado de la carrera de pedagogía en matemática demuestre experticia en los contenidos abordados en dicho material: funciones (concepto, propiedades y representaciones), funciones polinómicas y racionales, diferenciabilidad de dichas funciones, función exponencial, logarítmica y funciones potencias en general, entre otros conceptos. Además, se espera que el futuro egresado sea capaz de dominar y utilizar el lenguaje matemático en su variedad de representaciones simbólicas, transitando desde el lenguaje analítico al lenguaje simbólico y viceversa, pues en el proceso de construcción del conocimiento matemático, desempeñan un papel importante los significados asociados a las diferentes representaciones (Sánchez-Matamoros et al., 2008).
Como efecto secundario, se espera que concluido y difundido este material de estudio, genere la iniciativa personal de cualquier persona que, con conocimientos básicos en matemática, desee aprender en forma autónoma el cálculo diferencial.

De manera más concreta y específica, según el doctor y director de CEDETEC (Centro de Desarrollo, Experimentación y Transferencia de Tecnología Educativa) de la Universidad de Santiago, el profesor Patricio Montero, es posible distinguir cuatro niveles del Desarrollo del Pensamiento que podrían darse en alguna situación de desempeño, siendo en orden creciente las siguientes:

- Capacidades Básicas o Sustentadoras de Pensamiento
- Estrategias Heurísticas y Algorítmicas de Pensamiento
- Estrategias de Pensamiento de Orden Superior
- Pensamiento Crítico o Creativo

Las *Capacidades Básicas* o *Sustentadoras de Pensamiento* corresponden simplemente a observar, relacionar, comparar, clasificar, interpretar, conceptualizar, orientación espacial, silogismos, analizar y sintetizar. Por su parte, una *Estrategia de Pensamiento* se considera como una guía de las acciones a seguir en forma consciente e intencional, la cual es anterior a cualquier otro procedimiento a seguir. En otras palabras, las estrategias son procesos ejecutivos mediante los cuales se eligen, coordinan y aplican habilidades, de ellas se distinguen las *Estrategias Heurísticas y Algorítmicas* y las *Estrategias de Orden Superior*. Finalmente, un *Pensamiento Crítico o Creativo* se caracteriza por un arreglo de habilidades intelectuales para identificar, analizar y evaluar (Montero, sf). Por consiguiente, dentro de los alcances que tendrá este proyecto de tesis, con la unidad didáctica se pretende garantizar un nivel del Desarrollo del Pensamiento que logre Estrategias de Pensamiento Heurísticas y Algorítmicas, e incluso, alcanzar Estrategias de Pensamiento de Orden Superior. Es decir, mediante el estudio en conjunto con la unidad didáctica, se ambiciona que los estudiantes de pedagogía en matemática adquieran técnicas básicas en la indagación y/o el descubrimiento, manejen la heurística matemática y que incluso se les proporcionen condiciones para idear demostraciones, modelar matemáticamente situaciones a partir del mundo real y resolver problemas de búsqueda abierta (Montero, sf).

En definitiva, serán los futuros egresados de Licenciatura en Educación Matemática y Computación quienes se beneficien de manera directa con la elaboración de la unidad didáctica, pues ésta contribuirá en su formación como profesores de matemática, desarrollando algunas competencias y habilidades matemáticas necesarias, y les permitirá satisfacer algunas de las condiciones con las que se espera egresen.

Capítulo 2

Antecedentes teóricos

2.1 Antecedentes del Problema

Cada vez con más frecuencia, los programas de pregrado universitario han trabajado un enfoque para la formación de profesionales basado en el desarrollo de competencias (Corvalán et al., 2013). En Chile, la aplicación de este enfoque se ha difundido de manera más frecuente en programas de pregrado para ciencias de la salud y ciencias de la ingeniería (Corvalán and Montero, sf). En cuanto al campo de la educación matemática en Chile, si bien no se puede afirmar que no existe material que desarrolle competencias matemáticas, es claro que la difusión de dicho material no se ha realizado de manera masiva, lo que conduce a la principal causa de la necesidad a satisfacer, la dificultad de encontrar material bibliográfico que contribuya a una formación basada en competencias para profesores de matemática.

No obstante, cuando se habla de ”formación de profesores mediante el desarrollo de competencias”, se debe explicitar qué es lo que se entiende por *competencia*, y de manera más puntual, qué significa una *competencia matemática*.

Para el profesor y educador matemático, Mogens Niss, competencia matemática significa la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemáticas en una variedad de contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos y situaciones en las cuales las matemáticas juegan o podrían jugar un rol (Niss, 2003). Distingue ocho tipos de competencias, las que reúne en dos grupos con cuatro competencias cada uno. El primer grupo está compuesto por las habilidades de preguntar y responder preguntas en y con matemáticas:

1. Pensando Matemáticamente
2. Plantear y Resolver problemas matemáticos

3. Modelización matemática

4. Razonamiento matemático

El otro grupo de competencias corresponde a las habilidades de tratar y manejar el lenguaje matemático, y las herramientas matemáticas:

1. Representando las entidades matemáticas (objetos y situaciones)

2. Manipulación de símbolos y formalismos matemáticos

3. Comunicar en, con y acerca de las matemáticas

4. Haciendo uso de ayudas y herramientas

Por su parte, el profesor y doctor Patricio Montero describe que una competencia matemática se demuestra cuando se es capaz de comunicar el conocimiento relevante, formular preguntas ”investigables” y aplicar en su acción los procedimientos del enfoque metodológico propio de la disciplina en situaciones de desempeño. Además, considera que una persona es competente cuando para ser exitoso en una situación de desempeño, satisface un conjunto de condiciones de realización de la tarea que permiten observar o inferir el grado de presencia de atributos personales que son determinantes para tener éxito, dichos atributos personales refieren a conocimiento, habilidades, destrezas, actitudes y disposiciones propios de cada persona (Montero, sf). Combinando ambos conceptos, es que se puede describir y caracterizar a cabalidad un profesor matemáticamente competente, más aún, con los antecedentes expuestos se logra identificar de manera más precisa el enfoque que se desea considerar para la postura actual del desarrollo de competencias para la formación de profesionales, en este caso, de los educadores matemáticos.

Otro antecedente importante considerado para la construcción de la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, es aquel que recopila Ismenia Guzmán en su investigación sobre registros de representación (Guzmán et al., 1998): un análisis de su estudio realizado a estudiantes de primer año de ingeniería respecto a funciones reales, reveló que las respuestas de los estudiantes son mayormente en ”monoregistros”, es decir, las respuestas están dadas en un solo registro, ya sea en lenguaje natural, algebraico o gráfico, siendo el registro algebraico el que posee mayor presencia en las respuestas de los alumnos; además el estudio reveló deficiencias conceptuales y la dificultad que presentan los alumnos para coordinar y transitar por los diferentes tipos de registros. Por este motivo, es que en la unidad didáctica se pretende reforzar esta habilidad del pensamiento matemático, referida a la habilidad de representar.

Por otro lado, la elección del área de la matemática que se desea abarcar y desarrollar mediante el enfoque de competencias y habilidades matemáticas, no resulta ser una elección azarosa. No es de sorprender que el Cálculo resulte de difícil aprehensión para los estudiantes universitarios en el primer año de carreras que contengan asignaturas matemáticas en sus mallas, puntualmente en el caso que nos convoca, la carrera de pedagogía en matemática. Elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación, son algunos de los antecedentes que Salinas y Alanís recaudaron en su investigación, notando que es una tónica que se repite en varios países de Latinoamérica (Salinas and Alanís, 2009). Es por esta razón que la unidad didáctica se enfoca en el Cálculo Diferencial, con el propósito de significar un aporte para los estudiantes de pedagogía en matemática en los cursos de cálculo de primer año.

2.2 Alternativas de satisfacción de la necesidad

La necesidad de formar profesionales en el campo de la educación mediante un desarrollo de competencias y habilidades matemáticas se ha hecho evidente, mas aún no se ha producido una difusión masiva y concreta de material de estudio que complemente a la formación de estudiantes de pregrado de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación mediante el trabajo de competencias y habilidades matemáticas. Es por esta razón que la propuesta de este proyecto es la de construir un documento bibliográfico, puntualmente una unidad didáctica, la cual desarrolle el cálculo diferencial de tal manera que signifique un aporte para el estudiante en su primer año académico, fortaleciendo sus conocimientos básicos del cálculo y además forjando cimientos sólidos del cálculo mediante el desarrollo de competencias y mediante la habilidad de representación.

En otras palabras, al proporcionar la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial a los estudiantes de primer año de la carrera de pedagogía en matemática, ésta les permitirá desarrollar competencias y habilidades matemáticas, las cuales harán del futuro egresado de pedagogía en matemática un profesor competente matemáticamente.

2.3 Fundamentos de la hipótesis

El interés actual de formar profesores a través del enfoque de desarrollo de competencias y habilidades matemáticas viene a responder en parte a la necesidad de formar profesionales en el campo de la educación con la calidad de expertos en el área, en este caso, de la matemática. Pero entonces se hace ineludible dar una definición del concepto *experto*. Según Lajoie, los expertos parecieran compartir ciertas características principales: una memoria superior para la información de su dominio, mejor conciencia de lo que saben y de lo que no saben, mayor reconocimiento de patrones, soluciones más rápidas y precisas (aunque tienden ocupar mayor tiempo inicialmente para analizar los problemas antes de resolverlos), y un conocimiento más profundo y altamente estructurado (Lajoie, 2003). Características que comparten los autores Bransford, Brown y Cocking para describir a las personas expertas y así diferenciarlos de los novatos: Los expertos notan características y patrones significativos de información que no son notados por los novatos; Los expertos han adquirido un gran contenido de conocimiento que es organizado de manera que refleje el profundo conocimiento de su tema; El conocimiento de los expertos no puede reducirse a conjuntos de hechos o proposiciones aisladas, sino que refleja contextos de aplicación; Los expertos son capaces de recuperar con flexibilidad aspectos importantes de sus conocimientos con poco esfuerzo cognitivo; Los expertos tienen diferentes niveles de flexibilidad de su enfoque para nuevas situaciones (Bransford et al., 1999).

De acuerdo a lo anterior, si bien es necesario que el egresado de Licenciatura en Educación Matemática y Computación califique dentro de la categoría de experto en el campo de la matemática, esto no es suficiente para asegurar docentes de alto nivel, y así mismo lo advierten los autores antes mencionados, pues aunque los expertos conocen sus disciplinas a fondo, esto no garantiza que sean capaces de enseñar a otros (Bransford et al., 1999). Es entonces donde el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas para el estudiante de pedagogía en matemática se hace sustancial, pues es la amalgama entre *experto*, *competencia* y *habilidades* matemáticas la que forma profesores de matemática que cuenten con un alto nivel de experticia matemática, dominio de contenidos, habilidad para manejar el lenguaje matemático en sus diferentes formas (algebraico, gráfico y lenguaje natural), iniciativa para autorregularse para su actualización y desarrollo profesional, y que también posea estrategias de pensamiento de alto nivel, pues ya quedó atrás la idea simplista de creer que con el conocimiento de la matemática y ciertas habilidades pedagógicas bastaban para ejercer la práctica docente (Salinas and Alanís, 2009).

Capítulo 3

Análisis a priori de la solución

3.1 Descripción de la solución

Focalizada la necesidad existente de formar profesores de matemática expertos, competentes y con habilidades matemáticas desarrolladas, se hace inexcusable colaborar con lo que podría ser un aporte a la retribución de la necesidad: construir material de estudio basado en el enfoque de desarrollo de competencias y habilidades de representación destinado a los futuros profesores de matemática, abordando el cálculo diferencial desde esta perspectiva.

De manera más precisa, el propósito de este proyecto consiste en generar un medio por el cual se logre aportar a la satisfacción de la necesidad expuesta con aterioridad. Dicho medio se materializará en una Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, la cual tendrá un diseño general de tres partes: a modo introductorio, en la primera parte se estudiarán las funciones en su forma básica, con sus características, propiedades y gráficas; en la segunda parte, se trabaja por completo el cálculo diferencial, con la definición de derivada, sus propiedades y aplicaciones; y en la tercera parte, se generaliza lo estudiado hasta ese punto, considerando el estudio de las funciones potencia con exponente real. La estructura básica que tendrá la unidad didáctica se constituirá de ejemplos, definiciones, teoremas, propiedades y aplicaciones. En el apartado de ejemplos, se exhibirán modelos tomados de experiencias en diferentes áreas pero que esconden la matemática que compete a cada sección, mediante gráficos, dibujos, o fórmulas según sea el caso, además, el criterio que determine la presentación de conceptos será basado en un razonamiento inductivo, metodología propuesta por Francis Bacon que consiste en que al observar y analizar los ejemplos particulares, se logre generalizar y así llegar a una conclusión (Newman, 2006), que en este caso será el concepto matemático en cuestión según la sección en que se encuentre.

Por añadidura, y como describe claramente Luis Rico en ”Organizadores del Currículo de Matemáticas”, no resulta difícil asumir que hay una multiplicidad de significados para un mismo concepto matemático, ya que hay diversos sistemas de signos para su representación e, igualmente, hay diversos objetos (fenómenos) que refieren y dan distintos sentidos a un mismo concepto; luego determinar los significados más relevantes de cada concepto es uno de los retos de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, tarea que han de llevar los profesores para transmitir a los estudiantes los significados cultural y científicamente prioritarios: pues entender diferentes significados de un mismo concepto proporciona su comprensión (Rico, 1997). Es por esta razón que en la unidad didáctica se transita por las diferentes representaciones simbólicas y registros de los conceptos matemáticos en cuestión, con el propósito que la aprehensión de éstos sea completa y acabada, dado que conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diversos sistemas, pues el estudio de los sistemas de representación de un tema matemático tiene como objeto que los profesores en formación desarrollen su capacidad para analizar diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos involucrados en ese tema y mostrar sus diferentes conexiones (Rico et al., 2007).

3.2 Resultados esperados

Queda esclarecido que el propósito de la educación matemática no puede ser planteado prominentemente como la memorización de hechos y el desarrollo de cálculos y sus destrezas asociadas. Es decir, una formación basada en los aspectos de procedimiento, que incluyen la repetición y memorización de éstos, debilita las posibilidades para crear habilidades en el razonamiento matemático y corresponder apropiadamente con la naturaleza de ésta como disciplina cognoscitiva. En este sentido es que desde hace ya algunas décadas, una estrategia basada en la resolución de problemas se ha convertido en una importante contribución a la educación matemática en el mundo (Ruiz et al., 2006). Por esta razón, en la labor de formar docentes con competencias y habilidades matemáticas reforzadas, es imposible dejar de lado el espíritu de esta nueva corriente, de esta forma, el trabajo en conjunto con la unidad didáctica dejará preparado al estudiante de pedagogía en matemática que se encuentre cursando la asignatura de cálculo I, para enfrentarse a problemas de cálculo diferencial y resolverlos con éxito. Asimismo, será capaz de superar las dificultades encontradas por los principiantes en el cálculo, cuando tienen que considerar como iguales conceptos matemáticos definidos por procesos equivalentes pero diferentes, o cuando tienen que trabajar, por ejemplo, no con funciones particulares sino con funciones definidas por una propiedad general cualquiera; y también, quedará en condiciones de salvar las dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con diversos conceptos matemáticos (Artigue, 1998).

3.3 Fortalezas y debilidades de la solución

La principal fortaleza que caracterizará a la unidad didáctica, será el criterio con el cual serán dispuestos los contenidos matemáticos dentro de la misma. Si bien, tendrá la estructura básica de ejemplos-definiciones-propiedades, estarán organizados de tal manera que los ejemplos precederán a cada concepto matemático en cuestión, con el fin de mostrar los casos particulares observados en diferentes contextos, no solo restringidos al ámbito de la matemática, para luego presentar la definición formal del concepto, exhibir sus propiedades y transitar por los diferentes tipos de representación que poseen. Esta postura se desea tomar para contrarrestar con lo que se ha estado haciendo durante años con el trabajo matemático, el cual se invierte, poniéndose en primer lugar el contenido sin que se advierta la razón de estudiarlo, los problemas que resuelve o que le dan origen (Rodríguez et al., 2011). No suficiente con el trabajo que se hace en clase, que también rige con esta forma de enseñanza, en la literatura disponible el índice de textos tradicionales muestra un tipo de estructura clásico en el contenido: comienza con una presentación formal y rigurosa de los conceptos matemáticos, que no es otra cosa que una secuencia de definiciones, teoremas y procedimientos que solo validan a los subsecuentes, para luego culminar con aplicaciones del contenido matemático, que dejan la impresión de que son consecuencia natural del dominio de la teoría (Salinas and Alanís, 2009), y de este tipo de literatura no está exenta, por cierto, la carrera de pedagogía en matemática. Por consiguiente, la unidad didáctica a desarrollar pretende romper con el esquema clásico de enseñanza del cálculo para estudiantes de pedagogía en matemática, siendo este, su mayor fuerte en comparación a la bibliografía ya existente.

Por su parte, los autores Sánchez-Matamoros, García y Llinares remarcan la necesidad de coordinar los distintos tipos de representación, estableciendo conexiones entre lo gráfico, lo analítico y lo algebraico, como una manera de construir imágenes mentales adecuadas en los estudiantes, para ayudarlos a comprender los conceptos en estudio (Sánchez-Matamoros et al., 2008), necesidad que la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial pretende satisfacer exhibiendo diferentes tipos de representación y estableciendo no solo relaciones entre ellos, sino además desarrollando métodos de transición de un modelo de representación a otro, ganando así, otra valiosa fortaleza.

La debilidad principal que posee la solución que se propone en este proyecto, es que no es posible precisar con exactitud qué tipo de problemas en específico (relacionados con el cálculo diferencial) será capaz de resolver el estudiante que trabaje con la unidad didáctica. Es decir, no es posible especificar cómo quedará preparado el estudiante al final de cada sección en relación a qué tipo de problemas se podrá enfrentar con éxito. Ese es un punto por precisar, pues si bien el alumno que trabaje en conjunto con la unidad didáctica desarrollará y fortalecerá la habilidad de representación y la transición de los diferentes tipos de registros, no se puede asegurar que además quede preparado para resolver problemas de modelación, argumentación y/o análisis.

Otra debilidad a mencionar, refiere a la actitud que el estudiante tenga hacia la matemática, y en particular, hacia el área del cálculo. La disposición y motivación hacia el estudio del cálculo es una dimensión que se escapa del alcance de producción de un material bibliográfico.

3.4 Recomendaciones para su puesta a prueba

Para que la utilización de la unidad didáctica logre los resultados esperados de manera eficiente, es recomendable que trabajen con ella alumnos con ciertos conocimientos matemáticos previos, los cuales corresponderán a los contenidos matemáticos de una educación secundaria completa. Por consiguiente, la unidad didáctica está diseñada para llevarse a cabo en conjunto con un curso de Cálculo I, para alumnos de primer año de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, y también para cualquier persona con afinidad a la matemática que posea conocimientos básicos de funciones y polinomios, desee estudiar de manera personal cálculo diferencial.

Capítulo 4

Aplicación experimental

Para la evaluación del presente estudio, se puso a disposición la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial a alumnos que estudian Licenciatura en Educación Matemática y Computación, con el objetivo de que la observaran y trabajaran con ella, para luego realizar un pequeño cuestionario con el fin de obtener sus opiniones y apreciaciones.

La Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial fue difundida de manera digital a 25 alumnos de primer año académico que cursaban la asignatura de cálculo I, en el segundo semestre del año 2017, de la carrera Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. El curso estaba a cargo del profesor Samuel Navarro, quien fue el encargado de difundir el documento entre sus alumnos y de guiarlos a través del texto. El trabajo de los alumnos con la unidad didáctica fue durante el horario de clases de cálculo I, que constaba de dos sesiones al día, de 45 minutos cada una, durante un periodo de 5 clases consecutivas.

La labor de los alumnos no fue solo de observadores y fiscalizadores de la unidad didáctica, sino que además se les entregó de manera digital para que estudiaran y trabajaran con ella en el horario de clases, y de forma particular si así lo deseaban. Durante el horario de clases, el documento fue expuesto por el profesor Samuel Navarro, quien además usaba la oportunidad para hacer comentarios que complementaban el contenido presentado o lo generalizaban.

En términos específicos, los alumnos trabajaron con la sección 7.2, correspondiente a *La Derivada de una Función Real*, la cual abarca las propiedades de la derivada, reglas de derivación, y aplicaciones para determinar máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de monotonía y concavidad, es decir, todo lo que conduce a gráfica de funciones y aplicaciones de la derivada. Además, esta sección cuenta con un ítem sobre el Teorema del Valor Medio, el cual también fue estudiado por los alumnos, sin embargo, este tema fue expuesto por el profesor Samuel Navarro en gran parte a su criterio y forma personal.

Posterior al trabajo y estudio hecho en clases, y también de forma personal, con la unidad didáctica, se les solicitó a los alumnos responder un breve cuestionario, con el fin de recopilar sus apreciaciones al respecto, y realizar un análisis e interpretación de las respuestas y comentarios por parte de los estudiantes.

El cuestionario aplicado constó de dos partes: la primera compuesta por preguntas de aspectos generales con respecto a la evaluación del documento, en donde cada pregunta tenía tres indicadores de niveles de apreciación; y la segunda parte consistió de dos preguntas abiertas, en donde el alumno tuvo la libertad de expresar su opinión de manera más explícita y detallada con respecto al material (el modelo del cuestionario se adjunta en el capítulo de Anexos).

Se optó por un cuestionario como instrumento de evaluación, pues es una de las técnicas usadas en las investigaciones con enfoque cualitativo, enfoque que se pretende adoptar para la validación de este proyecto. Se elige este tipo de enfoque, pues permite tener una visión más clara de lo que los sujetos puedan pensar y sentir en relación al trabajo en observación. Los sujetos se hacen importantes, reconociendo sus múltiples realidades y tratando de capturar sus perspectivas personales (Domínguez, 2007).

Capítulo 5

Resultados

5.1 Descripción de los resultados obtenidos

De los 25 alumnos que conformaban el curso de cálculo I del profesor Samuel Navarro, debido a razones de horario, solo 20 participaron en el cuestionario, cuyos resultados de las preguntas de la primera parte se pueden resumir en la siguiente tabla de porcentajes.

Indicadores	Indiferente	En desacuerdo	De acuerdo
Fue útil tener el material a disposición para trabajar clase a clase, en su forma física y/o digital	0%	0%	100%
El contenido del texto se presenta de manera clara, con un lenguaje, vocabulario y redacción adecuada al nivel del estudiante	0%	0%	100%
La lectura del documento se hizo agradable, liviana y fácil de leer	15%	0%	85%
Los ejemplos presentados en el documentos fueron explicativos y claros para la comprensión del contenido en cuestión	50%	5%	45%
Los ejemplos presentados en el texto fueron novedosos e innovadores	0%	45%	55%
La cantidad de ejemplos presentados por sección es la adecuada para que el estudiante comprenda el concepto en cuestión	15%	35%	50%

De la tabla anterior, se pueden inferir algunos hechos importantes:

A todos los alumnos que participaron del cuestionario les pareció muy conveniente el poder tener acceso al material de manera libre para poder trabajar con él, y todos apreciaron que la presentación del contenido fuera con un lenguaje y redacción clara para ellos.
Con respecto a la forma de la lectura, 17 alumnos sintieron que el material no fue denso ni tedioso de leer, sino que por el contrario les pareció agradable y de liviana lectura.
Por otra parte, en la cuarta pregunta se aprecia una tendencia diferente: la mitad de los alumnos participantes del cuestiorio se expresaron indiferentes con respecto a lo explicativos y claros que pudieron ser los ejemplos. Esto podría deberse a dos factores: el estudiante no miró con detención los ejemplos presentados, ya sea porque el concepto lo entendió sin necesidad de ver los ejemplos, o por un simple desinterés; y el otro motivo, aunque quizás menos probable, es que el estudiante no entendió el concepto ni logró concretar una idea de éste, por lo que no pudo discernir si el ejemplo fue explicativo o no. En esta misma pregunta, 9 alumnos pensaron que los ejemplos fueron claves para comprender el concepto correspondiente, y solo un alumno sintió que los ejemplos no le beneficiaron en la aprehensión del concepto en cuestión.
En la pregunta número 5, las opiniones están divididas casi de forma pareja entre los dos niveles de apreciación opuestos: 11 alumnos creyeron que los ejemplos presentados fueron novedosos e innovadores, mientras que 9 opinaron lo contrario.
Con respecto al número de ejemplos por sección, 10 de los participantes del cuestionario creyó que la cantidad era suficiente para entender y comprender el concepto en cuestión, 7 alumnos opinaron que faltaba tener más ejemplos a disposición, mientras que 3 se manifestaron indiferentes.

Con respecto a la segunda parte del cuestionario aplicado, la cual constaba de dos preguntas abiertas, se obtuvieron los siguientes resultados:

En la primera pregunta, se pedía al estudiante que otorgara alguna sugerencia o crítica para el mejoramiento de la unidad didáctica. Con 14 respuestas y 6 abstenciones, esto fue lo que se recopiló:

Un alumno consideró que al documento le sobraba mucho texto innecesario.
Otro alumno sintió que existía un exceso de lenguaje técnico en algunos conceptos.
En otro aspecto, uno de los estudiantes solicitó agregar más bibliografía en español, y además consideró que la cantidad y dificultad del contenido excedía el conocimiento que él creía poseer. En contra parte, otro de los alumnos opinó que a la unidad didáctica le faltaba contenido matemático, y sugirió prescindir de algunas demostraciones que él consideró triviales.
Otros dos alumnos solicitaron colocar ejercicios propuestos, con el objetivo de poner a prueba los

conocimientos aprendidos.
Finalmente, en su mayoría los alumnos sugirieron colocar más ejemplos. Más precisamente, 8 estudiantes plantearon la idea de aumentar la cantidad de ejemplos por sección, en particular, para aquellos conceptos que consideraron de mayor complejidad.

En la segunda pregunta, se pedía al estudiante realizar algún comentario u observación, de un tema que no se haya mencionado con anterioridad. De los 20 paricipantes, solo 2 quisieron expresar sus opiniones, las que se presentan a continuación:

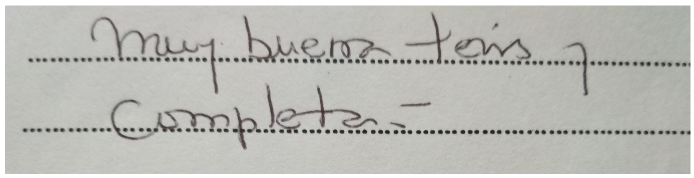

Figura 5.1: Alumno uno

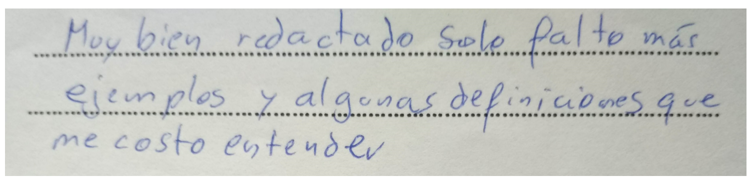

Figura 5.2: Alumno dos

5.2 Resultados por Hipótesis

En términos específicos, uno de los resultados esperados por parte de los alumnos de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, es que fueran capaces de enfrentarse a problemas de cálculo diferencial y resolverlos con éxito, sin embargo, este punto no fue viable de diagnosticar, por dos motivos principalmente: El primero radica en una de las debilidades que posee este trabajo, pues como se mencionó en capítulos anteriores, no es posible precisar qué clase de problemas de cálculo diferencial podrá resolver con éxito el estudiante que trabaje en conjunto con la unidad didáctica, es decir, no es posible concretar qué nivel de aprendizaje cognoscitivo alcanza el estudiante (donde los niveles son: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación).
No obstante, si hubiera sido posible establecer de manera previa el nivel de aprendizaje cognoscitivo que el alumno lograra, habría sido necesario la realización de una prueba inicial, durante las primeras semanas del curso de cálculo I, y una prueba final, al cierre del curso, con el fin de realizar un estudio comparativo de las capacidades de un estudiante inicial y final. Para la realización de estas pruebas, habría sido necesario un trabajo constante y planificado con la unidad didáctica a lo largo del segundo

semestre 2017 cuando se impartió el curso de cálculo I, además del consentimiento del profesor a cargo del curso, en este caso, del profesor Samuel Navarro, para poder llevar a cabo la intervención durante meses. Sin embargo, el factor tiempo se transformó en un impedimento importante al momento de considerar esta aplicación experimental, siendo así la segunda razón por lo que no fue viable poner a prueba la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Otro de los resultados esperados, hacía referencia a lograr que el estudiante de pedagogía en matemática tuviera la capacidad de transitar por los distintos registros que representan conceptos matemáticos, sean estos registros el lenguaje natural, el algebraico y el gráfico, asimismo coordinar dichos registros, y ser capaz de transformar un registro en otro. En este punto, se podría decir que, pese al reducido tiempo que tuvieron los alumnos participantes del proceso de validación para trabajar con la unidad didáctica, ninguno de ellos expresó en el cuestionario dificultad para relacionar los diferentes registros expuestos, ni tampoco realizaron comentarios que hicieran referencia a impedimentos al momento de estudiar conceptos matemáticos y trabajar con ellos en sus distintas formas.
En resumen, se puede inferir que este es un resultado esperado que sí se concretó.

Para finalizar, en términos globales, el objetivo de la unidad didáctica es contribuir como material de apoyo para la formación de docentes competentes, expertos y con habilidades matemáticas desarrolladas, sin embargo, la validación de esta característica se convierte en una actividad en exceso complicada, ya que para ello se requiriría, principalmente, de la evaluación de un alumno inicial, cuando ingrese a la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, y de un alumno final, cuando egrese, lo que implicaría años de estudio a los sujetos en cuestión (por lo menos 4 años, que corresponden a la duración de la carrera). Además, si fuera posible realizar un estudio de 4 años, se adiciona otra complicación: la capacidad para crear un instrumento de evaluación que permita precisar si las competencias y habilidades matemáticas desarrolladas por el alumno diagnosticado se vieron potenciadas por el uso de la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, o si su formación fue influenciada por diversos componentes, pero en donde la unidad didáctica tomó un papel importante para el desarrollo de competencias y habilidades del alumno ya egresado.
En otras palabras, la comprobación de competencias y habilidades matemáticas desarrolladas, y el nivel de experticia que posea el egresado de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, no se hace factible de realizar con el tiempo con el cual se dispone.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

Como consecuencia de la aplicación experimental y del análisis a los resultados obtenidos, es posible concluir lo siguiente:

Pese que al término del capítulo anterior se mencionó la inviabilidad de trabajar con la unidad didáctica durante cuatro años debido a los argumentos entregados, situación que no hacía factible la comprobación de competencias y habilidades matemáticas conseguidas por el alumno al término de su carrera universitaria, sí es posible dar una solución a este inconveniente y también sustentar la idea de que con la unidad didáctica se potencia una de las cuatro habilidades que generan el pensamiento matemático, según el MINEDUC.

Por un lado, no se hace necesario el tener que esperar los cuatro años que dura la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación para realizar un estudio experimental, pues al tratarse de un material de estudio que complementa el curso de cálculo I, basta con realizar un estudio de un semestre de clases, semestre en el cual se trabaje con un curso de Cálculo I desde su inicio, difundiendo la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial entre sus alumnos, y proceder con una prueba inicial y otra final, para realizar comparaciones de logros obtenidos, y además, complementar estas pruebas con entrevistas personales a los alumnos y al profesor del curso, para recopilar impresiones, opiniones y recomendaciones para el mejoramiento de la unidad didáctica.

Por otro lado, si bien no fue posible cuantificar el progreso de los estudiantes respecto a la habilidad de reconocer, coordinar y transitar por los diferentes registros de representación, el hecho de que la Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial fuera construida bajo este paradigma, garantiza el aportar en la formación de profesores con una competencia matemática trascendental: la de representación. Para el MINEDUC, uno de los principales focos en los cuales se orienta el curriculum de matemática es en la necesidad de que los estudiantes desarrollen el *pensamiento matemático*, el cual se define básicamente como la capacidad de reconocer las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos, de comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas (Min, 2015). Y precisamente, uno de los cuatro ejes principales que fomenta el desarrollo de este pensamiento matemático, corresponde a la habilidad de representar. En cada concepto matemático presente en la unidad didáctica, se transita por su registro en lenguaje natural, analítico/algebraico y gráfico, concretando la relación entre ellos, haciendo énfasis en la capacidad de representar un mismo concepto de diferentes formas, y muchas veces mostrando cómo pasar de un registro a otro. Por esta razón, se puede afirmar que el estudio del cálculo diferencial en conjunto con la unidad didáctica contribuye en la formación de profesores de matemática con la habilidad matemática de representación potenciada.

En un aspecto completamente diferente, es posible afirmar que los alumnos agradecieron la posibilidad que tuvieron de poder contar con material de apoyo para el estudio del cálculo, en particular, del cálculo diferencial. Del cuestionario, es posible concluir que el tener acceso libre a la unidad didáctica, proporcionó al estudiante la comodidad de tener un material que complementara y robusteciera sus conocimientos matemáticos, en paralelo a un curso de cálculo I, permitiendo también entrenarlos para distinguir y, a la vez, relacionar las distintas representaciones, tanto analíticas, algebraicas y gráficas, de los diversos conceptos matemáticos incluidos en el texto.
En contraparte, el incoveniente radica en que estas conclusiones no es posible generalizarlas ni entregar, a raíz de los resultados, datos precisamente mensurables (Domínguez, 2007).

A modo de recomendación, se sugiere satisfacer la principal necesidad que los alumnos plantearon en el cuestionario: colocar más ejemplos, de diversa dificultad y de mayor variedad. Además, también sería interesante agregar algunos ejercicios propuestos, para que ponga a prueba lo aprendido por el estudiante y para que desarrolle de forma personal su aprendizaje cognoscitivo, con ayuda de algún académico de la facultad cuando estime necesario, o en conjunto con compañeros, con quienes exista una retroalimentación de los conocimientos aprendidos.

Basado en lo mencionado previamente, es que posterior a la experiencia con los alumnos, la unidad didáctica sufrió una pequeña modificación, pues se adicionaron ejemplos y se colocaron algunos ejercicios propuestos, de los cuales, en su mayoría fueron señalados como "desafío", denominación que se dió como motivación para que el alumno aprenda nuevas habilidades matemáticas por construcción y análisis propio, y desarrolle nuevas conjeturas. Lamentablemente, por razones de tiempo nuevamente, no fue posible continuar ampliando el repertorio de ejemplos y ejercicios, ni mucho menos se pudo realizar una segunda evaluación por parte del mismo universo de alumnos, para analizar comparativamente el mejoramiento de la unidad didáctica mediante un segundo cuestionario.

Por este motivo, si existiera la posibilidad de continuar con el mejoramiento de la unidad didáctica, se sugiere seguir aportando ejemplos y ejercicios propuestos, que enriquezcan este material de apoyo para el estudiante de Licenciatura en Educación Matemática y Computación, y así logre formar parte de la bibliografía principal para el estudio del cálculo diferencial para profesores en formación.

Capítulo 7

Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial

Las siguientes notas fueron construidas para tratar el cálculo diferencial mediante el enfoque de desarrollo de habilidades y competencias matemáticas, específicamente, para la potenciación de la habilidad matemática de representación: conseguir que el lector identifique, coordine, relacione y transite por los diferentes registros, correspondientes al registro algebraico/analítico, registro gráfico y al lenguaje natural.

7.1 Función

Sin lugar a dudas, el concepto de *función* es transcendental dentro de las matemáticas, siendo la base para una amplia gama de conceptos, definiciones, propiedades y herramientas del cálculo y el análisis matemático. Sin embargo, las funciones no son una herramienta única y exclusiva de la matemática, puesto que su uso aplica a diversas áreas de la ciencia, la economía y la ingeniería, solo por nombrar algunas. El objetivo de una función, en su forma más básica, es mostrar la relación entre dos variables que se estén observando, analizar cómo afecta a una variable la alteración de la otra, y posteriormente poder visualizar esta variación en un gráfico. Las funciones surgieron como una necesidad de representar matemáticamente el mundo real, como por ejemplo, el comportamiento de la naturaleza, las tasas de cambio en la economía, el aumento o disminución de la población en diversos casos, etc. Es por esta razón que la manera en que se introducirá el importante concepto de función será mediante ejemplos, los cuales mostrarán cómo es posible expresar matemáticamente hechos concretos del mundo real .

1. Es conocido por la cultura popular que el ritmo del canto de los grillos está relacionado con la temperatura del ambiente. Algunos científicos en el siglo XIX quisieron comprobarlo, y verifi-

caron que, efectivamente, la frecuencia del chirrido de lo grillos aumenta a mayor temperatura, en donde uno de los estudios determinó que esta correspondencia queda representada, aproximadamente, por la relación

$$T = 0.21N + 40.4,$$

en donde la temperatura T se mide en Fahrenheit, y N representa el número de chirridos que produce un grillo. La relación anterior se obtuvo mediante la observación, el análisis y ajuste del gráfico de la figura 7.1 que representa la recolección de datos del experimento .

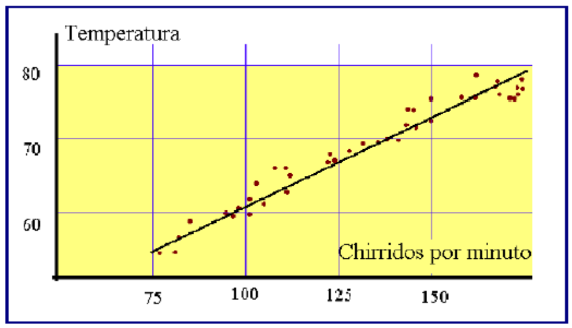

Figura 7.1: Número de chirridos por minuto y temperatura

2. Siguiendo con los efectos de la temperatura, se sabe que al aplicar calor a un objeto sólido este experimenta cambios en su tamaño, y en ocasiones en su forma. Particularmente, si se toma una barra de metal que tiene una longitud l_0 a los cero grados celsius, y se calienta hasta alcanzar una temperatura de θ grados celsius, entonces su longitud estará dada por la relación conocida como la *Ley General de la Dilatación Lineal*

$$l = l_0 \left(1 + \beta\theta\right),$$

donde β es una constante denominada como *coeficiente de expansión*. En este caso se dice que l es una función de θ.

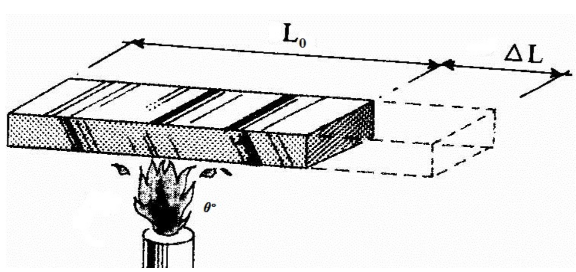

Figura 7.2: Dilatación Lineal

3. En la naturaleza es posible encontrar la materia en tres estados diferentes: sólido, líquido y gaseoso. Ya se vió un ejemplo particular de una función que se aplica a la materia sólida, véase ahora una famosa relación sobre gases.

   Si un gas ideal es comprimido en un recipiente por medio de un pistón (ver figura 7.3), manteniendo la temperatura constante, la presión p y el volumen v están relacionas de la siguiente manera

   $$pv = C,$$

   donde C es una constante. Esta fórmula, conocida como la *Ley de Boyle* no establece nada sobre las cantidades de v y p respectivamente, pero tiene el siguiente significado: si p tiene un valor definido, arbitrariamente escogido en un cierto rango (el rango será determinado físicamente y no matemáticamente), entonces v puede ser determinado, e inversamente, esto es

   $$v = \frac{C}{p}, \;\; p = \frac{C}{v}.$$

   Decimos entonces que v es una función de p, o en el caso inverso, que p es una función de v.

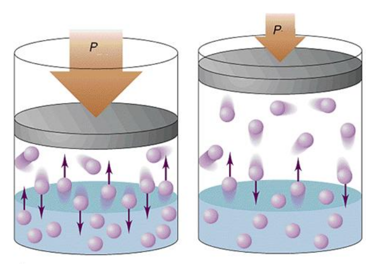

Figura 7.3: Relación presión/volumen

4. En términos económicos, al momento de ahorrar en una cuenta bancaria, por ejemplo, es importante que la persona sepa de qué manera y cuánto subirá su capital inicial en cierto periodo de tiempo, pues el mayor beneficio se obtiene al reinvertir los intereses generados al final de cada periodo de inversión. De esta manera, la fórmula que permite saber ciertamente en dinero cuánto será el capital final es

   $$C_f = C_i \left(1 + r\right)^n,$$

   conocida como *Interés Compuesto*, donde C_i es el capital inicial (el cual es un monto fijo), r es la tasa de interés y n es el número de periodos (que podrían ser considerados en semanas, meses, años, etc.). En este caso, el capital final C_f está en función de la tasa de interés usada r .

5. Y por último, dentro de la misma matemática pero lejos del cálculo, las funciones también cumplen un rol importante, como por ejemplo en la trigonometría.

En un triángulo dos de sus lados, denotados por a y b, están dados. Si para el ángulo γ entre estos dos lados se escoge un valor arbitrario menor a $180°$ el triángulo está completamente determinado, en particular, el tercer lado c está determinado (ver Figura 7.4). En este caso, se dice que si a y b están dados, c es una función del ángulo γ. Como se sabe de la trigonometría, esta función es representada por la fórmula conocida como el *Teorema del Coseno*.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

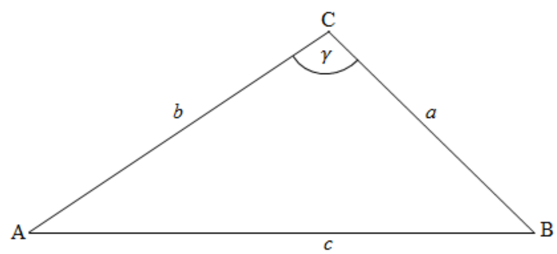

Figura 7.4: Teorema del Coseno

En todos los casos presentados, se observa la existencia de una variable que depende exclusivamente de otra variable (no de las constantes, puesto que estas no varían), por esta razón es que se escribió “es una función de” o “está en función de”, para enfatizar la estrecha relación entre ambas variables. A continuación, se definirá formalmente el concepto de función, y otros conceptos importantes que surgen en torno a ella.

Definición 7.1.1: Considere dos conjuntos A y B. Sea f una regla que asigna a cada elemento x perteneciente a A un solo elemento en B, al cual se denota por $f(x)$ (léase f de x). Se dice entonces que f es una *función que aplica* A *en* B, y esto queda representado mediante la notación $f : A \to B$.

En este documento, cuando se hable de funciones, siempre se considerarán funciones reales, esto es, los conjuntos A y B representarán toda la recta real o bien intervalos de $\mathbb{R}$ (intervalos cerrados, abiertos o semiabiertos). Mas, estos conjuntos no son elegidos al azar, sino que dependerán exclusivamente del comportamiento de la función, por este motivo poseen una definición y notación particular:

Definición 7.1.2: Considere una función $f : A \to B$.

1. El conjunto A se denomina *Dominio de* f, se denota por $\mathcal{D}_f$ y corresponde al conjunto de todos los valores que la función puede aplicarse.

2. Si x es un elemento del dominio de la función, es decir $x \in \mathcal{D}_f$, entonces el elemento en B tal que la función le asigna a x, a saber $f(x)$, se denomina *imagen de x bajo f*.

3. Al conjunto de todos los valores que puede asignar la función se le denomina *Recorrido de f*, y se denota por $\mathcal{R}_f$. Esto es

$$\mathcal{R}_f = \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}.$$

   También se le conoce como *conjunto imágenes de f* o *rango de f*.

Observación 7.1.1: Es evidente que el recorrido de f resulta ser, en cualquier caso, un subconjunto del conjunto B, o sea $\mathcal{R}_f \subset B$. Pero también puede darse el caso en que $\mathcal{R}_f = B$, hecho que más adelante determinará una importante característica de algunas funciones.

Pese a que ya se cuenta con todos los conceptos necesarios para describir formalmente una función y a los conjuntos sobre los cuales aplica, es probable que aún no se haya comprendido cómo opera una función ni la importancia del dominio y recorrido de la misma. Por esta razón, podría ser útil imaginarse a una función como una pequeña máquina, la cual posee solo dos accesos: uno por la parte de arriba, por donde ingresan los objetos, y otro por la parte de abajo, por donde salen los objetos ya "procesados" (ver figura 7.5).

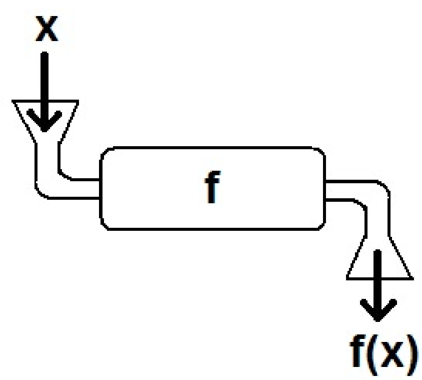

Figura 7.5: Función como máquina

Si f es tal función-máquina, el dominio de la función, $\mathcal{D}_f$, representa el conjunto de todos los objetos que se pueden introducir en la máquina, de esta forma, si x pertenece al dominio de f, entonces x es introducible en esta máquina y $f(x)$ es lo que sale como consecuencia del ingreso de x. Ahora bien, esta máquina opera de una manera muy peculiar: la introducción de un mismo objeto en dos ocasiones distintas, debe arrojar exactamente el mismo producto en ambos casos. La totalidad de productos finales que salen de la máquina corresponden al recorrido de f.

Observación 7.1.2: Usando los términos formales, al hablar de funciones se referirá a funciones cuyo dominio y recorrido sean intervalos de los reales. Además, si el dominio no se restringe explícitamente, se sobreentenderá que consta de todos aquellos números reales para los cuales la fórmula que describe la función tenga sentido.

Como al inicio del capítulo se mostraron aplicaciones de las funciones en contextos no matemáticos, a continuación véase los siguientes ejemplos abstractos:

1. Considere a f como la regla que asigna a cada número x su tercera potencia, esto se escribe como
$$f(x) = x^3.$$
En este caso como no existe inconveniente alguno en que x tome cualquier valor real, se deduce entonces que el dominio de f es toda la recta real, así como también su recorrido, es decir $\mathcal{D}_f = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

2. Sea f la función que a cada x le asigna su inverso multiplicativo, es decir
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$
Aunque no se diga nada del dominio, es claro que f tiene sentido para cualquier real distinto de cero, ya que no existe el inverso multiplicativo del cero ni se puede dividir por cero, y además se observa que la función jamás puede ser cero, de esta forma $\mathcal{D}_f = \mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Sea f una función definida por $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que
$$f(x) = \sqrt{x}.$$
En este caso, se explicitó el dominio y el recorrido de f, aunque de no haber sido así, era claro que x no podía tomar valores negativos si se están considerando solo funciones reales.

4. También es posible encontrar funciones definidas sobre una colección de números finitos o numerables (en biyección con los naturales). Un ejemplo simple de esto, sería considerar el dominio de una función f como el conjunto $\mathcal{D}_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y f tal que a cada valor le asigna su doble más uno, esto es
$$f(x) = 2x + 1.$$
De esta manera, es posible determinar también su recorrido con facilidad, resultando $\mathcal{R}_f = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$. Este tipo de funciones, con dominio finito o numerable, son conocidas como *funciones discretas*.

7.1.1 Propiedades de las Funciones

Estudiados los conceptos básicos para saber en qué consiste una función, a continuación se presentan propiedades correspondientes a las operaciones que es posible hacer entre ellas:

Definición 7.1.1.1: Dos funciones f y g son iguales si y sólo si sus dominios son iguales, es decir si $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$, y además si $f(x) = g(x)$ para todo x perteneciente a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$.

Por ejemplo, si f y g se definen mediante las fórmulas

$$f(x) = x(x+2) + \cos^2 x + \sin^2 x,$$
$$g(x) = (x+1)^2,$$

se considera a f y a g como funciones iguales, ya que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} = \mathcal{D}_g$, y además

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right), \\ &= x^2 + 2x + 1, \\ &= (x+1)^2, \end{aligned}$$

por lo que $f(x) = g(x)$, para cualquier x real.

Definición 7.1.1.2: Sean f y g dos funciones tales que $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$. Para todo $x \in A$ se define la suma, diferencia y multiplicación de funciones respectivamente como

$$\begin{aligned} (f+g)(x) =& f(x) + g(x), \\ (f-g)(x) =& f(x) - g(x), \\ (fg)(x) =& f(x)\, g(x), \end{aligned}$$

donde $f+g,\ f-g,\ fg : A \to \mathbb{R}$. En términos generales, si las funciones f y g tienen dominio $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$ respectivamente, y ambas con recorrido en los reales, entonces se define la suma, diferencia y multiplicación de f y g como funciones que aplican $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, sean f y g definidas respectivamente como

$$f(x) = \frac{1}{x},$$
$$g(x) = \frac{1}{x-1},$$

y tales que $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La suma de las funciones f y g resulta ser

$$(f+g)(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)},$$

donde se tiene que la intersección de sus dominios es $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Y el producto entre f y g es

$$(fg)(x) = \frac{1}{x(x-1)},$$

así $fg : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observación 7.1.1.1: Para la multiplicación de funciones, se tiene un caso particular cuando $f(x) = c$, donde c es un número real (o sea, f es una función constante). En este caso, se cumple que $(cg)(x) = c \cdot g(x)$, para todo x en $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Definición 7.1.1.3: Sean f y g dos funciones tales que $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$, y considere un subconjunto de A al cual pertenecen los x tales que $g(x)$ sea dintinto de cero, es decir

$$A_g = \{x \in A : \, g(x) \neq 0\}.$$

Entonces se define la división de funciones $\frac{f}{g} : A \cap A_g \to \mathbb{R}$ como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

para todo x perteneciente a $A \cap A_g = A_g$.

Por ejemplo, considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ y otra función g que también aplica $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 - 1$. El conjunto de valores reales para el cual la función g no se anula corresponde a

$$A_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \, x^2 - 1 \neq 0\right\},$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \, x = \pm 1\},$$

de esta forma la división resulta ser

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

para todo x en A_g, o sea, para cualquier real x distinto de 1 y -1.

Observación 7.1.1.2: Para cada una de las operaciones definidas anteriormente (suma, diferencia, producto y división), se cumplen las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad. Ejemplificando para la suma

$$(f+g)+h = f+(g+h)\,,$$

$$f+g = g+f,$$

$$f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h,$$

para funciones f, g y h cualesquiera. Su demostración se deja al lector.

Definición 7.1.1.4: Sean dos funciones f y g tales que $f : B \to C$ y $g : A \to B$ respectivamente. Se define la *composición de f y g* como $f \circ g : A \to C$ tal que

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

para todo x pertenciente a A. En términos generales, si f y g son funciones arbitrarias, entonces la composición $f \circ g$ es la función cuyo dominio está definido como

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x :\, x \in \mathcal{D}_g \text{ y } g(x) \in \mathcal{D}_f\}\,,$$

tal que $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ para todo x perteneciente a $\mathcal{D}_{f\circ g}$ (ver Figura 7.6).

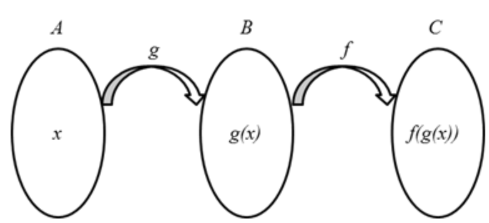

Figura 7.6: Composición de funciones

Así como se vio anteriormente para una función, la composición de funciones también es posible verla como una máquina, para entender mejor su comportamiento. Observe la figura 7.7, ahora se disponen de dos máquinas y ambas cumplen con las mismas propiedades mencionadas anteriormente, la particularidad de esta ocasión, es que la salida inferior de la primera máquina (función g) está direccionada a la entrada de la segunda máquina (función f), esto quiere decir que los objetos que salen procesados de la primera máquina ingresan a la segunda máquina para volver a ser procesados, pero ahora de una manera diferente, o sea, se evalúan en otra función.

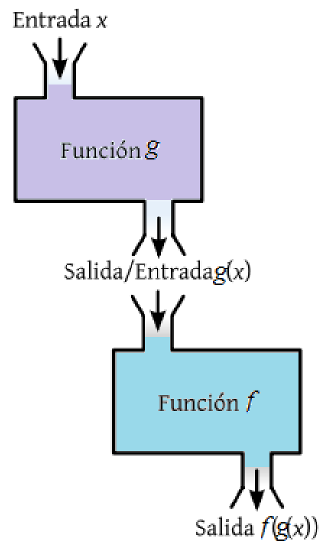

Figura 7.7: Composición de funciones como máquina

Véase en un ejemplo: sea $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-9}$ definida para valores de x en $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$, y sea $g\left(x\right)=x-2$ definida sobre todos los reales. La composición $f\circ g$ se obtiene

$$\begin{aligned} f\left(g\left(x\right)\right) &= f\left(x-2\right), \\ &= \sqrt{\left(x-2\right)^2-9}, \\ &= \sqrt{x^2-4x-5}, \\ &= \sqrt{\left(x-5\right)\left(x+1\right)}. \end{aligned}$$

Observación 7.1.1.3: La composición de funciones es asociativa (esto es, dadas las funciones f, g y h se satisface que $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\,h$), pero no es conmutativa, es decir, $f\circ g\neq g\circ f$: sean las funciones $f(x)=1-x$ y $g(x)=1+x$, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \left(f\circ g\right)\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(1+x\right) &= 1-\left(1+x\right) = -x, \\ \left(g\circ f\right)\left(x\right) = g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(1-x\right) &= 1+\left(1-x\right) = 2-x. \end{aligned}$$

Definición 7.1.1.5: Considere dos funciones f y g. Se dice que f *es una restricción de* g (o que g *es una extensión de* f) si y sólo si el dominio de f está contenido en el dominio de g, es decir $\mathcal{D}_f\subset\mathcal{D}_g$, y además para cada x perteneciente a $\mathcal{D}_f$ se cumple que $f(x)=g(x)$.

Por ejemplo, considere una función f tal que $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}.$$

f es una restricción de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1},$$

pues claramente $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, y además factorizando la función f se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}, \\ &= \frac{x+1}{x^2+x+1} = g(x). \end{aligned}$$

7.1.2 Gráfico de Funciones

En ocasiones, no basta con conocer la representación algebraica de una función para lograr entenderla a cabalidad, o más aún, para sacarle el mayor provecho a la información que de ella se pueda extraer. Es por esta razón que conocido el conjunto dominio y recorrido, como subconjunto de los reales, una de las mejores formas de visualizar el comportamiento de una función es a través de su gráfico:

Definición 7.1.2.1: Dada una función f, su gráfico se define como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathcal{D}_f \text{ e } y = f(x)\}.$$

Dicho de otra forma, el gráfico de una función corresponde a ubicar todos los pares ordenados $(x, f(x))$, con x en el dominio de f, en el plano cartesiano. Si bien esta tarea puede parecer en exceso laboriosa, ya que la mayoría de las funciones con las que se trabaja tiene infinitos pares ordenados, a continuación se verán algunos gráficos de las funciones más usadas, y además se mostrarán algunas técnicas básicas para el trazado de éstos (desde la sección 7.2 se describen técnicas más elaboradas para realizar gráficos con un trazado más preciso).

En primer lugar, se debe describir el plano cartesiano y la manera en que se ubican los pares ordenados en él. El *Plano Cartesiano*, o *Plano* simplemente como se llamará desde ahora, corresponde a dos rectas reales que se intersectan perpendicularmente en el cero de ambas, formando así un origen O que representa el punto $(0,0)$, y formando también cuatro cuadrantes que dividen el plano, tal como se muestra en la figura 7.8.

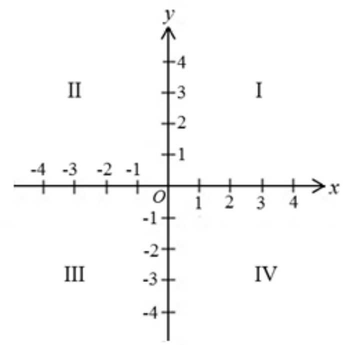

Figura 7.8: Plano Cartesiano

Como se observa, la intersección de estas dos rectas reales se hace de tal forma que, para el eje horizontal (llamado *eje de las abscisas* o *eje* x) los números positivos queden a la derecha del origen, y para el eje vertical (llamado *eje de las ordenadas* o *eje* y) los números positivos queden hacia arriba desde el origen. De esta forma, es claro de qué manera es posible ubicar los pares ordenados en el plano, por ejemplo, ubicando los puntos $P=(a,b)$, $Q=(-a,b)$, $R=(-a,-b)$ y $S=(a,-b)$, para reales a y b, quedan distribuidos como muestra la figura 7.9.

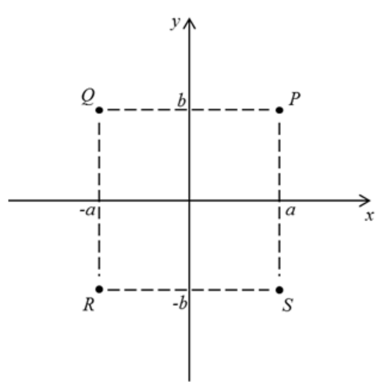

Figura 7.9: Puntos en el plano

La numeración con la cual se gradúan los ejes es arbitraria, mas comúnmente suelen usarse los números enteros para la graduación.

Las funciones más sencillas de graficar son las funciones constantes, pues no resultan ser más que rectas horizontales paralelas al eje x. Por ejemplo, si c es un número real, sin pérdida de generalidad considere c positivo, para graficar $f(x) = c$ para todo x en los reales, basta con ubicar en el plano todos los puntos de la forma (x, c), y esto se reduce a ubicar el real c sobre el eje y y trazar allí la recta paralela al eje x.

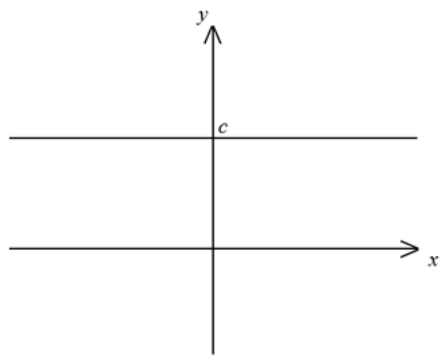

Figura 7.10: Función constante

Graficar rectas resulta ser un poco más elaborado. Toda recta se puede escribir en su forma reducida como la función $f(x) = mx + n$, con m y n reales. El factor n se llama *coeficiente de posición* e indica en qué punto cortará la recta al eje y (ver figura 7.11), esto pues cuando $x = 0$ entonces $f(0) = n$, consiguiendo así el punto $P = (0, n)$ sobre el eje ordenado. El factor m se conoce como *pendiente* e indica la inclinación que tiene la recta con respecto al eje x. Se profundizará sobre la pendiente en el capítulo de derivadas, por ahora, se intentará encontrar otro punto perteneciente a la recta, igualando a cero la función, y así encontrar el punto en que la recta corta al eje de las abscisas. Si

$$mx + n = 0,$$

entonces

$$x = -\frac{n}{m},$$

por lo que otro punto que pertenece a la recta es el punto $Q = \left(-\frac{n}{m}, 0\right)$. Note que m no toma el valor cero, pues si $m = 0$ implicaría que la recta tiene la forma $f(x) = n$, caso de función constante que ya se vió. De la geometría euclidiana básica, se sabe que con dos puntos se determina una recta, entonces uniendo P y Q se obtiene, para el caso en que $m > 0$, la recta que se representa por su gráfico como

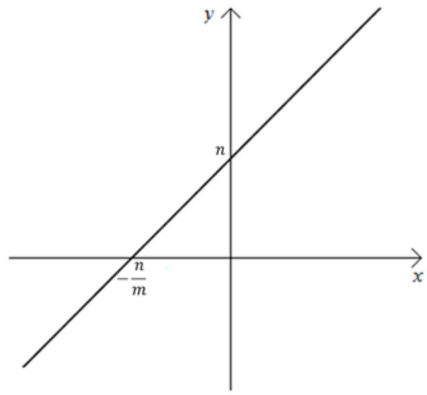

Figura 7.11: Recta con pendiente positiva

y cuando $m < 0$ se obtiene

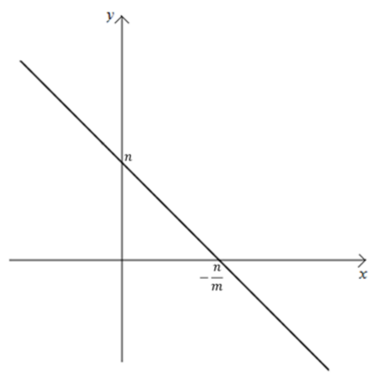

Figura 7.12: Recta con pendiente negativa

Por el momento, se tiene información necesaria para graficar todo tipo de rectas, y el signo de la pendiente no debería causar mayores problemas, como ya se dijo, cuando llegue al estudio de la sección 7.2 tendrá una definición más detallada de la pendiente y el significado preciso de su signo.

Ahora bien, se podría comenzar a mostrar en detalle cómo es el gráfico de funciones del tipo ax^2+bx+c, ax^3+bx^2+cx+d, $\frac{c}{ax+b}$ o $\sin(ax+b)$, con a,b,c,d números reales, pero resultaría ser un trabajo en extremo tedioso y, en consecuencia, carente de sentido, pues lo interesante es adquirir técnicas sencillas para graficar una amplia variedad de funciones. Por esta razón, se verán a continuación ejemplos de funciones particulares, pero que a su vez poseen características que aparecen en muchas otras funciones, de esta forma se adquerirán métodos simples para graficarlas.

1. Considere la función $f(x) = x^2$ definida sobre todos los reales. Observe que f tiene la propiedad

que $f(-x) = f(x)$. Las funciones con esta propiedad se denominan *funciones pares*, y esta característica se ve reflejada en su gráfico, en el hecho de éste ser simétrico con respecto al eje y. En otras palabras, si $P = (a, b)$ pertenece al gráfico de f, entonces también lo hace el punto $P' = (-a, b)$.

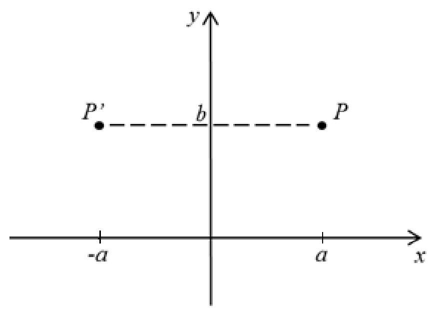

Figura 7.13: Reflexión con respecto al eje y

Por lo tanto, bastaría con dibujar los puntos del gráfico de f en los cuadrantes I y IV del plano, es decir, solo para los valores positivos de x, pues el resto del gráfico se obtiene al reflejar los puntos mediante el eje de las ordenadas.

Volviendo entonces con $f(x) = x^2$, note que para reales positivos x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ se satisface $x_1^2 < x_2^2$, o sea $f(x_1) < f(x_2)$. Entonces, se puede decir que al avanzar hacia la derecha en el gráfico, éste va creciendo para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$, lo que se puede esbozar fácilmente, tomando algunos valores, como

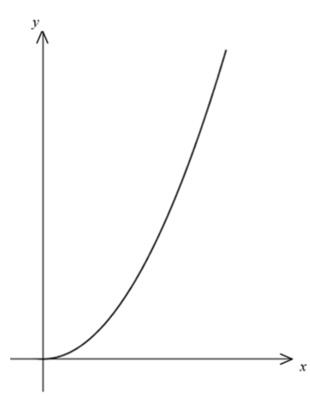

Figura 7.14: $f(x) = x^2$, $x \geq 0$

El resto del gráfico, o sea para valores negativos de x, se obtiene reflejando el dibujo a través del eje y, obteniéndose así el correspondiente G_f

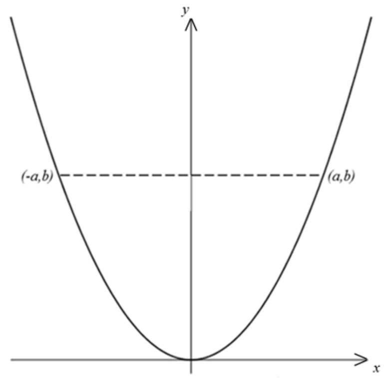

Figura 7.15: $f(x) = x^2$

2. Siguiendo con funciones que son potencias de x, considere la función $f(x) = x^3$, la cual también está definida para todo x real. Observe que en esta oportunidad, la función posee la propiedad que $f(-x) = -f(x)$. Las funciones con esta característica se denominan *funciones impares*, y se caracterizan porque sus respectivos gráficos, son simétricos con respecto al origen. Dicho de otra forma, si $P = (a, b)$ pertenece al gráfico de f, entonces también lo hace el punto $P' = (-a, -b)$.

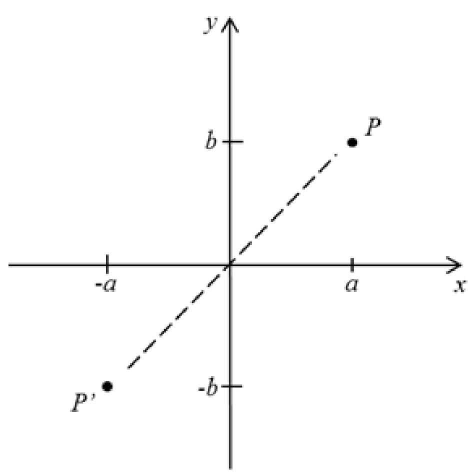

Figura 7.16: Reflexión con respecto al origen

En consecuencia, nuevamente es suficiente con dibujar los puntos de G_f en los cuadrantes I y IV del plano, es decir, considerando solo los valores positivos de x, pues el resto del gráfico se obtiene al reflejar los puntos a través del origen, o, lo que es lo mismo, al realizar dos reflexiones sucesivas en los ejes x e y respectivamente.

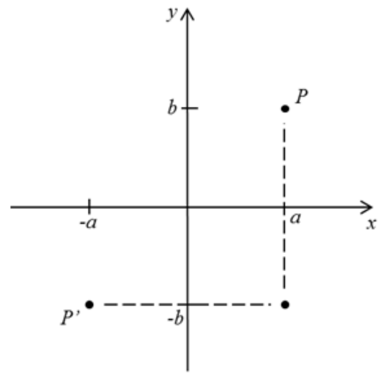

Figura 7.17: Reflexiones sucesivas

Retomando así la función $f(x) = x^3$, observe que nuevamente para dos reales positivos x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se satisface que $x_1^3 < x_2^3$, esto es $f(x_1) < f(x_2)$. Por lo tanto, se puede afirmar que la función va creciendo en el intervalo $[0, \infty)$, más aún, se puede afirmar que la función $f(x) = x^3$ *crece más rápido* que la función $f(x) = x^2$, debido al elevar cada real al cubo. Así

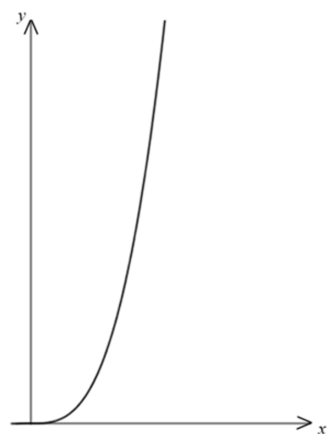

Figura 7.18: $f(x) = x^3$, $x \geq 0$

Para valores negativos de x se realiza una reflexión con respecto al origen, obteniéndose así el gráfico de x al cubo

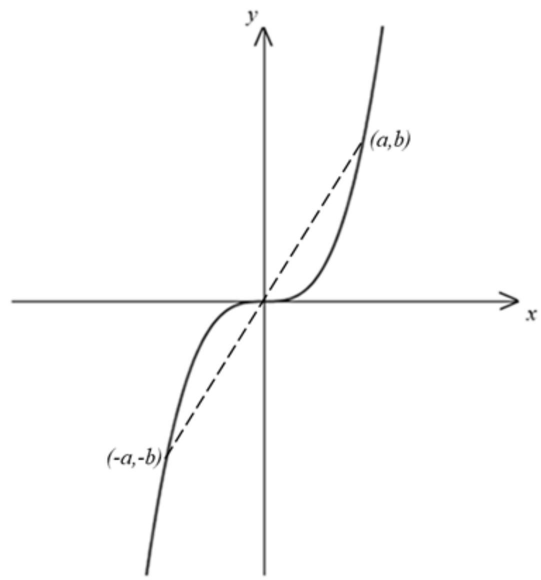

Figura 7.19: $f(x) = x^3$

3. Analice ahora el comportamiento del gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuyo dominio son todos los reales excepto el cero. Note que

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

por lo que se trata de una función impar, luego su gráfico será simétrico con respecto al origen. Observe que para reales positivos x_1, x_2 tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, o sea $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces se puede concluir que al avanzar hacia la derecha sobre el gráfico, éste va decreciendo para x en el intervalo $(0, \infty)$.
Por otra parte, para valores suficientemente grandes de x, se consigue que f se aproxime cada vez más a cero, sin llegar a ser cero, resultando así ser el eje x lo que se conoce como una *asíntota* del gráfico. De manera análoga, si x toma valores suficientemente pequeños, entre 0 y 1, entonces $f(x)$ resulta ser arbitrariamente grande, teniéndose así otra asíntota en el eje y. De esta manera, es posible esbozar el gráfico de f para reales positivos, como muestra la figura 7.20.

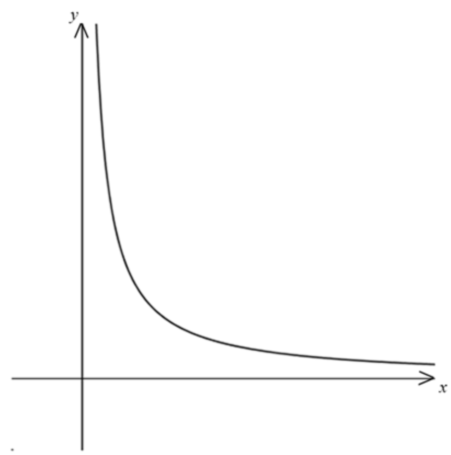

Figura 7.20: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Ahora, para valores negativos de x, el gráfico se obtiene reflejando a través del origen lo conseguido anteriormente

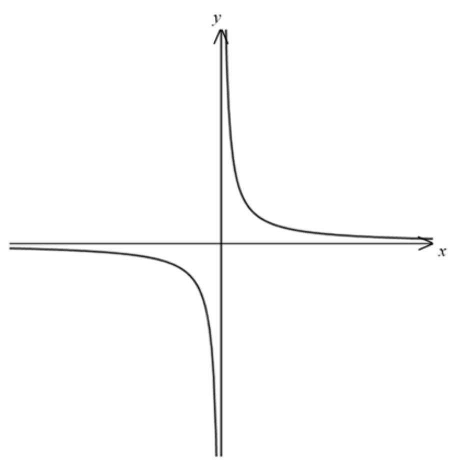

Figura 7.21: $f(x) = \frac{1}{x}$

Comentario: Si bien se mencionó que las funciones vistas son crecientes o decrecientes en ciertos intervalos, esta es una propiedad relevante dentro de las funciones, por lo cual se retomará y profundizará en la sección 7.2.

4. Considere otra función fraccionaria, esta vez $f(x) = \frac{1}{x^2}$, la cual está definida para todo número real excepto el 0. Esta función satisface

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

por lo que se trata de una función par, entonces su gráfico será simétrico con respecto al eje y.

Observe que para reales positivos x_1, x_2 tales que $x_1 < x_2$, se satisface que $\frac{1}{(x_1)^2} > \frac{1}{(x_2)^2}$, es decir $f(x_1) > f(x_2)$. Además, tal como en el ejemplo anterior, se puede concluir que al avanzar hacia la derecha sobre el gráfico, éste va decreciendo para x en el intervalo $(0, \infty)$, y se podría decir incluso que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *decrece más rápido* que $f(x) = \frac{1}{x}$, al tener en el denominador un cuadrado.

Al tratarse de una función fraccionaria y con el mismo dominio que la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se concluye que también posee dos asíntotas, representadas por ambos ejes coordenados. Así, su gráfico para valores positivos de x queda

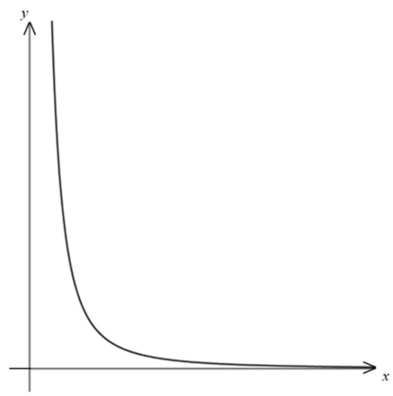

Figura 7.22: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

Realizando la reflexión correspondiente, se obtiene que el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es

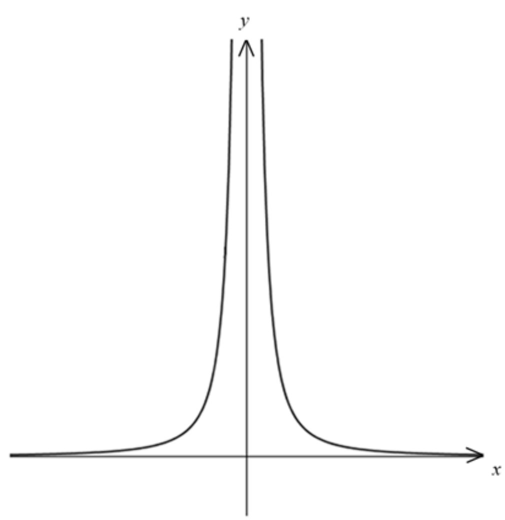

Figura 7.23: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

5. Otro tipo de función bastante común pero muy importante, es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, así que procedamos a realizar su gráfico.

El dominio de la función raíz cuadrada corresponde a todos los reales positivos incluido el cero. Al querer determinar si f es un función par o impar, se llega a que

$$f(-x) = \sqrt{-x},$$

lo cual no es posible dentro de las funciones reales, pues como se dijo previamente, x es un valor positivo o cero. De esta forma se conoce la primera función real que no puede clasificarse como par o impar.

Por otro lado, observe que para dos reales cualesquiera tales que $x_1 < x_2$, se satisface que $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, esto es que $f(x_1) < f(x_2)$, de esta forma la función raíz cuadrada resulta ser una función creciente. Además, observe que para valores entre 0 y 1 la función crece *más rápido* que para $x > 1$. Así, dando a x algunos valores sencillos, se obtiene fácilmente el esbozo del gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ como muestra la figura 7.24.

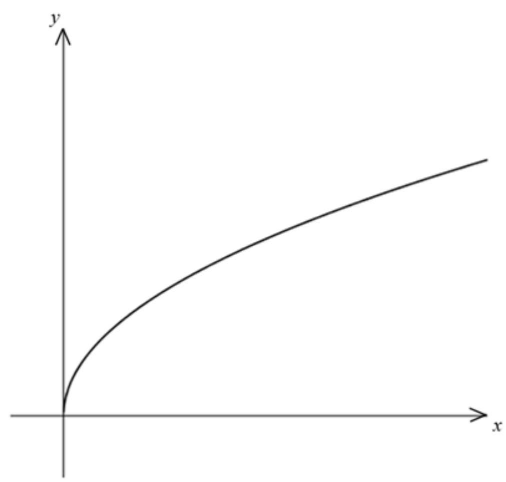

Figura 7.24: $f(x) = \sqrt{x}$

6. Considere ahora la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$. A diferencia de la función raíz cuadrada, la función raíz cúbica sí está definida para los reales negativos, en consecuencia su dominio es todo $\mathbb{R}$. A causa de esto, al querer determinar la paridad de f se tiene

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{(-1)\,x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)\,,$$

por lo que la función raíz cúbica resulta ser impar, luego su gráfico tendrá una simetría con respecto al origen.

Por otra parte, para dos reales cualesquiera x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se satisface que $\sqrt[3]{x_1} <$

$\sqrt[3]{x_2}$, esto es $f(x_1) < f(x_2)$, de esta forma la función raíz cúbica, al igual que la función raíz cuadrada, también resulta ser creciente. Pero a diferencia de la raíz cuadrada, la raíz cúbica crece *más rápido* para x entre 0 y 1, y crece *más lento* para reales mayores a 1, en comparación a $f(x) = \sqrt{x}$.

Así, tomando algunos valores positivos de x, se obtiene que

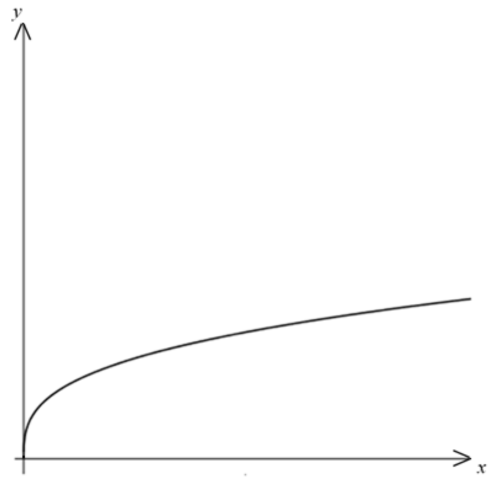

Figura 7.25: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$

Reflejando con respecto al origen, se tiene que el gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es

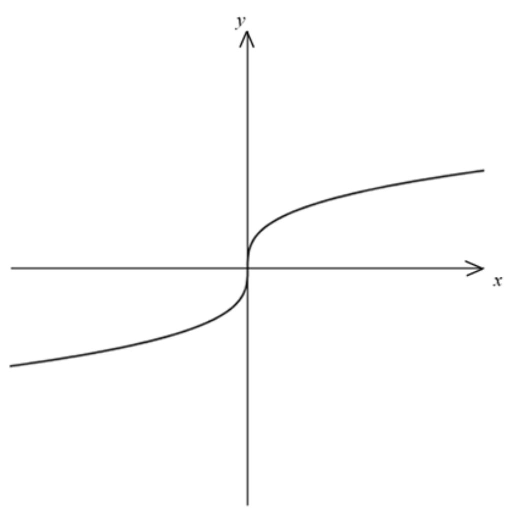

Figura 7.26: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

7. Sea $f(x) = \sin(x)$. Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, es costumbre expresar los ángulos en radianes, y así es como se hará en lo que resta de este documento. Observe que nuevamente se tiene una función impar, pues $\sin(-x) = -\sin(x)$, entonces como ya se

sabe, basta con dibujar el gráfico para valores de x mayores a cero. Más específicamente, se comenzará dibujando los puntos del gráfico para valores de x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Como es sabido por el álgebra, e incluso desde la escuela, los valores de $\sin(x)$ van creciendo desde $x = 0$, donde $\sin(0) = 0$, hasta $x = \frac{\pi}{2}$, donde $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(90°) = 1$. De esta manera, el gráfico de f es creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal como se muestra en la figura 7.27.

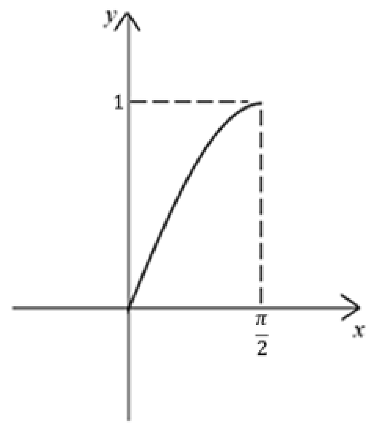

Figura 7.27: $f(x) = \sin(x)\,,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Como se sabe que f es impar, el gráfico en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ se obtiene por reflexión con respecto al origen

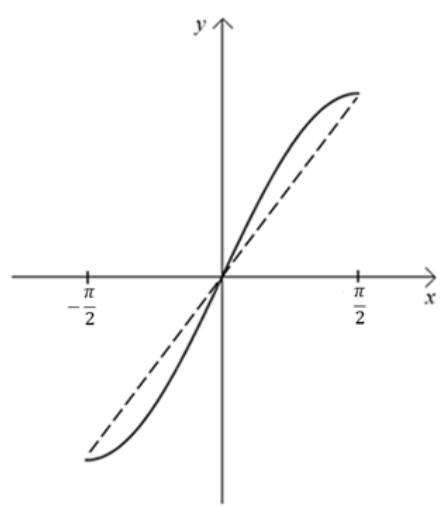

Figura 7.28: $f(x) = \sin(x)\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ahora bien, un hecho trigonométrico que se asumirá el lector conoce (de no ser el caso, de todas formas se demostrará en una sección posterior) es que

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x),$$

por lo que, para obtener el gráfico en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ basta con desplazar lo trazado en la figura 7.28 en π unidades hacia la derecha, y posteriormente realizar una reflexión a través del eje x, tal como muestra la figura 7.29.

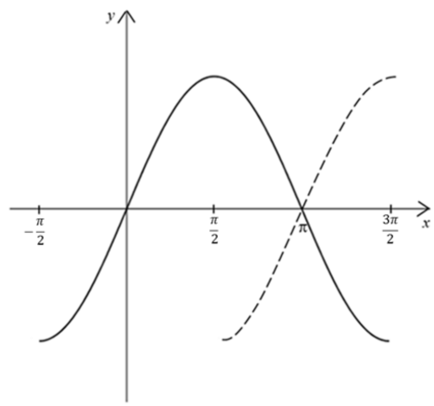

Figura 7.29: $f(x) = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Finalmente, asimismo como la propiedad anterior, se asume que se conoce el hecho de que

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x),$$

lo que se traduce en que el resto del gráfico se obtiene desplazando la figura 7.29 en múltiplos enteros de 2π unidades, tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, obteniéndose por tanto el gráfico de la función seno en todo su dominio

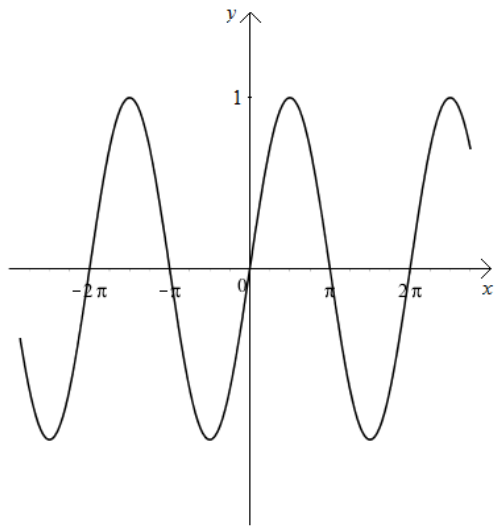

Figura 7.30: $f(x) = \sin(x)$

Observación 7.1.2.1: La propiedad de la función seno que se usó previamente, a saber

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x),$$

es posible generalizarla y así clasificar a cierto tipo de funciones:

Definición 7.1.2.2: Dada una función real f que tiene la propiedad de

$$f(x + T) = f(x),$$

para $x \in \mathbb{R}$ y T un real positivo, se denomina *periodo* de la función f al menor real T distinto de cero que satisfaga la igualdad previa. De esta manera, se dice que la función f es *periódica de periodo* T.

8. Otro gráfico importante de conocer es el de la función coseno. En este caso, el coseno es par, pues $\cos(-x) = \cos(x)$, por lo tanto su gráfico será simétrico con respecto al eje y. Se comenzará también analizando lo que ocurre en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Los valores de $f(x) = \cos(x)$ van decreciendo desde $x = 0$, donde $\cos(0) = 1$, hasta $x = \frac{\pi}{2}$, donde $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, de esta manera el gráfico de f es decreciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

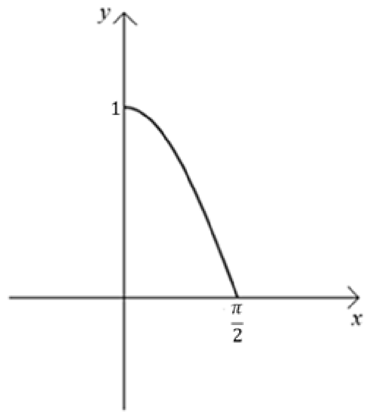

Figura 7.31: $f(x) = \cos(x)\,,\; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Nuevamente usando un hecho de la trigonometría, se tiene que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\,.$$

Es decir, al desplazarse en $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha, se debe copiar el gráfico de $\sin(x)$, para x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, y luego hacer una reflexión con respecto al eje x, resultando en

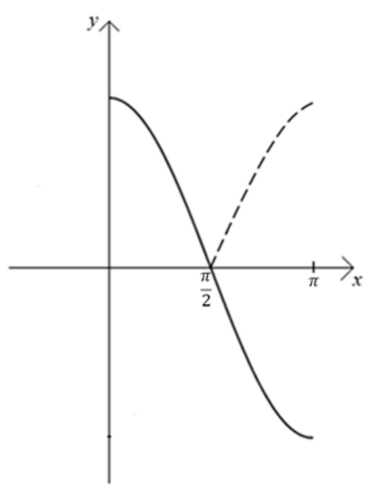

Figura 7.32: $f(x) = \cos(x)\,,\; x \in [0, \pi]$

Entonces, como se trata de una función par, el gráfico en el intervalo $[-\pi, 0]$ se obtiene por reflexión con respecto al eje y

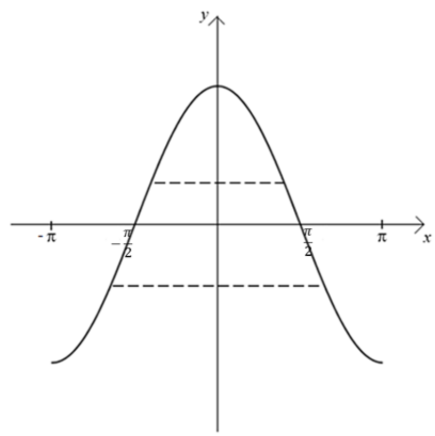

Figura 7.33: $f(x) = \cos(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$

Finalmente, al igual que la función seno, el $\cos(x)$ también es periódico y de periodo 2π, por ende, su gráfico para todo x real se consigue desplazando en múltiplos enteros de 2π unidades, tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, obteniéndose así

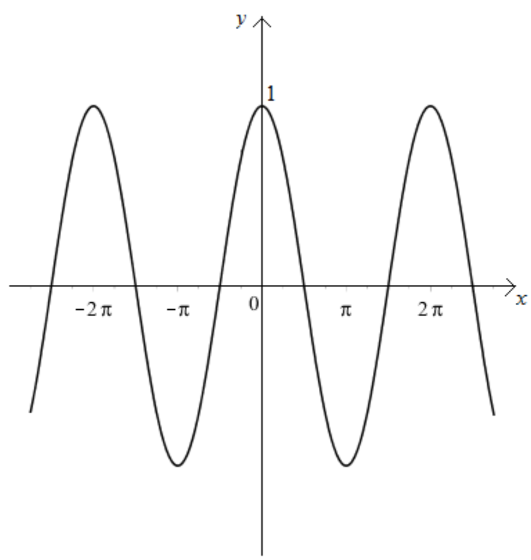

Figura 7.34: $f(x) = \cos(x)$

DESAFÍO: Usando las funciones estudiadas en esta sección, intente graficar $f(x+2)$ y $f(x)+2$, es decir, realice los gráficos de las funciones $(x+2)^2$, x^2+2, $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x}+2$, $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{x}+2$, $\sin(x+2)$, $\sin(x)+2$, etc. ¿Qué es lo que ocurre con estos nuevos gráficos con respecto a los originales?. Y si en vez de $f(x+2)$ y $f(x)+2$, reemplaza el 2 por -2 y grafica las nuevas funciones, ¿qué es lo que ocurre?. Reemplace el 2 y el -2 por un real cualquiera c, y saque conclusiones con respecto a los gráficos de $f(x+c)$ y $f(x)+c$ relacionadas con los gráficos de la función original $f(x)$.

En síntesis, con las técnicas aprendidas hasta ahora, el lector será capaz de esbozar una gran cantidad de gráficos de funciones, más aún si fue capaz de realizar el desafío y sacar las conclusiones pertinentes. No obstante, existen un sinnúmero de funciones igualmente importantes, y no es posible graficarlas todas solo determinando paridad, periodo y su dominio. Por esa razón, en la sección 7.2 se verán más propiedades de las funciones que permitan caracterizarlas en profundidad, y así esbozar un gráfico más aproximado de ellas, todo esto gracias a la potente herramienta de la *derivada*.
Para concluir esta sección, se dará un criterio bastante práctico para determinar cuando un conjunto de puntos del plano corresponden al gráfico de alguna función.

Lema 7.1.2.1: Sea f una función. Si su gráfico se denota por $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de que toda recta paralela al eje de las ordenadas, lo corta a lo sumo en un punto. Y recíprocamente, todo conjunto de puntos $\mathcal{G}$ en el plano con esta propiedad, es el gráfico de alguna función.

Demostración:
Sea f una función y $\mathcal{G}$ su gráfico. Considere un real fijo x_0. La recta $x = x_0$ corta a $\mathcal{G}$ si y solo si esta recta tiene algún punto en común con el gráfico, es decir, si existe algún y tal que $(x_0, y) \in \mathcal{G}$. Por definición de gráfico, se sabe que un punto (x_0, y) pertenece a $\mathcal{G}$ si y solo si x_0 pertenece al dominio de f e $y = f(x_0)$. Luego la recta $x = x_0$ corta a $\mathcal{G}$ si y solo si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, en cuyo caso $(x_0, f(x_0))$ es el único punto de intersección (ver figura 7.35).

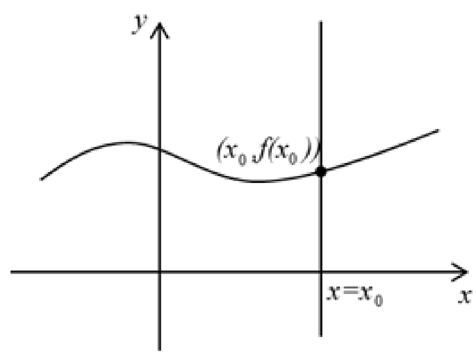

Figura 7.35: Intersección de la recta en un punto de la curva

Recíprocamente, suponga ahora que $\mathcal{G}$ es un conjunto de puntos del plano con la propiedad de que toda recta paralela al eje y, corta a $\mathcal{G}$ solo en un punto. Sea A el conjunto de todos los reales x_0 para los cuales la recta $x = x_0$ corta a $\mathcal{G}$, y sea f la regla que asigne a cada $x_0 \in A$ un único número y_0 tal que $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$. Esto implica que $\mathcal{G}$ es el gráfico de f.■

7.1.3 Funciones Polinómicas y Racionales

Hasta el momento, se han visto una gran cantidad de funciones, todas ellas de apariencia diferente, pero algunas con cualidades en común. Dentro de los ejemplos de funciones mostrados, existen dos tipos importantes que destacar, ya que su uso en matemática, y particularmente en el cálculo, se hace frecuente al momento de ejemplificar conceptos o propiedades. Las funciones a las que se hace referencia, son las de tipo

$$x^3,\ 2x+1 \ \text{ o } \ (x+1)^2,$$

y del tipo

$$\frac{1}{x},\ \frac{x+1}{x^2+x+1} \ \text{ o } \ \frac{x^2+1}{x-1},$$

denominadas como *funciones polinómicas* y *funciones racionales*, respectivamente.
A continuación, se procede a describirlas en detalle.

Considere un subconjunto X de un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede ser, por ejemplo, el cuerpo de los reales o complejos. Se define una *sucesión en* X como una regla f que a cada número natural le asocia un número en X, es decir $f : \mathbb{N} \to X$. En este caso, la notación usual de función $f(n)$ con n natural, se sustituye por a_n, que representa el n-ésimo término de la sucesión, y a la sucesión completa

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$$

se le denota resumidamente por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Surge así, una clase particular de sucesión:

Definición 7.1.3.1: Una sucesión $P : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ se dice un *polinomio con coeficientes en* $\mathbb{K}$ si existe un natural n tal que

$$P(k) = a_k = 0,$$

para todo $k > n$. En otras palabras, se dice que un polinomio es una *sucesión casi nula*, puesto que

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

Comentario: Si P es distinto de cero, es decir $P \neq (0, 0, \ldots,)$, el número n se llama *grado del polinomio* P y se denota por $\partial P = n$ o $gr(P) = n$. Para el polinomio nulo $P \equiv 0$ no se define el grado.

De igual forma como se dijo que solo se considerarán funciones reales en este documento, también se considerarán solo polinomios con coeficientes en los reales, por ende, de ahora en adelante $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en los reales se denota por $\mathbb{R}[x]$, y en él se definen dos operaciones:

- Suma

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x], \\ (P, Q) \quad &\mapsto P + Q \end{aligned}$$

Es decir, si $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots)$, entonces la suma de polinomios está definida como

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots).$$

- Producto

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ (P, Q) \quad &\mapsto P \cdot Q \end{aligned}$$

Es decir, si $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots)$, entonces el producto de polinomios

$$P \cdot Q = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, \ldots),$$

con $p \in \mathbb{N}$, se obtiene como

$$c_p = \sum_{i=0}^{p} a_{p-i} b_i.$$

Por ejemplo, considere dos polinomios $P(2, -3, 0, 0, \ldots)$ y $Q = \left(\frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, 2, 0, 0, \ldots\right)$, donde $gr(P) = 1$ y $gr(Q) = 2$. Si suma ambos polinomios resulta ser

$$P + Q = \left(\frac{4}{3}, \frac{-9}{4}, 2, 0, 0, \ldots\right).$$

Para calcular el producto entre P y Q, se usará la definición previamente vista. De esta forma, hay que encontrar los coeficientes c_p, donde

$$c_p = \sum_{i=0}^{p} a_{p-i} b_i.$$

En este caso particular, solo se necesita determinar

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1, \\
c_2 &= a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \\
c_3 &= a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3,
\end{aligned}$$

pues podrá comprobar que el resto de los coeficientes, desde c_4 hasta el correspondiente c_p, son cero. Realizando los respectivos cálculos, se obtiene

$$\begin{array}{lcl}
c_0 = & 2 \cdot \frac{-2}{3} & = -\dfrac{4}{3}, \\
c_1 = & -3 \cdot -\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} & = \dfrac{7}{2}, \\
c_2 = & 0 \cdot -\frac{2}{3} + -3 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 2 & = \dfrac{7}{4}, \\
c_3 = & 0 \cdot -\frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{3}{4} + -3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & = -6,
\end{array}$$

así

$$P \cdot Q = \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, -6, 0, 0, 0, \ldots \right).$$

Véase otro ejemplo. Sean los polinomios $R = (-2, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ y $S = (5, \pi, -4, 2, 0, 0, \ldots)$, donde $gr\,(R) = 2$ y $gr\,(S) = 3$. Luego la suma de R y S queda en

$$R + S = (3, \pi, -3, 2, 0, 0, \ldots),$$

y la multiplicación, según la definición, se calcula como

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0,\\
c_1 &= a_1b_0 + a_0b_1,\\
c_2 &= a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2,\\
c_3 &= a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3,\\
c_4 &= a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4,\\
c_5 &= a_5b_0 + a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes desde c_6 hasta el correspondietne c_p son cero. Se obtiene entonces

$$\begin{array}{rcl}
c_0 = & -2\cdot 5 & = -10,\\
c_1 = & 0\cdot 5 + -2\cdot \pi & = -2\pi,\\
c_2 = & 1\cdot 5 + 0\cdot \pi + -2\cdot -4 & = 13,\\
c_3 = & 0\cdot 5 + 1\cdot \pi + 0\cdot -4 + -2\cdot 2 & = \pi - 4,\\
c_4 = & 0\cdot 5 + 0\cdot \pi + 1\cdot -4 + 0\cdot 2 + -2\cdot 0 & = -4,\\
c_5 = & 0\cdot 5 + 0\cdot \pi + 0\cdot -4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + -2\cdot 0 & = 2,
\end{array}$$

así

$$R\cdot S = (-10, -2\pi, 13, \pi - 4, -4, 2, 0, 0, 0, \ldots).$$

Ejercicio: Dados los polinomios $P\,(-5, 1, -2, 3, 0, 0, \ldots)$ y $Q = (-3, 1, 0, 0, \ldots)$, determine

a) $Q + P\cdot Q$,

b) $P + Q^2$,

c) Averigüe porqué es posible hacer la operación $5P + -3Q$, y luego calcule su resultado.

Observación 7.1.3.1: De los ejemplos anteriores, es posible deducir una regla general para cualquier par de polinomios P y Q en $\mathbb{R}\,[x]$, y es que

- $gr\,(P+Q) \leq \text{máx}\,\{gr\,(P)\,, gr\,(Q)\}$, y
- $gr\,(P\cdot Q) = gr\,(P) + gr\,(Q)$.

Demostración:

- Suponga que los polinomios P y Q son de la forma

$$\begin{aligned} P &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots), \\ Q &= (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots), \end{aligned}$$

donde claramente a_n y b_m son ambos distinto de cero. Sin pérdida de generalidad, sea $n > m$, en consecuencia, el último término no nulo de $P + Q$ es a_n, así

$$\text{máx}\{gr(P), gr(Q)\} = gr(P) = n = gr(P + Q).$$

En el caso en que $n = m$, el último coeficiente no nulo de $P + Q$ podría ser a lo más $a_n + b_n$, ya que también podría darse que $b_n = -a_n$, y así te tendría que

$$\text{máx}\{gr(P), gr(Q)\} = gr(P) = gr(Q) = n \geq gr(P + Q).$$

- Si $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots)$, tal que a_n y b_m son ambos distinto de cero, entonces el último término no nulo del producto $P \cdot Q$ es $a_n b_m$, de esta forma

$$gr(P \cdot Q) = n + m = gr(P) + gr(Q). \blacksquare$$

En los ejemplos vistos previamente, en el primero, el grado del polinomio P es 1, mientras que el grado del polinomio Q es 2. Luego, el máximo entre ambos grados es 2, por lo tanto $gr(P + Q) \leq 2$, y de hecho $gr(P + Q) = 2$; y por otra parte, la suma de los grados es 3, tal como se obtuvo $gr(P \cdot Q) = 3$. En el segundo ejemplo, el grado del polinomio R es 2 y el grado de S es 3, entonces el máximo entre ambos grados es 3, y resulta ser que $gr(R + S) = 3$; por otro lado, la suma de ambos grados es 5, tal como se obtuvo $gr(R \cdot S) = 5$.

Ejercicio: Dados los polinomios

- $P(-27, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$,
- $Q(-1, 0, 1, -1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$,
- $R\left(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$,
- $S\left(0, 0, \frac{1}{3}, -2, 0, 0, \ldots\right)$,

sin calcular explícitamente la suma y multiplicación entre ellos, calcule el grado de $P+Q$, $P+R$, $P+S$, $Q+R$, $Q+S$, $R+S$, $P \cdot Q$, $P \cdot R$, $P \cdot S$, $Q \cdot R$, $Q \cdot S$ y $R \cdot S$.

Las operaciones de adición y multiplicación de polinomios poseen importantes propiedades que se detallan a continuación, su demostración queda para el lector.

Propiedades:

1. Asociatividad con respecto a la Suma: Para polinomios cualesquiera $P, Q \text{ y } R$ en $\mathbb{R}[x]$ se tiene que
$$P+(Q+R)=(P+Q)+R.$$

2. Neutro Aditivo: Existe un polinomio nulo $O=(0,0,0,\ldots) \in \mathbb{R}[x]$ tal que
$$P+O=O+P=P,$$
para todo polinomio P perteneciente a $\mathbb{R}[x]$.

3. Inverso Aditivo: Para todo polinomio P perteneciente a $\mathbb{R}[x]$, existe su inverso aditivo denotado por $-P$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que la suma de ambos da por resultado el polinomio cero, es decir
$$P+(-P)=(-P)+P=O.$$

4. Conmutatividad con respecto a la Suma:
$$P+Q=Q+P,$$
para cualesquiera P y Q en $\mathbb{R}[x]$.

5. Asociatividad con respecto al Producto: Para polinomios cualesquiera $P, Q \text{ y } R \in \mathbb{R}[x]$, se cumple que
$$P \cdot (Q \cdot R)=(P \cdot Q) \cdot R.$$

6. Neutro Multiplicativo: Existe un polinomio $I=(1,0,0,0,\ldots)$ perteneciente a $\mathbb{R}[x]$ tal que el producto de I por cualquier otro polinomio no altera al polinomio, es decir
$$P \cdot I=I \cdot P=P,$$
para todo polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$.

7. Conmutatividad con respecto al producto:

$$P \cdot Q = Q \cdot P,$$

para todo $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

8. Distributividad: Para polinomios cualesquiera $P, Q \text{ y } R$ pertenecientes a $\mathbb{R}[x]$, se satisface

$$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R.$$

9. Además, para dos polinomios P y Q en $\mathbb{R}[x]$, si $P \cdot Q = O$ entonces $P = O$ o $Q = O$.

Ejercicio: Dados los polinomios $P = (-4, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $Q = (1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots)$ y $S = (0, 2, 5, -1, 6, 0, 0, \ldots)$, calcule

a) $P(Q + R)$,

b) $R - (Q - P)$,

c) $P^2 + 2P - 5$.

Ahora bien, conocidas las propiedades indispensables para el uso de los polinomios en cálculo, se hace evidente que no es sencillo tratar con un polinomio en su forma de sucesión casi nula, es decir como

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),$$

además de no ser la forma habitual en que se trabaja con polinomios. Por esta razón, es que haciendo uso de la definición otorgada para polinomio y de las operaciones realizables entre ellos, es que se extenderá a una nueva notación para los polinomios.

Considere la suma y multiplicación de dos polinomios de la forma $(a_0, 0, 0, \ldots)$ y $(b_0, 0, 0, \ldots)$ respectivamente, y observe que

$$(a_0, 0, 0, \ldots) + (b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0 + b_0, 0, 0, \ldots),$$
$$(a_0, 0, 0, \ldots) \cdot (b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0 b_0, 0, 0, \ldots).$$

Entonces, es posible identificar a los polinomios de la forma $(\lambda, 0, 0, \ldots)$ con la constante real λ. Por otro lado, considere un polinomio de la forma $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ y denótelo por la letra x. Usando la definición de producto, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} x^2 &= (0,0,1,0,0,\ldots), \\ x^3 &= (0,0,0,1,0,0,\ldots), \\ \vdots & \quad \vdots \\ x^n &= (0,\ldots,0,1,0,\ldots), \end{aligned}$$

tal que para la multiplicación de n veces el polinomio x, el número 1 queda en la coordenada $n+1$. Se puede entonces concluir que el producto entre un polinomio identificado con el real λ y las potencias de este polinomio x, resulta en

$$\begin{array}{ccccc} \lambda x &=& (\lambda,0,0,\ldots)\cdot(0,1,0,0,\ldots) &=& (0,\lambda,0,0,\ldots), \\ \lambda x^2 &=& (\lambda,0,0,\ldots)\cdot(0,0,1,0,\ldots) &=& (0,0,\lambda,0,0,\ldots), \\ \lambda x^3 &=& (\lambda,0,0,\ldots)\cdot(0,0,0,1,0,0,\ldots) &=& (0,0,0,\lambda,0,0,\ldots), \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por consiguiente, para un polinomio $P=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$ cualquiera, si se descompone mediante suma se obtiene

$$\begin{aligned} P &= (a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots), \\ &= (a_0,0,\ldots)+(0,a_1,0,\ldots)+(0,0,a_2,0,\ldots)+\cdots+(0,\ldots,0,a_n,0,\ldots), \\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \end{aligned}$$

dando paso así a lo que se conoce como la *forma normal* de un polinomio

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

Por consiguiente, si se denota por $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las funciones definidas de los reales en los reales, y se define una función evaluación de la forma

$$\begin{aligned} e:\mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ (a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots) &\mapsto p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \end{aligned}$$

entonces se obtiene un isomorfismo de espacios vectoriales, donde la notación

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

es la que se utilizará en el resto del documento para referirse a polinomios con coeficientes en el cuerpo de los reales e indeterminada x.

Ejemplo: Son ejemplos de polinomios en su forma normal expresiones del tipo

- $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$,
- $q(x) = 5x^6 + 4x^5 - 15x^4 - x^3 + 7$,
- $r(x) = x$,
- $s(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x$.

Como ejercicio simple, reescriba a su forma normal todos los polinomios que se han mostrado en esta sección hasta ahora.

Las propiedades vistas anteriormente no son las únicas que poseen los polinomios, existe una diversidad de propiedades algorítmicas relativas a los polinomios, análogas a las que poseen los números enteros, como por ejemplo, describir un algoritmo de división para polinomios, definir cuando un polinomio divide a otro, definir un máximo común divisor entre dos polinomios y el algoritmo para encontrarlo, solo por nombrar algunas. Pero claramente, este tipo de propiedades corresponden netamente al campo algebraico, por esto solo se definirán unas cuantas propiedades, que si bien sus demostraciones también utilizan elementos del álgebra, es necesario conocerlas pues su uso en cálculo se hace relevante, como se explicará más adelante.

Definición 7.1.3.2: Sea $p(x)$ un polinomio no nulo, es decir $p(x) \neq 0$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una *raíz* del polinomio $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Por ejemplo, considere el polinomio $p(x) = x^3$, claramente 0 es raíz de p ya que

$$p(0) = 0.$$

Para $p(x) = 2x + 1$, se observa que $\alpha = -\frac{1}{2}$ es raíz, pues

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0.$$

Por último, el polinomio $p(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene dos raíces, a saber $\alpha_1 = 5$ y $\alpha_2 = -1$, ya que

$$\begin{aligned} p(5) &= 5^2 - 20 - 5 &= 0, \\ p(-1) &= (-1)^2 + 4 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 7.1.3.1: Si un real α es raíz de un polinomio no nulo p, entonces $(x - \alpha)$ divide a $p(x)$, y se denota por

$$(x - \alpha) \mid p(x).$$

Demostración:

En primer lugar, se asume que el lector conoce el algoritmo de división para polinomios. Luego, por este algoritmo se sabe que existen polinomios q y r en $\mathbb{R}[x]$ tales que

$$p(x) = q(x)[x - \alpha] + r(x),$$

donde se pueden dar dos casos: $gr(r) = 0$ o que $gr(r) < gr([x - \alpha])$. Como se observa, el grado de $(x - \alpha)$ es uno, por tanto no queda otra alternativa que el grado del polinomio resto sea igual a cero. Y que el $gr(r) = 0$, significa que dicho polinomio es una constante: sea c un número real, tal que $r(x) = c$ para todo x real. Ahora, retome la ecuación que otorga el algoritmo de la división y evalúe en $x = \alpha$

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= q(\alpha)[\alpha - \alpha] + r(\alpha), \\ 0 &= 0 + c, \\ 0 &= c. \end{aligned}$$

En consecuencia, $r(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y así

$$p(x) = q(x)[x - \alpha],$$

para algún $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, por lo tanto, efectivamente $(x - \alpha)$ divide a $p(x)$.$\blacksquare$

A primera vista, el teorema anterior no es más que un resultado algebraico, no obstante este hecho facilita el hallar más raíces de un polinomio. Por ejemplo, considere el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$. Note que

$$p(1) = 1^3 - 1^2 - 2 + 2 = 0,$$

entonces $\alpha = 1$ es raíz del polinomio p, y por tanto, $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Al realizar la división, utilizando el algoritmo conocido, se obtiene que el polinomio q es $q(x) = x^2 - 2$, así

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = \left(x^2 - 2\right)(x - 1).$$

De esta forma, es posible determinar otras dos raíces de $p(x)$

$$\begin{aligned} p\left(\sqrt{2}\right) &= \quad 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 2 &= 0, \\ p\left(-\sqrt{2}\right) &= \quad -2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ corresponden a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$ y $\alpha_3 = -\sqrt{2}$.

Pero a causa de este ejemplo, puede surgir una duda bastante válida, y es ¿cómo se sabe que $p(x)$ tiene solo tres raíces?, ¿por qué no más?. La siguiente proposición demuestra porqué el polinomio del ejemplo anterior tenía exactamente tres raíces.

Proposición 7.1.3.1: Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $p(x)$ tiene a lo más n raíces.

Demostración:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ raíces del polinomio $p(x)$, tal que todas son distintas entre sí. Se sabe por el teorema anterior que

$$(x - \alpha_i) \mid p(x),$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, r$. Por consiguiente, el polinomio $p(x)$ puede ser escrito como

$$p(x) = q(x)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_r),$$

para algún polinomio $q(x)$ perteneciente a $\mathbb{R}[x]$. Luego, usando el hecho que

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q),$$

se tiene en este caso que

$$\begin{aligned} gr(p) &= gr(q) + \sum_{i=1}^{r} gr([x - \alpha_i]), \\ n &= gr(q) + r, \\ n - r &= gr(q). \end{aligned}$$

Pero el grado de q obviamente debe ser mayor o igual a cero, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq n-r, \\ r &\leq n, \end{aligned}$$

por lo tanto, el número total r de raíces de un polinomio es igual o menor al número que define el grado del polinimo.■

Es probable que hasta el momento, el lector no tenga clara la relación que hay entre las raíces de un polinomio y el cálculo, sin embargo el concepto de raíz de un polinomio puede resultar de gran utilidad en los temas que se tratan en estas notas.

Considere la función polinómica

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Si se quisiera hacer el gráfico de esta función, habría que considerar sus características: en primer lugar, es una función cuadrática, es decir, es un polinomio de grado dos, por lo que su gráfico tendrá la forma de la ya conocida $g(x) = x^2$, llamada *parábola*; pero también se observa que aunque su forma sea como la de una parábola, el gráfico de $f(x)$ no es exactamente igual al de x^2, ya que este último pasa por el punto $(0,0)$ y en cambio f no. Pero, si se encuentran las raíces del polinomio

$$p(x) = x^2 - 5x + 6,$$

es posible saber para qué valores de x se anula. Entonces, se tiene que las raíces de $p(x)$ son $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$. Evaluando ahora en la función, se tiene que

$$\begin{aligned} f(2) &= 0, \\ f(3) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que es posible afirmar que el gráfico de f pasa por los puntos $(2,0)$ y $(3,0)$. Además, para saber en qué punto la parábola corta al eje de las ordenadas, basta evaluar la función en $x = 0$ y se obtiene

$$f(0) = 6.$$

Por lo tanto, se puede esbozar un gráfico bastante aproximado de $f(x) = x^2 - 5x + 6$, resultando en

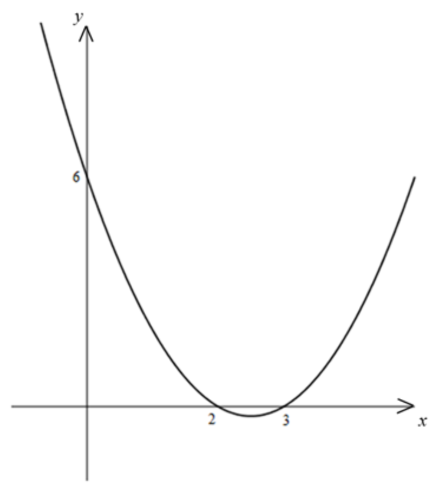

Figura 7.36: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Ahora bien, si se quisiera graficar una función del tipo

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2,$$

no sería posible con las herramientas matemáticas que se cuentan hasta ahora, sin embargo, de todas formas se pueden dar algunas características de cómo sería el gráfico de g.

Al tratarse de una función polinómica de grado 3, se puede deducir que el gráfico de g tendrá una forma similar al gráfico de la función cúbica $f(x) = x^3$, estudiada en la sección 7.1.2. Pero, ¿por qué decir similar y no igual?. En primer lugar, porque la función g posee también un término cuadrático, y en segundo lugar, porque el coeficiente que acompaña a x^3 es distinto de 1.

Otra característica que se puede destacar, es que no se trata de una función par ni impar, por lo que se puede deducir que el gráfico de g no se encontrará centrado en el origen, así como lo está el gráfico de $f(x) = x^3$.

Pero lo que sí se puede determinar, es en qué puntos la función g corta al eje x. Para encontrar dichos puntos, se debe encontrar las raíces del polinomio asociado a la función

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0.$$

Factotizando por x^2, se tiene que $x^2 = 0$ o $\frac{1}{3}x - 1 = 0$, por lo que las raíces son $\alpha_{1,2} = 0$ y $\alpha_3 = 3$. Así, la función g intersecta al eje de las abscisas en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 0)$. Al eje y solo lo intersecta solo en el punto $0, 0$.

Ejercicio: Analice las características de la función

$$f(x) = -x^2 - 6x - 5,$$

y estudie sus raíces. Esboce el gráfico de f, y luego reescriba la función de la forma $f(x) = \pm(x \pm a) \pm b$, de manera que visualice la traslación que sufrió el gráfico de la función $f(x) = x^2$.

Como se observa, conocer las raíces del polinomio permitió saber en qué puntos el gráfico de una función corta al eje de las abscisas, por lo tanto, el haber aprendido sobre raíces de polinomios será de utilidad para los temas que competen a esta monografía.

Aprendido todo lo necesario para trabajar con funciones polinómicas, a continuación se describe el otro tipo de funciones, que se mencionaron al inicio de la sección:

Definición 7.1.3.3: Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$. Si A es un subconjunto de los reales tal que $q(x)$ no tiene raíces en A, es decir, $q(a) \neq 0$ para todo $a \in A$. Entonces se define una nueva función $R(x)$ como

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

para todo x en A, denominada *función racional*.

Son ejemplo de funciones racionales las funciones el tipo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{x^3+1}, \\ g(x) &= \frac{3x^3-27x}{x^2+x-3}, \\ h(x) &= \frac{x^2-4}{x^2+2x+4}. \end{aligned}$$

Las funciones racionales heredan varias de las propiedades de las funciones polinómicas, lo que permitirá obtener características que ayuden a graficarlas. Y así como para funciones polinómicas, para funciones racionales la obtención de raíces se hace fundamental, pues en este caso no solo entregará la intersección con los ejes, sino que además permitira definir el dominio de cada función. Véase el siguiente ejemplo:

Considere la función

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}.$$

Lo primero por hacer es determinar el dominio de la función, pues al tratarse de una función racional, solo estará bien definida para aquellos valores de x en los que el denominador no se haga cero. Por lo tanto, para determinar el dominio de h, hay que excluir las raíces del polinomio del denominador, y al tratarse de un cuadrado de binomio se calcula fácilmente que tiene como raíz al -2. De esta forma, el dominio de la función h corresponde a $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Es importante detenerse en este punto, pues conocido el dominio de una función racional, se puede afirmar que dicha función tendrá una *asíntota vertical* en los puntos en los cuales la función no está definida, en este caso, la asíntota vertical corresponde a la recta $x = -2$. También se observa que h posee una *asíntota horizontal*, pues al tomar valores cada vez más grandes (y también cada vez más pequeños en el sentido negativo), la función se acerca a la recta $y = 1$. El concepto de asíntota se introdujo en la sección 7.1.2., precisamente cuando se estudió el gráfico de la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$, y será clave al momento de esbozar el gráfico de una función racional.

Por otro lado, las raíces del polinomio del numerador corresponden a -2 y 2, pero como -2 no pertenece al dominio de h, solo el valor 2 entrega información relevante, donde podrá comprobar que el gráfico de la función intersecta al eje x en el punto $(2, 0)$, e intersecta al eje y en el punto $(0, -1)$.

La función no es par ni impar, por lo que solo queda darle valores a x, y así esbozar el gráfico de la función h, que queda como

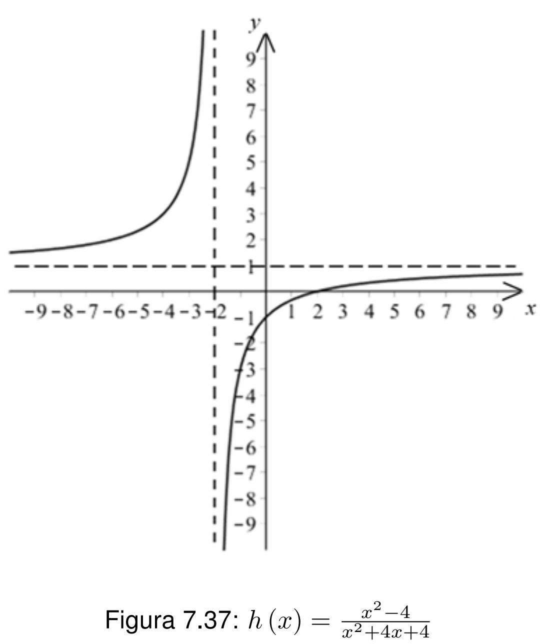

Figura 7.37: $h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

Ejercicio: Estudie las características de la función

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1},$$

como su dominio, asíntotas verticales y horizontales, intersecciones con los ejes coordenados, y luego esboce su gráfico.

Así como las funciones polinómicas y racionales, existe una amplia variedad de funciones que se usan con frecuencia en cálculo, particularmente. Si bien hacer una lista con todas estas funciones sería prácticamente interminable, a continuación se exhibirán algunas de las cuales de utilizarán en reiteradas ocasiones como ejemplos en lo que resta del documento.

7.1.4 Función Valor Absoluto

Considere una función con dominio en los reales y cuyo recorrido corresponde a los reales positivos y el cero. Se define entonces la función *valor absoluto* como

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$

donde

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x > 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

1. $|0| = 0$.
2. $|7| = 7$.
3. $\left|-\frac{1}{11}\right| = -\left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11}$.
4. $\left|0,7\overline{25}\right| = 0,7\overline{25}$.
5. $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$, pues $-\pi < 0$.
6. $\left|1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
7. $\left|\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right| = -\left(\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right) = 1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

El valor absoluto posee tres propiedades principales, correspondientes a:

1. No negatividad: para todo x perteneciente a los reales se satisface
$$|x| \geq 0.$$
2. Homogeneidad: para todo x, y reales se tiene que
$$|xy| = |x|\,|y|\,.$$
3. Desigualdad triangular: para todo x, y reales se tiene que
$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

Demostración:

1. Usando la definición:

   Si x es mayor a cero, entonces $|x| = x \geq 0$.

   Si x es igual a cero, entonces $|0| = 0 \geq 0$.

   Si x es menor a cero, entonces $|x| = -x \geq 0$.

   Por lo tanto, para cualquier real x se tiene que $|x| \geq 0$.

2. Por casos:

   Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$. Así
$$|xy| = xy$$
   y por otro lado
$$|x|\,|y| = xy,$$
   por tanto $|xy| = |x|\,|y|$.

   Si $x < 0$ e $y < 0$, entonces $xy > 0$ y se repite el caso anterior.

   Si $x > 0$ e $y < 0$, entonces $xy < 0$, lo que implica que
$$|xy| = -(xy) = -xy,$$
   y por otro lado, que
$$|x|\,|y| = x(-y) = (-x)\,y = -xy.$$
   Por lo tanto $|xy| = |x|\,|y|$.

   Si $x < 0$ e $y > 0$, entonces $xy < 0$ y se repite el caso anterior.

   De esta forma, para todo par de reales x e y se satisface que $|xy| = |x|\,|y|\,.$

3. Nuevamente, se ve por casos:
   Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $x + y > 0$, así
   $$|x + y| = x + y = |x| + |y| .$$
   Si $x < 0$ e $y < 0$, entonces $x + y < 0$, así
   $$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = -x + -y = |x| + |y| .$$
   Si $x > 0$ e $y < 0$, se tendrán dos subcasos:
   si $x + y > 0$, entonces se tiene que
   $$|x + y| = x + y \leq x + -y = |x| + |y| ,$$
   puesto que $y < 0 < -y$;
   si $x + y < 0$, entonces se tiene que
   $$|x + y| = -(x + y) = -x + -y \leq x + -y = |x| + |y| ,$$
   puesto que $-x < 0 < x$.
   El caso $x < 0$ e $y > 0$ es análogo al anterior. Por lo tanto, efectivamente se cumple que
   $$|x + y| \leq |x| + |y| ,$$
   para todo par de reales x e y.■

De las tres propiedades principales de la función valor absoluto, se desprenden un sinnúmero de propiedades bastante útiles. A continuación se exhibirán algunas de ellas, con la demostración de algunas:

1. Para todo número real x distinto de cero se tiene que
   $$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$
2. Para x e y número reales, tales que $y \neq 0$, se cumple que
   $$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

3. Para cualquier real x

$$|x| = |-x|\,.$$

Demostración:

Si $x > 0$, entonces $-x < 0$, así

$$\begin{aligned} |x| &= x, \\ &= -(-x)\,, \\ &= |-x|\,. \end{aligned}$$

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, así

$$\begin{aligned} |x| &= -x, \\ &= |-x|\,. \end{aligned}$$

El caso cuando $x = 0$ es trivial, por lo tanto, para cualquier real x se tiene $|x| = |-x|\,.$■

4. Para todo par de reales x, y se cumple

$$|x - y| \leq |x| + |y|\,.$$

Demostración:

Se sabe que $|x - y| = |x + (-y)|$, entonces usando desigualdad triangular

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y|\,,$$

pero se acaba de demostrar que $|y| = |-y|$, por lo tanto

$$|x - y| \leq |x| + |y|\,.■$$

5. Para todo par de reales x, y se cumple que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|\,.$$

Demostración:

Considere el valor absoluto de x, y sea y cualquier otro real. Entonces

$$|x| = |x + (-y + y)| = |(x - y) + y|\,,$$

y usando desigualdad triangular se tiene que

$$|x| \leq |x - y| + |y|\,,$$

y restando a ambos lados de la desigualdad por el valor absoluto de y, se obtiene que

$$|x| - |y| \leq |x - y|\,.$$

La demostración de que $|y| - |x| \leq |x - y|$ es análoga a la anterior, solo que se trabaja con $|y + (-x + x)|$. Por lo tanto, queda demostrado que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|\,. \blacksquare$$

6. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales. Se satisface que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\,.$$

7. Sea x un real, y δ otro número real tal que

$$|x| < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad -\delta < x < \delta.$$

8. Sea x un real, y δ otro número real tal que

$$|x| > \delta \quad \Longleftrightarrow \quad x > \delta \;\text{ o }\; x < -\delta.$$

9. Para dos reales cualesquiera x e y, se tiene que

$$x^2 = y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = |y|\,.$$

Demostración:

Se demostrará solo la implicancia hacia la derecha, la otra quedará de ejercicio para el lector. Observe que

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad (x + y)\,(x - y) = 0, \end{aligned}$$

entonces, todos los casos posibles son:

Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $x + y > 0$, y al ser estrictamente mayor a cero, solo puede ocurrir que $x-y=0$, así $x=y$, y al ser ambos positivos, entonces $|x|=|y|$.

Si $x<0$ e $y<0$, entonces $x+y<0$, luego al ser estrictamente menor a cero, solo puede ocurrir que $x-y=0$, y tal como el caso anterior significa que $|x|=|y|$.

Sin pérdida de generalidad, sea $x>0$, si $y<0$, entonces $-y>0$, y ahora $x-y>0$, por lo que solo puede ser $x+y=0$, así $x=-y$, y como y es negativo, significa que $|x|=|y|$. Por lo tanto

$$x^2=y^2 \quad \Rightarrow \quad |x|=|y|\,.\blacksquare$$

10. Sean x e y dos valores reales. Para cualquier valor real positivo ε, tan pequeño como se quiera, se cumple que si $|x-y|<\varepsilon$, entonces $x=y$.

    Demostración:

    Sea ε un real positivo tal que $|x-y|<\varepsilon$, pero suponga que $x\neq y$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x>y$ $(x-y>0)$, y como la diferencia $|x-y|<\varepsilon$ se satisface para cualquier épsilon, considere

    $$\hat{\varepsilon}=\frac{x-y}{2},$$

    entonces $|x-y|<\hat{\varepsilon}$ implica que

    $$|x-y|=x-y<\frac{x-y}{2},$$

    lo que significa que

    $$1<\frac{1}{2},$$

    lo que corresponde a una contradicción, por lo tanto $x=y$.$\blacksquare$

Para finalizar, constrúyase el gráfico de la función valor absoluto:

Observe que el valor absoluto es una función par. En efecto,

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)\,.$$

Por esta razón, su gráfico será simétrico con respecto al eje de las ordenadas, y por lo tanto, basta con dibujar el gráfico para los valores positivos de x. Luego, si x es mayor a cero, entonces $|x|=x$, es decir, la función valor absoluto coincide con la recta identidad, y claramente en $x=0$ se tiene $|0|=0$, por lo que su gráfico para valores de x mayores e iguales a cero corresponde a

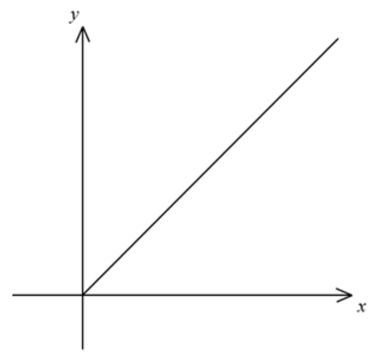

Figura 7.38: Valor absoluto para $x \in [0, \infty)$

Y así, realizando la reflexión con respecto al eje y se obtiene el gráfico de la función valor absoluto en todo su dominio

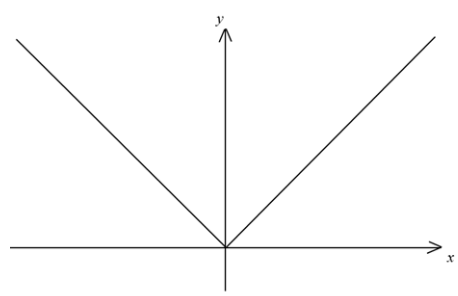

Figura 7.39: Valor Absoluto

DESAFÍO: Considere el desafío de la sección 7.1.2., pero esta vez para la función valor absoluto. ¿Qué ocurre con los gráficos de $|x + c|$ y $|x| + c$, con c en $\mathbb{R}$, en relación con los gráficos de $|x|$?, ¿se puede llegar a las mismas conclusiones a las que llegó en el desafío de la sección 7.1.2?.

7.1.5 Función Signo

La *función signo*, al igual que la función valor absoluto, es una función definida a trozos, cuyo dominio corresponde a todos los reales y su recorrido corresponde al conjunto $\{-1, 0, 1\}$, así

$$sgn : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, 1\},$$

y se define como

$$sgn\,(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \\ 1 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

La función signo tiene la característica de entregar el signo de cualquier número real que se evalúe en ella .

Por otro lado, signo es una función impar, pues si se ve por casos:
Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, así

$$sgn\,(-x) = 1 = (-1) \cdot (-1) = (-1)\, sgn\,(x) = -sgn\,(x)\,.$$

Si $x = 0$, entonces trivialmente

$$sgn\,(-x) = 0 = -sgn\,(x)\,.$$

Si $x > 0$,entonces $-x < 0$ y así

$$sgn\,(-x) = -1 = (-1)\, sgn\,(x) = -sgn\,(x)\,.$$

Por lo tanto, efectivamente sgn es una función impar

$$sgn\,(-x) = -sgn\,(x)\,.$$

Además, como una propiedad interesante de destacar de la función signo, es la posibilidad de escribir cualquier número real x como el producto de la función signo evaluada en x y el valor absoluto de x, esto es

$$x = sgn\,(x) \cdot |x|\,.$$

Demostración:

Véase por casos:

Si $x < 0$, entonces

$$\begin{aligned} sgn\,(x) &= -1, \\ |x| &= -x\,, \end{aligned}$$

así

$$x = sgn\,(x) \cdot |x| = (-1) \cdot (-x) = x.$$

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} sgn\,(x) &= 0, \\ |x| &= 0, \end{aligned}$$

y trivialmente

$$x = sgn\,(x) \cdot |x| = 0.$$

Por último, si $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} sgn\,(x) &= 1, \\ |x| &= x, \end{aligned}$$

así

$$x = sgn\,(x) \cdot |x| = 1 \cdot x = x.$$

Por lo tanto, todo real x es posible escribirlo de la forma

$$x = sgn\,(x) \cdot |x|\,. \blacksquare$$

Para concluir, su gráfico corresponde a lo que se conoce como una *función escalonada*, es decir, un tipo de función definida a trozos, generalmente definida sobre intervalos, tal que posee un número finito de “saltos”, o como se denomina formalmente, un número finito de discontinuidades, y que en los intervalos la función es constante. Es claro entonces por su definición, que el gráfico de la función signo corresponde a

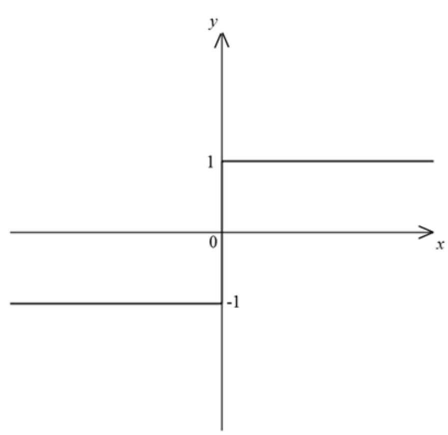

Figura 7.40: Función Signo

una función con dos escalones, en $x = -1$ y en $x = 1$, y un salto en el cero.

Pese a que en un primer repaso la función signo no parece ser de gran relevancia, esta función es utilizada altamente en computación en términos informáticos, más precisamente es usada en lenguaje de programación. Así, la función signo trabaja arrojando un valor según si un número o el resultado de una expresión es menor, mayor o igual a cero.

7.1.6 Funciones Trigonométricas

Considere el plano cartesiano, y sea $\mathcal{U}$ una circunferencia de radio uno y con centro en el origen, cuya ecuación corresponde a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Luego, cada punto $P = (x_0, y_0)$ del plano pertenece a la circunferencia unitaria $\mathcal{U}$ si y solo si satisface

$$x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

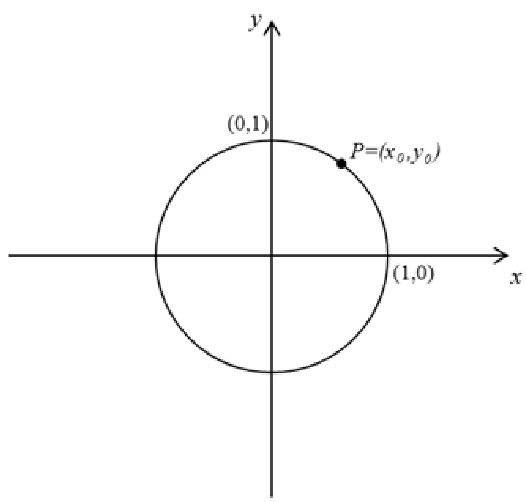

Figura 7.41: Circunferencia Unitaria

Considere ahora una cuerda tangente a $\mathcal{U}$ en el punto $(1, 0)$. A esta cuerda tangente se le hace coincidir con la recta real, graduándose de la misma manera, tal como muestra la siguiente figura

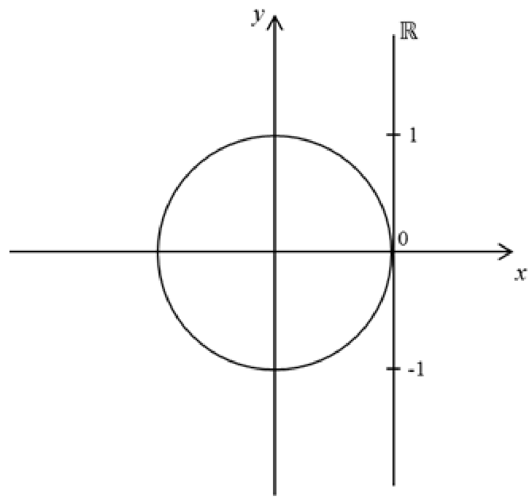

Figura 7.42: Recta tangente a $\mathcal{U}$

Entonces, si se “enrolla” la recta tangente sobre $\mathcal{U}$, es posible asociar a todo número real θ un punto P_θ en la circunferencia unitaria, tal como muestra la figura 7.43

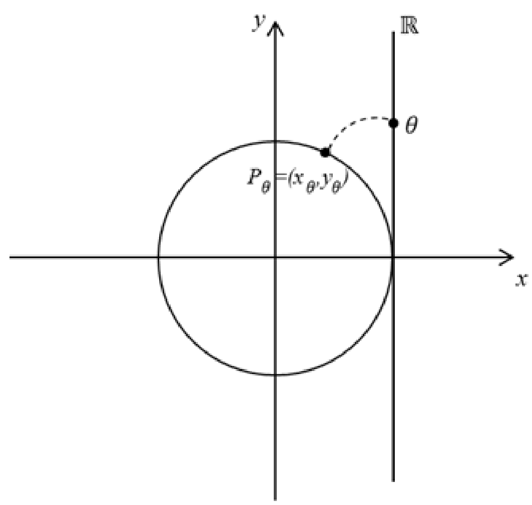

Figura 7.43: θ asociado a P_θ

Este hecho queda expresado como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \theta & \mapsto & P_\theta = (x_\theta, y_\theta) \end{array}$$

De esta forma, surgen dos funciones importantes definidas como:

La función *seno*

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \sin\theta = y_\theta \end{aligned}$$

La función *coseno*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \cos\theta = x_\theta \end{aligned}$$

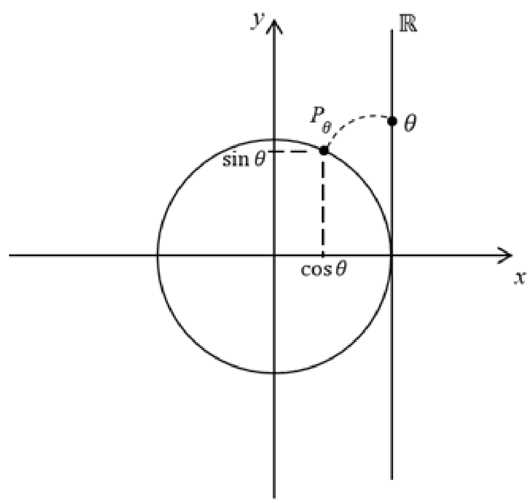

Figura 7.44: Funciones seno y coseno en $\mathcal{U}$

De las definiciones, es posible concluir algunos hechos trivialmente:

1. Si $\theta = 0$, entonces $P_\theta = (1, 0)$, por lo que

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, \\ \cos 0 &= 1. \end{aligned}$$

2. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir, si θ corresponde al ángulo de 90 grados, entonces $P_\theta = (0, 1)$, por lo que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

3. De lo anterior y solo observando la circunferencia unitaria, es posible concluir que

   (a) Para $\theta = \pi$, $P_\theta = (-1, 0)$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \sin \pi &= 0, \\ \cos \pi &= -1. \end{aligned}$$

   (b) Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $P_\theta = (0, -1)$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

   (c) Nótese que $\theta = 2\pi = 0$, lo que significa que la cuerda da “una vuelta completa” a la circunferencia, por tanto nuevamente

$$\begin{aligned} \sin 2\pi = \sin 0 &= 0, \\ \cos 2\pi = \cos 0 &= 1. \end{aligned}$$

4. Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, es decir, si θ corresponde al ángulo de 45 grados, entonces se observa que

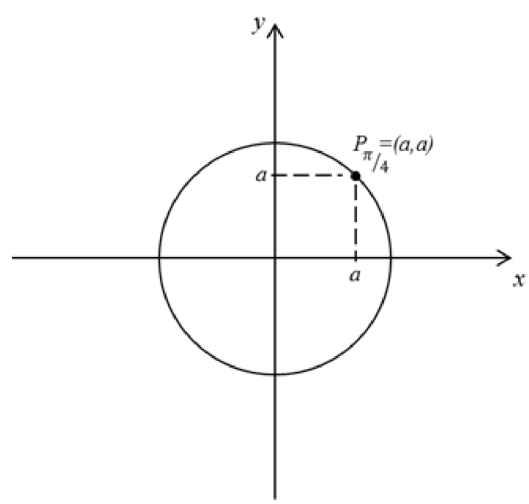

Figura 7.45: Ángulo $\frac{\pi}{4}$

$P_{\frac{\pi}{4}}$ pertenece a $\mathcal{U}$, entonces satisface la ecuación de la circunferencia unitaria

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= 1, \\ a^2 &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $P_{\frac{\pi}{4}}$ está en el primer cuadrante, entonces la solución negativa de la ecuación anterior queda descartada, así

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego

$$P_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

por lo que

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Observación 7.1.6.1: De lo observado en el item tres y de los ángulos que se pueden extraer de la circunferencia unitaria, se concluyen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2\pi) &= \sin\theta, \\ \cos(\theta + 2\pi) &= \cos\theta, \end{aligned}$$

para cualquier real θ. Por este motivo se dice que las funciones seno y coseno son *funciones periódicas de periodo* 2π.

Otro hecho importante que se puede extraer de la definición, resulta ser que, para todo $P_\theta = (x_\theta, y_\theta)$ en la circunferencia unitaria se sabe que

$$\begin{aligned} \sin\theta &= x_\theta, \\ \cos\theta &= y_{\theta,} \end{aligned}$$

entonces, al pertenecer a $\mathcal{U}$, las funciones trigonométricas también satisfacen su ecuación, esto es

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

obteniéndose así la llamada *Relación Fundamental de la Trigonometría*, la identidad trigonométrica más famosa y a la vez más usada.

Existen también otras funciones trigonométricas igual de importantes que el seno y el coseno, las que se presentarán a continuación:

1. Sea θ un real tal que $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ tiene primera coordenada no nula, entonces se define la función *tangente* como
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$
Como es necesario que $\cos\theta \neq 0$, es claro que el dominio de la tangente son aquellos reales para los cuales el coseno no sea cero, y el coseno se anula para
$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$
para todo entero k, por lo que la tangente está definida en
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}.$$

2. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ tiene primera coordenada no nula. Entonces se define la función *secante* como
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$
es decir, corresponde al recíproco de la función coseno. Nuevamente es necesario que $\cos\theta \neq 0$, por tanto el dominio de la función secante coincide con el de la función tangente, así
$$\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}.$$

3. Sea θ un número real tal que $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ tenga segunda coordenada no nula. Se define la función *cosecante* como
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},$$
es decir, corresponde al recíproco de la función seno. En este caso, se precisa que el seno de θ sea distinto de cero, y el seno se anula para
$$\theta = k\pi,$$
con k un entero. Por lo tanto, la cosecante está definida como
$$\csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}.$$

4. Por último, para cualquier real θ tal que $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ tenga segunda coordenada no nula,

se define el recíproco de la tangente, la *cotangente* como

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Así, el dominio de la cotangente son aquellos valores para los cuales el seno no se anula, por lo tanto

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z}\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}.$$

Los gráficos de las funciones seno y coseno se vieron en la sección 7.1.2 de gráficos, por lo que ahora se verán los gráficos de las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente.

1. Considere el punto $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ ubicado en el primer cuadrante sobre la circunferencia unitaria, tal que $\cos\theta \neq 0$. Observe que el punto $P_{\theta+\pi}$ queda ubicado en el tercer cuadrante (ver figura 7.46)

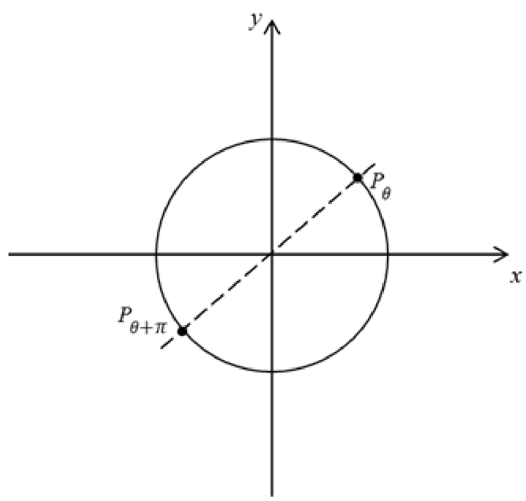

Figura 7.46: P_θ y $P_{\theta+\pi}$

Por lo que

$$\begin{aligned} P_{\theta+\pi} &= (\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)), \\ &= (-\cos\theta, -\sin\theta). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\tan(\theta+\pi) &= \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)},\\ &= \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta},\\ &= \tan\theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función tangente tiene período π, y en consecuencia

$$\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta,$$

para cualquier entero k y θ en el dominio de la tangente. Basta entonces con dibujar la tangente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Por otra parte, la tangente es una función impar, pues

$$\begin{aligned}\tan(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)},\\ &= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta},\\ &= -\tan\theta,\end{aligned}$$

así, dibujando el gráfico en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, el resto del gráfico, en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, se obtiene por reflexión con respecto al origen. Además, la tangente es una función creciente en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obteniéndose entonces

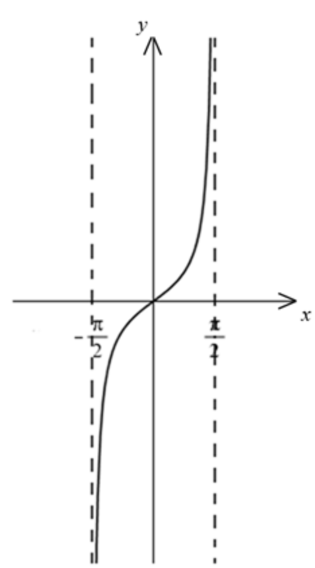

Figura 7.47: Tangente en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

donde la función tendrá asíntotas en

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el gráfico de la función tangente en todo su dominio, corresponde a

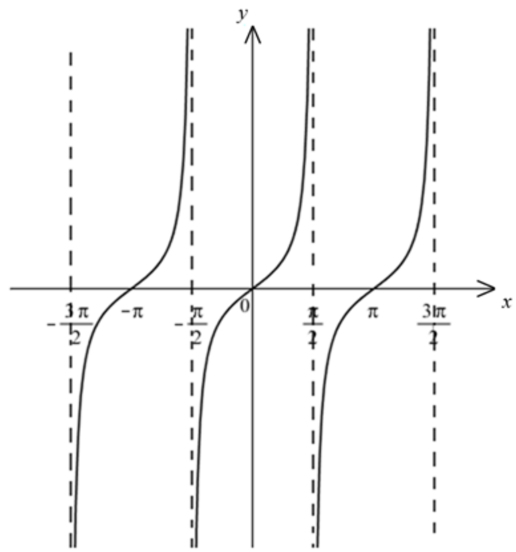

Figura 7.48: Función Tangente

2. Al ser la secante la recíproca del coseno, ésta hereda algunas de las propiedades del coseno, como el hecho de ser también una función par y de período 2π. Además, al igual que la tangente, tendrá asíntotas en

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

para cada entero k. Así

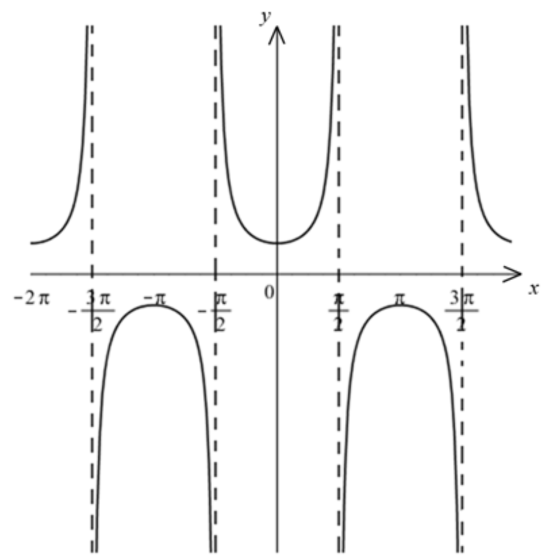

Figura 7.49: Función Secante

3. La cosecante hereda propiedades de la función seno, siendo también una función impar y de período 2π. Además, tendrá asíntotas en

$$x = k\pi,$$

para cada k entero, así

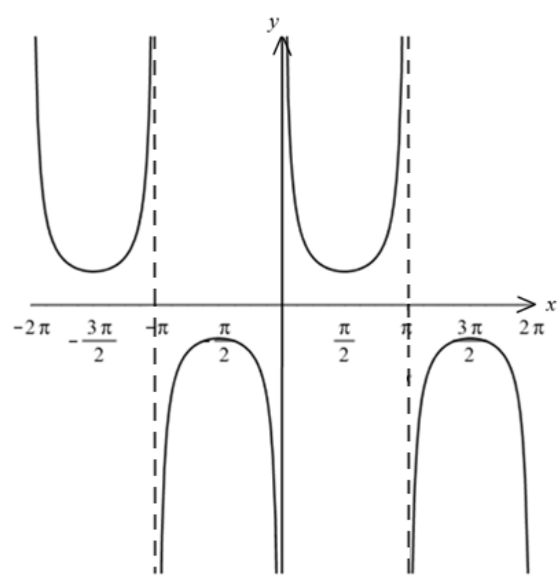

Figura 7.50: Función Cosecante

4. La cotangente, al igual que la tangente, es una función impar, de período π y con asíntotas en

$$x = k\pi,$$

para todo entero k. Así

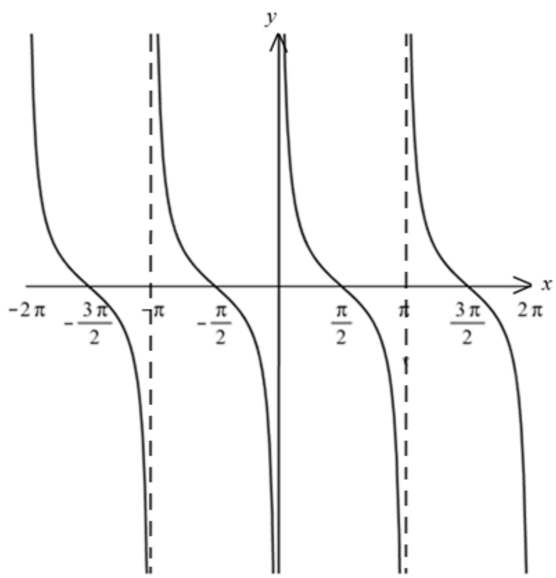

Figura 7.51: Función Cotangente

Para finalizar, se verán unas cuántas identidades trigonométricas más, por su recurrente uso en diversos contextos.

Si la ecuación de la Relación Fundamental de la Trigonometría se divide por $\cos^2\theta$, para valores de θ distintos de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con k un entero, se consigue

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$

y si se divide por $\sin^2\theta$, para valores de θ distintos de $k\pi$ con k un entero, se consigue

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta.$$

Para concluir, las fórmulas para la suma y diferencia de ángulos vienen dadas por

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

DESAFÍO: Usando las tres funciones trigonométricas principales (es decir, las funciones seno, coseno y tangente), intente esbozar los gráficos de $f(2x)$ y $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ para cada una de ellas. ¿Qué es lo que ocurre con estos nuevos gráficos en comparación a sus respectivos gráficos originales?. Y si grafica $f(3x)$ y $f\left(\frac{1}{3}x\right)$, ¿qué ocurre?. Compare los gráficos obtenidos con los originales vistos en esta sección, y saque conclusiones para los gráficos de funciones del tipo $f(cx)$, cuando $0 < c < 1$ y cuando $c > 1$, ¿qué podría decir para los casos generales?, ¿sería posible extender las conclusiones para las funciones estudiadas en la sección 7.1.2.?

Aunque quizás parezca no tener mucho sentido estudiar funciones del tipo $f(cx)$, puesto que se podría considerar $cx = z$, con z real, y asi redifinir la función como $f(z)$ y trabajar como de costumbre, considerar funciones expresadas de la forma $f(cx)$ resulta bastante útil, por ejemplo en física, en donde la solución general de la ecuación que rige el comportamiento de un oscilador armónico simple se expresa como

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t),$$

donde a y b representan constantes reales que se determinan según las condiciones iniciales del problema, y ω_0 está relacionada con el periodo del movimiento, representando la frecuencia natural del sistema.

7.1.7 Función Potencia

Una función f tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x^n,$$

con n un entero positivo, se conoce como *función potencia de* x y no es más que un caso particular de las funciones polinómicas, introducidas en la sección 7.1.3. A pesar de parecer solo un caso especial de polinomios, no se trabajará de la misma manera que se vio anteriormente.

En primer lugar, es necesario precisar que las potencias de un número corresponden a multiplicaciones sucesivas del mismo. Esto es fácil de observar para las primeras potencias

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= x^1 \cdot x, \\ x^3 &= x^2 \cdot x, \\ x^4 &= x^3 \cdot x. \end{aligned}$$

Si bien la expresión para x^n, con n un entero positivo, parece inmediata, a saber

$$x^n = x^{n-1} \cdot x,$$

esta conjetura no tendría más respaldo que una justificación heurística del procedimiento previo, por esta razón se debe demostrar usando inducción sobre n:

Para $n = 1$ está definido que $x^1 = x$. Suponga que para cualquier entero positivo k se satisface

$$x^k = x^{k-1} \cdot x.$$

Basta demostrar que la fórmula se satisface para $k+1$. Pero esto se cumple trivialmente, por la fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k \cdot x, \\ &= \left(x^{k-1} \cdot x\right) \cdot x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra por inducción que x^n está bien definida para cada entero positivo n.

A continuación, se verán algunas de las propiedades más importantes de las potencias:

1. Para cualquier número x distinto de cero se define su potencia cero como

$$x^0 = 1.$$

2. Las potencias del cero, para todo entero positivo n distinto de cero, se definen como

$$0^n = 0.$$

3. Para todo entero positivo, las potencias del uno se definen como

$$1^n = 1.$$

4. Para cualquier real x se define el producto de potencias como

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},$$

con m y n enteros positivos.

5. Para cualquier real x, distinto de cero, se define la división de potencias como

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n},$$

con m y n enteros positivos.

6. Se define la potencia de la potencia de un real x como

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n},$$

con m y n enteros positivos.

7. Sean x e y dos números reales. Se define la potencia de un producto como el producto de las potencias, es decir

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n,$$

para n entero positivo.

8. Sean x e y dos números reales. Se define la potencia de una división como la división entre las potencias, esto es

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},$$

para n entero positivo.

9. Si x es un real positivo, entonces $-x < 0$. Luego, todo número negativo elevado a una potencia par resultará positivo, es decir

$$(-x)^{2n} = x^{2n},$$

para n entero positivo.

Observe que la primera propiedad puede considerarse como un axioma, por lo que no se demuestra y se asume cierta. El resto de las propiedades se demuestran fácilmente mediante inducción, sin embargo, se demostrará el producto de potencias a modo de ilustración, puesto que el hecho de tener dos enteros naturales en juego podría causar confusión al momento de aplicar la inducción:

4. *Demostración:*

Se debe demostrar que para todo m entero positivo y para todo n entero positivo, se cumple que

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},$$

para cualquier real x. Para usar inducción, basta con fijar una de las variables enteras, dígase la variable m, y aplicar inducción solo sobre la otra variable, n. De esta forma, para $n = 1$ se tiene por un lado que

$$x^m \cdot x^1 = x^m \cdot x,$$

y por otro lado, según la definición de potencias se tiene que

$$x^{m+1} = x^m \cdot x,$$

por lo que la proposición es verdadera para $n = 1$. Admita verdadera la proposición para k un entero positivo, esto es, se cumple que

$$x^m \cdot x^k = x^{m+k},$$

con m un entero positivo fijo. Basta entonces demostrar que la propiedad es cierta para $k + 1$. Luego, para cualquier x real y m entero positivo se tiene que

$$x^m \cdot x^{k+1} \quad = \quad x^m \cdot \left(x^k \cdot x\right),$$

por definición de potencias;

$$x^m \cdot \left(x^k \cdot x\right) \quad = \quad \left(x^m \cdot x^k\right) \cdot x,$$

por asociatividad;

$$\left(x^m \cdot x^k\right) \cdot x \quad = \quad x^{m+k} \cdot x,$$

por la hipótesis de inducción;

$$x^{m+k} \cdot x \quad = \quad x^{(m+k)+1},$$

por definición de potencias;

$$x^{(m+k)+1} \quad = \quad x^{m+(k+1)},$$

por asociatividad, ahora aplicada a los valores enteros del exponente. Por consiguiente, la proposición se cumple para $k+1$, suponiendo que se satisface la proposición para k. Por lo tanto, queda demostrado por inducción que

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},$$

para todo m y n enteros positivos y para cualquier real x.■

El gráfico de la función potencia es bastante sencillo de obtener para cualquiera de las potencias enteras positivas. En primer lugar, note que la función potencia es creciente para valores positivos de x, es decir

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1^n < x_2^n,$$

para todo entero positivo n. Sin embargo, observe que si n es un entero positivo par, entonces

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x),$$

para x mayores que cero (de hecho, se cumple para cualquier real x, aplicando aquí la propiedad 9, pero interesan los valores de $x > 0$ para usar la monotonía de la función para dichos valores). Así, f es una función par, por tanto al dibujar su gráfico para valores positivos de x, el resto se obtiene por reflexión con respecto al eje y, tal como muestra la figura 7.52 para algunas potencias positivas pares de x.

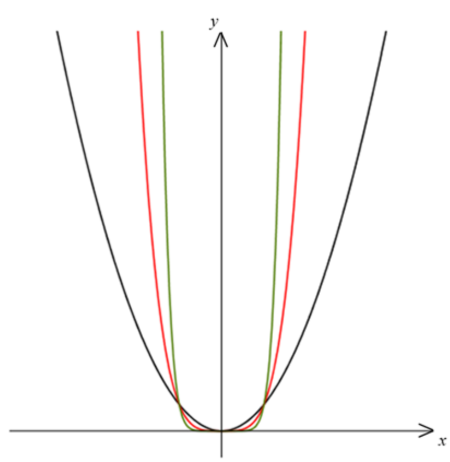

Figura 7.52: x^2 gráfico en negro; x^4 gráfico en rojo; x^8 gráfico en verde

Ahora bien, si n es un entero positivo impar entonces

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x),$$

para x mayores que cero. Así, f es una función impar cuando n es impar, por tanto al dibujar su gráfico para valores positivos de x, el resto se obtiene por reflexión con respecto al origen, tal como muestra la figura 7.53 para algunas potencias positivas impares de x.

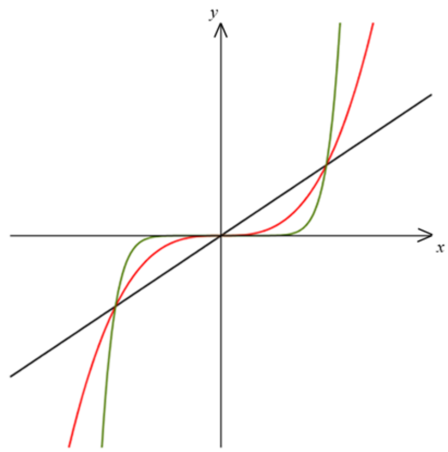

Figura 7.53: x gráfico en negro; x^3 gráfico en rojo; x^9 gráfico en verde

Por último, deténgase un momento en la propiedad 5 para potencias, que dice que

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n},$$

para todo real x distinto de cero, y enteros positivos m y n. ¿Qué ocurre si n es mayor que m?, pues lo que ocurre es que x queda elevado a un número negativo, por lo que la pregunta indicada es ¿cómo se define la potencia negativa de un número real? Y es lo que se pretende definir a continuación:

Sea x un número real distinto de cero y n un entero positivo, tal que $-n$ corresponde al inverso aditivo de n y por ende $-n < 0$. Se define la potencia de x elevado a $-n$ como el inverso multiplicativo de x elevado a n, es decir

$$f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

En primer lugar, observe que tal como ocurre para la división de potencias, el real x debe ser distinto de cero, en este caso por la definición de potencia negativa (el 0 no tiene inverso multiplicativo). Y en segundo lugar, observe que si $-n$ representa un entero negativo, entonces $-(-n) = n$ es un entero positivo, por lo tanto, todas las propiedades vistas para las potencias positivas de x, son también válidas para las potencias negativas de x, claramente a excepción de la propiedad 2, pues por definición x debe ser distinto de cero para considerar sus potencias negativas. De esta forma, utilizando la propiedad 8 que dice que la potencia de una división es la división de las potencias y la propiedad 2 que dice que $1^n = 1$, se reescribe la definición como

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

con x un real distinto de cero y n un entero positivo.

Por otra parte, la paridad e imparidad de la función no se ve afectada por considerar ahora el recíproco de x a la n, por lo que se mantiene el hecho que si n es un entero positivo par, entonces para valores positivos de x

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{x^n} = f(x),$$

es decir, f es una función par, y por ende, basta con graficar la función para $x > 0$, pues el resto del gráfico se obtiene reflejando con respecto al eje y. Y si n es un entero positivo impar, entonces

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{-x^n} = -f(x),$$

es decir, f es una función impar, por lo que su gráfico es simétrico con respecto al origen.
Sin embargo, para poder graficar y hacer las respectivas reflexiones, ya sea con respecto al eje de las ordenadas o al origen, según la paridad o imparidad de la función respectivamente, también es necesario saber si la función es creciente o decreciente para valores positivos de x. Y en este caso, note que si x_1 y x_2 son dos valores reales mayores estrictos que cero, se tiene

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_1^n} > \frac{1}{x_2^n},$$

es decir, f corresponde a una función decreciente para valores positivos de x. Por lo tanto, algunos gráficos resultan ser

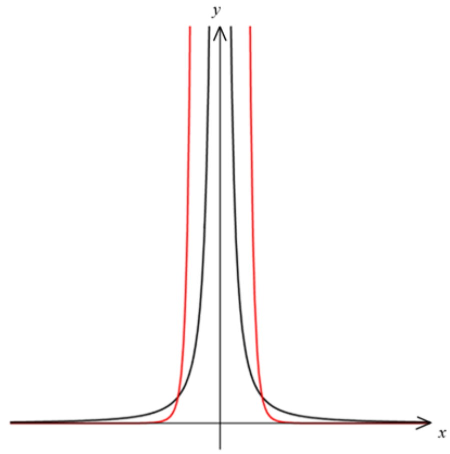

Figura 7.54: $\frac{1}{x^2}$ gráfico en negro; $\frac{1}{x^8}$ gráfico en rojo

para las potencias pares de x. Y resultan en

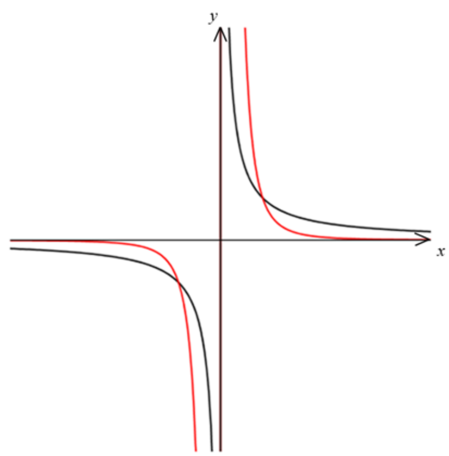

Figura 7.55: $\frac{1}{x}$ gráfico en negro; $\frac{1}{x^3}$ gráfico en rojo

para las potencias impares de x. Observe como para ambos casos los ejes coordenados corresponden a asíntotas para las funciones, esto porque $\frac{1}{x^n}$ jamás va a ser igual a cero, ni x puede ser igual a cero, sea cual sea el n entero positivo. No obstante, es posible acercarse tanto como se desee a 0 mediante valores arbitrariamente pequeños de x, o en el caso contrario, acercarse tanto como se desee a 0 mediante valores arbitrariamente grandes de x.

Para resumir esta sección, se ha presentado la existencia, definición, propiedades y gráficos más básicos para una forma más general de la función potencia, siendo esta entonces

$$f(x) = x^n,$$

para x un real distinto de cero y n un número entero, y definiéndose $0^n = 1$, para todo n entero distinto de cero. En una sección se retomará la función potencia pero generalizada, para describir cómo se comporta con exponentes racionales y reales.

7.2 La Derivada de una Función Real

La inclinación que tiene una recta con respecto al eje de las abscisas es lo que se conoce como *pendiente de una recta* y se caracteriza por el ángulo que forma con dicho eje. Una recta que forme un ángulo agudo (ángulo mayor a $0°$ y menor a $90°$), en sentido antihorario, con respecto al eje x resultará con una pendiente positiva (ver figura 7.56).

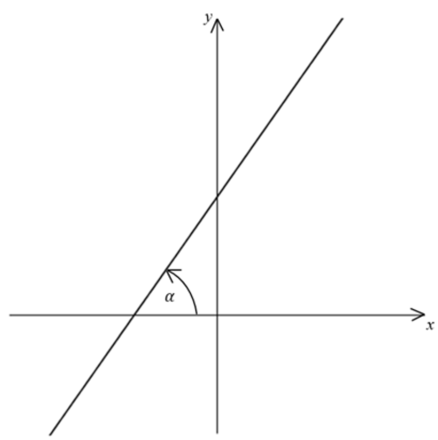

Figura 7.56: Pendiente positiva

Una recta que forme un ángulo obtuso (ángulo mayor a $90°$ y menor a $180°$), en sentido antihorario, con respecto al eje x resultará con una pendiente negativa (ver figura 7.57).

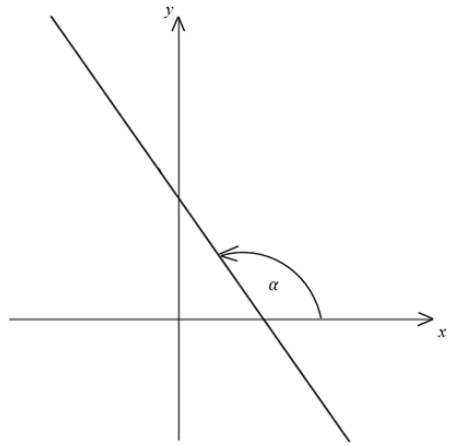

Figura 7.57: Pendiente negativa

Se dice que una recta tiene pendiente nula cuando resulta ser paralela al eje x (rectas paralelas son aquellas que no se cortan en ningún punto, o aquellas que coinciden exactamente). Ver figura 7.58.

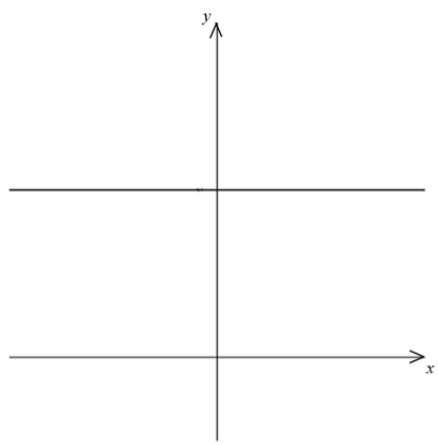

Figura 7.58: Pendiente nula

Para rectas paralelas al eje de las ordenadas no se considera su pendiente, pues dichas rectas no corresponden a funciones.

Luego, para una recta cualquiera $ax + by + c = 0$, con a, b, c números reales, se consideran dos puntos pertenecientes a ella, sean estos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, y se obtiene la pendiente de la recta, denotada por m, como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Así, si se tiene la recta $\mathcal{L} : 3x + 4y - 5 = 0$ de la cual se sabe que pasa por los puntos $P = (-1, 2)$ y

$Q = (-5, 5)$, al calcular su pendiente se obtiene

$$m = \frac{5-2}{-5+1} = -\frac{3}{4},$$

de esta forma se concluye que la recta $\mathcal{L}$ forma un ángulo obtuso con respecto al eje de las abscisas, pues su pendiente resultó ser negativa .

En física, la cinemática corresponde a la descripción del movimiento de un cuerpo, pero sin considerar las causas que lo producen.

En la naturaleza, hay diversos cuerpos que se mueven, pero aunque se quiera enfocar en un solo cuerpo, la descripción completa de su movimiento sería complicada de realizar si no se consideraran simplificaciones generales para el estudio del movimiento. En primer lugar, se considera a todo cuerpo, independiente de su tamaño y forma, como una partícula. Así, la trayectoria que realiza una hormiga desde que sale de su hormiguero hasta la primera miga de pan que encuentra en su camino, es descrita de la misma forma como la trayectoria que realiza la Tierra alrededor del Sol, pues en ambos casos (la hormiga y la Tierra) los cuerpos son considerados como partículas puntuales . Además, en primera instancia solo se consideran trayectorias en línea recta, de esta forma toda partícula se moverá sobre una recta, la que se representa con el eje x, para lo cual se elige un origen que indicará el inicio del sistema de medición, traduciendo trayectorias positivas como desplazamientos hacia la derecha del origen, y trayectorias negativas como desplazamientos hacia la izquierda del origen, como muestra la figura 7.59.

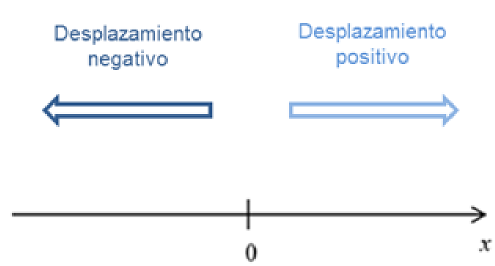

Figura 7.59: Eje x de la trayectoria en línea recta

De esta forma, la posición de una partícula en un determinado tiempo t, queda determinada simplemente por un número en el eje x. La descripción de su movimiento será completa si se conoce la función $x(t)$, que indica la posición de la partícula en cualquier tiempo t y que, al tratarse de movimientos sobre una línea recta, la función $x\,(t)$ resultará ser una recta o diferentes rectas definidas por tramos de tiempo. Si se conoce la posición de la partícula en dos tiempos t_1 y t_2 diferentes, es posible determinar cuánto se desplazó en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ realizando la diferencia entre ambas posiciones

$$\Delta x(t) = x(t_2) - x(t_1).$$

Sin embargo, conocer la posición y el desplazamiento de una partícula no es suficiente para describir a cabalidad su movimiento, pues no es lo mismo caminar a través de una cancha de fútbol que cruzarla en motocicleta. Por esta razón es que parece necesaria una definición de *velocidad*, en este caso la conocida como *velocidad media* $\overline{v}$, la cual se obtiene como el cuociente entre el desplazamiento que tuvo la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, y dicho intervalo de tiempo, es decir

$$\overline{v}(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La velocidad media entrega una información global sobre el movimiento que realiza una partícula en un intervalo de tiempo dado, sin pretender dar detalles del aumento o disminución de la rapidez con que se desplaza la partícula. Pero de lo que se puede estar seguro, es que si la velocidad es constante será igual a la velocidad media, pues el cuociente entre desplazamiento y tiempo resultará siempre el mismo. Visto de otra forma, la velocidad media corresponde a la pendiente de la recta que representa la trayectoria en línea recta de una partícula, es decir, la pendiente de la función $x(t)$. Véase el gráfico de la figura 7.60, que representa la trayectoria en línea recta de una partícula durante 40 segundos, medida en metros.

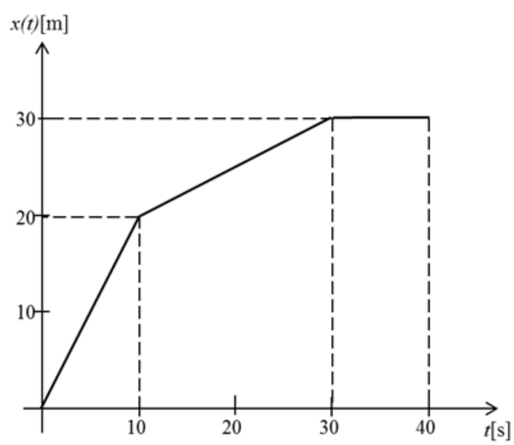

Figura 7.60: Gráfico posición versus tiempo

Como se observa, la partícula tuvo tres clases diferentes de desplazamientos. Durante los primeros 10 segundos tuvo un desplazamiento de 20 metros en línea recta, pues

$$x_1(t) = x_1(10) - x_1(0) = 20\,[\mathrm{m}] - 0\,[\mathrm{m}] = 20\,[\mathrm{m}],$$

entonces, la velocidad media que tuvo la partícula en ese periodo de tiempo se calcula como la pendiente de la recta que representa el movimiento en los 10 segundos iniciales

$$\overline{v}_1(t) = \frac{20\,[\mathrm{m}] - 0\,[\mathrm{m}]}{10\,[\mathrm{s}] - 0\,[\mathrm{s}]} = 2\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Desde los 10 segundos hasta los 30 segundos, la partícula siguió avanzando en su camino, pero esta vez de una forma diferente, pues la recta que describe su movimiento en este intervalo de tiempo tiene una inclinación diferente a la primera, $x_1(t)$, lo que insinúa que su velocidad media también es diferente. Su desplazamiento fue de

$$x_2(t) = x_2(30) - x_2(10) = 30\,[\mathrm{m}] - 20\,[\mathrm{m}] = 10\,[\mathrm{m}],$$

resultando en una velocidad media de

$$\overline{v}_2(t) = \frac{30\,[\mathrm{m}] - 20\,[\mathrm{m}]}{30\,[\mathrm{s}] - 10\,[\mathrm{s}]} = 0,5\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

En el último intervalo de tiempo, desde los 30 segundos hasta los 40 segundos, se observa que la recta que describe el movimiento de la partícula resulta ser una recta paralela al eje del tiempo, lo que se traduce en que en dicho intervalo de tiempo la partícula no se movió de su última posición, es decir

$$x_3(t) = x_3(40) - x_3(30) = 30\,[\mathrm{m}] - 30\,[\mathrm{m}] = 0\,[\mathrm{m}],$$

por esta razón, su velocidad media resulta ser 0, pues la pendiente es nula cuando se trata de una recta horizontal, y efectivamente

$$\overline{v}_3(t) = \frac{30\,[\mathrm{m}] - 30\,[\mathrm{m}]}{40\,[\mathrm{s}] - 30\,[\mathrm{s}]} = 0\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Como ya se ha visto, determinar la pendiente de funciones lineales no resulta de mayor complejidad: basta con conocer dos puntos pertenecientes a la recta y realizar el cuociente entre la diferencia de las coordenadas de las ordenadas y la diferencia de las coordenadas de las abscisas, respectivamente. Sin embargo, el universo de las funciones no puede reducirse simplemente a las rectas, tal como se ha visto a lo largo del documento. A toda función que no sea poligonal (como por ejemplo la función valor absoluto o el gráfico de la figura 7.60), se denominará de manera general por *curva*. Como ejemplos de curvas se pueden mencionar las funciones polinómicas de grado mayor o igual a dos, las funciones trigonométricas y las funciones potencias, entre otras.

Una curva, a diferencia de una recta, tiene una dirección y una pendiente diferente en cada punto perteneciente a ella, por esta razón no es posible analizar el comportamiento de una curva de la misma manera como se analizaban las rectas. Para saber cuál es la pendiente de una curva, por ejemplo, en un punto determinado de ella, es necesario encontrar la recta que pasa por dicho punto y a esta recta encontrarle la pendiente. Dicho en otras palabras, se trata de determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado. No obstante, la construcción de una recta que tenga solo un punto en común con la curva no es inmediata. Para su construcción, guíese con el siguiente proceso intuitivo (Courant and McShane, 1934)

Considere un curva $\mathcal{C}$ y fije en ella un punto P tal que la curva sea *suave* en dicho punto, es decir, un punto donde la curva no cambie repentinamente de dirección (al finalizar esta construcción, se definirá concretamente a qué se refiere con curvas suaves). Y además, considere otro punto Q perteneciente a la curva, diferente de P, y trace la recta que une P con Q (ver figura 7.61).

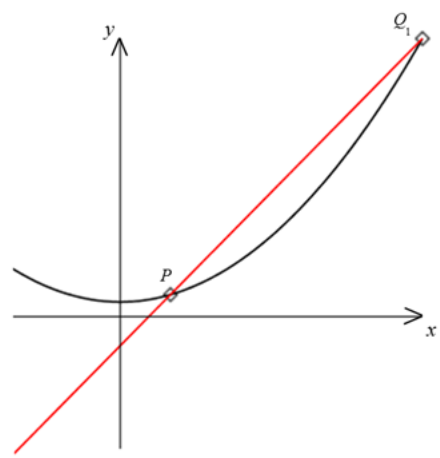

Figura 7.61: Secante PQ_1

De esta forma se obtiene una secante a la curva, mas no una tangente, pues la recta que se construyó intersecta a dos puntos de la curva. Ahora, deslice a través de la curva el punto Q, de manera que se acerque al punto P, luego denote a este nuevo punto como Q_2, y a su posición anterior entonces denote por Q_1. Trace la recta que une a P con Q_2. De la figura 7.62 se observa que nuevamente se obtiene una secante a la curva.

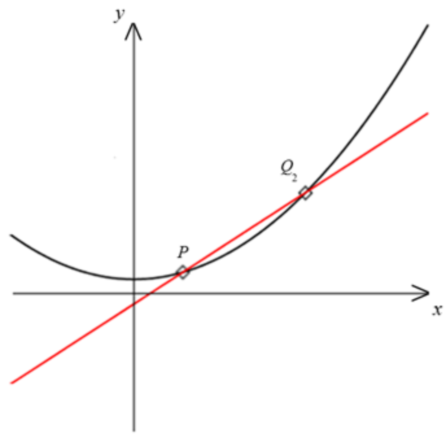

Figura 7.62: Secante PQ_2

Una vez más, deslice el punto Q sobre la curva aproximándose al punto P, determinando así el punto Q_3 y trace la recta que une P con Q_3, resultando ser nuevamente una secante (ver figura 7.63).

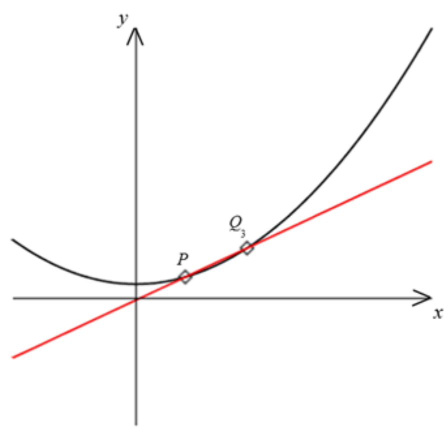

Figura 7.63: Secante PQ_3

Repitiendo el proceso, ubicando el punto Q cada vez más cerca del punto fijo P, se obtiene un conjunto de puntos $\{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}$, los cuales van formando, al unirlos con el punto P, un conjunto de rectas secantes a la curva, rectas que en algún momento van a converger a la recta tangente que se desea obtener. En resumen, la recta tangente se obtiene en la posición límite de la recta secante PQ, es decir, cuando Q es un punto de la curva $\mathcal{C}$ que se aproxima indefinidamente al punto fijo P, deslizándose sobre la curva por $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, produciendo así sucesivas rectas secantes a la curva (representadas por rectas rojas en la figura 7.64) que convergen finalmente a la recta tangente en el punto P (recta verde como se puede apreciar en la figura 7.64).

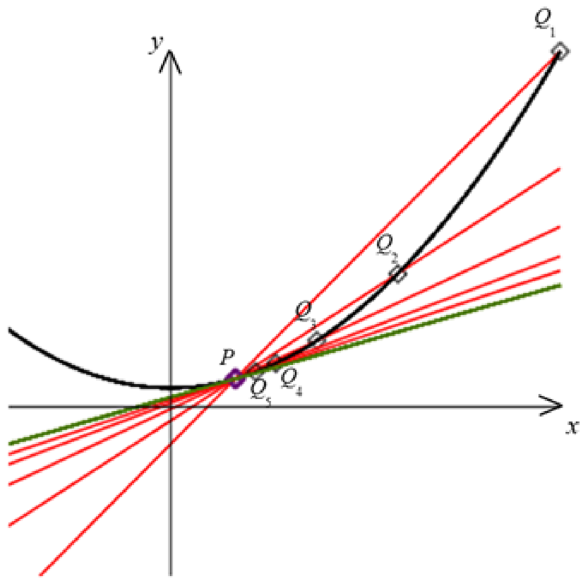

Figura 7.64: Secantes convergiendo a la tangente

De esta forma, si se representa a la curva $\mathcal{C}$ mediante una función $f(x)$ y se fijan las coordenadas del punto fijo P como $P = (x_0, y_0)$, entonces la recta secante a $f(x)$ tendrá una pendiente expresada como

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

donde $(x, f(x))$ representa las coordenadas del punto Q que se desplaza a través de la curva.

A continuación, observe la figura 7.65, donde se denota por α el ángulo que forma la recta tangente a la curva y el eje x, y por α_1 el ángulo que forma la secante a la curva y el eje x. Como se dijo anteriormente, cuando Q es un punto sobre la curva que se acerca indefinidamente al punto fijo P, las rectas secantes convergen en la recta tangente, y esto traducido a un lenguaje analítico no es más que

$$\lim_{Q \to P} \alpha_1 = \alpha.$$

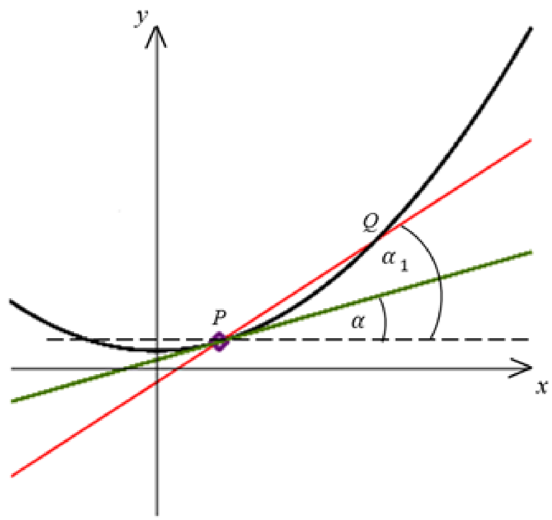

Figura 7.65: Recta secante y recta tangente

Ahora, si se consideran las coordenadas que se asignaron a los puntos en cuestión, a saber $P = (x_0, f(x_0))$ (donde $y_0 = f(x_0)$) y $Q = (x, f(x))$ (donde $y = f(x)$), se desprende que

$$\tan \alpha_1 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

y así, mediante el proceso de límite visto anteriormente, se tiene que

$$\tan \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

siendo entonces esta expresión la que determina analíticamente lo que ya se construyó y mostró gracias a la intuición geométrica, es decir, la expresión formal del hecho de que las rectas secantes convergen a una recta tangente en un punto determinado $(x_0, f(x_0))$ en una curva.

Este límite es lo que se conoce como *derivada*, y más precisamente, como *derivada de la función real* $y = f(x)$ *en el punto* $(x_0, f(x_0))$, la cual tiene diversas notaciones

$$y' = f'(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx} f(x) \ ,$$

siendo la primera notación la que se ocupará en el resto del documento, quedando establecido que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \, .$$

Observación 7.2.1: Cuando se hacía referencia a una *curva suave*, era para indicar aquellas funciones cuyo gráfico no posee puntas en ningún valor de su dominio, y que por lo tanto, son derivables. Como ejemplo de funciones suaves, se puede mencionar las funciones trigonométricas y las funciones polinómicas.

No obstante, existe otra manera de expresar el límite que define la derivada, y que también es bastante usada. Supóngase que h es un número real cuyo valor absoluto es tan pequeño como se desee, de tal forma que si se escribe $x_0 + h$ se entienda como un número real muy cercano a x_0 (infinitesimalmente cercano a x_0), luego considerando esta idea para el punto Q, se puede reemplazar x por $x_0 + h$ y entonces ahora ya no se quiere que x se acerque a x_0, sino que h sea tan pequeño que se aproxime lo más posible a 0, dejando expresada la derivada como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

y, como es posible determinar la recta tangente a cualquier punto de una curva suave, también es posible determinar su derivada , obteniéndose de manera general otra definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Volviendo al ejemplo en el ámbito de la mecánica clásica, la velocidad media $\bar{v}$ solo entregaba una información global sobre el movimiento que realiza una partícula en un intervalo de tiempo dado, sin dar detalles precisos sobre la velocidad en cada instante de tiempo. Además, se observó que la velocidad media no era más que la pendiente de la recta que describe el movimiento en línea recta de una partícula. Pero, también se hicieron varias consideraciones iniciales para simplificar la descripción del movimiento de una partícula, mas en general los cuerpos se mueven de manera más compleja que solo en línea recta y a velocidad constante. Por esta razón, considere el gráfico de la figura 7.66, donde se representa la trayectoria de una partícula mediante una curva.

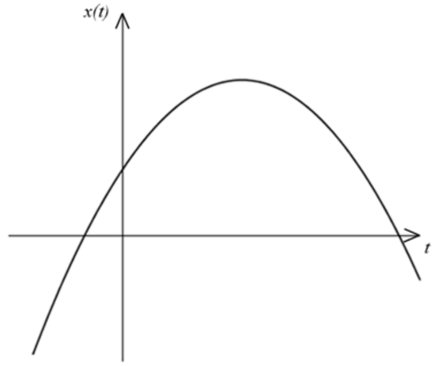

Figura 7.66: Trayectoria curva de una partícula

Como se observó anteriormente, una curva posee una pendiente diferente en cada punto de ella, entonces, en este caso, para determinar la velocidad que llevaba la partícula en un tiempo determinado t_0, será necesario calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $x(t)$ en dicho punto t_0. En términos coloquiales, se trata de evaluar la velocidad media durante un intervalo de tiempo muy pequeño, digamos $(t_0, t_0 + h)$ con h tan pequeño como se desee, de tal forma que cuando h tienda a cero, será posible determinar la velocidad de la partícula exactamente en el tiempo t_0, llamándose esta la *velocidad instantánea* v en el instante t_0

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}.$$

Por tanto, se puede decir con certeza que la velocidad instantánea de una partícula en un determinado tiempo t_0, corresponde a la derivada de la función $x(t)$ en el punto t_0

$$v(t_0) = x'(t_0),$$

y cuando en física se dice simplemente velocidad, es porque se hace referencia a la velocidad instantánea.

Antes de concluir esta sección, existen algunas consideraciones importantes de mencionar en cuanto a las definiciones de derivada: en la primera definición, aquella en que $x \to x_0$, no se trata simplemente de colocar $x = x_0$ en la expresión, pues esto llevaría a que tanto el numerador como el denominador se hagan cero, quedando una expresión $\frac{0}{0}$ carente de sentido matemático, para que esto no ocurra es que se deben realizar previos pasos algebraicos con la función; por otro lado, se debería definir la derivada de una función $y = f(x)$ como una nueva función $y' = f'(x)$, siempre que el límite exista, y en ese caso, se dirá que la función $f(x)$ es *diferenciable*; además, es necesario mencionar que si la función $f(x)$ es diferenciable, entonces el límite cuando $h \to 0$ en el cuociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe independientemente si h se acerca a 0 mediante los números negativos, o mediante los números positivos.

7.2.1 Propiedades de la Derivada

Otro punto importante con respecto a las derivadas es poder aplicarlas, y para ello es necesario aprender algunas técnicas básicas de derivación con el objetivo de no tener que recurrir constantemente a la definición .

Proposición 7.2.1.1: La derivada de una función constante es cero.

Demostración:

Sea c un número real tal que $f(x) = c$ para todo x perteneciente a los reales. Aplicando la definición de derivada se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \blacksquare$$

Proposición 7.2.1.2: Si f es la función identidad, es decir $f(x) = x$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces su derivada es 1.

Demostración:

Al ser f la función identidad, claramente se tendrá que $f(x+h) = x + h$, luego usando la definición

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1. \blacksquare$$

Proposición 7.2.1.3:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x\right)\right)=\cos\left(x\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\cos\left(x\right)\right)=-\sin\left(x\right).$$

Demostración:

Se verá solo la demostración de la función seno, puesto que la demostración de la derivada del coseno resultará ser análoga. En primer lugar, considérese la fórmula para la suma de ángulos del seno

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$

con esto en mente, se tiene que para $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$ la derivada se encuentra como

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin\left(x\right)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\left(\cos h-1\right)+\cos x\sin h}{h}, \\ &= \sin x\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos h-1}{h}\right]+\cos x\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin h}{h}\right]. \end{aligned}$$

En el capítulo 3 del libro Cálculo de Kitchen (Kitchen, 1992), se encuentra la demostración de que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \quad y \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0 \quad ,$$

luego se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \left(\sin x\right)0+\left(\cos x\right)1 \\ &= \cos x\blacksquare \end{aligned}$$

Hasta ahora, no ha sido necesario dar ejemplos de la derivada de las funciones que se han presentado, puesto que las proposiciones vistas muestran explícitamente las funciones que son derivadas, como las constantes, la función identidad, el seno y el coseno. Pero ¿cómo derivaría la función

$$f\left(x\right)=x+2\sin x?$$

¿o la función

$$g\left(x\right)=\frac{\cos x}{3x^2}?.$$

A continuación se presentarán reglas de derivación para la suma, multiplicación y división para funciones más generales, así como también una regla para la derivada de las potencias de x.

Proposición 7.2.1.4: Si f y g son dos funciones reales y ambas son derivables en x_0, entonces la suma de ellas también es derivable en x_0. Más aún,

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demostración:

Aplicando la definición de derivada para la suma de funciones

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right], \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right], \\
&= f'(x_0) + g'(x_0) \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 7.2.1.5: *Regla de Leibnitz*. Si f y g son funciones reales derivables en x_0, entonces el producto de ellas también es derivable en x_0 y

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0).$$

Demostración:

Aplicando la definición de derivada al producto de funciones

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Agregando un sumando conveniente, que resulte ser cero, al numerador de la expresión anterior, sea este

$$f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0+h)\, g(x_0),$$

se obtiene lo siguiente reordenando los términos y aplicando propiedades de los límites

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\left[g(x_0+h)-g(x_0)\right]+\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]g(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} g(x_0), \\
&= f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0).
\end{aligned}
$$

Por tanto, considerando el hecho de que

$$
\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),
$$

se consigue demostrar que efectivamente

$$
(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0). \blacksquare
$$

Corolario: La derivada del producto de una constante por una función derivable, es igual al producto de la constante por la derivaba de la función, es decir, si una función g es tal que $g(x) = cf(x)$ con c una constante real y f una función real derivable en x_0, entonces

$$
g'(x_0) = cf'(x_0).
$$

Demostración:

La demostración resulta trivial usando la proposición anterior: defínase a la constante como una función constante $h(x) = c$, asi pues $g(x) = h(x)\, f(x)$, y aplicando la derivada del producto se tiene

$$
\begin{aligned}
g'(x_0) &= (hf)'(x_0), \\
&= h'(x_0)\, f(x_0) + f'(x_0)\, h(x_0), \\
&= 0f(x_0) + f'(x_0)\, c, \\
&= cf'(x_0). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Ahora, se es capaz de calcular la derivada de un conjunto más grande de funciones, véase algunos ejemplos de la aplicación de las reglas vistas:

1. Sea f la función que se mencionó anteriormente, o sea $f(x) = x + 2\sin x$. Para encontrar f', primero se utiliza la regla de que la derivada de la suma de funciones es igual a la suma de las derivadas. En otras palabras, si se denota a la función identidad por $I(x) = x$ y se denota al segundo sumando por $J(x) = 2\sin x$, entonces el cálculo se reduce a encontrar

$$f'(x) = I'(x) + J'(x).$$

Por la proposición 7.2.1.2 se tiene que $I'(x) = 1$. Para encontrar la derivada de la función J se va a usar el corolario recientemente visto, y en ese caso

$$J'(x) = 2(\sin x)' = 2\cos x.$$

Por lo tanto, utilizando en detalle las técnicas de derivación vistas hasta ahora, se obtuvo fácilmente que

$$f'(x) = 1 + 2\cos x.$$

2. Sea ahora $f(x) = 100 + 10x + \cos x$. Si se analiza en detalle, aquí se tiene la suma de tres funciones: una función constante, una función producto de una constante por x, y una función trigonométrica. Esta vez sin escribir todos los pasos intermedios, se llega rápidamente a la derivada de la función, resultando

$$f'(x) = 10 - \sin x.$$

3. Considérese la función $f(x) = x\sin x\cos x$. En este caso se tiene el producto de tres funciones, las cuales se pueden asociar como se desee, pues la derivada respeta la asociatividad, Obsérvese:

   - Si $f(x) = (x\sin x)\cos x$, entonces aplicando la regla para el producto se tendrá que

   $$f'(x) = (x\sin x)'\cos x + (\cos x)'\,x\sin x.$$

   Nuevamente se aplica la regla para el producto

   $$f'(x) = \left[(x)'\sin x + (\sin x)'\,x\right]\cos x + (-\sin x)\,x\sin x,$$

y ahora, se obtiene entonces que

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\sin x + x\cos x]\cos x - x\sin^2 x, \\ &= \sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x, \\ &= \sin x\cos x + x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right), \\ &= \sin x\cos x + x\cos(2x). \end{aligned}$$

- Si $f(x) = x(\sin x\cos x)$, entonces se obtiene al aplicar la regla del producto, esta vez más directamente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x\cos x + x[\cos x\cos x + (-\sin x)\sin x], \\ &= \sin x\cos x + x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right), \\ &= \sin x\cos x + x\cos(2x). \end{aligned}$$

  Quedando entonces expuesto que no importa cómo se asocien los factores, el resultado es el mismo.

Para seguir ampliando el conjunto de funciones que se podrán derivar directamente sin recurrir a la definición, véase las siguientes técnicas.

Proposición 7.2.1.6: Si g es una función real derivable en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en x_0 y su derivada resulta ser

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Demostración:

Para poder aplicar la definición de derivada, es preciso antes verificar si la expresión $\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)$ siquiera tiene sentido. Esto se reduce a comprobar si la función está definida para h arbitrariamente pequeño, para ello se harán notar dos puntos: primero, el hecho de que, por hipótesis, la función g es derivable en x_0 y por lo tanto, es continua en x_0, y así $\frac{1}{g}$ también es continua en x_0; segundo, como $g(x_0) \neq 0$ se tiene que existe un número real $\delta > 0$ tal que $g(x_0+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$ (esto se desprende de un conocido teorema, que dice que si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces existe un número δ mayor que cero tal que $f(x) > 0$, para todo x que satisfaga $|x - x_0| < \delta$). Por consiguiente, la expresión $\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)$ sí tiene sentido y entonces se puede usar la definición de derivada

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to o} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to o} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h}, \\
&= \lim_{h\to o} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\left[g(x_0)\, g(x_0+h)\right]}, \\
&= \lim_{h\to o} \left[\frac{-\left[g(x_0+h) - g(x_0)\right]}{h} \frac{1}{g(x_0)\, g(x_0+h)}\right], \\
&= \left[\lim_{h\to o} \frac{-\left[g(x_0+h) - g(x_0)\right]}{h}\right] \left[\lim_{h\to o} \frac{1}{g(x_0)\, g(x_0+h)}\right], \\
&= -g'(x_0) \frac{1}{\left[g(x_0)\right]^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposición 7.2.1.7: Sean f y g dos funciones reales derivables en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces la división $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y su derivada es

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}.$$

Demostración:

De manera trivial se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right),$$

entonces, usando la derivada del producto de funciones se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0), \\
&= f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \cdot f(x_0),
\end{aligned}
$$

y por la proposición anterior se sabe cual es la derivada de $\frac{1}{g}$, luego

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + \frac{-g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2} \cdot f(x_0), \\
&= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposición 7.2.1.8: Sea f es una función real derivable tal que $f(x) = x^n$, con n un entero positvo. Su derivada es

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demostración:

Se verá una demostración un poco diferente a las que se han realizado hasta ahora, una demostración por inducción sobre n:

Para $n = 1$ se reduce a demostrar que la derivada de $f(x) = x$ es igual a $f'(x) = 1x^{1-1} = 1$, lo que ya se tiene por proposición 7.2.1.2.

Supóngase ahora que la proposición 7.2.1.8 se cumple para algún entero positivo m, es decir, se satisface que la derivada de $f(x) = x^m$ corresponde a $f'(x) = mx^{m-1}$.

Ahora, queda demostrar que se cumple para $m+1$, o sea, que la derivada de x^{m+1} efectivamente corresponde a $(m+1)\,x^{(m+1)-1}$.

Sea $g(x) = x^{m+1}$ una función real con m un entero no negativo. Si se denota por I a la función identidad, entonces la igualdad

$$x^{m+1} = x^m \cdot x,$$

puede escribirse como

$$g(x) = f(x) \cdot I(x),$$

para todo x real, y así, usando la regla de la derivada del producto y la hipótesis de inducción, se tiene que la derivada de la función g resulta en

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \cdot I(x) + I'(x) \cdot f(x), \\ &= mx^{m-1} \cdot x + 1 \cdot x^m, \\ &= mx^m + x^m, \\ &= (m+1)\,x^m, \end{aligned}$$

obteniéndose entonces lo que se deseaba, quedando demostrado por inducción que la derivada de la funciónf $f(x) = x^n$, con n un entero positvo, es $f'(x) = nx^{n-1}$.$\blacksquare$

Proposición 7.2.1.9: Sea f es una función real derivable tal que $f(x) = x^n$, con n un entero negativo. Entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demostración:

Sea m un entero positivo tal que $n = -m$, luego

$$f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Usando la proposición 7.2.1.6, se tiene que la derivada de la función f corresponde a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}, \\ &= -mx^{-m-1}, \end{aligned}$$

sabiendo que $n = -m$ con m un entero no negativo, queda entonces demostrado que

$$f'(x) = nx^{n-1}. \blacksquare$$

Observación 7.2.1.1: Para una función real $f(x) = x^n$ con $n = 0$, siempre que $x \neq 0$ se tendrá que $f'(x) = 0$, puesto que $f(x) = x^0 = 1$. Además, la fórmula $f'(x) = nx^{n-1}$ es válida para $f(x) = x^n$ incluso si n es un racional.

Ya se han estudiado casi en su totalidad las técnicas de derivación más usadas y se está en condiciones de calcular derivadas de variadas funciones, algunas de ellas frecuentes dentro del cálculo y, por ende, útiles incluso de memorizar. Véase los siguientes ejemplos:

1. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, para valores reales de x y con $x \neq 0$. Si se denota por $g(x) = x$ para aplicar la proposición 7.2.1.6, se tendrá inmediatamente que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Conociendo la derivada de las funciones trigonométricas básicas seno y coseno, el paso natural parece ser encontrar la derivada del resto de las funciones trigonométricas: cosecante, secante, tangente y cotangente. Sea $f(x) = \sec x$. Se sabe que

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

luego definiendo como $g(x) = \cos x$ y usando la proposición 7.2.1.6, se tendrá que la derivada de la secante resulta

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= -\frac{-\sin x}{(\cos x)^2}, \\ &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right), \\ &= \sec x \, \tan x. \end{aligned}$$

La derivada de la cosecante se cálcula de manera análoga, obteniéndose que $(\csc x)' = -\csc x \, \cot x$. La tangente es otra función trigonométrica importante, que se obtiene como el cuociente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Denotando en este caso por $f(x) = \sin x$ y por $g(x) = \cos x$, y aplicando la regla para la derivada de un cuociente de funciones, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\cos x)'(\sin x)}{(\cos x)^2}, \\ &= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}, \\ &= \frac{1}{(\cos x)^2}, \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\tan x)' = \sec^2 x$. El caso de la cotangente se puede hacer de dos maneras diferentes: considerando como

$$\cot x = \frac{1}{\tan x},$$

o como

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

y así obtener su derivada aplicando la proposición 7.2.1.6 o la proposición 7.2.1.7, dejándose a gusto la elección del método al lector, debe obtenerse $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

3. Sea $f(x) = -4x^{10}$. Aquí se deben utilizar dos reglas de derivación ya vistas, primero la regla de derivación para el producto de una constante por una función y luego la regla vista en la proposición 7.2.1.8 para las potencias de x con exponente un entero positivo. Por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4) \cdot 10x^{10-1}, \\ &= -40x^9. \end{aligned}$$

4. Tal como se mencionó en la observación previa a los ejemplos, la regla para la derivada de las potencias de x también es válida para exponentes racionales, y se verá entonces una función con

estas características, bastante conocida y usada en cálculo. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, donde x puede tomar valores reales positivos. Utilizando entonces la técnica aprendida para las potencias de x se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}, \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5. Se verá ahora el segundo ejemplo que se mencionó casi al comienzo de la sección. Sea $f(x) = \frac{\cos x}{3x^2}$, y para encontrar su derivada habrá que aplicar tres técnicas de derivación: la regla para el cuociente de funciones, la regla para el producto de una función por una constante y la regla para las potencias de x. Aplicando correctamente las técnicas aprendidas hasta ahora, no será dificil para el lector seguir el procedimiento y obtener la derivada de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x)\,3x^2 - 6x\cos x}{9x^4}, \\ &= \frac{3x\,(-x\sin x - 2\cos x)}{9x^4}, \\ &= \frac{-x\sin x - 2\cos x}{3x^3}. \end{aligned}$$

Si bien se ha ampliado el repertorio de funciones que es posible derivar de manera inmediata y casi mecánicamente, usando las técnicas de derviación estudiadas hasta el momento, todavía se carece de métodos para derivar funciones como $\sin\left(2x^3\right)$ o $x\sqrt{1-x^2}$ de manera directa y sin tener que recurrir a la definición. Para este tipo de funciones, que corresponden a la composición de dos o más funciones, y en realidad para poder derivar prácticamente cualquier función que se encuentre en un libro de cálculo, es que se presenta a continuación la técnica más usada para derivar funciones, la que se conoce como la *Regla de la Cadena*.

Proposición 7.2.1.10: *Derivada de función compuesta*. Sean f y g dos funciones reales. Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces la composición $f \circ g$ es derivable en x_0, y su derivada es

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\,g'(x_0).$$

Demostración:

Usando la definición, la derivada de la composición de funciones es

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h}.\end{aligned}$$

En la expresión anterior, no resultaría complicado "hacer aparecer" una expresión que represente a la derivada por definición de la función g, mediante una multiplicación por

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)},$$

mas se debe ser precavido con la introducción de este término, pues el denominador podría ser cero, lo que no tendría sentido. Luego, se tendrán dos casos:

Caso I: Supóngase que existe una vecindad V del punto x_0, tal que x_0 no pertenece a V, en la cual para valores de h tan pequeños como se quiera, se tendrá que $g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0$. De esta forma, se puede multiplicar la definición por la expresión deseada

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}, \\ &= \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}\right] \left[\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}\right].\end{aligned}$$

Por definición, la derivada de g es precisamente la expresión del límite de la derecha. Para la expresión de la izquierda, se va a sumar un "cero conveniente" dentro del argumento de la primera función f del numerador, quedando como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0) + [g(x_0 + h) - g(x_0)]) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)},$$

sustituyendo por la letra k la expresión $g(x_0 + h) - g(x_0)$, y obsevando que cuando h tiende a cero, k también tiende a cero (por la continuidad de g en x_0), entonces se obtiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(g(x_0) + k) - f(g(x_0))}{k} \quad ,$$

siendo esta la definición de derivada de f en $g(x_0)$. Por lo tanto, se ha obtenido que, para el caso en que $g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0$, la derivada de la composición de funciones es efectivamente

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Caso II: (Kitchen, 1992) ■

Véase la regla regla de la cadena en los siguientes ejemplos:

1. Sea $f(x) = \sin(2x^3)$. Como se trata del primer ejemplo de aplicación de la regla de la cadena, se hará con detalle el procedimiento del cálculo de la derivada de f. Denote por $u(x) = \sin x$ y por $v(x) = 2x^3$, de esta forma se observa claramente que

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x), \\ &= u(v(x)), \\ &= u(2x^3), \\ &= \sin(2x^3). \end{aligned}$$

Luego, por la regla de la cadena se tiene q la derivada de f corresponde a

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x),$$

de esta forma, usando el hecho de que $(\sin(x))' = \cos x$, que la derivada de una función por una constante real c resulta en cf' y que las potencias de x se derivan mediante la regla $(x^n)' = nx^{n-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned} u'(v(x)) \cdot v'(x) &= \left(\sin(2x^3)\right)' \cdot \left(2x^3\right)', \\ &= \cos(2x^3) \cdot 6x^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando en detalle la regla de la cadena en conjunto a las técnicas de derivación aprendidas anteriormente, se obtiene fácilmente que

$$f'(x) = 6x^2 \cos(2x^3).$$

2. Siguiendo con un ejemplo parecido al anterior, considere la función $f(x) = \sin(x + \cos x)$. Esta vez sin hacer todos los pasos ni todas las especificaciones anteriores, pues, como se observa, la función es parecida a la del ejemplo 1, se calculará la derivada utilizando la regla de la cadena directamente

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x + \cos x))' \cdot (x + \cos x)', \\ &= \cos(x + \cos x) \cdot (1 + - \sin x), \end{aligned}$$

y de esta forma se obtiene directamente la derivada de f, resultando en

$$f'(x) = \cos(x + \cos x) - \sin x \cos(x + \cos x).$$

3. Ahora, considere la siguiente función $f(x) = \left(1 + 2x + x^3\right)^8$. Es fácil notar que las dos funciones u y v, que están compuestas como $u \circ v$, son en este caso $u(x) = x^8$ y $v(x) = 1+2x+x^3$, en donde v corresponde a la suma de tres funciones, las cuales no se denotarán para su especificación, pues la derivación de suma de funciones ya se estudió y es algo que a estas alturas debiera manejarse con facilidad. Entonces, la derivada se calcula como

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x), \\ &= 8\left(1 + 2x + x^3\right)^7 \cdot \left(0 + 2 + 3x^2\right), \\ &= 8\left(2 + 3x^2\right)\left(1 + 2x + x^3\right). \end{aligned}$$

4. Sea $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. En este caso, para poder calcular la derivada de f, primero debe aplicarse la regla para el producto de funciones, quedando expresada como

$$f'(x) = (x)'\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \left(\sqrt{1-x^2}\right)' x.$$

Y, es entonces que para calcular la derivada de la expresión $\sqrt{1-x^2}$ se utilizará la regla de cadena: sea $u(x) = \sqrt{x}$ y $v(x) = 1 - x^2$, luego $u(v(x)) = \sqrt{1-x^2}$ y su derivada se calcula como

$$\begin{aligned} u'(v(x)) \cdot v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0 - 2x), \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la función f resulta ser

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \\ &= \frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \\ &= \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

5. Como último ejemplo, considere la función $f(x) = \sqrt[3]{1 + \tan(1 + \sqrt{x})}$. En esta ocasión, sin escribir ni detallar paso a paso los cálculos que se van realizando, el lector debe ser capaz de

seguir el desarrollo y de llegar al resultado final

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(1+\tan\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left[\sec^2\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right], \\ &= \frac{1}{6\sqrt{x}}\frac{\sec^2\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\tan\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2}}. \end{aligned}$$

En esta sección se han estudiado todas las técnicas de diferenciabilidad que se utilizan con mayor frecuencia en el cálculo de derivadas, pero se debe estar consciente de que no basta solo con leer las reglas, mirar los ejemplos, ni siquiera basta con aprenderse las reglas de memoria, si no se realiza un entrenamiento de ellas, en particular de la regla de la cadena, la cual según muestra la experiencia que resulta ser la de más lenta aprehensión. Una vez que el lector haya ejercitado realizando él mismo el cálculo de derivadas de diversas funciones, hasta que dicho cálculo se transforme en un proceso casi mecánico, es cuando podrá sentirse seguro de que ha aprendido a derivar.

Para concluir, si bien en esta sección se cambió un poco el espíritu de esa monografía, pues no se exhibieron ejemplos relacionando el cálculo de derivadas con otras áreas, sino que solo se presentaron métodos algorítmicos, no hay que perder de vista que saber calcular derivadas, a una amplia gama de funciones, es muy necesario en variados contextos, pues resulta ser una herramienta muy usada en otras ciencias, que hace preciso dominar a la perfección.

7.2.2 Teorema del Valor Medio

Supóngase que está conduciendo un automóvil en una carretera, desde una ciudad A con destino a una ciudad B. Además suponga que tanto la carretera como el automóvil cumplen con condiciones ideales, es decir, no hay semáforos, no hay congestión vehicular, no hay baches ni roce, entre otras cosas. Si desde que comenzó a conducir hasta que llegó a su destino transcurrieron 4 horas, y la distancia que separa la ciudad B de la ciudad A son 240 kilómetros, entonces se puede encontrar la velocidad media de conducción mediante la fórmula ya conocida

$$\bar{v}(t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1},$$

donde, en este caso, se considerará el tiempo inicial t_1 cuando empezó a conducir como el inicio de un cronómetro en 0, asimismo como se considerará que en la ciudad A está el origen de un sistema de referencia escogido de manera arbitraria, de manera que en dirección a la ciudad B se recorren distancias positivas medida en kilómetros (ver la figura 7.67).

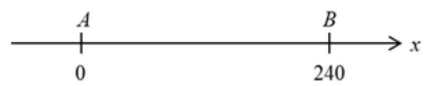

Figura 7.67: Ciudad A y ciudad B

Entonces, usando la fórmula anterior se calcula

$$\bar{v}(t) = \frac{240\,[\mathrm{km}] - 0\,[\mathrm{km}]}{4\,[\mathrm{h}] - 0\,[\mathrm{h}]},$$

obteniendo una velocidad media de 60 kilómetros por hora. Pero, como se ha mencionado anteriormente, la velocidad media solo da una información general en cuanto a la velocidad de una partíucla, pues en realidad un automóvil acelera y desacelera durante un viaje en carretera, aún en condiciones ideales. Sin embargo, hay algo de lo que se puede estar seguro, y es que, en al menos un instante, el velocímetro de automóvil debió haber indicado la velocidad de $60\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$, bajo las condiciones ideales previamente mencionadas. Y es precisamente esta última afirmación la que se puede asegurar gracias al Teorema del Valor Medio, traduciendo ahora las condiciones ideales de la física, a propiedades que debe satisfacer, en este caso, la función $x(t)$ que describe la trayectoria del automóvil, para lograr asegurar que el velocímetro de éste efectivamente indicó la velocidad de $60\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$ al menos una vez durante el viaje desde la ciudad A hacia la ciudad B .

Teorema 7.2.2.1: *Teorema del Valor Medio*. Sea f una función real tal que si

1. f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$;
2. f es derivable en el intervalo abierto (a,b).

Entonces existe un número real c, con $a<c<b$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Lo que el Teorema del Valor Medio quiere decir es que, si se consideran dos puntos pertenecientes a la función f, a y b, y se calcula la pendiente de la recta secante a la curva en dichos puntos, entonces existe otro punto de la función, c, que va estar entre medio de los dos puntos considerados anteriormente, tal que la pendiente de la recta tangente a la curva en este punto, es decir, la derivada de la función en c, va a coincidir con la pendiente de la recta secante (ver figura 7.68).

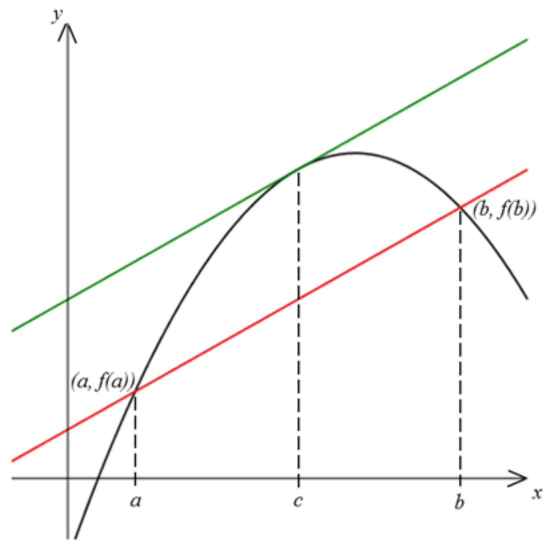

Figura 7.68: Teorema del Valor Medio

Para demostrar el Teorema del Valor Medio, se hace necesaria la mención de otro teorema previo para facilitar la demostración, es el *Teorema de Rolle*:

Teorema 7.2.2.2: *Teorema de Rolle*. Supóngase que φ es una función real que satisface las siguientes características:

1. φ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$;
2. φ es derivable en el intervalo abierto (a, b);
3. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Entonces existe un número real c, con $a < c < b$, tal que

$$\varphi'(c) = 0.$$

El Teorema de Rolle no se va a demostrar, pero se deja al lector buscar su demostración en la literatura y leerla a conciencia.

Ahora sí se tiene lo necesario para demostrar el Teorema del Valor Medio.

Demostración:

Considere la función auxiliar

$$\varphi(x) = f(x) - L(x),$$

donde $L(x)$ corresponde a la secante que corta en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ a la función f, y φ representa una desviación del gráfico de la función f respecto de la secante L. Utilizando la conocida fórmula de la recta punto pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

se tiene fácilmente que la ecuación de la recta secante está dada por

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

De esta forma, φ queda expresada como

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a),$$

satisfaciendo las hipótesis del Teorema de Rolle, pues al ser f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), la función φ hereda estas propiedades trivialmente. Además

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](a - a), \\ &= 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a), \\ &= f(b) - f(a) - f(b) + f(a), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema de Rolle, existe un número real c, tal que $a < c < b$ y que $\varphi'(c) = 0$. Pero, por otro lado

$$\varphi'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right],$$

y así

$$\begin{aligned}f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] &= 0, \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\end{aligned}$$

quedando demostrado el Teorema del Valor Medio.■

Para cerrar esta sección, se verá un ejemplo matemático de aplicación del teorema del valor medio:

Ejemplo: Demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades

$$8+\frac{1}{9}<\sqrt{66}<8+\frac{1}{8}.$$

Solución:

Considere la función $f(x)=\sqrt{x}$ y el intervalo $[64,66]$ perteneciente al dominio de f, el cual corresponde a los reales positivos y el cero. Se observa claramente que f es continua en $[64,66]$ y que es derivable en $(64,66)$, luego por el teorema del valor medio existe un número $c\in(64,66)$ tal que

$$f'(c)=\frac{\sqrt{66}-\sqrt{64}}{66-64},$$

donde se sabe que

$$f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{c}}&=\frac{\sqrt{66}-8}{2},\\ \sqrt{66}&=\frac{1}{\sqrt{c}}+8.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $c\in(64,66)$, se traduce en que $64<c<66$. Pero también claramente se tiene que $64<c<66<81$, luego

$$\begin{array}{rrr} 64< & c< & 81,\\ 8< & \sqrt{c}< & 9,\\ \frac{1}{8}> & \frac{1}{\sqrt{c}}> & \frac{1}{9},\\ \frac{1}{8}+8> & \frac{1}{\sqrt{c}}+8> & \frac{1}{9}+8.\end{array}$$

Y, por lo tanto, se demuestra que efectivamente

$$8+\frac{1}{9}<\sqrt{66}<8+\frac{1}{8}.$$

7.2.3 Funciones Crecientes y Decrecientes

Al finalizar la definición de derivada y previo a las reglas de derivación, se hizo mención a la información que se podía extraer del signo de la derivada, concluyendo que el signo de la recta tangente a curva puede dar indicios hacia qué sentido del eje x la curva crece o decrece, en el punto de tangencia. En la sección que ahora comienza, se ahondará en este tema, describiendo con exactitud las funciones crecientes y decrecientes, y profundizando más formalmente en los puntos máximos y mínimos que pudiera tener una función.

Definición 7.2.3.1: Sea f una función real. Se dice que f es *creciente* sobre un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en el intervalo tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Si la desigualdad es estricta, es decir, si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces se dirá que f es *estrictamente creciente*.

La definición para funciones decrecientes resulta ser análoga, de todas formas se explicitará:

Definición 7.2.3.2: Sea f una función real. Se dice que f es *decreciente* sobre un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en el intervalo tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nuevamente, si $x_1 < x_2$ implica la desigualdad estricta $f(x_1) > f(x_2)$, entonces se dirá que f es *estrictamente decreciente*.

Observación 7.2.3.1: Se dice que una función f es *monótona* en I, si es creciente o decreciente en I.

Para comprender completamente las definiciones, véase los siguientes ejemplos:

1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, definida en el intervalo $[0, +\infty)$. Sean x_1 y x_2 puntos dentro del intervalo $[0, +\infty)$ tales que $x_1 < x_2$, Al aplicar la raíz cuadrada a la desigualdad se obtiene que $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, por lo tanto f es estrictamente creciente.

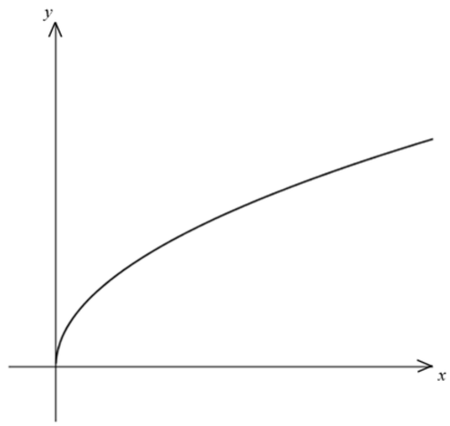

Figura 7.69: $f(x) = \sqrt{x}$

2. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ definida sobre el intervalo abierto $(0, +\infty)$. Si x_1 y x_2 pertenecen a $(0, +\infty)$ y además $x_1 < x_2$, entonces al aplicarla función a la desigualdad, esta se invierte, pues el inverso multiplicativo de un número real invierte el sentido de la desigualdad, resultando en

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2},$$

lo que indica que f es una función estrictamente decreciente.

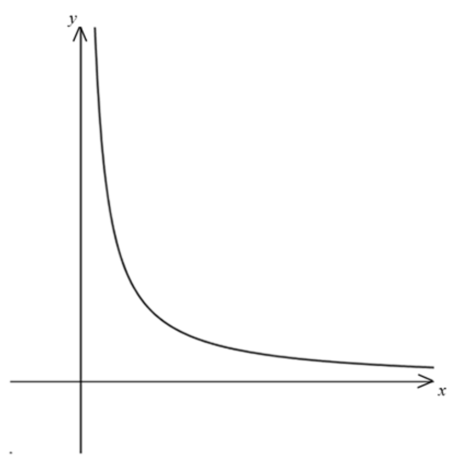

Figura 7.70: $f(x) = \frac{1}{x}$

3. Sea $f(x) = x^3$ definida en toda la recta real. Claramente para todo par de números reales x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ se cumplirá que $x_1^3 < x_2^3$, demostrando asi que f es estrictamente creciente.

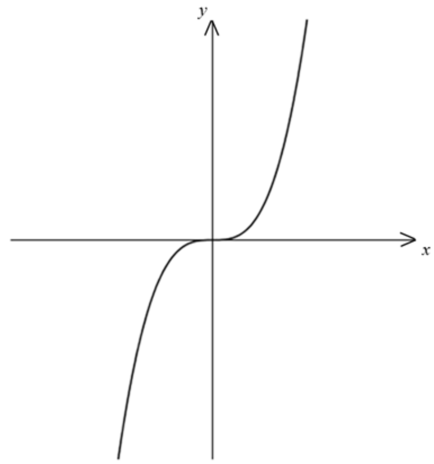

Figura 7.71: $f(x) = x^3$

4. Sea $f(x) = x^2$ definida sobre los reales. Se observa que no es posible determinar si la función es creciente o decreciente considerando toda la recta real, pero si es posible restringir intervalos de $\mathbb{R}$ donde sí se puede determinar la monotonía exacta de la función.

   Para valores x_1 y x_2 en el intervalo $(-\infty, 0)$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene que

$$x_1^2 > x_2^2,$$

   y por lo tanto, f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

   Para valores x_1 y x_2 en el intervalo $(0, +\infty)$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene que

$$x_1^2 < x_2^2,$$

   y por lo tanto, f es estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

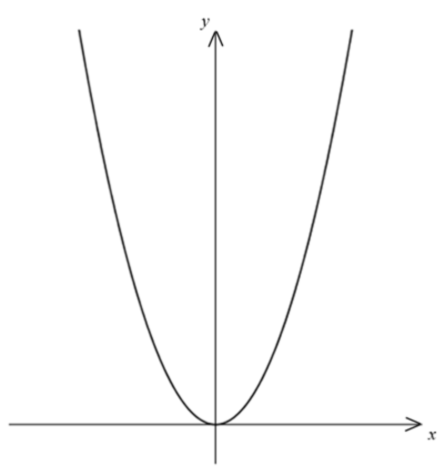

Figura 7.72: $f(x) = x^2$

5. Considere la función definida a trozos sobre los reales

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{para } x < 0 \\ 1 & , \text{para } x \geq 0 \end{cases}.$$

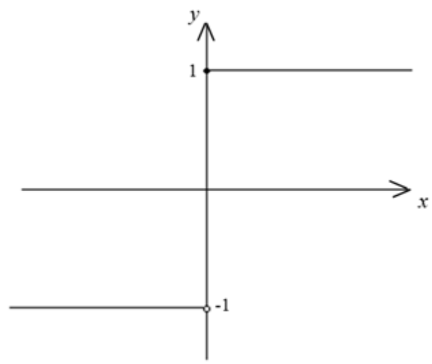

Figura 7.73: Función a trozos

Se observa que para valores x_1 y x_2 menores que cero, se tendrá que $f(x_1) = f(x_2) = -1$. Análogamente se tendrá para valores x_1 y x_2 mayores o iguales que cero, que $f(x_1) = f(x_2) = 1$. En ambos casos, y con la información que se tiene hasta ahora, no es posible caracterizar a la función como creciente o decreciente. Pero si se consideran valores x_1 y x_2 tales que $x_1 < 0$ y $x_2 \geq 0$, se observa que

$$-1 = f(x_1) < f(x_2) = 1,$$

y por lo tanto, para un intervalo que corresponda a una vecindad del cero, la función será creciente.

6. Considere la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & , \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases},$$

conocida como la *Función de Dirichlet*, la cual tiene como una de sus características no ser monótona en ningún intervalo, es decir, no es posible determinar un intervalo en el cual sea creciente o en el cual sea decreciente.

Observación 7.2.3.2: Si $f(x) = ax + b$ es una recta en el plano, entonces

- f es creciente si su pendiente a es mayor a cero (positiva).
- f es decreciente si su pendiente a es menor a cero (negativa).

A continuación, se presentará un teorema que muestra un método aún más sencillo de aplicar para determinar si una función es creciente o decreciente:

Teorema 7.2.3.1: Sea f una función real definida sobre un intervalo abierto I. Si f es creciente en el intervalo y además es derivable en un punto $x_0 \in I$, entonces $f'(x_0) \geq 0$. Recíprocamente, si $f'(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo, entonces f es una función creciente en I. Más aún, si la derivada de f no se anula en ningún punto del intervalo, entonces la función será estrictamente creciente sobre I.

Demostración:

Para comenzar, suponga que f es creciente en el intervalo abierto I, y que para x_0 en el intervalo existe su derivada, es decir, existe $f'(x_0)$. Luego, sea x un número distinto de x_0 y que también esté en I, sin pérdida de generalidad, asuma que $x_0 < x$, de esta forma se tiene que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Esto implica que entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

lo que corresponde precisamente a la definición de la derivada de la función f en el punto x_0, y por tanto

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Supóngase ahora que $f'(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo I. Sean x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo, tales que $x_1 < x_2$. Lo que se debe demostrar es que $f(x_1) \leq f(x_2)$ para que la función sea creciente. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número real ξ entre x_1 y x_2, es decir, $x_1 < \xi < x_2$ (y, por ende, $\xi \in I$), tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1).$$

Por hipótesis, $f'(\xi) \geq 0$ (pues ξ pertenece al intervalo I), y además $x_2 - x_1 > 0$, entonces

$$0 \leq f(x_2) - f(x_1),$$

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

y por lo tanto, f es creciente.
Ahora, suponga que f no es estrictamente creciente sobre I. Habrá entonces dos puntos en I, sean estos x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2)$. Al ser f una función creciente sobre el intervalo I, lo es también en el intervalo (x_1, x_2), y por tanto necesariamente f debe ser constante sobre ese intervalo. Por consiguiente, f' se anulará en el intervalo (x_1, x_2), concluyendo con esto la demostración.$\blacksquare$

Observe que si f es una función creciente, entonces $-f$ será una función decreciente, ya que si se define como $g = -f$, entonces $g'(x) = -f'(x) \leq 0$, esto porque al ser f creciente se cumple que $f'(x) \geq 0$. Este hecho es el que se utiliza en la demostración del teorema análogo al anterior para funciones decrecientes, que se enuncia a continuación:

Teorema 7.2.3.2: Sea f una función real definida sobre un intervalo abierto I. Si f es decreciente en el intervalo y además es derivable en un punto $x_0 \in I$, entonces $f'(x_0) \leq 0$. Recíprocamente, si $f'(x) \leq 0$ para todo x en el intervalo, entonces f es una función decreciente en I. Más aún, si la derivada de f no se anula en ningún punto del intervalo, entonces la función será estrictamente decreciente sobre I.

Demostración:
Se deja al lector, pues es equivalente a la demostración realizada anteriormente, pero usando el hecho mencionado previo al teorema.

Véase algunos ejemplos más:

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 - 3x$. Su derivada resulta ser

$$f'(x) = 6x^2 - 3 = 3\left(2x^2 - 1\right),$$

con la cual se puede determinar en qué intervalos la función será creciente o decreciente. Se observa que para que la derivada sea positiva se debe cumplir que $2x^2 - 1 \geq 0$, lo que significa que la función será creciente precisamente cuando

$$x \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ y } x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, f será decreciente cuando

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Aún es posible sacar información de la función que permita esbozar su gráfica. Junto con la información concluida anteriormente, considere los siguientes hechos:

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} \quad =\sqrt{2},$$
$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -2\sqrt{\frac{1}{2}} \quad =-\sqrt{2}.$$

Además, $f(x) = 0$ cuando

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

De esta forma, es posible conseguir un dibujo aproximado del gráfico de f, como muestra la figura 7.74.

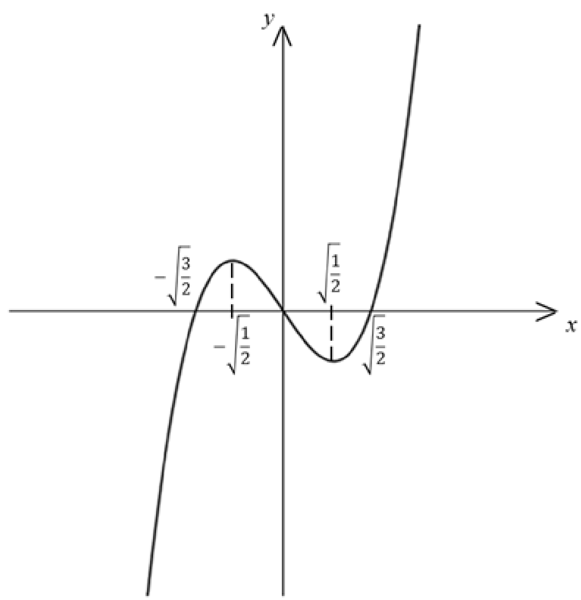

Figura 7.74: Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

2. Usando el criterio de la primera derivada, se va a demostrar que se cumple la siguiente desigualdad

$$\tan(x) \geq x,$$

para todo x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Denote por $g(x) = \tan(x) - x$, de tal forma que $g(x) \geq 0$. Calculando su derivada se obtiene que

$$g'(x) = \sec^2(x) - 1,$$

y usando una de las identidades trigonométricas conocidas, se sabe que

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x),$$

de esta forma, g es una función creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, pues $g'(x) = \tan^2(x) \geq 0$, para todo x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Luego, como es creciente, se cumple que $0 < x$ implica que $g(0) \leq g(x)$, donde $g(0) = 0$ y de esta forma

$$0 \leq \tan(x) - x,$$

$$x \leq \tan(x),$$

para todo x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Como se vio, el criterio de la primera derivada no solo sirve para determinar si una función es creciente o decreciente, o para ayudar a determinar el comportamiento de la función en diferentes intervalos, sino que además es posible aplicar el teorema en otro tipo de ejercicios.
Así como la primera derivada puede entregar información sobre la función e incluso ayudar a esbozar el gráfico de esta, también la segunda derivada otorgará información importante sobre características más específicas, como por ejemplo los puntos máximos y mínimos que posee, y es precisamente lo que se verá en detalle en la siguiente sección.

7.2.4 Segunda Derivada: Máximos y Mínimos

En la sección anterior se profundizó en el significado del signo, ya sea positivo o negativo, de la derivada de una función, mas aún no se ha establecido formalmente en qué se traduce que una función tenga derivada nula en uno o más puntos de ella. En esta sección, se pretende describir qué es un punto máximo y mínimo, hacer distinciones entre máximos globales y máximos locales, asimismo entre mínimos globales y locales, y determinar cuales son las condiciones necesarias para máximos y mínimos.

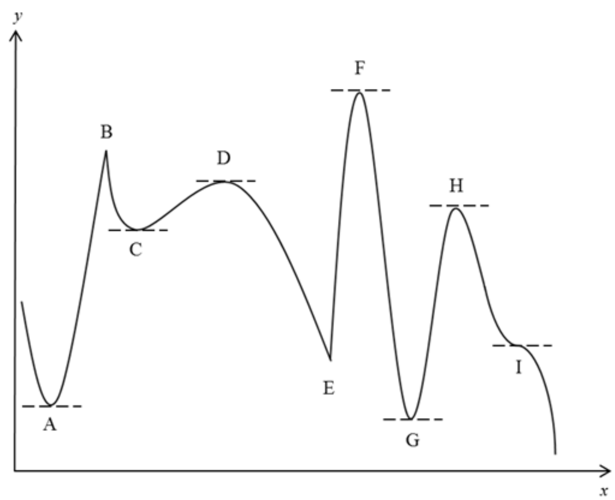

Figura 7.75: Puntos Críticos

Para comenzar, considere el gráfico de la figura 7.75, en el cual es posible determinar cuáles son los puntos mínimos y máximos, usando simplemente la obsevación (Kitchen, 1992)

Los puntos B, D, F y H corresponden a los puntos más altos de la función, siendo el punto F el más "grande" de todos ellos. Por esta razón, se dice que el punto F es un "máximo absoluto" de la función, y los puntos B, D y H serían solo "máximos locales". De la misma forma, se observa que los puntos A, C, E y G corresponden a los puntos más bajos de la función, siendo el punto G el más "pequeño" de ellos. De esta manera, se dice que en G la función tiene un "mínimo absoluto", y que los puntos A, C y E serían "mínimos locales".

Cabe destacar que para que un punto sea catalogado como máximo o mínimo, no es necesario que la función sea diferenciable en dicho punto, tal como ocurre en los puntos B y E, en donde la función presenta "puntas" las cuales no son derivables. Por esta razón, al momento de determinar cuáles son los puntos máximos o mínimos de una función es recomendable analizar también los puntos en los cuales la función no es derivable.

Por último, no es posible aún clasificar el punto I, pues pese a mostrarse en la figura 7.75 que la tangente en ese punto es paralela al eje x, como en el caso del resto de los otros puntos, no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo, por lo cual su situación se analizará más adelante. Con las observaciones previamente hechas gracias a la intuición, compare a continuación con las definiciones formales:

Definición 7.2.4.1: Sea f una función real y sea I un intervalo contenido en el dominio de f. Un punto x_0 de I se dice que es un *máximo global* de la función f si satisface que

$$f(x_0) \geq f(x),$$

para todo x en el intervalo I. Análogamente, un punto x_0 de I se dice que es un *mínimo global* de la función f si satisface que

$$f(x_0) \leq f(x),$$

para todo x en I.

Definición 7.2.4.2: Sea f una función real definida sobre un intervalo I. Se dice que f tiene un *máximo local* en $x_0 \in I$ si existe un real positivo ϵ tal que f es creciente en el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0)$ y f es decreciente en el intervalo $(x_0, x_0 + \epsilon)$.
Asimismo, se dice que f tiene un *mínimo local* en $x_0 \in I$ si existe un real positivo ϵ tal que f es decreciente en el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0)$ y f es creciente en el intervalo $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Nótese que no hay condición de diferenciabilidad para el punto x_0, por lo que dicho punto, siendo un máximo o un mínimo, podría ser una punta, como es el caso de los puntos B y E de la figura 5.67. Pero también, en el gráfico de la figura 7.75 se observa que para los puntos A, C, D, F, G y H existe la tangente y esta resulta ser paralela al eje x, por lo que la derivada de la función en dichos puntos debe anularse. Este hecho es lo que precisamente se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 7.2.4.1: Sea f una función real definida sobre un intervalo I. Si f tiene un máximo o un mínimo en $x_0 \in I$ y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, suponer que f tiene un máximo local en x_0. Por definición de máximo local se desprende que existe un real positivo ϵ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Considere el siguiente cuociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

donde h es un real. Note que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

cuando $-\epsilon < h < 0$, por lo que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

cuando $0 < h < \epsilon$, de modo que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Finalmente, comola función debe ser derivable en x_0, los límites anteriores deben ser iguales, por lo tanto se concluye que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0,$$

y así

$$f'(x_0) = 0.\blacksquare$$

Del gráfico de la figura 7.75, de las definiciones y del teorema recién visto, se pueden extraer algunas conclusiones:

1. Si se quiere saber cuáles son los máximos o mínimos de una función, lo primero es encontrar aquellos puntos de la función en los cuales la derivada se anula, puntos a los que se denominarán *puntos críticos*.
2. Se observa que una función puede tener máximos y mínimos en puntos que no sean derivables, como por ejemplo los puntos B y E de la figura 7.75. Por esta razón, se recomienda también examinar los puntos en los cuales la función no sea derivable.
3. Por último, puede ocurrir que se encuentre un punto crítico pero que no corresponda ni a un máximo ni a un mínimo, como es el caso del punto I en el gráfico, donde claramente se cumple que $f'(\mathrm{I}) = 0$, pero su condición no corresponde ni a máximo ni a mínimo.

A continuación, se hace entrega del *Criterio de la Segunda Derivada* para determinar los valores extremos de una función, definiendo en primer lugar la segunda derivada de una función real:

Definición 7.2.4.3: La *segunda derivada* de una función real f en el punto x_0 corresponde a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f''(x_0).$$

Teorema 7.2.4.2: *Citerio de la Segunda Derivada.* Sea f una función real definida sobre un intervalo I. Si x_0 es un punto crítico dentro del intervalo I y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 corresponde a un mínimo local.

Demostración:

Por definición, se tiene que

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h},$$

y por hipótesis se sabe que $f'(x_0) = 0$, al ser x_0 un punto crítico de la función, y además

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0.$$

Luego, como el límite en x_0 existe, entonces también existen sus límites laterales, así se tiene que

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0,$$

lo que implica por un lado que tanto $f'(x_0 + h)$ como h son negativos, y se puede afirmar que existe un real positivo ϵ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$, en consecuencia, f sería decreciente en el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0)$. Por otro lado, cuando se acerca por la derecha hacia h, también debe satisfacerse

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0,$$

y ahora como $h > 0$, entonces también $f'(x_0 + h) > 0$, por lo que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ lo que significa que f es creciente en el intervalo $(x_0, x_0 + \epsilon)$. Por lo tanto, por definición de mínimo local, se tiene que si $f''(x_0) > 0$ entonces x_0 es un mínimo local.■

De manera similar se demuestra el siguiente teorema, cuya demostración quedará para el lector:

Teorema 7.2.4.3: *Criterio de la Segunda Derivada.* Sea f una función real definida sobre un intervalo I. Si x_0 es un punto crítico dentro del intervalo I y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 corresponde a un máximo local.

Antes de mostrar algunos ejemplos y aplicaciones, aún no es posible clasificar de algún modo lo que ocurre con el punto I del gráfico de la figura 7.75, pues en tales casos ocurre que, si bien x_0 es un punto crítico, su segunda derivada resulta ser nula, es decir $f''(x_0) = 0$. Para ese tipo de casos no es posible determinar si es un máximo, un mínimo u otro tipo de característica (como ocurre en el punto I, donde se produce lo que se conoce como *punto de inflexión*, llamado así porque corresponde a un punto en el cual la función cambia de sentido su curvatura), para ello será necesario utilizar derivadas de orden superior. En el siguiente teorema se plantea lo que ocurre cuando la segunda derivada en un punto se anula, utilizando en este caso la tercera derivada y cuya demostración se deja al lector.

Teorema 7.2.4.4: Sea f una función real definida sobre un intervalo I y x_0 un punto en el. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión en x_0.

A continuación se muestran algunas de las múltiples aplicaciones que tiene el criterio de la segunda derivada en el proceso de encontrar máximos y mínimos:

1. **En geometría básica**. Demostrar que de todos los rectángulos de perímetro P, el de área maxima corresponde a un cuadrado.

   Considere un rectángulo de ancho x y de largo y, tal como muestra la figura 7.76.

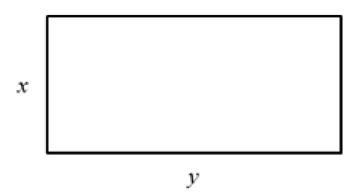

Figura 7.76: Rectángulo

   Lo que se desea maximizar en este caso es el área

$$A = xy,$$

   pero solo se conoce el perímetro de los rectángulos que se pueden construir, por tanto se sabe que

$$2x + 2y = P,$$

   de donde se puede despejar una variable, sea y obteniendo

$$y = \frac{P - 2x}{2}.$$

Luego, es posible escribir el área como una función de una sola variable, quedando como

$$A\left(x\right)=\frac{xP}{2}-x^{2}.$$

Calculando su derviada e igulando a cero para encontrar sus puntos críticos se obtiene

$$\begin{aligned} A'\left(x\right)=\frac{P}{2}-2x &= 0,\\ =\frac{P}{4} &= x.\end{aligned}$$

Usando el criterio de la segunda derivada

$$\begin{aligned} A''\left(x\right) &= -2,\\ A''\left(\frac{P}{4}\right) &= -2,\end{aligned}$$

por lo que $\frac{P}{4}$ resulta ser un máximo local, pues $A''\left(\frac{P}{4}\right)<0$. Reemplazando entonces el valor de x para encontrar el valor de y, se tiene que

$$y=\frac{P}{4},$$

por lo que, efectivamente, de todos los rectángulos que se pueden construir de perímetro P, aquel que tenga el área mayo será un cuadrado, pues resulto que tanto el ancho como el largo del rectángulo deben medir $\frac{P}{4}$.

2. Se dispone de 20 metros de alambre para cercar un jardín cuya forma es la de un sector circular. ¿Qué radio del sector circular permite un área máxima?.

   Denote por r el radio del sector circular y por s el largo de la cuerda de dicho sector (ver figura 7.77).

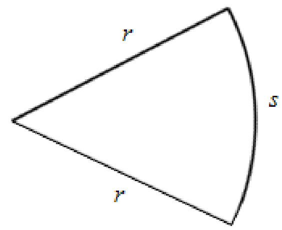

Figura 7.77: Sector circular

Nuevamente se desea maximizar el área, siendo en este caso

$$A = \frac{rs}{2}.$$

Por otro lado, solo se dispone de 20 metros de alambre con los que se debe cubrir todo el perímetro, por lo que

$$2r + s = 20,$$

de donde

$$s = 20 - 2r,$$

obteniendo entonces la función área

$$A(r) = 10r - r^2.$$

Igualando su derivada a cero

$$\begin{aligned} 10 - 2r &= 0, \\ r &= 5. \end{aligned}$$

Usando el criterio de la segunda derivada para evaluar el punto crítico encontrado se obtiene

$$A''(5) = -2 < 0,$$

por lo tanto, cuando el radio del sector circular es 5 se consigue una área maximal para el jardín que se quiere cercar.

3. Determinar las dimensiones más económicas para construir una piscina abierta de 32 metros cúbicos, tal que su fondo sea cuadrado.

Considere la figura 7.78, en donde se ha denotado por x a la medida del lado de la base, y por y la altura de la piscina.

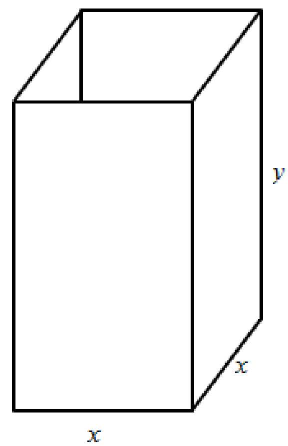

Figura 7.78: Piscina

Al querer economizar en gastos para la construcción de la piscina, lo que se dede minimizar es la superficie de la piscina, la cual corresponde al área de la base cuadrado más el área de cada cara rectangular, es decir

$$A = x^2 + 4xy.$$

Por otra parte, se conoce el volumen de la piscina, correspondiente al área de la base de la piscina por la altura de la misma, obteniendo así una expresión para y

$$\begin{aligned} x^2 y &= 32, \\ y &= \frac{32}{x^2}, \end{aligned}$$

la cual tiene sentido pues en la construcción, de una piscina en este caso, se asume que las dimensiones no pueden ser 0. De esta forma, se obtiene la función área

$$A\left(x\right) = x^2 + \frac{128}{x},$$

cuya primera derivada queda expresada como

$$A'\left(x\right) = 2x - \frac{128}{x^2}.$$

Igualando a cero, su punto crítico resulta ser $x = 4$. Calculando ahora su segunda derivada para poder aplicar el criterio, se obtiene que

$$A''(x) = 2 + \frac{256}{x^4},$$

en donde resulta ser

$$A''(4) = 3 > 0.$$

En consecuencia, para economizar en la construcción de una piscina de base cuadrada, su base debe medir 4 metros por lado, y su altura debe ser de 2 metros.

4. **Aplicación en Biología**. Estudios revelan que ciertos animales (como por ejemplo, las aves y los peces) efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto energético.
   Considere un tipo de pez migratorio que nada a contracorriente en un río. Sea v la velocidad de un pez de este tipo, y sea u la velocidad de la corriente, tal que $u < v$. La energía E necesaria para nadar una distancia d fija, se expresa por la relación

   $$E(v) = \frac{Kdv^3}{v-u},$$

   donde K y u son constantes positivas. Determine con qué velocidad debe nadar el pez en estudio para que logre minimizar su gasto de energía.

   Si lo que se desea es encontrar un punto crítico que minimice la función de la energía dada, lo primero es derivar dicha expresión con respecto a v. Derivando se obtiene

   $$E'(v) = \frac{Kdv^2(2v-3u)}{(v-u)^2}.$$

   Al igualar a cero la expresión anterior, se obtienen $v = 0$ y $v = \frac{3}{2}u$ como puntos críticos. $v = 0$ se descarta, pues se asume que el pez no está en reposo. Para verificar que el punto crítico $v = \frac{3}{2}u$ efectivamente es un mínimo de la función energía, esta vez se utilizará la definición de mínimo otorgada por la definición 7.2.4.2., además de los teoremas 7.2.3.1. y 7.2.3.2. que hablan sobre intervalos de crecimiento y de decrecimiento, utilizados en la definición de mínimo mencionada previamente.

   Sabido por hipótesis que v es estrictamente mayor que u, entonces para v se deben considerar los intervalos de prueba $\left(u, \frac{3}{2}u\right)$ y $\left(\frac{3}{2}u, \infty\right)$ (en tanto el extremo derecho del segundo intervalo tenga sentido físico, al estar trabajando con velocidades).
   En el primer intervalo, considere $v = \frac{5}{4}u$, y al evaluar la derivada se obtiene

$$E'\left(v = \tfrac{5}{4}u\right) = -\frac{25}{2}uKd < 0,$$

por lo que se deduce que en $\left(u, \frac{3}{2}u\right)$ la función E es decreciente. En el segundo intervalo, considere $v = 2u$, evaluando en la derivada se obtiene

$$E'\left(v = 2u\right) = 4uKd > 0,$$

por lo que se deduce que en $\left(\frac{3}{2}u, \infty\right)$ la función E es creciente. Por definición 7.2.4.2. se concluye que $v = \frac{3}{2}u$ corresponde a un mínimo local de la función E.

Por lo tanto, para minimizar el gasto de energía, el pez que se traslada a contracorriente debe nadar a una velocidad dada por $v = 1,5u$, donde u corresponde a la velocidad de la corriente del río. En otras palabras, el pez debe superar en un 50% la velocidad que posee la corriente del agua .

5. **Aplicación en Física**. Una de las ramas importantes de la física es la óptica, la cual se encarga de estudiar el comportamiento de la luz y los fenómenos que ocurren en torno a ella. El *Principio de Fermat* en óptica, en términos simples, establece que la trayectoria que describe la luz al viajar de un punto a otro es tal que minimiza el tiempo empleado. Bajo este principio se puede probar la *Ley de Refracción de la Luz* o conocida también como la *La Ley de Snell*.

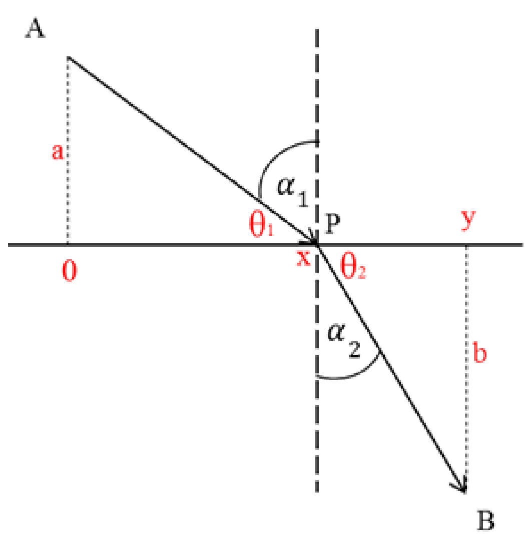

Figura 7.79: Refracción de la luz

Considere la figura 7.79, en donde los datos colocados en negro son los conocidos y los datos en rojo son notación de datos que no se conocen. La luz viaja desde el punto A en el medio uno (suponga que es el aire) hacia el punto B en el medio dos (suponga que es el agua). Sea v_1 la velocidad de la luz en el medio uno y v_2 la velocidad de la luz en el medio dos. Suponga que el borde que separa ambos medios es plano y denote por "x" la distancia que hay desde el punto 0 hasta el punto P donde la luz pasa del aire al agua.

Sea T el tiempo total empleado en ir desde A hacia B, el cual se puede separar en dos tiempo: T_1 el tiempo que demoró la luz en el medio uno, y T_2 el tiempo que demoró la luz en el medio dos, de esta forma $T = T_1 + T_2$. Se sabe que la velocidad media se calcula como el desplazamiento dividido por el tiempo empleado, por lo que se puede encontrar una fórmula para encontrar el tiempo en términos de la velocidad y del desplazamiento

$$v = \frac{d}{t},$$
$$t = \frac{d}{v}.$$

Así, usando propiedades trigonométricas de los rectángulos rectángulos, se obtiene claramente que

$$T_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$
$$T_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (y - x)^2}}{v_2},$$

de donde $y - x$ representa la distancia que existe entre el punto P y el punto "y" en la figura 5.71. Por lo tanto, es posible tener una expresión del tiempo total que emplea la luz en ir del punto A al punto B en función de la distancia "x", siendo

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (y - x)^2}}{v_2}.$$

Derivando la función, se obtiene

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{y - x}{v_2\sqrt{b^2 + (y - x)^2}},$$

e igualando a cero, como si se quisiera encontrar sus puntos críticos, se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{y - x}{v_2\sqrt{b^2 + (y - x)^2}}.$$

Por otro lado, observe que

$$\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

y que

$$\sin\alpha_2 = \frac{y-x}{\sqrt{b^2+(y-x)^2}},$$

lo que implica que la igualdad obtenida anteriormente queda expresada en términos conocidos como

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2},$$

fórmula conocida como la Ley de Snell.

7.2.5 Concavidad y Convexidad

Si bien ya es posible trazar el gráfico aproximado de una función con lo estudiado hasta el momento en cuanto a las derivadas, aún existen propiedades de la segunda derivada que no se han estudiado y que resultan de gran importancia y utilidad para el trazado de gráficos con mayor exactitud.

Considere una función real f definida sobre un intervalo I. Sea x_0 un punto perteneciente a I tal que f es derivable en x_0. Se define entonces a la recta tangente a f en x_0 como

$$\mathcal{L}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

definida así pues equivale a la conocida ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m

$$y = y_0 + m(x-x_0),$$

resultando ser $\mathcal{L}$ la ecuación de la recta tangente en x_0. Luego se definen:

Definición 7.2.5.1: Se dice que f es *convexa en* x_0 si existe un real positivo δ tal que

$$f(x) > \mathcal{L}(x),$$

para todo $x \neq x_0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

En otras palabras, el que una función sea convexa quiere decir que el gráfico de esta va a estar por encima de la recta tangente a la curva en x_0, en un intervalo que contiene a x_0 (ver figura 7.80).

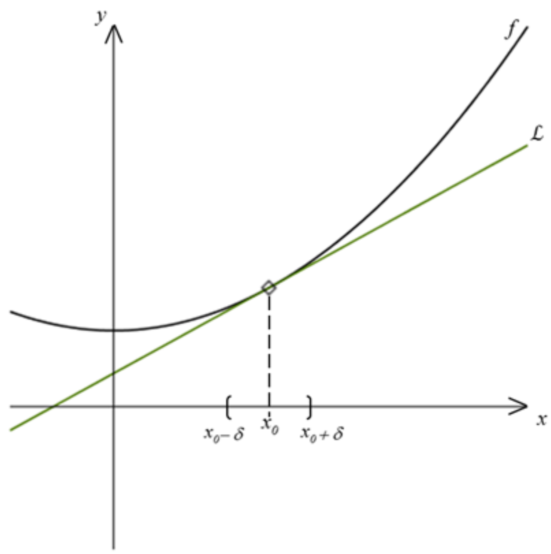

Figura 7.80: Función convexa

Definición 7.2.5.2: Se dice que f es *cóncava en* x_0 si existe un real positivo δ tal que

$$f(x) < \mathcal{L}(x),$$

para todo $x \neq x_0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Lo que en esta caso significa que las funciones cóncavas son aquellas cuyo gráfico está por debajo de la recta tangente a x_0, en un intervalo que contiene a x_0 (ver figura 7.81).

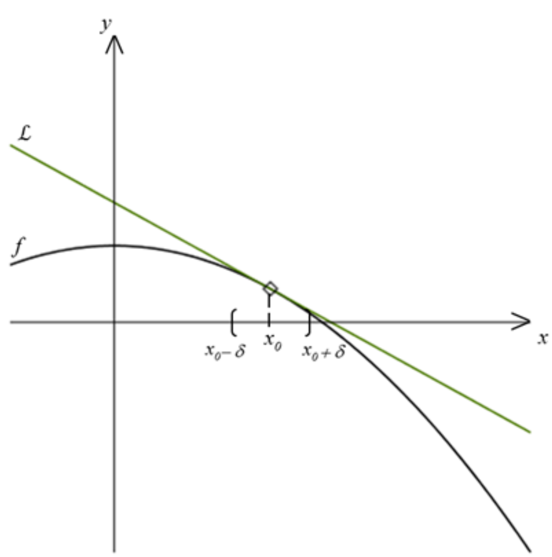

Figura 7.81: Función cóncava

Como suele ocurrir en matemática, trabajar con la definición de un concepto puede resultar complejo o más tedioso de lo necesario, por esta razón, así como se estudió el criterio de la segunda derivada para encontrar máximos y mínimos con más facilidad, en este caso la segunda derivada entrega un criterio para determinar la convexidad o la concavidad de una función.

Teorema 7.2.5.1: Considere una función f con las propiedades anteriormente mencionadas. Además suponga que f es dos veces derivable en x_0 y que $f''(x_0) \neq 0$, entonces:

1. Si $f''(x_0) > 0$, entonces f es convexa en una vencindad de x_0.
2. Si $f''(x_0) < 0$, entonces f es cóncava en una vencindad de x_0.

Demostración:

Considere la función auxiliar

$$E(x) = f(x) - \mathcal{L}(x),$$

es decir

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

De esta forma se tiene que

$$E'(x) = f'(x) - f'(x_0),$$

de donde se concluye que el punto crítico de la función E resulta ser x_0. Luego, calculando la segunda derivada

$$E''(x) = f''(x),$$

en la cual se evalúa el punto crítico, obteniéndose dos casos:

1. Si $f''(x_0) > 0$, entonces, según el criterio de la segunda derivada, la función E tiene un mínimo local en x_0. Si E tiene un mínimo local en x_0, eso significa que existe un intervalo que contiene a x_0, sea este $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con δ un real positivo, en donde

$$E(x) > E(x_0),$$

para todo $x \neq x_0$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pero

$$E(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0,$$

lo que implica que

$$E(x) > 0,$$

es decir

$$f(x) - \mathcal{L}(x) > 0,$$
$$f(x) > \mathcal{L}(x),$$

para todo $x \neq x_0$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, por lo que f es convexa es una vencidad de x_0.

2. Si $f''(x_0) < 0$, aplicando el criterio de la segunda derivada, la función E tiene un máximo local en x_0. Si E tiene un máximo local en x_0, eso significa que existe un intervalo que contiene a x_0, sea este $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con δ un real positivo, en donde

$$E(x) < E(x_0),$$

para todo $x \neq x_0$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Lo que implica que

$$E(x) < 0,$$
$$f(x) - \mathcal{L}(x) < 0,$$
$$f(x) < \mathcal{L}(x),$$

para todo $x \neq x_0$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Por lo tanto, f es cóncava es una vencidad de x_0.■

Por último, y antes de entregar un ejemplo, se dará una nueva definición de punto de inflexión, ahora en términos de convexidad y concavidad:

Definición 7.2.5.3: Se dice que la función f, con las propiedades antes mencionadas, tiene un *punto de inflexión* en x_0 si existe un real positivo δ tal que

1. $f(x) < \mathcal{L}(x)$ en $(x_0 - \delta, x_0)$, es decir, es cóncava en $(x_0 - \delta, x_0)$, y $f(x) > \mathcal{L}(x)$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, es decir, es convexa en $(x_0 - \delta, x_0)$; o si
2. $f(x) > \mathcal{L}(x)$ en $(x_0 - \delta, x_0)$, es decir, es convexa en $(x_0 - \delta, x_0)$, y $f(x) < \mathcal{L}(x)$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, es decir, es cóncava en $(x_0 - \delta, x_0)$.

Véase ahora el siguiente ejemplo:

Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8,$$

donde x puede tomar cualquier valor de la recta real.

Utilizando lo aprendido hasta ahora, se va a trazar el gráfico de f de manera precisa, simplemente determinando sus puntos críticos y a qué corresponden (máximos, mínimos o puntos de inflexión), y los intervalos de convexidad o concavidad que posee.

En primer lugar, se va a derivar la función f, consiguiendo

$$f'(x) = x^2 + x - 6.$$

Igualando a cero y despejando x se obtienen los puntos críticos, que resultan ser $x = -3$ y $x = 2$. Para determinar si corresponden a máximos, mínimos o puntos de inflexión se necesita la segunda derivada de f, que resulta ser

$$f''(x) = 2x + 1.$$

Evaluando en $x = -3$, se obtiene que $f''(-3) < 0$, por lo que según el criterio de la segunda derivada, resulta ser un máximo local. Evaluando ahora en $x = 2$, se obtiene que $f''(2) = 5 > 0$, por lo que tendría un mínimo local según el criterio de la segunda derivada.
Ahora bien, para saber exactamente donde se ubicarán en el plano el máximo local y el mínimo local encontrados, se evalúan dichos puntos críticos en la función original, de esta forma

$$\begin{aligned} f(-3) &= \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8, \\ &= \frac{43}{2}, \end{aligned}$$

es decir, exactamente en el punto $\left(-3, \frac{43}{2}\right)$ la función tiene un máximo local. Y por otra parte

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 8, \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto, en el punto $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ la función tiene un mínimo local.

Lo que se tiene hasta el momento del gráfico de f es algo como

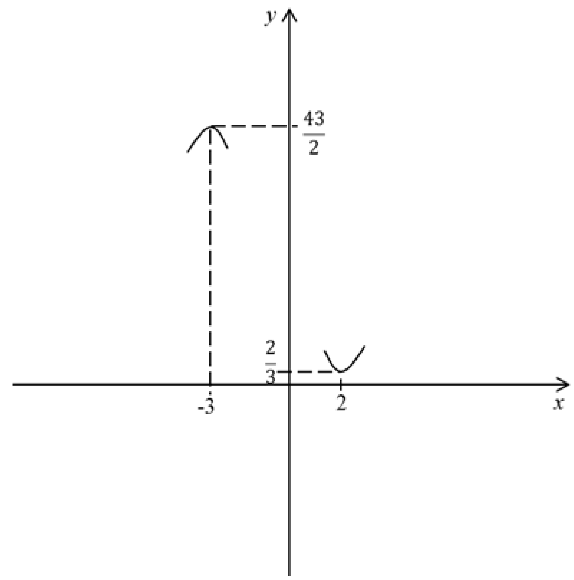

Figura 7.82: Esbozo de gráfica 1

Cabe preguntar si f tendría algún punto de inflexión. Para averiguarlo, basta igualar la segunda serivada a cero

$$2x + 1 = 0,$$
$$x = -\frac{1}{2},$$

donde $x = -\frac{1}{2}$ es un candidato a punto de inflexión. Por otra parte, note que para valores de x tales que

$$-3 < x < -\frac{1}{2},$$

se tiene que $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava en el intervalo $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$. Y para valores de x tales que

$$-\frac{1}{2} < x < 2,$$

se tiene que $f''(x) > 0$, lo que implica que f es convexa en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Por lo tanto, es posible afirmar con propiedad que $x = -\frac{1}{2}$ es un punto de inflexión, y más específicamente, el punto de inflexión se ubica en

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{133}{12}\right),$$

ya que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{133}{12}$.

Hasta el momento, lo que se puede graficar tiene la siguiente forma aproximada

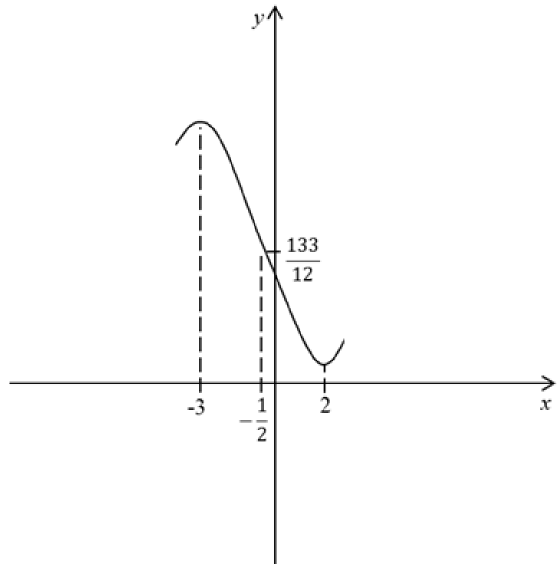

Figura 7.83: Esbozo de gráfica 2

Por último, hay que analizar que ocurre en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, \infty)$. Si $x < -3$, observe que

$$x + 3 < 0\ ;\ x - 2 < 0,$$

por lo tanto $f'(x) > 0$ para $x < -3$, lo que implica que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -3)$. Si $x > 2$, se tiene que

$$x + 3 > 0\ ;\ x - 2 > 0,$$

por ende $f'(x) > 0$ para $x > 2$, lo que implica que f es estrictamente creciente en $(2, \infty)$.

Así, aplicando todo lo aprendido hasta ahora, fue posible determinar el gráfico de la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8,$$

resultando ser con exactitud

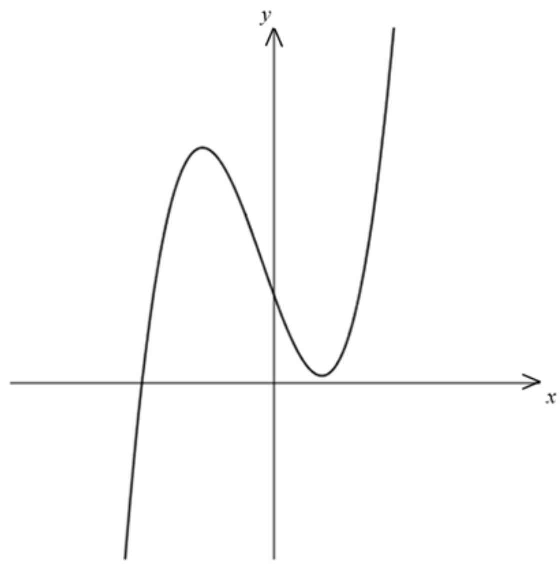

Figura 7.84: Gráfico Final

7.2.6 Función Inversa

En el ejemplo tres de la sección 7.1 de funciones, en donde se mostraban dos maneras de presentar la Ley de Boyle, que según los datos que se manejaran podría ser

$$v = \frac{C}{p} \quad \text{o} \quad p = \frac{C}{v},$$

se insinuaba que la relación entre dos variables podría darse de dos maneras diferentes, pues era posible considerar la primera variable v en función de la segunda variable p, o considerar la segunda variable p como una función de la variable v. Sin embargo, este hecho que parece ser tan obvio, no siempre da resultados útiles para el cálculo, que es la rama de la matemática que aquí se convoca.

Por ejemplo, considere una función en su forma más básica, como concepto de pares ordenados, a saber

$$f = \{(1,3), (2,6), (3,6), (4,12)\},$$

es decir

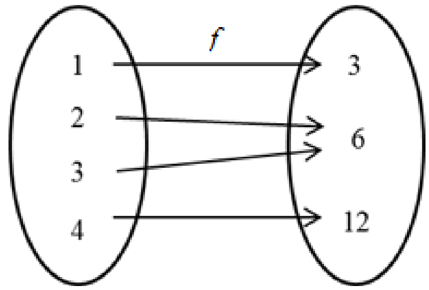

Figura 7.85: Pares ordenados de f

Si se aplicara la idea de que para encontrar la inversa bastaría con “invertir la función”, en este caso equivaldría a invertir el orden de los pares ordenados de f, obteniendo así la supuesta función inversa de f, que se denotará por g

$$g = \{(3,1), (6,2), (6,3), (12,4)\},$$

es decir

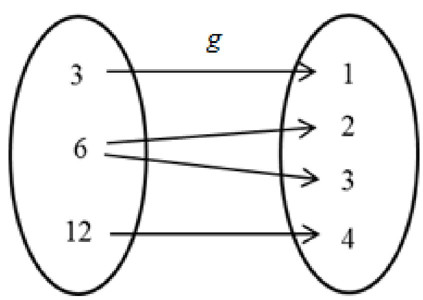

Figura 7.86: Pares ordenados de g

Note inmediatamente que la colección de pares ordenados g no corresponde a una función, pues $(6,2) \neq (6,3)$ y bien se explicó al principio de este documento que una función corresponde a una regla que asigna a cada elemento del dominio solo un elemento del recorrido, y en el caso de g, al valor 6 le asigna dos valores diferentes, por ende g no es función.

Vale pensar entonces que encontrar la inversa de una función no es tan directo como invertir el orden de las variables en juego, y que el caso de la Ley de Boyle fue solo un caso particular, por lo que fue un error pensar que de él se desprendía una regla general. Más aún, antes de siquiera pensar en encontrar la inversa, se debería preguntar cuáles son las funciones que tienen inversa, qué cualidades debe tener una función para que sea posible determinar si tendrá inversa o no, o bajo qué condiciones la tendría, y posteriormente recién comenzar a calcularla. Por esta razón, es necesaria la introducción de algunos conceptos nuevos que permitirán describir una función que sea invertible.

Definición 7.2.6.1: Sea f una función definida sobre intervalos, es decir $f : I_1 \to I_2$, donde I_1 e I_2 son intervalos de la recta real. Se dice que f es *inyectiva* o $1-1$ si para todo x_1, x_2 en I_1 se cumple que si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

O como también es posible definirlo, f será $1-1$ si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

El primer ejemplo en que se debería pensar como función inyectiva, son las conocidas funciones estrictamente crecientes y estrictamente decrecientes, pues, por un lado, para valores $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, y, por otro lado, para valores $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, respectivamente.

Otro concepto necesario será:

Definición 7.2.6.2: Sea f una función definida como $f : I_1 \to I_2$, donde donde I_1 e I_2 son intervalos de $\mathbb{R}$. Se dice que f es *epiyectiva* o *sobreyectiva* si para todo $y \in I_2$ existe $x \in I_1$ tal que $y = f(x)$.

En este caso, no es tan inmediato como decir que, por ejemplo, toda función estrictamente creciente o estrictamente decreciente será sobreyectiva: considere la función raíz cuadrada, definida sobre los reales mayores o iguales a cero, $f(x) = \sqrt{x}$ no es sobreyectiva, pues para cualquier $y < 0$ no existe $x \in [0, \infty)$ tal que $y = f(x)$, ya que, como se sabe, el recorrido de f resulta ser también los reales positivos mayores o iguales a cero. Pero si en este caso se definiera f como la función raíz cuadrada tal que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, entonces, en ese caso, sí sería sobreyectiva (además de inyectiva claramente). Por esta razón no es sencillo dar una “clave” para determinar de inmediato un conjunto de funciones que sean sobreyectivas, sino que hay que analizar esta condición en cada función.

Observación 7.2.6.1: Aquellas funciones que son inyectivas y sobreyectivas a la vez se les denomina *biyectivas*.

Como se mencionó anteriormente, determinar cuándo una función es sobreyectiva no es tan inmediato, por esta razón se presenta el siguiente lema que facilitará determinar las funciones inyectivas y sobreyectivas, aplicando conceptos ya aprendidos.

Lema 7.2.6.1: Sea f una función real tal que $f : I_1 \to I_2$, donde I_1 e I_2 son intervalos abiertos. Si f es continua en el intervalo cerrado de I_1, f es derivable en el abierto I_1 y es estrictamente monótona en I_1 (es decir, es estrictamente creciente o estrictamente decreciente), entonces f es inyectiva y sobreyectiva.

Demostración:
Se demostrará solo el caso en que f sea estrictamente creciente, puesto que el caso de ser estrictamente decreciente es análogo.
Sean x_1 y x_2 en el intervalo I_1 tales que $x_1 < x_2$. Al ser f estrictamente creciente, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, por lo tanto, para $x_1 \neq x_2$ se satisface que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (para el caso en que $x_1 > x_2$ se da trivialmente que $f(x_1) > f(x_2)$, pues la notación de las variables es arbitraria), y de esta forma, f es inyectiva.
Para la epiyectividad se debe demostrar que para todo y en I_2 existe x en $\bar{I_1}$ tal que $y = f(x)$. Sin pérdida de generalidad, sea $I_1 = (a, b)$, luego denote al intervalo cerrado de I_1 por $\bar{I_1} = [a, b]$. Sea $y \in I_2$ tal que $f(a) < y < f(b)$, por lo que hay que demostrar que existe $x \in \bar{I_1}$. Considere la función auxiliar $g(x) = f(x) - y$, al ser f continua en $\bar{I_1}$, g también es continua en $\bar{I_1}$ y además cumple que $g(a) < 0 < g(b)$, luego existe un teorema que, geométricamente, significa que el gráfico de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo, debe cruzar a este eje en algún punto (Spivak, 1988), en otras palabras, significa en este caso que $g(x) = 0$, es decir $f(x) - y = 0$, y asi $f(x) = y$, quedando demostrada la sobreyectividad.■

Ahora que ya se conocen nuevas propiedades que poseen algunas funciones, se tiene lo necesario para dar la siguiente definición:

Definición 7.2.6.3: Sea f una función real que va de I_1 a I_2, donde I_1 e I_2 son intervalos. La función f se dice *invertible* si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = x^3 + 1$ definida en toda la recta real.

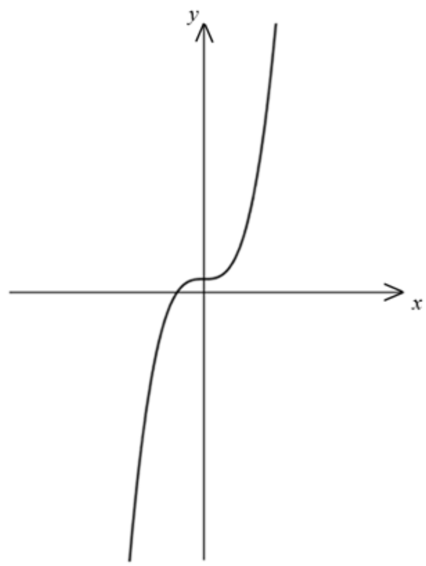

Figura 7.87: $f(x) = x^3 + 1$

Para demostrar la inyectividad, se debe demostrar que $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. En efecto, si

$$f(x_1) = f(x_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} x_1^3 + 1 &= x_2^3 + 1, \\ x_1^3 &= x_2^3, \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

por lo tanto, f es inyectiva. Para la sobreyectividad considere cualquier $y \in \mathbb{R}$, luego hay que demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Considere $x = \sqrt[3]{y-1}$, de esta forma

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[3]{y-1}\right) &= \left(\sqrt[3]{y-1}\right)^3 + 1, \\ &= y - 1 + 1, \\ &= y, \end{aligned}$$

luego, existe un real x, a saber $x = \sqrt[3]{y-1}$, tal que $y = f(x)$, así f es sobreyectiva. En consecuencia, la función es invertible.

A continuación, se verá un método para encontrar la inversa de f. Sea

$$y = x^3 + 1,$$

despejando la variable x se obtiene

$$x = \sqrt[3]{y-1},$$

donde y puede tomar valores en todos los reales, luego, como el nombre de las variables no afecta en la notación, se puede decir con propiedad que la función $f(x) = x^3 + 1$ es invertible y su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, cuyo gráfico está representada por

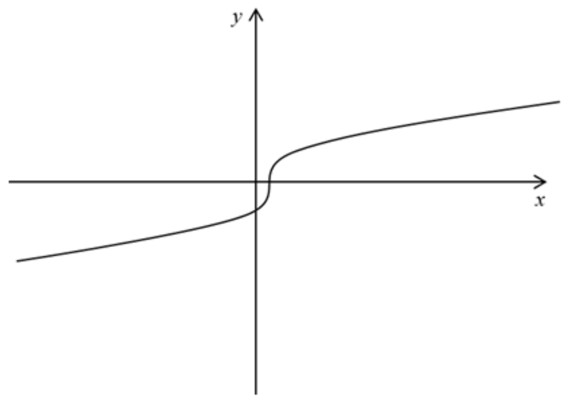

Figura 7.88: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

2. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

para valores de x mayores estricto que cero.

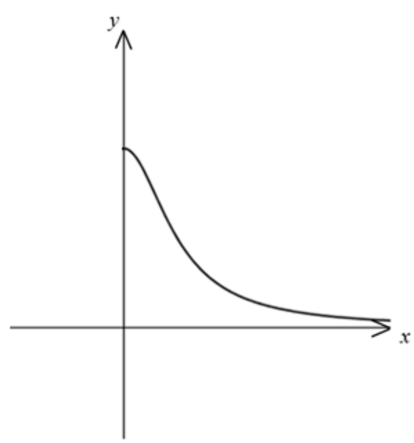

Figura 7.89: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Note que f es continua para valores de $x \geq 0$ y es derivable para valores de $x > 0$. Ahora, derivando f para analizar su monotonía se obtiene

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},$$

donde $\left(1+x^2\right)^2$ es siempre positivo, y $-2x$ es negativo para valores de $x > 0$, por esta razón

$$\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} < 0,$$

siendo entonces f estrictamente decreciente en $(0, \infty)$, lo que implica que f es biyectiva, y en consecuencia, la función es invertible. Para encontrar su inversa, tome

$$y = \frac{1}{1+x^2},$$

y despejando la variable x se obtiene

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}},$$

donde $y > 0$. Así se tiene que f tiene función inversa, siendo precisamente

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

para $x > 0$.

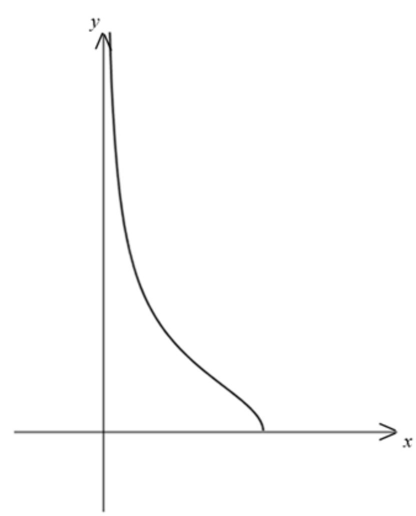

Figura 7.90: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

3. Sea $f(x) = \sin x$, definida en $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$.

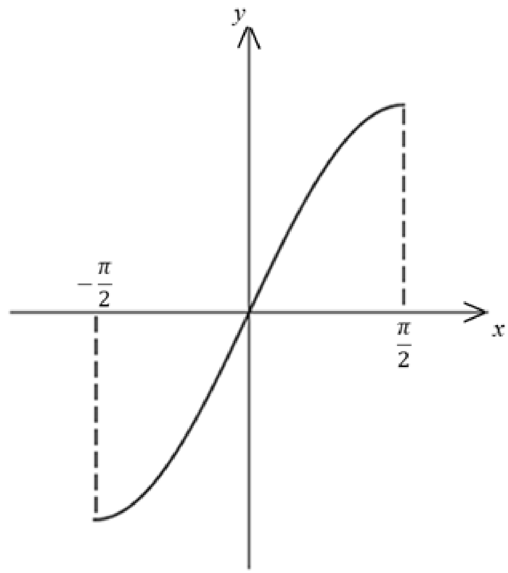

Figura 7.91: $f(x) = \sin(x)$

Observe que f es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, además $f'(x) = \cos x$, función que es positiva para los valores de x en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto, f es invertible y su inversa es la función conocida como

$$f^{-1}(x) = \arcsin x,$$

definida en $f^{-1} : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

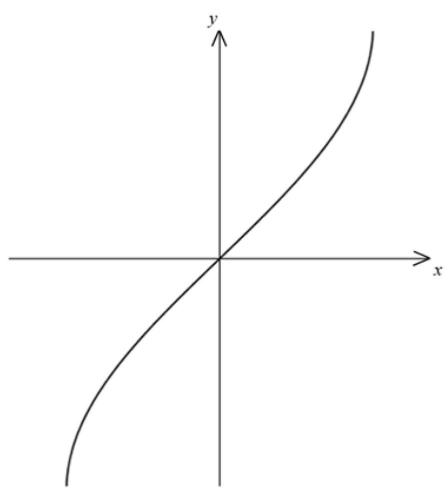

Figura 7.92: $f^{-1}(x) = \arcsin x$

4. Sea $f(x) = \cos$ definida en $f : (0, \pi) \to (-1, 1)$.

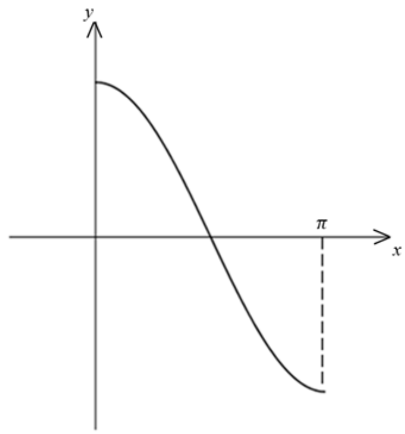

Figura 7.93: $f(x) = \cos x$

En este caso, f es continua en $[0, \pi]$ y derivable en $(0, \pi)$, y su derivada resulta ser $f'(x) = -\sin x$, función que es negativa para x en $(0, \pi)$. Así, f es invertible y su inversa es la función conocida como

$$f^{-1}(x) = \arccos x,$$

definida en $f^{-1} : (-1, 1) \to (0, \pi)$.

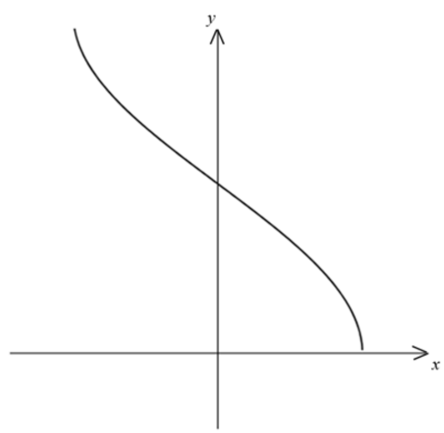

Figura 7.94: $f^{-1}(x) = \arccos x$

Observación 7.2.6.2: Al observar los gráficos de la función f y su inversa f^{-1} en los respectivos casos, note que los puntos de la función inversa son simétricos a los puntos de la función original, respecto a una recta diagonal del plano, más específicamente, esta diagonal corresponde a la función identidad. Es decir, para conseguir el gráfico de f^{-1} basta con encontrar la función que sea simétrica a f con respecto a la función identidad (ver figura 7.95).

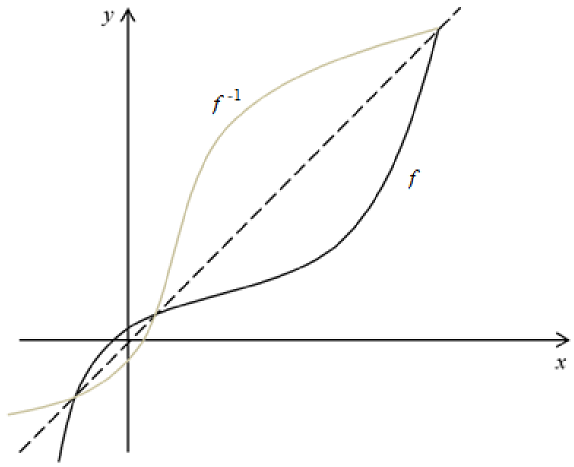

Figura 7.95: Gráfica de f y f^{-1}

Sin embargo, hay que tener cuidado con esta manera casi intuitiva de obtener el gráfico de f^{-1}, pues como se observa en el ejemplo 2, el gráfico de la función inversa no corresponde en un cien por ciento al reflejo por la diagonal del gráfico de f, esto pues $f : (0, \infty) \to (0, 1]$ pero $f^{-1} : (0, 1] \to (0, \infty)$, ya que al ser la inversa una función con raíz cuadrada, jamás resultará de ella valores negativos.

En consecuencia, se desprende que si $f : I_1 \to I_2$ es invertible, entonces

- existe $f^{-1} : I_2 \to I_1$, y que
- $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x.$

Una vez que es posible determinar si una función tiene inversa y, en algunos casos, es posible calcularla, es natural pensar en la derivabilidad de dicha inversa, y el siguiente teorema entrega lo necesario para esto:

Teorema 7.2.6.1: Sea f una función definida sobre intervalos, es decir $f : I_1 \to I_2$. Si f es invertible y derivable en I_1, entonces f^{-1} es derivable en $x_0 \in I_2$ y además

$$f^{-1\prime}(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}.$$

Demostración:

En primer lugar, f es invertible, entonces se tiene la sobreyectividad de la función, y así se puede asegurar que para todo x en I_2 existe un r en I_1 tal que $f(r) = x$, y en particular existe $r_0 \in I_1$ tal que $f(r_0) = x_0$. De esta forma

$$\begin{aligned} f^{-1\prime}(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}, \\ &= \lim_{r \to r_0} \frac{f^{-1}(f(r)) - f^{-1}(f(r_0))}{f(r) - f(r_0)}, \end{aligned}$$

pues cuando $x \to x_0$ se tiene que $f(r) \to f(r_0)$, por ende, $r \to r_0$. Multiplicando tanto numerador como denominador en la expresión anterior por

$$\frac{1}{r - r_0},$$

y usando el hecho de que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$, se consigue

$$\begin{aligned} f^{-1\prime}(x_0) &= \lim_{r \to r_0} \frac{\left(\frac{r - r_0}{r - r_0}\right)}{\left(\frac{f(r) - f(r_0)}{r - r_0}\right)}, \\ &= \frac{1}{\lim_{r \to r_0}\left(\frac{f(r) - f(r_0)}{r - r_0}\right)}, \\ &= \frac{1}{f'(r_0)}, \end{aligned}$$

pero se sabía que $f(r_0) = x_0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(r_0)) &= f^{-1}(x_0), \\ r_0 &= f^{-1}(x_0), \end{aligned}$$

por lo tanto, se obtiene que

$$f^{-1\prime}(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)},$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.■

Observación 7.2.6.3: Observe que de lo que ya se sabía

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

es posible aplicar la regla de la cadena para encontrar la derivada para $x = x_0$ de la expresión anterior, pues ya se cuenta con la hipótesis de que f^{-1} es derivable en x_0. Así, se consigue

$$f'\left(f^{-1}(x_0)\right) f^{-1\prime}(x_0) = 1,$$
$$f^{-1\prime}(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)},$$

la ya conocida fórmula para la derivada de la inversa.

A continuación, véase los siguientes ejemplos en donde se aplica esta fórmula:

1. Sabiendo que $f(x) = x^3 + 1$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, calcular la derivada de f^{-1}.

   De manera directa
   $$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'\left(\sqrt[3]{x-1}\right)},$$
   y como $f'(x) = 3x^2$, entonces
   $$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2},$$
   $$= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}.$$

2. Calcule $\arcsin'(x)$.

   Sea $f(x) = \sin x$ tal que $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Aplicando la fórmula
   $$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(\arcsin x)},$$
   pero $f'(x) = \cos x$, entonces
   $$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$
   Por otro lado, usando la conocida identidad trigonométrica
   $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
   se tiene que
   $$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Así, se obtiene que

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}},\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

De manera análoga, se obtiene que

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Si $f(x) = \tan x$ y $f^{-1}(x) = \arctan x$, calcule la derivada de f^{-1}.

Recuerde que $f'(x) = \sec^2 x$, luego

$$\begin{aligned}f^{-1\prime}(x) &= \frac{1}{f'(\arctan x)},\\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}.\end{aligned}$$

Además, considere la identidad trigonométrica

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x,$$

así

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7.3 Función Potencia con Exponente Real

La sección 7.1 se concluyó con un tipo de función usada con bastante frecuencia, la función potencia. Sin embargo, pese a todo lo que en ese momento se vió, aún quedan otras formas de trabajar con la función potencia y que, de hecho, algunas de esas formas ya se han usado como ejemplo en secciones anteriores.

Sin pensar quizás en que se trata de una función potencia, la función raíz cuadrada es solo una de las formas más simples de una función potencia, esta vez, con exponente en los racionales.

Considere la función potencia

$$f(x) = x^n,$$

con n un entero positivo y x un real positivo. Por la sección 7.2, se sabe que la derivada de f corresponde a

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Observe que la derivada resulta ser estrictamente mayor a cero, ya que n es un entero positivo y x un real positivo. Por lo tanto, según lo aprendido con el Criterio de la Segunda Derivada, la función f es estrictamente creciente. Además, como es sabido, x^n es una función continua en todo su dominio, en consecuencia, y gracias al lema 7.2.6.1 visto en la sección 7.2.6, se tiene que f es biyectiva, y en consecuencia, tiene inversa.

Ahora bien, para encontrar la inversa de la función potencia, considere la ecuación

$$x^n = a,$$

donde a corresponde a un real positivo. Para saber el valor de x, se despeja sacando la raíz n-ésima, resultando así en

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[n]{a}, \\ &= a^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Entonces, se denota por

$$x^{\frac{1}{n}},$$

a la única solución de la ecuación

$$x^n = a.$$

De esta manera, se tiene que la inversa de la función potencia corresponde a

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

ya que

$$\begin{aligned} \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right), \\ &= f\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \\ &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n, \\ &= x^{\frac{n}{n}}, \\ &= x, \end{aligned}$$

y análogamente para $f^{-1} \circ f$.

De esta forma, se ha obtenido una función potencia con exponente racional, es decir

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

para n un entero positivo y x un real mayor que cero. Aún así, no es posible representar todos los racionales mediante la forma $\frac{1}{n}$, es por esto que es necesario generalizar la expresión a la forma $\frac{m}{n}$. Y esto se hace de manera sencilla, pues aplicando la propiedad 6 vista para potencias en la sección 7.1.7, la cual decía que

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n},$$

entonces, en este caso para m un entero positivo se tiene que

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}.$$

Observe que la definición para la potencia con exponente racional no se ve afectada por el signo del exponente, así pues, teniendo en consideración las propiedades para potencias con exponente negativo, es posible generalizar completamente la función potencia con exponente racional de la forma

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}},$$

para x real positivo y $m,\ n$ enteros, con n distinto de cero, la cual satisface todas las propiedades enunciadas para la función potencia con exponente entero en la sección 7.1.7.

Observe los siguientes ejemplos:

1. La función raíz cuadrada
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$
Esta es una función estrictamente creciente que toma valores sobre los reales positivos y el cero, y su gráfico corresponde a

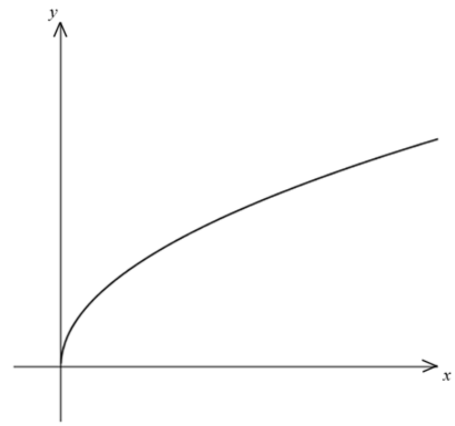

Figura 7.96: Función raíz cuadrada de x

2. La raíz décima de x

$$f(x) = \sqrt[10]{x} = x^{\frac{1}{10}},$$

también es una función estrictamente creciente, cuyo gráfico se encuentra solo en el primer cuadrante, al igual que el de la raíz cuadrada. Su gráfico corresponde a

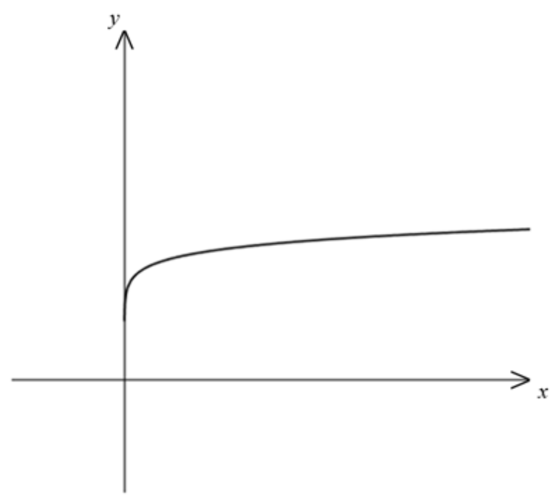

Figura 7.97: Función raíz décima de x

3. La función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}},$$

está definida para todo valor real de x , además f corresponde a una función par, pues

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x).$$

Luego, basta con graficar la función para valores positivos de x, y posteriormente hacer una reflexión con respecto al eje y. Para valores positivos de x, f resulta ser una función creciente, la cual crece más rápido que la raíz cúbica, ya que x está al cuadrado, de esta forma se obtiene

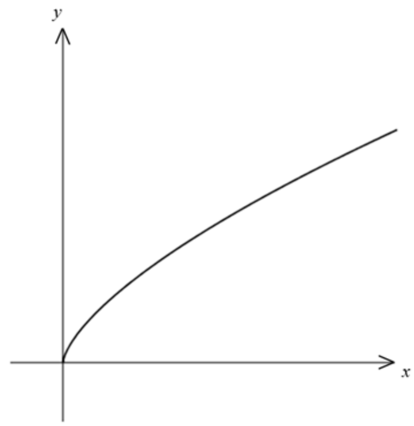

Figura 7.98: Función $x^{\frac{2}{3}}$ para valores positivos de x

Al realizar la reflexión con respecto al eje ordenado resulta

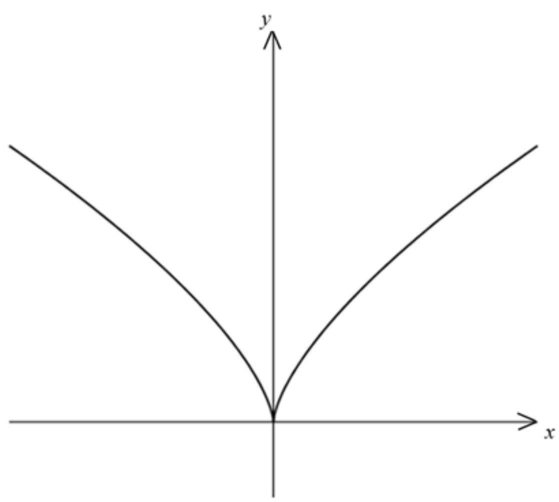

Figura 7.99: Función $x^{\frac{2}{3}}$

4. La función

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}.$$

Observe que es posible reescribir f como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[4]{x^{-3}}, \\ &= x^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

En este caso la variable x únicamente puede tomar valores estrictamente mayores que cero, por lo que su gráfico se ubicará solo en el primer cuadrante, donde ambos ejes coordenados corresponden a asíntotas de la función. Además, f resulta ser una función decreciente, obteniéndose así el gráfico

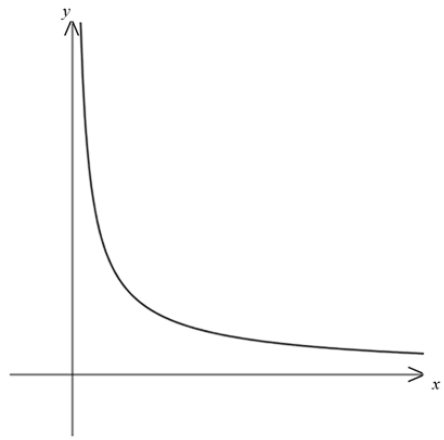

Figura 7.100: Función $x^{-\frac{3}{4}}$

7.3.1 Series de Potencias

Antes de continuar con la generalización de la función potencia, se verá una sección previa sobre series de potencias, lo cual forjará el camino que se desea construir hacia las funciones potencia con exponente real.

Definición 7.3.1.1: Una serie de funciones reales

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

se dice que es una *serie de potencia* alrededor de $x = x_0$ si la sucesión de funciones tiene la forma

$$f_n(x) = a_n (x - x_0)^n ,$$

donde x_0 es un número real, y a_n es una sucesión de números reales para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definida lo que es una serie de potencia, lo siguiente es hablar sobre su convergencia. Antes ello, es necesario conocer algunos conceptos importantes:

Definición 7.3.1.2: Se dice que una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

converge absolutamente si y solo si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

es convergente.

Definición 7.3.1.3: Una sucesión de funciones reales f_n se dice que *converge uniformemente* a una función f en un intervalo I de los reales, si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo x en el intervalo I.

Observación 7.3.1.1: La diferencia entre una convergencia puntual y una convergencia uniforme, consiste en que en la convergencia punto a punto, N depende tanto de x como de ε; en tanto que en la convergencia uniforme se puede elegir N independientemente del punto x.

Teorema 7.3.1.1: *Propiedades de Convergencia de las Series de Potencias.* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

denote por

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

El conjunto para los valores de x donde la serie converge, es un intervalo I. Puntualmente:

1. si $r = +\infty$, entonces el intervalo de convergencia I corresponde a toda la recta real $(-\infty, +\infty)$;
2. si $r = 0$, esto es que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces el intervalo de convergencia I es solo un punto $\{a\}$;

3. si $0 < r < +\infty$, entonces el intervalo de convergencia I corresponde a un intervalo finito, cuyos valores extremos son $x_0 - r$ y $x_0 + r$.

En los puntos interiores del intervalo de convergencia I la serie converge absolutamente. De hecho, la convergencia es uniforme sobre todo intervalo cerrado y acotado contenido en el interior de I.

Demostración:

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|\left|\left(x-x_0\right)^n\right|}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}\left|x-x_0\right|, \\
&= \frac{1}{r}\left|x-x_0\right|.
\end{aligned}$$

Del criterio de la raíz (ver sección 7.4), se concluye que la serie converge absolutamente si

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\left|x-x_0\right| &< 1, \\
\left|x-x_0\right| &< r,
\end{aligned}$$

y diverge si $|x - x_0| > r$. De este hecho entonces, se desprenden todas las afirmaciones del teorema, excepto la referente a la convergencia uniforme de la serie. Para ello, considere un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado contenido en el interior del intervalo I. En tal caso, es posible escoger un punto x_1 en el intervalo I tal que

$$|x - x_0| \leq |x_1 - x_0| < r,$$

para todo x en $[a, b]$; en efecto, se puede tomar como x_1 el punto a o el punto b, según cuál de ellos esté más alejado de x_0. Así pues,

$$\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right| \leq \left|a_n\left(x_1-x_0\right)^n\right|$$

para todo x en $[a, b]$. Como la serie de potencias converge absolutamente en x_1, el M-test de Weierstrass (ver sección 7.4) asegura la convergencia uniforme sobre $[a, b]$.■

Observación 7.3.1.2: El número r se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias.

Si se denota por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$$

para todo x en el intervalo de convergencia I, se deduce de teoremas de convergencia uniforme que f es continua en el interior de I. Cabe entonces preguntarse si f es derivable. Para responder a ello, considere el siguiente teorema:

Teorema 7.3.1.2: *Derivación de Series de Potencias*. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

donde x son puntos del intervalo de convergencia I, f tiene derivadas continuas de todos los órdenes en el interior de I. Los desarrollos en serie de potencias para todas esas derivadas pueden obtenerse por derivación término a término de la serie dada. Todas las series derivadas tienen el mismo radio de convergencia que la serie original dada.

Demostración:

Al derivar la serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots,$$

se obtiene

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \cdots,$$

es decir, la serie obtenida por derivación término a término es nuevamente una serie de potencias, a saber

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Por lo tanto, las derivadas de orden superior serán las series de potencias

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}, \\
f'''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3}, \\
\cdots & \quad \cdots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n (x - x_0)^{n-k},
\end{aligned}$$

las cuales resultan ser todas continuas en el interior de I.

Por otro lado, el radio de convergencia de

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

es el mismo que el de la serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n ,$$

es decir, el inverso de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r},$$

pues

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) = \exp(0) = 1.$$

En consecuencia, la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia que la serie original, demostrando así el teorema.■

Por último, un hecho importante es la unicidad de las series de potencias:

Teorema 7.3.1.3: *Unicidad del desarrollo en Serie de Potencias.* Una función dada puede tener a lo sumo un desarrollo en serie de potencias centrado en un punto dado. Más puntualmente, si la ecuación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

se satiface en algún entorno de x_0, entonces $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Demostración:

Queda al lector.

Para llegar a las funciones potencia con exponente real, es preciso definir previamente dos funciones importantes para este hecho: la función exponencial y la función logaritmo.

7.3.2 Función Exponencial

Se comenzará con la demostración de la existencia de una función muy particular, cuya derivada es ella misma, y que en 0 vale 1

Teorema 7.3.2.1: Existe una función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $E'(x) = E(x)$, para todo x real;
2. $E(0) = 1$.

Demostración:

En primer lugar, defínase la siguiente sucesión de funciones

$$\begin{aligned}
E_1(x) &= 1+x, \\
E_2(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}, \\
E_3(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}, \\
E_4(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}, \\
\cdots & \quad \cdots \\
E_n(x) &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

con x real. Observe que

$$E_n(0) = 1$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
E_1'(x) &= 1, \\
E_2'(x) &= 1+x, \\
E_3'(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}, \\
E_4'(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}, \\
\cdots & \quad \cdots
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
E_2'(x) &= E_1(x), \\
E_3'(x) &= E_2(x), \\
E_4'(x) &= E_3(x), \\
\cdots & \quad \cdots
\end{aligned}$$

por lo que es posible afirmar que

$$E_n'(x) = E_n(x) - \frac{x^n}{n!}.$$

Ahora, considere x en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ de los reales. Luego, para todo real positivo ε, existe un natural N_ε tal que

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{b^n}{n!} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N_\varepsilon$. Por lo tanto, se sigue que la sucesión $\{E_n(x)\}$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$, con a y b reales arbitrarios. En particular, esto significa que $\{E_n(x)\}$ converge para cada real x. Defínase entonces como

$$E(x) \equiv \lim_{n\to\infty} E_n(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. De lo observado al comienzo, esto es $E_n(0) = 1$, es claro que $E(0) = 1$, quedando demostrado el punto 1 del teorema. Además, como

$$E_n'(x) = E_n(x) - \frac{x^n}{n!},$$

también se tiene la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas $\{E_n'(x)\}$. Se sigue entonces que el límite de la sucesión, $E(x)$ es derivable en $[a, b]$ (ver sección 7.4) y que

$$E'(x) = \lim_{n\to\infty}(E_n'(x)) = \lim_{n\to\infty}\left(E_n(x) - \frac{x^n}{n!}\right) = E(x),$$

para todo x en $[a, b]$, pues

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 0.$$

Puesto que a y b son arbitrarios, queda demostrado el punto 2 del teorema.$\blacksquare$

Corolario: La función $E(x)$ definida en el teorema anterior, tiene una derivada de cada orden y

$$E^{(n)}(x) = E(x),$$

para todo n en los naturale y x real.

Demostración:

Se deja al lector.

La función $E(x)$, cuya existencia se demostró gracias al teorema 7.3.2.1, es única:

Teorema 7.3.2.2: La función $E(x)$ definida en el Teorema 7.3.2.1, que satisface los puntos 1 y 2, es única.

Demostración:

Sean E y F dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que satisfacen propiedades 1 y 2 del teorema 7.3.2.1. Si se define

$$G \equiv E - F,$$

entonces observe que

$$G'(x) = E'(x) - F'(x) = E(x) - F(x) = G(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, y

$$G(0) = E(0) - F(0) = 1 - 1 = 0.$$

Gracias a un argumento inductivo, es claro que G tiene derivadas de todo orden, y de hecho

$$G^{(n)}(x) = G(x),$$

para $n \in \mathbb{N}$ y x real. Sea b un real arbitrario, y sea I_b un intervalo cerrado con extremos en 0 y en b. Como G es continua en I_b, existe un real positivo K tal que

$$|G(x)| \leq K,$$

para todo $x \in I_b$. Si se aplica el Teorema de Taylor (ver sección 7.4) a la función G en el intervalo I_b y se usa el hecho que

$$G^{k}(0) = G(0) = 0$$

para todo natural k, se sigue que para cada natural n hay un punto c_n en el intervalo I_b tal que

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + \frac{G'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{G^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{G^{(n)}(c_n)}{n!}x^{n}, \\ &= \frac{G^{(n)}(c_n)}{n!}x^{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$|G(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^n}{n!}\right) = 0,$$

se concluye que $G(x) = 0$. Como $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se tiene que

$$0 = G(x) = E(x) - F(x),$$

implicando así que

$$E(x) = F(x),$$

y que, por lo tanto, la función definida en el teorema 7.3.2.1 es única.$\blacksquare$

La función E además posee varias propiedades características, enunciadas en el siguiente teorema:

Teorema 7.3.2.3: La función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $E(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $E(x+y) = E(x)E(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración:

1. Sea α un real tal que $E(\alpha) = 0$, y sea I_α un intervalo cerrado con puntos extremos en 0 y α. Suponga que existe un real positivo K tal que

$$|E(t)| \leq K,$$

para todo t en el intervalo I_α. El Teorema de Taylor (ver sección 7.4) implica que para cada natural n existe un punto c_n en el intervalo I_α tal que

$$\begin{aligned} 1 = E(0) &= E(\alpha) + \frac{E'(\alpha)}{1!}(-\alpha) + \cdots + \frac{E^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(-\alpha)^{n-1} \\ &\quad + \frac{E^{(n)}(\alpha)}{n!}(-\alpha)^n = \frac{E(c_n)}{n!}(-\alpha)^n, \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que

$$0 < 1 \leq \frac{K}{n!}|\alpha|^n,$$

para $n \in \mathbb{N}$. Pero como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|\alpha|^n}{n!}\right) = 0,$$

resultaría que

$$0 < 1 \leq 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, efectivamente $E(x) \neq 0$ para todo real x.

2. Sea y un número real fijo. Por la proposición demostrada anteriormente, se tiene que $E(y) \neq 0$. Luego, defina una función $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$G(x) \equiv \frac{E(x+y)}{E(y)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando la función G, resulta que

$$G'(x) = \frac{E'(x+y)}{E(y)} = \frac{E(x+y)}{E(y)} = G(x),$$

para todo real x, además

$$G(0) = \frac{E(0+y)}{E(y)} = 1.$$

Por la unicidad de la función E, demostrada en el teorema 7.3.2.2, se sigue que $G(x) = E(x)$, así

$$E(x) = \frac{E(x+y)}{E(y)},$$

por lo tanto, como y era un real arbitrario, se tiene para todo x, y reales

$$E(x+y) = E(x) + E(y). \blacksquare$$

Demostrada la existencia, la unicidad, y algunas propiedades de la función E, es momento de otorgarle una notación y terminología estándar:

Definición 7.3.2.1: La función única $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $E'(x) = E(x)$ para todo real x; y
2. $E(0) = 1$,

se denomina *función exponencial*. Las notaciones usadas para la función exponencial son

$$\exp(x) \equiv E(x),$$

o

$$e^x \equiv E(x),$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Observación 7.3.2.1: El número

$$e = E(1)$$

se llama *número de Euler*.

Teorema 7.3.2.4: La función exponencial satisface

$$E(r) = e^r,$$

para todo racional r.

Demostración:

Mediante una demostración inductiva, y del punto 2 del teorema 7.3.2.3, se sigue que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$E(nx) = (E(x))^n,$$

para $x \in \mathbb{R}$. Si $x = \frac{1}{n}$, entonces la relación anterior implica que

$$e = E(1) = E\left(n\frac{1}{n}\right) = \left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,$$

de donde se concluye que

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}.$$

Por otro lado, también se tiene que

$$E(-m) = \frac{1}{E(m)} = \frac{1}{e^m} = e^{-m},$$

para $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si m y n son naturales, se tiene que

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}},$$

quedando demostrado el teorema.$\blacksquare$

Por último, un teorema que menciona otras de las propiedades más importantes de conocer de la función exponencial:

Teorema 7.3.2.5: La función exponencial e es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y tiene por recorrido al conjunto

$$\mathcal{R}_E = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}.$$

Además, la función exponencial satisface que

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0,$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Demostración:
Para ver la demostración de este teorema, consulte Bartle and Sherbert (1927).

Del teorema anterior, y gracias a lo aprendido sobre gráficas de funciones, es posible determinar el gráfico de la función exponencial, resultando en

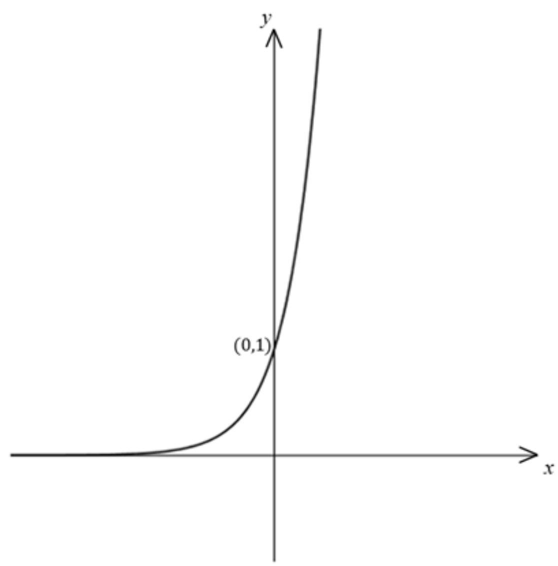

Figura 7.101: Función Exponencial

7.3.3 Función Logaritmo

En la sección anterior, se vió que la función exponencial e es una función estrictamente creciente, diferenciable, con dominio en $\mathbb{R}$ y cuyo recorrido son los reales positivos. Por lo tanto, se sigue que tiene inversa, y esa función inversa es precisamente la que se conoce como *función logaritmo*. Para describirla tal como se describió la función exponencial en la sección anterior, se usará la notación L para la función logaritmo, y se volverá a utilizar la notación E para la función exponencial.

Definición 7.3.3.1: La función inversa de E se denomina *logaritmo natural* (o simplemente, *logaritmo*). Por el momento, se denotará por la letra L.

Observación 7.3.3.1: Ya que E y L son funciones inversas, se tiene que

$$(L \circ E)(x) = L(E(x)) = x,$$

para todo real x, y

$$(E \circ L)(y) = E(L(y)) = y,$$

para todo real positivo y.

Se verán ahora algunas de las propiedades básicas de la función logaritmo:

Teorema 7.3.3.1: El logaritmo L es una función estrictamente creciente, cuyo dominio es el conjunto

$$\mathcal{D}_L = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\},$$

y con recorrido en $\mathbb{R}$. La derivada de L está dada por

1. $L'(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$.
   Además, el logaritmo satisface las siguientes propiedades:
2. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$, para $x > 0$, $y > 0$;
3. $L(1) = 0$ y $L(e) = 1$;
4. $L(x^r) = rL(x)$, para $x > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$.

Demostración:

Que L es una función estrictamente creciente cuyo dominio son los reales positivos y recorrido es toda la recta real, se sigue del hecho que E es estrictamente creciente con dominio en $\mathbb{R}$ y cuyo recorrido son lo reales positivos.

1. Como $E'(x) = E(x) > 0$, entonces, gracias al Teorema 7.2.6.1 de la sección 7.2.6 de Función Inversa, L es diferenciable en $(0, \infty)$ y su derivada se calcula como

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{1}{E'(L(x))}, \\ &= \frac{1}{E(L(x))}, \\ &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

2. Si x e y son reales mayores que cero, defínase $u = L(x)$ y $v = L(y)$. Entonces, claramente se tiene que $E(u) = x$ y $E(v) = y$. De la propiedad 2 del Teorema 7.3.2.3 se sigue que

$$x \cdot y = E(u) \cdot E(v) = E(u+v),$$

así

$$\begin{aligned} L(x \cdot y) &= L(E(u+v)), \\ &= u + v, \\ &= L(x) + L(y), \end{aligned}$$

para todo $x, y > 0$.

3. Se deduce claramente del hecho que $E(0) = 1$ y $E(1) = e$, al aplicar L sabiendo que corresponde a la función inversa de E.

4. Es análoga a la demostración vista para el Teorema 7.3.2.4, pues gracias a la propiedad demostrada previamente en el punto 2 y mediante inducción matemática para $n \in \mathbb{N}$, es posible extender a $r \in \mathbb{Q}$.$\blacksquare$

La notación estándar de la función logaritmo corresponde a $\ln$, por lo que al reescribir la observación 7.3.3.1, se obtiene entonces que

$$\ln(\exp(x)) = x,$$

para todo x real, y

$$e^{\ln(y)} = y,$$

para todo real positivo y.

Por último, es importante de mencionar los límites en el infinito y cuando x de acerca a cero por la derecha en la función logaritmo.

Teorema 7.3.3.2: La función logaritmo satisface que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

y que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Demostración:

Por el Teorema 7.3.2.5 se sabe que

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

y que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$$

Como $\ln(e^n) = n$ y $\ln(e^{-n}) = -n$, se sigue del hecho que el logaritmo es estrictamente creciente que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln(e^n) = +\infty,$$

y que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(e^{-n}\right) = -\infty,$$

demostrando así el teorema.■

Al ser el logaritmo natural la función inversa de la función exponencial, por lo aprendido en la sección 7.2.6 sobre funciones inversas, es posible obtener el gráfico de la función logaritmo a partir de una reflexión con respecto al origen del gráfico de la función exponencial, resultando entonces

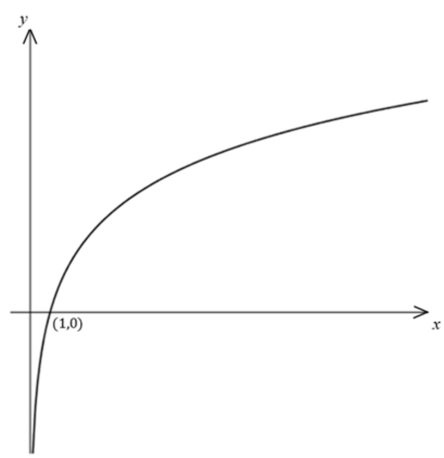

Figura 7.102: Función Logaritmo Natural

7.3.4 Funciones Potencias

Al comienzo de la sección 7.3, se describieron las funciones potencias

$$f(x) = x^r,$$

para $x > 0$, donde r es un racional. A continuación, mediante las funciones exponencial y logaritmo, se extenderá la noción de función potencia desde los racionales a todo número real.

Definición 7.3.4.1: Si α es un número real arbitrario y x es un real positivo, el número x^α se define como

$$x^\alpha \equiv e^{\alpha \ln(x)} = E\left(\alpha \cdot L\left(x\right)\right).$$

La función

$$f\left(x\right) = x^\alpha,$$

para $x > 0$, se denomina *función potencia con exponente real* α.

Observación 7.3.4.1: Si $x > 0$ y $\alpha = \frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, entonces se define

$$x^\alpha = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}},$$

tal como se vió al comienzo de este capítulo. Así, se tiene que $\ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \cdot \ln\left(x\right)$, de donde

$$x^\alpha = \exp\left(\ln\left(x^\alpha\right)\right) = \exp\left(\alpha \cdot \ln\left(x\right)\right).$$

Por lo tanto, la definición 7.3.4.1 es consistente con la definición dada al comienzo de la sección 7.3.

Ahora, se expondrán algunas propiedades básicas de las funciones potencias con exponente real, cuyas demostraciones se dejan al lector, pues resultan ser consecuencia directa de las propiedades las funciones exponencial y logaritmo.

Teorema 7.3.4.1: Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y x, y pertenecen a $(0, +\infty)$, entonces:

1. $1^\alpha = 1;$
2. $x^\alpha > 0;$
3. $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha;$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha};$
5. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta;$
6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha;$

7. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$;

8. Si $\alpha < \beta$, entonces $x^{\alpha} < x^{\beta}$, para $x > 1$.

El siguiente resultado corresponde a la diferenciablidad de la función potencia.

Teorema 7.3.4.2: Si α es un real arbitrario y x pertenece a $(0, +\infty)$, entonces la función

$$f(x) = x^{\alpha}$$

es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1},$$

para $x \in (0, \infty)$.

Demostración:

Por la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} (x^{\alpha})' &= \left(e^{\alpha \ln(x)}\right)', \\ &= e^{\alpha \ln(x)} \cdot (\alpha \ln(x))', \\ &= e^{\ln(x^{\alpha})} \cdot \alpha \cdot (\ln(x)), \\ &= x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}, \\ &= \alpha x^{\alpha - 1}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la regla de la derivada de una potencia, es válida para exponentes en los reales.■

Por último, para saber cómo graficar las funciones potencia, será necesario saber qué ocurre con la función cuando α es positivo y cuando α es negativo. La siguiente proposición, otorgará lo necesario para graficar las funciones potencia:

Proposición 7.3.4.1: Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función potencia

$$f(x) = x^{\alpha},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, entonces la función potencia x^α es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, además

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

Si $\alpha < 0$, entonces la función potencia x^α es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$, además

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0.$$

Demostración:

Gracias al Teorema 7.3.4.2, se sabe que la derivada de la función potencia corresponde a

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

donde $x \in (0, +\infty)$. Además, por el punto 2 del Teorema 7.3.4.1, se tiene que para cualquier valor real de α, $x^\alpha > 0$. Así:

Si $\alpha > 0$, entonces

$$\alpha x^{\alpha-1} > 0,$$

por el Teorema 7.2.3.1 se concluye que la función potencia x^α es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. De esta forma, es claro que para valores positivos de α se cumple que

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

Y si $\alpha < 0$, entonces

$$\alpha x^{\alpha-1} < 0,$$

ahora por el Teorema 7.2.3.2, se concluye que la función potencia x^α es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. Luego, es claro que para valores negativos de α se satisface que

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{-\alpha}} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}} = 0. \blacksquare$$

Observación 7.3.4.2: Si $\alpha = 0$, entonces la función potencia x^{α} corresponde a la función constante 1, pues $x > 0$.

Ahora sí se está en condiciones de graficar la función potencia x^{α}, y es fácil observar que el resultado para los diversos es

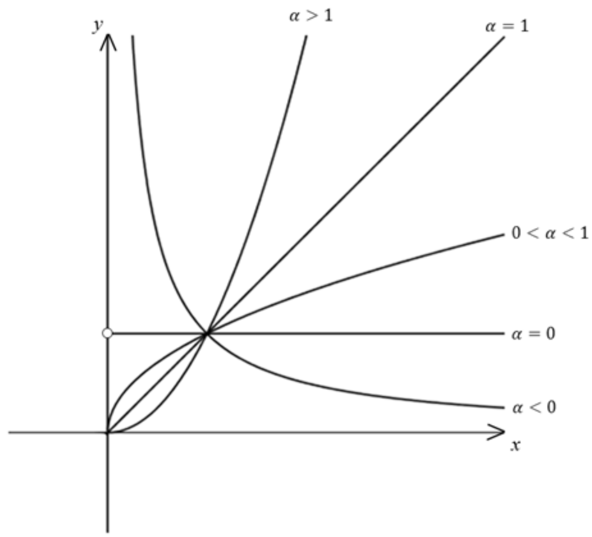

Figura 7.103: Funciones Potencias x^{α}, $x > 0$

7.4 Demostración de algunos teoremas

Convergencia de Series: *Criterio de la Raíz*. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

iii) Si $r = 1$, el criterio no decide.

Demostración:

i) Suponga que $r < 1$ y sea λ un real tal que $r < \lambda < 1$. Por definición de límite, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$, que es equivalente a decir $a_n \leq \lambda^n$. Por otra parte, la serie $\sum \lambda^n$ corresponde a una serie geométrica, donde $0 < \lambda < 1$, por lo tanto es convergente. Entonces, por el criterio de comparación directa, la serie $\sum a_n$ también es convergente .

ii) Suponga que $r > 1$ y sea λ un real tal que $1 < \lambda < r$. Luego, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $\sqrt[n]{a_n} \geq \lambda$, es decir $a_n \geq \lambda^n$. En este caso, la serie geométrica $\sum \lambda^n$ diverge, pues $\lambda > 1$, por lo tanto, por criterio de comparación directa, la serie $\sum a_n$ también diverge.

iii) Considere las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Aplicando logaritmo natural y sus propiedades, es sencillo comprobar que para ambos casos se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Sin embargo, aplicando el criterio de las p-series se tiene que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, pero la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.$\blacksquare$

M-test de Weierstrass: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto S, y suponga que existe una sucesión de constantes $M_1, M_2, \ldots$ tales que

1. $|f_k(x)| \leq M_k$, para todo entero positivo k y $x \in S$; y

2. $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$.

Entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

converge uniformemente (y absolutamente) sobre S.

Demostración:

Considere las sumas parciales

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$$

y

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Para $n > m$, se tiene

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k = |T_n - T_m|$$

para todo x es S. Luego

$$\|S_n - S_m\| \leq |T_n - T_m|.$$

Como $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

Así pues, $\{S_n\}$ converge uniformemente sobre S.■

Convergencia de una Sucesión de Funciones: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo acotado y sea (f_n) una sucesión de funciones que van de I a $\mathbb{R}$. Suponga que existe $x_0 \in I$ tal que $(f_n(x_0))$ converge, y que la sucesión (f_n') de derivadas existe en I y converge uniformemente en I a una función g.
Entonces, la sucesión (f_n) converge uniformemente en I a una función f que tiene derivada en cada punto de I, y $f' = g$.

Demostración:

Sea $a < b$, con a y b los puntos extremos del intervalo I, y sea $x \in I$ arbitrario. Si $m, n \in \mathbb{N}$, y aplicando el Teorema del Valor Medio a la diferencia $f_m - f_n$ en el intervalo con puntos extremos x_0, x, se concluye que existe un punto y (que depende de m y n) tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\left[f_m'(y) - f_n'(y)\right].$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\|f_m - f_n\| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\|f'_m - f'_n\|.$$

Del criterio de Cauchy para convergencia uniforme, se sigue de la expresión anterior y de las hipótesis del teorema que $f_n(x_0)$ es convergente, y el hecho que (f'_n) es uniformemente convergente en I implica que (f_n) es uniformemente convergente en I.
Denote por f al límite de la sucesión (f_n). Ya que las funciones f_n son todas continuas y que la convergencia es uniforme, sigue que f es continua en I.

Ahora, suponga la existencia de la derivada de f en un punto $c \in I$, y aplique el Teorema del Valor Medio a la diferencia $f_m - f_n$ en un intervalo con puntos extremos c y x. Se concluye entonces que existe un punto z, que depende de m y n, tal que

$$[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(c) - f_n(c)] = (x-c)[f'_m(z) - f'_n(x)].$$

Por lo tanto, si $x \neq c$, se tiene que

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \|f'_m - f'_n\|.$$

Ya que (f'_n) converge uniformemente en I, si se toma un real $\varepsilon > 0$, existe H_ε tal que si $m, n \geq H_\varepsilon$ y con $x \neq c$, entonces

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon.$$

Si se toma el límite con respecto a m en la expresión anterior, y usando el hecho de que para toda sucesión convergente y acotada, entonces su límite está delimitado por las mismas cotas, se tiene que

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon,$$

siempre que $x \neq c$, y que $n \geq H_\varepsilon$.
Si $g(c) = \lim(f'_n(c))$, existe N_ε tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces $|f'_n(c) - g(c)| < \varepsilon$.
Ahora, defina como $K =$ *Sup*$\{H_\varepsilon, N_\varepsilon\}$. Ya que $f'_K(c)$ existe, existe $\delta_K(\varepsilon)$ tal que si

$$0 < |x-c| < \delta_K(\varepsilon),$$

entonces

$$\left|\frac{f_K(x) - f_K(c)}{x-c} - f'_K(c)\right| < \varepsilon.$$

Relacionando estas desigualdades, se concluye que si $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < 3\varepsilon.$$

Como el real $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto muestra que $f'(c)$ existe y es igual a $g(c)$. Además, como el número $c \in I$ es arbitrario, se concluye que $f' = g$ en I.■

Teorema de Taylor: Sea n un natural, $[a, b]$ un intervalo de los reales, y sea una función definida como $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que f y sus derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ son continuas en I, y que su derivada $f^{(n+1)}$ existe en (a, b). Si $x_0 \in [a, b]$, entonces para cualquier x en $[a, b]$ existe un punto c entre x y x_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demostración:

Sean x_0 y x puntos dados, y denote por I al intervalo cerrado con extremos en x_0 y x. Defina una función F en I como

$$F(t) \equiv f(x) - f(t) - (x - t) f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t),$$

para t en I. Derivando la función F,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - [-f'(t) + (x - t) f''(t)] - \left[-2(x - t) f''(t) + (x - t)^2 f'''(t)\right] - \\ &\quad \cdots - \left[\frac{-n(x - t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right], \end{aligned}$$

por lo que es claro que

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Ahora, si se define una función G en I como

$$G(t) \equiv F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$

para t en I, entonces claramente

$$G(x_0) = G(x) = 0.$$

Por el Teorema de Rolle, existe un punto c entre x_0 y x tal que $G'(c) = 0$, esto es

$$F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) = 0.$$

Por lo tanto, despejando $F(x_0)$

$$F(x_0) = -\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c),$$

y sabiendo que

$$F'(c) = -\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c),$$

se obtiene entonces

$$F(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

que, según la definición de $F(t)$, implica precisamente el resultado que se quería demostrar.$\blacksquare$

7.5 Reseña Histórica

Se otorgará una breve reseña histórica de los conceptos más importantes estudiados en este documento:

El concepto de Función: La definición de función con la que se trabaja actualmente, es resultado de siglos de cambios y mejoramientos otorgados por diversos matemáticos a una definición incial dada por Bernoulli en el siglo $XVIII$. Sin embargo, ya en la época antigua $(1830 - 1531$ a.C.) los babilónicos habían desarrollado, sin saberlo, lo que parece ser el incipiento nacimiento del uso de funciones, mediante tablillas en las que grababan fracciones, cuadrados de números y cubos de números, solo por nombrar algunas de sus anotaciones .

Pasados varios siglos, fueron *T. Bradwardine* y *N. De Oresme* en el siglo XIV quienes, haciendo estudios de física, dieron la primera aproximación del concepto más profundo de función, al describir las leyes de la naturaleza (como velocidad y variación de temperatura, entre otros fenómenos estudiados) como relación de dependencia entre dos magnitudes. Luego fue *René Descartes* quien en el siglo $XVII$ introdujo y desarrolló la geometría analítica. Gracias a sus métodos algebraicos en geometría, mostró el camino para la introducción de la noción de función: desde ese momento, cualquier curva del plano podía ser expresada en términos de ecuaciones, y cualquier ecuación que relacionara dos variables podía ser representada geométricamente en el plano .

Si bien *Newton* y *Leibniz* trabajaron por su parte en lo que hoy se conoce como *Cálculo*, no es atribuible a ellos una definición concreta de función, pese a haber desarrollado el Cálculo Infinitesimal. Es *Bernoulli* que, aproximadamente en el año 1718 describe por primera vez lo que es una función, para que, años más tarde, *Leonnard Euler* mejorara esta definición y, de hecho, precisara su misma definición en una segunda versión, siendo el primero en escribir $f(x)$, para hacer referencia a una función f aplicada sobre el argumento x .

No obstante, fue a *Gustave Dirichlet* a quien se le atribuye la definición formal moderna de función, considerando que la variable x estaba restringida a un intervalo. Pero esta definición seguía sin precisar nada con respecto al intervalo ni al comportamiento de y con respecto a x, así fue que *Edouard Goursat* establece que "y es una función de x si, a cada valor de x le corresponde un valor de y, y esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$" . Mas, conceptos como "valor" y "correspondencia" seguían sin clarificarse, hasta que después de varios años de ajustes a la definición de función, a finales del siglo XIX y a principios del siglo XX, surgió un concepto nuevo, el de *conjunto*, y con él el desarrollo de la *Teoría de Conjuntos*, el cual fue clave para la caracterización actual de función, como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos cualesquiera, no necesariamente numéricos. Definición con la que se trabaja en la actualidad .

El concepto de Derivada: Es común oir que fueron *Newton* y *Leibniz* quienes inventaron el cálculo infinitesimal, y, en particular, las derivadas. Sin embargo, sin cuestionar el enorme trabajo que realizaron indistintamente ambos científicos, el suyo no fue el único, puesto que las derivadas, que es el concepto en que ahora nos enfocamos, fue el resultado de una evolución histórica de problemas y soluciones que diversas civilizaciones y científicos fueron abordando a través de largos años.

Con los griegos surgió uno de los problemas que darían origen a las derivadas: hallar la ecuación tangente a una curva dada en un punto determinado de ella. Este problema fue resuelto hasta cierto punto, los matemáticos griegos lograron trazar rectas tangentes a diversos tipos de curvas, naturalmente, mediante técnicas puramente geométricas lo que resultaba en un concepto de tangencia bastante estático. Pero el problema de encontrar tangentes a curvas quedó estancando, tuvieron que pasar cientos de años antes de obversar avances significativos en esta área, y en el cálculo infinitesimal en general. Con la invención de la geometría analítica, surgió una gran variedad de nuevas curvas, para las cuales los métodos geométricos no servían para calcular sus tangentes. Además aparecieron otros problemas, como el calcular máximos y mínimos de una función, y otros relacionados a la física, como problemas de óptica y trayectoria de cuerpos, problemas que obligaron en cierto modo a los matemáticos del siglo $XVII$ a crear nuevas técnicas para el cálculo de tangentes.

Pierre de Fermat creó un método para hallar la tangente a una curva definida por un polinomio de grado n, el cual consistía en: si $f(x)$ es un polinomio, entonces la diferencia $f(x+h) - f(x)$ es divisible por h, posterior a la división se eliminan los términos con h, tal y como se hace actualmente cuando se está aprendiendo a calcular derivadas por definición (haciendo tender el h a cero). Sin embargo, no usa infinitesimales ni los define.

René Descartes también trabajó para calcular tangentes de curvas, mas con sus métodos se retorna al concepto estático de tangente, como los griegos.

Gilles de Roberval y *Evangelista Torricelli*, de manera independiente, descubrieron un método para calcular tangentes mediante consideraciones cinemáticas, cuyas ideas básicas eran considerar una curva con la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y considerar la tangente en un punto a la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto.

Isaac Barrow utilizaba el método de Fermat a curvas de la forma implícita $f(x, y) = 0$, aplicando la idea de la tangente como el límite de las rectas secantes, no obstante seguía aplicando bases de geometría griega.

Posterior a todos los trabajos mencionados (y a otros más), aparecen *Isaac Newton* y*Gottfried Leibniz*, cuyos trabajos consistieron, indistintamente, en realizar una síntesis de todos los trabajos anteriores. Pese a que Newton hizo sus descubrimientos diez años antes que Leibniz, fue éste quien publicó primero sus conclusiones .

En 1666 Newton introdujo el concepto de *fluxión*, que es lo que hoy se conoce como derivada. Las conclusiones de Newton fueron producto de consideraciones físicas, pues partía de la imagen cinemática de una curva como trayectoria de un movil. La velocidad en cada punto tenía como componentes la velocidad según las direcciones de los ejes x e y; luego, para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, calculaba el cuociente $\frac{y}{x}$.

Leibniz en cambio, obtuvo sus resultados en la búsqueda de crear un lenguaje universal, surgiendo así el concepto de *infinitesimales*. Leibniz interpreta la derivada como el cuociente de los infinitésimos $\frac{dy}{dx}$, notación que es usada hasta estos tiempos .

Como se observa, los resultados de Newton y Leibniz son prácticamente los mismos, aunque originados de distinta manera. El trabajo de síntesis que ambos científicos realizaron de los resultados anteriores de matemáticos que trabajaron en estos problemas, fue clave en el desarrollo del cálculo, particularmente, en cuanto a derivadas.

El concepto de Polinomio: Los Babilónicos y Egipcios fueron los primeros pueblos, de los que se tiene registro, en trabajar con polinomios. Se han traducido papiros egipcios que datan del 2000 a.C. en donde se encuentran soluciones a lo que hoy corresponden a ecuaciones de primer grado.

Pasado los años, matemáticos griegos, hindúes, árabes y europeos avanzaron en el estudio de estas ecuaciones, progresando en las notaciones, abreviaturas y comenzando a dar reglas para la solución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. En el siglo IX existió un matemático, astrónomo y geógrafo persa de progen musulman, conocido como *al-Jwarizmi*, quien trabajó con lo que él llamó “álgebra” y “algoritmo”. En la actualidad es posible comprender el concepto de álgebra de al-Jwarizmi: se trataba de la teoría de las ecuaciones lineales y cuadráticas con una sola incógnita, y de la aritmética de binomios y trinomios relativos.

Luego fue el turno del matemático italiano *Leonardo de Pisa*, quien realizó nuevos aportes al álgebra y se encargó de divulgarlos por toda Europa.

Hasta antes del siglo XVI fue objetivo de muchos matemáticos encontrar una fórmula para encontrar las soluciones de cualquier ecuación cúbica, sin obtener buenos resultados. Fue *Scipione del Ferro* quien obtuvo esta fórmula en primer lugar, y años más tarde *Niccoló Tartaglia* también la obtuvo de manera independiente. Sin embargo, fue *Girolamo Cardano* quien hizo pública la fórmula, luego de estudiar los trabajos de del Ferro y de Tartaglia, por esta razón el método de resolución para ecuaciones cúbicas es conocido como "Fórmula de Cardano" .

Posteriormente, *René Descartes* en 1637 adoptó la letra x para denotar la incógnita, además comenzó a usar números enteros en los exponentes. *Isaac Newton* en 1676 generalizó la fórmula para desarrollar un binomio, y extendió el procedimiento al caso de los exponentes negativos y fraccionarios .

Capítulo 8

Anexos

A continuación, se adjuntan el instrumento utilizado para la evaluación de la Monografía en Cálculo Diferencial, y la carta del profesor que puso a disposición de sus alumnos la monografía.

Cuestionario:

Cuestionario de Evaluación del Proyecto de Tesis:
Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial

Proyecto de tesis realizado por la estudiante del Magister en Educación Matemática, Camila Salgado Caniumil, que consta de la construcción de una Unidad Didáctica en Cálculo Diferencial, dirigida a estudiantes de Pedagogía en Matemáticas que estén cursando su primer año académico, como material de apoyo para la formación de docentes con competencias y habilidades matemáticas desarrolladas.

Instrucciones Generales: El siguiente instrumento consta de dos partes.
La primera parte está compuesta de preguntas de aspectos generales, con respecto a la evaluación del documento. Cada pregunta posee 3 indicadores de niveles de apreciación, detallados según corresponda.
La segunda parte consta de dos preguntas abiertas, en donde tendrá la libertad para expresar su opinión con respecto al documento, bajo la perspectiva de que es un material dirigido a profesores de matemática en formación.

- PARTE I

Indicadores	Indiferente	En desacuerdo	De acuerdo
Fue útil tener el material a disposición para trabajar clase a clase, en su forma física y/o digital			
El contenido del texto se presenta de manera clara, con un lenguaje, vocabulario y redacción adecuada al nivel del estudiante			
La lectura del documento se hizo agradable, liviana y fácil de leer			
Los ejemplos presentados en el documentos fueron explicativos y claros para la comprensión del contenido en cuestión			
Los ejemplos presentados en el texto fueron novedosos e innovadores			
La cantidad de ejemplos presentados por sección es la adecuada para que el estudiante comprenda el concepto en cuestión			

- PARTE II

1. Según su opinión, qué sugerencias le hace al documento, con respecto al contenido, ejemplos, imágenes, y a la fluidez de la lectura, ya sea para incluir o quitar en alguna próxima versión.

2. Comente alguna observación de otra índole, respecto a algún tema que no se haya mencionado con anterioridad.

Recursos bibliográficos

(2015). Bases curriculares 7mo básico a 2do medio. Ministerio de Educación.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 1(1):40–55.

Bacallao, A., Boulet, R., and Valdivia, M. d. l. Á. (s.f.). Apuntes sobre el surgimiento del concepto función en la historia. Universidad Pedagógica Juan Marinello, Cuba.

Bartle, R. and Sherbert, D. (1927). *Introduction to Real Analysis*. Third edition.

Boardman, J. (2008). *The Cambridge Ancient History: The Assyrian and Babylonian Empires and other states of the near east, from the eighth to the sixth centuries B.C.*, volume III. 2nd edition.

Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática*.

Bransford, J., Brown, A., and Cocking, R. (1999). *How People Learn*.

Carreño, X. and Cruz, X. (2002). *Álgebra*. Arrayán Editores S.A., 2nd edition.

Collette, J.-P. (1985). *Historia de las Matemáticas*. España.

Coló, A. and Patritti, H. (2004). *Aplicaciones de la derivada. Ejercicios resueltos*. Montevideo, Uruguay.

Corvalán, O. and Montero, P. (s.f.). La componente matemática en la formación docente por competencias.

Corvalán, O., Tardif, J., and Montero, P. (2013). *Metodologías para la innovación curricular universitaria basada en el desarrollo de competencias*. México.

Courant, R. and McShane, E. (1934). *Differential and Integral Calculus*, volume 1. Interscience.

Desconocido (2009). Modelos matemáticos en biología: Teoría. Universidad de Jaén. Departamento de Matemáticas. España.

Desconocido (s.f.). Matemática: Temas y actividades. Servicio de Educación a Distancia SEAD. Argentina.

Domínguez, Y. S. (2007). El análisis de información y las investigaciones cuantitativa y cualitativa. *Revista Cubana Salud Pública*, 33(2).

Guzmán, R. et al. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 1(1).

Jiménez, S., Salazar, V., and Mora, L. (2013). La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. Santo Domingo, República Dominicana. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMCYC.

Kitchen, J. (1992). *Calculo*. Publishing Company, INC.

Lajoie, S. (2003). Transitions and trajectories for studies of expertise. *Educational Reseacher*.

Larson, R. and Hostetler, R. (1991). *Cálculo y Geometría Analítica*. 3rd edition.

Martín, M. (2008). Orígenes del cálculo diferencial e integral: historia del análisis matemático. Granada.

Massmann, H. and Muñoz, V. (2008). Introducción a la mecánica.

Montero, P. (s.f.). Un modelo de análisis para contribuir a superar los desafíos del nuevo siglo sobre los aprendizajes matemáticos. In *Sociedad Chilena de Educación Matemática*.

Muñoz, M. and Román, N. (s.f.). Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal. Departamento de Matemática Aplicada y Telemática. Barcelona.

Newman, G. D. (2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales. *Revista de educación Laurus*, pages 180–205.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, pages 115–124.

Pérez González, F. (s.f.). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. *Departamento de Análisis Matemático*. Universidad de Granada.

Ponte, P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. 3(2).

Rico, L. (1997). *Organizadores de Currículo de Matemáticas, en La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, pages 275–294.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A., and Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación.

Rodríguez, M. A., Pochulu, M. D., and Ceccarini, A. M. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de matemática superior que favorecen la comprensión: un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educación Matematica Pesquisa (EMP)*, 13(3).

Ruiz, Á., Alfaro, C., and Gamboa, R. (2006). Conceptos, procedimientos y resolución de problemas en la lección de matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*.

Salas, S., Einar, H., and Etgen, G. (2002). *Calculus. Una y varias variables*, volume I. 4th edition.

Salinas, P. and Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educatica. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 12(3):355–382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., and Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educatica (RELIME)*, 11(2).

Spivak, M. (1988). *Cálculo Infinitesimal*. 2nd edition.

Thomas, G. and Finney, R. (1998). *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, 9th edition.

Van Horne, J. and Wachowicz, J. (2002). *Fundamentos de administración financiera*. Pearson Educación.

Weisstein, E. W. (2002). *Concise encyclopedia of mathematics*. CRC press.