UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Secuencia didáctica para determinar tipo y cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática a través de múltiples representaciones

José Miguel Oñate Araya

Profesor guía: Patricio Benjamín Montero Lagos

Trabajo de graduación presentado a la
Facultad de Ciencia en cumplimiento de los
requisitos exigidos para optar al Título de
Magíster en Educación Matemática

Santiago - Chile
2018

Resumen

Desde diversos organismos tanto nacionales, Ministerio de Educación, como internacionales, OCDE y prueba PISA, reconocen los problemas que se presentan en la enseñanza de la matemática en Chile. Todos ellos indican que se deben hacer cambios estructurales y los resultados obtenidos en pruebas internacionales lo corroboran. Un análisis de la enseñanza tradicional del álgebra muestra una serie de deficiencias en el estudio de esta área tan importante de la matemática.

La investigación en educación y didáctica de la matemática muestran que algunas teorías obtienen buenos resultados al aplicar nuevas formas de enseñanza y aprendizaje en las aulas, una de ellas es la Teoría de las Representaciones Semióticas. Existen indicios que la utilización de diversas representaciones potencia el aprendizaje en los estudiantes frente a una enseñanza tradicional.

Se diseña una secuencia didáctica, con un fuerte énfasis en el uso de diversas representaciones semióticas y el uso de Historia de la Matemática, para determinar la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática, así como la naturaleza de sus soluciones, para el nivel de tercer año de enseñanza media que se aplica en un colegio científico humanista.

A partir de la aplicación de la secuencia didáctica y de los resultados obtenidos en evaluaciones, existe evidencia de que el uso de diversas representaciones y significaciones históricas mejora la resolución de ecuaciones de segundo grado cuando se consulta por la cantidad de soluciones y la naturaleza de estas. También se proyecta que otros conceptos, especialmente algebraicos y geométricos, pueden ser beneficiados con secuencias didácticas similares.

Palabras Claves: ecuación cuadrática, Historia de la Matemática, representación semiótica, secuencia didáctica.

Abstract

From various agencies, both national, Ministry of Education, and international, OECD and PISA test, recognize the problems that arise in the teaching of mathematics in Chile. All of them recognize that structural changes must be made and the results obtained in international tests corroborate this. An analysis of the traditional teaching of algebra shows a series of deficiencies in the study of this important area of mathematics.

Years of studies and a deep academic research show that some theories of mathematics didactics obtain good results when applying new forms of teaching and learning in the classrooms, one of them is the Theory of Semiotic Representations. There are indications that the use of diverse representations enhances students' learning as opposed to traditional teaching.

A didactic sequence is designed, with a strong emphasis on the use of diverse semiotic representations and the use of History of Mathematics, to determine the number of solutions that have a quadratic equation as well as the nature of their solutions, for the third level year of secondary education that is applied in a humanistic scientific school.

From the application of the didactic sequence and the results obtained in evaluations, there is evidence that the use of diverse representations and historical meanings improves the resolution of second degree equations when it is consulted by the number of solutions and the nature of these. It is also projected that other concepts, especially algebraic and geometric, can be benefited with similar didactic sequences.

Key words: quadratic equation, history of mathematics, semiotic representation, didactic sequence.

Las mismas cosas que modelan y dibujan, cuyas imágenes
nos las ofrecen las sombras y los reflejos del agua son
empleadas por ellos con ese carácter de imágenes,
pues bien saben que la realidad de esas cosas no
podrá ser percibida sino con el pensamiento.

Platón - *República*.

Agradecimientos

Mis agradecimientos van para aquellas personas que me ayudaron durante este proceso, y que sin ellas todo hubiera sido más difícil: a mis padres y hermanos, por su apoyo y alegría durante estos años; a mi amiga Camila por hacer de este proceso más divertido; a la señora Soledad Cabañas por su amabilidad y empatía en momentos complicados; para aquellos profesores que demostraron entusiasmo y pasión por lo que enseñan. ¡Gracias!

Tabla de contenidos

Resumen ii

Abstract iii

Agradecimientos v

Capítulo I Introducción 1

1.1. Antecedentes y contexto de la necesidad 1

1.2. Problema y preguntas del estudio 9

1.3 Objetivos del estudio 9

1.4 Alcances del estudio 9

Capítulo II Antecedentes teóricos 11

2.1 Situación actual de la enseñanza del álgebra 11

2.1.1 Situación actual de la enseñanza de la ecuación cuadrática 14

2.2 Teoría de las Representaciones Semióticas 15

2.2.1 Introducción 15

2.2.2 Descripción de la Teoría de las Representaciones Semióticas 17

2.3 Historia de la Matemática 23

2.3.1 Introducción 23

2.3.2 Diferentes interpretaciones del uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza 25

2.3.3 Diferentes corrientes de estudio de la Historia de la Matemática en educación 26

2.4 Breve Historia de la Ecuación Cuadrática 27

2.4.1 Introducción 27

2.4.2 Primer episodio: Babilonios 28

2.4.3 Segundo episodio: Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî 29

2.4.4 Tercer episodio: Descartes 32

2.5 Secuencia didáctica 36

2.5.1 Objetivo y principales características de una secuencia didáctica 36

Capítulo III Metodología de Trabajo 39

3.1 Introducción 39

3.2 Diseño 39

3.3 Población 39

3.4 Muestra 39

3.5 Instrumentos 40

3.5.1 Pretest y postest 40

3.5.2 Secuencia didáctica 43

3.6 Cambios esperados ... 53
3.7 Puesta a prueba ... 53
3.8 Diseño de análisis de datos ... 55
Capítulo IV Resultados ... 57
4.1 Descripción de la población donde se desarrolló la propuesta de secuencia didáctica ... 57
4.1.1 Sexo ... 57
4.1.2 Promedio de matemática de los estudiantes al finalizar el año académico ... 57
4.2. Análisis de fiabilidad en el pretest y postest ... 58
4.3 Descripción del pretest, postest, guías 1 y 2 ... 59
4.3.1 Representaciones utilizadas por los estudiantes en el pretest ... 59
4.3.2 Estrategias utilizadas por los estudiantes en el pretest ... 60
4.3.3 Porcentaje de desarrollo de guías 1 y 2 ... 62
4.3.5 Representaciones utilizadas por los estudiantes en el postest ... 63
4.3.6 Estrategias utilizadas por los estudiantes en el postest ... 64
4.3.7 Respuestas correctas en el pretest ... 66
4.3.8 Respuestas correctas en el postest ... 67
Capítulo V Conclusión y Discusión ... 69
5.1 Conclusión ... 69
5.2 Discusión ... 71
Bibliografía ... 73
Anexos ... 80
Anexo 1: Secuencia didáctica - Primera sesión ... 80
Anexo 2: Secuencia didáctica - Segunda sesión ... 93
Anexo 3: Pretest ... 104
Anexo 4: Postest ... 108

Índice de tablas

Tabla N°1: Frecuencia y porcentaje de hombres y mujeres que participaron en la secuencia didáctica. 57

Tabla N°2: Principales medidas de tendencia central, posición y dispersión del promedio final en matemática de los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 57

Tabla N°3: Frecuencia y porcentaje del promedio de matemática de los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 58

Tabla Nº4: Análisis de fiabilidad en el pretest. 59

Tabla Nº5: Análisis de fiabilidad en el postest. 59

Tabla N°6: Frecuencia y porcentaje de los tipos de registro de representación que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 59

Tabla N°7: Frecuencia y porcentaje de los tipos de estrategias en el pretest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 61

Tabla N°8: Frecuencia y porcentaje de los tipos de registro de representación que utilizaron en el postest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 63

Tabla N°9: Frecuencia y porcentaje de los tipos de estrategias en el postest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 64

Tabla N°10: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas en el pretest. 66

Tabla N°11: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas en el postest. 67

Índice de Ilustraciones

Gráfico N°1: Representación geométrica de una ecuación cuadrática por Descartes. 33

Gráfico N°2: Representación geométrica de una ecuación cuadrática. 34

Gráfico N°3: Frecuencia de los tipos de registro de representación que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 60

Gráfico N°4: Frecuencia de los tipos de estrategias que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 62

Gráfico N°5: Frecuencia de los tipos de registro de representación que utilizaron en el postest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 64

Gráfico N°6: Frecuencia de los tipos de estrategias en el postest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. 65

Gráfico N°7: Frecuencia de respuestas correctas en el pretest. 67

Gráfico N°8: Frecuencia de respuestas correctas en el postest. 68

Capítulo I Introducción

1.1. Antecedentes y contexto de la necesidad

Frente a las exigencias que encara la escuela en el comienzo del siglo XXI, podemos indicar aquellas que provienen desde su interior, como modificar una enseñanza tradicional en donde predomina lo expositivo, a un aprendizaje activo en donde el rol protagónico lo debe asumir el estudiante. Además, las nuevas competencias que debe adquirir el docente: dejar de ser un transmisor del contenido a ser mediador entre el conocimiento y los estudiantes, conocimiento de medios audiovisuales y tecnologías de la información y la comunicación aplicados a la enseñanza de jóvenes que son nativos en el uso de la tecnología. Pero las exigencias al sistema educativo no provienen únicamente a cambios en el interior de los establecimientos, sino que también debe responder a necesidades más allá de la sala de clases, como los fenómenos de exclusión que se presentan en la sociedad. Exclusión que se presenta en la educación formal como un proceso de selección de aquellos más aptos para integrarlos a sus filas, a su vez, que identifica a los que no lo son y rechazarlos. También cuando los profesores convencen a los excluidos de que no es el sistema educativo quien los deja de lado, sino que son sus propias deficiencias las que lo ocasionan (Soto & Cantoral, 2014). Así pues, a la educación se le ha asignado una función relevante, tal vez el protagónico, como espacio que debe brindar a toda la población una educación de calidad, más allá de las clases socioeconómicas, incluso en sociedades con grandes niveles de desigualdad, con el objeto de cambiar la sociedad actual por una más justa. También se le asigna un papel primordial en el desarrollo económico y tecnológico de un país.

Sin embargo, frente a las nuevas exigencias de las sociedades contemporáneas, la fisonomía de las escuelas parece inalterable, las clases siguen la presentación de los contenidos de forma imperturbable, así como su dinámica, entre el docente, el estudiante y el saber, continúa, en muchos lugares del mundo, incluido nuestro país, la misma hace décadas. Por lo tanto, hoy se presenta la necesidad imperiosa de que el docente reflexione sobre su propia actividad con el fin de mejorar, actualizar sus conocimientos y prácticas de forma continua. Es deber del profesor, con la ayuda de la comunidad académica, acceder a herramientas más sofisticadas, tanto teórica como prácticas, con el fin de profesionalizar su labor docente.

Asumiendo estas necesidades, es que se han promovido cambios a la educación chilena en distintas direcciones. Desde el Ministerio de Educación se realizan esfuerzos que se manifiestan en las bases curriculares[1], que con diferentes enfoques, apunta como una de sus prioridades a cambiar la enseñanza tradicional todavía vigente. La crítica que realiza a la enseñanza, es desde las carencias que se observan en la sociedad: “(...) necesidades de actualización, reorientación y enriquecimiento curriculares que se derivan de cambios acelerados en el conocimiento y en la sociedad (...)” (MINEDUC, 2009, p.1). A su vez, señala que su objetivo no es únicamente la transferencia de contenidos a los estudiantes. Cuestiona la forma de enseñar centrada en los contenidos, sin importancia de los contextos social, histórico y humano en donde emergen, se desarrollan y ocupan. A este respecto señala que la educación debe: “(...) ofrecer a alumnos y alumnas conocimientos, habilidades y actitudes, relevantes para su vida como personas, ciudadanos y trabajadores, así como para el desarrollo económico, social y político del país” (MINEDUC, 2009, p.1). Además de los cambios sugeridos por el Ministerio de Educación, existen organismos internacionales que también están incidiendo en el sistema de enseñanza y aprendizaje actual. Entre ellos podemos destacar a la OCDE[2], desde este organismo se indica que la educación es un elemento primordial para impulsar el crecimiento económico y fomentar la cohesión social. Y aunque acepta los avances realizados por Chile, social y económicamente, indica que no podrá avanzar si no realiza cambios referentes a la formación de sus ciudadanos: necesita apoyar la innovación y entregar a la población competencias que estén más allá de los sectores relacionados con materias primas (OCDE, 2015).

También la prueba PISA[3] ha ganado con el paso de los años más importancia en el contexto nacional. Su objetivo es evaluar a los estudiantes de 15 años tanto en lectura, matemáticas y ciencias. Esta prueba ha sido diseñada como una fuente de información detallada que permita a los países miembros de la OCDE adoptar las decisiones y políticas públicas necesarias para mejorar los niveles educativos. El énfasis de la evaluación no se centra en los contenidos, sino en el dominio de procesos, el entendimiento de conceptos y la habilidad para adaptar los conocimientos a diferentes contextos y situaciones (OCDE, 2008). La visión de PISA, particularmente para la educación matemática, es tener las capacidades para analizar pruebas y emitir una conclusión, además de poder comprender la “verdad” científica de manera crítica y entender que esta puede ser modificada en el tiempo de acuerdo a los conocimientos científicos y tecnológicos disponibles (OCDE, 2016).

---

[1] Las Bases Curriculares constituyen el documento principal del currículum nacional. Establecen los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios para enseñanza media (tercero y cuarto medio aún vigente).

[2] OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, a través de un foro de gobiernos de 30 países tiene como objetivo compartir políticas para buscar soluciones a problemas comunes y promover una vida mejor.

[3] PISA, corresponde a las siglas en inglés a: Programme for International Student Assessment, es decir, Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. Se trata de un proyecto de la OCDE, cuyo objetivo es evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la enseñanza obligatoria, alrededor de los 15 años.

Un fenómeno que afecta a la sociedad en Chile, de forma transversal, es el de la exclusión. Los establecimientos educacionales no pueden aislarse de este fenómeno y contribuir a potenciarlo al negar su responsabilidad, al discriminar estudiantes de acuerdo a su nivel de afinidad con estructuras tradicionales de entender la enseñanza y el conocimiento. La inclusión en la sala de clases, con el objetivo de atender a la diversidad de estudiantes y potenciarlos en sus intereses y formas propias de abordar el aprendizaje, comienza con crear una visión nueva de enseñanza. La primera tarea de esta nueva forma de enseñar es hacer que todos los estudiantes se sientan incluidos en el momento de aprender. Diferentes investigaciones, De Guzmán (1993), Campanario y Moya (1999), Campos (2000), Torres (2010), Albornoz y Gómez (2014), indican que los conceptos matemáticos deben ser presentados desde diferentes enfoques, con diversas estrategias de enseñanza y múltiples formas de argumentar y justificar su validez, esto para que “independientemente del estilo de aprendizaje que tengan, todos los alumnos puedan crear las interconexiones necesarias para que su aprendizaje sea significativo” (Pascual, 2009, p.6). Como dice Sánchez (2012), si los centros educacionales quieren practicar la inclusión y brindar una enseñanza para todas las personas, promoviendo una sociedad que pueda entregar igualdad de oportunidades a cada estudiante, entonces debe abandonar el rol de instrumento para la homogeneización, de castración de las diferencias individuales, para convertirse en un ambiente en donde cada estudiante, con sus diferentes estilos y orientaciones, pueda potenciar sus habilidades.

Lo que apuntan simultáneamente las bases curriculares, la OCDE, los informes de la prueba PISA y dilemas propios de la sociedad chilena, es que la enseñanza en los sistemas educativos debe ser coherentes con las necesidades y aspiraciones de las personas que viven en una sociedad en determinadas circunstancias. Y no como ocurre ahora, en donde la educación y sus actores pierden un componente de autorreflexión, cayendo en estereotipos de enseñanza que se fundamentan en la tradición, pero no en lo que los ciudadanos necesitan de esta (Nieto, 1991). La educación parece olvidar, como dice Pascual (1998) “(...) los seres humanos nacen y se desarrollan en el seno de una cultura determinada, con la cual interactúan permanentemente y que la educación debe proveer las condiciones para que las personas puedan apropiarse de ella y poder participar activamente (...)” (p.30). Sin embargo, los últimos resultados de Chile, en pruebas internacionales, lo sitúan muy lejos de los países miembros de la OCDE tanto en lectura, matemática y ciencias. Concluyendo que no alcanzan el nivel mínimo que la OCDE considera para un adolescente de 15 años (UNIVERSIA, 2016). Y aún más, que casi el 25% de los estudiantes de 15 años carece de competencias necesarias para resolver problemas básicos de lectura, matemática y ciencias. Sin embargo, los peores resultados de los estudiantes chilenos los obtienen en matemática. Los retrasos que presentan los estudiantes chilenos en matemática se ha calculado, a través de la prueba PISA, como una brecha de 1.7 años de educación secundaria respecto a sus pares de la OCDE (OCDE, 2015).

No es casualidad que los estudiantes presenten problemas en matemática, pues, según (Hernández et al, 2012), una de las ramas de la matemática que es transversal y se aborda durante toda la enseñanza media es el estudio del Álgebra, además, muchos de los problemas que tienen los estudiantes, de diversos niveles, es la traducción a un lenguaje matemático que les permite abordar matemáticamente la cuestión. Tradicionalmente se presenta el álgebra con una doble componente inmutable: primero como una enseñanza a través de principios ciertos, incuestionables, concebidas como acabadas; por otro lado, como objetos poco dinámicos que tienen una única representación. A su vez (Ortega & Gutiérrez, 2014) indica que estos elementos impiden observar el estudio del Álgebra vinculado con la realidad, que es siempre dinámica y en constante construcción, además que estas formas de enseñanza generan rechazo en la mayor parte de los estudiantes.

Es tal la importancia del Álgebra, que si observamos el planteamiento que hace Rico (2007) sobre las diferentes fases del proceso matemático, para la prueba PISA, que debe desarrollar el estudiante, en una etapa que coincide de forma general con nuestra enseñanza media, se puede asociar en su totalidad al estudio del Álgebra y en particular al contenido de Ecuaciones. De esta manera, un correcto aprendizaje del Álgebra potencia el desarrollo matemático general de los estudiantes, incluso en estudios superiores, pero un mal aprendizaje también puede ser un obstáculo para avanzar por diferentes niveles de abstracción. En una primera fase indica, entre otros: encontrar regularidades, traducir el problema a un modelo matemático, enunciar problemas, comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal. En una segunda fase se indica: usar diferentes representaciones, lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones. La última fase requiere dos procesos del estudiante, que en el estudio del Álgebra es imprescindible: reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados obtenidos.

El estudio de la Matemática en enseñanza media tiene como elemento particular, dentro del estudio de las ecuaciones a lo largo de gran parte de formación, la ecuación cuadrática o de segundo grado[4]. Con este elemento se pretende modelar, comprender procesos de matematización (de acuerdo a la línea argumental de Freudenthal y Rico por ejemplo) y analizar soluciones enmarcadas en diferentes representaciones, y sin embargo, estudios indican que la ecuación de segundo grado, siendo uno de los conceptos más trabajados, es a la vez uno de los menos comprendidos por los estudiantes (Hernández & Romero, 2012). La ecuación de segundo grado o cuadrática puede ser considerada como un elemento clave para desarrollar una nueva forma en que el estudiante se relacione con la matemática, siendo una excelente oportunidad para abrir nuevas vías a la enseñanza de esta disciplina.

[4] En adelante se indica indistintamente a la ecuación de segundo grado como ecuación cuadrática. Ambos nombres refieren al mismo concepto en matemática para esta investigación.

A continuación se detallan diversos elementos de la ecuación de segundo grado en el programa de estudio[5] (MINEDUC, 2009):

- Unidad 2: Álgebra
- Propósito de la unidad: El énfasis de esta unidad está en modelar situaciones de cambio cuadrático y resolver ecuaciones de segundo grado, tanto en el conjunto de los números reales como en el de los números complejos.
- Conocimientos previos: Función exponencial y representación gráfica, función logarítmica y representación gráfica, función raíz cuadrada y representación gráfica, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica de un sistema de ecuaciones, expresiones algebraicas fraccionarias, operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias.
- Contenidos: Función cuadrática y ecuación de segundo grado.
- Habilidades: Identificar situaciones de cambio cuadrático. Modelar situaciones de cambio cuadrático por medio de funciones cuadráticas.
- Actitudes: Búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general o propios de otras asignaturas, de manera flexible y creativa.
- Aprendizajes esperados: Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.
- Indicadores de evaluación sugeridos: Utilizan diferentes técnicas para resolver ecuaciones de segundo grado, por ejemplo, la factorización, la completación de cuadrados o fórmula general. Verifican si las soluciones de una ecuación de segundo grado son reales o complejas. Resuelven problemas matemáticos o científicos que involucran en su solución ecuaciones de segundo grado.
- Aprendizajes esperados en relación con los OFT: Interesarse por conocer la realidad y utilizar el conocimiento. Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

Desde los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos y Obligatorios (MINEDUC, 2009) las indicaciones que ofrece para la enseñanza de la matemática son los siguientes:

- Aprender matemática contribuye a la capacidad de analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.

[5] Programa de Estudio, ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales y el Desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios que define el marco curricular.

- El conocimiento matemático forma parte del acervo cultural de la sociedad; es una disciplina cuya construcción empírica e inductiva surge de la necesidad y el deseo de responder y resolver situaciones provenientes de los más variados ámbitos.
- Es necesario que el proceso de aprendizaje tenga una base en contextos significativos, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido.
- La historia del conocimiento matemático es una fuente importante de contexto y sentido. Comprender los problemas o preguntas que dieron origen a un concepto son cuestiones que contribuyen a formar, en el que aprende, una organización propia y significativa de los conocimientos matemáticos adquiridos.

Es importante destacar que tanto en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos y Obligatorios como en el Programa de Estudio se indica la importancia de la enseñanza de la ecuación de segundo grado o cuadrática, pero no establecen criterios claros, metodológicos o alguna teoría didáctica, para que el profesor pueda construir situaciones de aprendizajes y evaluar su desempeño en función de estándares que la propia comunidad de investigadores en Educación Matemática lleva elaborando durante décadas. Así pues, esta investigación tiene como propósito añadir al *qué enseñar* que se presenta en el Programa de Estudio de tercer año de enseñanza media, y al *para qué* que se indica en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos y Obligatorios, *el cómo* y el *porqué* debe llevar a cabo la enseñanza de estos conceptos de forma rigurosa.

Como no se presentan las formas concretas en que el docente puede llevar a cabo los cambios que desde distintos sectores promueven en la educación, el cómo abordar las ecuaciones de segundo grado o cuadrática se mantiene inmutable a través de los diversos cambios y reformas educacionales. Por ejemplo, desde plataformas, como el portal educarchile, bajo el auspicio del Ministerio de Educación, se presenta la ecuación cuadrática bajo una forma exclusivamente algebraica, se da relevancia a los diversos métodos de resolución, únicamente algebraicos y como algoritmos o “recetas” a seguir, que se comprenden mediante ejemplos. Se muestran las aplicaciones de los métodos de forma mecánica y no se indica en ninguna ocasión los fundamentos de los mismos, condicionando un aprendizaje dogmático de verdades inmutables y no construidas (EDUCARCHILE, 2013). Sin embargo, este proceso de comprender, de forma mecánica y dogmática la ecuación de segundo grado puede observarse también en los textos de estudio entregados por el Ministerio de Educación, sin ir más lejos, en los años 2014, 2015 y 2016 para tercer año de enseñanza media. Esta forma de abordar el concepto de ecuación ya ha sido investigada con anterioridad, ya que “La mayoría de los libros (...) finalizan proponiendo ejercicios que se resuelven de manera mecánica, es decir solo realizan procedimientos algebraicos” (Hernández & Romero, 2012, p.25). Contrariamente, el Ministerio de Educación pone especial énfasis en la habilidad de “representar”, por ejemplo, traduciendo problemas de la vida cotidiana a un lenguaje matemático o utilizando diversos símbolos matemáticos para la comprensión, amparado bajo una estrategia de enseñanza denominada COPISI. Esta estrategia apunta a realizar diversas actividades desde tres perspectivas distintas pero que se complementan para lograr una mayor comprensión al estudiante: concreto, pictórico y simbólico (MINEDUC, 2009). Sin embargo, una teoría que ha sido analizada, bajo la perspectiva de las representaciones que tienen los diferentes objetos matemáticos, es la Teoría de las Representaciones Semióticas. Esta teoría ha sido desarrollada, principalmente, por los estudios de Raymond Duval, quien ha sido un pionero indiscutible en esta línea de investigación, desde la década de los noventa en adelante (D’Amore, 2011). Las transformaciones y conversiones que lleva a cabo el estudiante, en su aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado, son imprescindibles para una comprensión del objeto matemático. Según Socas (2007), ahí encuentran un fin mucho mayor y una teoría que cobije los materiales didácticos, las representaciones visuales y materiales manipulativos, tanto análogos como digitales. Como dice (Rodríguez-Domingo et al, 2015), la Teoría de las Representaciones Semióticas se presenta en la actualidad como uno de los fundamentos más sólidos para abordar la enseñanza de la matemática, como una herramienta que permite la comprensión de los conceptos, y le permite al profesor realizar un análisis de los obstáculos que tienen los estudiantes. Incluso, se considera como un elemento fundamental para la asimilación de los conceptos matemáticos, que los estudiantes puedan transitar, y coordinar, de una representación a otra, en el estudio de las ecuaciones (Rojas, 2015). Además, otras de las ventajas de observar el estudio de las ecuaciones cuadráticas desde esta perspectiva según Rico (1997) es: “Mediante las representaciones las personas organizan su información sobre un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales” (p.15).

En el marco curricular, que se vio más arriba, se describe que una potente herramienta para cambiar el aspecto dogmático e inmutable de la enseñanza de la matemática en general, es utilizar como recurso la Historia de la Matemática. Así pues “Los estudiantes ven las Matemáticas como un conocimiento cerrado que se encuentra en la mente del profesor, y que es él quien decide cuándo una respuesta es correcta o no, y esta situación es muy dañina para las Matemáticas, que son por naturaleza una materia acumulativa (...)” (Gómez, 2002, p.60). La Historia de la Matemática, como precisa Rico (1997), también permite ver dos aristas que en la educación tradicional se dejan de lado, una de ellas es el rostro humano de las matemáticas, es decir, las matemáticas son construidas por personas y a lo largo de varios siglos; y la otra arista es su componente social, es decir, las construcciones matemáticas responden a determinadas sociedades, con intereses particulares, que vieron en la matemática una vía para solucionar determinadas inquietudes. Además de permitir humanizar las matemáticas, existe una función que puede resultar de mucha utilidad en el diseño de clases para el aprendizaje de la ecuación de segundo grado. Resulta útil como motivación de una unidad, para proponer ejemplos y ejercicios curiosos. Los estudiantes pueden observar que muchas dificultades que ellos presentan en el estudio de la matemática también lo sufrieron matemáticos de otras épocas y sociedades, esto sirve de aliciente para que ellos mismos puedan superar sus limitaciones. También, se ha observado cierta regularidad en la enseñanza de un determinado concepto y su relación con este a través de la Historia de la Matemática. Como dice Rico (1997), el profesor puede observar obstáculos en sus estudiantes de forma similar a los presentados en la historia, por lo tanto, también posee un recurso desde la misma historia para poder ayudar a sus estudiantes.

De acuerdo a los antecedentes presentados con anterioridad, el propósito de esta investigación es responder la siguiente pregunta: ¿Qué fortalezas y debilidades tiene una aplicación de una secuencia didáctica, en significaciones históricas y transformaciones semióticas, para determinar la cantidad y tipo de soluciones de una ecuación cuadrática?

1.2. Problema y preguntas del estudio

El problema principal de esta investigación, es determinar el impacto de una secuencia didáctica para encontrar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación de segundo grado. Esta secuencia se diseña a partir de la Teoría de las Representaciones Semióticas y de la Historia de la Matemática. Los estudiantes pertenecen a un curso de tercero medio con electivo en ciencia en un establecimiento particular subvencionado.

Las preguntas principales del estudio serán:

1. ¿Cuál es el impacto de la secuencia didáctica frente a la enseñanza tradicional en este tipo de problemas?
2. ¿Los resultados de la secuencia didáctica son consistentes con las investigaciones realizadas, en educación y didáctica de la matemática, con la Teoría de las Representaciones Semióticas?
3. ¿Los resultados obtenidos con la secuencia didáctica permiten replicar este estudio en otros aprendizajes de matemática?

1.3 Objetivos del estudio

Objetivo general:
Analizar fortalezas y debilidades de la aplicación de una secuencia didáctica basada en significaciones históricas y transformaciones semióticas para encontrar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación de segundo grado con estudiantes de tercero medio.

Objetivos específicos:

1. Explorar las estrategias tradicionales de enseñanza de la ecuación cuadrática.
2. Desarrollar una estrategia eficaz para encontrar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación de segundo grado, que se haga cargo de la debilidad de las estrategias tradicionales, basada en representaciones semióticas y la Historia de la Matemática.
3. Explorar la eficacia de la estrategia con estudiantes de tercer año de enseñanza media.
4. Recomendar sugerencias para mejorar la estrategia desarrollada y para su aplicación en otros aprendizajes de matemática.

1.4 Alcances del estudio

Es un estudio de carácter exploratorio que permite establecer las fortalezas y debilidades de aplicar la Teoría de las Representaciones Semióticas y la Historia de la Matemática en estudiantes de nivel socioeconómico medio en el contexto de un establecimiento educacional chileno determinando su utilización en base a los resultados obtenidos en otras unidades de matemática, y para otros niveles, con este tipo de estudiantes.

La principal contribución de esta investigación, es crear una secuencia didáctica para el profesor de matemática en la enseñanza de la ecuación cuadrática con estudiantes de tercero medio. Además, esta investigación contribuye a entregar productos validados a la comunidad de profesores de matemática: una secuencia didáctica y una evaluación para encontrar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación de segundo grado

Dentro de las limitaciones de esta investigación podemos indicar que el estudio se aplicará en un único establecimiento, la muestra de estudiantes de tercero medio corresponde a estudiantes en modalidad científico y el tiempo máximo de implementación es de dos sesiones de 90 minutos cada una. Además, la investigación se reducirá al área de álgebra y en particular se abordará el concepto de ecuación cuadrática con una variable.

Capítulo II Antecedentes teóricos

2.1 Situación actual de la enseñanza del álgebra

A través de la observación de las prácticas de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, podemos reconocer su concepción sobre qué son las matemáticas. Sus errores más habituales, los obstáculos con los cuales se enfrenta y los razonamientos ocupados, permiten determinar qué estrategias se utilizan en su enseñanza. Arcavi (2006) indica que los estudiantes pueden comprender con mayor claridad los diversos conceptos implicados en la enseñanza de las matemáticas, con una mayor cantidad de herramientas, pero no lo realizan debido a determinadas creencias que tienen derivada de la enseñanza tradicional. Se limitan a sí mismos únicamente porque el profesor o un examen privilegian un determinado proceso, que es en la mayor parte de los casos, mecánico y estructurado.

A su vez, las estrategias que utilizan los profesores, la forma de secuenciar una actividad y los elementos que considera pertinentes de utilizar en la sala de clases, están relacionadas directamente con las concepciones y creencias de los docentes sobre qué significa aprender y enseñar. Según (Cuadra & Romero, 2003) uno de los focos de atención en la investigación en educación matemática, considera que las concepciones y creencias de los profesores son un factor determinante en su práctica profesional, estas creencias arraigadas en el profesorado, explican la resistencia por renovar las estrategias de enseñanza y aprendizaje al interior de los establecimientos educacionales.

Dentro de las estrategias de enseñanza más utilizada en las salas de clases se denomina *método frontal*. Consiste en que el profesor asume el rol protagónico, es él quien dirige el aprendizaje y monopoliza todas las interacciones. Desde esta perspectiva, los estudiantes son observados como un grupo homogéneo, por lo tanto, recibe una oferta de aprendizaje estandarizada que se adapta al alumno “promedio”. Además, como indica (Flechsig & Schiefelbein, 2003) el profesor orientará la clase bajo el estilo de aprendizaje que él considera más pertinente, en donde predomina la representación algebraica, y una marcada preferencia a presentar conceptos terminados sin considerar el proceso de construcción de los mismos. Junto a lo anterior, las actividades se centran en la exposición a través de un pizarrón y desarrollando ejercicios rutinarios que se incluyen en algún libro de texto, sin potenciar las prácticas de los estudiantes de abordar la problemática desde diversos puntos de vista (Campos & Balderas, 2000). Responder ejercicios en poco tiempo o promover la resolución de ejercicios sin reflexión y poco significativos, causan efectos contraproducentes en el aprendizaje de los estudiantes, ya que de acuerdo a Arcavi (2006), se debe privilegiar actividades que impidan abalanzarse hacia los ejercicios y hacia la manipulación de símbolos, en la mayoría de los casos, los estudiantes no logran dar un significado en la resolución del problema. Más bien promover actividades que fomenten el uso de otras formas de observar el problema, a través de gráficos, figuras, dibujos y estimular la descripción de lo que ellos pueden observar y razonar. También indica Socas (2011) que se deben usar varias formas de aproximarse a los conceptos de estudio, teniendo en cuenta que los métodos formales son más abstractos, y requieren de una construcción de parte de los estudiantes a través de representaciones más sencillas.

Una consecuencia de una estrategia tradicional, método frontal, condiciona la creencia de los estudiantes sobre qué son las matemáticas, y en general las ciencias, a través de su experiencia en la sala de clases y su práctica de estudio para aprobar un examen o evaluación en general. Según (Campanario & Moya, 1999) los estudiantes consideran que el conocimiento matemático es una secuencia de ecuaciones y definiciones. Y de esta concepción se fundamenta su práctica de aprendizaje, en donde los conceptos deben ser memorizados más que comprendidos, esta práctica de aprendizaje mecánico y forzado resulta ser un obstáculo para la comprensión de los conceptos de estudio en matemática, y es responsable de numerosos fracasos para un aprendizaje significativo. Parte de este proceso poco significativo resulta también del uso de la simbología algebraica en la resolución de problemas, para expresar diferentes relaciones y propiedades, como el único medio para desarrollar un proceso formal, produce en el estudiante el efecto de reprimir un análisis más personal e intuitivo de la problemática de estudio, en consecuencia, la de no provisionar de significado la actividad que está realizando. Como los estudiantes no tienen asimilado el uso de la simbología, y de las herramientas del razonamiento algebraico, como una forma de abordar problemas, ante la falta de naturalidad en el uso de este lenguaje, los estudiantes buscan el significado de una situación problema en formas que ellos han validado a través de su experiencia. Así surgen elementos visuales y esquemas que están más cercano a la realidad inmediata de los estudiantes, y de esta manera proporcionar de sentido a la problemática que deben abordar. Se ha observado, Arcavi (2006), que mediante gráficos los estudiantes adquieren un acercamiento más comprensivo de un problema, utilizándolo para dos funciones principalmente: primero como un instrumento para organizar y planear los pasos de su trabajo a seguir y segundo como instrumento operativo para entender a fondo la situación. En ambos sentidos el estudiante accede a una representación gráfica del problema como una forma de controlar su acción, pero no son accionados si observan que el único argumento oficial de respuesta es el lenguaje simbólico. La carencia de un lenguaje algebraico construido mediante una secuencia de pasos previos, menos abstractos y que tome como punto de partida elementos más intuitivos y cercanos del estudiante, resulta un lenguaje implantado en el estudiante, extraño y poco natural a la hora de resolver problemas. De aquí observan (Kieran & Yagüe, 1989) que existen instancias en que el estudiante opera como un calculador ciego frente a una variedad de problemas, y no logra reconocer distintas circunstancias en que la simbología es utilizada para diversas funciones, además, los estudiantes parecen no responder correctamente a ítems en que se presenta una problemática conocida bajo una representación que no sea la estrictamente algebraica.

Junto a lo anterior se produce otro fenómeno, que según Alcázar (2009) podría explicar la relación poco significativa en el conocimiento y los estudiantes. La coincidencia de los estilos de aprendizaje y de enseñanza, entre el estudiante y profesor, potenciaría el rendimiento académico del alumno. Por lo tanto, existe una correlación positiva entre la semejanza de los estilos y un buen rendimiento académico, así como una relación entre la denominada "inteligencia" del estudiante y el estilo de enseñanza del profesor, según el estilo en donde se presentan la mayor cantidad de actividades y evaluaciones, los estudiantes con una mayor cercanía a este obtendrán mejores calificaciones. Además, si el profesor aplica siempre el mismo estilo para todas sus secuencias de aprendizaje, estará favoreciendo siempre al mismo grupo de estudiantes, por lo tanto, discriminando a los que aprenden bajo otros estilos.

La transmisión directa de los conocimientos por parte del profesor, y el estudiante como un receptor pasivo, construye la creencia en el alumno de que las ideas se validan de acuerdo a la autoridad que lo dicte, y no por su poder explicativo. Por lo tanto, emerge el prejuicio en el alumno de valorar el conocimiento de acuerdo a la fuente de donde procede. La justificación de los conceptos utilizados en la enseñanza de la matemática debe ser un elemento explícito en las secuencias de actividades (Campanario & Moya, 1999). Como esta estrategia, la tradicional, consiste en una larga exposición en donde los conceptos van sucediendo uno tras otro, sin mayor justificación, y tal actividad no requiere una especial preparación, la única explicación por los problemas y obstáculos que se presentan en la enseñanza de un determinado concepto recae en el estudiante. Esto trae como consecuencia directa un fenómeno de exclusión pues, considera que los conceptos matemáticos no guardan relación con el ser humano, por lo tanto, a la hora de enseñar las consideraciones del estudiante quedan al margen. De esta manera se margina al individuo cuando la enseñanza se centra en los conceptos, se presenta como una ciencia terminada y su construcción se aborda exclusivamente en un contexto matemático. También puede observarse en los tipos de argumentos, los significados, procedimientos y representaciones que ocupa el profesor. Se imponen ciertas formas de abordar el estudio de la matemática, potenciando ciertos estudiantes por sobre otros, que coinciden con el estilo de aprendizaje practicado por el profesor. Y según (Soto & Cantoral, 2010) otros argumentos y significados no son considerados válidos, cuando podrían potenciar el aprendizaje de estudiantes con otras características y que quedan desplazados de la enseñanza tradicional.

Los estudiantes presentan diversas formas de abordar las soluciones de las situaciones problema. Responden a elementos más cercanos a los estudiantes, intuitivos y creativos, heredados de experiencias previas y con diversas representaciones. Sin embargo, a lo largo de la enseñanza tradicional estos diversos métodos quedan olvidados o son suprimidos por métodos formales. Se ha observado que los estudiantes que utilizaron métodos intuitivos para enfrentarse a problemas y que luego mantuvieron esas prácticas tienen más éxito que aquellos que únicamente aplican un proceso formal (tradicional) de resolución. Al aprender métodos de resolución, parecen "anclarse" en aquellos tipos, muchas veces no comprendiendo qué hacen al utilizar un proceso algebraico, que a través de elementos más visuales podrían ser resueltos de forma simple y rápida. Por último, se ha observado que los métodos más intuitivos posibilitan mayor control de las respuestas y del desarrollo de la actividad en general (Kieran & Yagüe, 1989). A su vez, en (Castro et al, 2005), también se ha investigado qué estrategias aprenden y utilizan aquellos estudiantes que poseen una mayor capacidad para resolver problemas de forma exitosa y la respuesta es contundente: son aquellos que relacionan un problema con diversas formas de representación. Pueden no únicamente visualizar un problema de diversos ángulos, sino que estructurar y ejecutar un plan de desarrollo del mismo. Esto conlleva a que tienen la habilidad de transitar entre diversas representaciones para comprender un problema. Como argumentan (Kieran & Yagüe, 1989) este éxito se debe a que diversas representaciones permiten compensar las falencias de una representación en determinados conceptos, de alguna manera muchas representaciones reducen las ambigüedades que son propias de una representación. Quien posee una única representación carece de las virtudes de otras formas de visualizar un concepto. La práctica repetitiva de una técnica, que por lo general es la algebraica, y su exclusividad, impide el desarrollo del sentido de los mismos símbolos que usa y de la comprensión del concepto en general. Se debe potenciar los elementos visuales, la manipulación de figuras concretas, la generación de algoritmos en donde los estudiantes vean iteraciones, y que una siguiente etapa depende de una precedente. De esta manera no borramos aquellos elementos intuitivos que están presentes en el estudiante, así como otras formas de acceder a la información (Socas, 2011). Uno de los desafíos de la educación en el siglo XXI es avanzar hacia la equidad. Y el concepto equidad en el contexto de la educación, significa tratar de forma diferenciada a los estudiantes y no como un todo homogéneo o con características de alumnos "promedio". Tratar de forma diferenciada para alcanzar una mayor igualdad. Por lo tanto, el desafío en las salas de clases es ofrecer condiciones para que todos y todas las estudiantes puedan ser beneficiados (Blanco, 2006).

2.1.1 Situación actual de la enseñanza de la ecuación cuadrática

A continuación, se analiza la enseñanza de la ecuación cuadrática, considerando que los problemas antes presentados en la enseñanza del álgebra son comunes a este contenido. Sin embargo, presenta características particulares importantes de comprender. En Rodríguez (2011) se indica que la ecuación de segundo grado es presentada a los estudiantes de una manera particular, en la que no se integran las distintas áreas de estudios que podrían potenciarse entre sí. La enseñanza de la ecuación cuadrática puede verse beneficiada al integrar, no únicamente una visión algebraica, sino que tener una perspectiva geométrica o aritmética. Esta forma aislada de presentar los contenidos, tiene como consecuencia una visión segmentada de la matemática y una menor comprensión de la ecuación cuadrática por parte de los estudiantes.

En el análisis realizado por Gustin y Avirama (2014) reconocen tres elementos que perjudican la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática. En primer lugar, existe una deficiencia en las clases al momento de analizar, es decir, ir más allá de la repetición mecánica. Esto se evidencia cuando no se asocia la forma de una ecuación con el tipo y cantidad de solución que tiene, lo que permite una mayor comprensión de la solución a un problema propuesto. Una posible causa del poco análisis que se realiza en clases, puede estar relacionado con un limitado trabajo con discriminantes y un exceso de atención a la manipulación simbólica para determinar las soluciones. Este fenómeno guarda una estrecha relación con una clase que privilegia el procedimiento antes que el análisis. Una segunda problemática, es la escasa referencia que tienen los estudiantes para otorgar sentido a la ecuación cuadrática. Existe un uso casi exclusivo de la representación simbólica, olvidándose de otras relaciones más cercanas al estudiante como su vínculo con el área de figuras geométricas. Finalmente, indica que la enseñanza de la ecuación de segundo grado carece del uso de materiales didácticos, quedan relegados tanto el material concreto como digital para su representación.

El análisis de las estrategias utilizadas en la enseñanza tradicional para la enseñanza de la ecuación cuadrática se concentra, como indica Guayacundo (2014), en el planteamiento de problemas descontextualizados, listas de ejercicios semejantes entre sí de carácter rutinario, donde se privilegia el procedimiento y elementos memorísticos, casi siempre, carente de contextos. El principal, muchas veces único, análisis realizado en la enseñanza tradicional recae en una vez encontrada el valor de la incógnita, reemplazarla y observar si satisface o no la ecuación planteada.

2.2 Teoría de las Representaciones Semióticas

2.2.1 Introducción

Existe un poema llamado “Los ciegos y el elefante” escrito por el norteamericano Jhon Godfrey (1819 - 1887). Es un poema inspirado en la tradición religiosa originaria de la India, pero en particular, es una buena parábola para aproximarse a la Teoría de las Representaciones Semióticas y entender la forma de acercarse a los conceptos matemáticos. La presente traducción es de Granados (2013):

Seis eran los hombres de Indostán,
tan dispuestos a aprender,
que al Elefante fueron a ver
(Aunque todos eran ciegos),
Pensando que mediante la observación
su mente podrían satisfacer.

El primero se acercó al elefante,
Y cayéndose
sobre su ancho y robusto costado,
en seguida comenzó a gritar:
"¡Santo Dios! ¡El elefante
es muy parecido a una pared!"

El segundo, palpando el colmillo,
exclamó: -"¡Caramba! ¿Qué es esto
tan redondo, liso y afilado?
Para mí está muy claro,
¡esta maravilla de elefante
es muy parecido a una lanza!"

El tercero se acercó al animal,
y tomando entre sus manos
la retorcida trompa,
valientemente exclamó:
"Ya veo," dijo él, "¡el elefante
es muy parecido a una serpiente!"

El cuarto extendió ansiosamente la mano
y lo palpó alrededor de la rodilla:
"Evidentemente, a lo que más se parece esta bestia
está muy claro," dijo él,
"'Es lo suficientemente claro que el elefante

¡es muy parecido a un árbol!"

El quinto, quien por casualidad tocó la oreja,
Dijo: "Incluso el hombre más ciego
es capaz de decir a lo que más se parece esto;
Niegue la realidad el que pueda,
Esta maravilla de elefante
¡es muy parecido a un abanico!"

El sexto tan pronto comenzó
a tantear al animal,
agarró la oscilante cola
que frente a él se encontraba,
"Ya veo," dijo él, "¡el elefante
es muy parecido a una cuerda!"
Y así estos hombres de Indostán
discutieron largo y tendido,
cada uno aferrados a su propia opinión
por demás firme e inflexible,
aunque cada uno en parte tenía razón,
¡y al mismo tiempo todos estaban equivocados!

El estudio de la matemática, a diferencia de otras disciplinas, no puede hacer una referencia directa a los conceptos con los cuales estudia. Remite a elementos abstractos que no pueden ser indicados en nuestra realidad. Por esta razón es que el aprendizaje de los conceptos en matemática, es decir la conceptualización, al no poder apoyarse en la realidad concreta, es que se ve obligado al uso de representaciones. Según D'Amore (2011) la forma de acercarse a los conceptos matemáticos es a través de variadas representaciones, estas representaciones más que acercarnos a una definición en particular, nos invitan a conocer un objeto matemático que descubriremos a medida que conocemos las representaciones que permiten observar con mayor o menor detalle sus elementos y características más notables. La adquisición indirecta de los conceptos en matemática, a través de representaciones que remiten a objetos, en contraposición al estudio de objetos reales, determina su forma de enseñanza y aprendizaje. Estos objetos matemáticos en palabra de D'Amore (2006) "es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas" (p.181). Aunque se trabaje con material concreto y en actividades llamadas prácticas o aplicadas, refiriendo al carácter de cercanía a la realidad inmediata de los estudiantes, el aprendizaje versa sobre elementos que no están presentes en una realidad que los estudiantes puedan adquirir con sus sentidos. Luego, D'Amore (2002) indica que la enseñanza de la matemática se ve obligada al uso de representaciones que acerquen al estudiante a los objetos matemáticos fuera de nuestra realidad.

Después de tomar conciencia del uso de representaciones, lo que sí merece un análisis más profundo es saber qué papel juegan los contextos de representación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Son una especie de puente hacia el concepto matemático en sí, estos contextos de representación en la actividad matemática son de naturaleza semiótica. De ahí la importancia de estudiar las representaciones, según Duval (2006), considerar y comprender la naturaleza semiótica de las representaciones matemáticas, significa también analizar las formas en que deben ser utilizadas en la enseñanza, así como sus requisitos cognitivos por parte del estudiante. Un ejemplo sencillo de esta necesidad de la actividad matemática de contextos de representación, lo podemos observar en los números naturales. Se pueden representar de muchas formas, a través de diversos signos, con cerillas, con puntos, con letras, con figuras poligonales o con números decimales. Para Sánchez (2014), los símbolos y signos que se utilizan en la actividad matemática cumplen un rol de gran importancia para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Porque a partir de las diferentes maneras de representar los objetos matemáticos, el aprendizaje avanza hacia un conocimiento profundo de los conceptos matemáticos, pero también permite analizar los obstáculos que presentan los estudiantes en determinados conceptos.

2.2.2 Descripción de la Teoría de las Representaciones Semióticas

De lo anterior podemos rescatar que una actividad muy importante para el aprendizaje de la matemática, es la producción de representaciones para abordar los diferentes objetos matemáticos y posibilitar su estudio. A esta actividad de acercamiento a los objetos matemáticos mediante signos se denota como *semiosis*. Por otra parte, el objetivo de la actividad de representación es la adquisición del concepto matemático en cuestión, en otras palabras, de la aprehensión conceptual de los objetos que han sido representados. A esta actividad de aprehensión conceptual se le denomina *noesis*. Luego, como dice Sánchez (2014), podemos describir la enseñanza de la matemática, como un proceso de selección de determinados signos que remiten a objetos matemáticos, semiosis, que se dirigen hacia la comprensión conceptual del estudiante, hacia la aprehensión del concepto matemático o hacia la visualización de los objetos matemáticos de estudio, es decir, hacia la noesis. Sin embargo, es interesante observar la relación que guardan los conceptos de semiosis y noesis. La noesis, la aprehensión conceptual, está condicionada por las diversas representaciones semióticas que tenga el estudiante del objeto matemático. En otras palabras, el aprendizaje, la noética, está condicionada o determinada por las representaciones del objeto que el estudiante tenga para acceder, es decir, de la semiosis. De aquí, como reflexiona (Oviedo et al, 2011), viene la fórmula que describe el proceso anterior: *no hay noesis sin semiosis*.

Además, esta forma de entender la comprensión de las diferentes nociones en matemáticas guarda una relación que resulta paradójica. Esta relación es desarrollada por D'Amore (2011) y que se explica a continuación. Si el aprendizaje de los objetos matemáticos se define como una actividad estrictamente conceptual, lo que se ha indicado a través de la noesis y, por otra, es a través de las diferentes representaciones semióticas como los estudiantes se acercan a los objetos matemáticos, es válido preguntarse, ¿cómo las personas que están en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, ya que únicamente han tenido un acercamiento con sólo dichas representaciones? ¿Por qué deberían pensar en la existencia de un concepto más allá de la representación que ellos conocen y no confundir el objeto con su representación? Además, ¿cómo no podrían confundir el concepto matemático con una única representación si sólo han tenido acceso a una de ellas? Como no se puede acceder directamente a los objetos matemáticos, sin una representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Pero, por otra parte, ¿cómo podrían los estudiantes tener el dominio para trabajar o manipular las representaciones semióticas de los objetos matemáticos, si no han adquirido previamente una adquisición conceptual de las nociones representadas? Por lo tanto, si el profesor no tiene en cuenta la relación existente entre semiosis y noesis, considerará que el estudiante está visualizando directamente el objeto matemático, pero lo que está ocurriendo es que el estudiante se ha acercado a una representación, una entre muchas, del objeto en cuestión. Y como concluye D'Amore (2002), por lo tanto, el profesor confunde los elementos y sucesiones del proceso de comprensión de un concepto en matemática, y exigirá al estudiante un dominio aquellas nociones, a través de una actividad de mayor profundidad con las representaciones, que no podrá asimilar. El aprendiz hasta ese momento no tiene recursos culturales ni cognitivos para enfrentar tareas más complejas que requieran de la comprensión profunda del concepto matemático.

Las representaciones deben cumplir con algunas exigencias para ser utilizadas en la actividad matemática. Primero, es necesario tener presente que existen sistemas semióticos que pueden ser de diversos tipos, el lenguaje común que utilizamos nos permite representar algunos objetos matemáticos, como por ejemplo las definiciones de ciertos elementos o propiedades; otro sistema semiótico que utilizamos es el lenguaje con números o lenguaje numeral que también nos permite representar objetos matemáticos, como por ejemplo en la aritmética; pero también ocupamos un lenguaje gráfico para expresar objetos matemáticos, como por ejemplo en la geometría. Por lo tanto, existen diversos sistemas semióticos que permiten representar los diferentes objetos matemáticos. Sin embargo, no todo sistema semiótico, es decir, un complejo de signos relacionados entre sí que permiten dar significado a un concepto, puede ser utilizado como una representación válida en matemática. A estos sistemas semióticos que cumplen con estas características se les denomina registros semióticos. Un sistema semiótico puede ser ocupado como un registro semiótico si posibilita tres acciones fundamentales: la *identificación*, el *tratamiento* y la *conversión*. La identificación consiste en poder sustituir el objeto matemático con una representación semiótica, es decir, con signos que permitan identificar el objeto matemático y no confundirlo con otros. Además, estos signos deben visualizar las características suficientes para poder acceder a información relevante del objeto matemático en estudio. El tratamiento consiste en la acción de modificar o manipular la representación del objeto dentro del mismo registro semiótico, es decir, cambiar una representación por otra. Finalmente, la conversión es la modificación de un objeto matemático desde un registro semiótico a otro (D'Amore, 2011; Sánchez, 2014).

Vamos a proponer como ejemplo un concepto C que es explicado por D'Amore (2002):

La identificación de este concepto necesariamente debemos hacerla en un registro semiótico en particular. Ocuparemos el lenguaje común como registro semiótico de partida, así pues, nuestro objeto matemático es:

un medio

Luego de identificar el objeto matemático en un registro semiótico en particular, podemos realizar un tratamiento, es decir, modificar la representación en el mismo registro semiótico, así:

la mitad

Ahora podemos hacer una conversión del registro semiótico del lenguaje común al registro semiótico del lenguaje aritmético, en particular en una escritura fraccionaria, es decir, hacer una conversión:

$$\frac{1}{2}$$

Dentro de este registro semiótico podemos realizar un tratamiento y obtener la siguiente representación en una escritura decimal:

$$0.5$$

Otra alternativa de tratamiento en el mismo registro semiótico, pero ahora en una escritura exponencial:

$$5 \times 10^{-1}$$

Podemos realizar una conversión a otro registro semiótico, en este caso al lenguaje algebraico, en particular ocupando la escritura de teoría de conjuntos:

$$\{x \in Q_{+}/2x - 1 = 0\}$$

También Duval (2006) indica que tratamiento y conversión son esenciales en la actividad matemática. Una metodología que puede utilizar el docente para evaluar la comprensión matemática que tienen sus estudiantes, es analizar las transformaciones de tratamiento y conversión que realiza el alumno. Este análisis debe comenzar con encontrar las diferencias de estas dos transformaciones en la actividad matemática, ya que ambas siempre van unidas en la resolución de problemas. Sin embargo, también es muy importante la primera característica de un registro semiótico, el poder identificar un objeto matemático en una representación pues, es muy útil elegir el “mejor” registro de representación, ya que existen registros que pueden describir con mayor profundidad ciertas características de los objetos matemáticos, permiten mayor generalización y son más intuitivos en sus tratamientos. Además, la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento y es considerada como una etapa final para determinar el grado de comprensión que tiene un estudiante sobre un objeto matemático en particular. El problema con la conversión, a diferencia del tratamiento, es que este último se enseña como una serie de pasos a seguir, mientras que el paso de un registro semiótico a otro aparece muchas veces como un arte de magia y que no sigue una estructura conocida por los estudiantes (Duval, 2006).

Otras características de la representación en la actividad matemática, que están implícitas en el ejemplo anterior, son los conceptos de *registros de partida* y de *registros de llegada*. Con esto se establece una orientación en la conversión de registros, y se indica explícitamente que los signos comienzan con un tipo de representación y se dirigen a uno diferente. Por ejemplo, es muy común que los estudiantes tengan como actividad graficar una función a partir de su expresión algebraica. En este caso el registro de partida es una notación algebraica y el registro de llegada, hacia donde está dirigida la actividad, es una notación gráfica (Morales, 2013). Además, existe el concepto de *unidades significantes*. Estas son las unidades más pequeñas en que puede descomponerse una representación semiótica. Siguiendo lo expuesto un poco más arriba, podemos distinguir entre unidades significantes en el registro de partida como unidades significantes en el registro de llegada. Es importante que en el diseño de una actividad en donde está presente el proceso de conversión, se identifiquen las unidades significantes en ambos registros y se logre establecer una relación entre una unidad del registro de partida a otra del registro de llegada, así como las unidades significantes que no tienen ningún vínculo entre ambos registros. De esta manera, se estará adelantando a posibles obstáculos o dificultades que encontrará el estudiante en la conversión. Sin embargo, el elemento más importante dentro de la conversión es la congruencia entre registros. La congruencia está determinada por tres condiciones:

1. Congruencia semántica entre las unidades significativas que constituyen ambos registros.
2. La posibilidad de convertir una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada.
3. Igual orden de aprehensión de las unidades significativas en las dos representaciones.

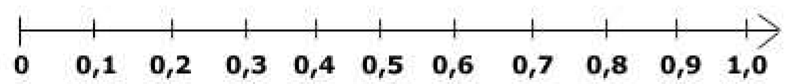
Además, puede existir congruencia en un sentido pero no en el otro, así como cumplir parcialmente las condiciones expuestas anteriormente (Ramírez et al, 2013). Según Duval (2000) “La no congruencia es un fenómeno crucial para cualquier tarea de conversión... Pueden efectuarse muchos análisis sistemáticos exactos del carácter congruente o no congruente de la conversión de una representación a otra, explicando entonces de una forma bastante exacta muchos errores” citado en (de la Fuente et al, 2003, p.192).

En (de la Fuente et al, 2003) se presenta un ejemplo de los conceptos explicados anteriormente. Estudiando el concepto de sucesiones que convergen a números enteros positivos cercanos a 1, se observó que los estudiantes tienen la intuición de que las sucesiones siempre tienden a 0. Un caso concreto de conflicto en la congruencia se presenta en la sucesión siguiente:

1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.501	0.5001	...

En la conversión del registro numérico al figural se presentan las tres condiciones para la congruencia:

1. Congruencia de las unidades significantes en ambos registros. Es decir a cada elemento del registro de partida, numeral, le corresponde un elemento del registro de llegada, figural. A cada elemento de la sucesión le corresponde al menos un punto en el segmento de recta que va de 0 a 1.
2. Univocidad semántica. Es decir, a cada elemento de la sucesión numérica le corresponde un único elemento en el segmento de recta que va de 0 a 1. Como la conversión se dirige de un registro numeral a otro figural, sólo se necesita que a cada número le corresponde un único punto, pero no recíprocamente.
3. Orden en la secuencia de las unidades significantes en ambos registros. La secuencia de valores de ambos registros guarda un orden. Tanto la secuencia numérica como la de puntos en el segmento de recta, se puede visualizar un orden de los valores en cada una de las representaciones.



Sin embargo, recíprocamente no hay congruencia. Con facilidad se puede observar que no hay correspondencia entre los elementos del segmento de recta que va de 0 a 1 con la sucesión numérica presentada. Porque los puntos del segmento que se ubican entre 0 y 0.5 no tienen una imagen en la secuencia de valores. En el proceso de enseñanza y aprendizaje se debe privilegiar el proceso de conversión entre registros pero cuidando de aspectos específicos. Como la realización de actividades que conlleven la conversión en ambos sentidos, presentando al estudiante conversiones congruentes como no congruentes. Y privilegiar un trabajo sistemático en la identificación de unidades significantes en ambos registros y observar las correspondencias respectivas (Aznar et al, 2010).

En el análisis de Duval (2006), lo que más importa de las representaciones semióticas en la actividad matemática no es tanto su capacidad de identificar un objeto matemático, sino que la de transformar entre diversas representaciones semióticas que está en el centro del procesamiento matemático. Por lo tanto, si nos preguntamos ¿cuál es la principal función de las representaciones semióticas? o ¿qué papel juegan las representaciones en la actividad matemática? Debemos responder, como lo hace Duval, que es su capacidad para transformar las representaciones semióticas, es decir, en términos muy generales, la de sustituir unos signos por otros, por lo tanto, no debemos hablar de *mediación semiótica*, la propiedad del signo para llevar al sujeto hacia el objeto o noción matemática, sino que de *mediaciones semióticas* y muy diferentes entre sí. Aunque un objeto matemático puede tener múltiples representaciones, en la actividad matemática se necesita elegir una representación para un objeto matemático en particular. Implícitamente se está indicando que el estudiante teniendo muchas opciones para representar un objeto matemático debe de escoger uno de ellos. Es decir, el estudiante debe reconocer que existe una relación entre todas las representaciones de un mismo objeto, una equivalencia entre ellas, en tanto que pueden identificar un mismo objeto. A esta vinculación entre las representaciones de un mismo objeto se le denomina *coordinación interna*. Por lo tanto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje el estudiante debe aprender que todas las representaciones son de un mismo objeto. Sin esta coordinación dos representaciones distintas equivalen a dos objetos diferentes. Luego, centrar el proceso de enseñanza de un objeto matemático en la comprensión conceptual, es decir, en lo que está más allá del signo, e implícitamente considerar la representación semiótica como un elemento externo de la comprensión del objeto matemático puro, es un discurso estéril y no lleva a ningún lado. De esta forma se indica que la mediación semiótica se alcanza una vez que se ha llegado a la comprensión conceptual. Lo que sí resulta más fructífero en el análisis didáctico de la matemática, no es considerar la comprensión como un salto desde el contenido de la representación semiótica al objeto puramente matemático representado, sino que considerar la comprensión conceptual como la relación de las distintas representaciones de un mismo objeto. Es la habilidad para transitar de una representación a otra, de forma conjunta, interactiva y paralela la que debe privilegiarse en la actividad matemática con en el estudiante. Pero esta habilidad se logra mediante el desarrollo de la coordinación interna entre representaciones. Luego, la comprensión conceptual no es una condición que habilite la coordinación, sino que es el producto de tal coordinación interna. En la enseñanza de la matemática lo que más importa no es elegir la mejor representación de un objeto matemático a enseñar, sino en lograr que los estudiantes tengan la capacidad de coordinar las múltiples representaciones y de transformar una en otra (Duval, 2006).

Sin embargo, en las transformaciones de las representaciones semióticas, existe una diferencia significativa entre la complejidad que representa la conversión con respecto al tratamiento. Como se más arriba con Duval (2006), la complejidad reside en que en el tratamiento existen reglas y un código que puede ser enseñado para avanzar en los cambios de signos en un registro, a diferencia de lo que ocurre en la conversión. Otras de las dificultades en que radica el proceso de conversión, es el fenómeno de no congruencias entre las unidades significantes de dos registros. Además, la conversión en casos de no congruencia, exige del estudiante la coordinación entre dos registros, pero este proceso no se da de forma automática y tampoco surge de forma espontánea por la enseñanza a través de actividades didácticamente interesantes. Por otra parte, esta dificultad corresponde al proceso mismo de conceptualización, pues ésta surge cuando el estudiante logra establecer una relación entre dos representaciones diferentes (D’Amore, 2011). Por esta razón, es que la conversión es la principal componente de la conceptualización, ya que lo más importante es la representación semiótica de un objeto matemático en varios registros de representación. Como indica Morales (2013), los estudiantes son monorregistros, no logran coordinar dos o más registros, que las respuestas siguen en el registro en que está formulada la pregunta y se exhibe un dominio del registro algebraico por sobre otros que podrían ayudar a visualizar mejor el objeto matemático en cuestión.

En síntesis, el uso de diversas representaciones para conocer un mismo objeto matemático permite enriquecer el significado, el conocimiento y la comprensión por parte del estudiante. Cada nueva representación ofrece una nueva arista por la cual conocer otras características y comportamiento del objeto matemático. Además de identificar el mismo objeto matemático en varias representaciones, el estudiante necesita poder articular cada una de ellas y por lo tanto es necesario que logre asimilar los elementos que permanecen al convertir y tratar un mismo objeto en diferentes representaciones semióticas. Cada experiencia del estudiante con las representaciones semióticas del objeto matemático, y su participación activa a través de ejercicios de tratamiento y conversión, y el análisis respectivo de los elementos importantes en cada uno de ellos, es una explicación como dice D'Amore (2006), a través de operaciones concretas y objetivas, de cómo se construye el conocimiento en los estudiantes.

2.3 Historia de la Matemática

2.3.1 Introducción

La historia de las ideas en matemática permite observar el origen de los diferentes conceptos matemáticos, pero desde una diversidad de ángulos, ya que se está presente no únicamente en la génesis sino en todo el proceso de construcción y elaboración de un mismo concepto. Desde distintos personajes, épocas y contextos socioculturales, la Historia de la Matemática permite profundizar en los elementos constitutivos de los objetos matemáticos, es decir, qué circunstancias y problemáticas le han dado origen, así como los diversos significados que ha recibido a lo largo de la historia. Como indica Gómez (2003), todos estos componentes que permiten abordar con una mirada integradora las distintas teorías surgidas, hacen de la Historia de la Matemática un recurso muy valioso para el profesor. En la Historia de la Matemática el profesor puede encontrar numerosos ejemplos de cómo puede acercar esta ciencia al estudiante. Además, para diferentes contenidos tiene muchos ejemplos sobre las formas de entender qué es el estudio de la matemática y los métodos utilizados por sociedades e individuos para su comprensión. Por ejemplo, se destaca el uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza, al reconocer la época que va desde el siglo XVII hasta la primera mitad del siglo XIX, como un periodo en donde se desarrolla gran cantidad de teorías, como la Teoría de Números, el Cálculo de Probabilidades, el Cálculo Infinitesimal, entre otros, pero según Urbaneja (1991) "bajo un espíritu innovador, creativo, heurístico y empírico, basado en profundas intuiciones que conducían a la resolución sorprendente y rápida de antiguos y nuevos problemas, aunque en alguno de estos nuevos ámbitos matemáticos, en particular en el Cálculo, la inventiva primaba sobre los escrúpulos del rigor" (p.284). Aunque muchas veces faltaba rigor y se produjeran enormes dificultades para dar soluciones a paradojas, nacidas por la forma de elaborar teorías, los avances fueron enormes (Urbaneja, 1991). Fue el abuso de la intuición y un relajo en el rigor matemático, Urbaneja (1991), así como la necesidad de fundamentar las diversas ramas de la matemática, lo que conlleva a desplazarse con fuerza hacia la exclusividad de la lógica y de la abstracción como única metodología válida para el estudio de la matemática. Fruto de este periodo en la educación es la aplicación de las matemáticas modernas con Bourbaki a la cabeza. Es innegable que la historia reciente de la matemática ha determinado la forma de enseñar esta disciplina, así como la noción que tienen de ella las personas actualmente. Pues, como dice Chávez (2003), es a partir de la segunda mitad del siglo XIX que se deja sentir con fuerza como la matemática se distancia del mundo sensible, por lo tanto, se hace menos intuitiva y con un gran nivel de abstracción.

A su vez, el uso de la Historia de la Matemática permite reconciliar métodos diferentes de aprendizaje, así como estrategias que han sido utilizadas de forma satisfactoria en diferentes épocas. El profesor puede reconocer las consecuencias directas de los diferentes periodos históricos de la matemática en la forma de enseñar. Por ejemplo, en ocasiones su enseñanza ha degenerado en un adiestramiento para la resolución de problemas, y aunque esta metodología pueda tener elementos positivos, no produce una comprensión o independencia intelectual al estudiante. Estas formas de abordar la enseñanza de la matemática, vienen asociadas con una falta de coordinación con otros campos del saber que podrían potenciar su enseñanza (Courant & Robbins, 1979). La Historia de la Matemática, permite acercar a la enseñanza, las herramientas que han utilizado los matemáticos en diferentes épocas y circunstancias para la comprensión de un concepto. Y aunque ahora se privilegia y valida únicamente la lógica, la generalidad y el análisis, también han sido de gran valor la intuición, la particularidad y la construcción en el avance de esta ciencia (Courant & Robbins, 1979). Igualmente, en (Courant & Jhon, 1999), indican que es muy recomendable presentar la matemática en su contexto, en la problemática que dio origen y vitalidad a la actividad, y no petrificada, como un gran monumento al cual se le debe rendir homenaje, aunque es solemne, es también frío y estéril. Los avances en matemática demuestran el uso de la experiencia de las personas en otras áreas muy disímiles, de la constante asociación con otras ciencias y la cultura en general, con problemas teóricos y prácticos, pero nunca a través del dogmatismo o con una actitud introvertida.

2.3.2 Diferentes interpretaciones del uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza

Anacona (2003) indica que existen principalmente dos formas de abordar la Historia de la Matemática, si lo hacemos desde el interior de la matemática, desde los mismos conceptos, o si lo hacemos desde el exterior de la matemática, es decir, desde las circunstancias históricas, sociales y culturales en donde emergen los conceptos. A la primera corriente de la Historia de la Matemática se le denomina internalista y a la segunda externalista. Una visión internalista de la Historia de la Matemática desarrollará todos los conceptos al margen de los contextos y se comprenderá como una ciencia aislada que se desarrolla sin intervención externa. Por otra parte, una visión externalista de la Historia de la Matemática, privilegia exclusivamente el entorno filosófico, histórico o artístico, entre muchos otros, siendo más bien la historia de los contextos en donde se dio origen el desarrollo de los conceptos de la matemática. Sin embargo, una Historia de la Matemática sin considerar el desarrollo mismo de la ciencia y sus conceptos resulta vacío para entender los procesos de construcción de los objetos matemáticos. Por suerte existe una tercera vía que complementa ambas visiones de la Historia de la Matemática, donde se privilegia el origen de los conceptos, su proceso de desarrollo, las diversas aplicaciones y cómo dio origen a otros conceptos y teorías. Esta visión que da cuenta de la evolución de la matemática a través de siglos y cómo se concatena con otros nuevos descubrimientos, se relaciona directamente con las culturas en donde se desarrollaron, con los personajes que han sido parte de la elaboración de diversos conceptos, y sus múltiples relaciones con otras áreas del saber. Esta visión se centra en la matemática, pero considerando que ella misma es una actividad humana que se construye en entornos sociales en donde diversas culturas se han relacionado. A su vez, en (Fernández & Zarzar, 2016), presenta una clasificación del uso de la Historia de la Matemática a partir de considerarla como una meta o como una herramienta. Si se considera la Historia de la Matemática como una meta, entonces su utilidad radica en estudiar la evolución de la disciplina y su propósito está en sí misma. Por otra parte, la historia como herramienta indica que es una ayuda para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos y argumentaciones en matemática. Pero también para potenciar el interés de los estudiantes en la matemática, así como motivarlos en las diversas actividades que se deban abordar en el aprendizaje, de esta manera se potencia una imagen más humana y menos terrible de esta ciencia en los alumnos. También, se considera la Historia de la Matemática como una poderosa herramienta para observar ciertas dificultades en la aprehensión de ciertos conceptos en periodos históricos determinados, y que estos mismos obstáculos se presentan en los estudiantes en el aprendizaje. De esta forma el profesor puede adelantarse a ciertas problemáticas, enfatizar ciertas nociones y reforzar explicaciones que históricamente fueron determinantes para la comprensión de una noción. Se insiste de igual manera que no se debe usar la historia sin modificaciones, sino que el objetivo es seleccionar aquellos momentos más importantes con el fin de recrear la génesis del concepto. La importancia del uso de la Historia de la Matemática como una herramienta, radica en considerar que, para dominar la matemática, la mente debe seguir la misma secuencia por donde la matemática ha recorrido su evolución.

2.3.3 Diferentes corrientes de estudio de la Historia de la Matemática en educación

La Historia de la Matemática tiene diversas aplicaciones en educación. A partir de estas aplicaciones se distinguen corrientes de investigación que tienen principalmente como componente el análisis de la Historia de la Matemática. Según Gómez (2003), un enfoque es *determinar obstáculos surgidos en el origen y desarrollo de un concepto* en particular. Este proceso de reconocer concepciones problema en la historia se traslada a la sala de clases, y se diseñan modelos, recursos y secuencias didácticas, que tengan en cuenta estos problemas en el proceso de enseñanza. De esta manera se prepara un proceso de enseñanza y aprendizaje orientado a las posibles dificultades que puede presentar el estudiante. Tanto Anacona (2003) y Gómez (2003) concuerdan que, otro enfoque de la Historia de la Matemática, *aporta con problemas y situaciones que los estudiantes deben discutir y resolver*. Esta visión tiene el objetivo de crear secuencias didácticas desde una perspectiva histórica recurriendo a problemas clásicos y personajes relevantes de la disciplina. También se presenta desde esta óptica porque se considera que los estudiantes se encontrarán más motivados con el aprendizaje (Gómez, 2003).

Un enfoque con una visión particular, de la matemática y su historia, considera que los conceptos pasan por una serie de etapas, desde su origen hasta su consolidación. A su vez, estas etapas, en su totalidad o parcialmente, es la secuencia que el estudiante debe seguir para comprender la noción en cuestión. El análisis de la Historia de la Matemática se centra en identificar aquellas etapas, así como los elementos que sirven de transición de una a otra (Gómez, 2003). Bajo este enfoque se ha desarrollado, con mayor precisión, una corriente que se denomina *método genético*. También contempla pasar por una serie de etapas y por los mecanismos de transición que llevan de una a otra hasta la consolidación del concepto, sin embargo, también se reconstruye en la sala de clases el clima psicológico de las circunstancias del momento que se desarrolla la noción matemática. Además, como indica González (1991), se considera que es relevante para la comprensión del concepto en el estudiante, contextualizar históricamente, reconstruir las preguntas, las necesidades, las motivaciones que dieron origen a las diferentes etapas, así como las dificultades intrínsecas de la noción matemática en estudio. Esto con la convicción de que el estudiante manifiesta estos elementos para el aprendizaje de la matemática o en la resolución de problemas.

Gómez (2003), manifiesta una corriente que se centra en el análisis en los libros de texto que han sido influyentes en la historia de las ideas matemáticas o aquellos textos históricos que poseen una fuente privilegiada de información. Una primera corriente se centra en este análisis para observar los contenidos de enseñanza en diferentes periodos históricos, con el fin de rescatar información en el desarrollo curricular y pedagógico, los contenidos matemáticos que se han seleccionado para su enseñanza y cuáles han dejado de lado, sus razones en el contexto científico y social. Existe una segunda corriente, Gómez (2011), que se fundamenta en el análisis de libros de texto de estudio destacados en la Historia de la Matemática, se rescata la información que pueda ser útil sobre qué tipos de problemas, ejercicios y secuencias de enseñanza se privilegiaban en distintas épocas con el fin de encontrar raíces de los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática que se manifiestan actualmente en la sala de clases.

Existen muchas alternativas para usar la Historia de la Matemática en educación, así como también son varios los argumentos que sustentan su uso. Pero más allá de la utilidad para la enseñanza de la matemática, también existen otras razones que son muy importantes, entre estas podemos rescatar: la formación de lazos con otras ciencias de las cuales se pueden ver ambas potenciadas, la integración que tiene la Historia de la Matemática con otras ramas del saber con una perspectiva más humanista. Entre ellas podemos nombrar la historia, el arte, la filosofía y la cultura en general. Con esto se privilegia una formación que asocia las diferentes perspectivas del conocimiento y que no discrimina o crea sesgos innecesarios (Urbaneja, 2004). Más allá de las ventajas de aplicar la Historia de la Matemática, por ejemplo, obtener una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos en particular, la fuerte relación que permita integrar una visión humanista y científica de la matemática, y la ganancia que tenga el estudiante culturalmente, entre otros buenos resultados vistos más arriba, existe otro mérito no menor en el uso de la Historia de la Matemática. Según Massa (2014) el estudiante tendrá una visión diferente de lo que es la matemática, una que está más relacionada con la construcción del conocimiento, con estrecha comunicación con la cultura propia de un pueblo e involucrada con las circunstancias que la rodean, además, comprenderá que la intuición y los errores también forman parte del desarrollo de la matemática.

2.4 Breve Historia de la Ecuación Cuadrática

2.4.1 Introducción

La historia de la ecuación cuadrática es el relato de miles de años de progreso lento, en donde se van sucediendo el descubrimiento de técnicas y fórmulas, a su vez de un lenguaje cada vez más refinado: desde el uso del lenguaje natural hasta el uso de la simbología propia del álgebra

(Puig, 1998). Tanto en el aprendizaje de los estudiantes como en el desarrollo histórico del concepto de ecuación cuadrática, se pueden observar obstáculos para alcanzar la comprensión o construcción del concepto. En ambos casos, existen conocimientos anteriores, a menudo imprecisos y provisorios, que resultan falsos o poco apropiados para una nueva situación. El conflicto, según Malisani (1999), se debe en gran medida, a la adaptación de los conocimientos anteriores a una nueva situación y su consecuente adaptación bajo la aprehensión de un nuevo saber.

Los símbolos tan comunes usados en la resolución de una ecuación cuadrática, y que son una poderosa herramienta que favorece el pensamiento algebraico, siguió un largo camino para su construcción y formalización. Se reconocen etapas, una primera fase denominada retórica en la que se usa exclusivamente el lenguaje natural (anterior al 250 d. C.); una segunda fase denominada sincopada, en donde se usan algunas abreviaturas pero se siguen desarrollando los problema en el lenguaje natural (desde el 250 d. C. al siglo XVI); y la tercera fase denominada simbólica, que utiliza letras para representar cantidades y signos con las operaciones, así como este mismo lenguaje para resolver y demostrar ecuaciones hacia finales del siglo XVI (Malisani, 1999). A continuación se propone una secuencia de la construcción de la ecuación cuadrática, que inevitablemente va acompañada de la formalización del álgebra, a través de tres episodios que abarcan las tres fases antes descritas: la resolución de la ecuación cuadrática a través de un algoritmo con los matemáticos babilonios; la resolución de la ecuación cuadrática a través de la geometría euclidiana con al-Khowârizmî; la resolución de la ecuación cuadrática a través de la simbología algebraica con Descartes.

2.4.2 Primer episodio: Babilonios

Los babilonios se acercaron a la ecuación cuadrática por diferentes razones, pero podemos considerar como las más relevantes las siguientes: problemas sobre divisiones de campos, sobre la cantidad y el tamaño de los ladrillos para construir edificios, problemas de herencias, y en general, problemas económicos (Kline & Alonso, 1999). Además de la solución de problemas concretos y necesarios en una sociedad compleja, el estudio de la ecuación cuadrática fue considerada indispensable en la formación de escribas y funcionarios que formaban parte del gobierno (Pastor & Babini, 1985). Los matemáticos babilonios dieron una resolución verbal a los problemas que implican ecuaciones de segundo grado. No utilizan una simbología como se realiza actualmente, tampoco utilizaban figuras geométricas. Seguían una serie de reglas para dar la solución al problema planteado. Se puede indicar que ellos usaban el lenguaje natural como medio para dar solución a los problemas y secuenciar los pasos a través de un algoritmo. Se iban explicando los pasos a seguir, por ejemplo: “eleva al cuadrado 10, lo que da 100; resta 100 de 1.000, lo que da 900”. Las palabras, terminología, utilizada en la resolución de la ecuación cuadrática están relacionadas con la geometría. Así pues, se pueden encontrar palabras como *us* (longitud), *sag* (anchura) y *asa* (área) utilizadas para representar incógnitas. Los matemáticos babilonios no hacen referencia a una vinculación del álgebra con la geometría sino que los problemas en un comienzo derivaron de conflictos con mediciones de tierras y relacionados con la agricultura (Kline & Alonso, 1999). Además de que no existe ninguna representación geométrica en los problemas relacionados con ecuaciones de segundo grado, tampoco justificaban los pasos que daban en la resolución algorítmica con el lenguaje natural (Vargas, 2013). A su vez, también es importante mencionar que los problemas siempre son particulares, con cifras concretas, y no se presentan problemas o reglas generales (Pastor & Babini, 1985). Finalmente, como indican (Kline & Alonso, 1999), los matemáticos babilonios no conocían los números negativos y por lo tanto no se preocuparon de encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadráticas, únicamente las positivas.

En síntesis, se puede deducir a partir de los descubrimientos realizados, si bien no aparece de forma explícita un método general para resolver ecuaciones cuadráticas, sin duda se puede deducir que tenían uno. Pero con total seguridad, todos los métodos utilizados en la resolución de una ecuación cuadrática, con elementos de aritmética, algebraicos y geométricos, fueron el resultado de un proceso de ensayo y error. Para los babilonios se justificaba la utilización de un método si podían utilizarlo en la resolución de problemas y si este funcionaba aceptablemente bien en la realidad (Kline & Alonso, 1999).

2.4.3 Segundo episodio: Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî

La matemática en el Islam no se presentó de forma pura, por lo tanto no existen matemáticos únicamente, sino que en gran medida los personajes que ayudaron al progreso de la matemática árabe fueron los astrónomos. Esto debido a que desde los comienzos existieron restricciones religiosas sobre cuestiones astronómicas y de orientación, así como determinación de fechas, horas y la construcción de observatorios. Luego, aparecieron muchos problemas que dieron lugar a planteamientos algebraicos, entre ellas, la ecuación de segundo grado (Pastor & Babini, 1985). Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî fue un geógrafo, astrónomo y matemático de cuya vida se sabe poco, pero que ha pasado a la historia por escribir el libro titulado *Al-jabr w'al muqâbala* (alrededor del 830) que dio nombre al vocablo Álgebra para aquella rama de la matemática. Del título se puede observar dos palabras importantes, *al-jabr* que significa “restauración” y *Al' muqâbala* que significa “simplificación” (Kline & Alonso, 1999). Según Puig (1998), en este libro al-Khowârizmî indica explícitamente que su estudio permitirá poder resolver problemas de herencias, de repartos, en el comercio y en todos los asuntos de agrimensura y de excavación de canales.

Para la resolución de la ecuación cuadrática al-Khowârizmî utiliza diferentes representaciones, el lenguaje natural a través de una secuencia de pasos, un algoritmo de resolución, muy parecido a lo desarrollado por los matemáticos babilonios más de mil años de anterioridad. Pero, a diferencia de estos, parte definiendo las especies de números que utilizará para su resolución cuyas combinaciones permiten resolver los problemas del texto:

"*Encontré que los números que son necesarios para calcular por al-jabr y al-muqâbala son tres especies, a saber, raíces, tesoros y simples números no atribuidos a raíz ni a tesoro. Una raíz es cualquier cosa que será multiplicada por sí misma, consistente en la unidad o números, hacia arriba, o fracciones, hacia abajo.*
Un tesoro es la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma.
Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo a raíz ni a tesoro" (Puig, 1998, p.6).

Un ejemplo, a través de una representación verbal mediante un algoritmo, haciendo uso de la terminología que presenta en su libro, es el siguiente: "Un cuadrado y diez de sus raíces son iguales a treinta y nueve unidades, es decir, si sumamos diez raíces a un cuadrado, la suma es igual a treinta y nueve" (Kline & Alonso, 1999, p.261). Luego, a través de una serie de pasos dará respuesta al problema, de la siguiente manera "Tomemos la mitad del número de raíces, esto es, en este caso, cinco, y multipliquemos esta cantidad por sí misma y el resultado es veinticinco. Añadámosle a treinta y nueve, lo que da sesenta y cuatro; tomemos su raíz cuadrada, u ocho, y restémosle la mitad del número de raíces, precisamente cinco, y queda un resto de tres. Esta es la raíz" (Kline & Alonso, 1999, p.261).

Sin embargo, uno de los grandes aportes es el uso de ecuaciones canónicas. Todas las ecuaciones pueden convertirse en una de ellas, seis formas en total, y luego poder resolverlas. al-Khowârizmî, lo que hace es identificar aquellas formas canónicas y dar una solución a cada una de ellas. Las seis formas son las siguientes:

1. tesoro igual a raíces
2. tesoro igual a números
3. raíces igual a números
4. tesoro y raíces igual a números
5. tesoro y números igual a raíces
6. raíces y números igual a tesoro

Otro aspecto que destaca Puig (1998), al-Khowârizmî indica las operaciones que se deben realizar para transformar cualquier ecuación a una de las seis formas canónicas. Estas operaciones son las siguientes: *al-jabr*, *al-muqâbala*, *radd* e *ikmâl* o *takmîl*. Las primeras dos operaciones, que aparecen en el título del libro, *al-jabr* o restauración, se encargan de eliminar las cantidades substractivas que aparecen en la ecuación. La operación *al-muqâbala* o restauración, se encarga de eliminar las especies de números que están repetidas. Las otras dos operaciones tienen como objetivo que sólo exista un único tesoro. Así, *radd* o reducir, si existen más de un tesoro en la ecuación reduce a uno solo. Si hay partes de tesoro, la operación *ikmâl* o *takmîl* completa lo que falta del tesoro para que exista uno. Además de indicar las operaciones necesarias, establece el orden en que se deben utilizar, siempre se debe seguir la misma secuencia: restaurar, reducir, oponer y completar.

Además de los aportes realizados, lo que tuvo un gran impacto a la posteridad, fue la representación geométrica de las ecuaciones cuadráticas tanto en su planteamiento, desarrollo y justificación del método a utilizar. Explica las soluciones geométricamente apoyándose en la geometría de Euclides, que los árabes conocían muy bien, e hicieron un gran adelanto al demostrarlo de esta manera. Los números negativos aún no se consideraban una solución factible en los tiempos de al-Khowârizmî así que él no los considera válidos, sin embargo, era conocida esta solución por los matemáticos árabes. Únicamente se aceptaban los números reales y positivos, que podían ser irracionales. Por otra parte, tampoco hay noticias de que reconociera soluciones complejas (Kline & Alonso, 1999).

Lo más destacable en la resolución de la ecuación cuadrática por al-Khowârizmî, aunque con el aporte de todos los matemáticos árabes, que tuvo mucha influencia en el futuro fueron: la orientación geométrica y las formas canónicas. Al reconocer la relación de la geometría con el álgebra explicaba el paralelismo entre ambas ramas de la matemática que más adelante sería fructífero. Las formas canónicas permiten encontrar algoritmos que permiten dar solución a todas las posibilidades, antes de al-Khowârizmî "no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos" (Puig, 2003, p.105). En general se reconoce el aporte de los matemáticos árabes en la relación que pudieron establecer entre el álgebra y geometría, "(...) el aporte más importante de la matemática árabe es, precisamente, haber desarrollado esta correspondencia entre geometría y álgebra cinco siglos antes de Descartes y Fermat (...)" (Malisani, 1999, p.10). Resulta determinante en la construcción de un lenguaje formal para la resolución de la ecuación cuadrática, el poder generalizar los problemas y no dar solución de forma particular. Considerado de esta manera, el pensamiento algebraico propio para la comprensión de la ecuación cuadrática, comienza antes del uso de símbolos para representar de forma general cantidades y operaciones. Como indica (Malisiani, 1999), matemáticos anteriores al desarrollo formal de la resolución de la ecuación cuadrática, que utilizaron representaciones geométricas o el lenguaje natural abordaron también de forma general los problemas, a través de familia de ecuaciones o ecuaciones canónicas, como por ejemplo al-Khowârizmî.

2.4.4 Tercer episodio: Descartes

Con Descartes el álgebra se desprende del mundo físico y comienza desarrollarse como una ciencia autónoma. Más que proporcionar conocimiento sobre el mundo lo que le interesa es su utilidad como guía del razonamiento. Encuentra una forma de "mecanizar" la matemática de modo que se simplifiquen los procesos de resolución y que no requiera gran esfuerzo mental (Kline & Alonso, 1999). Para Puig (2003), con el desarrollo de Descartes, se encuentra prácticamente constituido el sistema matemático de símbolos para esta área de estudios. Sin embargo, podemos observar en el desarrollo del lenguaje algebraico para la resolución de la ecuación de segundo grado, elementos que tienen más relación con una mejor forma de comunicar los resultados o con una interpretación más rica en significados. Así pues, cuando el lenguaje simbólico estaba completo o muy cercano al actual, los matemáticos acompañaban el desarrollo de los problemas y sus resultados con el uso del lenguaje natural y geométrico. A su vez, Malisani (1999), también vieron la necesidad de interpretar aquellos símbolos con un significado geométrico para que el estudio resultara efectivo y los resultados fueran comunicados con mayor precisión.

Con Descarte el álgebra se independiza de la geometría, y aunque utiliza representaciones tanto geométricas como simbólicas, está consciente de que es una rama de las matemáticas independiente. Por esta misma razón, a^2 deja de representar el área sino que es una número como cualquier otro, también que el producto de una línea por una línea también puede ser una línea, con esto da un paso adelante sobre todos sus predecesores (Kline & Alonso, 1999). A su vez, adelanta una primera definición de incógnita, al indicar que las letras que utiliza en la resolución de ecuaciones de forma general, no refieren a un número particular o a una cantidad geométrica especial, sino a todos los números. Son letras vacías que pueden ser llenados con cualquier contenido (Pastor & Babini, 1985). De esta manera confirma su alejamiento de la visión geométrica que hasta el momento predominaba en el álgebra. Descartes, explica la resolución de la ecuación cuadrática a través de formas canónicas que generalizan todos los tipos de ecuaciones que tienen solución. Indica que se deben transformar las ecuaciones de un problema dado a una de las formas canónicas (Puig, 2003). Además, para la resolución de la ecuación cuadrática, utiliza una gran variedad de símbolos propios del lenguaje algebraico y lo asocia con dos formas de representación geométrica para encontrar la solución (Pastor & Babini, 1985). Conoce las soluciones negativas, pero las considera falsas y por lo tanto no son válidas en su planteamiento. También sabe de la existencia de raíces reales y de raíces complejas en una ecuación de segundo grado, a las primeras ofrece métodos de resolución, pero para las segundas, en caso de ser raíces imaginarias, considera que el problema propuesto es imposible (Pastor & Babini, 1985).

De particular interés resulta analizar una de las respuestas a la ecuación de segundo grado presentado por Descartes en su obra Geometría (1637). En ella establece una relación entre una expresión algebraica y una figura geométrica, vinculando la resolución, encontrar el valor de la incógnita, con la medida de segmentos de rectas. Resuelve la siguiente ecuación:

$$z^2 = az - bb$$

Luego, supone el segmento NL igual a $\frac{1}{2}a$ y el segmento LM igual a la raíz cuadrada de bb. Después, tomando a N como centro de una circunferencia con radio NL, se traza el segmento de recta MQR paralelo a NL, obteniéndose la siguiente figura:

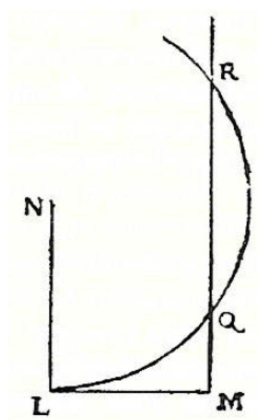


Gráfico N°1: Representación geométrica de una ecuación cuadrática por Descartes.

Citando a Descartes (1637): “Y si el círculo que, teniendo su centro en el punto N y pasando por el punto L, no corta ni toca la línea recta MQR, entonces no existe raíz alguna de la ecuación. En consecuencia, puede asegurarse que es imposible la construcción del problema propuesto” (p.285). Además, establece una relación entre la solución de la ecuación con la medida de un segmento, las soluciones posibles estarán vinculadas con la cantidad de puntos de contacto entre la recta MQR y la circunferencia. Descartes (1637) indica que: “(…) la línea buscada, z, es MQ o bien MR, pues en este caso se expresa de dos formas, a saber: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$” (p.285).

Lo que indica Descartes es que la solución de la incógnita depende de las medidas de los segmentos de recta MQ y MR. Pero existen muchos casos posibles para ambos segmentos. Cuando los puntos Q y R intersecan en la circunferencia, la recta MQR es secante a la circunferencia, entonces existen dos soluciones diferentes. Pero si los puntos Q y R coinciden, MQR es tangente a la circunferencia, MQ y MR tienen igual medida, entonces existen dos soluciones iguales. A su vez, si los puntos Q, M y L coinciden, la medida de MQ es igual a cero, y por lo tanto una solución es nula, y la otra es igual a la medida del diámetro de la circunferencia. Finalmente, como se dijo más arriba, si la recta MQR no corta la circunferencia entonces no existen soluciones reales.

A continuación seguiremos la explicación de Rodríguez (2011) para demostrar la solución propuesta por Descartes. Para la demostración observe la figura siguiente:

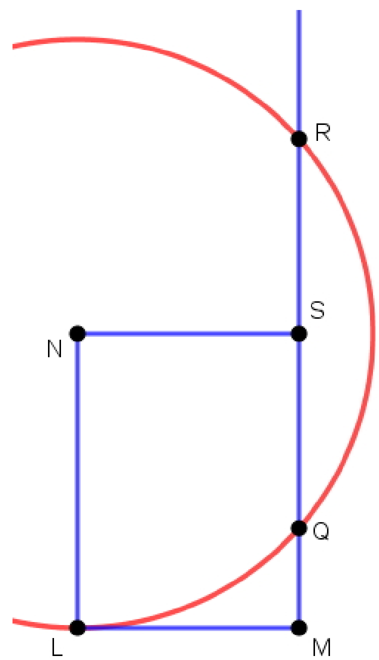


Gráfico N°2: Representación geométrica de una ecuación cuadrática.

Continuamos con la construcción geométrica de Descartes, pero consideremos el punto auxiliar S como punto medio de la cuerda QR, entonces NS es perpendicular a MR. Los triángulos NSR y NSQ que se forman, son rectángulos porque NS es perpendicular a MR.

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos NSR y NSQ, obtenemos respectivamente:

$$(NS)^2 + (SR)^2 = (NR)^2 \text{.................................}(1)$$
$$(NS)^2 + (SQ)^2 = (NQ)^2 \text{.................................}(2)$$

Despejando SR en (1) se tiene: $SR = \sqrt{(NR)^2 - (NS)^2}$................................(3)

Despejando SQ en (2) se tiene: $SQ = \sqrt{(NQ)^2 - (NS)^2}$................................(4)

Sabemos que $NL = NQ = NR = \frac{a}{2}$ porque son radios de la circunferencia y $NS = LM = b$ por construcción.

Al sustituir $NR = \frac{a}{2}$ y $NS = b$ en (3) tenemos:

$$SR = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \text{................................}(5)$$

Igualmente sustituyendo $NQ = \frac{a}{2}$ y $NS = b$ en (4) tenemos:

$$SQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \text{................................}(6)$$

Tenemos el rectángulo $NSML$, porque se trazó MQR paralela a LN además NS es perpendicular a MR y $NS = LM = b$, entonces afirmamos que $MS = LN = \frac{a}{2}$ porque son los lados del rectángulo $NSML$.

Finalmente Descartes da longitudes MR y MQ como el valor z que se está buscando, pues:

$$MR = MS + SR \text{...........................}(7)$$
$$MQ = MS - SQ \text{...........................}(8)$$

Sustituyendo $MS = \frac{a}{2}$ y (5) en (7) tenemos:

$$MR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \text{............................}(9)$$

Sustituyendo $MS = \frac{a}{2}$ y (6) en (8) tenemos:

$$MQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(10)$$

Donde (9) y (10) son las igualdades del método de Descartes.

Finalmente, uno de las grandes contribuciones de Descartes fue el perfeccionamiento de los símbolos algebraicos y que se asemeja a los actuales. De acuerdo a (Pastor & Babini, 1985), podemos indicar en este sentido que introduce las letras minúsculas en las ecuaciones, el uso de las primeras letras del alfabeto para indicar cantidades conocidas y las últimas para las incógnitas. La introducción de los exponentes, salvo para la segunda potencia, que escribe como dos factores iguales. Además, escribe cuando le conviene el segundo miembro de la ecuación igual a 0.

En general, por mucho tiempo los principales obstáculos para la resolución general de la ecuación cuadrática no fue únicamente el uso de un lenguaje apropiada para ello, el simbólico o algebraico, sino que el campo numérico que se utilizaba o se consideraba más apropiado. De esta manera los números negativos y complejos fueron excluidos como solución a los problemas planteados. Esto puede estar vinculado con el tipo de representación, así pues, la representación geométrica presenta mayores complicaciones para observar números negativos, pero también con la interpretación y problemática que lleva a la ecuación de segundo grado. Esto último se observa en que el álgebra hindú sí aceptaba, si se podía dar una interpretación dentro de la problemática, los números negativos. Sin embargo, las soluciones complejas tardaron aún más tiempo, incluso cuando el lenguaje simbólico estaba totalmente formalizado. Aunque el estudio del álgebra era complejo e imposible de lograr por civilizaciones que tenían pocas herramientas matemáticas a su disposición para enfrentar retos complejos, es muy importante hacer mención, como indican (Kline & Alonso, 1999), que únicamente con una búsqueda libre y audaz, a través de la creatividad y de forma intuitiva posibilitaron la construcción de un área que es determinante en épocas modernas. A su vez, “el análisis histórico de los distintos procedimientos utilizados para resolver ecuaciones muestra la necesidad de recurrir siempre a otros tipos de lenguajes: natural, aritmético o geométrico (...)” (Malisani, 1999, p.16).

2.5 Secuencia didáctica

2.5.1 Objetivo y principales características de una secuencia didáctica

Esta sección tiene como propósito describir qué es una secuencia didáctica, revisando los objetivos que se propone cumplir, sus componentes estructurales más significativas y algunas características relevantes de esta herramienta.

Según Díaz (2013) la secuencia didáctica surge como una herramienta alternativa ante la secuencia tradicional de enseñanza. Para (Flechsig & Schiefelbein, 2003), esta enseñanza tradicional, consiste en el docente como elemento central, quien transmite los conocimientos de una materia determinada a través de diversos recursos, como un pizarrón, textos y medios audiovisuales, y los estudiantes adoptan un rol pasivo, simples espectadores de una teoría que deben asimilar y luego replicar. Así pues, la secuencia didáctica se convierte en una herramienta que posibilita el cambio desde una práctica centrada en la enseñanza a otra centrada en el aprendizaje.

Además de no estar centrado en el docente sino que en los estudiantes, no está orientada a una secuencia de contenidos que deben ser revisados en una sesión, sino que persigue una coordinación de diferentes actividades que debe realizar el estudiante para lograr el aprendizaje (Díaz, 2013). Además, "Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que le permitan desarrollar un aprendizaje significativo" (Díaz, 2013, p.1). También para (Tobón, Prieto & Fraile, 2010), lo importante, lo que determina la estructura de la secuencia didáctica, no son los contenidos, sino las actividades de aprendizajes orientadas al estudiante, y que son articuladas con la mediación del docente. En esta nueva orientación del proceso de enseñanza y aprendizaje, es fundamental considerar los conocimientos previos de los estudiantes, qué y cuánto saben de un determinado contenido, por lo tanto, es fundamental incluir momentos que posibiliten la visualización y posterior conexión con actividades de la secuencia (Díaz, 2013). Desde este punto nos acercamos a lo indicado por Brousseau (1986), donde indica que los contenidos emergen en las situaciones a través del trabajo de los estudiantes, de forma individual y grupal, en el diálogo y reflexión entre diferentes visiones que puedan tener los alumnos. En este proceso, indica el mismo autor, el docente toma el rol de guía que dirige el proceso de aprendizaje dejando a los estudiantes la tarea de construirlo y descubrirlo.

Desde la perspectiva de los instantes o momentos que están presentes en la secuencia didáctica, la estructura, queda organizada de acuerdo a Díaz (2013) en tres secciones: actividad de apertura, desarrollo y cierre. Esta articulación de la secuencia permite retroalimentar al profesor sobre los avances y dificultades que presentan los estudiantes, así como mostrar evidencias de los aprendizajes. La actividad de apertura tiene como objetivo abordar los aprendizajes previos de los estudiantes; la actividad de desarrollo, el de establecer una relación con la nueva información y lo que sabe el estudiante; finalmente la actividad de cierre, tiene el objetivo de integrar las actividades realizadas en la secuencia. También, puede identificarse en esta última actividad, un proceso de síntesis, consultas y dudas por parte de los estudiantes, favoreciendo el sincretismo entre los antiguos y nuevos aprendizajes, y como indica Brousseau (1986), con el propósito de promocionar el diálogo y el aprendizaje entre pares, con el fin de simular una pequeña comunidad científica.

La evaluación es un elemento importante en la secuencia didáctica. Como argumenta Díaz (2013), es un proceso que siempre se dirige en forma paralela en cada una de las secciones de la secuencia, ya que implica una evaluación diagnóstica y formativa, en las actividades de apertura y desarrollo. Además, una evaluación sumativa es necesaria en la secuencia didáctica, pues, permite una mejora continua.

Capítulo III Metodología de Trabajo

3.1 Introducción

En este capítulo se describe la metodología de trabajo y los instrumentos que se aplicaron para responder preguntas y objetivos de investigación. Además, en el análisis de datos se utilizaron los softwares Microsoft Excel y Statistical Package for the Social Sciences (SPSS). Para el diseño de instrumentos se utilizó el software de matemática dinámica Geogebra, Google Docs y el editor de imágenes PicPick.

3.2 Diseño

La metodología de trabajo responde a un diseño preexperimental. Este diseño preexperimental es del tipo pretest-postest de un solo grupo. En este proceso se efectúa una observación, pretest, antes de introducir la variable independiente, secuencia didáctica, y otra después de la aplicación de esta, postest. El grupo, la muestra, con el cual se realiza la investigación es del tipo “grupo intacto”, es decir, no formado al azar. Es un grupo conformado previamente a la investigación.

3.3 Población

La aplicación de la secuencia de aprendizaje se realizó en el Colegio Novo Mundo de la comuna de Quilicura. Es un colegio particular subvencionado, sus niveles de enseñanza son: educación parvularia, enseñanza básica, enseñanza media científico-humanista. La cantidad de estudiantes es de 1.704 con un promedio de 38 alumnos por curso y con 67 docentes. Los estudiantes pertenecen al grupo socioeconómico medio.

Los resultados Simce 2016 para segundo medio son los siguientes:

- Entre el 34% y 52% presentan vulnerabilidad social.
- Puntaje promedio en Lenguaje: 203.
- Puntaje promedio en matemática: 230.
- Puntaje promedio en Ciencias Naturales: 214.

3.4 Muestra

La muestra está compuesta por 48 estudiantes de tercer año de enseñanza media en la modalidad científico. De ellos, 22 son mujeres, que representan el 45.8%, y 26 son hombres, que representan 54.2%. El promedio de matemática, al finalizar el año académico, es de 5.3, con una nota mínima de 4.0 y máxima de 6.7.

3.5 Instrumentos

Se diseñaron dos tipos de instrumentos con la intención de observar el conocimiento de los estudiantes en resolver problemas para determinar la cantidad y tipos de soluciones de una ecuación cuadrática, la variable dependiente, a través de pretest y postest. Por otra parte, se diseñaron instrumentos que permiten introducir la variable independiente, una secuencia de enseñanza y aprendizaje que entrega nuevas herramientas para dar solución al tipo de problemas indicados con anterioridad.

3.5.1 Pretest y postest

Los instrumentos para observar los aprendizajes de entrada y salida, pretest y postest, tienen tres preguntas cada uno. Las preguntas fueron seleccionadas de Pruebas de Selección Universitaria (PSU) de años anteriores, sin embargo, algunas de ellas fueron modificadas para las circunstancias puntuales de esta investigación. Para observar el pretest y postest, en detalle, se puede consultar los Anexos 3 y 4 respectivamente.

3.5.1.1 Pretest

Descripción de las preguntas

El pretest cuenta de tres preguntas, en cada una de ellas se presenta el concepto matemático de ecuación cuadrática mediante una representación simbólica, algebraica, y se indica al estudiante que debe determinar la cantidad de soluciones y el tipo, conjunto numérico al que pertenecen. Las tres preguntas se diferencian en el uso o no de constantes, el orden en el que se presentan la ecuación cuadrática de la forma tradicional (con un elemento cuadrático, lineal y numeral) o no, o la presencia de un factor numérico junto al elemento cuadrático.

Descripción de la respuesta esperada por los estudiantes

Las respuestas esperadas dependen de sus aprendizajes previos y las estrategias de enseñanza y aprendizaje que realizan comúnmente en las clases de matemática, pues según se describió en el capítulo dedicado al marco teórico, los estudiantes tienden a replicar las estrategias y representaciones que desarrollan en las clases de matemática. Bajo una enseñanza tradicional, orientada al lenguaje algebraico y la búsqueda de respuestas mediante fórmulas, se espera que los estudiantes no cambien el registro de partida, algebraico, y tampoco que utilicen estrategias intuitivas por no considerarlas “legítimas” y fuera de lugar, con ellas nos referimos a esquemas, dibujos u otro elemento. Es decir, su única estrategia es asociar el problema planteado a una fórmula conocida, es decir recordar par luego aplicar. Deduciendo de esta manera el comportamiento de los estudiantes, ellos se sentirán atraídos de forma exclusiva por dar solución mediante la ecuación general de segundo grado o el uso de la fórmula del determinante de la ecuación de segundo grado.

Descripción de los posibles aciertos, obstáculos y errores

Los posibles aciertos y obstáculos se pueden deducir a partir del marco teórico del capítulo anterior. Todos los estudiantes tienen como conocimientos previos la resolución de una ecuación cuadrática con una variable, es decir, encontrar las raíces de la ecuación a través de métodos como: el uso de la fórmula de la ecuación cuadrática, factorización y el uso de determinantes. Además, conocen el concepto de función cuadrática bajo una representación algebraica y gráfica en plano cartesiano. Los principales aciertos de los estudiantes se pueden derivar de una posible experticia en el tratamiento del lenguaje simbólico, y por lo tanto, logren reconocer las constantes numéricas, simplificar y ordenar la ecuación de segundo grado según como se presenta en la enseñanza tradicional. Los principales obstáculos se derivan de la enseñanza tradicional también, pues se encontrarán con un problema en el que no se puede aplicar una fórmula de forma directa, no es un ejercicio tradicional, requiere de un análisis previo y de una imagen de qué es lo que se desea obtener, este último elemento, como se vio en el marco teórico, se relaciona con registros del tipo visual, que no se presenta en la enseñanza tradicional. Finalmente, sus principales errores son: mal utilizar las fórmulas que conocen al no saber qué datos se deben utilizar, no reconocer una estrategia válida para orientar su respuesta, pues, aunque saben lo que deben obtener no se les presenta el problema de una forma tradicional y por lo tanto no sentirán control en su desarrollo.

3.5.1.1 Postest

Descripción de las preguntas

Al igual que el pretest, consta de tres preguntas, en cada una de ellas se presenta el concepto matemático de ecuación cuadrática mediante una representación simbólica, algebraica, y se indica al estudiante que debe determinar la cantidad de soluciones y el tipo, conjunto numérico al que pertenecen. Las tres preguntas se diferencian en el uso o no de constantes, el orden en el que se presentan la ecuación cuadrática de la forma tradicional (con un elemento cuadrático, lineal y numeral) o no, o la presencia de un factor numérico junto al elemento cuadrático.

Descripción de la respuesta esperada por los estudiantes

En esta instancia los estudiantes han tenido la experiencia de la secuencia didáctica orientada al uso de diversos representaciones semióticas, y por lo tanto son posibles varios escenarios: que el estudiante transfiera algunos aprendizajes adquiridos de la secuencia didáctica para enfrentar los problemas del postest; o que por diversos motivos el estudiante no desarrolle nuevas estrategias para enfrentar el problema y lo haga con las mismas herramientas que posee antes de la secuencia de aprendizajes. De esta manera un grupo de respuestas posibles estarán enmarcadas en el uso de más de un registro de representación semiótica, logrando hacer, en diversos grados de exactitud, los tres procesos que se establecen en la Teoría de las Representaciones Semióticas: identificación, tratamiento y conversión. Además, en este grupo de respuestas esperadas, se identificarán algunos elementos que no pertenecen a la estrategia tradicional de la enseñanza del álgebra, en diversos niveles, estos serán: establecer elementos visuales o gráficos más cercanos a un lenguaje intuitivo de los estudiantes, que utilizarán como esquemas para orientar su respuesta o como análisis preliminar; el uso de fórmulas como una herramienta operativa secundaria y no como el objeto principal de la resolución de un problema. Por otra parte, también se esperan respuestas de estudiantes que conserven las estrategias tradicionales, esto es, el uso exclusivo de un lenguaje simbólico y la necesidad de remitir todo el procedimiento al uso de una fórmula. Con este último grupo estudiantes, las respuestas esperadas son semejantes al pretest.

Si nos ocupamos exclusivamente a las respuestas esperadas por este grupo de estudiantes, que transfiere lo aprendido en la secuencia didáctica al postest, entonces encontraremos el uso de ecuaciones de primer grado con una variable para determinar el largo de un segmento o el radio una circunferencia; representaciones de circunferencias con rectas perpendiculares, paralelas y secantes. Es decir, una relación funcional entre el uso de representaciones geométricas y algebraicas.

Descripción de los posibles aciertos, obstáculos y errores

Como los tres ejercicios presentados en el postest son similares a los del pretest, el grupo de estudiantes que no transfiera los aprendizajes de la secuencia didáctica, sino que únicamente los aprendizajes previos, tendrá un desempeño similar a lo analizado en esta sección, pero en el pretest. Ahora bien, aquel grupo de estudiantes que logre aplicar en parte o en su totalidad los aprendizajes adquiridos en la secuencia de aprendizaje, presentará otros posibles aciertos y obstáculos. Los aciertos se orientan a lo adquirido en la secuencia de aprendizaje, esto es, una estrategia que identifique una ecuación cuadrática con representaciones geométricas y algebraicas; que pueda hacer conversiones entre un registro algebraico a otro geométrico y viceversa; y que realice un tratamiento en ambos registros. Estas nuevas herramientas tienen como consecuencia, efectuado en diversos niveles de logros, un análisis previo y general de lo que plantea la pregunta, y como se indicó en el marco teórico, el estudiante tendrá una sensación de control sobre su proceso. A su vez, la identificación de un objeto matemático, la ecuación cuadrática, con dos tipos de representaciones potencia el uso de otros estilos para abordar el problema. A su vez, los obstáculos con los que se puede encontrar son: no tener la madurez en el uso de diversas representaciones para poder coordinar ambos registros, como se vio en el capítulo dedicado al marco teórico, este es uno de los procesos con mayor dificultad para los estudiantes; considerar las representaciones geométricas como una herramienta similar a una fórmula, por sus años de experiencia en la enseñanza tradicional, y no como un espacio para el análisis de las posibles soluciones. Finalmente, los errores pueden ser: no representar correctamente la ecuación cuadrática bajo una representación geométrica; hacer un mal tratamiento algebraico de la ecuación cuadrática; deducir de forma errónea la información que presenta la representación geométrica, por ejemplo cuando se tienen una o dos soluciones, con la consecuencia clara de obtener un mal desarrollo algebraico posterior.

3.5.2 Secuencia didáctica

La secuencia didáctica entrega nuevas herramientas a los estudiantes para determinar la cantidad y tipo de solución de una ecuación cuadrática con una variable. Como se indicó anteriormente, marco teórico, tienen una fuerte componente de uso de diversas representaciones semióticas y de la Historia de la Matemática orientada a una forma de resolución de problemas presentada por Descartes. La secuencia didáctica se estructura de acuerdo al grado de complejidad de las operaciones que debe realizar el estudiante, que según la Teoría de las Representaciones Semióticas son identificar, tratar y convertir, organizada de la siguiente manera: las primeras actividades exigen que el estudiante debe identificar una representación apropiada y realizar una conversión desde un registro algebraico a otro geométrico, sin hacer tratamiento en el registro algebraico; luego siguen actividades en que el estudiante debe hacer un tratamiento en el registro algebraico, identificar un registro apropiado, para posteriormente realizar una conversión al registro geométrico; finalmente están las actividades con mayor complejidad, como realizar una conversión desde un registro geométrico a otro algebraico. A continuación, se describe la secuencia didáctica, y para ello se analizan las actividades que están de forma independiente. Para cada una se realiza una descripción general, se analiza su diseño según las variables didácticas involucradas, según el marco teórico que se encuentra en su construcción y las respuestas esperadas, además de las sugerencias para el docente. Para observar la secuencia didáctica con mayor detalle es recomendable dirigirse al Anexo 1 y 2.

3.5.2.1 Secuencia didáctica: sesión 1

Descripción general

La secuencia didáctica se orienta a estudiantes del nivel de tercer año de enseñanza media, en el eje temático de álgebra y específicamente en el concepto de ecuación cuadrática con una variable. Los aprendizajes previos de los estudiantes con los que cuenta esta secuencia didáctica, en la sesión 1, son: reconocen los conjuntos numéricos de los números naturales, enteros, irracionales, reales; realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con monomios y binomios. Todos estos aprendizajes previos pertenecen a niveles anteriores[6]. Los aprendizajes esperados al finalizar esta primera sesión son: representar una ecuación cuadrática en un registro geométrico; convertir una ecuación cuadrática, con representación algebraica, en una geométrica; calcular el valor de una constante, en una ecuación cuadrática, para obtener determinada cantidad y tipo de solución; determinar la cantidad y tipo de solución de una ecuación cuadrática.

Actividad: Recordemos

Su diseño según las variables didácticas

En esta primera actividad podemos distinguir algunas variables didácticas: la forma de interacción tiene como eje principal al profesor que hace una introducción a la sesión; existe una integración de la actividad de introducción en conjunto con la activación de conocimientos previos como es la ecuación de segundo grado bajo una representación algebraica que los estudiantes conocen; los modos de representación son a través del lenguaje natural y el algebraico; el tipo de conocimiento es conceptual.

Esta actividad es importante porque se presenta a los estudiantes conceptos que se ponen en juego en las siguientes actividades, además, porque se utiliza una representación muy conocida por los estudiantes: representación algebraica.

Su diseño según el marco teórico

En esta actividad podemos observar que se da comienzo a la actividad con algo que a los estudiantes les es familiar: el uso de la representación algebraica para el objeto matemático. Acá únicamente se ha utilizado uno de los tres elementos fundamentales de la Teoría de las Representaciones Semióticas como es la identificación. Se evita los otros dos elementos: el tratamiento y conversión de la representación algebraica pues esta actividad es únicamente una introducción.

Su diseño según respuestas esperadas

Muchos estudiantes, la mayoría, deben comprender esta primera actividad que es únicamente para activar ciertos conocimientos previos pues, todos ellos ya han aprobado la asignatura de matemática de tercer año de enseñanza media en donde se presenta como contenido la ecuación cuadrática. Sin embargo, hay estudiantes que podrían no recordar o confundir con otros contenidos. Por esto es necesario que el profesor no sólo realice una exposición en esta

[6] Es importante indicar que todos los estudiantes que participaron ya habían aprobado la asignatura de matemática de tercer año de enseñanza media, y por lo tanto, tienen conocimientos de la ecuación de segundo grado y su resolución de forma algebraica a través de diversos métodos: factorización, fórmula general y completación de cuadrados. Esta información fue confirmada con el profesor de matemática previo a la sesión.

primera actividad, sino que explique de qué tratan los conceptos ahí involucrados. Una buena alternativa es a través de preguntas abiertas sobre los elementos que se presentan.

Actividad: Representación geométrica de la ecuación cuadrática

Su diseño según las variables didácticas

En esta actividad podemos distinguir las variables didácticas que están presentes: la forma de interacción es a través de un relato por parte del profesor en conjunto con preguntas guiadas a los estudiantes, formando un diálogo tanto del profesor con los estudiantes como entre los estudiantes; se integran dos actividades, una de contextualización al nuevo método presentado a los estudiantes, que es del tipo histórico, y otra de inducción a nuevas nociones; el modo de representación es múltiple, ellos son, el lenguaje natural, algebraico y geométrico, destacando por sobre todo esta relación entre lo simbólico y lo gráfico; el tipo de conocimiento es actitudinal y conceptual, en el primero, se relaciona explícitamente con la presentación y valoración de los aportes de un personaje histórico como Descartes que es traído a colación con una distancia de varios siglos, su variante conceptual queda establecido con el nuevo método presentado.

Su diseño según el marco teórico

En esta actividad se destaca el uso explícito de las representaciones semióticas. Primero se identifica el objeto ecuación cuadrática en dos registros distintos: geométrico y algebraico. Se utiliza, de forma implícita, dos representaciones para realizar tratamiento y avanzar, tanto de forma algebraica como geométrica. Además, existe una clara conversión desde lo algebraico a lo geométrico, por el momento no se desarrolla el proceso inverso desde lo geométrico a lo algebraico que se presenta en la segunda sesión. Es importante desde esta teoría como se establece una correspondencia entre los elementos propios del registro algebraico a uno geométrico, y entre ambas representaciones. Por otra parte, también se identifica el uso de la Historia de la Matemática, pero desde una perspectiva en particular: en esta actividad se observa de forma explícita como motivación para aplicar un nuevo método, pero ese no es el principal aporte, sino que de forma implícita se deja ver que existe una forma que es tan válida como algebraica que sustenta en el uso histórico por parte de un destacado pensador. Desde la perspectiva de la enseñanza tradicional del álgebra, nos encontramos con dos rupturas: primero, se presenta como un elemento válido una estrategia visual, muy cercana a la intuición de los estudiantes, y deja de lado el uso de fórmula; segundo, el uso de más de una representación semiótica que intenta acercarse a otras estilos de aprendizajes.

Su diseño según respuestas esperadas

Se espera, en términos conceptuales, que los estudiantes logren identificar dos representaciones para un mismo objeto matemático, y términos procedimentales, que identifiquen un procedimiento para realizar una conversión de un registro algebraico a otro geométrico. Se espera que los estudiantes asocien tres componentes: composición geométrica, cantidad de soluciones y conjuntos numéricos. Para este proceso es importante que el profesor junto a la exposición realice preguntas sobre los conceptos y proponga a los estudiantes deducir las diferentes configuraciones, de esta manera potencia la intuición de los estudiantes y valora otros estilos de aprendizaje que no están asociadas con el pensamiento simbólico.

Actividad: Trabaja en pareja o en grupo de tres

Su diseño según las variables didácticas

En esta actividad se presentan tres problemas, podemos distinguir dos momentos: en un comienzo cuando los estudiantes se enfrentan al problema, y un segundo, cuando el profesor refuerza los aprendizajes de los estudiantes.

En el primer momento, los tres problemas planteados poseen las siguientes variables didácticas: la forma de interacción es del tipo social, mediante trabajo en pareja o en grupos de tres; la forma de integrar es mediante una actividad de aplicación de lo aprendido en la actividad anterior; el modo de representar los objetos matemáticos son del tipo geométrico, algebraico y lenguaje natural; el tipo de conocimiento es del tipo procedimental, pues, en esta actividad, en los tres problemas, el objetivo que se busca es consolidar la aplicación de un nuevo método para determinar la cantidad de soluciones y su naturaleza. En un segundo momento, los tres problemas planteados poseen las siguientes variables didácticas: la forma de interacción tiene varias modalidades, los estudiantes asumen el rol de expositores cuando pasan a la pizarra a resolver los problemas, pero también el profesor asume el rol de experto que valida o legitima lo que hacen los estudiantes; la forma de integración es mediante el reforzamiento de los aprendizajes, el profesor corrige y responde dudas de cada uno de los tres problemas, uno por uno, después que los estudiantes pasen a la pizarra; el modo de representación es igual que el momento anterior, algebraico, geométrico y lenguaje natural; el tipo de conocimiento es del tipo procedimental y conceptual.

Su diseño según el marco teórico

Con cada uno de los tres problemas, se ponen en juego muchos conceptos presentes en el capítulo dedicado al marco teórico. La Teoría de las Representaciones Semióticas se establece en cada una de las preguntas que deben responder los estudiantes, constantemente se exige que identifiquen una ecuación cuadrática con una representación geométrica. Por la naturaleza de los problemas se hace necesario la conversión de un registro a otro, así como el tratamiento en cada uno. Desde la Historia de la Matemática, lo que se está desarrollando en esta actividad es que los estudiantes pongan a prueba una estrategia diferente a la tradicional, que supone mayor uso de elementos visuales y con una fuerte connotación hacia el análisis y obtener un esquema general de la situación. Finalmente, al revisar la enseñanza tradicional del álgebra, podemos observar que en esta actividad se producen varias rupturas: uso de diversas representaciones; dejar de utilizar una fórmula para abordar los problemas como primera instancia; privilegiar elementos intuitivos para analizar la situación problema.

Su diseño según respuestas esperadas

En cada una de las tres preguntas se espera que el estudiante: logre realizar una conversión entre una ecuación cuadrática bajo un representación algebraica a otra geométrica de acuerdo al procedimiento presentado en clases; logre identificar en la composición de la figura geométrica aquellos elementos que determinan la cantidad y tipo de soluciones, a veces de forma explícita y otras de forma implícita; que logren realizar una conversión desde un registro geométrico a otro algebraico, en una ecuación de primer grado, y realizar un tratamiento adecuado. Otras respuestas posibles son aquellas que no relacionan de forma óptima el nuevo método, en este caso se destacan aquellas que el estudiante no logra asociar los elementos de un registro en otro, por ejemplo los elementos de la ecuación cuadrática no se reconocen y esto gatilla en una mala conversión; otro respuesta que se puede esperar de forma errónea es que los estudiantes no logren asociar una constante numérica con un segmento dentro de la circunferencia, al considerar que la constante es indeterminada. En cada uno de los tres problemas es recomendable que el profesor realice las siguientes acciones: dejar que los estudiantes discutan los planteamientos planteados que ellos puedan enseñar unos a otros; dejar que utilicen otras estrategias no tradicionales, tal vez más intuitivas a partir de las representaciones geométricas; guiar en caso de ser necesario las respuestas a través de sugerencias o preguntas que logren guiar el proceso, evitando dar la respuesta; fomentar que sean los mismos estudiantes quienes se retroalimentan, esto es posible, invitándolos a la pizarra a dar la solución frente a sus pares, de forma individual, en pareja o en grupo, evitando con esto en caer en la enseñanza tradicional en que el profesor toma un rol en exceso protagónico.

3.5.2.1 Secuencia didáctica: sesión 2

Descripción general

Al igual que la sesión 1, la secuencia didáctica se orienta a estudiantes del nivel de tercer año de enseñanza media, en el eje temático de álgebra y específicamente en el concepto de ecuación cuadrática con una variable. Los aprendizajes previos de los estudiantes con los que cuenta esta secuencia didáctica, para esta sesión 2, son: representar una ecuación cuadrática en un registro geométrico; convertir una ecuación cuadrática, con representación algebraica, en una geométrica; determinar la cantidad y tipo de solución de una ecuación cuadrática con una variable, que se presenta en su forma convencional. Estos aprendizajes esperados se esperan después de que los estudiantes desarrollen la primera sesión. Los aprendizajes esperados al finalizar esta primera sesión son: tratar una ecuación cuadrática, en su representación algebraica, para su posterior conversión a un registro geométrico; calcular el valor de una constante en una ecuación cuadrática a través de una representación geométrica; convertir una ecuación cuadrática, con una representación geométrica, en una algebraica.

Actividad: Recordemos

Su diseño según las variables didácticas

Para esta primera actividad las variables didácticas son las siguientes: la forma de interacción, el profesor expone una introducción a la clase recordando ambas formas de representar una ecuación cuadrática, de forma algebraica y geométrica; esta actividad integra una actividad de introducción y otra de activación de conocimientos previos vistos la sesión anterior; el tipo de conocimiento es conceptual, esto queda de forma explícito al indicar el procedimiento para llevar de un registro algebraico a toro geométrico, así como recordar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación cuadrática.

Su diseño según el marco teórico

En lo referente a la Teoría de las Representaciones Semióticas, esta actividad recuerda lo visto en la sesión anterior en el proceso de cómo realizar una conversión desde un registro algebraico a otro geométrico. También, podemos identificar congruencias entre ambos registros, cuándo se indica aquellos elementos que se encuentran presentes en ambos registros y que permiten realizar la conversión. Desde el punto de vista de la Historia de la Matemática se hace presente de forma implícita para el estudiante, aunque no así para el profesor, el uso de un método con connotaciones históricas para determinar la cantidad y tipo de soluciones de una ecuación de segundo grado.

Su diseño según respuestas esperadas

En esta actividad, el profesor, como se indicó en las variables didácticas, no únicamente debe exponer, sino que involucrar a través de preguntas sobre el proceso que se realiza para llevar de un registro algebraico a otro geométrico. Desde esta perspectiva se espera que el estudiante recuerde la clase anterior, aquellos elementos que permiten realizar la conversión entre registros. Se espera que el estudiante asocie composición de la forma geométrica, sus componentes, y su dependencia con los elementos presentes en la ecuación cuadrática: número que acompaña al factor cuadrático, lineal e independiente.

Actividad: Número y tipo de soluciones a través de una ecuación cuadrática

Su diseño según las variables didácticas

Esta actividad busca hacer una revisión rápida de las diversas composiciones geométricas y asociarlas con una determinada cantidad de soluciones y al conjunto numérico al que pertenecen. Las variables didácticas para esta actividad son: el profesor expone las diversas representaciones y su explicación correspondiente; la forma de integración se da en un contexto de activación de conocimientos previos; las formas de representación son principalmente del tipo geométrico y el lenguaje natural, con algunos elementos del lenguaje simbólico; el tipo de conocimiento es del tipo conceptual.

Su diseño según el marco teórico

Si podemos cruzar el diseño de esta actividad con el marco teórico podemos reconocer la Teoría de las Representaciones Semióticas, pero únicamente en uno de los tres procesos: el de identificar el objeto matemático con una representación. Desde otro punto, al revisar la enseñanza tradicional del álgebra, se identifica un uso casi exclusivo de una representación visual en el contexto de la enseñanza del álgebra, donde predomina lo simbólico y la fórmula para dar solución a los ejercicios.

Su diseño según respuestas esperadas

En esta actividad predomina la exposición del profesor, ya que únicamente se espera recordar a los estudiantes lo visto la sesión anterior en cuanto a las distintas configuraciones y sus respectivos significados. Sin embargo, se espera que los estudiantes logren asociar intuitivamente las diferentes opciones, en caso de dudas, es posible que estas se orienten a la relación entre los diferentes segmentos con el radio de la circunferencia y su respectiva interpretación con la cantidad y tipo de soluciones. El profesor puede facilitar la comprensión al hacer hincapié en la cantidad de intersecciones entre los diferentes segmentos con la circunferencia, así como las relaciones de mayor, menor o igual entre la magnitud de los segmentos. El profesor tiene varias alternativas ante los diferentes estilos de aprendizajes.

Actividad: Ejemplo

Su diseño según las variables didácticas

En esta actividad se propone como ejemplo determinar la cantidad de soluciones y su naturaleza en una ecuación cuadrática, en donde el término independiente es una constante desconocida. Este ejercicio es muy similar a los de la primera sesión. Las variables didácticas asociadas son: la forma de interacción es el profesor guiando una discusión entre estudiantes para que comenten cómo resolver el problema planteado, si la situación lo permite puede invitar a uno o dos estudiantes a resolver el problema frente a sus compañeros; es una actividad que integra conocimientos previos; el modo de representación es a través del lenguaje natural, geométrico y algebraico; el tipo de conocimiento es procedimental, porque los estudiantes deben aplicar lo visto en la sesión anterior y que se revisó nuevamente.

Su diseño según el marco teórico

El ejemplo desarrollado por los estudiantes con la guía del profesor es semejante a los vistos en la sesión anterior, y por lo tanto, guarda la misma relación con el marco teórico. Por lo tanto, se comentará de forma resumida. En general, se promueve el uso de diversas representaciones y el uso de un método con connotaciones históricas, que permite resolver de una manera más intuitiva los ejercicios, y no como la tradicional que promueve fuertemente el uso exclusivo de fórmulas.

Su diseño según respuestas esperadas

Las dos actividades anteriores guardan una lógica interna para llegar a este ejemplo y que los estudiantes puedan ofrecer respuestas satisfactorias. Se esperan respuestas, por ejemplo, que no pueden determinar uno de los segmentos en la configuración geométrica porque existe una constante en la ecuación cuadrática. En este caso se debe poner énfasis en las condiciones que restringen el problema. Otra respuesta esperada es que los estudiantes no logren establecer la comparación entre segmentos y el tipo y cantidad de solución de forma matemática, acá entran en juego los signos de mayor, menor o igual que facilitan la comprensión. En general, sin embargo, se espera que los estudiantes puedan dar solución al problema sin mayores complicaciones, el profesor puede guiar con preguntas y recordando las diferentes configuraciones geométricas vistas anteriormente.

Actividad: Trabaja en pareja o en grupo de tres

Su diseño según las variables didácticas

En esta actividad se presentan cinco problemas, podemos distinguir dos momentos: en un comienzo cuando los estudiantes se enfrentan al problema, y un segundo, cuando el profesor refuerza los aprendizajes de los estudiantes.

En el primer momento, los tres problemas planteados poseen las siguientes variables didácticas: la forma de interacción es del tipo social, mediante trabajo en pareja o en grupos de tres; la forma de integrar es mediante una actividad de aplicación de lo aprendido en la actividad anterior; el modo de representar los objetos matemáticos son del tipo geométrico, algebraico y lenguaje natural; el tipo de conocimiento es procedimental, pues, en esta actividad, en los cinco problemas, el objetivo que se busca es consolidar la aplicación de un nuevo método para determinar la cantidad de soluciones y su naturaleza. Es importante indicar que los cinco

problemas se pueden clasificar en tres grupos: los primeros dos problemas requiere calcular una constante para poder determinar la cantidad y el tipo de solución de la ecuación cuadrática; el tercer y cuarto problema requiere de modificar la ecuación cuadrática inicial, esto es, realizar un tratamiento para poder ocupar la nueva estrategia y hacer conversión a un registro geométrico; finalmente el quinto problema presenta una lógica inversa, hacer una conversión de un registro geométrico a otro algebraico, y el objetivo no es descubrir la cantidad y naturaleza de las soluciones, sino que esta información se entrega implícitamente y lo que se desea es encontrar una ecuación cuadrática que pueda albergar aquellas soluciones.
En un segundo momento, los cinco problemas planteados poseen las siguientes variables didácticas: la forma de interacción tiene varias modalidades, los estudiantes asumen el rol de expositores cuando pasan a la pizarra a resolver los problemas, pero también el profesor asume el rol de experto que valida o legitima lo que hacen los estudiantes; la forma de integración es mediante el reforzamiento de los aprendizajes, el profesor corrige y responde dudas de cada uno de los cinco problemas, uno por uno, después que los estudiantes pasen a la pizarra; el modo de representación es igual que el momento anterior, algebraico, geométrico y lenguaje natural; el tipo de conocimiento es del tipo procedimental y conceptual.

Su diseño según el marco teórico

Con cada uno de los cinco problemas, se ponen en juego muchos conceptos presentes en el capítulo dedicado al marco teórico. La Teoría de las Representaciones Semióticas se establece en cada una de las preguntas que deben responder los estudiantes, pues constantemente se exige que identifiquen una ecuación cuadrática con una representación geométrica. Por la naturaleza de los problemas se hace necesario la conversión de un registro a otro, así como el tratamiento en cada uno. De esta manera tenemos: identificación, tratamiento y conversión, los tres procesos más importantes de la actividad matemática para Duval. En esta misma línea en el quinto problema se presenta algo particular, ya que se realiza un proceso inverso, conversión desde un registro geométrico a otro algebraico, de esta manera el estudiante debe identificar elementos que se encuentran en ambos registros y sean convertibles teniendo presente su significado. Desde la Historia de la Matemática, lo que se está desarrollando en esta actividad es que los estudiantes pongan a prueba una estrategia diferente a la tradicional, que supone mayor uso de elementos visuales y con una fuerte connotación hacia el análisis y obtener un esquema general de la situación. Desde este aspecto podemos indicar que se usa el método propuesto por Descartes en una gama de ejercicio que él no planteó, como lo son: ejercicios para encontrar constantes y deducir una ecuación cuadrática a partir de una configuración geométrica que permite visualizar la cantidad y tipo de soluciones. Finalmente, al revisar la enseñanza tradicional del álgebra, podemos observar que en esta actividad se producen varias rupturas: uso de diversas representaciones; dejar de utilizar una fórmula para abordar los problemas como primera instancia; privilegiar elementos intuitivos para analizar la situación problema.

Su diseño según respuestas esperadas

En cada una de las cinco preguntas se espera que el estudiante: logre realizar una conversión entre una ecuación cuadrática bajo un representación algebraica a otra geométrica de acuerdo al procedimiento presentado en clases; logre identificar en la configuración de la figura geométrica aquellos elementos que determinan la cantidad y tipo de soluciones, a veces de forma explícita y otras de forma implícita; que logren realizar una conversión desde un registro geométrico a otro algebraico, en una ecuación de primer grado, y realizar un tratamiento adecuado; que logre descubrir el valor de una constante numérica; que logre hacer un tratamiento algebraico para posteriormente hacer una conversión; reconocer no únicamente la cantidad y tipo de soluciones que tienen una ecuación de segundo grado en una configuración geométrica sino que poder plantear la ecuación cuadrática que responda a aquellas condiciones. También son posibles respuestas que no se relacionan de forma óptima con el nuevo método, en este caso se destacan aquellas que el estudiante no logra asociar los elementos de un registro en otro, por ejemplo los elementos de la ecuación cuadrática no se reconocen y esto gatilla una mala conversión; otro respuesta que se puede esperar de forma errónea es que los estudiantes no logren asociar una constante numérica con un segmento dentro de la circunferencia, al considerar que la constante es indeterminada; también es posible que no identifique los elementos para realizar una conversión entre registros debido a que la ecuación cuadrática debe recibir un tratamiento; que no logre asociar cómo se relacionan los segmento dentro de la configuración geométrica con las constantes numéricas que están presentes en la ecuación cuadrática, cuando se plantea hacer una conversión desde un registro geométrica a otro algebraico.

En cada uno de los cinco problemas es recomendable que el profesor realice las siguientes acciones: que los estudiantes discutan los planteamientos planteados que ellos puedan enseñar unos a otros; dejar que utilicen otras estrategias no tradicionales, tal vez más intuitivas a partir de las representaciones geométricas; guiar en caso de ser necesario las respuestas a través de sugerencias o preguntas que logren guiar el proceso, evitando dar la respuesta; fomentar que sean los mismos estudiantes quienes se retroalimentan, esto es posible, invitándolos a la pizarra a dar la solución frente a sus pares, de forma individual, en pareja o en grupo, evitando con esto en caer en la enseñanza tradicional en que el profesor toma un rol en exceso protagónico.

3.6 Cambios esperados

En el análisis de la secuencia didáctica se indicaron el aprendizaje previo que necesitan los estudiantes para ambas sesiones, así como lo que se espera que aprendan de manera independiente en cada una de ellas. A continuación, se indican los cambios que se esperan observar en el postest con respecto al pretest.

Cambio esperado 1: El estudiante aplica una estrategia correcta para determinar la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación cuadrática.

Cambio esperado 2: El estudiante determina la cantidad y tipo de soluciones en una ecuación cuadrática mediante una estrategia correcta.

Los cambios esperados cuarto y quinto, a continuación, indican que el estudiante aplica una metodología asociada al uso de representaciones semióticas para encontrar la cantidad de soluciones y su naturaleza en una ecuación cuadrática.

Cambio esperado 3: El estudiante utiliza registros de representación no tradicionales, algebraica, para determinar la cantidad y tipo de solución en una ecuación cuadrática.

Cambio esperado 4: El estudiante utiliza una estrategia no tradicional, fórmulas algebraicas, para determinar la cantidad y tipo de solución en una ecuación cuadrática.

3.7 Puesta a prueba

A continuación, se describe las sesiones en aula durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Primero se describe aquellos elementos genéricos que comparten ambas sesiones: el horario y tiempo para las sesiones, los recursos didácticos, características espaciales y funcionales de la sala de clases.

Para ambas sesiones el horario coincidió en la jornada de mañana, alrededor de 10:00 a 11:00 horas, luego de un recreo de 20 minutos. Este horario es ventajoso por dos motivos: primero porque en el primer bloque, de 8:00 a 9:30, los estudiantes no son puntuales y cerca de las 8:30 se puede considerar que la mayoría de los estudiantes se encuentran presentes; segundo porque es un horario productivo no es tan temprano para encontrar a los estudiantes con sueño o tarde para que estén cansados. Cada sesión constó de 90 minutos sin interrupción. La sala de clases tiene una disposición tradicional, el profesor junto a la pizarra en una mesa separada de los estudiantes, cuatro filas de estudiantes que miran frente a la pizarra en mesas para dos personas. La pizarra es blanca para usar con plumones. Esta pizarra se utilizó durante las sesiones para responder dudas de los estudiantes o para que ellos desarrollen las respuestas frente a sus compañeros. La sala cuenta con una buena ventilación e iluminación natural. Los recursos materiales que se utilizaron para desarrollar las sesiones fueron: plumones de pizarra, compás y regla a libre disposición para los estudiantes, una presentación multimedia y una guía de trabajo para estudiante.

Ahora se describen las sesiones 1 y 2. En donde se describen los siguientes puntos: conducta del profesor de matemática en la sala de clases, conducta de los estudiantes frente a la secuencia didáctica, utilización de los recursos disponibles, obstáculos y oportunidades que se presentaron en cada sesión.

En la primera sesión el profesor de matemática de enseñanza media estuvo presente durante toda la sesión y tomó un rol secundario dentro de la sala de clases, no interrumpió en ningún momento la secuencia didáctica salvo en una ocasión en que permitió a un estudiante abandonar la sala para dirigirse a la dirección del establecimiento. Él fue quien presentó en la primera sesión la actividad a los estudiantes. Los estudiantes durante la primera sesión se pueden reconocer tres conductas diferentes: al comienzo algunos cuestionaron “ver otra vez” el contenido de ecuación cuadrática e incluso criticaron ver otra estrategia de resolver problema porque indicaron que la geometría les resultaba más difícil que el álgebra; otra actitud de algunos estudiantes fue no participar en la secuencia didáctica porque estaban estudiando para algunos exámenes que tenían pendiente con otras asignaturas; es interesante reconocer que se presentaron casos de estudiantes que intuitivamente acertaron rápidamente las diferentes formas de representar geométricamente la cantidad y tipo de solución de una ecuación cuadrática causando gran asombro a ellos mismos, a sus compañeros y profesor. Los recursos disponibles no fueron utilizados del todo por los estudiantes, la regla y el compás fueron ocupados por una minoría de los estudiantes, la gran mayoría decidió dibujar y trazar las figuras geométricas sólo con la ayuda de las líneas de la hoja de trabajo. Los obstáculos que se presentaron en la primera sesión obedecen a una poca participación de los estudiantes o asumir un rol pasivo frente al aprendizaje, esto se evidencia que muy pocos se atrevían a realizar preguntas o salir a la pizarra para desarrollar un ejercicio, sin embargo, también se presentaron oportunidades, por ejemplo, se ganó el interés y motivación de los estudiantes al hacer una actividad distinta a lo que ellos estaban acostumbrados.

En la segunda sesión el profesor de matemática de enseñanza media estuvo presente en toda la sesión, no realizó ninguna intervención durante la secuencia didáctica. Sus intervenciones se dirigieron a mantener el silencio y orden durante la sesión, así como permitir a algún estudiante a salir de la sala. La actitud de los estudiantes se pueden enfocar en tres tipos: algunos se mantuvieron motivados durante toda la sesión, participando activa o pasivamente en el desarrollo de la guía de trabajo, esto se observa porque muchos de ellos avanzaron hasta los últimos ejercicios, y consultaban de forma permanente; otro grupo de estudiante, al igual que en la primera sesión, no participó de la secuencia didáctica por diversos motivos, entre ellos, porque necesitaban concentrarse en exámenes pendientes o en el desarrollo de algún proyecto escolar; otra actitud que se percibió en los estudiantes fue considerar esta estrategia como más "fácil" de aplicar que la tradicional. Al igual que en la primera sesión, los recursos disponibles no fueron utilizados del todo por los estudiantes, la regla y el compás fueron ocupados por una minoría de los estudiantes, la gran mayoría decidió dibujar y trazar las figuras geométricas sólo con la ayuda de las líneas de la hoja de trabajo. Los obstáculos que se presentaron en la segunda sesión coinciden con la anterior, se presenta una baja participación activa de los estudiantes, aunque muchos de ellos terminaron los ejercicios no pasaban a la pizarra o no responden las preguntas para que sus compañeros puedan escuchar; otro obstáculo fue que algunos lograron dominar la estrategia presentada y lograron terminar todos los ejercicios, sin embargo, otros necesitaron de más tiempo. Las oportunidades se relacionan con una estrategia más intuitiva y fácil de comprender, y de poner en juego, los estudiantes que participaron lograron acercarse a la dinámica del análisis a través de una visualización.

3.8 Diseño de análisis de datos

Para realizar el proceso de análisis de datos se utilizaron los softwares Microsoft Excel y Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

Los datos de los estudiantes, en los instrumentos pretest, postest y el grado de avance en la secuencia didáctica, son tabulados de forma anónima. Además, se adhieren los promedios finales de matemática para cada estudiante. Los datos son organizados de manera que permita una comparación entre el pretest y postest, para un mismo estudiante, antes y después de la secuencia didáctica, así como el porcentaje de desarrollo en las guías de trabajo para las sesiones 1 y 2. El proceso para realizar el análisis estadístico se describe a continuación.

Primero, se describe la muestra de los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica. Esta descripción consiste en determinar la frecuencia de estudiantes, clasificarlos en hombres y mujeres, tabular los promedios respectivos de cada estudiante y determinar el promedio de matemática al finalizar el año académico. Segundo, se realiza un análisis de fiabilidad en el pretest y postest mediante el Alfa de Cronbach, con el objetivo de poder determinar si los ítems son confiables o no. Tercero, se clasifican a los estudiantes de acuerdo al tipo de representación y estrategia utilizada en el pretest y postest, en las siguientes categorías:

a. Tipo de representación:

i. Algebraica: estudiantes que únicamente utilizan una representación algebraica.
ii. Algebraica – Geométrica/algebraica: estudiantes que utilizan simultáneamente un proceso únicamente algebraico en conjunto con otro que combina una representación geométrica y algebraica.
iii. Geométrica/algebraica: estudiantes que combinan una representación geométrica y algebraica.
iv. Nada: estudiantes que no identifican ningún tipo de representación.

b. Tipo de estrategia:
   i. Ecuación lineal: estudiantes que utilizan una ecuación lineal para resolver los problemas.
   ii. Fórmula general: estudiantes que utilizan la fórmula general para resolver los problemas.
   iii. Descartes: estudiantes que utilizan la estrategia planteada por Descartes para resolver los problemas.
   iv. Ecuación lineal – Descartes: estudiantes que combinan el uso de la ecuación lineal con la estrategia planteada por Descartes.
   v. Fórmula general – Descartes: estudiantes que combinan el uso de la fórmula general con la estrategia planteada por Descartes.
   vi. Nada: estudiantes que no desarrollan estrategias de resolución.

Cuarto, se realiza una comparación, en el pretest y postest de forma independiente, de las diferentes estrategias y representaciones utilizadas por los estudiantes. Luego se realiza una comparación entre ambos momentos, pretest y postest, en las respectivas estrategias y representaciones utilizadas. Ambas comparaciones se describen mediante el uso de tablas de frecuencias y porcentajes. Quinto, se describen y comparan las respuestas correctas en el pretest y postest, mediante el uso de tablas de frecuencias y la media aritmética. Finalmente, se describe y comparan el promedio del porcentaje de desarrollo alcanzado por los estudiantes en la secuencia didáctica, tanto en la guía 1 y 2.

El análisis de datos se orienta a determinar cuantitativamente si los cambios esperados con la secuencia didáctica se lograron o no con los estudiantes, resumiendo la información para una mejor lectura de los mismos.

Capítulo IV Resultados

Se presentan los resultados más importantes al realizar el análisis de datos.

4.1 Descripción de la población donde se desarrolló la propuesta de secuencia didáctica

4.1.1 Sexo

En la siguiente tabla de frecuencia se describe los estudiantes de acuerdo al sexo.

	Frecuencia	*Porcentaje*
Femenino	22	45.8
Masculino	26	54.2
Total	48	100

Tabla N°1: Frecuencia y porcentaje de hombres y mujeres que participaron en la secuencia didáctica.

En la Tabla N°1 podemos observar que el total de estudiantes que participaron es de 48, entre ellos, 22 mujeres que representan el 45.8% y 26 hombres que representan el 54.2%.

4.1.2 Promedio de matemática de los estudiantes al finalizar el año académico

Se muestra la Tabla N°2 que resume las principales medidas de tendencia central, de posición y dispersión respecto al promedio de matemática que tienen los estudiantes al finalizar el año académico:

Media	*5.342*
Desviación estándar	0.7178
Percentil 25	4.825
Percentil 50	5.2
Percentil 75	5.875

Tabla N°2: Principales medidas de tendencia central, posición y dispersión del promedio final en matemática de los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

De la Tabla N°2 podemos rescatar que el 50% de los promedios en matemáticas, percentil 25 y 75, se concentra en las notas 4.8 y 5.8.

Nota	*Frecuencia*	*Porcentaje*
4.0	1	2.1
4.2	1	2.1
4.3	2	4.2
4.4	1	2.1
4.5	2	4.2
4.6	1	2.1
4.7	1	2.1
4.8	3	6.3
4.9	3	6.3
5.0	6	12.5
5.1	2	4.2
5.2	2	4.2
5.4	1	2.1
5.5	6	12.5
5.6	2	4.2
5.8	2	4.2
5.9	2	4.2
6.1	2	4.2
6.4	5	10.4
6.6	1	2.1
6.7	2	4.2
Total	48	100

Tabla N°3: Frecuencia y porcentaje del promedio de matemática de los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

De la Tabla N°3 es posible determinar que únicamente 10 estudiantes tienen un promedio sobre 6.0. Los otros 38 estudiantes tienen un rango de notas menor a 2 puntos, pues se mueven entre una nota 4.0 y 6.0.

4.2. Análisis de fiabilidad en el pretest y postest

En la Tabla 14 se presenta la estadística de fiabilidad mediante el Alfa de Cronbach para los tres ítems del pretest:

Alfa de Cronbach	*N° de elementos*
0.796	3

Tabla Nº4: Análisis de fiabilidad en el pretest.

En la Tabla 5 se presenta la estadística de fiabilidad mediante el Alfa de Cronbach para los tres ítems del postest:

Alfa de Cronbach	*N° de elementos*
0.789	3

Tabla Nº5: Análisis de fiabilidad en el postest.

Utilizamos el criterio de George y Mallery para analizar el Alfa de Cronbach, en donde: si es mayor a 0.9 es excelente, entre 0.8 a 0.9 es bueno, entre 0.7 a 0.79 es aceptable, entre 0.6 a 0.69 es cuestionable, entre 0.5 a 0.59 es pobre y menor a 0.5 es inaceptable. El resultado de 0.796 y 0.789, para el pretest y postest respectivamente está en el rango aceptable. Podemos indicar que el instrumento mide aquello que pretende calcular, por lo tanto, los datos son confiables.

4.3 Descripción del pretest, postest, guías 1 y 2

4.3.1 Representaciones utilizadas por los estudiantes en el pretest

Se presenta la información que describe el tipo de registro de representación que utilizaron los estudiantes en el pretest.

	Frecuencia	*Porcentaje*
Algebraica	33	68.8
Nada	15	31.3
Total	48	100

Tabla N°6: Frecuencia y porcentaje de los tipos de registro de representación que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

En la Tabla N°6 podemos observar que el 68.8% de los estudiantes se inclinan por una representación algebraica y el grupo restante, el 31.3%, no utiliza representación o no se identifica alguna. Sorprende encontrar en estos estos datos que el único registro de representación que utilizan los estudiantes es el algebraico. Esto puede ser comprendido como el efecto del rol de homogeneización que tiene la escuela sobre los diferentes estilos de aprendizajes de los estudiantes. Para un correcto aprendizaje del álgebra y en particular de las ecuaciones de segundo es imprescindible que los estudiantes utilicen diferentes registros de representación y no se queden “anclados” en un único registro como se observa en los resultados obtenidos en el tipo de representación utilizados por los estudiantes.

Se adjunta el Gráfico N°1 para visualizar el comportamiento de los estudiantes en el uso del tipo de representación:

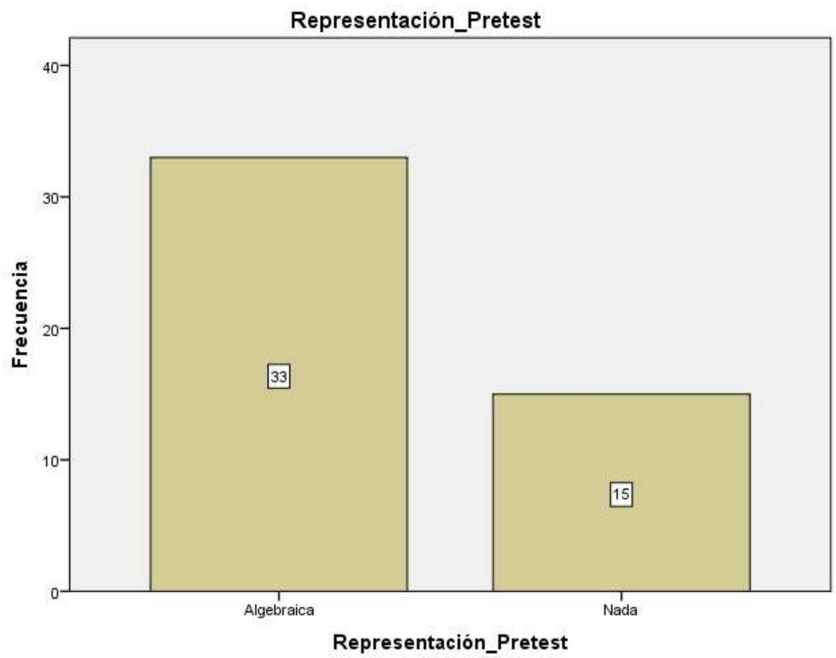


Gráfico N°3: Frecuencia de los tipos de registro de representación que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

4.3.2 Estrategias utilizadas por los estudiantes en el pretest

La Tabla N°5 muestra información sobre los tipos de estrategias utilizadas por los estudiantes en el pretest.

	Frecuencia	*Porcentaje*
Ecuación Lineal	2	4.2
Fórmula General	19	39.6
Nada	27	56.36
Total	48	100

Tabla N°7: Frecuencia y porcentaje de los tipos de estrategias en el pretest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

Se observa que, de las tres estrategias utilizadas por los estudiantes, una de ellas, la ecuación lineal, no es apropiada para resolver el problema, y aunque son únicamente dos estudiantes, no deja de sorprender que al plantearse un tipo de problema que no es el “clásico”, encuentre el valor de la incógnita “x”, aparecen respuestas incoherentes como esta. En la misma línea que la respuesta anterior se encuentran aquellos estudiantes que no se les puede clasificar una estrategia coherente, únicamente escribieron la ecuación inicial e hicieron un tratamiento que no se les puede reconocer como una estrategia reconocible o simplemente no responden, al parecer no poseen las herramientas mínimas para abordar un problema del tipo determinar cantidad y tipos de solución. Finalmente, el número de estudiantes que utiliza una estrategia correcta, utilizando la fórmula general, representa un 39.6%. Además, es importante indicar que no se encuentran representaciones más “intuitivas” como dibujos o esquemas para responder la pregunta.

Se adjunta el Gráfico N°2 para visualizar las diferentes estrategias.

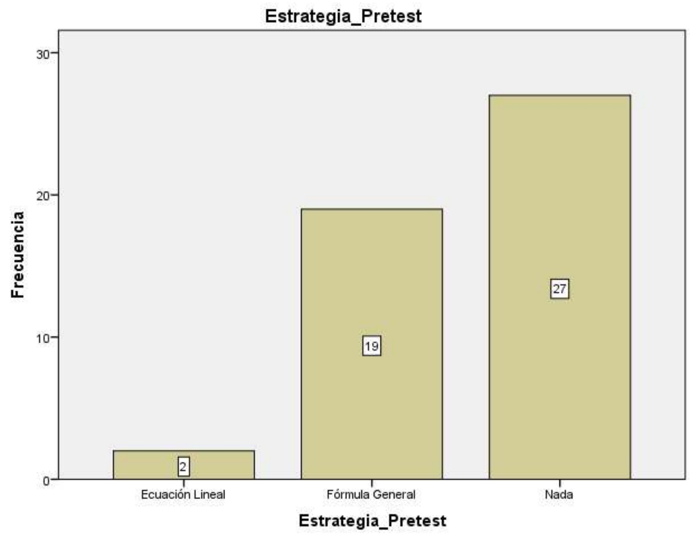


Gráfico N°4: Frecuencia de los tipos de estrategias que utilizaron en el pretest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

Los estudiantes tienen asociado, como de forma automática, el concepto de ecuación de segundo grado con la fórmula general más allá del contexto de la pregunta y de qué proceso se debe realizar. La fórmula general es un “as bajo la manga” en las preguntas relacionadas con la ecuación cuadrática, de acuerdo al tipo de ejercicio tradicional que se realizan en la sala de clases, y por lo tanto consideran que de “alguna manera” todo puede ser reducido a ello. Una estrategia que llama la atención por su ausencia es el uso del discriminante. ¿Por qué los estudiantes no aplicaron esta fórmula para poder analizar la situación que le era propicia? Una posible respuesta, más allá de que no recordaran el concepto o representación simbólica (en contra de este argumento podemos indicar que tampoco hubo intentos erróneos o consultas durante el pretest) es que los estudiantes no ven el uso de las fórmulas como una herramienta para analizar, sino que únicamente para aplicar y obtener un resultado inmediato. Esta puede ser una razón de que no exista una estrategia más intuitiva por parte de los estudiantes, como esquemas o dibujos, para observar la situación desde otra perspectiva.

4.3.3 Porcentaje de desarrollo de guías 1 y 2

Si comparamos los datos obtenidos en el desarrollo de la guía 1 y 2, en la primera y segunda sesión respectivamente, se debe indicar que bajó la participación, pues, el promedio de desarrollo de la guía se redujo de un 66% a un 54%. También lo demuestra que un 50% de los estudiantes desarrolló menos de un 60% de la guía 2, considerablemente menor al 71.42% de la primera sesión. Sin embargo, es interesante notar que la moda se mantiene con los estudiantes que realizaron el 100% de la guía, y al igual que en la sesión 1, el número es de 14.

La menor participación en la guía 2 puede resultar de aquellos estudiantes que no lograron un nivel satisfactorio en la guía 1, y que en la segunda sesión no lograron acceder a los nuevos contenidos.

4.3.5 Representaciones utilizadas por los estudiantes en el postest

El tipo de representación que utilizaron los estudiantes en el postest se describe en la Tabla N°8.

	Frecuencia	*Porcentaje*
Algebraica	3	6.3
Algebraica – Geométrica/Algebraica	2	4.2
Geométrica/Algebraica	34	70.8
Nada	9	18.8
Total	48	100

Tabla N°8: Frecuencia y porcentaje de los tipos de registro de representación que utilizaron en el postest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

El análisis del tipo de representación utilizada por los estudiantes en el postest, es más significativo si la comparamos con el tipo de representación utilizada en el pretest. Por lo tanto, comparamos la información de las Tablas N°6 y N°8. En el pretest los estudiantes que utilizan un registro de representación es el 68.8%, mientras que en el postest se incrementa a un 81.3%. Además, del incremento de estudiantes que utilizan un registro de representación, también existe una mayor diversidad de los tipos de registros de representación utilizados en el postest. En el pretest los estudiantes que utilizan un registro de representación, coinciden en que es únicamente el registro algebraico con un 68.8%. Mientras tanto en el postest la representación, únicamente en el registro algebraico, es un 6.3%. El cambio se produce en los estudiantes que utilizan dos registros de representación para desarrollar las preguntas, ellos son el 75%. Una gran cantidad de estudiantes han utilizado dos representaciones para abordar el problema, es decir, además de identificar un registro de representación también han intentado realizar una conversión entre diversos registros.

Se adjunta el Gráfico N°3 para visualizar las representaciones utilizadas por los estudiantes en el postest.

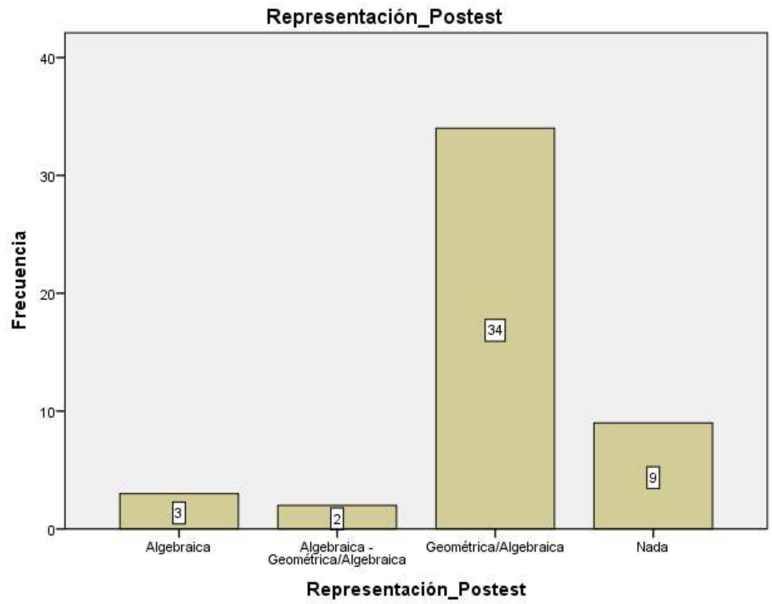


Gráfico N°5: Frecuencia de los tipos de registro de representación que utilizaron en el postest los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

4.3.6 Estrategias utilizadas por los estudiantes en el postest

Se presenta la Tabla N°9 que describe el tipo de estrategia utilizada por los estudiantes en el postest.

	Frecuencia	*Porcentaje*
Descartes	30	62.5
Ecuación Lineal – Descartes	1	2.1
Fórmula General	2	4.2
Fórmula General – Descartes	1	2.1
Nada	14	29.2
Total	48	100

Tabla N°9: Frecuencia y porcentaje de los tipos de estrategias en el postest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

Es importante comparar los resultados de las estrategias utilizadas por los estudiantes en el pretest con el postest, es decir, la información de las Tablas N°7 y N°9. En el pretest únicamente un 39.6% utiliza una estrategia válida para abordar las preguntas, esta es la fórmula general de la ecuación de segundo grado. Mientras que, en el postest, observamos en la Tabla N°9 que un 70.8% aplica una estrategia válida, y además, utilizan más de una estrategia. El

62.5% de los estudiantes en el postest ocuparon como única estrategia la que se enseñó en la secuencia didáctica. Las razones de que la mayoría de los estudiantes se atrevieron a utilizar una nueva estrategia para dar respuesta a las preguntas, sin considerar si estas son correctas o no, a partir de nuestro marco teórico, es que los estudiantes observaron la ecuación cuadrática, pero desde otra perspectiva, una que puede ser más intuitiva para realizar el análisis y que utiliza elementos anteriores conocidos, elementales, como rectas, segmentos y circunferencias. Pero también la explicación puede resultar que la estrategia enseñada en las dos sesiones sea más cercana al estilo de aprendizaje de los estudiantes, que sea más intuitiva que la fórmula general de la ecuación de segundo grado. Se presenta el Gráfico N°4 para visualizar la información anterior.

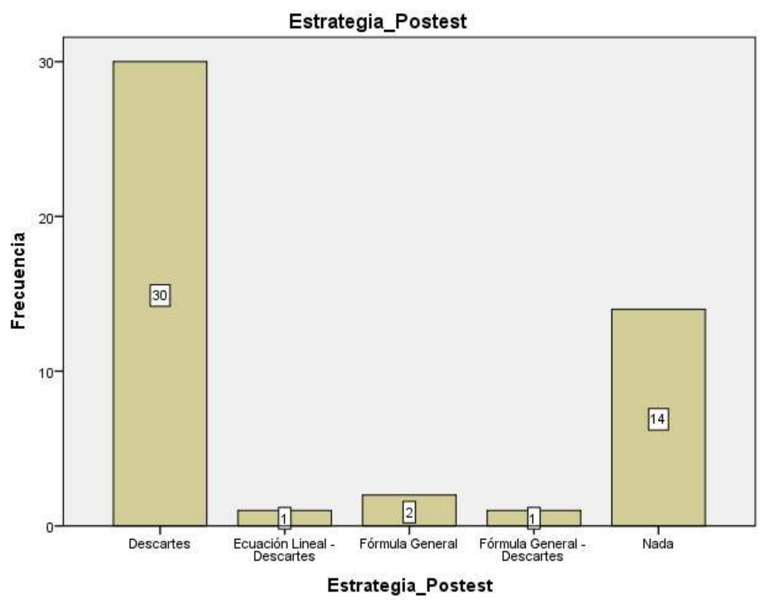


Gráfico N°6: Frecuencia de los tipos de estrategias en el postest que utilizaron los estudiantes que participaron en la secuencia didáctica.

También es posible explicar el fenómeno de ocupar la nueva estrategia enseñada en la secuencia didáctica desde la Historia de la Matemática. Descartes, en su ensayo “Geometría”, utiliza la herramienta enseñada como una manera de poder identificar cuántas soluciones y de qué tipo son, de forma visual, como una forma de “mostrar” este fenómeno. Esto parece respaldar aquella teoría de que ciertas dificultades que se presentan en la enseñanza pueden guardar relación con un suceso en la Historia de la Matemática, y por lo tanto, acudir a esta para superar los obstáculos.

Se debe destacar que un grupo de estudiantes, 29.2%, no ocupa estrategia para resolver los problemas planteados y, por lo tanto, no desarrolla lógicamente su respuesta, únicamente copia el enunciado o deja la pregunta en blanco. Sin embargo, si comparamos el fenómeno de este tipo de respuestas antes y después, observamos que los estudiantes que no ocupan estrategia se han reducido prácticamente a la mitad, de 27 a 14 estudiantes.

4.3.7 Respuestas correctas en el pretest

El promedio de las respuestas correctas en el pretest es de 0.29, menos de una respuesta correcta por persona. Este valor es bajo y puede argumentarse con la Tabla N°10 de frecuencias a continuación.

	Frecuencia	*Porcentaje*
0	38	79.2
1	6	12.5
2	4	8.3
Total	48	100

Tabla N°10: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas en el pretest.

De la Tabla N°10 podemos observar que los estudiantes, en forma general, tienen un mal rendimiento en el pretest. Esto lo muestra por ejemplo que el 79.2% no responde ninguna de las tres preguntas de forma correcta. Además, se puede deducir por una media de 0.29 respuestas correctas por estudiantes, que la estrategia de los estudiantes, ocupar la fórmula general de la ecuación de segundo grado, no resultó efectiva para dar respuesta a un tipo de pregunta que no es únicamente encontrar el valor de una incógnita.

Se presenta el Gráfico N°5 con las frecuencias de las respuestas correctas.

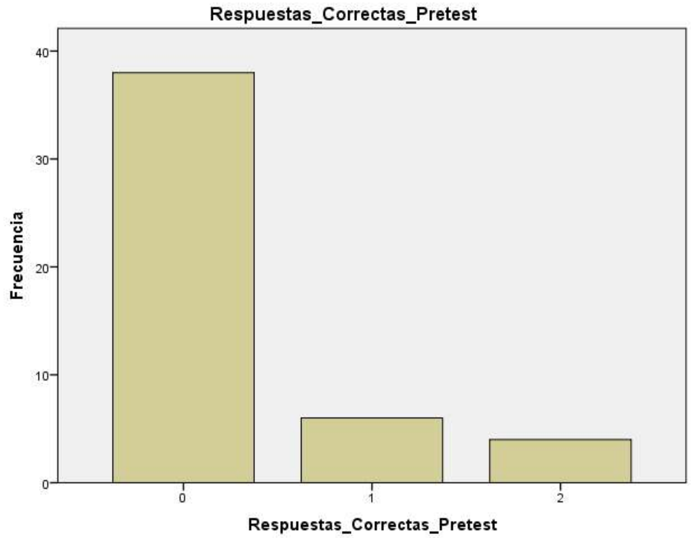


Gráfico N°7: Frecuencia de respuestas correctas en el pretest.

4.3.8 Respuestas correctas en el postest

El promedio de las respuestas correctas en el postest es de 1.083. Si comparamos con el promedio del pretest, 0.29, podemos observar que los estudiantes mejoraron significativamente su rendimiento.

	Frecuencia	*Porcentaje*
0	17	35.4
1	15	31.3
2	11	22.9
3	5	10.4
Total	48	100

Tabla N°11: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas en el postest.

Si observamos la Tabla N°10, los estudiantes que responden al menos una pregunta de forma correcta en el pretest es de un 20.8% mientras que, en el postest, en la Tabla N°11, es de un 64.6%. Incluso, en el postest hay estudiantes que responden las tres preguntas de forma correcta, situación que no ocurrió en el pretest, representando el 10.4%.

Se adjunta el Gráfico N°6 para visualizar las respuestas correctas de los estudiantes.

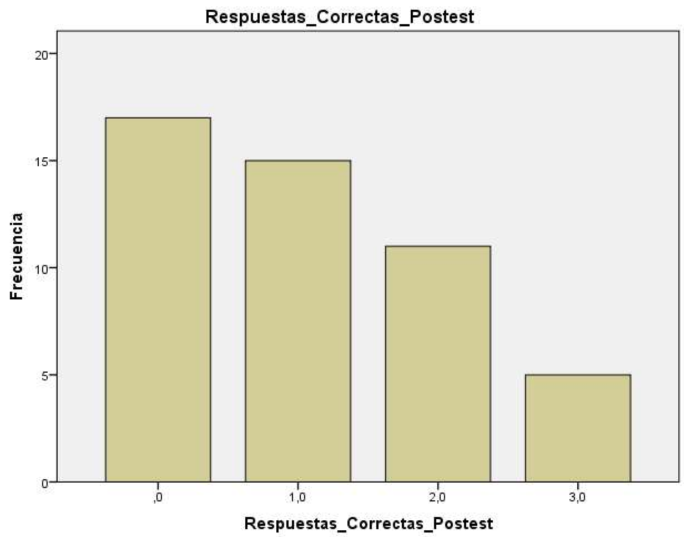


Gráfico N°8: Frecuencia de respuestas correctas en el postest.

Capítulo V Conclusión y Discusión

5.1 Conclusión

Este trabajo exploró las ventajas de una secuencia de aprendizaje, orientada bajo una teoría didáctica que privilegia el uso de diversas representaciones de los objetos matemáticos, apoyada con el uso de la Historia de la Matemática como una herramienta para obtener valiosos aportes al abordar el aprendizaje desde otras perspectivas, frente a una enseñanza tradicional. La aplicación de esta secuencia didáctica se realizó en un curso de tercer año de enseñanza media que seguía una enseñanza tradicional de la enseñanza de la matemática.

El desarrollo de esta secuencia didáctica, para obtener el número de soluciones y su tipo en una ecuación cuadrática, se fundamentaron en la Teoría de las Representaciones Semióticas y se utilizó una estrategia no convencional apoyada en la Historia de la Matemática, puntualmente, a la elaborada por Descartes para analizar la cantidad de soluciones y la naturaleza de estas en una ecuación de segundo grado. Previo a esto se realizó un análisis de la enseñanza tradicional del álgebra, que está presente en la mayor parte de los establecimientos del país y que naturalmente era la que estaban acostumbrados los estudiantes en quienes se implementó esta secuencia de aprendizajes.

A modo general, podemos indicar que existen indicios de que esta secuencia de aprendizajes trae beneficios en la enseñanza para obtener el tipo y número de soluciones en una ecuación cuadrática. También podemos observar, en comparación con los muchos estudiantes que se vieron beneficiados, que existe un número de alumnos que no logró adquirir el dominio de esta nueva herramienta.

Si analizamos con más detalles los resultados obtenidas podemos orientar este análisis en los siguientes puntos:

1. Los resultados obtenidos en el pretest parecen coincidir con la descripción de la enseñanza tradicional del álgebra en la sala de clases, pues se observó: el uso exclusivo del lenguaje algebraico y ninguna modificación del registro de salida al de llegada; una dependencia en el uso de fórmulas como una forma de validar una respuesta; ningún recurso intuitivo para abordar la problemática como el uso de dibujos o esquemas personales; poco control al realizar las operaciones, que parecen “ciegas”, pues no se observa un plan para abordar el problema. Durante la el pretest se observó que muchas veces era un trabajo de memoria, como si fallaran no tanto porque no sabían sino porque se les había olvidado qué fórmula debían utilizar.

2. Los resultados obtenidos en el postest, junto con las sesiones en aula, se puede visualizar que la Historia de la Matemática se utilizó exclusivamente como una “nueva estrategia”, aunque Descartes lo utilizara hace ya muchos siglos. La historia de la ecuación cuadrática respalda el uso constante y beneficioso de un aspecto geométrico y otro simbólico en su resolución, esto parece tener resultados parecidos en los estudiantes: desde el momento de presentar esta estrategia se lograron muchas veces, de forma intuitiva, formular el procedimiento antes que el docente lo explicara. Esto podría respaldar la hipótesis de que la mayor parte de los matemáticos ocuparon una representación geométrica en el álgebra como un apoyo para comprobar o mostrar sus resultados de forma eficiente y para validar sus avances. Esto también puede ser fundamentado con el importante uso de esta herramienta por parte de los estudiantes en el postest para analizar las soluciones de la ecuación cuadrática, más allá, si obtuvieron una respuesta correcta.
3. Existen indicios de que el análisis de la Teoría de las Representaciones Semióticas, realizado en este trabajo, coinciden con los resultados obtenidos tanto en el postest como en el desarrollo de la secuencia de aprendizaje. El uso de las representaciones no fueron un obstáculo ante el exclusivo uso del lenguaje algebraico, sino que complementaron las estrategias de los estudiantes: ellos utilizaron eficientemente las representaciones algebraicas y geométricas para abordar las preguntas del postest. De los resultados podemos observar una tendencia de los estudiantes a un trabajo más intuitivo a la hora de abordar los problemas y lograr mayor control ante la pregunta, parece que los estudiantes obtienen mejores rendimientos con una estrategia que utiliza representaciones múltiples. Siguiendo con el uso de la Teoría de las Representaciones Semióticas, se observó en los estudiantes el uso de las tres operaciones claves: identificación, tratamiento y conversión. Podemos aventurarnos a generar la hipótesis de que los mejores resultados de los estudiantes se deban a que la obtención de un conocimiento conceptual, noesis, se debe al uso de múltiples representaciones, semiosis, posibilitando una coordinación interna entre los diversos registros. Lo anterior parece confirmar las investigaciones que utilizan o analizan la Teoría de las Representaciones Semióticas para la enseñanza de la matemática.
4. Por otra parte, podemos observar en los resultados que no todos los estudiantes se sumaron al uso de una nueva estrategia de resolución o a la utilización de nuevas representaciones. Una hipótesis, a partir del análisis de la enseñanza tradicional, es que estén acostumbrados al uso de un lenguaje algebraico con una fuerte componente en la manipulación de fórmulas. Tal vez se necesitan más sesiones de intervención con aquellos alumnos.
5. También sería interesante utilizar la tecnología, como el uso de software de álgebra y geometría, en el uso de una propuesta didáctica como la secuencia realizada. Esta

alternativa puede potenciar el aprendizaje de los estudiantes y además podría estimular de forma natural el uso de varias representaciones.

5.2 Discusión

Finalmente, se da una lista de recomendaciones en caso de querer replicar esta secuencia de aprendizaje, así como su proyección en otras instancias:

1. Sorprende que no existan teorías de didáctica de la matemática, de forma explícita, en las clases de matemática, y que se mantenga la enseñanza tradicional, como si el conocimiento generado por la comunidad de investigadores fuese invisible en la enseñanza. Tal vez, el esfuerzo por cambiar la enseñanza comienza por apoyarse en investigaciones en educación matemática que ya tienen muchos años siendo validadas por expertos a nivel mundial de gran prestigio. El uso de la Teoría de las Representaciones Semióticas en este trabajo es un ejemplo de lo que puede realizarse en otros ejes y contenidos.
2. El uso de la tecnología cada vez toma mayor importancia en la sala de clases, sin embargo, no siempre va acompañada con una teoría que sustente su práctica. La Teoría de las Representaciones Semióticas ofrece un marco adecuado para fundamentar su uso. Como se observó, la Historia de la Matemática también es una excelente fuente de estrategias que pueden ser complementadas, actualizadas, con el uso de software pero que a la vez fundamenta su uso y permite un mayor provecho tanto por parte del docente como de los alumnos.
3. Sería interesante que dentro de los textos de estudio existan actividades, y unidades, que se fundamenten en la Teoría de las Representaciones Semióticas, esto es: no esperar que el concepto que se deba enseñar como tal, noesis, sino que es imprescindible el uso de diversas representaciones, intuitivas y abstractas, es decir la semiosis, para la comprensión. ¿Acaso no es una forma más explícita y concreta de entender el constructivismo?
4. Una forma innovadora de poder evaluar el proceso realizado por los estudiantes puede emerger desde el uso de la Teoría de las Representaciones Semióticas. El uso de esta teoría ayuda al docente a tener un marco para analizar las respuestas de los estudiantes, los conceptos de identificación, tratamiento y conversión pueden ser útiles.
5. Sería interesante para los departamentos de matemática en los respectivos establecimientos, generar proyectos innovadores en actividades que vinculen los contenidos que deben abordar con los estudiantes. Una herramienta a su favor es el uso de la Historia de la Matemática como una estrategia de enseñanza y aprendizaje. Explorar otros contenidos de la enseñanza de matemática de forma semejante a lo

realizado en este trabajo: secciones cónicas, áreas de figuras geométricas, cuerpos en el espacio, lenguaje algebraico, ecuaciones, funciones, etc. Parece que el álgebra y la geometría, en sus diversos niveles, son especialmente proclives a una réplica de lo realizado en este trabajo, tanto por su afinidad con el uso de diversas representaciones, como contar con una larga historia en diversas civilizaciones.

6. Finalmente, el estudio de la Historia de la Matemática debe abordarse no tanto como un conocimiento superficial por parte de los docentes, como un accesorio, sino que como parte de los recursos para posibilitar una mejor enseñanza. Existen pocos recursos de la Historia de la Matemática pensados para su uso en la sala de clases, tal vez, este trabajo genera una buena instancia para pensar en el uso de la Historia de la Matemática como una herramienta más allá que como una anécdota interesante.

Bibliografía

Albornoz, D. R. M., & Gomez, N. J. S. (2014). Estilos de aprendizaje "Pensamientos e inquietudes de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas". *Journal of Learning Styles*, *7*(13).

Alcázar, A. (2009). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza. *Revista digital para profesionales de la enseñanza*.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema*, *8*(1), 30-46.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, 29-48.

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Massa, S. M., Figueroa, S. M., & Moler, E. (2010). Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos. *Revista de Educación Matemática*.

Blanco, G. (2006). La equidad y la inclusión social: uno de los desafíos de la educación y la escuela hoy. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *4*(3).

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Campanario, J. M., & Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(2), 179-192.

Campos, M. A., & Balderas, P. (2000). Las representaciones como fundamento de una Didáctica de las Matemáticas. *Pensamiento Educativo*, *27*, 169-194.

Campos, Y. (2000). Estrategias de enseñanza aprendizaje. *Estrategias didácticas apoyadas en Tecnología. Obtenido de la Universidad Autónoma Metropolitana: http://virtuami. izt. uam. mx/e-Portafolio/DocumentosApoyo/estrategiasenzaprendizaje. pdf*.

Castro, E., García, J. R., & Villegas, J. L. (2005). El papel de las representaciones en el éxito de la resolución de problemas.

Chaves, E., & Salazar, J. (2003). La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje: una experiencia en secundaria. *Uniciencia*, *20*(2), 259-266.

Courant, R. & John, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. México: Limusa.

Courant, R. and Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Cuadra, F. G., & Romero, L. R. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *21*(1), 27-47.

D’Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (11), 63-71.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 177-196.

D’Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, (11).

De Herrero, S. M. S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *7*(1), 49-78.

De la Fuente, A. C., Gómez, C. S., & Armenteros, M. G. (2003). Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de teoría de las funciones semióticas. In *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 189-200).

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpíada Matemática Argentina.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *DidacTIC. Recuperado el*, *10*.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

EDUCARCHILE. (2013). Ecuación cuadrática. Recuperado de http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=133243

Fernández, J. D., & Zarzar, C. B. (2016). EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE EUCLIDES: una experiencia en la enseñanza del álgebra. *REVISTA HORIZONTES PEDAGÓGICOS*, *17*(2).

Flechsig, K. H., & Schiefelbein, E. (2003). Enseñanza frontal o Tradicional (Enseñanza cara a cara). *Veinte Modelos Didácticos para América Latina, Washington DC., Biblioteca Digital de OEA.*

Gil, D. J. G. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *19*(1), 95-112.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, *28*(1), 9-22.

Gómez, J. L. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *IDEAS Y RECURSOS*, 59.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *9*(3), 281-289.

Granados, A. (2 de octubre de 2013). Los ciegos y el elefante. Recuperado de: https://albertogranados.wordpress.com/2013/10/02/los-seis-ciegos-y-el-elefante/

Guayacundo Gómez, G. *Proyecto propuesta didáctica de enseñanza en el aula, ecuaciones lineales-cuadráticas y modelos* (Tesis de Magíster). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Gustin Ortega, J. D., & Avirama Gutiérrez, L. M. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo* (Tesis de Licenciatura). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hernández, C., Rodríguez, F., & Romero, J. (2012). Estudio didáctico del concepto ecuación en la educación básica.

Kelly, E. P. (1998). Racionalidades en la producción curricular y el proyecto curricular. *Revista Pensamiento Educativo*, *23*, 13-72.

Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *7*(3), 229-240.

Kline, M., & Alonso, J. H. (1999). *El pensamiento matemático desde la Antigüedad a nuestros días, 1*. Alianza Editorial.

Larroyo, F. (2010).Estudio introductivo. En R. Descartes, *Discurso del método; Meditaciones Metafísicas; Reglas para la dirección del espíritu, Principios de la filosofía*. México: Porrúa.

Macías Sánchez, J. (2014). Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. Revista de Investigación Educativa Conect@2, 4(9): 27-57.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE)*, *13*.

Massa Esteve, M. R. (2014). Álgebra y geometría en el aula: la construcción geométrica de la solución de la ecuación de segundo grado.

MINEDUC. (2009). Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios. Santiago: Gobierno de Chile.

MINEDUC. (2009). Planes y programas de estudio, Nivel tercero medio, matemática. Santiago: Gobierno de Chile.

Morales, Z. (2013). Transformando las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo en el estudio del álgebra.

Moreno, R. (2009). Introducción. En Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi, *El libro del Álgebra*. España: Nivola.

Nieto Bedoya, M. (1991). Los textos escolares transmisores de un currículum oculto.

OCDE. (2008). El programa PISA. Qué es y para qué sirve. París: Publicaciones de PISA en español.

OCDE. (2015). Las reformas de innovación y educación son esenciales para diversificar la economía de Chile: OCDE. Recuperado de http://www.oecd.org/newsroom/las-reformas-de-innovacion-y-educacion-son-esenciales-para-diversificar-la-economia-de-chile.htm

OCDE. (2016). Singapur encabeza la última encuesta PISA sobre educación que realiza la OCDE a escala internacional. Recuperado de http://www.oecd.org/newsroom/singapur-encabeza-la-ultima-encuesta-pisa-sobre-educacion-que-realiza-la-ocde-a-escala-internacional.htm

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*,*1* (13), 29-36.

Pascual, E. S. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Journal of Learning Styles*, *2*(4).

Pastor, J. R., & Babini, J. (1985). Historia de la Matemática, vol. 1. *Barcelona: Gedisa*.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. *El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Departament de Didáctica de la matemática*, 109-131.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa.

Quintás, G., & Descartes, R. (1981). Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría.

Ramírez, O., Romero, C. F., & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *pna*, *1*(2), 47-66.

Rodríguez Guzmán, N. A. (2011). *Soluciones geométricas de ecuaciones algebraicas* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C., & Castro, E (2015). ERRORES EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL. *PNA*, *9*, 4.

Rojas Garzón, P. J. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 0151-165.

Sánchez, P. A. (2012). Escuelas eficaces e inclusivas: cómo favorecer su desarrollo. *Educatio siglo XXI*, *30*(1), 25-44.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5-34.

Soto, D., & Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la Matemática?

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica.

Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson educación.

Torres Salas, M. I. (2010). La enseñanza tradicional de las ciencias versus las nuevas tendencias educativas. *Revista Electrónica Educare*, *14*(1).

UNIVERSIA. (2016). Nuevo informe de la OCDE advierte sobre la desigualdad en el acceso a la educación en Chile. Recuperado de http://noticias.universia.cl/educacion/noticia/2016/02/11/1136217/nuevo-informe-ocde-advierte-desigualdad-acceso-educacion-chile.html

Urbaneja, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.

Valencia, A., & Salazar, J. A. (2010). La conversión de registros de representación semiótica en el trabajo con fracciones mayores que la unidad.

Vargas Mejía, J. A. (2013). Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela.

Anexos

Anexo 1: Secuencia didáctica - Primera sesión

La ecuación cuadrática y sus soluciones

Primera sesión

Nombre:...

Curso:.............................

Recordemos

Qué es una ecuación cuadrática.

A las ecuaciones cuadráticas también se les denomina "ecuación de segundo grado". Un ejemplo de una ecuación cuadrática es la siguiente:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

y de forma general se escribe de esta forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y se indica que a, b y c son números reales.

Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática y de qué "tipo" son.

A diferencia de una ecuación lineal, o de primer grado, que tiene una solución, las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones. Por lo tanto, las soluciones de una ecuación cuadrática pueden ser: *una solución real*, *dos soluciones reales* o *ninguna solución real* (o dos soluciones que no son reales).

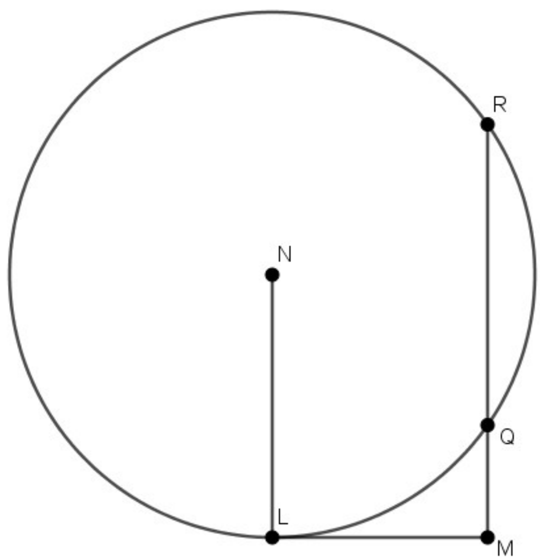
Ejemplos

1. La ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ tiene una única solución que es $x = -3$. Podemos decir que tiene *una solución real*.
2. La ecuación $x^2 + 9x + 20 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -5$ y $x = -4$. Podemos decir que tiene *dos soluciones reales*.

En esta clase no nos importa saber cómo encontrar la solución a una ecuación cuadrática, sino que únicamente poder determinar cuántas soluciones y de qué tipo son.

Vamos a utilizar una nueva forma de observar la ecuación cuadrática. Esta nos ayudará a determinar más fácilmente cuántas soluciones tiene (¿una o dos?) y de qué tipo son (¿reales o no?). Esta forma la desarrolló por primera vez René Descartes (imagen a la derecha), filósofo y matemático francés del siglo XVII, quien la describió en su libro *Discurso del Método*.

Veamos un ejemplo. Descartes dio solución a la ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$, y le pareció más cómodo representar geométricamente la ecuación cuadrática:



Donde el segmento NL mide $\frac{10}{2}$ y es el radio de la circunferencia. Fíjate que no considera el signo en $-10x$ y lo divide en 2. El segmento LM mide $\sqrt{16}$ y es tangente a la circunferencia en L.

Si observas con detenimiento:

$$\frac{10}{2} > \sqrt{16}$$

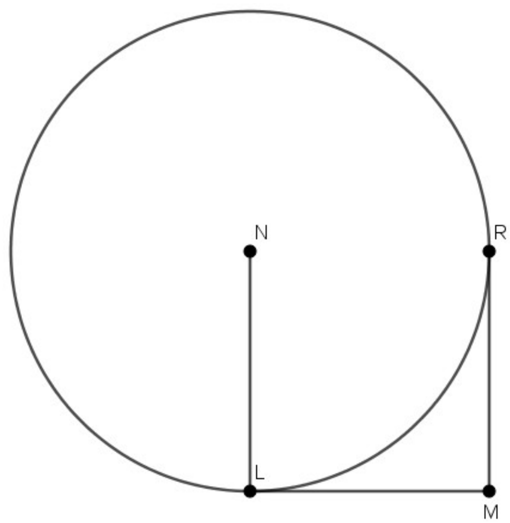
$$5 > 4$$

Es decir:

$$NL > LM$$

Por lo tanto, el segmento de recta MR, que es paralela al segmento NL, corta a la circunferencia en dos puntos: Q y R.
Descartes concluye lo siguiente: **si el segmento de recta MR intersecta a la circunferencia en dos puntos, entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.**

Pero en general, las ecuaciones cuadráticas al ser representadas geométricamente tienen otras opciones. Descartes indica la siguiente situación:



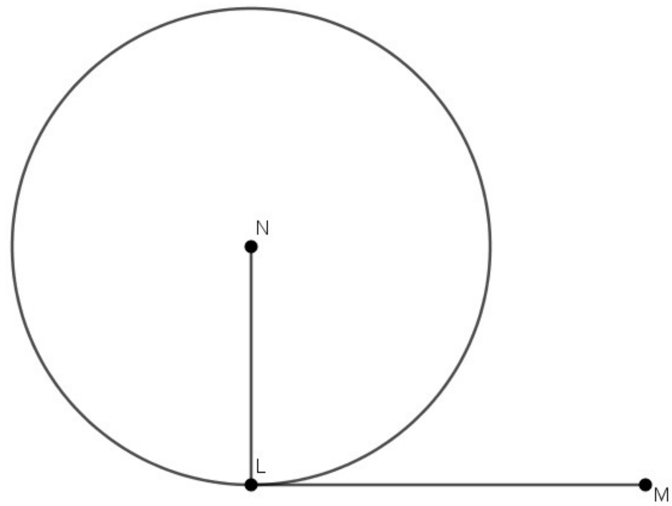
Podemos deducir que:

$$NL = LM$$

Por lo tanto, el segmento de recta MR, que es paralela al segmento NL, corta a la circunferencia en un punto: R.

Como el **segmento de recta MR intersecta en un único punto a la circunferencia, entonces la ecuación cuadrática tiene una solución real (o dos soluciones iguales y reales)**.

Descartes propone otra situación posible:



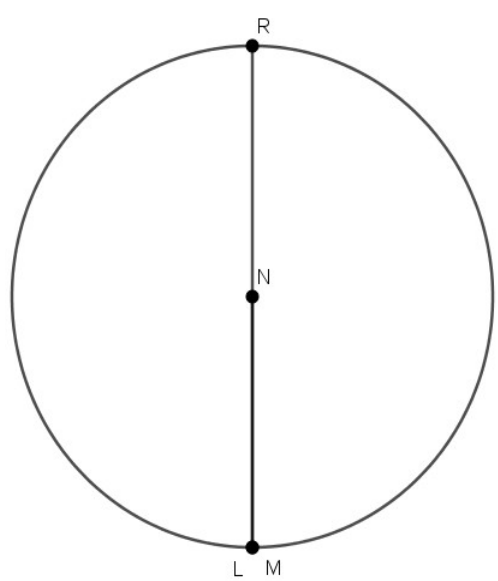
Podemos deducir que:

$$NL < LM$$

Por lo tanto, no existe ningún punto que intersecta a la circunferencia. M está *más allá* de la circunferencia y ningún segmento de recta paralelo a NL cortará la circunferencia.

Como el **segmento LM es mayor que el radio de la circunferencia, entonces no existe un segmento de recta a partir de M que intersecta la circunferencia. Entonces la ecuación cuadrática no tiene solución real (o tiene dos soluciones no reales)**.

Finalmente, Descartes plantea la siguiente situación:



Podemos deducir que:

$$LM = 0$$

El **segmento MR coincide con el diámetro de la circunferencia, en este caso se dice que la ecuación tiene dos soluciones reales y una de ellas es nula (o es igual a cero)**.

Importante
Cuando en la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, **"c" es negativo, entonces siempre tenemos dos soluciones reales.**

Trabaja en pareja o en grupos de tres

Problema 1

Queremos conocer la cantidad y el tipo de solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 11x + 25 = 0$$

a. Representa geométricamente la ecuación cuadrática:

b. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

c. ¿Qué tipo de solución son?

d. Si la ecuación se modifica a la siguiente: $x^2 + 11x + 36 = 0$. ¿Qué pasa en el gráfico? Escríbelo.

e. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación anterior y de qué tipo son?

Problema 2

Se nos indica que la ecuación $x^2 + 5x + c = 0$ tiene una única solución.

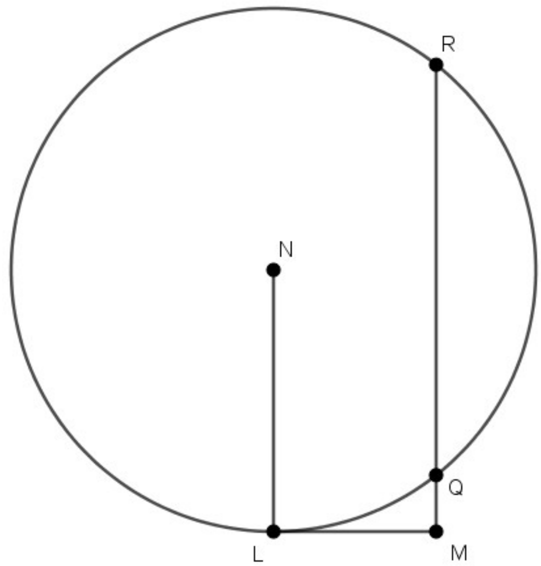
a. Representa geométricamente la ecuación anterior:

b. ¿Qué valor debe tener “c”?

c. Ahora se nos indica que la ecuación $x^2 + 5x + c = 0$ no tiene soluciones reales. Representa nuevamente la ecuación anterior de forma geométrica:

d. ¿Qué valores puede admitir “c”?

e. Ahora sabemos que la representación geométrica de la ecuación $x^2 + 5x + c = 0$ es la que está abajo.



¿Qué valores puede admitir “c”?

f. Si sabemos que la ecuación $x^2 + 5x + c = 0$ tiene dos soluciones reales y una de ellas es cero, ¿cuál es el valor de “c”?

Problema 3

A partir de la ecuación $5x^2 + 14x + 20 = 0$ responde lo siguiente:

a. Modifica la ecuación para obtener una de la forma $x^2 + bx + c = 0$:

b. Representa geométricamente la ecuación obtenida en la pregunta anterior:

c. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación y de qué tipo son?

Anexo 2: Secuencia didáctica - Segunda sesión

La ecuación cuadrática y sus soluciones

Segunda sesión

Nombre:..

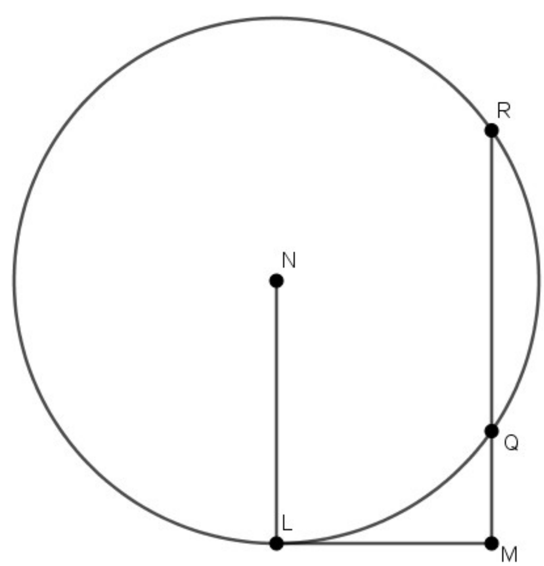
Curso:..............................

Recordemos

Número y tipo de soluciones en una ecuación cuadrática

Si recuerdas la clase anterior, estudiamos el número y tipo de solución que tiene una ecuación de segundo grado. Indicamos que pueden ser dos soluciones reales diferentes, dos soluciones reales iguales o no tener soluciones reales, y en ese caso, se dice que tiene dos soluciones complejas.
Pero también conocimos una forma de representar la ecuación cuadrática que utilizó René Descartes en el siglo XVII. Con esa forma de representar la ecuación cuadrática podemos reconocer cuántas soluciones tiene y de qué tipo son, pero de una forma gráfica.

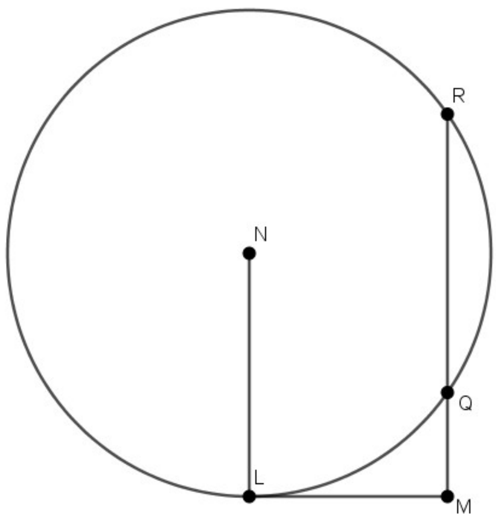
Vamos a representar la ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$ como Descartes:



Donde el segmento NL mide $\frac{10}{2}$ y es el radio de la circunferencia. Fíjate que no considera el signo en $-10x$ y lo divide en 2. El segmento LM mide $\sqrt{16}$ y es tangente a la circunferencia en L. Por M traza un segmento paralelo a NL, y en este caso corta en dos puntos a la circunferencia.

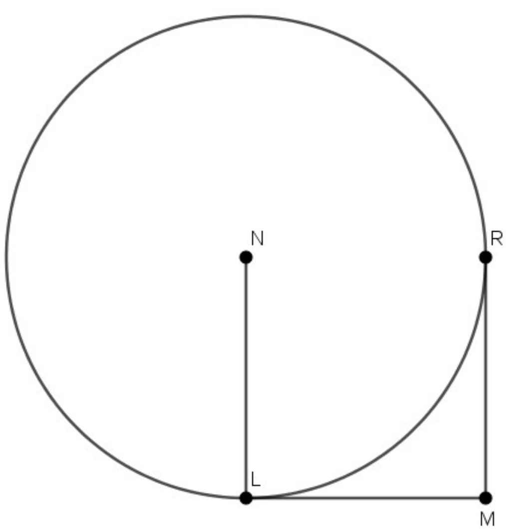
Número y tipos de soluciones a través de una representación geométrica

Las diferentes formas de representar una ecuación cuadrática, así como el número y tipo de solución asociadas son los siguientes:



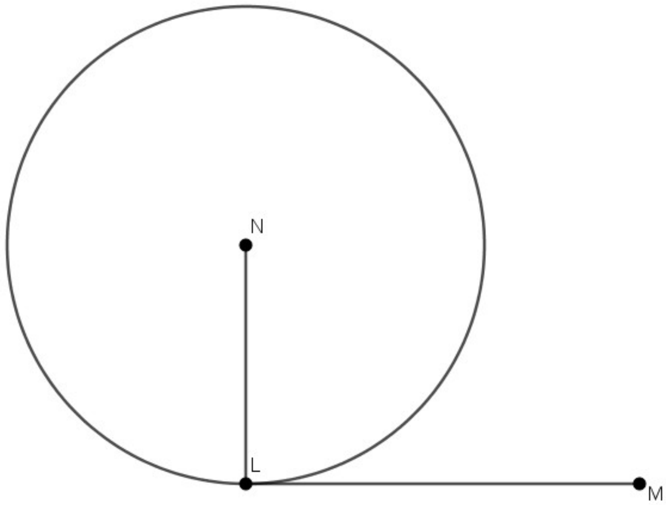
$$NL > LM$$

La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.



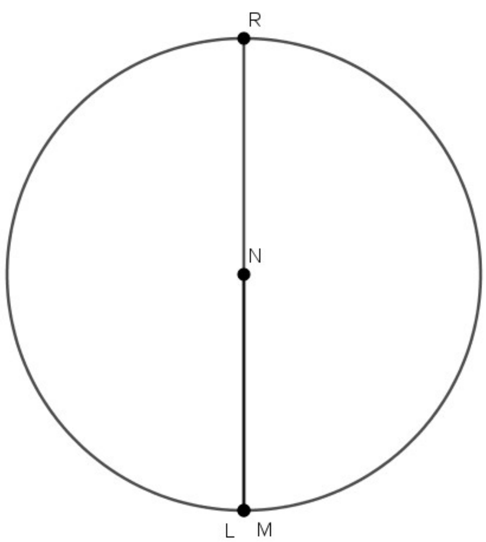
$$NL = LM$$

La ecuación cuadrática tiene una solución real (o dos soluciones iguales y reales).



$$NL < LM$$

La ecuación cuadrática no tiene solución real (o tiene dos soluciones no reales).



$$LM = 0$$

La ecuación tiene dos soluciones reales y una de ellas es nula (o es igual a cero).

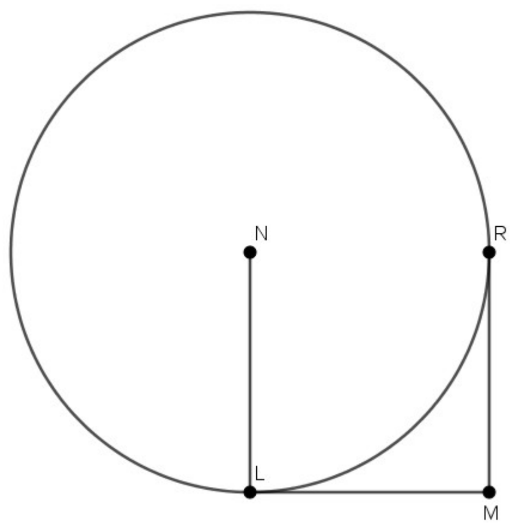
Importante
Cuando en la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, **“c” es negativo, entonces siempre tenemos dos soluciones reales.**

Ejemplo

Veamos un ejemplo de cómo utilizar la representación gráfica para obtener información de una ecuación cuadrática. En nuestra ecuación:

$$x^2 + 10x + c = 0$$

Supongamos que nuestra ecuación tiene **una sola solución real** (o dos soluciones reales iguales), entonces nuestro gráfico es de la siguiente forma:



¿Cuál es el valor de “c”?

En donde:

$$NL = \frac{10}{2} = 5$$
$$LM = \sqrt{c}$$

Y por lo tanto:

$$LN = LM$$
$$5 = \sqrt{c}$$
$$25 = c$$

Trabaja en pareja o en grupos de tres

Problema 1

Sabemos que la ecuación $x^2 + 6x + c = 0$ no tiene solución real (o tiene dos soluciones no reales).

a. Representa geométricamente la ecuación:

b. ¿Qué valores debe tener “c”?

Problema 2

Sabemos que la ecuación $x^2 + 6x + (c + 4) = 0$ tiene una única solución.

a. Representa geométricamente la ecuación:

b. ¿Qué valores debe asumir “c”?

Problema 3

En la ecuación $(x-4)^2+3=0$:

a. Desarrolla el cuadrado de binomio y reduce términos semejantes:

b. Representa geométricamente la ecuación:

c. ¿Cuántas soluciones tiene?

d. ¿Qué tipo soluciones son?

Problema 4

En la ecuación $2x^2 + 4x + 6 = 0$:

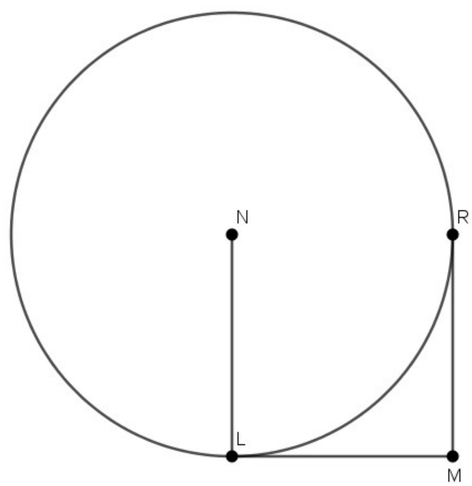
a. Representa geométricamente la ecuación:

b. ¿Cuántas soluciones tiene?

c. ¿Qué tipo soluciones son?

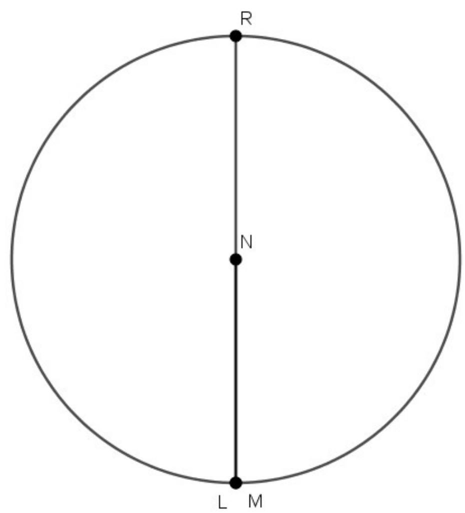
Problema 5

Si sabemos que el radio de la circunferencia mide 4 y su representación geométrica es la siguiente:



a. Escribe la ecuación en forma algebraica:

Si sabemos que el radio de la circunferencia mide 4 y su representación geométrica es la siguiente:



b. Escribe la ecuación en forma algebraica:

Anexo 3: Pretest

La ecuación cuadrática y sus soluciones

Evaluación inicial

Nombre:____

Curso:_________________

Presentación

Estimado alumn@ en esta evaluación necesitamos que contestes con la mayor honestidad posible. Como no tiene calificación, y no afectará tu promedio en la asignatura de matemática, puedes contestar con total tranquilidad. Si crees que sabes algo pero no tienes la seguridad, contesta igualmente, pues, las respuestas incorrectas no te descontarán puntos, y para nosotros es muy importante saber qué intuición o recuerdo tienes de cada contenido.

Instrucciones

Recuerda lo siguiente:

1. Escribe tu nombre en la evaluación.
2. La evaluación es individual.
3. Si tienes alguna duda sobre el planteamiento de un problema, puedes consultar tus dudas con el profesor.
4. Puedes usar calculadora.
5. El tiempo máximo para responder la evaluación es de 20 minutos.

Pregunta 1

Según la ecuación $x^2 - 2x + a = 0$ es correcto afirmar que:

I. Si $a > 1$ existen dos soluciones reales.
II. Si $a = 1$ existe solo una solución.
III. Si $a < 1$ no hay soluciones reales.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo II y III
D) Sólo II
E) Sólo I y III

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta:

Pregunta 2

¿Para qué valor de k la ecuación $4x^2 - 12x + k + 3 = 0$, tiene raíces reales e iguales?

A) –12
B) –9
C) 6
D) 9
E) 12

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta:

Pregunta 3

En la ecuación $5 - 2x - 3x^2 = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. Ella tiene una solución.
II. Ella tiene dos soluciones.
III. Ella no tiene soluciones reales.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta:

Anexo 4: Postest

La ecuación cuadrática y sus soluciones

Evaluación final

Nombre:____

Curso:________________

Presentación

Estimado alumn@ en esta evaluación necesitamos que contestes con la mayor honestidad posible. Como no tiene calificación, y no afectará tu promedio en la asignatura de matemática, puedes contestar con total tranquilidad. Si crees que sabes algo pero no tienes la seguridad, contesta igualmente, pues, las respuestas incorrectas no te descontarán puntos, y para nosotros es muy importante saber qué intuición o recuerdo tienes de cada contenido.

Instrucciones

Recuerda lo siguiente:

1. Escribe tu nombre en la evaluación.
2. La evaluación es individual.
3. Si tienes alguna duda sobre el planteamiento de un problema, puedes consultar tus dudas con el profesor.
4. Puedes usar calculadora.
5. El tiempo máximo para responder la evaluación es de 20 minutos.

Pregunta 1

Respecto de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + c = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s)?

I. Si $c > 1$ no tiene soluciones reales.
II. Si $c \neq 1$ siempre tiene soluciones reales.
III. Si $c > 0$ siempre tiene soluciones reales.

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta:

Pregunta 2

En la ecuación $(x-3)^2 - 1 = 0$ se cumple que:

I. Ella tiene dos soluciones reales.
II. Ella tiene al menos una solución nula.
III. Ella no tiene soluciones reales.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta:

Pregunta 3

¿Para qué valor de k, la ecuación $3x^2 + 2x + k = 0$ tiene una única solución?

A) - 1/3

B) - 3

C) 1/3

D) 3

E) Ninguno de ellos

Ocupa este espacio para desarrollar tu respuesta: