UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática

y

Ciencia de la Computación

PROPUESTA DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL POLINOMIO DE TAYLOR

Alejandro García Miño

Profesor Guía: Andrés Navas Flores

Trabajo de Titulación presentado en conformidad a los requisitos para obtener el grado académico de magíster

Santiago - Chile

2018

Dedicatoria

Con infinito amor y gratitud para mi Chanchita Sandra y mis bebes Mateo e Ilian. Quienes me apoyaron incondicionalmente en esta difícil tarea.

Tabla de contenidos

Índice de Ilustraciones

Índice de tablas

Resumen

El presente trabajo de investigación se desarrolló en el contexto de la enseñanza del análisis matemático, en los cursos universitarios iniciales de cálculo diferencial e integral, con la finalidad de desarrollar una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas en el aula, que permita el aprendizaje del Polinomio de Taylor. El desarrollo de la propuesta se realizó en base a la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Para la elaboración de la propuesta didáctica, además de implementar las etapas definidas en la Ingeniería Didáctica: *Análisis Preliminar, Concepción y Análisis a Priori, Experimentación y Análisis a Posteriori*, se desarrolló y aplicó un instrumento de evaluación, para medir el desempeño de la competencia matemática de los estudiantes, en el contexto de la situación didáctica propuesta. El diseño de la propuesta inicial contempló cuatro actividades, donde en dos de ellas se logró los objetivos planteados y en dos de ellas se logró parcialmente. La implementación de la metodología y la aplicación y sistematización del instrumento de evaluación, permitieron construir una segunda situación didáctica junto con los fundamentos teóricos necesarios, para una intervención de aula adecuada en el momento curricular en que se estudia el Polinomio de Taylor.

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se desarrolla una propuesta de una situación didáctica para el aprendizaje del Polinomio de Taylor, en el contexto de la enseñanza del análisis matemático, en los cursos de cálculo diferencial e integral de los primeros años universitarios.

El foco del estudio está en brindar herramientas al profesor de matemática de primer año universitario, tanto para la enseñanza del polinomio de Taylor como para la evaluación de actividades basadas en la resolución de problemas en el aula. Las herramientas desarrolladas corresponden a una propuesta de una situación didáctica para la enseñanza del polinomio de Taylor, un instrumento de evaluación para la actividad de resolución de problemas en el aula, y un completo análisis de los fundamentos matemáticos, desde su construcción teórica hasta las aplicaciones más importantes en este contexto.

El interés fundamental detrás de este estudio está en el hecho de que el proceso de enseñanza-aprendizaje del análisis matemático, presente en los cursos iniciales de cálculo diferencial e integral universitarios, se basa en la reproducción de conocimiento, el exceso de memorización y algoritmetización, y relega la resolución de problemas a un segundo plano, sin enriquecerse con espacios de reflexión en torno al conocimiento matemático a enseñar, el conocimiento matemático enseñado y el aprendizaje que ocurre en el estudiante.

Por otra parte, si bien hay abundante investigación en torno a los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral y la serie de Taylor, hay escasa literatura en torno al polinomio de Taylor, ya sea desde un punto de vista de la construcción del conocimiento o desde el diseño didáctico de situaciones de aprendizaje. A partir de esta oportunidad, y teniendo en cuenta la importancia del polinomio de Taylor en la enseñanza del cálculo diferencial e integral, profundizamos sobre esta idea, como una noción que permite la comprensión de los procesos de aproximación de funciones y la comprensión intuitiva de la convergencia de la serie de Taylor.

El desarrollo de esta propuesta didáctica se ha realizado utilizando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, la que se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" que ocurren en el aula, a partir de la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En nuestro caso, el estudio se realiza desde un nivel de la *micro-ingeniería didáctica*, con foco en los siguientes preguntas: ¿cómo producir aprendizaje significativo del polinomio de Taylor?, y ¿como lograr que el estudiante aprenda la idea de aproximación de funciones por medio de los Polinomios de Taylor?.

Esta propuesta se fortalece con el desarrollo de un instrumento de evaluación que permite la observación objetiva del desempeño de los estudiantes en torno a una actividad de aprendizaje centrada en la resolución de problema en el aula, toda vez que el contrato didáctico se basa en una metodología de enseñanza activa y centrada en la activación de la resolución de problemas en el aula, donde surge naturalmente una tercera pregunta: ¿cómo evaluar el desempeño de los estudiantes, al momento de resolver una tarea matemática basada en la resolución de problemas?. Este instrumento permitirá observar las realizaciones de los estudiantes desde un punto de vista de la competencia matemática. Con esto, se espera caracterizar el desempeño del estudiante en torno a esta competencia.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Es de amplio conocimiento por la comunidad académica las diversas dificultades que presenta el aprendizaje de las matemáticas. En particular, el aprendizaje del polinomio de Taylor no está excento de este hecho. Sin embargo, este fenómeno se profundiza por diversas razones, relacionadas con: las Instituciones de educación, la comunidad académica, los estudiantes y el medio que los rodea.

Al concentrarnos en el estudio del polinomio de Taylor, encontramos una serie de dificultades que interfieren tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Estas dificultades no permiten que los estudiantes de cursos universitarios iniciales de cálculo comprendan con profundidad las ideas y consecuencias que hay detrás del aprendizaje del polinomio de Taylor, pese a que este es un fragmento fundamental del Análisis Matemático, cuyo aprendizaje permite una mejor progresión curricular en esta área de las matemáticas.

Dado que la enseñanza que rige en las instituciones de educación superior es de carácter tradicional, en estas, la resolución de problemas tiene poca o nula cabida. Esto se debe a varias razones, dentro de las que se pueden nombrar: un currículum extenso, donde se privilegia la cantidad y no la calidad, excesiva algoritmetización y memorización en la clase de matemática, pocas o nulas oportunidades para enseñar a través de la resolición de problemas, escaso análisis didáctico de las nociones de estudio por parte de los educadores, escaso uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemática, entre otros.

Desde el punto de vista de los estudiantes, estos poseen escasas habilidades para resolver problemas, están acostumbrados a la enseñanza tradicional, sus condiciones de entrada son cada vez más deficientes, poseen dificultades de autogestión y autoregulación. Por lo tanto, requieren metodologías de enseñanza activas, que les brinden oportunidad para el desarrollo de competencias habilitantes tanto para su vida universitaria como para su futuro laboral.

Por lo anterior, y reconociendo que la Resolución de Problemas es la competencia más demandada por el mundo del trabajo, central y articuladora, cuyo desarrollo permite lograr una visión integral de los problemas del presente y futuro, fortalece el trabajo en equipo, la comunicación eficaz y el pensamiento crítico. Con esto, contar con un adecuado nivel de desarrollo de esta habilidad es imprescindible para desempeñarse bajo los estándares que hoy en día se requieren. Por esta razón, es obligación repensar y redirigir la educación, con el único fin de lograr el éxito académico y laboral de nuestros estudiantes.

En este contexto, el polinomio de Taylor, constituye una importante herramienta matemática, pieza fundamental del Análisis Matemático, posee amplias aplicaciones, y en particular es una excelente solución al difícil problema de aproximación de funciones a través de funciones más simples. Con esto, el polinomio de Taylor, pasa a tener gran relevancia en el estudio de las funciones, tópico clave en la enseñanza del cálculo.

La propuesta se centra en reconocer a la resolución de problemas como eje central para el aprendizaje matemático, reconocer la necesidad de contar una situación didáctica que permita el aprendizaje significativo del Polinomio de Taylor, junto con la aplicación a la aproximación de funciones, y sugerir dentro de la secuencia de aprendizaje el uso de herramientas tecnológicas con geometría dinámica, acercando la propuesta a la forma en que los estudiantes están aprendiendo hoy en día.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Teoría de Situaciones Didácticas

En esta sección trataremos la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau de forma contextualizada y no teórica, es decir, no intentaremos explicarla desde un punto de vista de la teoría sino que más bien caracterizarla como una teoría en acción, teniendo en cuenta la búsqueda de condiciones adecuadas para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, básandose en la hipótesis de que estos no se construyen de forma espontánea.

La enseñanza de las matemáticas tiene dos enfoques claramente definidos: Un enfoque tradicional, en el cual el profesor provee conocimiento, usualmente de una manera reproductiva, y con poca o nula significancia, donde el alumno reproduce conocimiento en situaciones tradicionales de enseñanza, esperando a ser incorporados de manera significativa.

En el otro enfoque, planteado por Brousseau, la génesis está en la didáctica de las matemáticas. Intervienen tres factores: El alumno, el profesor y el medio didáctico. En este enfoque el docente juega un rol fundamental, pues pasa de ser un reproductor de conocimiento a un facilitador del aprendizaje. Bajo este paradigma se espera que el estudiante construya su propio conocimiento. Cuando hablamos de *situación didáctica*, nos referimos al conjunto de interacciones que hay entre estos tres sujetos, con foco en que el estudiante adquiera un conocimiento matemático específico. De forma contrapuesta cuando hablamos de *situación a-didáctica*, nos referimos al proceso en el cual se plantea una tarea matemática específica que el alumno debe resolver de forma autónoma y sin intervensión del profesor, luego de haber construido o recibido un determinado conocimiento matemático. Se espera que en la situación a-didáctica el alumno utilice sus propios conocimientos y los ponga en juego para resolver el problema, motivado únicamente por el sólo deseo de resolver el desafío planteado. Se puede pensar que la situación a-didáctica sirve como medio validador del conocimiento adquirido por el alumno.

Las interacciones que ocurren entre los sujetos de la situación didáctica ocurren en el medio didáctico desarrollado por el docente, con el fin de que ocurra la construcción de conocimiento (situación didáctica). Dicho conocimiento debe ser tal que el alumno sea capaz de ponerlo en juego para resolver problemas sin la intervención del profesor (situación a-didáctica). En este sentido, Brusseau plantea su teoría como una estrategia de modelización de los procesos de enseñanza-apredizaje, y con esto establece un conjunto de reglas que, al ser ejecutadas, determinarán el conocimiento a ser adquirido por el alumno.

Al modificar alguna condición en una determinada situación se complejizará o simplificará la tarea matemática, a voluntad del docente. A partir de este control se podrá dominar las diferentes variables didácticas en juego. Con esto, el alumno deberá modificar sus estrategias y conocimiento para resolver el problema.

Según Bruseeau (1995), el docente puede modificar la situación de forma que permita al alumno entender y resolver el problema con sus conocimientos previos, y posteriormente enfrentar al alumno a la construcción de un nuevo conocimiento matemático, modificando ciertas variables didácticas para que esto ocurra. Entonces, modificando adecuadamente estas variables, permetirá al docente, a partir de una o varias situaciones, correspondiente a uno o varios conocimientos, desarrollar una secuencia didáctica para la construcción de conocimiento.

Esta teoría plantea una estructura de etapas, basadas en un conjunto de situaciones didácticas, donde cada una debería terminar con una situación a-didáctica, como proceso de validación del conocimiento previamente construido por el alumno.

3.1.1. Situaciones Didácticas

Las situaciones didácticas planteadas por Brousseau son:

Situación de Acción: Los alumnos trabajan de manera activa interactuando con el medio didáctico planteado, para resolver una determinada tarea matemática y con esto adquirir cierto conocimiento. Esta situación debe realizarse sin la intervención del docente.

Situación de Formulación: Se basa en un trabajo grupal, donde un grupo de estudiantes es enfrentado a un determinado problema. En esta situación se intercambian experiencias en torno al aprendizaje. Por este motivo, es importante que exista un adecuado control de las ideas y la forma en que estas se comunican, forzando la interacción y construcción de conocimiento de todos los miembros del grupo.

Situación de Validación: Luego de la interacción individual o grupal con el medio didáctico, el trabajo es validado en conjunto con el docente, quien pone en tela de juicio el trabajo realizado para verificar la correctitud de este. Analizar las soluciones, estrategias y conocimientos puestos en juego al resolver la tarea, es un proceso fundamental. Con esto, se validan las respuestas y se da lugar a la fase de institucionalización, a través de un proceso de catalización de conocimiento.

Situación de Institucionalización: Aquí los estudiantes ya han construido su conocimiento, y por tanto este constituye un verdadero saber. Aquí se formalizan las nociones matemáticas, estrategias y técnicas utilizadas.

3.1.2. Efectos Negativos en las Situaciones Didácticas

Brousseau identifica algunos efectos que pueden impedir o interrumpir la construcción de conocimiento cuando interactúan las diferentes tipos de situaciones didácticas. Básicamente, son actitudes que generan efectos negativos en los procesos de enseñanza-aprendizaje:

- **Efecto Topaze:** Ocurre cuando los alumnos resuelven un problema, pero no por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. Frente a dificultades que presenta un grupo de alumnos, el profesor indica cuál es el camino que los lleva a la solución. Con esto, no ocurre la construcción de conocimiento en el alumno.

- **Efecto Jourdain:** Ocurre cuando el profesor, frente a una respuesta incorrecta del alumno, le indica la respuesta correcta para no frustrarlo.

- **Deslizamiento Meta-Cognitivo:** Ocurre cuando el profesor toma una heurística en la resolución de un problema y la considera como el objetivo de estudio, simplificando el verdadero objeto de estudio. Puede llegar a tal punto que se pierde la noción matemática a institucionalizar.

- **Abuso de la Analogía:** El uso de la analogía siempre es importante, pero no es adecuado reemplazar el estudio concreto de una determinada noción por un caso de estudio análogo.

3.2. Transposición Didáctica: Saber Sabio, Saber a Enseñar y Saber Enseñado

La definición de transposición didáctica, establecida por Yves Chevallard, nace de la concepción de que todo sistema didáctico se basa en una triada formada por el profesor, el estudiante y el conocimiento, donde aquella fracción del conocimiento denominado "Saber a Enseñar" sufre una serie de adaptaciones para ser apto como "Objeto de Enseñanza".

Generalmente se estudia al docente, al alumno, pero pocas veces se analiza el saber a enseñar. De esta forma, el proceso de transformación del objeto de Saber a Enseñar en un Objeto de Enseñanza, Chevallard lo llama Transposición Didáctica.

El propósito fundamental de la Transposición Didáctica es movilizar el conocimiento de una comunidad científica hacia otra escolar, pasando por distintos modos de conocimiento:

- **Saber Sabio**: Este es el saber generado por la comunidad de matemáticos profesionales, que se dedican a la investigación matemática. Desarrollado principalmente en centros de investigación o Universidades. Este saber es especializado y no está necesariamente vinculado con el saber requerido para la enseñanza escolar, profesional o universitaria de pregrado. Por otra parte, hay un estrecho vínculo entre este saber con áreas de interés, tales como: tecnológica, empresarial, económica, etc.

- **Saber a Enseñar**: El saber científico, en general, no es posible de ser enseñado de la forma en que se encuentra. Por esta razón, debe ser transformado en un Saber a Enseñar, presente en el currículum escolar o universitario. Este saber se debe presentar de una forma comprensible por el estudiante, de una manera didáctica y con los recursos pedagógicos necesarios par facilitar el aprendizaje. Desde aquí emerge una teoría didáctica que se preocupa del trabajo docente.

- **Saber Enseñado**: El Saber a Enseñar, mediado por los docentes e instituciones de educación, se transforma en el Saber Enseñado. De esta manera, el proceso de enseñanza del Saber a Enseñar, termina convirtiendo este saber en el verdadero objeto del Saber Enseñado. Esto es, el saber registrado en el aula por el docente, el cual no necesariamente coincide con el Saber a Enseñar presente en el currículum. Este saber se sitúa en los sistemas didácticos, correspondientes a la relación entre el saber, el profesor y el estudiante.

De lo anterior se puede establecer el siguiente esquema de transposiciones didácticas:

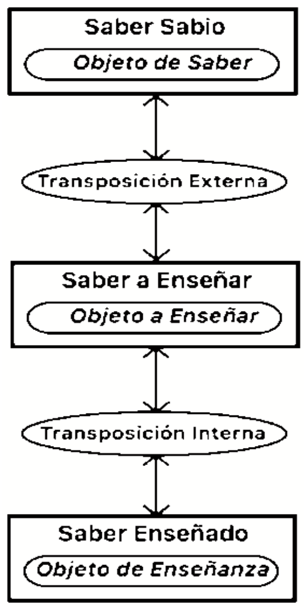


Figura 3.1: Transposición Didáctica

3.2.1. La Mediación

En los procesos de transposición didáctica se distinguen al menos dos tipos: El primero ocurre entre el conocimiento científico y el conocimiento a enseñar, mientras que el segundo tipo de transposición, ocurre entre el conocimiento a enseñar y aquel realmente enseñado.

El conocimiento erudito es transformado en conocimiento a enseñar por los expertos curriculares, quienes definen los contenidos del Saber a Enseñar en el sistema Educativo.

Por otra parte, los autores de textos y recursos didácticos, utilizan el currículum para seleccionar el conocimiento que consideran necesario para la escritura de sus libros y recursos, reestructurando el Saber a Enseñar. El profesor selecciona el conocimiento a enseñar a partir del currículum, su propio conocimienoto y el presente en los textos de enseñanza.

Finalmente, desde el conocimiento a enseñar al conocimiento efectivamente enseñado, también es transformado de forma natural por las diversas complejidades del acto de enseñanza.

Con esto, se formalizan los siguientes tipos de transposición:

- **Transposición Externa**: Transformación entre el Saber Sabio al Saber a Enseñar. El Saber Sabio se transforma, modificando su lenguaje, profundidad, contexto, se eliminan procedimientos fallidos, fracasos, historia en su proceso de construcción o descubrimiento. Esta transformación ocurre hasta que este saber llega a los programas curriculares y se onvierte en Saber a Enseñar.

- **Transposición Interna**: Esta es la transformación que ocurre cuando el profesor toma el documento curricular oficial, y lo lleva al aula, generando sus lecciones y materiales pedagógicos, momento en el cual vuelve a realizar una nueva transformación, hasta que se logra establecer aquel saber efectivamente enseñado, el Saber Enseñado.

Es probable que al terminar ambos procesos de transposición, el Saber Enseñado esté muy distante del Saber Sabio. Sin embargo, la transposición didáctica se preocupa de cautelar este hecho, evidenciando la brecha que existe y acercando ambos tipos de saberes. De esto último trata la des-transposición didáctica, es decir, de tratar de acercar el Saber Enseñado al Saber Sabio.

3.2.2. Los Sistemas Didácticos

Entenderemos por sistema didáctico a la relación ternaria que existe entre el docente, el estudiante y el conocimiento, siendo este último elemento la componente fundamental de esta relación. En este contexto, la transposición Didáctica es un sistema didáctico y al conjunto de sistemas didácticos Chevallard los denomina Sistema de Enseñanza. Estos sistemas de enseñanza pueden envejecer en los siguientes sentidos:

- **Envejecimiento Biológico**: Consiste en el distanciamiento entre los sistemas de enseñanza con el avance científico. Esta brecha ocurre porque el ritmo de avance del Saber Sabio es mayor que el del Saber a Enseñar, y mayor aún que el de Saber Enseñado.

  Envejecimiento Moral: Consiste en el distanciamiento entre el conocimiento y los cambios sociales. En general se ha trivializado el saber, y por consiguiente se ha minimizado el rol del docente.

Dado que el Saber Enseñado requiere de la aprobación de la comunidad científica, y de los padres que delegan la responsabilidad de instrucción en las instituciones de educación, necesariamente el Saber a Enseñar se altera. De esta forma, al conjunto de fuentes de influencia que actúan sobre la selección del conocimiento (científicos, profesores, textos pedagógicos, instituciones de educación, sociedad, etc.), que inciden en el currículum y en el Saber a Enseñar, definen el comportamiento del sistema didáctico. Esto es lo denomina Chevallard como *noosfera*.

3.2.3. El Docente y la Transposición Didáctica

De acuerdo a lo señalado por Chevallard, el docente no tiene mayor conciencia de la transposición didáctica interna, sino que implementa el currículum de acuerdo a los lineaminetos institucionales, a su conocimiento, planificación, recursos pedagógicos, entre otros, y en este acto no logra asumir la responsabilidad epistemológica que tiene sobre su quehacer pedagógico.

Para Chevallard, el hecho de que el docente transparente la intervención realizada sobre el Saber a Enseñar, supone que este tendrá la sensación de haber hecho algo incorrecto. Es por este motivo que el autor subraya el hecho de que el docente reconozca y cautele los procesos de transposición didáctica necesarios para lograr una satisfactoria cercanía entre Saber Enseñado y el Saber a Enseñar.

3.2.4. Vigilancia Epistemológica

Debido a las condiciones detalladas anteriormente, la transposición didáctica muchas veces produce un enorme distanciamiento entre los distintos saberes. ya sea por los procesos de transposición externa o interna, el envejecimiento biológico o social, además de las influencias que constituyen la noosfera. Por esta razón, Chevallard sugiere adoptar una actitud crítica frente al proceso de transposición didáctica, lo cual lo llama: Vigilancia Epistemológica.

Esto se trata de mantener una atenta mirada sobre los saberes en cuestión y la brecha que se produce entre estos, especialmente entre el Saber a Enseñar y el Saber Enseñado. Para esto, es necesario cuestionar permanentemente los objetivos de enseñanza y su proyección, es decir mantener una duda sistemática en torno al objeto de enseñanza.

En este sentido, hay que detectar y analizar las diferencias que se presentan entre los saberes, encontrar sus causas y posibles efectos, cuestionando permanentemente la evidencia y tomando distancia con el objeto de enseñanza.

La Transposición Didáctica puede considerarse como una herramienta que permite ejercer la vigilancia epistemológica, tomar distancia, analizar la historia del saber y cómo se originó en su génesis. La Transposición Didáctica permite ejercer la duda sistemática, a través de una mirada cautelosa sobre los Saberes en cuestión, preguntando en cada momento ¿El objeto de enseñanza, es el objeto que se proyectaba originalmente o no tiene nada que ver?.

La Transposición Didáctica nos permitirá enseñar saberes que muchas veces el profesor se abstiene de enseñar, ya que no realiza una transposición didáctica satisfactoria. Por ejemplo, en las escuelas se podrían enseñar geometrías no Euclidianas.

En consecuencia, tanto para el didacta como para el profesor, la toma de conciencia de la existencia de estos procesos le permite ejercer la deseada vigilancia epistemológica, de acuerdo a lo señalado por Chevallard “recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión las ideas simples, desprenderse de la familiaridad engañosa de su objeto de estudio”.

3.3. Ingeniería Didáctica: Una Metodología para la Investigación Didáctica

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de 4 etapas, las cuales son:

- **Análisis Preliminares**
- **Concepción y Análisis a *priori* de las situaciones didácticas**
- **Experimentación**
- **Análisis a *posteriori* y evaluación**

3.3.1. Fase 1: Análisis Preliminar

Para implementar correctamente la metodología de ingeniería didáctica, los análisis preliminares son fundamentales. Aquí se estudia el marco teórico y didáctico general, estableciendo los conocimientos relacionados con la situación didáctica de estudio. Los análisis preliminares más usuales (Artigue,1998 p.38) son los siguientes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza o situación didáctica.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

Esto se debe realizar teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación (tanto epistemológico como cognitivo y didáctico). De acuerdo a lo señalado por Artigue, estos análisis generalmente no se incluyen en las investigaciones. Sin embargo estos análisis constituyen los pilares de la investigación y por consiguiente son susceptibles de ajustados de acuerdo a las necesidades de la investigación. En el caso de esta investigación se analizarán con detalle las dos primeras dimensiones declaradas. Con esto intentaremos establecer cierta significancia didáctica a posteriori.

3.3.2. Fase 2: Concepción y Análisis a Priori

Aquí se establecen las variables de acción que no tengan restricciones directas por el sistema educativo. Estas deben ser pertinentes al problema o situación didáctica.

El objetivo fundamental del análisis a priori radica en determinar si las variables de estudio permiten controlar o predecir el comportamiento posterior de los estudiantes. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis, que deben ser cuidadosa y exhaustivamente descritas, con el fin de lograr un efecto predictor. Con esto, en la fase 4 de confrontación, directa e indirectamente se establece una suerte de validación de esta elección. En este sentido, este análisis tiene una parte descriptiva y otra predictiva:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

- Se preven los campos de comportamiento posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje

- Se establecen preguntas de control, como por ejemplo: ¿qué dificultades presentó el estudiante para resolver la tarea?, ¿es posible explicitar la tarea en otros sistemas de representación o dominio?, ¿qué conocimientos están en juego para resolver la tarea (antes y después)?, ¿que control tiene el alumno sobre su acción?, ¿hay etapas distinguibles en la tarea, cuáles?, etc.

En el análisis a priori, el estudiante es tomado en cuenta en ambos niveles, descriptivo y predictivo, mientras que el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo. Así, el estudiante es el actor principal del sistema y el profesor está poco presente en el análisis a priori, excepto durante las situaciones de devolución y de institucionalización. Artigue menciona que, de alguna forma, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte el papel del profesor, pero que no se puede negar que hasta el momento, el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica.

3.3.3. Fase 3: Experimentación

Esta fase se inicia cuando el docente o investigador se pone en contacto con la población de estudio.Aquí se suponen las siguientes condiciones:

- Se manifiestan los objetivos y las condiciones de experimentación a los alumnos objeto de investigación;
- Contrato didáctico;
- La aplicación de instrumentos;
- Registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

3.3.4. Fase 4: Análisis a Posteriori y Evaluación

Esta fase se basa con el conjunto de datos recolectados, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de otras metodologías: cuestionarios, entrevistas individuales o en grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc. La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori.

Capítulo 4

Evaluación de la Resolución Problemas

4.1. Evaluación de la Competencia Matemática

Para profundizar con respecto a la evaluación de la habilidad de resolución de problemas, es necesario ampliar la mirada y comprender con cierto nivel de profundidad la posibilidad de evaluar la competencia matemática en general. Para esto, a continuación se expone una conceptualización de la competencia matemática según lo estipulado en el programa PISA de la OCDE.

Se describe un modelo de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de la Resolución de Problemas, respondiendo a las siguientes preguntas fundamentales: ¿para qué evaluar?, ¿qué evaluar? y ¿cómo evaluar?. Con esto se establece una propuesta general basada en las diferentes dimensiones a observar en la evaluación de la Resolución de Problemas: Cognitivo-lingüística, Matemática, Socio-afectiva y Meta-cognitiva. El foco está en las dos primeras dimensiones.

El programa PISA de la OCDE estipula que "el concepto general de competencia matemática" se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (OCDE). En este contexto, se estipulan tres tipos de procesos (en cada uno de los cuales los estudiantes "reconozcan y extraigan las matemáticas contenidas en la situación"):

- De **reproducción**: cálculos con operaciones simples para resolver problemas del entorno inmediato.
- De **conexión**: involucran ideas y procedimientos matemáticos en la resolución de problemas más complejos, involucrando la elaboración de modelos.
- De **reflexión**: implican la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación a la matemática original.

En base a esto, se explicitan seis niveles de competencias en matemáticas:

- **Nivel 6**: Los alumnos son capaces de demostrar un pensamiento y un razonamiento matemático, resolviendo problemas generales y abstractos, utilizando información basada en su análisis e investigación y modelando ciertas situaciones que lo ameriten. Pueden comunicar con precisión sus acciones y reflexiones.
- **Nivel 5**: Los alumnos son capaces de desarrollar modelos matemáticos para ciertas situaciones problemáticas, utilizando estrategias, representaciones y caracterizaciones simbólicas y formales.
- **Nivel 4**: Los alumnos son capaces de trabajar con un modelo, no así de desarrollarlo. Pueden seleccionar y aplicar estrategias ya conocidas y estándares, pudiendo comunicar sus resultados sin problemas.
- **Nivel 3**: Los alumnos son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, seleccionando y aplicando estrategias simples en la resolución de problemas y reportando su trabajo mediante comunicaciones breves.
- **Nivel 2**: Reconocen e interpretan situaciones de manera directa, extraen información y hacen uso de solo un tipo de representación.

- **Nivel 1**: Los alumnos son capaces de contestar preguntas que estén referidas a contextos familiares y muy bien definidas. Identifican información y pueden aplicar procedimientos rutinarios sencillos.

- **Por debajo del nivel 1**: Los alumnos no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

De acuerdo a esto, para un nivel universitario es apropiado considerar hasta el quinto nivel.

4.1.1. La Competencia Matemática

La comprensión de las matemáticas es fundamental no solo para el buen desempeño de una carrera técnica o científica, sino que también en la preparación de los ciudadanos insertos en la sociedad moderna. Contextos profesionales y la vida ciudadana informada requieren un cierto grado de comprensión de las matemáticas, razonamiento matemático y herramientas matemáticas. Esto permite al estudiante comprender la realidad, los problemas específicos de su disciplina y aquellos propios de su quehacer profesional, y posteriormente resolverlos.

Pero, ¿qué significa ser matemáticamente competente?. Para responder a esta pregunta, es necesario definir la competencia matemática. En este contexto, y siguiendo el marco de evaluación de la prueba PISA, la competencia matemática se puede definir como: la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Esto incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Todo esto ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Comunicar: Argumentar y justificar

La competencia matemática requiere una correcta comunicación. No solo se debe encontrar la solución a un problema, sino que también se debe comunicar dicha solución, argumentando para convencer a otro y a uno mismo sobre la correctitud de esta. Se deben dar justificaciones matemáticas del porqué algunos procedimientos, algoritmos o estrategias funcionan y por qué otros no. Para esto, se comienza con la lectura, decodificación e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos que le permiten al estudiante formar un modelo mental de la situación, paso previo e importante para la comprensión, clarificación y formulación de un problema.

Posteriormente, una vez que se ha encontrado una o varias soluciones, el estudiante que resuelve el problema tiene que mostrar a otros sus resultados y justificar que sus soluciones efectivamente son correctas.

Estas capacidades, de argumentar y justificar, implican una reflexión profunda acerca de la validez de los resultados y de búsqueda de la mejor manera de comunicar las ideas.

Modelizar

Modelizar en matemática es transformar un problema definido en el mundo real (o en una teoría científica o matemática) en una forma estrictamente matemática (que puede incluir la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones y/o formulación de un modelo) o la interpretación o valoración de un resultado o modelo matemático con relación al problema original. Esta interpretación o valorización permite hacer ajustes al modelo de forma tal que represente mejor la situación original.

Resolver problemas

La competencia matemática suele requerir el diseño de estrategias para resolver problemas de forma matemática. Esto implica un conjunto de procesos de análisis fundamentales que guían al estudiante para que reconozca, formule y resuelva problemas eficazmente. Esta destreza se caracteriza por la selección o diseño de un plan o estrategia cuyo fin es utilizar las matemáticas para resolver los problemas derivados de una tarea o contexto, además de guiar su implementación. Las estrategias surgen en el individuo a medida que es expuesto a la resolución de problemas. A medida que se vuelve mejor resolutor de problemas, puede ir comparando diferentes estrategias dependiendo del contexto e incluso puede decidir para qué tipo de problemas su estrategia se puede utilizar con o sin modificaciones.

Representar

Con mucha frecuencia, las representaciones de objetos y situaciones matemáticas son necesarias para resolver problemas. Esto puede suponer la selección, interpretación, traducción y utilización de distintas representaciones para reflejar una situación, interactuar con un problema o presentar el propio trabajo. Las representaciones a las que se hace referencia incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.

4.1.2. Evaluación del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje a Través de la Resolución de Problemas

¿Para qué evaluar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas basadas en la resolución de problemas?

La evaluación, regula que el sistema de enseñanza aprendizaje se mantenga dentro de una trayectoria previamente definida, introduciendo las correcciones necesarias para evitar las posibles desviaciones, y en un sentido último, convertir en auto regulable dicho proceso (Pérez, 2006). Para lograr esta finalidad, la evaluación debe estar dirigida tanto al proceso de aprendizaje como a sus resultados, buscando sincronía entre las actividades de instrucción y aquellas de evaluación (Baquero, 1997).

En este sentido, la evaluación del aprendizaje tiene como propósito el monitoreo del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el cual el profesor y los estudiantes concientizan el grado de desarrollo que han alcanzado y qué les falta aún para la consecución de los objetivos de aprendizaje (Pérez, 2006).

Por otro lado, cabe señalar que la flexibilidad y la capacidad de adaptación de la evaluación a las características del proceso de enseñanza-aprendizaje, y en particular en la enseñanza de las matemáticas basadas en la resolución de problemas, son fundamentales, lo cual implica que no existe a priori una evaluación mejor que otra sino que su calidad dependerá del grupo, del profesor, del momento y circunstancia en la que se desarrolla este proceso.

Considerando lo anterior, toda la evaluación debiese seguir los siguientes principios:

- Evaluación del proceso de logro del aprendizaje
- Evaluación de los factores personales y grupales involucrados en el proceso, no solo del aprendizaje específico
- Consideración de que el progreso del estudiante puede cambiar de tendencia.
- Evaluación flexible-estratégica, que le dé al estudiante la posibilidad de mejorar
- Evaluación en múltiples momentos del proceso de aprendizaje
- Evaluación por más de un actor (por ejemplo: profesor, estudiante, pares).

¿Qué evaluar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas basada en la resolución de problemas?

Considerando que la competencia matemática incluye capacidades para analizar, razonar y comunicar, cuando los estudiantes enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de contextos y situaciones, se ha determinado que una adecuada evaluación de la enseñanza-aprendizaje a través de resolución de problemas debiese contemplar al menos 3 de 4 dimensiones en las que el resolver problemas pensando con ideas matemáticas tiene impacto:

- **Dimensión 1: Cognitivo-Lingüística**

  Esta dimensión abarca competencias cognitivas que también han sido llamadas "procesos" involucrados en la resolución de problemas. Entre ellas se encuentra el pensar y razonar matemáticamente, comunicar convincentemente las estrategias y formas de enfrentar y resolver un problema a otros, justificar mediante razones y argumentos por qué se ha enfrentado un problema de determinada manera, sus causas y consecuencias, y utilizar el lenguaje simbólico propio de las matemáticas de manera fluida y rigurosa (Rico, 2006).

- **Dimensión 2: Matemática**

  En esta dimensión, si bien también implica procesos cognitivos, estos están estrechamente relacionados con tareas matemáticas, tales como modelizar en la resolución de problemas, generalizar este tipo de resolución de problemas, sus resultados y estrategias, y por último, operar con distintos sistemas de representación.

- **Dimensión 3: Socio-Afectiva**

  Esta dimensión considera las variables sociales y afectivas que se pueden ver afectadas por la enseñanza-aprendizaje exitosas basadas en la resolución de problemas. Un componente es la ansiedad hacia el aprendizaje de las matemáticas, la cual puede bloquear el razonamiento lógico, inhibir la realización de tareas y provocar el fracaso a pesar de la capacidad intelectual de las personas. Por este motivo, es deseable conocer los niveles de ansiedad frente a tareas matemáticas que muestran los estudiantes al ingresar a la asignatura y, si éstos son altos, poder reducirlos durante la asignatura y medir este cambio una vez finalizado.

Otro componente importante es la autoeficacia o la creencia personal de poder llevar a cabo con éxito una determinada tarea, la cual se construye desde las actitudes o creencias hacia la matemática y su estudio, tanto del docente como del estudiante. Por último, se encuentra la dimensión social en el enfrentamiento y resolución de problemas matemáticos, pudiendo encontrarse una mayor valoración de los pares en los procesos de aprendizaje.

- **Dimensión 4: Meta-Cognitiva**

  Esta dimensión recoge elementos en los que la resolución de problemas afecta positivamente al estudiante. Entre ellos destaca su autonomía e iniciativa personal, entendida como la capacidad para auto-dirigir su conducta en función de la toma de decisiones propia y criteriosa frente a una tarea matemática específica. Para regular su propio aprendizaje (Monereo, 2001) y la conciencia de las propias necesidades de aprendizaje, es decir, la habilidad personal para identificar qué es necesario saber para desarrollar una tarea, además de cómo aprender mejor, más fácil o más eficientemente dichos saberes.

Estas cuatro dimensiones se encuentran interrelacionadas, por lo cual es posible que el avance en una implique un impacto en las demás. Por ejemplo, cuando un estudiante aprende a justificar la estrategia que usó para resolver un problema (dimensión cognitivo-lingüística), tomará conciencia de los elementos que necesita tener muy claros para su adecuada resolución (dimensión Meta-cognitiva).

¿Cómo evaluar el aprendizaje basado en la resolución de problemas?

Para evaluar los procesos de las dimensiones 1 y 2, se sugiere el uso de la siguiente rúbrica, la cual se puede usar tanto durante el proceso de enseñanza-aprendizaje como al final de este y considerando los principios orientadores presentados anteriormente, tanto por el docente (respondiendo a ¿qué es capaz de hacer el estudiante en este momento?) como por el mismo estudiante o sus pares. Esto le permitirá al docente ir constatando el avance en el logro de los niveles esperados en cada dimensión a evaluar.

Dimensiones	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 2	Nivel 1	Nivel 0
1. Argumentar y Justificar	Elaborar argumentos y justificaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión y evidencia, convenciendo a los demás.	Elaborar argumentos y explicaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión para enfrentar el problema.	Formular argumentos y explicaciones matemáticas o generales, desarrolladas a partir de una justificación previa.	Describir acciones matemáticas o generales, para enfrentar el problema y/o resultados obtenidos.	No argumenta ni justifica sus afirmaciones.
2. Modelar	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones.	Desarrollar y usar modelos en situaciones familiares.	Usar modelos explícitos en situaciones hipotéticas.	Usar modelos explícitos en situaciones concretas.	No utiliza ningún tipo de modelo.
3. Resolver Problemas	Generalizar estrategias utilizadas en la resolución de problemas a otros tipos de problemas.	Crear métodos de verificación de la estrategia de resolución problemas.	Comparar estrategias para resolver problemas.	Utilizar estrategias para resolver problemas.	No plantea ningúna estrategia para resolver el problema.
4. Representar	Vincular y relacionar diferentes sistemas de representación.	Conocer y usar diferentes sistemas de representación.	Usar un único tipo de representación.	Leer datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas.	No es capás de leer datos o información del enunciado.
5. Trabaja en Equipo	Las tareas y responsabilidades son asignadas de forma coordinada, responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.	Realiza propuestas razonables y consistentes con la distribción de tareas, muestra una actitud favorable.	Acepta que hay diferentes tareas en el trabajo grupal, sin embargo improvisa sus respuestas.	No colabora en la distribución de las tareas y hace pocos aportes al trabajo del grupo.	No colabora en la distribución de las taras ni aporta al trabajo grupal.

Figura 4.1: Rúbrica de Evaluación

Este instrumento se puede aplicar por ejemplo en la observación del trabajo en aula de los estudiantes, que en nuestro caso es grupal. Con esto se establece que:

- ¿Cuál es el tipo de evaluación?: Grupal
- ¿Quién evalúa?: El profesor
- ¿Cuándo se evalúa?: Durante y después de la aplicación de la situación didáctica

Para la dimensión 3, dado que involucra componentes principalmente personales, se sugiere que sean autoevaluados por los estudiantes y solo para información del docente y/o equipo docente. Esto permitirá al docente conocer las actitudes de sus estudiantes frente a tareas matemáticas, y con esto orientar sus actividades futuras.

Las componentes a evaluar sugeridos son las actitudes ante tareas matemáticas tales como la autoeficacia y ansiedad. La ansiedad matemática se puede subdividir en ansiedad ante la evaluación, ante la temporalidad, ante la comprensión de los problemas matemáticos, ante los números y operaciones matemáticas y ante situaciones matemáticas de la vida real. Estos son recogidos por Muñoz y Mato (2007). Las actitudes hacia las tareas matemáticas y la creencia de autoeficacia pueden ser evaluadas a través del cuestionario de actitudes hacia la matemática presentado por estos autores.

Por último, para la dimensión 4 referida a elementos meta-cognitivos, no se ha llegado a determinar un instrumento aplicado al área matemática en estudiantes de nivel superior. Sin embargo, se ha documentado la utilidad de la escala del Cuestionario de evaluación de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes universitarios (CEVEAPEU) de Gargallo, Suárez-Rodríguez y Pérez-Pérez (2009), el cual incluye estrategias motivacionales, componentes afectivos, estrategias meta-cognitivas, estrategias de control del contexto, interacción social y manejo de recursos.

Capítulo 5

La Ingeniería Didáctica en Acción

5.1. Análisis Preliminar

5.1.1. La Enseñanza Tradicional

En el contexto de la asignatura, la competencia de resolución de problemas busca que los alumnos puedan resolver situaciones problemáticas mediante estrategias que involucran la utilización de sus conocimientos matemáticos, un aspecto relevante del aprendizaje de las matemáticas, el cual implica movilizar conocimientos adquiridos en contextos de enseñanza a situaciones cotidianas o de interés para el desarrollo de su especialidad.

En el ámbito de la enseñanza, esto describe un problema importante: ¿cómo se puede desarrollar la competencia de resolución de problemas?. Específicamente, ¿cómo hacer que los estudiantes activen sus conocimientos matemáticos para elaborar estrategias que les permitan resolver problemas?.

Existen propuestas que se sustentan en la enseñanza de reglas heurísticas[1] -indicaciones y sugerencias que supuestamente permitirían resolver todo tipo de problemas matemáticos- las que centran su atención en aspectos meta-cognitivos de los estudiantes: la dificultad para planificar, regular y evaluar su propio pensamiento. Sin embargo,

[1] Cómo plantear y resolver problemas, Polya 1945.

estas propuestas presentan limitaciones importantes, dada la imposibilidad de establecer reglas generales que sirvan para cualquier tipo de problema matemático, además de generar un fenómeno didáctico en que se tiende a desplazar el estudio de la matemática por el de tratar de enseñar a "aprender a aprender", sin que quede claro cómo se puede lograr aquello. Por esta razón, nace la necesidad de introducir la resolución de problemas como una actividad fundamental en el estudio de las matemáticas.

En distintas épocas, la investigación matemática ha sido impulsada por la necesidad de resolver problemas prácticos, científicos, filosóficos, artísticos, matemáticos, etc. Sin embargo, la importancia de la resolución de problemas en el desarrollo matemático no se ve reflejada en la enseñanza, que aparece desalineada de los fundamentos de la disciplina.

El modelo tradicional de enseñanza de la matemática reduce el aprendizaje a una acumulación de conceptos y habilidades que el estudiante debe dominar por memorización y mecanización, lo que provoca que la matemática sea percibida como un cuerpo de conocimiento estático y descontextualizado de las situaciones prácticas que le podrían dar sentido y vida.

El enfoque usual de enseñanza suele restringir la actividad del estudiante a la aplicación de fórmulas y técnicas, un conocimiento matemático utilitario, que se presenta desprovisto de significados y de contexto. La resolución de problemas adopta la forma de ejercicios de aplicación, cuyo propósito es acotado. La ausencia de un verdadero trabajo matemático provoca que nuestros estudiantes no desarrollen ciertas habilidades que son fundamentales para la comprensión de la matemática.

La actividad de resolución de problemas permite generar procesos que van más allá del memorizar y aplicar fórmulas matemáticas para la obtención de un resultado. Ella promueve el uso de la intuición, los procesos de construcción, la utilización de medios de prueba, el desarrollo de la abstracción y la búsqueda de generalización, aspectos esenciales para lograr un verdadero aprendizaje matemático.

La concepción de la matemática incide en el modelo docente que orienta su práctica de enseñanza, el papel que asume para el profesor y el alumno, el tipo de tareas que propone, la forma de evaluar, los textos que utiliza, etc. También determina la función que le asigna a la resolución de problemas en el proceso de enseñanza. Para entender cuál es el lugar en el que queremos situar la resolución de problemas, es necesario distinguir primero las concepciones de la matemática que actualmente rigen la enseñanza.

Por un lado, se puede identificar un punto de vista instrumental, que considera a la matemática como una disciplina útil, una colección de hechos, reglas y habilidades, que tienen su razón de ser en las aplicaciones a las cuales pueden servir. Esta visión de la matemática establece un modelo docente denominado tecnicismo, en que enseñar matemática se asocia a enseñar técnicas algorítmicas. La actividad matemática queda restringida a la obtención de resultados, mientras que la resolución de problemas se relega al final del proceso de enseñanza, tomando la forma de "problemas de aplicación", que pretenden justificar la matemática aprendida.

La pregunta natural que surge desde este punto de vista es: ¿Es esta matemática la que necesitan nuestros alumnos?... Claramente las aplicaciones de la matemática son muy importantes en el contexto de la formación profesional, pero difícilmente se puede sostener el estudio de la matemática en un ambiente donde los conceptos matemáticos surgen en el aula descontextualizados y sin sentido, a la espera de ser aplicados -una promesa vaga que a veces se diluye en el tiempo-.

Otro punto de vista de la matemática es el formalismo puro, que relaciona la matemática con conjuntos de axiomas, definiciones y teoremas, que deben ser demostrados a través del razonamiento deductivo. En esta concepción no tiene ninguna relevancia qué son los objetos matemáticos, ni su relación con el mundo físico. Lo que importa es la forma en que ellos se relacionan. Desde esta perspectiva la matemática se concibe como "un juego formal desprovisto de significado". Esta prescindencia del mundo real fue necesaria para dotar a la disciplina de la independencia necesaria que le permitiera evolucionar.

Esta forma de concebir la matemática ha generado un modelo docente denominado teoricismo, que plantea que enseñar matemática es mostrar teorías robustas. La enseñanza se reduce a exponer saberes ya producidos y el aprendizaje a ser capaz de re-producirlos. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas tiene poca o nula cabida.

Ciertamente, la matemática formal es un aspecto a desarrollar, pero la lógica y la exposición prístina de los teoremas solo es posible porque el matemático antes de poder llegar a enunciar y demostrar, tuvo que involucrar la intuición, la invención, la experimentación y los medios de prueba, procesos que aparecen ocultos en la exposición formal de la matemática, pero que son la esencia de la creación matemática. No se puede imponer una formulación abstracta de la matemática sin hacer que el estudiante pueda vivir la experiencia de construir su propio conocimiento.

Por sobre todas las cosas, la inventiva matemática tuvo que activarse a partir de problemas (prácticos o teóricos) y el trabajo realizado por el matemático, incluido los caminos erróneos, le permitieron llegar a comprender y enunciar las propiedades matemáticas de su interés. Por otra parte, la demostración formal le permitió al matemático establecer con rigurosidad aquello que la intuición pudo reconocer a priori. La claridad y la precisión del formalismo matemático es en realidad una meta, mientras que la intuición y la construcción es el punto de partida de todo trabajo matemático.

Enseñar bajo un paradigma constructivista supone una conceptualización matemática que incluye los procesos de creación matemática y vincula el aprendizaje con la práctica de desarrollar matemáticas. Se reconoce que la resolución de problemas es la actividad que permite activar la invención matemática y que en su desarrollo el estudiante debe actuar como un matemático en ciernes, que recolecta información, descubre relaciones, plantea conjeturas, busca medios para probar sus resultados, abstrae, generaliza, etc. Una actividad con sentido que le permita apropiarse del conocimiento matemático.

El papel que los docentes otorgan a la resolución de problemas depende de lo que ellos entiendan por problema, conceptualización que está estrechamente relacionada con sus creencias respecto de lo que es enseñar y aprender matemática. Los "problemas" que aparecen en los textos de matemática, por lo general, describen situaciones rutinarias, cuya vía de solución se desprende del tratamiento previo de los contenidos y es por tanto conocida, admiten el empleo de procesos mecanizados de solución y se ajustan mejor a la noción de ejercicio que de problema.

Un ejercicio implica trabajar en casos idénticos o muy similares a otros que ya fueron resueltos, por lo que el estudiante puede acceder de forma inmediata a los métodos que le permitan resolver la situación. Los ejercicios buscan que el estudiante adquiera ciertas destrezas en el uso de las técnicas, por medio de la repetición de los métodos involucrados.

En cambio, según Kilpatrick (1985), un problema matemático "se identifica como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones"

Los problemas son situaciones no rutinarias, que pueden admitir más de una estrategia de solución y en las que no se tiene, al menos de forma inicial, los medios para resolverlos. El sujeto que se enfrenta a un problema reconoce que en la tarea no se logra visualizar un camino claro de solución, sino que es necesario explorar distintas estrategias y establecer nuevos métodos de resolución.

Mientras que para algunos estudiantes el problema se reconoce como un simple ejercicio de aplicación de alguna noción matemática, para otros -que no tienen el conocimiento específico- puede significar un problema genuino, que activa la búsqueda de estrategias aritméticas, algebraicas, etc.

Esta visión paradigmática requiere que el docente mantenga una postura de mediador, transfiriendo a los estudiantes la responsabilidad de intentar resolver los problemas. Debe involucrar a los alumnos en el problema, devolviéndoles constantemente la función de proponer y desarrollar las estrategias para su solución. Finalmente, el docente debe realizar una adecuada institucionalización del saber involucrado, partiendo desde las mismas producciones de los estudiantes, presentando generalizaciones y formalizando matemáticamente cuando sea requerido.

Se sugiere un trabajo grupal, de manera que las acciones emprendidas puedan ser discutidas y las conjeturas y estrategias formuladas sean sujeto de validación entre sus integrantes. El aprendizaje a partir de la resolución de problemas no se reduce solo al objeto matemático involucrado. Incluso, aunque algunos estudiantes no logren responder por sí mismos al problema, el estar involucrados en el proceso les permite un acercamiento y comprensión que no tendrían jamás al trabajar de forma individual.

5.1.2. Análisis Histórico Epistemológico

El matemático Inglés Brook Taylor (1685-1731), añadió a las matemáticas una nueva rama de estudio, el *cálculo de diferencias finitas*. Además, creó la integración por partes y desarrolló la conocida fórmula de expación de Taylor. Realizó grandes aportes en el cálculo, teoría de diferencias finitas, desarrollo de la serie de Taylor, etc.

Nació el 18 de agosto de 1685 en Edmonton, en el seno de una familia noble. Taylor fue educado por tutores privados hasta matricularse en el St. John's College de Cambridge. Se graduó con un Bachiller en Derecho en 1709, sin embargo, en ese momento ya había escrito algún manuscrito en matemática, aunque su primera publicación ocurrió en 1714.

En el año 1712, Taylor fue elegido miembro de la **Royal Society**. En ese mismo año, Taylor fue nombrado miembro del comité encargado de definir si Newton o Leibniz era el inventor del cálculo.

Entre los años 1714 y 1718, Taylor ocupó el cargo de secretario de la **Royal Society**. Este fue el periodo matemáticamente hablando más productivo para Taylor. En efecto, aparecieron dos libros en el año 1715, *Incrementorum Methodus directa e inversa y Perspectivas*, ambos muy importantes en la historia de las matemáticas.

Taylor abre nuevas perspectivas en las matemáticas, creando una rama que hoy se conoce como "Cálculo de Diferencias Finitas". Además, inventó la integración por partes y encontró la famosa "Expansión de Taylor". Estas nociones aparecieron en su libro *Incrementorum Methodus directa e inversa* de 1715, mencionado anteriormente. De hecho, Taylor menciona el "Teorema de Taylor" en una carta que escribió a Machin el 26 julio de 1712, donde explica cuidadosamente la idea detrás de este resultado.

Así fue, escribió Taylor, debido a un comentario que hizo Machin en un café, sobre el uso de las serie de Newton para resolver el problema de Kepler y el método de Halley para extraer raíces de ecuaciones polinómicas. De hecho, Taylor presenta dos versiones de su teorema en el libro, las que para un lector moderno parecen equivalentes, pero que para Taylor tienen motivaciones diferentes. Taylor, inicialmente derivó la versión que aparece como Proposición 11 como una generalización del método Halley, para aproximar las raíces de la ecuación de Kepler, pero descubrió que era una consecuencia de la serie de Bernoulli. Esta corresponde a la versión inspirada en el café con Machin. La otra versión, es el corolario 2 de la proposición 7, y se pensó como un método de expansión de soluciones de ecuaciones de flujo en series infinitas.

Por otra parte, no hay que pensar que Taylor fue le primero en entregar este resultado. De hecho, James Gregory, Newton, Leibniz, Bernoulli y de Moivre descubrieron alternativas al teorema de Taylor. De hecho, Gregory conocia la expansión de la función $\arctan(x)$. Sin embargo, todos estos matemáticos lograron sus descubrimientos de manera independiente, al igual que el trabajo de Taylor. La importancia del teorema de Taylor se reconoció desde el año 1772, cuando Lagrange afirmó que este resultado era el principio básico del cálculo diferencial. La noción de "'Serie de Taylor" aparentemente fue utilizada por primera vez por L'Huilier en 1786.

Existen otras importantes ideas en el libro *Methodus Incrementorum directa e inversa* de 1715, que no se reconocieron como importantes en ese momento, incluyendo soluciones singulares a ecuaciones diferenciales, una fórmula de cambio de variables y una forma de relacionar la derivada de una función con la derivada de la función inversa. Adicionalmente, se incluye una discusión sobre cuerdas vibrantes, un interés que proviene del temprano amor de Taylor por la música.

Al estudiar la vida y obra de Brook Taylor, se puede apreciar que su contribución al desarrollo de las matemáticas fue sustancialmente mayor de lo que el nombre de su teorema sugiere. Su trabajo fue conciso y complejo. La sorprendente cantidad de conceptos principales que mencionó, desarrollados de manera inicial, pero fallidos en su profundización posterior, lleva a lamentar que la salud, u otros factores imposibles de evaluar, restringieron su producción matemática, al morir a los 46 años de edad.

Retomando el tema central, Taylor, quien fuera discípulo de Newton, estuvo interesado en el problema del desarrollo de funciones utilizando funciones más simples. En su época era conocido el resultado que señala que para un un polinomio $p(x)$ de grado n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n,$$

se puede representar como:

$$p(a+h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots b_n h^n$$

para cualquier valor de $a, h \in \mathbb{R}$, y los coeficientes c_k, para $0 \leq k \leq n$, están dados por la expresión:

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

para $1 \leq k \leq n$ y $c_0 = f(a)$.

En este contexto, Taylor, utilizando ideas propias del "Cálculo de Diferencias Finitas" y generalizando el resultado anterior, descubrió su célebre fórmula:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + h^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots,$$

la que se satisface bajo ciertas condiciones sobre la función f.

En efecto, hay fundadas razones para pensar que Taylor llegó a su fórmula de la siguiente forma:

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, una función y sea r un real positivo fijo. Taylor define el siguiente operador:

$$\triangle f(x)=f(x+r)-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

$$\triangle^2 f(x)=\triangle(\triangle f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

y así suscesivamente.

Realizando la sustitución de x por $x+nr$, para $n\in\mathbb{N}$, entonces $f(x)$ se convierte en $f(x+nr)$, obteniendo la siguiente fórmula, conocida como la "Fórmula de Interpolación de Newton":

$$f(x+nr)=f(x)+\frac{n}{1}\triangle f(x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\triangle^2 f(x)+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\triangle^n f(x)$$

donde los coeficientes de $f(x)$, $\triangle f(x)$, $\triangle^2 f(x)$, ...,tienen la misma forma que los coeficientes del desarrollo del binomio de $(a+b)^n$.

Luego, según Taylor, si h es un real positivo fijo, y considerando n y r tal que $nr=h$, entonces r tiende a cero cuando n tiende a infinto y viceversa. Con esto, podemos escribir:

$$f(x+nr)=f(x)+\frac{nr}{1}\frac{\triangle f(x)}{r}+\frac{n(n-1)r^2}{1\cdot 2}\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots 1\cdot r^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\frac{\triangle^n f(x)}{r^n}$$

Luego, según Taylor, si r tiende a cero y n al infinito, se cumple que:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2\frac{f''(x)}{2!}+h^3\frac{f'''(x)}{3!}+\ldots$$

Se puede decir informalmente, que Taylor obtuvo su fórmula a partir de la fórmula de interpolación de Newton, para un número "infinito" de pasos y trabajando con infinitesimales.

Lo anterior motiva la siguiente definición: Dada una función f, n veces derivable en un punto $a\in\mathbb{R}$, se define la función polinómica $T_n(f,a)$, como el siguiente polinomio de grado n:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

A partir del descubrimiento de la fórmula de Taylor, se ha proporcionado una poderosa herramienta para la resolución de problemas de análisis matemático, dentro de los cuales podemos nombrar:

- Análisis del comportamiento local de una función, a partir de funciones polinómicas.
- Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados.
- Estimación de Integrales definidas.
- Estimación de números irracionales, con error acotado.
- Análisis de extremos de una función.

Es importante señalar que el desarrollo de $Taylor$ fue motivado por diversos problemas no resueltos en esa época, directamente relacionados con el nacimiento del Cálculo Diferencial e Integral, de gran importancia y aplicación para la Ciencia. Algunos de estos son:

- Problemas de Optimización.
- Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.
- Calcular la longitud de ciertas curvas.
- Calcular el área de regiones limitadas por ciertas curvas.
- Aproximación de funciones trascendentales.
- Calculo de límites indeterminados.

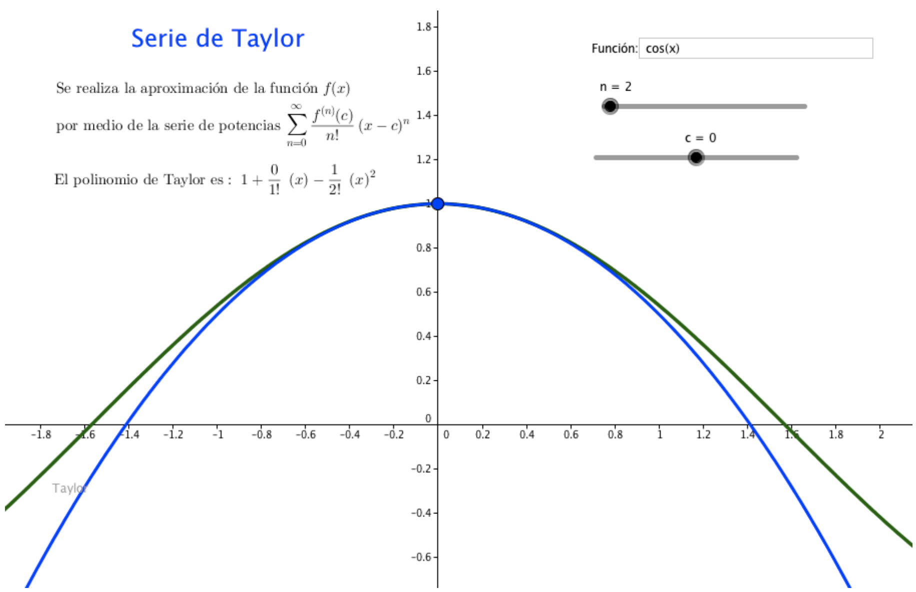
El desarrollo de Taylor ha resultado ser una pieza fundamental en el nacimiento del cálculo, además de resolver ciertos problemas específicos, ha sido muy útil para los desarrollos posteriores del cálculo diferencial e integral. Además, ha abierto una nueva arista a través del Cálculo de Diferencias Finitas.

5.2. Concepción y Análisis a Priori

En esta sección vamos a describir y justificar la selección de las actividades que componen la situación didáctica inicial. Adicionalmente se realizará un completo análisis sobre las posibles preguntas que pueden emerger al momento de aplicar la situación, junto con sus posibles respuestas, posibles estrategias presentes en la solución del problema y las eventuales dificultades en el proceso.

5.2.1. Actividad 1

Si reemplazamos $\cos(x)$ *por* $1 - \frac{x^2}{2}$*, con* $|x| < 0,5$*, ¿Qué estimación se puede dar del error?. Observa el siguiente gráfico y las indicaciones a continuación:*



- *Escriba el desarrollo en serie de Taylor de la función* $\cos(x)$*, en torno al cero.*

- *Acote la siguiente expresión:* $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$

Análisis de la Actividad 1: En esta actividad se presenta un problema en el cual se espera que el estudiante utilice el polinomio $1 - \frac{x^2}{2}$ como aproximación de la función $\cos(x)$, y que a partir de esta instrumentalización establezca una estimación del error. En una segunda parte, se entregan indicaciones necesarias para que pueda establecer una estimación del error más precisa y debidamente justificada.

Por otra parte, el gráfico muestra el comportamiento geométrico de la función $\cos(x)$ versus el comportamiento geométrico del polinomio $1 - \frac{x^2}{2}$, de manera que el estudiante pueda verificar, al menos visualmente, que en una vecindad del cero ambas funciones tienen un comportamiento muy similar. Esto intuitivamente refuerza el hecho que la aproximación polinomial propuesta parece ser razonable.

Pregunta 1. *¿Cuál es la razón por la cual cambiamos* $\cos(x)$ *por* $1 - \frac{x^2}{2}$*?*

- **Respuestas:** Porque el polinomio $1-\frac{x^2}{2}$, corresponde al polinomio de segundo grado del desarrollo de Taylor de la función $\cos(x)$.
- **Estrategias:** Calcular los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función $\cos(x)$, y verificar que el polinomio de segundo grado de este desarrollo coincide con el polinomio anterior.
- **Dificultades:** No conocer la expresión algebraica que permite encontrar los términos del desarrollo de Taylor de la función $\cos(x)$, o bien, poseer algún obstaculo analítico-algebraico que impida calcular correctamente el desarrollo, como por ejemplo: no entender el significado del símbolo “$f^{(r)}$”.

Pregunta 2. *¿Es significativo el hecho que* $|x| < 0,5$*?*

- **Respuestas:** Sí, ya que el desarrollo de Taylor en este caso, es válido sólo para una vecindad del cero, por tanto mientras más cerca del cero se realice el análisis mejor será la aproximación obtenida. En virtud del gráfico del enunciado y de su limitada capacidad de representación, debido a que es una imagen impresa, el alumno puede rápidamente convencerse de que, para $-0,5 < x < 0,5$, ambas funciones “coinciden”.

- **Estrategias:** Enunciar las hipótesis del teorema de Taylor, o bien realizar un análisis comparativo empírico con diferentes valores de x para lograr convencerse.
- **Dificultades:** Entender las hipótesis del teorema de Taylor, donde se señala que todas las afirmaciones son válidas para una vecindad del punto en cuestión, cero en este caso. Cometer errores en la verificación empírica que pueden conducir a desorientaciones innecesarias en el estudiante. Si el alumno, se convence que ambas funciones son coincidentes, difícilmente logrará desligarse de este hecho y confiará en la significancia del hecho que $|x| < 0,5$, sin mayores cuestionamientos.

Pregunta 3. *¿Por qué se debe utilizar el desarrollo de Taylor de* $\cos(x)$*?*

- **Respuestas:** Una posible respuesta es que $\cos(x)$ está en el enunciado del problema, y además satisface las hipótesis del teorema de Taylor. Por otra parte, una segunda respuesta puede ser que "permite llevar una función compleja a un polinomio".
- **Estrategias:** Mencionar que la función $\cos(x)$ tiene la propiedad de ser n veces derivable con derivada continua y por tanto es posible construir su desarollo de Taylor. Además, el polinomio de Taylor es una buena aproximación de la función $\cos(x)$
- **Dificultades:** Están dadas por el conocimiento necesario para la comprensión del problema y de las hipótesis necesarias para la verificación del teorema de Taylor, como lo son los siguientes conceptos clave: función, función trigonométrica, función polinómica, derivada, n-ésima derivada, continuidad.

Pregunta 4. *¿Que significa acotar la expresión:* $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$*?*

- **Respuestas:** Al observar la segunda indicación es posible establecer que la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$ corresponde precisamente a la diferencia, en valor absoluto, que existe entre la función $\cos(x)$ y el polinomio $1 - \frac{x^2}{2}$, diferencia que se verá afectada de manera distinta para los distintos valores de $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Adicionalmente, significa buscar un valor para el cual la expresión es más pequeña.

- **Estrategias:** Aplicar la segunda indicación del problema, y argumentar más allá de la simple verificación algebraica, que acotar la expresión anterior para un polinomio cuadrático sirve para calcular el error cometido al aproximar $\cos(x)$ por dicho polinomio. De aquí se puede esperar, que la argumentación establecida por el estudiante, se pueda aplicar para adecuados polinomios de grado mayor, mejorando la aproximación. El estudiante en este punto también podría recurrir a la expresión para el error dada por: $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^{n+1}$, $0 < c < x$, y acotarlo como estrategia algebraica.
- **Dificultades:** Además de la dificultades algebraicas propias de la naturaleza del problema, está el hecho de que la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$ se debe acotar para $-0,5 < x < 0,5$, lo cual se traduce a calcular el máximo de la expresión anterior para los diferentes valores de x. Con esto, se presenta la dificultad natural de acotar la serie: $\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \ldots$, $n \geq 2$, para lo cual es necesario conocer el desarrollo de la serie de Taylor de $\cos(x)$. De manera semejante, establecer el máximo de la expresión $|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^{n+1}|$ para $0 < c < x$, requiere de la comprensión del comportamiento de $f^{(n+1)}(c)$ para $0 < c < x$.

Pregunta 5. *¿ El registro gráfico ha sido de utilidad para la comprensión del problema?*

- **Respuestas:** Del gráfico se puede apreciar cómo la función $\cos(x)$ se podría aproximar a través de la función polinómica $1 - \frac{x^2}{2}$, para valores de x entre $-0,5$ y $0,5$.
- **Estrategias:** Aquí no se aprecia con claridad una posible estrategia a priori. El estudiante puede recurrir a la fuente que originó el gráfico (software geogebra) y utilizarlo para visualizar diferentes polinomios de Taylor de $\cos(x)$, y con esto obtener otra signifi-

cancia del problema.

- **Dificultades:** La precisión del gráfico presenta una gran dificultad. El estudiante puede pensar que el polinomio $1 - \frac{x^2}{2}$ coincide con la función $\cos(x)$ para valores de x en "algún" intervalo parecido al intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Este es un problema de escala.

5.2.2. Actividad 2

Calcular el valor de e con un error menor que 10^{-6}.

Análisis de la Actividad 2: En esta actividad se presenta un problema de aproximación clásico: se pide al estudiante calcular el valor del número irracional e con cierta precisión. Si bien parece ser un problema básico, es en realidad una poderosa aplicación del polinomio de Taylor, con el cual podemos aproximarnos, con un gran nivel de precisión, al valor numérico de un número irracional.

Pregunta 1. *¿Se debe utilizar el desarrollo de Taylor en torno al cero, de la función* $y = e^x$*?*

- **Respuestas:** Una posible respuesta es que todo desarrollo de Taylor se realiza en torno al cero, y esto no es correcto. El estudiante puede argumentar que el desarrollo de Taylor se debe realizar en torno al cero ya que la función $exp(x)$ está definida en $x = 0$. O bien, que es irrelevante el punto en torno al cual se calcule el desarrollo de Taylor, mientras que se cumplan las condiciones para poder hacer dicho desarrollo. Finalmente, puede agregar al argumento anterior, que además dependiendo del punto escogido será mas o menos sencillo calcular $exp(1) = e$, y además los polinomios de Taylor se aproximarán cada vez "mejor" a la función $exp(x)$ a partir del punto de tangencia $(0, 1)$. La elección de a, el centro del desarrollo de Taylor, modificará el error cometido.
- **Estrategias:** Aquí el estudiante debe calcular el desarrollo de Taylor, observando que la función $exp(x)$ satisface las condiciones del teorema de Taylor, para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. Y que la

elección del valor de x se realiza para facilitar los cálculos, pero las variaciones del error quedarán completamente determinadas por la elección de "a".

- **Dificultades:** El estudiante puede tener serias dificultades en la comprensión del problema desde un punto de vista geométrico. Por otra parte, visto desde un registro algebraico, no se aprecia el comportamiento de los polinomios de Taylor, y por tanto el estudiante puede pasar por alto la importancia de la elección de a para efectos de la estimación del error cometido. A lo anterior se suma el hecho de que, para la estimación del error cometido, el estudiante debe conocer su forma algebraica, es decir, un uso casi axiomático de la serie de Taylor en el problema, sin meditar sobre el centro del desarrollo.

Pregunta 2. *¿El estudiante comprende la noción de que el error debe ser menor a cierto número real "pequeño" fijo?*

- **Respuestas:** El estudiante puede pensar que la magnitud del error está dado de forma explícita por el polinomio de Taylor. Profundizando la respuesta anterior, el estudiante puede establecer que el error depende de forma explícita del grado de cada polinomio de Taylor, que se puede establecer una cota para el error dado un polinomio fijo, y que esta dependerá del punto en el cuál se quiere establecer el error. Otra alternativa ocurre cuando el estudiante, a través de la representación gráfica de los diferentes polinomios de Taylor, ayudado por alguna herramienta computacional, muestre cuál es la idea detrás de la noción de error, señalando intuitivamente los elementos anteriores.

- **Estrategias:** Podemos establecer dos estrategias, una algebraica a partir del cálculo del error, en la cual el estudiante por medio del cálculo del error y su posterior acotamiento logra comprender la noción intuitiva de error. Por otra parte, el estudiante podría intentar acotar el error buscando una cota para $|e^x - T_n(e^x, 0)|$ sin recurrir a la fórmula del error.

- **Dificultades:** Permanecer sólo en un registro algebraico no permitirá al estudiante visualizar el comportamiento del polinomio de Taylor, y específicamente, cómo estos se aproximan a la función, y con esto, entender cómo cambia el error de aproximación.

Pregunta 3. *¿Es necesario recurrir al registro gráfico para mayor una comprensión del problema?*

- **Respuestas:** Sí, ya que la ausencia del registro gráfico limita la comprensión del fenómeno de aproximación a través de polinomios de Taylor. Específicamente, sin una clara visualización, el estudiante difícilmente entenderá que para polinomios de Taylor de grado cada vez mayor, estos se acercan cada vez más en una vecindad del punto sobre el cual se ha calculado el polinomio.
- **Estrategias:** Analizar gráficamente varios polinomios de Taylor de una función dada y en un punto dado, y analizar el comportamiento asintótico cerca del punto de los polinomios de Taylor.
- **Dificultades:** No tener las habilidades necesarias para utilizar alguna herramienta de visualización para activar el registro gráfico eficientemente, sin tener la necesidad de graficar manualmente, lo cual no es muy factible. No comprender la noción de aproximación ni la importancia del centro del polinomio de Taylor.

Pregunta 4. *¿La cota pre-establecida en el problema es relevante?*

- **Respuestas:** El estudiante puede creer que cuanto más pequeña es la cota, mas complejo o difícil es el problema. Esto es usual en matemática; en efecto, ocurre un fenómeno similar en el estudio de límites cuando define un determinado valor a "ϵ".
- **Estrategias:** Una estrategia para resolver este tipo de dificultad didáctica es repetir el proceso, autilizando alguna estrategia para resolver el problema original, pero con diferentes valores para el

error (ensayo y error), y posteriormente inducir una reflexión en el estudiante en torno a proceso realizado, con el fin de que este argumente matemáticamente sobre la pregunta original.

- **Dificultades:** Una posible dificultad es poseer una estrategia clara para resolver el problema original. Sin esta, se dificulta la resolución reiterada del problema para diferentes valores del error.

Pregunta 5. *¿Utilizando polinomios de Taylor es posible aproximar otros números irracionales?*

- **Respuestas:** Utilizando la misma estrategia de solución, es factible encontrar un nueva aproximación para un nuevo número irracional.
- **Estrategias:** Básicamente se puede repetir el proceso que condujo a la solución del problema origial.
- **Dificultades:** Aquí las dificultades están dadas por la naturaleza del número irracional a encontrar. Por ejemplo si queremos calcular π, existen varias formas de encontrar dicho número a través de alguna función conocida. Una posibilidad podría ser utilizar que $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$, y con esto $\pi = 4\arctan(1)$. Siguiendo la idea anterior, el estudiante estará obligado a encontrar el desarrollo de Taylor de la función $\arctan(x)$ en torno a 1, siempre y cuando se verifiquen las hipótesis necesarias.

5.2.3. Actividad 3

¿De qué orden debe ser el polinomio de Taylor en $x = 0$ para que aproxime el valor de e^x hasta un determinado orden, por ejemplo 10^{-7}, en el intervalo $[0, 1]$?

Análisis de la Actividad 3: En esta actividad, se pide al estudiante que encuentre el grado u orden del polinomio de Taylor que aproxime la función $exp(x)$, hasta una determinada magnitud fija, en el intervalo $[0, 1]$ en torno al cero. Con estas condiciones, en este problema se busca encontrar el grado del polinomio de Taylor que garantice un error menor que la cota dada.

Pregunta 1. *¿El alumno comprende la idea de aproximación hasta un determinado orden?*

- **Respuestas:** Se espera que con este problema el estudiante logre comprender que hay una directa relación entre el error cometido en la aproximación de una función por medio de un polinomio de Taylor y el grado de este.
- **Estrategias:** Un ejercicio interesante es buscar el grado del polinomio de Taylor que aproxima la función dada, para diferentes valores del error, digamos 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5} y 10^{-7}. Así la relación buscada entre el grado y el error será más evidente.
- **Dificultades:** No hay mayores dificultades, salvo repetir la estrategia de resolución varias veces, con esto las dificultades son las dificultades propias de la primera estimación, luego de esto es repetir la estrategia varias veces.

Pregunta 2. *¿Es necesario establecer otro tipo registro para mayor comprensión del problema?*

- **Respuestas:** Para este problema, posiblemente el estudiante comprenda cómo se relaciona el grado del polinomio de Taylor con la magnitud del error, sin necesidad de recurrir a un registro gráfico para mayor comprensión. Sin embargo, este siempre será de gran ayuda.
- **Estrategias:** Para prescindir del registro gráfico, la estrategia está dada por buscar el grado del polinomio de Taylor que aproxima la función dada para diferentes valores del error, digamos 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5} y 10^{-7}. Así, la relación buscada entre el grado y el error será mas evidente.
- **Dificultades:** Además de las dificultades temporales propias de repetir la estrategia varias veces, está el hecho de que el estudiante no logre comprender la idea que hay detrás de la relación que se busca que entienda. En tal caso se puede volver a reiterar sobre la estrategia o recurrir finalmente a un registro gráfico.

Pregunta 3. *¿Se justifica que la cota para el error* 10^{-7} *es relevante?*

- **Respuestas:** Probablemente la justificación del error ocurra a posteriori, dado que el estudiante requiere recorrer cierto camino previo. Dicha justificación se espera que ocurra, ya que es clave en la comprensión esperada del problema.
- **Estrategias:** Como se espera que el estudiante justifique la importancia de la elección de la cota para el error, una posible estrategia es preguntar: ¿qué ocurre si se modifica el grado del poliniomio de Taylor dejando la cota fija, ya sea aumentando o disminuyendo el grado?. Con esto, el estudiante podría argumentar que la cota para el error es muy "chica" o muy "grande", según sea el caso.
- **Dificultades:** Si el estudiante no justifica la importancia del error en el problema inicialmente, el problema podría ser bastante largo, dado que la estrategia propuesta requiere calcular diferentes polinomios de Taylor, y para cada uno, acotar el error cometido y comparar con la cota dada.

Pregunta 4. *¿Se establece la importancia de la elección del intervalo?*

- **Respuestas:** Generalmente, en estos casos los estudiantes no reparan en este tipo de restricciones, no establecen ni las condiciones necesarias para utilizar la maquinaria teórica de la que disponen ni verifican las hipótesis de teoremas involucrados. Tampoco establecen argumentos parciales.
- **Estrategias:** Una buena estrategia es recurrir al registro gráfico y mostrar que la aproximación polinomial, por polinomios de Taylor, es un fenómeno local y acotado a un intervalo "pequeño", y con esto relevar la importancia de definir un intervalo.
- **Dificultades:** Para comprender la importancia del intervalo sobre el cual se está trabajando, es necesario que el estudiante haya logrado comprender que la aproximación por polinomios de Tay-

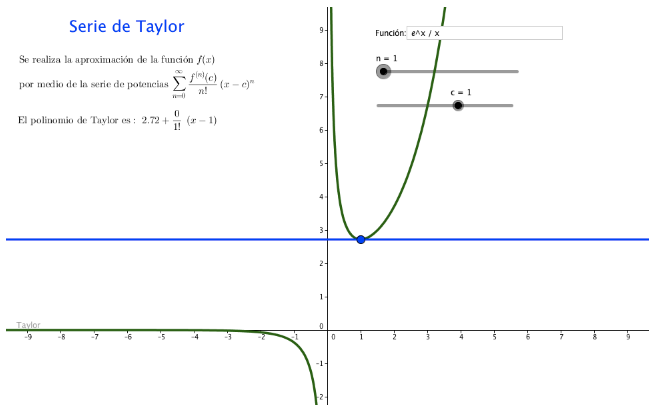
lor es local, y con esto tener claro que no es posible extender la aproximación a cualquier dominio.

5.2.4. Actividad 4

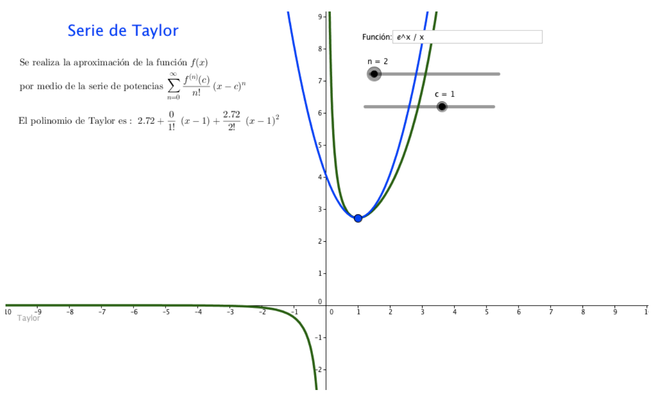
Considera la función:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

definida para $x > 1$ y las siguientes gráficas:



(a) Aproximación de $g(x) = \frac{e^x}{x}$ de orden 1



(b) Aproximación de $g(x) = \frac{e^x}{x}$ de orden 2

a. *Hallar los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de f alrededor de $a = 1$.*

b. *Aproxima el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 y estima el error cometido.*

c. *Aproxima el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido. Compara el resultado obtenido con el resultado del ítem anterior.*

Análisis de la Actividad 4: En esta actividad, el estudiante debe aproximar el valor de una función, definida como una integral definida entre 1 y x, con $x > 1$, e ir mejorando la precisión del valor deseado, aumentando el grado del polinomio de Taylor. En este problema, se busca que el estudiante aprenda a utilizar el polinomio da Taylor para resolver el problema de aproximación de una integral definida, específicamente de aquellas integrales que no tienen primitiva.

Pregunta 1. *¿Es relevante el hecho de que la función esté definida como función integral?*

- **Respuestas:** La definición de la función integral del problema es fundamental. Al momento de calcular los polinomios de Taylor hay que tener en cuenta ciertas consideraciones matemáticas, tales como: la existencia de la función $g(x) = \frac{e^x}{x}$ y las condiciones necesarias para garantizar la integrabilidad de g en el intervalo $[1, x]$, con $x > 1$

- **Estrategias:** Una estrategia útil es plantear al estudiante preguntas tales como: ¿está bien definida la integral?, ¿qué significa $f(2)$, $f(1, 1)$?, o inclusive ¿qué significa $f(0{,}5)$? y dependiendo de la respuesta, se hace necesario contrapreguntar ¿por qué?. Con esto, el estudiante debe reflexionar en torno a la definición de la función f. El estudiante puede apoyarse con las gráficas presentadas en el enunciado, y señalar que el argumento de la integral $g(x) = \frac{e^x}{x}$, corresponde a una función continua, positiva y creciente en el intervalo $[1, x]$, $\forall x > 1$, y por consiguiente integrable en dicho intervalo. Inclusive, puede establecer que la integral coincide con el área bajo la curva y sobre el eje x, en el mismo intervalo.

- **Dificultades:** Comprender cuáles son las condiciones necesarias para que la función integral f esté bien definida. Entender la diferencia entre $\frac{e^x}{x}$ y su integral.

Pregunta 2. *¿Justifica correctamente que f está bien definida para $x > 1$?*

- **Respuestas:** Generalmente, este tipo de justificación no se presenta. En efecto, el estudiante se limita a derivar directamente e incluso pasando por alto el Teorema Fundamental del Cálculo al derivar la función integral.

- **Estrategias:** Luego de utilizar las preguntas anteriores, con el fin de que el estudiante logre visualizar la importancia de la definición de f en el problema, el paso siguiente en la estrategia será extender las preguntas anteriores, preguntando: la función $\frac{e^x}{x}$, ¿es continua en [1,x]?, la función $\frac{e^x}{x}$, ¿es creciente en [1,x]?, la función $\frac{e^x}{x}$, ¿es positiva en [1,x]?, la función $\frac{e^x}{x}$, ¿es integrable en [1,x]?. Dependiendo de la respuesta, se hace necesario contrapreguntar ¿por qué?. Terminar con dos preguntas más: ¿para qué valores de x, la integral está bien definida?, ¿cuál es el dominio de f?, ¿por qué?.

- **Dificultades:** En este punto existen dificultades propias del conocimiento matemático necesario para comprender la actividad, pasando por nociones claves en el problema como lo son la noción de continuidad e integrabilidad hasta el Teorema Fundamental de Cálculo, además de las dificultades propias del cálculo de derivadas. Lo anterior se profundiza, debido a que el estudiante debe conjugar todas estas nociones en el problema planteado.

Pregunta 3. *¿Cuál es la diferencia entre el desarrollo de $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ y el de $g(x) = \frac{e^x}{x}$?*

- **Respuestas:** Es muy fácil confundir ambas funciones y el estudiante podría no distinguir entre ambos desarrollos, y pensar que está calculando el desarrollo de $\frac{e^x}{x}$ o incluso el de e^x.
- **Estrategias:** Pedirle al estudiante que reflexiones sobre la relación que existe entre la función $f(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x} dx$ y la función $g(x) = \frac{e^x}{x}$. Si es necesario, pedirle que encuentre una nueva relación sin el símbolo de integral (por ejemplo, derivando), para que concluya sobre las diferencias que existen en los desarrollos de f y g
- **Dificultades:** A las ya mencionadas anteriormente, se suma el hecho de que el estudiante no observe la diferencia a priori y tenga que recurrir a explicitar alguna relación entre f y g, para convencerse que son funciones diferentes. Por ejemplo: $f'(x) = \frac{e^x}{x} = g(x)$.

Pregunta 4. *¿Cómo se pueden interpretar los resultados obtenidos del problema?*

- **Respuestas:** El estudiante podría observar que el cálculo de $f(1,1)$ coincide con el valor de la integral $\int_1^{1,1} \frac{e^x}{x} dx$, y que este último a su vez coincide con el área de la región encerrada por la gráfica de $g(x) = \frac{e^x}{x}$, el eje x y el intervalo $[1,\ 1{,}1]$. Y observar cómo el error disminuye a medida que el grado del polinomio de Taylor aumenta.
- **Estrategias:** Se puede iniciar el diálogo con el estudiante, preguntando ¿cuánto vale $f(1)$?, además de preguntar por su justificación. Con esto, el estudiante visualizará que, además de tener que calcular ciertos polinomios de Taylor, está calculando una integral definida.
- **Dificultades:** Entender que la función integral tiene como límite superior la variable independiente de la función f, además de comprender el significado geométrico de la integral definida.

Pregunta 5. *¿Es posible calcular $f(5)$, utilizando polinomios de Taylor de grado 3?, y ¿qué pasa con f(150)?*

- **Respuestas:** El estudiante ya se habrá interiorizado con el hecho de que $f(1,1)$ coincide con $\int_1^{1,1} \frac{e^x}{x} dx$, y para él será directo que $f(5)$ coincide con $\int_1^5 \frac{e^x}{x} dx$. Lo mismo hará con $f(150)$, centrándose en la integral y no el polinomio de Taylor.
- **Estrategias:** Como el polinomio de Taylor corresponde a una aproximación local de la función en torno a un determinado punto, y no es posible asegurar, a priori, que dicha aproximación sea válida para valores "alejados" del punto. Con esto, una estrategia podría ser pedir al estudiante, por un momento, que trate de calcular directamente el valor de la integral. Al no lograrlo, rápidamente valorará métodos alternativos para hacerlo. Por otra parte, será necesario solicitar al estudiante que analice la expresión para el error, de modo que pueda verificar que para $x > 1$, el error cometido disminuye a medida que el grado del polinomio de Taylor aumenta.
- **Dificultades:** Perder de vista las propiedades locales del polinomio de Taylor, y por otra parte, no contar con un registro gráfico más robusto, con el fin de proveer al estudiante de una noción más intuitiva sobre la naturaleza de problema y de las aproximaciones de grado mayor o igual a 3 de la función $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

5.3. Experimentación

En este capítulo se explica con detalle el experimento realizado junto con sus condiciones de realización. Se explica el contrato didáctico establecido con los estudiantes, se caracteriza la aplicación, y se establecen los registros y observaciones tomadas durante el experimento.

5.3.1. Contrato Didáctico

A continuación se describen los principales elementos del contrato didáctico entre el profesor y los estudiantes establecido en la fase experimental. Este se centra en describir los objetivos fundamentales de la situación didáctica, los recursos y evidencias, además de la metodología empleada y los criterios de evaluación.

Objetivos

En la presente situación de aprendizaje, el objetivo fundamental es lograr en el estudiante aprendizaje significativo en torno a la noción de "Polinomio de Taylor", como una herramienta que permite la aproximación de funciones a través de polinomios que se construyen a partir de la función a original. Con esto, se espera que el estudiante comprenda la noción de *error*.

Estrategia

La estrategia utilizada en el experimento, está basada en al estrategia de *Resolución de Problemas*, donde el estudiante se enfrenta a un problema no rutinario sobre el cuál no posee a priori una estrategia de resolución. Los estudiantes se organizan en grupos aleatorios, de tres estudiantes cada uno. Luego de esto reciben las instrucciones para llevar a cabo la tarea asignada.

Recursos y Evidencias

Los recursos necesarios para realizar la situación didáctica son los usuales en cualquier sala de clase, es decir: hojas, apuntes, medio digital para graficar funciones. Además, los estudiantes disponen de 90 minutos para desarrollar la actividad. En cuanto a las evidencias esperadas, estas son: desarollo y producciones matemáticas de los estudiantes, preguntas realizadas por los estudiantes y observaciones que emergen de la actividad.

Metodología

La metodología se centra en lograr que el estudiante active la habilidad para resolver problemas, poniendo en juego los conocimientos matemáticos necesarios para esto. Por esta razón, se establece que el profesor no entregará respuestas, sino que se mandentrá como un observador del trabajo de los estudiantes, observando con detalle la discusión de cada grupo. Sólo cuando sea muy necesario, el profesor interrumpirá o atenderá a los requerimientos de un grupo, devolviendo la resposabilidad del aprendizaje al estudiante, contrapreguntando ante cada pregunta planteada.

El profesor es quien hace las preguntas, y el estudiante quien responde. Cuando el profesor detecta que un determinado grupo llega a una dificultad que no logra resolver, también puede intervenir realizando una pregunta que le permita al grupo redefinir su estrategia y avanzar hacia la solución del problema. Después de entregar la actividad a los estudiantes, pasan a una etapa de activación y consolidación, donde se ponen en juego todas las habilidades matemáticas e interpersonales que posee el grupo. Esto ocurre hasta que el problema está completamente resuelto. Sin embargo hay que tener en cuenta que el problema estará 100 % resuelto por *todo* el grupo, cuando todos los estudiantes se hayan convencido de la estrategia y la solución del problema; más aún, cualquier miembro del grupo podrá explicar la estrategia de resolución convenciendo a los demás.

Finalmente, el profesor realizará una discución plenaria, donde se exhibirán las soluciones de los problemas junto con las estrategias de resolución. Aquí se profundiza sobre las nociones matemáticas necesarias para resolver los problemas, las soluciones de los problemas, las estrategias, las consecuencias y aplicaciones que emergen, y sobre el conocimiento que se puede construir a partir de la noción estudiada.

Criterios de Evaluación

Los criterios de evaluación están dados por las siguientes dimensiones a observar: argumentación y justificación, modelación, resolver problemas, representar y trabajo en equipo. Los medios de control para lograr el siguiente aprendizaje esperado: "*Resuelve Problemas de aproximación de funciones y estimación del error, utilizando polinomios de Taylor*" son:

1. Elaborando argumentos y justificaciones matemáticas, que incluyan su reflexión y evidencias convenciendo a los demás.

2. Desarrollando y utilizando modelos en múltiples situaciones.

3. Generalizando estrategias utilizadas en la resolución del problema a otros tipos de problemas.

4. Vinculando y relacionando diferentes sistema de representación.

5. Responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.

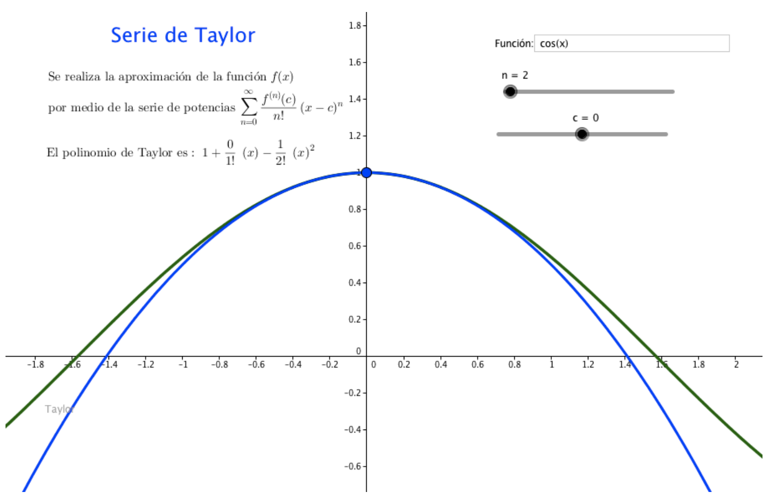
5.3.2. Aplicación

Instrumento

El instrumento aplicado corresponde a un conjunto de 4 problemas, los cuales tienen los siguientes objetivos de aprendizaje: calcular y aplicar la noción de polinomio de Taylor, acotar el error cometido al aproximar una función a través de un polinomio de Taylor, aproximar, con un error dado, el valor de un número irracional, utilizar polinomios de Taylor para aproximar el valor de una integral definida.

Polinomio de Taylor y Aproximación de Funciones.

1. Si reemplazamos $\cos(x)$ por $1 - \frac{x^2}{2}$, con $|x| < 0,5$, ¿qué estimación se puede dar del error?. Observa el siguiente gráfico y las indicaciones a continuación:



   - Escriba el desarrollo en serie de Taylor de la función $\cos(x)$, en torno al cero.
   - Acote la siguiente expresión: $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$.

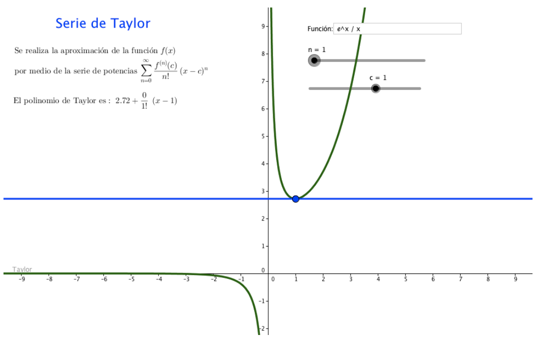
2. Calcula el valor de e con un error menor que 10^{-6}.

3. ¿De qué orden debe ser el polinomio de Taylor en $x = 0$ para que aproxime el valor de e^x hasta un determinado orden, por ejemplo 10^{-7}, en el intervalo $[0, 1]$?

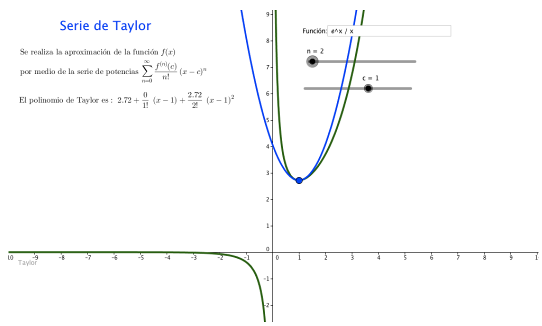
4. Considera la función:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

definida para $x > 1$ y las siguientes gráficas:



(c) Aproximación de $g(x) = \frac{e^x}{x}$ de orden 1



(d) Aproximación de $g(x) = \frac{e^x}{x}$ de orden 2

a) Hallar los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de f alrededor de $a = 1$.

b) Aproxima el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 y estima el error cometido.

c) Aproxima el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido. Compara el resultado obtenido con el resultado del ítem anterior.

Caracterización de la Aplicación

El estudio se realizó en el contexto de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, para la carrera de Ingeniería Física de la Universidad de Santiago de Chile, la cual se encuentra en el tercer semestre de la malla curricular de la carrera. Durante el experimento participaron 22 estudiantes, los cuales fueron organizados en seis grupos de 3 estudiantes y uno de 4 estudiantes. La duración del experimento fue de 90 minutos. Participó el profesor de la asignatura como mediador de la actividad, además de un ayudante que sistematizó las preguntas más importantes y registró las observaciones del experimento.

5.3.3. Registro e Intervenciones

Registro

Durante el experimento se registró la ubicación relativa de cada grupo dentro de la sala de clases. En este aspecto se pueden observar dos situaciones. La primera es que los grupos deben quedar lo suficientemente separados para no interferir mutuamente mientras discuten. En segundo lugar, la ubicación de cada grupo no debe afectar la accesibilidad del profesor ni su movilidad dentro de la sala.

A continuación se muestra un cuadro que representa la ubicación relativa durante el experimento de los 7 grupos participantes. El número indica el grupo y la letra "P" indica la posicición del pizarrón en la sala de clases:

								7	
	1	**1**						**7**	**7**
	1	**1**							
									6
2	**2**							**6**	**6**
2									
							5	**5**	
3	**3**						**5**		
3								**4**	**4**
									4
			P	**P**	**P**	**P**			

Tabla 5.1: Ubicación de los grupos

Intervenciones

Durante el experimento se registraron las siguientes intervenciones de los estudiantes:

Grupo 3: *En relación a la pregunta 1, ¿Se debe encontrar el error relativo o el absoluto?.*

Grupo 6: *¿Se puede usar calculadora?.*

Grupo 3: *En el error del problema 2, llegamos a un polinomio de grado 9, ¿es correcto?. En el problema 3, ¿se puede empezar con la definición?.*

Grupo 7: *En el problema 1, ¿cómo acoto la función?, ¿qué es una cota?.*

Grupo 5: *En el problema 3, ¿debo encontrar el polinomio en términos del valor dado, es decir, qué error entrega cada polinomio que vamos encontrando?.*

Grupo 3: *Problema 4, ¿es correcto decir que la derivada de la integral de* $\frac{e^t}{t}$ *es igual a* $\frac{e^x}{x}$*?.*

Grupo 3: *Problema 4, Observación: La función está bien definida en el intervalo, y la gráfica es para* $\frac{e^x}{x}$*, no para la integral. Necesito saber la primitiva de la función, ¿cómo la encuentro?.*

Grupo 6: *Problema 4, ¿es una función de 2 variables?.*

Grupo 5: *Problema 4, ¿la función se centra en 1?.*

Grupo 1: *Problema 3, explica que voy reemplazando en los polinomios de Taylor y me doy cuenta que a partir de* $n = 4$ *comienza a aproximar como se pide en el enunciado.*

Grupo 2: *Problema 4: ¿el polinomio de Taylor hay que obtenerlo de* f*?.*

Grupo 7: *Problema 4: ¿*$f(1,1)$*, es con* $x = 1,1$ *o no?.*

Grupo 3: *Problema 4: ¿cómo estimamos el error cometido, si no podemos calcular la función, ya que es una función integral?.*

En general se aprecian preguntas simples y otras más complejas. Se observa que el grupo 4 no realizó ninguna pregunta, mientras que el grupo 3 realizó 5 preguntas. De las preguntas observadas, hay algunas de forma y otras de fondo, y se aprecian ciertas dificultades de los estudiantes en el experimento. Lo anterior en conjunto con las producciones de los estudiantes serán analizadas en la próxima sección.

5.4. Análisis a Posteriori

5.4.1. Sobre la Evaluación

La evaluación es sin duda unos de los factores más complejos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. En nuestro experimento se ha sistematizado la evaluación, por medio de una rúbrica que permite entender cómo resultó la situación didáctica desde el punto de vista de la Resolución de Problemas. Esta rúbrica se ha descrito con detalle anteriormente, está compuesta por 5 dimensiones (argumentar y justificar, modelar, resolver problemas, representar y trabajo en equipo), y cuatro niveles de profundidad. La rúbrica se ha aplicado a los 7 grupos de trabajo y la información resultante se muestra a continuación.

Dimensiones	Nivel 4	Nivel 3	Nivel 2	Nivel 1	Nivel 0
1. Argumentar y Justificar	Elaborar argumentos y justificaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión y evidencia, convenciendo a los demás.	Elaborar argumentos y explicaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión para enfrentar el problema.	Formular argumentos y explicaciones matemáticas o generales, desarrolladas a partir de una justificación previa.	Describir acciones matemáticas o generales, para enfrentar el problema y/o resultados obtenidos.	No argumenta ni justifica sus afirmaciones.
2. Modelar	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones.	Desarrollar y usar modelos en situaciones familiares.	Usar modelos explícitos en situaciones hipotéticas.	Usar modelos explícitos en situaciones concretas.	No utiliza ningún tipo de modelo.
3. Resolver Problemas	Generalizar estrategias utilizadas en la resolución de problemas a otros tipos de problemas.	Crear métodos de verificación de la estrategia de resolución problemas.	Comparar estrategias para resolver problemas.	Utilizar estrategias para resolver problemas.	No plantea ningúna estrategia para resolver el problema.
4. Representar	Vincular y relacionar diferentes sistemas de representación.	Conocer y usar diferentes sistemas de representación.	Usar un único tipo de representación.	Leer datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas.	No es capás de leer datos o información del enunciado.
5. Trabaja en Equipo	Las tareas y responsabilidades son asignadas de forma coordinada, responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.	Realiza propuestas razonables y consistentes con la distribción de tareas, muestra una actitud favorable.	Acepta que hay diferentes tareas en el trabajo grupal, sin embargo improvisa sus respuestas.	No colabora en la distribución de las tareas y hace pocos aportes al trabajo del grupo.	No colabora en la distribución de las taras ni aporta al trabajo grupal.

Figura 5.1: Rúbrica de Evaluación

Niveles de Dimensión 1: Argumentar y Justificar

- **Nivel 4**: Elaborar argumentos y justificaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión y evidencia, convenciendo a los demás.

- **Nivel 3**: Elaborar argumentos y explicaciones matemáticas o generales, que incluyan su reflexión para enfrentar el problema.

- **Nivel 2**: Formular argumentos y explicaciones matemáticas o generales, desarrolladas a partir de una justificación previa.

- **Nivel 1**: Describir acciones matemáticas o generales, para enfrentar el problema y/o resultados obtenidos.
- **Nivel 0**: No argumenta ni justifica sus afirmaciones.

Niveles de Dimensión 2: Modelar

- **Nivel 4**: Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones.
- **Nivel 3**: Desarrollar y usar modelos en situaciones familiares.
- **Nivel 2**: Usar modelos explícitos en situaciones hipotéticas.
- **Nivel 1**: Usar modelos explícitos en situaciones concretas.
- **Nivel 0**: No utiliza ningún tipo de modelo.

Niveles de Dimensión 3: Resolver Problemas

- **Nivel 4**: Generalizar estrategias utilizadas en la resolución de problemas a otros tipos de problemas.
- **Nivel 3**: Crear métodos de verificación de la estrategia de resolución problemas.
- **Nivel 2**: Comparar estrategias para resolver problemas.
- **Nivel 1**: Utilizar estrategias para resolver problemas.
- **Nivel 0**: No plantea ninguna estrategia para resolver el problema.

Niveles de Dimensión 4: Representar

- **Nivel 4**: Vincular y relacionar diferentes sistemas de representación.
- **Nivel 3**: Conocer y usar diferentes sistemas de representación.
- **Nivel 2**: Usar un único tipo de representación.
- **Nivel 1**: Leer datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas.
- **Nivel 0**: No es capaz de leer datos o información del enunciado.

Niveles de Dimensión 5: Trabajo en Equipo

- **Nivel 4**: Las tareas y responsabilidades son asignadas de forma coordinada, responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.
- **Nivel 3**: Realiza propuestas razonables y consistentes con la distribución de tareas, muestra una actitud favorable.
- **Nivel 2**: Acepta que hay diferentes tareas en el trabajo grupal, sin embargo improvisa sus respuestas.
- **Nivel 1**: No colabora en la distribución de las tareas y hace pocos aportes al trabajo del grupo.
- **Nivel 0**: No colabora en la distribución de las taras ni aporta al trabajo grupal.

5.4.2. Análisis Grupo 1

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 1:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	2	1	1	2	**6**
Modelar	1	1	1	2	**5**
Resolver Problemas	1	1	1	1	**4**
Representar	2	2	2	2	**8**
Trabajo en equipo	3	3	3	3	**12**
TOTAL	**9**	**8**	**8**	**10**	**35**

Tabla 5.2: Resultados Grupo 1

De lo anterior, se puede afirmar que el grupo describe acciones matemáticas para enfrentar el problema y justificar sus resultados, utiliza modelos matemáticos explícitos, utiliza alguna estrategia para resolver el problema, utiliza un único sistema de representación y el trabajo en equipo se basa en propuestas razonables y consistentes con distribución de las tareas.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo conoce la expansión en serie de Taylor de la función $\cos(x)$, y afirma que para acotar la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$ debe utilizar el mayor valor posible para x, con $|x| < 0,5$. Argumentan que este representa el máximo error en el intervalo. Reemplazan x en la expresión anterior por $0,5$, obteniendo: $|\cos(0,5) - (1 - \frac{(0,5)^2}{2!})| = 2,5825 \cdot 10^{-3}$

- **Actividad 2:** El grupo conoce la expansión en serie de Taylor de la función exponencial y utilizan la identidad $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Luego, buscan un polinomio de Taylor que se aproxime con un error menor a 10^{-6}, al evaluarlo en $x = 1$. Finalmente, proceden a buscar de forma empírica el polinomio que cumpla con la condición deseada.

- **Actividad 3:** De manera análoga al problema anterior, utilizan la identidad $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, y establecen que polinomio de Taylor de grado n que aproxima a la función exponencial f es tal que: $f(x) \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Posteriormente, buscan el valor de n para que el error cometido sea menor a 10^{-7}. Sin embargo, en este punto confunden la función exponencial con el número irracional e, al buscar una aproximación para la función.

- **Actividad 4:** El grupo encuentra correctamente el polinomio de Taylor de grado 2 y 3 de la función integral, aplicando la noción de antiderivada al derivar la función integral. Posteriormente, evalúa en el punto indicado, e indica un determinado valor para el error, pero sin justificar.

5.4.3. Análisis Grupo 2

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 2:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	1	0	0	1	**2**
Modelar	1	1	0	1	**3**
Resolver Problemas	1	0	0	0	**1**
Representar	2	1	0	1	**4**
Trabajo en equipo	2	2	2	2	**8**
TOTAL	**7**	**4**	**2**	**5**	**18**

Tabla 5.3: Resultados Grupo 2

De lo anterior, se puede afirmar que el grupo no argumenta ni justifica sus afirmaciones, utiliza modelos explícitos en situaciones concretas, no plantea ninguna estrategia para resolver el problema y lee datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas. Aceptan que hay diferentes tareas en el trabajo grupal; sin embargo, improvisan sus respuestas.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo conoce el desarrollo en serie de Taylor de la función $\cos(x)$ y la diferencia que existe entre esta y el polinomio de Taylor de grado $2n$. Luego, intenta acotar el error por definición buscando una cota para la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$, luego de sustituir $\cos(x)$ por la serie que lo representa, es decir en: $\left|\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right|$. Evalúa en el extremo del intervalo $x=0,5$, sin justificar por qué lo hacen. Con esto establecen que la diferencia está acotada por $2,6\cdot 10^{-3}$, señalando que es el número obtenido al reemplazar por $0,5$ en $\frac{x^4}{4!}$ y que "cualquier factor de orden superior otorgará un valor menor".

- **Actividad 2:** El grupo propone desarrollar el polinomio de Taylor de e^x en torno al cero, y luego evalúa para obtener e. Conoce el hecho de que: $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$. Posteriormente, evalúa en $x=1$, y por inspección (utilizando calculadora), establecen que el error de aproximación será menor que 10^{-6} cuando el polinomio de Taylor tenga grado 11 y afirman que para cualquier polinomio de Taylor de grado menor que 11 no será posible establecer un error menor que 10^{-6}.

- **Actividad 3:** Señala que el problema está resuelto referenciando el problema anterior y no dan mayores justificaciones.

- **Actividad 4:** El grupo escribe los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 para la función integral f, sin justificar sus cálculos. Luego. establece cuál es el error cometido, sin justificación.

5.4.4. Análisis Grupo 3

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 3:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	3	2	1	1	**7**
Modelar	2	1	1	1	**5**
Resolver Problemas	2	1	2	0	**5**
Representar	3	2	2	1	**8**
Trabajo en equipo	4	4	4	4	**16**
TOTAL	**14**	**10**	**10**	**7**	**41**

Tabla 5.4: Resultados Grupo 3

De lo anterior, se puede afirmar que el grupo formula argumentos y explicaciones matemáticas, desarrolladas a partir de una justificación previa, utiliza modelos explícitos en situaciones concretas, utiliza estrategias para resolver problemas, utiliza un único tipo de representación, pero las tareas y responsabilidades son asignadas de forma coordinada, responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo conoce la serie de Taylor de $\cos(x)$, y utiliza este conocimiento en la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$. Con esto, afirma que debe acotar el valor de la serie: $\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|$, luego de reemplazar x por $0,5$. Afirma que la expresión resultante estará acotada entre 0 y el primer término de la serie ($n = 2$). De aquí concluyen que la serie numérica que representa al *error*, está entre 0 y $\frac{(0,5)^4}{4!}$.

- **Actividad 2:** En esta actividad, el grupo decide sin justificar, calcular el polinomio de Taylor de orden 9, y luego evalúan en $x = 1$ para obtener un valor aproximado de $e \approx 2,718281526$. Posteriormente calcula la diferencia con el valor de $e = 2,718281828$, que arroja la calculadora, calcula la diferencia y observa que $error \approx 3,0288556 \cdot 10^{-7}$.

- **Actividad 3:** El grupo conoce la serie de Taylor de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ y utiliza la misma estrategia que en la actividad anterior. Con esto, evalúa en $x = 1$, para los diferentes polinomios de Taylor de grado 1, 2, 3,...,8, y en cada cálculo estima el error cometido. A partir de este análisis establece una relación entre el grado del polinomio y el error cometido.

- **Actividad 4:** En este punto, el grupo calcula los polinomios de Taylor de grado 2 y 3, sin justificaciones. Confunde f con $\frac{e^x}{x}$ en los cálculos sucesivos.

5.4.5. Análisis Grupo 4

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 4:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	1	0	0	0	**1**
Modelar	1	1	0	1	**3**
Resolver Problemas	1	1	0	0	**2**
Representar	1	1	0	1	**3**
Trabajo en equipo	2	2	2	2	**8**
TOTAL	**6**	**5**	**2**	**4**	**17**

Tabla 5.5: Resultados Grupo 4

De lo anterior, se puede afirmar que el grupo no argumenta ni justifica sus afirmaciones. Utiliza modelos explícitos en situaciones concretas, utiliza parcialmente estrategias para resolver problemas, lee datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas, y acepta que hay diferentes tareas en el trabajo grupal; sin embargo, improvisa sus respuestas.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo conoce el desarrollo de la serie de Taylor de $\cos(x)$, y como estrategia evalúa en la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2}|)$, con $x = 0,5$.

- **Actividad 2:** El grupo conoce el desarrollo en serie de Taylor de e^x, lo utiliza para evaluar en el polinomio de Taylor de grado 9, sin justificar por qué lo hace, y establece que el error cometido es menor que 10^{-6}

- **Actividad 3:** No resuelve esta actividad.

- **Actividad 4:** Encuentra los polinomios de Taylor de grado 2 y 3, luego evalúa en $x = 1,1$, pero no logra establecer el error ni justificar matemáticamente los cálculos realizados.

5.4.6. Análisis Grupo 5

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 5:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	0	0	0	1	**1**
Modelar	0	0	0	1	**1**
Resolver Problemas	0	0	0	1	**1**
Representar	0	0	2	1	**3**
Trabajo en equipo	2	2	2	2	**8**
TOTAL	**2**	**2**	**4**	**6**	**14**

Tabla 5.6: Resultados Grupo 5

De lo anterior, se puede afirmar que el grupo no argumenta ni justifica sus afirmaciones, no utiliza ningún tipo de modelo, no plantea ninguna estrategia para resolver problemas, lee datos directamente desde tablas, figuras o fórmulas, pero acepta que hay diferentes tareas en el trabajo grupal; sin embargo, improvisa sus respuestas.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo no muestra conocimiento sobre la serie de Taylor de $\cos(x)$, sólo plantea algunos polinomios y no resuelve el problema.

- **Actividad 2:** No resuelve esta actividad.

- **Actividad 3:** No resuelve esta actividad.

- **Actividad 4:** Inicialmente confunden la función integral con la función exponencial. Posteriormente, logra calcular los polinomios de orden 2 y 3 de la función integral. Finalmente, evalúa y estima el error relativo, pero no analiza sus cálculos ni los justifica.

5.4.7. Análisis Grupo 6

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 6:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	2	1	1	2	**6**
Modelar	2	1	1	1	**5**
Resolver Problemas	1	1	1	1	**4**
Representar	2	2	2	2	**8**
Trabajo en equipo	4	4	4	4	**16**
TOTAL	**11**	**9**	**9**	**10**	**39**

Tabla 5.7: Resultados Grupo 6

De lo anterior, podemos afirmar que el grupo describe acciones matemáticas para enfrentar los problemas o los resultados obtenidos, utiliza modelos explícitos en situaciones concretas, utiliza estrategias para resolver problemas y utiliza un único sistema de representación. Las tareas y responsabilidades son asignadas de forma coordinada, responsabilizándose e implicándose todos los miembros del equipo.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo conoce el desarrollo en serie de Taylor de $\cos(x)$ y lo utiliza en la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$. Con esto, plantea que se debe acotar $\left|\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right|$. Para esto evalúa en $x = 0,5$, y establece que la cota se obtiene al reemplazar el primer término de la expresión anterior, es decir en $\frac{x^4}{4!}$.

- **Actividad 2:** El grupo conoce el desarrollo en serie de Taylor de e^x, y lo utiliza para obtener la identidad: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Posteriormente, plantea que el término n-ésimo de la serie debe ser menor que 10^{-6}, con esto: $\frac{1}{n!} < 10^{-6}$, es decir $10^6 < n!$, y deduce por inspección que: $n \leq 9$. Finalmente verifica, calculando la suma hasta $n = 9$, que el error estimado que obtiene es del orden $3 \cdot 10^{-7}$.

- **Actividad 3:** Utiliza el desarrollo de la serie de Taylor de e^x. Afirma que para obtener la cota del error se debe calcular el $(n+1)$-ésimo término de la serie, y lo compara con $10^{-\lambda}$, a λ lo llama el *orden de la aproximación*, así: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-\lambda}$.

A partir de esta última relación, considerando $x = 1$, obtiene: $10^{\lambda} \leq (n+1)!$, concluye que esta es la relación entre el grado del polinomio y el orden de aproximación, sin justificar la estrategia ni la correctitud de sus afirmaciones.

- **Actividad 4:** Calcula por definición los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de la función integral utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, y estima los errores cometidos por ambos polinomios. Para el polinomio de grado 2 el error cometido es $0,00045$ aprox., y para el polinomio de grado 3 es de $0,000023$ aprox., observando que el error disminuye con el polinomio de grado 3, sin embargo no justifican sus cálculos.

5.4.8. Análisis Grupo 7

A continuación se muestran los resultados obtenidos por el grupo 7:

Dimensión\Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	**TOTAL**
Argumentar y Justificar	2	1	0	1	**4**
Modelar	1	1	0	1	**3**
Resolver Problemas	1	1	0	1	**3**
Representar	2	2	1	1	**6**
Trabajo en equipo	3	3	3	3	**12**
TOTAL	**9**	**8**	**4**	**7**	**28**

Tabla 5.8: Resultados Grupo 7

De lo anterior, podemos afirmar que el grupo describe acciones matemáticas para enfrentar los problemas o resultados obtenidos, utiliza modelos explícitos en situaciones concretas, utiliza estrategias para resolver problemas, realiza propuestas razonables y consistentes con la distribución de tareas.

Al analizar las producciones matemáticas observamos:

- **Actividad 1:** El grupo calcula el desarrollo en serie de Taylor de la función $\cos(x)$ y utiliza este conocimiento en la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$. Afirma que debe acotar: $\left|\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right|$, pero no lo hace.

- **Actividad 2:** El grupo calcula el desarrollo en serie de Taylor de la función e^x, y a partir de este desarrollo escribe la identidad: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Posteriormente afirma que para $n = 10$, la suma anterior difiere del valor de e con un error menor que 10^{-6}, sin justificar sus afirmaciones.

- **Actividad 3:** Utiliza los cálculos de la actividad anterior y menciona intuitivamente que a medida que el grado del polinomio de Taylor aumenta, el error disminuye, sin justificar.

- **Actividad 4:** Calcula el polinomio de Taylor de la función integral de grado 2 y 3, utilizando correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo.

5.5. Confrontación y Propuesta

De acuerdo al análisis a posteriori y el análisis a priori realizados, hemos llegado a un punto donde tenemos que observar nuestra situación didáctica y regresar al diseño de esta. La ingeniería didáctica nos plantea que la relación entre el análisis a priori, el análisis a posteriori y la confrontación, se debe revisitar tantas veces como aplicaciones de la situación didáctica realicemos, ajustando y adaptando la situación, de forma que esta resulte adecuada para el momento y contexto de aplicación.

Confrontación Actividad 1

Al sistematizar las estrategias y argumentos planteados por los estudiantes en la actividad 1, y comparándolos con el análisis a priori, podemos señalar:

1. La mayoría de los estudiantes conoce la expansión en serie de Taylor de la función $\cos(x)$ y algunos establecen claramente la diferencia que existe entre el polinomio y la serie de Taylor.

2. Afirman que para acotar superiormente la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$ se debe utilizar el mayor valor posible para x, con $|x| < 0,5$.

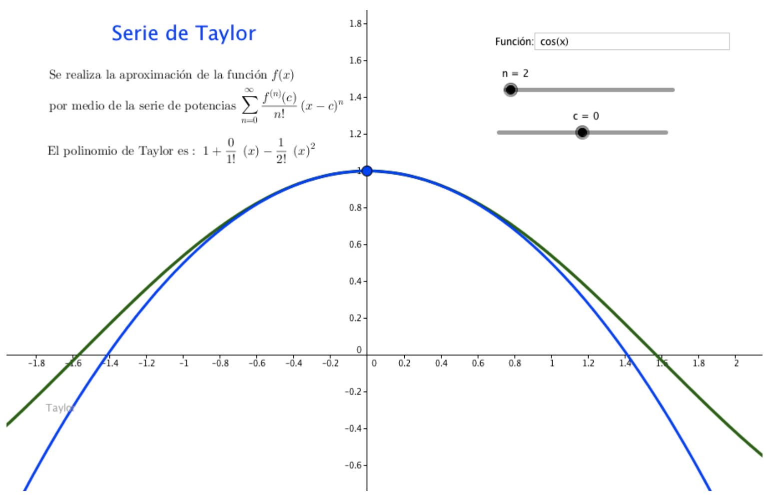
3. Acotan el error por definición, buscando una cota para la expresión $|\cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})|$, luego de sustituir $\cos(x)$ por la serie que lo representa, es decir buscan acotar: $\left|\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right|$.

4. Evalúan en $x = 0,5$, y con esto establecen que la diferencia está acotada por $\frac{(0,5)^4}{4!} \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$, señalando que es el número obtenido al reemplazar por $0,5$ en $\frac{x^4}{4!}$ y que “cualquier factor de orden superior otorgará un valor menor”. Con esto quieren decir que, si consideran cualquier otro polinomio de grado mayor, obtendrán una cota menor, y por lo tanto la cota obtenida es suficiente, concluyendo que el *error* está entre 0 y $2,6 \cdot 10^{-3}$.

   Podemos afirmar que la actividad 1, fue desarrollada correctamente por los estudiantes. Conocen el desarrollo de la serie de Taylor de $\cos(x)$ y lo utilizan adecuadamente en el contexto del problema. Reconocen por qué deben utilizar el polinomio $(1-\frac{x^2}{2})$, y la importancia del hecho de que $|x| < 0,5$ en la expresión $|\cos(x)-(1-\frac{x^2}{2})|$. Sin embargo, desde un punto de vista geométrico, el gráfico no resultó de gran utilidad. Para mejorar los resultados de aprendizaje se propone complementar el problema con preguntas relativas que permitan al estudiante resignificar la importancia del registro gráfico, utilizando la gráfica propuesta y herramientas de geometría dinámica con *Geogebra*, para que puedan explorar de manera autónoma.

Rediseño de Actividad 1

Si reemplazamos $\cos(x)$ *por* $1-\frac{x^2}{2}$*, con* $|x| < 0,5$*, ¿Qué estimación se puede dar del error?. Observa el siguiente gráfico, la aplicación de geogebra entregada por el profesor y las indicaciones a continuación:*



a) ¿Existe alguna diferencia entre la gráfica de $\cos(x)$ y la función $f(x) = 1-\frac{x^2}{2}$?, ¿cuáles?.

b) ¿Espera que el error de aproximación sea grande o chico?, ¿por qué?.

c) Escriba el desarrollo en serie de Taylor de la función $\cos(x)$, en torno al cero.

d) Acote la siguiente expresión: $|\cos(x)-(1-\frac{x^2}{2})|$.

Confrontación Actividad 2

Al sistematizar las estrategias y argumentos planteados por los estudiantes en la actividad 2, y comparándolos con el análisis a priori, podemos señalar:

1. Los estudiantes conocen la expansión en serie de Taylor de la función exponencial: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Y conocen la identidad: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
2. Afirman que: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
3. Utilizan una estrategia de ensayo y error, y buscan un polinomio de Taylor que se aproxime con un error menor a 10^{-6}.
4. Evalúan en $x = 1$ en los polinomios de Taylor: $1+x$, $1+x+\frac{x^2}{2!}$, $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$, ..., $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, para algún valor de x, generalmente 10.
5. Luego, en cada caso estiman el error de forma empírica, restando el resultado obtenido anteriormente, con el valor de $e = 2,718281828$ mostrado por la calculadora.
6. Finalmente, concluyen que de acuerdo a la diferencia obtenida, el error es del orden 10^{-6}, para un polinomio Taylor de grado al menos 9.

Nuevamente el registro gráfico queda en segundo plano, y en este caso no se hace referencia a él. Los estudiantes resuelven la tarea con una estrategia de ensayo y error. Utilizan el desarrollo de Taylor de la función exponencial en torno al cero, entendiendo la idea que hay detrás de la noción de error, pero sin reparar sobre la importancia del orden de este, ni sobre la naturaleza irracional del número que se está aproximando. La idea de localidad del polinomio de Taylor no aparece en escena. Para mejorar los resultados de aprendizaje, se propone complementar el problema con preguntas que permitan al estudiante profundizar sobre las ideas que no estuvieron en juego.

Rediseño de la Actividad 2

Calcular el valor de e con un error menor que 10^{-6}. *¿Es posible calcular* e^{-10} *con un error menor que* 10^{-20}*, utilizando la misma estrategia?, ¿qué estrategia alternativa utilizaría?, calcúlelo.*

Confrontación Actividad 3

Al sistematizar las estrategias y argumentos planteados por los estudiantes en la actividad 3, y comparándolos con el análisis a priori, podemos señalar:

1. De manera análoga al problema anterior, los estudiantes utilizan directamente la identidad $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esto establecen qué polinomio de Taylor de grado n, que aproxima a la función exponencial f, es de la forma: $f(x) \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

2. Posteriormente, a partir de una estrategia de ensayo y error, buscan el valor de n para que el error cometido sea menor a 10^{-7}.

3. Evalúan en $x = 1$, para los polinomios de Taylor, de grado 1, 2, 3,...,8, y en cada cálculo estiman el error cometido, restando con el valor de e que entrega la calculadora. Con este análisis establecen una relación entre el grado del polinomio y el error cometido de forma empírica, pero sólo en un caso particular.

4. Una segunda estrategia ha sido plantear una relación entre el grado del polinomio de Taylor y el error cometido en un punto en particular. Para esto, afirman que para obtener la cota del error se debe calcular el $(n+1)$-ésimo término del polinomio, y lo comparan con $10^{-\lambda}$, donde λ es llamado el *orden de la aproximación*; así: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-\lambda}$. Con esto, para $x = 1$, obtienen: $10^{\lambda} \leq (n+1)!$. Intuitivamente concluyen que a medida que el grado del polinomio de Taylor aumenta, el error disminuye. Sin embargo esta estrategia es incompleta, dado que se ocupa de un caso particular y no se analiza la suma de todos los términos del polinomio de Taylor.

Esta actividad ha sido parcialmente resuelta por los estudiantes, y por tanto los objetivos de aprendizaje fueron parcialmente logrados. Si bien el estudiante comprende la idea de aproximación hasta un determinado orden, las justificaciones sobre la significancia del error son incompletas, y se establecen sólo para casos particulares, sin mencionar que el intervalo no fue considerado por los estudiantes. Enriquecer la actividad con el apoyo del registro gráfico puede resultar de gran utilidad. Recogiendo las preguntas establecidas en el análisis a priori, junto con las dificultades mostradas por los estudiantes, la actividad rediseñada se muestra a continuación.

Rediseño de la Actividad 3

¿De qué orden debe ser el polinomio de Taylor en $x = 0$ para que aproxime el valor de e^x hasta un determinado orden, por ejemplo 10^{-7}, en el intervalo $[0, 1]$?. Para resolver la actividad, considere las siguientes sugerencias:

i. Utilizando Geogebra, grafique la función e^x junto con sus polinomios de Taylor de grados 1,2,3,...,8, en torno a 0 y en el mismo sistema gráfico.

ii. Utilizando Geogebra, grafique la función e^x junto con sus polinomios de Taylor de grados 1,2,3,...,8, en torno a 1 y en el mismo sistema gráfico.

iii. ¿Qué puede afirmar acerca del comportamiento de los diferentes polinomios de Taylor graficados anteriormente?, justifique.

iv. ¿Cuál es la diferencia entre la aproximación de e y de e^x?

Confrontación Actividad 4

Al sistematizar las estrategias y argumentos planteados por los estudiantes en la actividad 4, y comparándolos con el análisis a priori, podemos señalar:

1. En general, los estudiantes encuentran correctamente el polinomio de Taylor de grado 2 y 3 de la función integral. Pero algunos confunden la función integral con su argumento.

2. Aquellos que encuentran los polinomios de Taylor aplicaron correctamente la noción de antiderivada o el Teorema Fundamental del Cálculo al derivar la función integral.

3. De manera empírica, estiman los errores cometidos por ambos polinomios.

4. Finalmente comparan sus resultados y concluyen que el error disminuye a medida que el grado del polinomio aumenta.

Esta actividad fue resuelta de manera algebraica, sin mayores justificaciones ni análisis. Por este motivo, se considera que los aprendizajes han sido parcialmente logrados con la actividad. No se releva la importancia de la definición de función integral ni sus consecuencias en el problema. No hay justificaciones que sustenten la matemática empleada, ni se detecta una clara diferenciación entre la función integral y su argumento. Finalmente, los resultados no son interpretados con profundidad ni hay evidencia de haber utilizado las gráficas del enunciado. A partir del análisis a priori y las dificultades mostradas por los estudiantes, la actividad rediseñada se muestra a continuación.

Rediseño de la Actividad 4

Considera la función:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt,$$

definida para $x \geq 1$.

i. Utilizando Geogebra, grafique la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$ junto con sus polinomios de Taylor de grados 1, 2, 3, 4 y 5, en torno a 0 y en el mismo sistema gráfico.

ii. ¿Cuál es el dominio de la función f?, ¿es derivable la función f?.

iii. ¿Es posible hallar los polinomios de Taylor de f, en torno a 1?. De ser posible, encuentre los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de f alrededor de $a = 1$.

iv. Aproxime el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 y estima el error cometido.

v. Aproxime el valor de $f(1{,}1)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido; compara e interpreta estos resultados con los obtenidos en el ítem anterior.

vi. Establece una estrategia para calcular $f(15)$ y calcule e interprete sus resultados.

Capítulo 6

Fundamentos Matemáticos

6.1. Poliniomio de Taylor y Fórmula de Interpolación de Newton

Considere una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea r un número real positivo. Definimos el operador lineal $\triangle$ sobre f, de la siguiente manera:

$$\triangle f(x) = f(x+r) - f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

y para $n > 1$:

$$\triangle^n f(x) = \triangle(\triangle^{n-1} f(x))$$

Notación: $\triangle^1 = \triangle$

Ejemplo:

$$\triangle^2 f(x) = \triangle(\triangle f(x)) = \triangle(f(x+r) - f(x)) =$$

$$(f(x+2r) - f(x+r)) - (f(x+r) - f(x)) = f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x).$$

Con esta definición buscaremos una expresión general para $f(x+nr)$:

De la definición es directo que: $\boxed{f(x+r) = \triangle f(x) + f(x)}$

Como $\triangle^2 f(x) = f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x)$ y $\triangle f(x) = f(x+r) - f(x)$, así:

$$\begin{aligned} f(x+2r) &= \triangle^2 f(x) + 2f(x+r) - f(x) \\ &= \triangle^2 f(x) + 2(f(x+r) - f(x)) + f(x) \\ &= \triangle^2 f(x) + 2\triangle f(x) + f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x+2r) = f(x) + 2\triangle f(x) + \triangle^2 f(x)}$$

Continuando con nuestros cálculos:

$$\begin{aligned} \triangle^3 f(x) &= \triangle(\triangle^2 f(x)) \\ &= \triangle(f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x)) \\ &= (f(x+3r) - 2f(x+2r) + f(x+r)) - (f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x)) \\ &= f(x+3r) - 3f(x+2r) + 3f(x+r) - f(x). \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} f(x+3r) &= f(x) - 3f(x+r) + 3f(x+2r) + \triangle^3 f(x) \\ &= f(x) + 3(f(x+r) - f(x)) - 6f(x+r) + 3f(x) + 3f(x+2r) + \triangle^3 f(x) \\ &= f(x) + 3\triangle f(x) - 6f(x+r) + 3f(x) + 3f(x+2r) + \triangle^3 f(x) \\ &= f(x) + 3\triangle f(x) + 3(f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x)) + \triangle^3 f(x) \\ &= f(x) + 3\triangle f(x) + 3\triangle^2 f(x) + \triangle^3 f(x). \end{aligned}$$

Es decir: $\boxed{f(x+3r) = f(x) + 3\triangle f(x) + 3\triangle^2 f(x) + \triangle^3 f(x)}$

Ahora calculamos $f(x+4r)$, para esto determinaremos $\triangle^4 f(x)$:

$$\begin{aligned}
\triangle^4 f(x) &= \triangle(\triangle^3 f(x)) \\
&= \triangle(f(x+3r) - 3f(x+2r) + 3f(x+r) - f(x)) \\
&= (f(x+4r) - 3f(x+3r) + 3f(x+2r) - f(x+r)) \\
&\quad - (f(x+3r) - 3f(x+2r) + 3f(x+r) - f(x)) \\
&= f(x+4r) - 4f(x+3r) + 6f(x+2r) - 4f(x+r) + f(x).
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
f(x+4r) &= -f(x) + 4f(x+r) - 6f(x+2r) + 4f(x+3r) + \triangle^4 f(x) \\
&= -f(x) + 4(f(x+r) - f(x)) + 4f(x) - 6f(x+3r) + \triangle^4 f(x) \\
&= 3f(x) + 4\triangle f(x) - 6f(x+2r) + 4f(x+3r) + \triangle^4 f(x) \\
&= 3f(x) + 4\triangle f(x) + 6(f(x+2r) - 2f(x+r) + f(x)) \\
&\quad - 12f(x+2r) + 12f(x+r) - 6f(x) + 4f(x+3r) + \triangle^4 f(x) \\
&= -3f(x) + 4\triangle f(x) + 6\triangle^2 f(x) - 12f(x+2r) + 12f(x+r) \\
&\quad + 4f(x+3r) + \triangle^4 f(x) \\
&= f(x) + 4\triangle f(x) + 6\triangle^2 f(x) + 4(f(x+3r) - 3f(x+2r) \\
&\quad + 3f(x+r) - f(x)) + \triangle^4 f(x) \\
&= f(x) + 4\triangle f(x) + 6\triangle^2 f(x) + 4\triangle^3 f(x) + \triangle^4 f(x),
\end{aligned}$$

Es decir: $\boxed{f(x+4r) = f(x) + 4\triangle f(x) + 6\triangle^2 f(x) + 4\triangle^3 f(x) + \triangle^4 f(x)}$

Asumiendo que los coeficientes que aparecen en los cálculos precedentes, se forman de la misma forma que los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$, podemos afirmar que:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\triangle f(x) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\triangle^2 f(x) + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle^3 f(x)$$

$$+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\triangle^n f(x),$$

Demostramos esta afirmación por inducción.

Demostración: Por demostrar

$$f(x+(n+1)r) = \binom{n+1}{0} f(x) + \binom{n+1}{1} \triangle f(x) + \binom{n+1}{2} \triangle^2 f(x) + \binom{n+1}{3} \triangle^3 f(x)$$

$$+ \cdots + \binom{n+1}{i} \triangle^i f(x) + \cdots + \binom{n+1}{n+1} \triangle^{n+1} f(x).$$

Por definición: $f(x+(n+1)r) = \triangle f(x+nr) + f(x+nr)$.

Por hipótesis de inducción:

$$f(x+nr) = \binom{n}{0} f(x) + \binom{n}{1} \triangle f(x) + \binom{n}{2} \triangle^2 f(x) + \binom{n}{3} \triangle^3 f(x)$$

$$+ \cdots + \binom{n}{i} \triangle^i f(x) + \cdots + \binom{n}{n} \triangle^n f(x).$$

Además:

$$\triangle f(x+nr) = \binom{n}{0} \triangle f(x) + \binom{n}{1} \triangle^2 f(x) + \binom{n}{2} \triangle^3 f(x)$$
$$+ \cdots + \binom{n}{i} \triangle^{i+1} f(x) + \cdots + \binom{n}{n} \triangle^{n+1} f(x).$$

Sumando:

$$\begin{aligned}
\triangle f(x+nr)+f(x+nr) &= \binom{n}{0}\triangle f(x)+\binom{n}{1}\triangle^2 f(x)+\binom{n}{2}\triangle^3 f(x)\\
&+\cdots+\binom{n}{i}\triangle^{i+1} f(x)+\cdots+\binom{n}{n}\triangle^{n+1} f(x).\\
&+\binom{n}{0}f(x)+\binom{n}{1}\triangle f(x)+\binom{n}{2}\triangle^2 f(x)+\binom{n}{3}\triangle^3 f(x)\\
&+\cdots+\binom{n}{i}\triangle^{i} f(x)+\cdots+\binom{n}{n}\triangle^{n} f(x)\\
&=\binom{n}{0}f(x)+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)\triangle f(x)+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)\triangle^2 f(x)\\
&+\left(\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right)\triangle^3 f(x)+\cdots+\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)\triangle^i f(x)\\
&+\cdots+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)\triangle^n f(x)+\binom{n}{n}\triangle^{n+1} f(x)\\
&=\binom{n+1}{0}\triangle f(x)+\binom{n+1}{1}\triangle f(x)+\binom{n+1}{2}\triangle^2 f(x)\\
&+\cdots+\binom{n+1}{i}\triangle^i f(x)+\ldots\binom{n+1}{n}\triangle^n f(x)+\binom{n+1}{n+1}\triangle^{n+1} f(x).
\end{aligned}$$

Ya que: $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$, $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$ y $\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}=\binom{n+1}{i}$, lo que concluye la demostración.

Por otra parte, para $r\neq 0$, obtenemos la siguiente expresión equivalente:

$$f(x+nr)=f(x)+\frac{n\cdot r}{1}\frac{\triangle f(x)}{r}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot r^2}{1\cdot 2}\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot r^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\triangle^3 f(x)}{r^3}$$

$$+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot r^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\frac{\triangle^n f(x)}{r^n}$$

Luego, si $h\in\mathbb{R}^+$ un número tal que $nr=h$ ó $r=\frac{h}{n}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + \frac{n\cdot r}{1}\cdot\frac{\triangle f(x)}{r} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot r^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot r^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\triangle^3 f(x)}{r^3}\\
&\quad + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1\cdot r^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{\triangle^n f(x)}{r^n}\\
&= f(x) + \frac{n\cdot h}{1\cdot n}\cdot\frac{\triangle f(x)}{r} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot h^2}{1\cdot 2\cdot n^2}\cdot\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot h^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}\cdot\frac{\triangle^3 f(x)}{r^3}\\
&\quad + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1\cdot h^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot n^n}\frac{\triangle^n f(x)}{r^n}\\
&= f(x) + \binom{n}{n}\cdot\frac{h\cdot\triangle f(x)}{r} + \frac{n\cdot(n-1)}{n^2}\cdot\frac{h^2\cdot\triangle^2 f(x)}{2!\cdot r^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3}\cdot\frac{h^3\cdot\triangle^3 f(x)}{3!\cdot r^3}\\
&\quad + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n^n}\cdot\frac{h^n\cdot\triangle^n f(x)}{n!\cdot r^n}.
\end{aligned}
$$

Además, por definición de $\triangle$, se verifica que:

$$
\lim_{r\to 0}\frac{\triangle f(x)}{r} = f'(x);\ \lim_{r\to 0}\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2} = f''(x);\ \ldots\ \lim_{r\to 0}\frac{\triangle^n f(x)}{r^n} = f^{(n)}(x),
$$

ya que, por ejemplo,

$$
\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2} = \frac{\triangle f(x+r)-\triangle f(x)}{r^2} = \frac{\frac{f(x+2r)-f(x+r)}{r}+\frac{f(x+r)-f(x)}{r}}{r} \sim \frac{f'(x+r)-f'(x)}{r} \sim f''(x).
$$

De esta forma, obtenemos la aproximación de Taylor:

$$
f(x+h) \sim f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + h^3\frac{f'''(x)}{3!} + \cdots + h^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}.
$$

En este desarrollo, al considerar x fijo y h variable, la fórmula anterior corresponde a un polinomio T de grado n en la variable h ($f(x+h) = T(h)$), así:

$$
T(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n
$$

6.2. El Polinomio de Taylor

Definición: El polinomio de Taylor P de grado k de la función n-veces derivable f en t,es el polinomio en h tal que:

$$\begin{aligned} P(0) &= f(t) \\ P'(0) &= f'(t) \\ P''(0) &= f''(t) \\ &. \\ &. \\ &. \\ P^{(s)}(0) &= f^{(s)}(t) \end{aligned}$$

Consideremos el polinomio $P(h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \cdots + c_kh^k$, definido como antes. Con esto buscamos sus coeficientes:

$$f(t) = P(0) = c_0 \longrightarrow c_0 = f(t).$$

Como $P'(h) = c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \cdots + kc_kh^{k-1}$, concluimos que $P'(0) = c_1$. Así

$$f'(t) = P'(0) = c_1 \longrightarrow c_1 = f'(t).$$

Por otra parte $P''(h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + \cdots + k(k-1)c_kh^{k-2}$, por lo que $P''(0) = 2c_2$. Así

$$f''(t) = P''(0) = 2c_2 \longrightarrow c_2 = \frac{f''(t)}{2} = \frac{f''(t)}{2!}.$$

Continuando con los cálculos, $P'''(h) = 6c_3 + 24c_4h + \cdots + k(k-1)(k-2)c_kh^{k-3}$, entonces $P'''(0) = 6c_3$, así

$$f'''(t) = P'''(0) = 6c_3 \longrightarrow c_3 = \frac{f'''(t)}{6} = \frac{f'''(t)}{3!}.$$

En general,

$$P^{(n)}(h) = c_n n! + c_{n+1}(n+1)(n)(n-1)\dots 2h + c_{n+2}(n+2)(n+1)n\dots 3h^2$$
$$+ \dots + c_k k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))h^{k-n}.$$

Cuando $h = 0$, se obtiene:

$$f(t) = P^{(n)}(0) = c_n n! \longrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}.$$

Con esto el polinomio de Taylor P, queda definido de la siguiente forma:

$$P(h) = f(t) + f'(t)h + \frac{f''(t)}{2!}h^2 + \frac{f'''(t)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(s)}(t)}{k!}h^s$$

Definición: Al polinomio de Taylor antes descrito en el punto a en la variable x y de grado n, lo denotaremos por $P_{n,a}(x)$, esto es:

$$\begin{aligned} P_{n,a}(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Observación: El polinomio de Taylor de grado 1 es $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, el cual corresponde a la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. En efecto, los polinomios de Taylor son tangentes a la gráfica de f en $(a, f(a))$. En general a medida que el grado del polinomio de Taylor aumenta, más se aproxima a la función; sin embargo dado que utilizamos los valores de f y sus derivadas en a, se espera que la aproximación sea local y cerca de a.

Proposición: Si $P_{n,a}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en a, entonces $P'_{n,a}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f' en a.

Demostración: Simplemente derivamos $P_{n,a}(x)$:

$$\begin{aligned}
P'_{n,a}(x) &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)' \\
&= f'(a) + 2 \cdot \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + 3 \cdot \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^2 + \cdots + n \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} \\
&= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\
&= f'(a) + \frac{(f')'(a)}{1!}(x-a) + \frac{(f')''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}
\end{aligned}$$

Proposición: Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n$ cerca de a, y sea $P_{n,a}(x)$ el polinomio de Taylor de grado n de la función f en a. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Demostración: Basta con resolver el límite anterior, aplicando la regla de L'Hôpital varias veces. Dado que: f derivable n-veces en a, la expresión $\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$ es de la forma $\frac{0}{0}$, y además $f(x) - P_{n,a}(x)$ y $(x-a)^n$ también son n-veces derivables en a, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - P'_{n,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - P''_{n,a}(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f'''(x) - P'''_{n,a}(x)}{n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}} \\
&\vdots \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}_{n,a}(x)}{n(n-1)(n-2)\dots 2(x-a)} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}_{n,a}(x)}{(x-a)}.
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
P_{n,a}^{(n-1)}(x) &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)^{(n-1)} \\
&= (n-1)(n-2)(n-2)\ldots 1 \cdot \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + n(n-1)\ldots 2 \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a) \\
&= f^{(n-1)}(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a) \\
&= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a),
\end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (P_{n,a}(x))}{(x-a)^n} &= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a))}{(x-a)} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x\to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{(x-a)} - f^{(n)}(a) \right) \\
&= \frac{1}{n!}((f^{(n-1)})'(a) - f^{(n)}(a)) \\
&= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observación: La proposición establece que la función f y el polinomio $P_{n,a}$ se aproximan cuando x se aproxima a a, inclusive si lo comparamos con $(x-a)^n$. Esto dice que los polinomios de Taylor se comportan muy parecido a la función cerca del punto. Si aumentamos el grado del polinomio de Taylor obtenemos una mejor aproximación de la función en el punto. Observemos la siguiente figura, donde se aprecia la aproximación por polinomios de Taylor de $\cos(x)$:

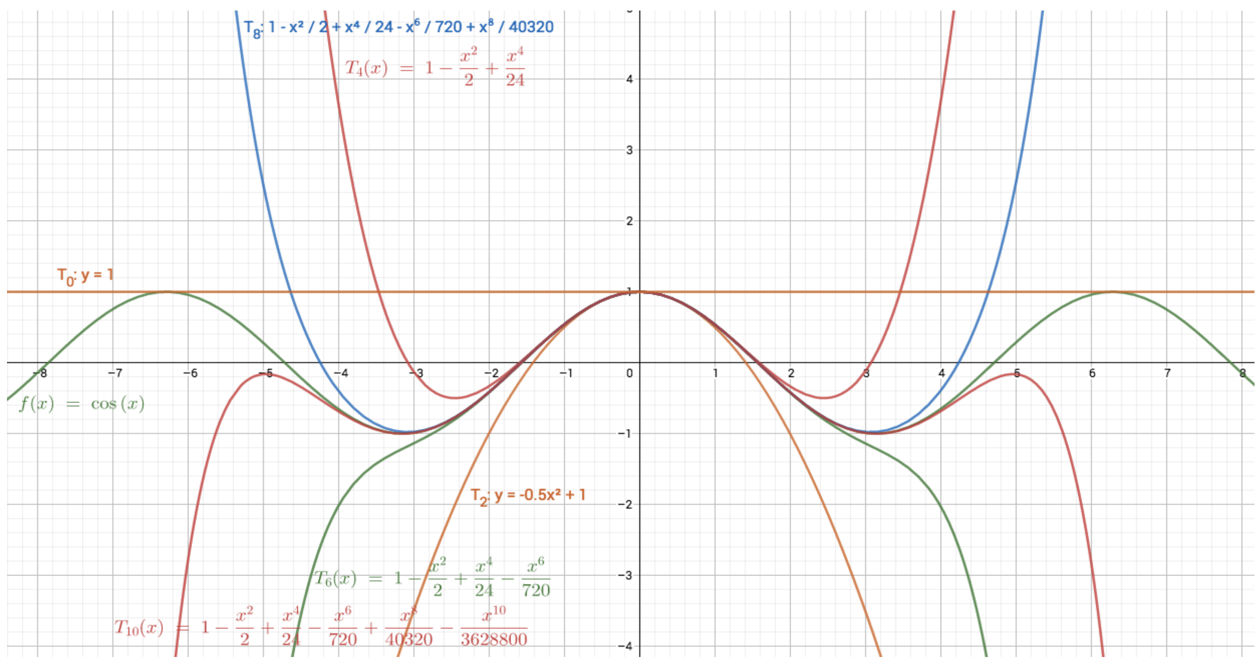


Figura 6.1: Polinomios de Taylor de la función $\cos(x)$

6.2.1. Estimación del Resto

En virtud de que el polinomio de Taylor $T_{n,a}$ de una función f, es una aproximación de f cerca de a, es razonable definir la noción de resto o error, como la siguiente expresión que llamaremos resto de orden n:

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$$

En general $R_{n,a}$ es deconocido, pero queremos hallar una expresión que permita acotarlo, con el fin de aproximar el error directamente.

Ejemplo: Acotaremos el error de orden 3 con $a = 0$. Supongamos $x > 0$.

Con esto:

$$R_{3,0}(x) = f(x) - T_{3,0}(x).$$

Por definición del polinomio de Taylor: $R_{3,0}(0) = f(0) - T_{3,0}(0) = 0$ y $R'_{3,0}(0) = R''_{3,0}(0) = R'''_{3,0}(0) = 0$. Luego, por el teorema del Valor medio de Cauchy, aplicado sobre $R_{3,0}$ y la función $g(x) = x^4$, ambas continuas en $[0, x]$, derivables en $(0, x)$ y satisfaciendo $g'(x) \neq 0, \forall x \in (0, x)$, sabemos que existe $\xi_1 \in (0, x)$ tal que:

$$\frac{R_{3,0}(x) - R_{3,0}(0)}{x^4 - 0^4} = \frac{R'_{3,0}(\xi_1)}{4\xi_1^3}.$$

Aplicando nuevamente el teorema de Cauchy sobre $R'_{3,0}(x)$ y $g'(x) = 4 \cdot x^3$, en el intervalo $(0, \xi_1)$, existe $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ tal que:

$$\frac{R'_{3,0}(\xi_1) - R'_{3,0}(0)}{4{\xi_1}^3 - 4 \cdot 0^3} = \frac{R''_{3,0}(\xi_2)}{3 \cdot 4 \cdot \xi_2^2}.$$

De la misma forma, aplicando el teorema de Cauchy sobre $R''_{3,0}(x)$ y $g''(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^2$ en el intervalo $(0, \xi_2)$, existe $\xi_3 \in (0, \xi_2)$ tal que:

$$\frac{R''_{3,0}(\xi_2) - R''_{3,0}(0)}{3 \cdot 4 \cdot {\xi_2}^2 - 3 \cdot 4 \cdot 0^2} = \frac{R'''_{3,0}(\xi_3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi_3}.$$

Repitiendo el argumento, existe $c \in (0, \xi_3)$ tal que:

$$\frac{R'''_{3,0}(\xi_4) - R'''_{3,0}(0)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \xi_4 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot 0} = \frac{R^{(4)}_{3,0}(c)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

como $(0,c) \subseteq (0,\xi_3) \subseteq (0,\xi_2) \subseteq (0,\xi_1) \subseteq (0,x)$, entonces $x \in (0,x)$, y ya que el polinomio $P_{3,0}(x)$ tiene grado a lo más 3, entonces $P^{(4)}_{3,0}(x) = 0$, entonces para cualquier valor de x tenemos que:

$$R^{(4)}_{3,0}(c) = f^{(4)}(c) - P^{(4)}_{3,0} = f^{(4)}(c) - 0 = f^{(4)}(c),$$

reuniendo las igualdades anteriores y el hecho que $R^{(n)}_{3,0}(0) = 0$ (n=0,1,2,3):

$$\frac{R_{3,0}(x)}{x^4} = \frac{R'_{3,0}(\xi_1)}{4\xi_1^3} = \frac{R''_{3,0}(\xi_2)}{3\cdot 4\cdot \xi_2^2} = \frac{R'''_{3,0}(\xi_3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \xi_3} = \frac{R^{(4)}_{3,0}(c)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

entonces

$$\frac{R^{(4)}_{3,0}(c)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!},$$

por lo tanto

$$\frac{R_{3,0}(x)}{x^4} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \longrightarrow R_{3,0}(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\cdot x^4.$$

Con esto conjeturamos una expresión general para el error de orden n en a, para algún $c \in (a,x)$, si $x > a$:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

Obteniendo así la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot (x-a)^{(n+1)}, \end{aligned}$$

Para algún $c \in (a,x)$, si $x > a$, o bien $c \in (x,a)$, si $x < a$.

6.3. Ejemplos y Aplicaciones

El estudio de los polinomios de Taylor tienen múltiples aplicaciones, dentro de las cuáles podemos nombrar:

- Prueba de la iracionalidad de e
- Aproximación del valor de π
- Cálculo de límites
- Extremos de una función
- Aproximación numérica de integrales definidas

6.3.1. Prueba de la Irracionalidad de e

Supongamos que $e = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$, y sea $n \in \mathbb{N}$, con $n > b$ tal que:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Evaluando en $x = 1$, obtenemos:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!},$$

multiplicando por $n!$ y desenrollando la sumatoria, se tiene que:

$$n! \cdot e = \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n! \cdot e^c}{(n+1)!},$$

como $n! \cdot e = n! \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ y $(\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}) \in \mathbb{Z}$, entonces: $\frac{n! \cdot e^c}{(n+1)!} \in \mathbb{Z}$.

Por otra parte, si $c \in (0, 1)$, entonces: $0 < 1 < e^c < e^1 = e$, es decir $0 < \frac{e^c}{n+1} < \frac{e}{n+1}$, con esto, si n es grande:

$$\frac{e}{n+1} < 1 \longrightarrow 0 < \frac{e^c}{n+1} < 1,$$

de esta manera: $\frac{e^c}{n+1} \notin \mathbb{Z}$, por lo tanto: $\frac{n!\cdot e^c}{(n+1)!} \notin \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción con la supuesta racionalidad de e, por lo tanto $e \in \mathbb{I}$.

6.3.2. Aproximación del valor de π

Para esto recordemos que:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ahora, buscaremos el polinomio de Taylor de $y = \frac{1}{1+t^2}$, consideremos la siguiente igualdad:

$$(1-p)(1+p+p^2+p^3+...+p^k) = 1-p^{k+1}.$$

Reemplazando p por $-t^2$, y dividiendo por $1-p = 1+t^2$, obtenemos:

$$1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^{k+1}t^{2k+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{k+1}t^{2k+2}}{1+t^2}.$$

Con esto,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{k+1}t^{2k+2}}{1+t^2}.$$

Ahora, integrando entre o y x a ambos lados de la igualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) dt \\
&= \int_0^x \left(1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^n t^{2n}\right) dt + \int_0^x \left((-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) dt \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) dt.
\end{aligned}$$

Para establecer que el polinomio $P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, es el polinomio de Taylor de $\arctan(x)$ de grado $2n+1$, en torno al cero es necesario comprobar que $\lim_{x\to 0} \frac{arctan(x)-P(x)}{x^{2n+1}} = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-P(x)}{x^{2n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\int_0^x\left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt}{x^{2n+1}}=(-1)^{n+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt}{x^{2n+1}},$$

acotamos el argumento del límite anterior:

$$\left|\frac{\int_0^x\left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt}{x^{2n+1}}\right|\leq\frac{\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}}{|x|^{2n+1}}=\frac{|x|^2}{2n+3}=\frac{x^2}{2n+3},$$

ya que $|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt|\leq|\int_0^x t^{2n+2}|=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$. Como $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2n+3}=0$, deducimos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt}{x^{2n+1}}=0.$$

Finalmente, el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de $y=\arctan(x)$ en torno al cero es:

$$P_{2n+1,0}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Por otra parte, si observamos la integral anterior, para $|x|\leq 1$:

$$\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\leq\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\leq\frac{1}{2n+3}.$$

Por lo tanto :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|=0.$$

De esta manera, para valores grandes de n, el polinomio anterior será cada vez más parecido a la función $\arctan(x)$, por lo tanto podemos utilizar este polinomio y el hecho que $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$, para aproximar el valor de π:

$$\pi\sim 4\cdot P_{2n+1,0}(1)=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\right).$$

Sin embargo, esta aproximación bastante “lenta”, dado que el polinomio de Taylor se calculó en torno al cero. Una buena aproximación del valor de π se obtiene para valores de n relativamente grandes:

Grado	Suma	Valor Aproximado
1	4	4
3	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$	2,666666666
9	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)$	3.339682540
19	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{19}\right)$	3.041839619
99	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{99}\right)$	3.121594653
999	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{999}\right)$	3.139592656
49999	$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{49999}\right)$	3.141552653

Tabla 6.1: Aproximación de π

6.3.3. Cálculo de Límites

Definición: Dada una función f, diremos que $f(x) = o(g(x))$ en x ssi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(a)} = 0$. Con esta definición si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ en una vecindad de a, se tiene que $f(x) = P_{n,a}(x) + g(x)$, donde $g(x) = o((x-a)^n)$.

Así podemos escribir aquella parte del polinomio de Taylor que nos intereza para el cálculo del límite, el resto es “despreciable”.

Utilizamos el polinomio de Taylor de $\sin(x)$ y la definición anterior, para el cálculo del siguiente límite indefinido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{6} - \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

De manera análoga, calculamos el siguiente límite indefinido:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))}{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 - o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 - o(x^3)} \\
&= \lim \frac{-\frac{1}{3} - \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} - \frac{o(x^3)}{x^3}} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

6.3.4. Extremos de una Función

A partir del polinomio de Taylor podemos dar una justificación sobre la existencia de extremos de una función derivable. Sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ y consideremos su polinomio de Taylor en a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n.a}(x)$$

- Supongamos que $f'(a) = 0$ para x cercano a a. Entonces la función $y = f(x)$ tiene un comportamiento aproximado a: $y = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2$. Esta curva corresponde a una parábola con vértice en $(a, f(a))$. Por lo tanto, es inmediato que si $f''(a) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en $x = a$, y por otra parte, si $f''(a) < 0$, la función tiene un máximo relativo en $x = a$.

- Si $f''(a) = 0$ para x cercano a a, entonces la función $y = f(x)$ tiene un comportamiento aproximado a: $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{6}f'''(a)\cdot(x-a)^3$. Esta curva tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$ y la pendiente de su recta tangente será $f'(a)$. Si $f'(a) = 0$, la recta tangente en el punto de inflexión será horizontal.

6.3.5. Cálculo de Integrales Definidas

Otra aplicación interesante es el cálculo de integrales impropias. Supongamos que queremos evaluar la siguiente integral con una precisión de 5 decimales:

$$I = \int_0^{0,1} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Observemos que esta integral tiene límite de integración superior cercano al cero, debido a esto podemos aproximar $\sin(x)$ por su correspondiente polinomio de Taylor en torno al cero. Consideremos polinomios:

$$
\begin{aligned}
T_{1,0}(x) &= x \\
T_{3,0}(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\
T_{5,0}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
T_{7,0}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.
\end{aligned}
$$

Aproximamos la función $\sin(x)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{0,1} \frac{\sin(x)}{x} dx \sim \int_0^{0,1} \frac{x}{x} dx = 0{,}1 \\
&\int_0^{0,1} \frac{\sin(x)}{x} dx \sim \int_0^{0,1} \frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \underline{0{,}0999}444444 \\
&\int_0^{0,1} \frac{\sin(x)}{x} dx \sim \int_0^{0,1} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x} dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx = \underline{0{,}09994}446111 \\
&\int_0^{0,1} \frac{\sin(x)}{x} dx \sim \int_0^{0,1} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}}{x} dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}\right) dx = \underline{0{,}09994}446110
\end{aligned}
$$

De manera análoga, evaluamos la integral $\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \sim \int_0^{0,1} (1 - x^2) dx = \underline{0{,}09966}666666 \\
&\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \sim \int_0^{0,1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \underline{0{,}09966}766666 \\
&\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \sim \int_0^{0,1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx = \underline{0{,}09966}766428
\end{aligned}
$$

En ambos casos, basta con aproximar f por el segundo polinomio de Taylor los que aproximan rápidamente a la función dada, en el intervalo $[0, 0{,}1]$.

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de la presente tesis se logró construir una propuesta didáctica que permite el aprendizaje significativo del polinomio de Taylor.

Esto se ha realizado fundamentalmente, a través de la metodología de investigación basada en la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1998), cuyo sustento se encuentra en La Teoría de Situaciones Didácticas y Transposición Didáctica, e integrándola a una propuesta para la evaluación actividades aprendizaje basadas en la resolución de problemas en el aula.

Al centrarnos en la propuesta didáctica inicial y luego de implementar la metodología de investigación propuesta. Podemos concluir que se han logrado los objetivos de aprendizaje tanto en la actividad 1 como en la actividad 2, sin embargo, en las actividades 3 y 4 el logro ha sido parcial. En las primeras dos los estudiantes han resuelto la tarea propuesta y han puesto en juego correctamente los conocimientos matemáticos necesarios para resolverla, desde un punto de vista puramente algebraico, utilizando una estrategia de ensayo y error, y sin profundizar en el conocimiento que justifica las acciones realizadas al resolver el problema. Finalmente, el registro gráfico no es puesto en juego. Por otra parte, en la tercera actividad, los estudiantes comprenden con relativa profundidad las ideas que hay detrás del problema, sin embargo plantean estrategias de resolución incompletas, que les conduce a analizar sólo un caso particular del problema. Finalmente, en la cuarta actividad, los estudiantes resuelven la tarea algebraicamente y sin mayores justificaciones, pero se detectan algunas dificultades en la comprensión del problema y en el conocimiento matemático necesario para resolver la tarea, los estudiantes no han resultado beneficiados con las gráficos presentes ni han profundizado en este registro por sus propios medios.

De acuerdo a lo observado en la implementación de la propuesta inicial, y comparando el análisis a priori con el análisis a posteriori a través de la confrontación de ambos. El rediseño de las actividades ha incluido un conjunto de preguntas de activación que permiten al estudiante en una segunda aplicación, profundizar sobre las estrategias de resolución en los casos logrados y plantear una estrategia concluyente en los casos en que el logro fue parcial, además de profundizar en las ideas matemáticas necesarias para soslayar las dificultades detectadas en el desarrollo de las actividades. Finalmente, la propuesta se ha enriquecido al situar el registro gráfico como un elemento central en el análisis de las diferentes tareas a través del uso de geometría dinámica con *Geogebra*, para dar lugar a la observación inicial del fenómeno geométrico e inducir la argumentación geométrica, muy útil para entender el fenómeno local y conectarlo con los registros que el estudiante ya conoce.

Por otra parte, la caracterización del estado de desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes, a través de la implementación de una rúbrica de evaluación y la observación durante la ejecución de la actividad, ha permitido capturar de una forma objetiva las actitudes y desempeños de cada grupo frente a la tarea matemática, basada en una actividad de resolución de problemas en el aula. Esto ha permitido observar los argumentos, justificaciones, estrategias de resolución, modos de representación y el desempeño en el trabajo grupal, junto con el aprendizaje y las diferentes dificultades observadas en las actividades.

7.1. La Matemática en Juego

Se ha realizado un profundo estudio del objeto matemático en estudio, a partir de la construcción del conocimiento que subyace al polinomio de Taylor, hasta su formalización, se han desarrollado las justificaciones necesarias, junto con las principales aplicaciones y consecuencias de esta noción, con el fin de enriquecer cualquier propuesta presente y futura, y fundamentalmente enriquecer el conocimiento del docente de matemática en torno al polinomio de Taylor.

Con esto, poder entregar herramientas, a través de un profundo análisis sobre el saber a enseñar y el saber enseñado, en el contexto del polinomio de Taylor. Ya sea para resignificar el dicurso matemático y didáctico en torno a la enseñanza de esta noción, toda vez que el docente universitario se ha tornado un reproductor de conocimiento y no en un mediador para el aprendizaje efectivo, como para fortalecer la importancia de su aprendizaje en el contexto del estudio del cálculo diferencial e integral universitario, creando espacios de análisis y reflexión donde pocas veces existe.

7.2. Trabajo Futuro

De acuerdo a los estudios realizados, estos pueden continuar a través de dos líneas claramente definidas. La primera consiste en utilizar el instrumento de evaluación propuesto, para la evaluar actividades de aprendizaje basadas en resolución de problemas en el aula, de forma sistemática y continua, con el fin de calibrarlo y observar mayor confiabilidad en la observación del desarrollo de la competencia de resolución de problemas en el estudiante. Con esto, profundizar sobre los efectos que tiene esta como metodología de enseñaza, los aprendizaje del estudiante, y observar como la implementación de esta metodología modifica, tanto los saberes a enseñar, como aquellos saberes enseñados.

Junto con lo anterior, es necesario avanzar con el diseño, implementación y sistematización de instrumentos que permitan capturar las dimensiones socio-afectivas y meta-cognitivas presentes en toda actividad de enseñanza-aprendizaje, basada en la resolución de problemas.

La segunda es utilizar la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, e iterar desde el análsis a priori hasta la reformulación de la situación didáctica propuesta, pasando por el análisis a posteriri y confrontación, con el fin de ajustar la situación didáctica existente y lograr aprendizajes significativos en torno al estudio del Polinomio de Taylor y sus aplicaciones.

Finalmente, es fundamental revisar con profundidad y seriedad la matemática enseñada y las metodologías de enseñanza que predominan la educación Universitaria. Nuestros estudiantes requieren estrategias de aprendizaje diferentes, consistentes con el mundo en el cual están insertos. Por esta razón, es necesario modificar el discurso académico actual y conducirlo hacia nuevos paradigmas de enseñanza, siendo la resolución de problemas, la didáctica y el uso intencionado de tecnologías, nuestros mejores aliados.

Bibliografía

[1] Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P., *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Colombia, Una empresa docente, 1998.

[2] Godino J., Batanero C., Contreras A., Estepa A., Lacasta E., Wilhelmi M., *La Ingeniería Didáctica como Investigación Basada en el Diseño*, CERME 8, Turquía, 2013.

[3] Brousseau, G, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[4] Chevallard, Y, *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*, AIQUE, Argentina, 1991.

[5] Cortadellas, O., *Una pequeña novela histórica sobre Series de Taylor y Series de Fourier o diálogos de dos estudiantes de Gotinga*, Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, 2005.

[6] Bartle R., Sherbert D., *Introduction to Real Analysis*, University of Illinois, Fourth Edition, Urbana-Champaign, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[7] OECD, *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, Paris, OECD Publishing, 2012.

[8] Cerda, G.,*Inteligencia lógico-matemática y éxito académico: un estudio psicoevolutivo. Tesis doctoral Universidad de Córdoba*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2012.

[9] Gargallo, B., Suárez-Rodríguez J. y Pérez-Pérez C., *El cuestionario CEVEAPEU. Un instrumento para la evaluación de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes universitarios*, Revista electrónica de investigación y evaluación educativa, págs. 1-31, 2009.

[10] Monereo, C., *Ser estratégico y autónomo aprendiendo*, Barcelona: Grao, 2001.

[11] Muñoz, J. M., & Mato, M. D., *Elaboración y estructura factorial de un cuestionario para medir la "ansiedad hacia las matemáticas" en alumnos de Educación secundaria obligatoria*, Revista Galego-portuguesa de psicoloxía e educación, págs. 221-231, 2007.

[12] Pérez, O., *¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas?*, Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, págs. 267-297, 2006.

[13] Rico, L., *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*, Revista de Educación, extraordinario, págs. 275-294, 2006.

[14] Baquero, R., *Vygotsky y el Aprendizaje Ascolar*, Buenos Aires: Aique, 1997.

[15] Pólya, G., *How to Solve It*, Princeton, 1945.

[16] Kilpatrick, J., *A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.)*, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1985.

[17] Geogebra (2018), *Geogebra Clásico (6)*, Recuperado de: https://www.geogebra.org/.