UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de matemática y ciencia de la computación.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO: UNA ARTICULACIÓN ENTRE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA Y EL CÁLCULO DE PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD.

Andrea Ivonne Pinto Vergara

Profesora Guía: **Daniela Soto Soto.**

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al Título de Magister en Educación Matemática

Santiago – Chile
2018

© Andrea Ivonne Pinto Vergara

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra sólo con fines académicos y no comerciales, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Para aquellos que no sepan Matemáticas es difícil entender que sean bellas, la belleza más profunda de la naturaleza. Si quieres aprender sobre la naturaleza, apreciarla, es necesario entender el lenguaje en el que habla.

Richard Feynman.

Resumen

Existe un vacío entre la matemática de la escuela y la matemática presente en primer año de ingeniería de universidad, ocasionándose una desarticulación entre dichos niveles, generado por el discurso matemático escolar imperante, confrontándose una matemática centrada en los objetos matemáticos de nivel superior como lo son: el límite, la derivada, la integral, entre otras; y centrada en los objetos matemáticos del nivel medio, como lo son las funciones, polinomios, ecuaciones, entre otros. Se evidencia la necesidad de un puente entre la matemática de ambos niveles, es por ello que urge realizar una articulación entre la matemática del nivel medio con la matemática del nivel superior, a partir del rediseño del dME.

La derivada, desde la razón de cambio y la variación, resulta ser un concepto esencial en cálculo de primer año de Ingeniería, plan común, pues es fundamental para dar mayor significación a conceptos complejos como lo son: el límite, la integral y la misma derivada. Es por ello que se diseñará una situación de aprendizaje que sea un sostén para dicha articulación, bajo la mirada de la Socioepistemología que permite resignificar dichos objetos matemáticos, rediseñando el discurso matemático escolar, considerando los fenómenos del mismo, como lo son la adherencia, la exclusión y la opacidad; a la luz del pensamiento y lenguaje variacional, teniendo en cuenta al aprendiz, el escenario sociocultural en el cual se centrara la situación de aprendizaje y el saber mismo. Creando Actividades, contemplando las Prácticas de Referencia y la Práctica Social. Teniendo en cuenta los usos de la gráfica.

Se considerar en la construcción de la situación de aprendizaje el análisis epistemológico histórico. El contexto que utilizaremos para el diseño la situación de aprendizaje es La Ley del Enfriamiento de Newton. Resignificando la derivada a partir de la razón de cambio desde una situación de variación. Considerando los tres momentos para rediseñar el discurso matemático escolar.

La situación será aplicada en un contexto de aula, y no pretende enseñar los resultados de la misma, sino se brinda la oportunidad de que los estudiantes de cuarto medio, con alto interés por la asignatura y con interese futuros de seguir estudiando alguna ingeniería, aprendan matematizando, organizando y reorganizando su realidad.

Para analizar los resultados de esta investigación se aplicará la Metodología de la Ingeniería Didáctica, con sus cuatro fases: Análisis preliminar, *Concepción y análisis a priori, Experimentación y Análisis posteriori y evaluación.* Finalmente se propone rediseñar la situación de aprendizaje a la luz de los datos obtenidos.

Abstract

There is a gap between the mathematics of the school and the mathematics present in the first year of university engineering, causing a disarticulation between these levels, generated by the prevailing school mathematical discourse, confronting a mathematics focused on higher level mathematical objects as they are: the limit, the derivative, the integral, among others; and centered on mathematical objects of the middle level, such as functions, polynomials, equations, among others. The need for a bridge between the mathematics of both levels is evident, that is why it is urgent to make an articulation between the mathematics of the medium level and the mathematics of the superior level, from the redesign of the dME.

The derivative, from the rate of change and variation, turns out to be an essential concept in the calculation of the first year of Engineering, a common plan, since it is fundamental to give greater meaning to complex concepts such as: the limit, the integral and the same derivative That is why a learning situation will be designed that will be a support for this articulation, under the eyes of the Socioepistemology that allows resignifying said mathematical objects, redesigning the school mathematical discourse, considering its phenomena, such as adherence, exclusion and opacity; in the light of thought and variational language, taking into account the apprentice, the sociocultural scenario in which the learning situation and knowledge itself will focus. Creating Activities, contemplating the Reference Practices and Social Practice. Taking into account the uses of the graph.

The historical epistemological analysis will be considered in the construction of the learning situation. The context we will use to design the learning situation is Newton's Law of Cooling. Resignifying the derivative from the rate of change from a situation of variation. Considering the three moments to redesign the school mathematical discourse.

The situation will be applied in a classroom context and does not intend to teach the results of the same, but provides the opportunity for fourth-year students, with high interest in the subject and with future interest to continue studying some engineering, learn mathematizing, organizing and reorganizing their reality.

To analyze the results of this research, the Methodology of Didactic Engineering will be applied, with its four phases: Preliminary analysis, Conception and a priori analysis, Experimentation and posteriori analysis and evaluation. Finally, it is proposed to redesign the learning situation in light of the data obtained.

A mis hombres, a mi madre y mis abuelos.

Agradecimientos.

Dar las gracias a todos los que me apoyaron en este periodo. Gracias a mi marido por enseñarme que, si se puede a pesar de todo. A mis hijos, por cada minuto que me dieron para terminar este sueño. Gracias a mi madre, por cada palabra de aliento. Gracias a mis abuelos, por instarme a siempre creer y crecer. Gracias a todos los profesores que estuvieron y fueron parte de mi formación. Gracias a Margaret y a Elena por estar siempre ahí. Gracias a Daniela por guiarme en esta investigación.

Tabla de contenidos

INTRODUCCIÓN. 1

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES. 4

1.1. PROBLEMÁTICA. 4

1.2. ESTADO DEL ARTE. 5

1.3. ANTECEDENTES EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR. 15

1.4. EN EL CURRICULUM DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. 17

1.5. ANTECEDENTES EN LA EDUCACIÓN MEDIA. 22

1.6. OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN. 32

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO 34

2.1. LA MATEMÁTICA EDUCATIVA Y LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLOGÍA 34

2.2. EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. 38

2.3. EL CONTEXTO SOCIAL. 40

2.4. LOS FENÓMENOS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. 43

2.5. LA MATEMÁTICA FUNCIONAL: MODELACIÓN GRAFICACIÓN. 48

2.6. EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL. 52

CAPÍTULO 3: EVOLUCIÓN HISTÓRICA. 59

3.1. CONTEXTO HISTÓRICO DE LA DERIVADA. 59

3.2. LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON. 82

CAPÍTULO 4: ASPECTOS METODOLÓGICOS. 83

4.1. DISEÑO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE. 83

4.2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN: INGENIERÍA DIDÁCTICA. 88

CAPÍTULO 5: LA INVESTIGACIÓN. 90

5.1. ANÁLISIS PRELIMINAR 90

5.2. ANÁLISIS A PRIORI. 92

5.3. EXPERIMENTACIÓN Y RECOLECCIÓN DE DATOS 109

5.4. ANÁLISIS A POSTERIORI. 148

6. CONCLUSIONES. 154

7. BIBLIOGRAFÍA 162

8. ANEXOS. 168
8.1. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE APLICADA..... 168
8.2. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE REDISEÑADA. 173

Índice de tablas

Tabla 1: Dimensiones y categorías de la competencia matemática (Mineduc, 2013) 23

Tabla 2: Ampliación de la Socioepistemología del Cálculo y el Análisis. (Del Valle, 2015) 52

Tabla 3: Tabla similitudes de diferencias en los trabajos Newton y Leibniz, propuesta por Mateus (2011), ...77

Tabla 4: Conformación de la Situación de Aprendizaje, considerando los Momentos, SV y TV. 85

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: pág. 75, (George B. Thomas, 2006).....19

Ilustración 2: pág. 76, (George B. Thomas, 2006).....20

Ilustración 3: pág. 97, (Larson & Edwards, 2010).....21

Ilustración 4: pág. 143, (Stewart J, 2012). 22

Ilustración 5: Texto escolar Iº medio, entregado por Mineduc. pág. 124, (Fuentes, Maldonado, & Marambio, 2017). 28

Ilustración 6: Texto escolar IIº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio propuesto 10, pág. 169, (Martínez., Rupin, Jiménez, & Lorna, 2017).....29

Ilustración 7: Texto escolar IIIº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio 18, página 247, (Gottlieb. & Blumenthal., 2017).....30

Ilustración 8: Texto escolar IVº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio propuesto, página 32, (Venegas, Gutiérrez, & Muñoz, 2016).....30

Ilustración 9: Triple demarcación del Conocimiento a las Prácticas.....35

Ilustración 10: Principios de la Teoría Sociepistemológica. 37

Ilustración 11: Triangulo didáctico extendido. (Cantoral, 1998). 41

Ilustración 12: Triángulo didáctico caracterizado (Cantoral, 2014). 41

Ilustración 13: Triángulo didáctico en la Socioepistemología. (Cantoral, 2013). 42

Ilustración 14: Construcción Social del Conocimiento Matemático (Montiel, 2005).....43

Ilustración 17: Matemática Escolar y la Construcción Social del Conocimiento. 44

Ilustración 15: dME sus fenómenos y la CSCM. 45

Ilustración 16: Contradicción en las creencias de la matemática.....45

Ilustración 18: Conocimiento de la gente y de expertos. 46

Ilustración 19: Perspectivas del conocimiento.....49

Ilustración 20: Modelo de interacción de los elementos del PyLVAR.....54

Ilustración 21.: Interacción dinámica de las relaciones en PyLVAR.....58

Ilustración 22: Evolución de la Derivada en una línea de tiempo.....60

Ilustración 23: Hueso de Ishago expuesto en el Real Instituto Belga de Ciencias Naturales.....61

Ilustración 24: Tablilla Babilónica, registro ciclo venusiano. 62

Ilustración 25: Representación del Cambio realizada por Oresme. 66

Ilustración 26: Representación de la velocidad decreciente de manera Uniforme. Longitud y Latitud.....66

Ilustración 27: Representación de las variaciones, según Oresme.....67

Ilustración 28: Representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. (Galilei, 1638, pág173).....69

Ilustración 29: División del segmento B, propuesto por Fermat.....72

Ilustración 30: Aplicación del método de Fermat para los extremos a la determinación de las normales y tangentes a una curva. (Collette, 2000, pág. 29).....72

Ilustración 31: Vector velocidad como composición del movimiento horizontal y vertical de Newton. 74

Ilustración 32: Tratamiento de Newton al problema de la tangente. 75

Ilustración 33: L'analyse infinitésimale en su segundo volumen, Euler (1797), página 437.....79

Ilustración 34: Esquema de diseño del Instrumento de la Situación de Aprendizaje. 86

Ilustración 35: Alternativas propuestas para la TV a) Situación Variacional 2, Primer Momento. 94

Ilustración 36:Código Variacional esperado para TV2, Situación Variacional 3, Primer momento. 96

Ilustración 37: Código Variacional esperado en TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento. 97

Ilustración 38: Código Variacional esperado en TV f) Situación Variacional 4. 98

Ilustración 39: Código Variacional esperado en TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 100

Ilustración 40: Código Variacional esperado en TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 100

Ilustración 41:Gráfica propuesta para Situación Variacional 1, Tercer Momento. 103

Ilustración 42: Gráfica propuesta para Situación Variacional 2, Tercer Momento. 106

Ilustración 43: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 1, Primer Momento.....109

Ilustración 44: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 1, Primer Momento.....110

Ilustración 45: Alternativas propuestas para la TV a) Situación Variacional 2, Primer Momento. 111

Ilustración 46: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.....112

Ilustración 47: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.....112

Ilustración 48: Respuesta estudiante nº9: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.....112

Ilustración 49: Respuesta estudiante nº1: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.....113

Ilustración 50: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.....113

Ilustración 51: Respuesta estudiante nº7: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.....113

Ilustración 52: Respuesta estudiante nº9: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.....114

Ilustración 53: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.....114

Ilustración 54: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.....115

Ilustración 55: Respuesta estudiante nº9: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.....115

Ilustración 56: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.....115

Ilustración 57: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.....116

Ilustración 58: Respuesta estudiante nº10: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento...116

Ilustración 59: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.....117

Ilustración 60: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.....117

Ilustración 61: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.....117

Ilustración 62: Respuesta estudiante nº7: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.....117

Ilustración 63: Respuesta estudiante nº4: TV a), Situación Variacional 4, Primer Momento.....118

Ilustración 64: Respuesta estudiante nº3: TV a), Situación Variacional 4, Primer Momento.....118

Ilustración 65: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.....119

Ilustración 66: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.....119

Ilustración 67: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.....120

Ilustración 68: Respuesta estudiante nº6: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.....120

Ilustración 69: Respuesta estudiante nº4: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.....120

Ilustración 70: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.....120

Ilustración 71: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.....121

Ilustración 72: Respuesta estudiante nº8: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.....121

Ilustración 73: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento...121

Ilustración 74: Respuesta estudiante nº2: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento.....122

Ilustración 75: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento.....122

Ilustración 76: Respuesta estudiante nº7: TV e), Situación Variacional 4, Primer Momento.....122

Ilustración 77: Respuesta estudiante nº1: TV e), Situación Variacional 4, Primer Momento.....123

Ilustración 78: Respuesta estudiante nº5: TV f), Situación Variacional 4, Primer Momento. 123

Ilustración 79: Respuesta estudiante nº10 TV f), Situación Variacional 4, Primer Momento.....123

lustración 80: Respuesta estudiante nº8: TV g), Situación Variacional 4, Primer Momento. 124

Ilustración 81: Respuesta estudiante nº6: TV a), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 124

Ilustración 82: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 125

Ilustración 83: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 125

Ilustración 84: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 126

Ilustración 85: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 126

Ilustración 86: Respuesta estudiante nº3: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 127

Ilustración 87: Respuesta estudiante nº3: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 128

Ilustración 88: Respuesta estudiante nº4: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 128

Ilustración 89: Respuesta estudiante nº5: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 128

Ilustración 90: Respuesta estudiante nº8 TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento..128

Ilustración 91: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 128

Ilustración 92: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 129

Ilustración 93: Respuesta estudiante nº1: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 129

Ilustración 94: Respuesta estudiante nº5: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 130

Ilustración 95: Respuesta estudiante nº8: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 130

Ilustración 96: Respuesta estudiante nº9: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 131

Ilustración 97: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 131

Ilustración 98: Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 1, Segundo Momento. 132

Ilustración 99: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 132

Ilustración 100: Respuesta estudiante nº3: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 132

Ilustración 101: Respuesta estudiante nº1: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 133

Ilustración 102: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 133

Ilustración 103: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 134

Ilustración 104: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 134

Ilustración 105: Respuesta estudiante nº6: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 135

Ilustración 106: Respuesta estudiante nº7: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 135

Ilustración 107: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento. 136

Ilustración 108: Gráfica propuesta para Situación Variacional 1, Tercer Momento. 137

Ilustración 109: Respuesta estudiante nº6: TV a), Situación Variacional 1, Tercer Momento...137

Ilustración 110: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 1, Tercer Momento...138

Ilustración 111: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 1, Tercer Momento...138

Ilustración 112:Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 1, Tercer Momento....138

Ilustración 113: Respuesta estudiante nº8: TV d), Situación Variacional 1, Tercer Momento...139

Ilustración 114: Respuesta estudiante nº7: TV d), Situación Variacional 1, Tercer Momento...139

Ilustración 115: Respuesta estudiante nº8: TV e), Situación Variacional 1, Tercer Momento...140

Ilustración 116: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 1, Tercer Momento. 140

Ilustración 117: Respuesta estudiante nº8: TV f), Situación Variacional 1, Tercer Momento....140

Ilustración 118: Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 1, Tercer Momento..141

Ilustración 119:Respuesta estudiante nº8: TV g), Situación Variacional 1, Tercer Momento....141

Ilustración 120: Gráfica propuesta para Situación Variacional 2, Tercer Momento. 142

Ilustración 121: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 2, Tercer Momento...142

Ilustración 122: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 2, Tercer Momento...143

Ilustración 123: Respuesta estudiante nº10: TV b), Situación Variacional 2, Tercer Momento. 143

Ilustración 124: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 2, Tercer Momento...143

Ilustración 125: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 2, Tercer Momento...144

Ilustración 126: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 2, Tercer Momento. 144

Ilustración 127: Respuesta estudiante nº4: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento...144

Ilustración 128: Respuesta estudiante nº9: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento...145

Ilustración 129: Respuesta estudiante nº10: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento. 145

Ilustración 130: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 3, Tercer Momento...145

Ilustración 131: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 3, Tercer Momento...146

Ilustración 132: Respuesta estudiante nº1: TV d), Situación Variacional 3, Tercer Momento...146

Ilustración 133: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 3, Tercer Momento. 146

Ilustración 134: Respuesta estudiante nº5: TV e), Situación Variacional 3, Tercer Momento...147

Ilustración 135:Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento...147

Ilustración 136: Respuesta estudiante nº2: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento....147

Ilustración 137: Respuesta estudiante nº1: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento....148

Introducción.

¿Por qué la matemática?, esa es una pregunta que me realizo al inicio de este trabajo de investigación para obtener el grado de Magister en Educación Matemáticas. Es mi punto de partida. Me permito contarles que desde siempre me ha gustado las matemáticas, desde muy pequeña me encantaba contar y descubrir que detrás de cada objeto, cosa, animal o persona está la matemática escondida, de una forma u otra. Es universal, es un juego, es real y permite ver con otros ojos a la misma naturaleza, porque muchas veces descubrimos patrones, comportamientos o formas que están unidas a estas matemáticas que tanto me encantan.

Decidí enseñar matemáticas para poder mostrarles a mis alumnos lo bello y majestuoso que vive en esta disciplina. Es maravilloso cuando uno de mis estudiantes entiende lo que hay detrás de un problema, ejercicio o desafío. Pero también me es muy frustrante ver como se rinden frente a las matemáticas, porque creen no saber o simplemente por creer que no son buenos. Son justamente estos jóvenes los que me hacen movilizarme para poder ayudarlos, y mostrarles que si pueden, que si son capaces de entender este mundo desde la óptica de las matemáticas.

El paso desde el colegio a la universidad no es nada de fácil, veo a muchos jóvenes que les cuesta mucho comprender las materias correspondientes a primer año de universidad. Muchos de mis ex alumnos de secundaria ingresaron a la educación superior, y a pesar de ser estudiantes destacados, y sobresalientes, les costó mucho superar aquel primer año. Es cierto que el ritmo es distinto, que deben adaptarse a otro tipo de estudio, pero también es verdad que no existe una articulación entre el colegio y la educación superior. ¿Qué debería haber realizado cuando hacia clases en la educación media para que mis alumnos siguieran siendo exitosos en la universidad?, ¿porqué dejaron de ser exitosos, y comenzaron a pensar que no eran capaces?, ¿por qué mis alumnos de primer año les cuesta comprender los principios básicos del cálculo?, estas son algunas de las preguntas que me he realizado este último tiempo, transformándose en mi punto de partida para realizar esta tesis.

La enseñanza de las matemáticas es un asunto de mucha importancia en nuestra sociedad, se ha creado instituciones donde se estudia los fenómenos que aquí suceden, tanto de nivel básico, medio y universitarios. Toda persona que curse tanto la enseñanza básica o media, tendrá por obligación estudiar la matemática.

¿Será una única matemática?, ¿son muchas las matemáticas que viven en nuestro mundo?, ¿existen más matemáticas?, ¿qué tienen en común todas ellas?, ¿qué las hacen distintas?, ¿todos hacemos matemáticas?, ¿está toda creada?, son preguntas para reflexionar dentro de la enseñanza de las matemáticas.

Para intentar acercarme a una respuesta a estas cuestiones me acercó a la Socioepistemología que tiene por objetivo atender el explorar las formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula, que pudieran difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población.

Esta perspectiva reconoce la importancia de cuatro dimensiones: epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural. En consecuencia, aplicarla a la Matemática es analizar las relaciones entre la ciencia formal y la vida en sociedad, propone la descentralización del objeto matemático, cuestionando también qué, a quién, cuándo y por qué enseñar los contenidos matemáticos (Cantoral, Cordero, Farfán e Imaz, 1990).

Los modelos educativos olvidaron un sujeto, a saber: la gente. La construcción social del conocimiento matemático, consiste en ponernos en el lugar de la gente. La ausencia de la inclusión de la gente ha generado en el dME que se produzcan tres fenómenos enlazados: la adherencia, la exclusión y la opacidad; cuya base epistemológica en los usos del conocimiento matemático, para así lograr la construcción social del conocimiento matemático (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, Soto, 2015).

Se ha evidenciado una serie de características del dME, que atomiza los conceptos, su carácter hegemónico, que el conocimiento matemático es acabado y continúo, posee un carácter utilitario y no funcional del conocimiento, y posee una falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar. En su conjunto permiten reconocer y estudiar el fenómeno de exclusión, que nos lleva ampliar la visión del fracaso hacia otra típicamente social, como lo es el fenómeno de exclusión (Soto, 2010). Este fenómeno deja en evidencia el cómo los actores didácticos son excluidos de la construcción del conocimiento matemático.

La matemática escolar, por sus programas, currículos y modelos educativos genera un dME, una epistemología dominante, el cual no considera el conocimiento matemático de la gente, por ende, tampoco al alumnado. Generándose así la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático.

Se supone que enseñamos para que los jóvenes mejoren su cotidiano, pero lo que se enseña no responde a las situaciones de lo cotidiano, y peor aún, el conocimiento de lo cotidiano no se parece en nada al de la escuela.

¿Pero como acercar el cotidiano con la matemática de la escuela? ¿Cómo articular la educación secundaria con la educación superior? ¿Qué es lo que contenido u objeto matemático necesitan los estudiantes para superar con éxito el cálculo de primer año de universidad? ¿Qué objeto matemático es importante en esta instancia? ¿Cómo evoluciona a lo largo de la historia este

objeto? Responder a estas preguntas es lo que se pretende con esta tesis, lograr conectar la matemática con fenómenos del mundo real mediante la resignificación de la variación como razón de cambio, como concepto fundamental para entender la derivada.

Estudiando la problemática planteada y los antecedentes a nivel nacional e internacional. Estudiando el dME imperante y cómo este se manifiesta en la enseñanza media y en la enseñanza universitaria, específicamente en cálculo 1, plan común para Ingeniería, de la Universidad de Santiago de Chile.

En esta situación de aprendizaje los estudiantes son introducidos a la variación como razón de cambio. El proceso intenta ser explícito y visualmente dinámico, la actividad tiene un diseño centrado en el estudiante, donde se les presenta el cómo varia la temperatura de un líquido a medida que pasa el tiempo. Es así como a través de la Ley del Enfriamiento de Newton resignificamos la variación como razón de cambio. La situación de aprendizaje estará construida sobre la base de la construcción de los momentos, considerados por Zaldívar (2014) en su tesis doctoral, que buscan rediseñar el dME.

La metodología para llevar a cabo esta investigación es la Ingeniería Didáctica, siendo esta una analógica entre la actividad del ingeniero con la actividad del investigador en didáctica. Esta ligada a las intervenciones experimentales en las clases, basada en la concepción, realización, observación y análisis de una secuencia de enseñanza.

Para finalmente estudiar las conclusiones que permitirán rediseñar la situación de aprendizaje propuesta, a la luz de los resultados obtenidos.

Capítulo 1: Problemática y Antecedentes.

> *De esta forma no atiende, exclusivamente, al aprendizaje de los conceptos y procesos matemáticos, sino que incorpora a la investigación dimensiones sociales, históricas, culturales e institucionales, que permiten efectivamente la construcción del conocimiento matemático* (Soto & Cantoral, Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión Sociepistemológica. , 2014)

1.1. Problemática.

La variación es un concepto fundamental en la enseñanza superior, como se evidencia en numerosas investigaciones realizadas; que debe ser resignificado por los estudiantes para construir otras nociones como: limite, derivada e integrales. En particular, las distintas miradas en torno a la derivada han mostrado que la razón de cambio es un concepto clave para la apropiación de dicho concepto.

En la universidad se asume que los estudiantes vienen con algunos conocimientos de base, desde el colegio. Para poder articular los conocimientos del colegio con los conocimientos de la universidad se hace necesaria la creación de situaciones de aprendizaje, que permitan cubrir dicha ausencia de saber.

Los estudiantes al entrar a la universidad, deben comprender y aprender el concepto de variación, ya que, por ejemplo, en el programa estudio de Cálculo I perteneciente a la malla curricular de Ingeniería, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, plan común, encontraremos los siguientes contenidos: la interpretación geométrica de la función derivada como razón de cambio y la utilización de la interpretación geométrica de la derivada en un punto de la curva para calcular la pendiente de la recta tangente.

En la escuela se pide, de acuerdo a la propuesta curricular que no fue aprobada, específicamente en el programa de estudio propuesto para tercero y cuarto medio, que los alumnos fueran capaces de identificar a la noción de cambio como rapidez instantánea, la razón de cambio en Economía

o Biología, la de tangente a una curva y la aceleración como un caso de segunda derivada, con ello se debe profundizar en la importancia de modelar situaciones que involucran razones de cambio promedio e instantáneo (aplicaciones a la física y casos de optimización), derivada de una función y sus propiedades, para resolver problemas propios de la disciplina, problemas sociales o problemas relacionados con la ciencia.

En la prueba PISA, encontramos como el cambio debe ser descubierto y ser utilizado como predictivo de fenómenos de la naturaleza, ya que en estos fenómenos se evidencia la manifestación del cambio.

1.2. Estado del Arte.

Se ha tomado como referencia otras investigaciones que se ha realizado sobre la derivada, que pretenden conformar una inspiración y guía.

Cantoral y Farfán (1998) buscan construir una base y significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático a nivel universitario. Reconocen que la temática que se aborda en sectores académicos universitarios corresponde a temas posteriores al álgebra básica, llamada cálculo en la tradición anglosajona. Exponen algunos de los resultados de su investigación y su efecto en las practicas educativas, en lo que ellos llaman *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, un programa de investigación en curso. Este brinda la oportunidad de tender puentes entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

Atestiguan que las investigaciones reportadas en aquella época, apuntaban a la problemática que se ocupaba de la matemática en la enseñanza superior, asumiendo que esta interviene casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza, olvidando que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde a su vez adquiere sentido y significación.

La línea de investigación que se encuentran desarrollando considera como obligación dotarla de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes de la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos cognitivos y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple la nombran como “la cuarta dimensión”, llamada formalmente como acercamiento Sociepistemológico. Explicitan que el Pensamiento y Lenguaje Variacional se encuentra en el seno de la Teoría Socioepistemológica.

Advierten que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos prolongados, pues se necesita del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, además de rupturas con estilos de pensamiento prevariacionales, como por ejemplo con el pensamiento algebraico, esta ruptura no se debe hacer sólo en el plano educativo, sino también se debe basar en la idea de aproximación y en la matematización de los fenómenos de cambio. Se necesita además del manejo de un universo de formas gráficas extensas.

Reconocen que la enseñanza del cálculo se conforma de un repertorio de procedimientos y algorítmicos provenientes del álgebra y de la geometría analítica, dejando de lado aspectos argumentos visuales o de enfoque numérico, por no considerarlos plenamente formales matemáticos. En un curso de análisis, el estudiante debe concebir la noción de función como un objeto, por ende, deberá estar sujeta a las operaciones de otros procedimientos que se efectúen sobre ella. La experiencia que han alcanzado los investigadores, les permite afirmar que cuando se incorpora a la actividad matemática elementos del tipo visual, se logra no tan sólo manejar a la función como un objeto, sino que además pueden transitar entre diferentes contextos como lo son: algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal. Permitiendo que tanto en la algoritmia, la intuición y la argumentación emerjan entre las distintas representaciones.

Desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento, sostiene que la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, reconociendo que su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, pero este concepto no toma protagonismo cuando se concibe como una fórmula, es decir cuando se logra la integración de los dominios algebraicos y geométricos.

La hipótesis de su investigación consiste en asumir que previo al estudio del cálculo se precisa, por parte del estudiante la adquisición de un lenguaje gráfico, siendo este esencial en la transferencia de campos conceptuales, ajenos a la enseñanza tradicional, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, o sea entre el lenguaje gráfico y algebraico. Esta hipótesis es desarrollada bajo la directriz de la operatoria con gráficas, en analogía con los números o las variables, y bajo el aspecto relevante de poder construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia, estas son: función identidad ($(x) = x$), función exponencial ($(x) = a^x$) y función sinusoidal ($f(x) = sen\, x$). Todas ellas son la base para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy.

La tarea consiste en lograr construir un puente entre los contextos gráficos que sirva de guía a la sintaxis algebraica, de modo que refuerce su significado. Para ello diseñan diversos ejemplos sobre el pensamiento y lenguaje variacional, esperando que las respuestas indiquen estrategias variacionales que utilizan y las formas en cómo argumentan su elección frente a sus compañeros

de clase. Frente a estas tareas proponen y exploran el tratamiento didáctico de la predicción por medio del Binomio de Newton y la Serie de Taylor.

Frente al Binomio de Newton, sostienen que este se apoya de una epistemología sensiblemente diferente de la que se enseñaba en la sala de clases, sostienen que obedece a un programa emergente en aquella época, en el que se busca modelar, anticipar y predecir fenómenos de la naturaleza con respaldo matemático. La Serie de Taylor es utilizada como un instrumento para predecir instantáneamente, procesos, que llaman predicción de corto alcance en ámbitos de variación continua.

La idea básica que sostienen es que la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, es posible anunciar, su estado ulterior. Pues con ciertos valores iniciales de un sistema de evolución, sabremos la forma en la que esté progresa. Estudian esto en dos situaciones específicas, una en el estudio de. La cinemática de una partícula que se desplaza rectilíneamente y la segunda, que se ocupa del examen del planteamiento y resolución de la ecuación de la cuerda vibrante. Pues desde el punto de vista de los investigadores la noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales.

Con los acercamientos que realizan, señalan que han permitido obtener algunos resultados, que juzgan prometedores en su investigación, que junto a ellos han establecido una fecunda línea de investigación. Favoreciendo la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no sólo, como había sido habitual, sobre el cómo enseñar. Proponiendo una línea de investigación donde se toma como objeto de estudio, a la base Sociepistemológica de los saberes matemáticos.

Ubicados en el pensamiento y lenguaje variacional, se busca la predicción de la evolución de los sistemas complejos de cambio, que precisan, como necesidad básica del funcionamiento, de una centración en la manera de variar por encima incluso de la variable misma. Presuponiendo una centración en el proceso más que en el estado, en consecuencia, la utilización de mecanismos de constantificación de las variables y sus variaciones.

Vrancken y Engler (2014) hacen referencia al estudio del cálculo, que juega un rol importante cuando es necesario medir algún fenómeno y variaciones que se producen. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos. En particular, la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

Dan cuenta, además, que el sistema educativo se centra en procesos de construcción formales y aspectos algorítmicos. Reconocen que, si bien los estudiantes logran derivar, integrar o calcular límites, no son capaces de asignarles un sentido más amplio a las nociones involucradas.

Su trabajo se enmarca en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, que estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos. En el contexto de una Ingeniería didáctica, diseñan una secuencia que es llevada al aula con alumnos de Matemática II de la carrera de Ingeniería Agronómica. Estas actividades permitieron analizar diversos escenarios de variación, características variaciones entre las magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio.

En su trabajo hacen referencia a la investigación realizada por Dolores (2007B) quien expresa que los estudiantes [...] difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto.

Su objeto principal de estudio son los fenómenos de cambio y su entendimiento. En este contexto, un concepto primordial es el cambio, modelado matemáticamente mediante las diferencias, que dan cuenta de cuánto cambia la variable en un proceso de variación. La derivada refleja, con gran precisión, una de las propiedades esenciales de los fenómenos de la realidad: la rapidez de la variación.

Dan cuenta que el análisis de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo al estudio de la derivada y al desarrollo del cálculo.

Muestran también que la enseñanza de las funciones y del cálculo diferencial no se corresponde generalmente con sus orígenes, privilegiando en cambio aspectos lógicos formales. Dedicándoles mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos, dejando de lado la formación de las ideas variacionales. Los estudios realizados plantean la necesidad de un primer acercamiento visual e intuitivo a los conceptos del cálculo diferencial partiendo del estudio de la variación atendiendo a tres de sus nociones básicas: el cambio, la razón medio de cambio y la razón instantánea de cambio. En estas nociones se encuentra el origen de la derivada.

El trabajo hace referencia a la investigación de Testa (2004) quien se interesó en entender y explicar la forma en que la representación de la variación interviene en la construcción del concepto de la derivada, expresando que, para dar significado variacional a la derivada, es necesario previamente significar cada elemento que varía.

Para el diseño de sus actividades tienen en cuenta las ideas desarrolladas por Wenzelburger (1993), Dolores (1999, 2007b) y Azcárate et al. (1996) quienes manifiestan la necesidad de partir de concepciones previas de los alumnos acerca de la velocidad, utilizar las gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la de razón de cambio medio como pendiente de una recta.

García y Dolores (2011) en su investigación exponen los principales elementos del diseño y puesta en escena de una propuesta para la enseñanza de la derivada en estudiantes principiantes universitarios. Reconocen que gran parte de los alumnos escasamente comprenden el concepto de Derivada, por tal motivo se proponen como objetivo elaborar una propuesta por medio de la cual se les proporcione a los alumnos los elementos necesarios que les ayuden a mejorar la comprensión del concepto de derivada. Para elaborar dicha propuesta toman como eje la variación y la transición entre registros (geométrico, numérico, algebraico, analítico, físico y verbal).

Las autoras citan a García y Navarro (2010), Sánchez-Matamoros *et al* (2008) y a Dolores (2007) quien dan cuenta en sus investigaciones realizadas en Matemática Educativa, a nivel de bachillerato, relacionadas con los conceptos de límite y derivada, concluyen que la mayoría de los estudiantes solo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo, escasamente comprenden el significado de esos algoritmos.

Como punto de partida de su investigación realizan una encuesta a estudiantes de primer año de licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, en la cual se les pide contestar a la pregunta ¿qué es la derivada de una función? Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes relacionan lo qué es la derivada con su fórmula.

Reconocen que la enseñanza de la deriva tradicionalmente ha estado influida por la forma de cómo se organiza el contenido matemático en la ciencia matemática. Sin embargo, esta estructuración poco ha contribuido a la comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes. Cita a Dolores (2007) quien reconoce que predominan dos tendencias respecto de la enseñanza de la derivada, una donde la organización del contenido clásico se organiza en el Análisis Matemático para buscarle sus aplicaciones, y la otra donde el contenido se genera mediante la necesidad de resolver problemas prácticos.

La propuesta que diseñan, aboga por la comprensión de los conceptos, específicamente la derivada, por ello se alejan del formalismo matemático para que los estudiantes por medio de actividades descubran el concepto de derivada, centradas en la idea de variación. Se basan en el cuaderno didáctico llamado: *Una introducción a derivada a través de la variación*, que tiene un

carácter intuitivo y pretende develar la naturaleza variacional de la derivada a partir del planeamiento y resolución de situaciones variacionales elementales.

Los elementos teóricos de su investigación es la Teoría de la Actividad, desde donde se argumenta que una actividad está compuesta por sujeto (personas comprometida con la actividad), objeto (mantenido por el sujeto y motiva la actividad), acciones (tareas) y operaciones (acciones llevadas a cabo de forma automática).

La actividad posee cuatro mementos: orientación, ejecución, control y corrección. Además, se ha adoptado fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos tal y como lo propone la Metodología de la Enseñanza Matemática, transitando por tres momentos, estos son: consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del mismo.

Dolores (2010) analiza desde la Socioepistemología, cómo se usa el lenguaje variacional en el discurso de la información. En su trabajo estudia el pensamiento y lenguaje variacional (PLV, introducida en el año 2000, por Cantoral y Farfán), particularmente a nivel medio y en el inicio de los estudios universitarios, en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida.

El autor reconoce que el Cálculo Diferencial e Integral (conocido simplemente como Cálculo) es considerado como la matemática de la variación y el cambio, sin embargo, estos contenidos están presentes en la matemática escolar desde el nivel elemental.

Su trabajo centra la atención en el uso de los saberes de la matemática de la variación a través de las prácticas discursivas más que en el estudio de los conceptos mismos. Parte del supuesto de que a través de las prácticas sociales utilizadas para transmitir y captan información, los propios informadores, los lectores, los medios de comunicación e información, los profesionales o el público en general, construyen o reconstruyen saberes sobre la variación.

Su objetivo principal es de investigar, cómo se usa el lenguaje variacional en el discurso de la información presente en los diarios nacionales (de México).

El estudio es exploratorio, donde sigue tres procesos metodológicos, que son: selección, recolección y análisis del discurso.

Seleccionan dos periódicos naciones: Reforma y La Jornada. En los cuales se obtuvieron notas, reportajes, editoriales o debates en las cuales se utiliza el lenguaje variacional. Para posteriormente analizar lo ahí encontrado.

El lenguaje variacional utilizado en el discurso informativo tiene usos diferentes de los que se acostumbra a dar en el discurso matemático escolar. En este último las variables, particularmente son representadas por medios literales (x, y, z), sin embargo, en el discurso de la información se les usa asociándolas a nombres concretos y están implícitas en las estructuras discursivas dependiente del contenido. También aparecen las tablas de datos o en las gráficas, utilizadas como herramientas visuales que permiten "ver" el comportamiento de las mismas.

En el discurso informativo las razones de cambio promedio son más usuales y notorias, se expresan a menudo en términos porcentuales con números enteros o decimales. Regularmente aparece la razón de cambio promedio junto con la dirección del cambio y el intervalo en el que se considera el proceso de cambio, por ejemplo, el enunciado siguiente: "Durante los últimos 5 años el número de celulares en operación registro un crecimiento anual de 27.5 por ciento en promedio. En el discurso matemático escolar (el de los textos de matemáticas) los conceptos: variable, intervalo, razón de cambio, función, etc. suelen presentarse de maneras disgregada.

Engler y Camacho (2012) se centran en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional.

Reconocen que el surgimiento del cálculo se asocia con diferentes aspectos como el reconocimiento de procesos infinitos, la aparición del concepto de límite como organizador de ideas y métodos, el desarrollo del concepto infinitesimal, el nacimiento del concepto de función, entre otros. Además, la medición del cambio ha estado estrechamente ligada con la idea de variación – aspecto esencial y eje central en la formación del concepto de derivada-. El cálculo permite explorar la naturaleza del cambio y del movimiento, además de proporcionar herramientas como la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, etc. Brinda la posibilidad de crear modelos matemáticos para describir fenómenos asociados al cambio y la medición de la variación, como por ejemplo la difusión de calor sobre algún objeto.

Señalan que el currículo de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia.

Citan a Cantoral y Mirón (2000) para apoyar la idea de la importancia de debatir como los alumnos acceden al discurso matemático escolar, señalando que (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación.

Ejemplifican la importancia de la derivada para algunos futuros profesionales, como por ejemplo para un ingeniero civil utiliza estas y otras herramientas de la matemática para diseñar un puente o un ingeniero industrial puede usarlas para pronosticar las ventas anuales en la compañía donde trabaja, o el caso de un licenciado en administración de empresas, es fundamental el uso de la derivada en la determinación del interés que arroja una cantidad de dinero depositada a cierto tiempo en el banco.

Citan a Cantoral y Farfán (2000) pues ellos buscaron construir una base de significaciones para procesos y conceptos de análisis matemáticos. Señalan que la base de significados se refería a nociones de orden variacional, como fue el caso de la predicción, semejantes a los conceptos del cálculo, es el caso de la derivada. Aluden que a partir de la investigación de Cantoral y Farfán (2000) se da inicio a una etapa que busca caracterizar la derivada través del pensamiento y lenguaje variacional, considerando como argumento que se puede recuperar significados asociados a la derivada, que ayudarían a experimentar posibilidades de enseñanza de este concepto en el salón de clases.

Destacan los numerosos trabajos realizados por Dolores desde el año 1996, ha mostrado que los estudiantes, tanto de secundaria como los que inician la universidad, manifiestan un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y, por consiguiente, escasa comprensión de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas. En su tesis doctoral analizó las causas que hacen que los estudiantes del nivel medio superior comprendan escasamente las ideas básicas del cálculo y en especial las relacionadas con la derivada. Los resultados de esta mostraron que los estudiantes difícilmente logran un pensamiento y lenguaje variacional. Señalo que las causas atribuidas a esta problemática se relacionan tanto con los procesos de asimilación de conceptos, procedimientos y relaciones básicas, así como la planificación y ejecución del proceso de enseñanza.

Además, otro de los trabajos de Dolores (1996), donde se dan a conocer los resultados de un estudio exploratorio cuantitativo en estudiantes de bachillerato sobre las ideas que forman de la derivada en sus cursos ordinarios de cálculo diferencial. En la primera parte investigó la cuantificación simple de la variación y la velocidad media. En la segunda parte se exploraron las ideas de los estudiantes sobre la derivada como límite, como la pendiente de la recta tangente y como velocidad instantánea. El autor asegura que los resultados obtenidos en su investigación exploratoria coinciden en gran media con los obtenido por otros investigadores (Orton, 1983; Vinner, 1992).

Aluden también al trabajo de Dolores (1998), donde esté aborda el problema de la escasa comprensión de las ideas variaciones que subyacen al concepto de derivada en el bachillerato, en un estudio cualitativo. Diseña una experiencia pedagógica que se implementó en el aula, cuyo

eje central fue el concepto de derivada y su introducción guiada a través del enfoque variacional. Se estructuro en tres fases: estudio de las variables y funciones, la formación del concepto de derivada y finalmente, la ampliación y profundización de la idea de razón de cambio instantánea en la resolución de problemas no relacionados directamente con la variación física.

Indican que en Dolores (2000a) se refiere a un artículo como producto de un proyecto de investigación: *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el preuniversitario*, que tenía como objetivo la elaboración de una instrucción didáctica que contribuyera a la comprensión del concepto de derivada tomando en cuenta las ideas variacionales. En donde se señala que, en la práctica, la enseñanza de la derivada generalmente depende de los textos que utilizan los profesores, donde se distinguen dos tendencias. En este trabajo hace énfasis a que el enfoque variacional nació en el campo de los investigadores y que su uso no era masivo entre los profesores. Y en Dolores (2000b) el autor analizó algunos elementos teóricos acerca de la naturaleza de la variación y su relación con los principales conceptos de la matemática del cambio. Se dedico a la idea de variación y manifestó que se encuentra asociada a la medición y al cambio. Pues para entender el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Estableció que, al memento de realizar la medición de la variación, es importante tener en cuenta que los cambios se pueden medir a partir de comparaciones.

Otra de las investigaciones que aluden es la realizada por Solache, Díaz y Dolores (2000), que tiene por objetivo desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de bachillerato. Los autores estudiaron la aplicación en el aula de las principales actividades y secuencias diseñadas en Dolores (1999). Los resultados de esta experiencia fueron valorados a través de exámenes que, para los estudiantes, fueron de valides oficial y, por eso, obligatorios.

También mencionan el proyecto desarrollado por Dolores y Catalán (2000), cuyo objetivo fue propiciar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en el aula, de un bachillerato técnico. Estudiaron la deducción de la ecuación de la recta tangente, a partir de su comportamiento variacional y la deducción del comportamiento variacional partiendo de la ecuación de la recta.

Otro estudio que señalado es el de Dolores (2001) que se ocupa del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de primer año de universidad. Cuyo objetivo principal fue mostrar los resultados obtenidos en una instrucción didáctica que involucro el diseño de actividades, su aplicación en el aula y la valoración de los resultados obtenidos. Con las diferentes actividades diseñadas se buscó pasar del sistema de representación analítico al geométrico, del geométrico al analítico y del geométrico al geométrico. En primer lugar, el autor trabajó la relación entre las curvas y sus tangentes, luego la relación variacional entre la derivada y su primitiva, en la tercera etapa el análisis del comportamiento variacional a través de gráficas

y, por último, el análisis de las gráficas de funciones elementales según sus expresiones analíticas.

Informan que la investigación de Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) investigaron las concepciones relativa a la lectura de gráficas cartesianas que representan movimiento físico. En especial la noción de velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas que incluyen coordenadas, tiempo, distancia y posición. A partir de ello, discuten del significado de la deriva en contexto del movimiento a través de gráficas cartesianas.

Resaltan el libro de Dolores (2007a) pues resulta un valioso aporte acerca de la problemática de la escasa comprensión de la deriva de los estudiantes, los cuales no logran reconocer las ideas asociadas de este concepto en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio. Este libro es además un compendio de los diferentes trabajos de investigación realizados en los más de diez años de trabajo.

Otro trabajo realizado por Dolores (2007b) presenta un análisis completo de la enseñanza de la derivada analizada desde la perspectiva de los textos del cálculo diferencial más utilizados en el bachillerato de la región de Guerrero (México) y de los programas de estudio utilizados en las diferentes modalidades. Concluyo que los textos analizados para el tratamiento de la derivada, se sigue casi inevitablemente la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general para la derivación e interpretación geométrica. En general, la línea que se sigue hace que se presente como un concepto abstracto el de la derivada. Los textos priorizan el trabajo algorítmico por sobre el desarrollo de ideas y significados variacionales.

Los autores de esta investigación también reconocen el aporte de otros autores, alrededor de la derivada, como los aportes de Azcárete (1990) quien analizó los perfiles cognitivos de los alumnos y su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje, en el cual los conceptos de velocidad media e instantánea, desempeñan un papel importante.

Otros autores citados son:

- Wenzelburger (1993) sugirió presentar las ideas fundamentales del cálculo diferencial con un empleo mínimo de formalismo matemático y desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar cambios asumiendo la razón de cambio como su concepto fundamental.

- Santibáñez (2001) investigo el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en una situación escolar con estudiantes de bachillerato al implementar las actividades propuestas por Dolores (1999).
- Carabús (2002) la investigación centro su hipótesis que la apropiación del concepto de derivada, por parte de los alumnos universitarios, se puede facilitar a la luz de didáctica del cálculo, con el uso de los distintos marcos para este concepto (geométrico, algebraico, numérico, coloquial, gráfico, icónico e informático).
- Testa (2004) realiza un estudio de la derivada, a la luz del pensamiento y lenguaje variacional, mediante la observación de clases y cuestionarios aplicados a los estudiantes y docentes, que el aspecto variacional de la derivada no juega un papel fundamental en los cursos, ya que solo se toma en cuenta su definición, su interpretación geométrica y su cálculo mediante reglas de derivación.
- Sealey y Flores (2005) exponen que para que los estudiantes logren una comprensión avanzada de la derivada es necesario que entiendan el concepto en tres niveles diferentes: como razón de cambio, cómo límite y como función.
- Serma (2007) en su tesis sobre el estudio de la tangente, expuso que la dificultad de la formación del concepto de derivada puede estar por su introducción a través de la vía geométrica basada en la concepción de tangente.
- Sánchez – Matamoros, García y Llinares (2008) presentaron un amplio artículo relacionado con la comprensión de la noción de derivada en estudiantes de bachillerato y primeros años de cálculo en la universidad. Concluyendo que los estudiantes pueden entender el concepto de derivada de acuerdo a dos ámbitos, las características de los significados del concepto de derivada que elaboran y el desarrollo de esos significados.
- Vrancker, Engle y Müller (2010) presentan los resultados de una investigación en la que diseñaron y pusieron a prueba una secuencia didáctica para la introducción del concepto de función considerando como hipótesis que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión y apropiaciones esta noción.

1.3. Antecedentes en la Educación superior.

El sistema de educación superior, en los últimos 30 años, experimentó un fuerte aumento en su matrícula de pregrado, de unos cuantos miles a más de un millón. Sin duda esté es un gran logro para nuestra sociedad, pues nuestro sistema de educación superior paso de ser de elite a uno masivo.

Muchos de los estudiantes que ingresan hoy en día a la universidad son los primeros de sus familias en acceder a la educación superior, produciéndose un cambio en el perfil de ingresos que se tenía hace un par de décadas. Generándose una transformación en las necesidades de requerimientos, tanto en los estudiantes como en el sistema en general, además surgen nuevos problemas como la deserción. En el documento entregado por el Centro de Estudios del Ministerio de Educación, del año 2012, podemos encontrar que para Himmel la deserción consiste en el abandono de un programa de estudio antes de obtener el título o grado correspondiente, considerando un tiempo lo suficientemente largo como para descartar la posibilidad de reincorporación (Ministerio de Educación Chile, 2012). En el texto de Díaz (2008), citando a Tinto (1982) define deserción como una situación a la que se enfrenta un estudiante cuando aspira y no logra concluir su proyecto educativo. Luego, es posible considerar como desertor a aquel individuo que siendo estudiante de una institución de educación superior no presenta actividad académica durante tres semestres académicos consecutivos. En algunas investigaciones, a este comportamiento se le denomina 'primera deserción' *(first drop-out),* ya que no se puede determinar si pasado este periodo de tiempo el individuo retomará o no sus estudios o si decidirá iniciar otro programa académico (Díaz 2008; Tinto 1989; Cabrera *et al.* 1992 y 1993; Adelman 1999).

En Chile, más del 50% de quienes se matriculan en la educación superior no concluyen el programa en el que se matricularon inicialmente, solo el 38% de los estudiantes universitarios permanece en la institución que se matriculó y se encuentra en segundo año (Ministerio de Educación Chile, 2012). Esto genera pérdidas para toda la sociedad, desde el Estado como para los estudiantes y sus familias, dado los recursos económicos invertidos. Las instituciones, porque dejan de recibir recursos por parte de estos estudiantes y deben seguir en funcionamiento en los cursos superiores. Y sin duda lo más importante los jóvenes que desertan y ven truncados sus sueños.

En el informe llamado *Serie Evidencias: Deserción en la educación superior en Chile,* publicado por el Ministerio de Educación (2012), podemos encontrar que dentro de las variables que afectan la deserción podemos observar además que los estudiantes con mayores puntajes PSU presentan tasas de permanencia mayor. Para la cohorte del año 2010, la retención institucional en el grupo que obtuvo más de 800 puntos en la PSU superó 95% de permanencia, mientras que el grupo con un promedio PSU de 475 puntos la tasa de retención fue algo superior al 68% en las universidades chilenas. Otras de las variables interesantes a observar provienen de la dependencia del establecimiento de origen de los estudiantes, las tasas de retención de los establecimientos particulares pagados son mayores a los egresados de los establecimientos de los particulares subvencionados, pero ambas son mayores que la de los egresados de los establecimientos municipales.

Es sabido que la educación superior permite a los estudiantes optar a mejores trabajos y sueldos, permitiendo mejorar la calidad de vida de este y de sus familias, pues la sociedad otorga una mayor importancia al acervo educacional. Es por este motivo que es fundamental conseguir que los alumnos de escasos recursos ingresen y se mantengan en la educación superior.

Las instituciones de educación superior deben tener la capacidad para enfrentar este nuevo escenario en sus aulas. Deben aprender desde las historias estudiantiles, ya que esto es una oportunidad de conocer y unir las aspiraciones con que llegan los estudiantes a la misión y objetivos institucionales. Para así lograr la permanencia de sus estudiantes, comprendiendo las condiciones necesarias para que un estudiante no deserte de ella (Díaz Peralta, 2008).

Los momentos más difíciles para un alumno universitario está en los primeros meses del ingreso a la misma, las expectativas y los factores motivacionales cambian durante su permanencia en la universidad. El seguimiento sistemático de éstos permitirá a los administradores universitarios orientar la gestión institucional a las necesidades de su propia población de estudiantes y, por otro, generar acciones de intervención que provoquen cambios en los factores de riesgo y así disminuir la deserción estudiantil (Díaz Peralta, 2008)

1.4. En el curriculum de la educación superior.

En la asignatura de Cálculo I plan común para Ingeniería del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Universidad de Santiago de Chile, para la Facultad de Ingeniería, se puede evidenciar en el Programa Oficial (Coordinación de Cálculo 1 para Ingeniería, 2016), específicamente en los Objetivos de Aprendizaje Asociados a la asignatura, números 7, 8 y 9 respectivamente encontramos:

7. Aplicar los conceptos y resultados sobre límites, continuidad y derivadas.
8. Adquirir destreza en la operatoria con derivadas.
9. Expresar y resolver problemas de aplicaciones, particularmente de máximos y mínimos.

Es así como la asignatura se divide en dos grandes unidades, que son: Límite y Continuidad y La Derivada y sus Aplicaciones. En las capacidades a desarrollar de la unidad temática dos, correspondiente a la deriva, podemos encontrar que se les solicita en el punto número uno:

1) Interpretar geométricamente la función derivada como razón de cambio de

la función original.

Es en esta unidad, en el punto 2.3 Aplicaciones de la Derivada, aparece el contenido explícito:

- Razón de cambio y diferencias.

En la programación clase a clase, correspondiente a dicha asignatura podemos identificar en la clase número nueve, que corresponde a la primera clase de la unidad dos, se sugiere la Actividad Temática: Definición, Operatoria y Derivadas “Comunes” y Definición, Operatoria y Derivadas comunes. En Resultados de aprendizaje para la misma clase nueve, se identifica:

1.2.b) Utilizar interpretación geométrica de la derivada en el punto de la curva para calcular pendientes de la recta tangente.
1.2.b) Aplicar la derivada como tasa de cambio para resolver problemas de movimiento, economía, población de bacterias.

En el Informe Cálculo I, Módulo Básico para Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, realizado en 2016. En él se señala que el 94% de los estudiantes reprobaron la primera prueba del ramo, y se espera que entre un 22% y 28% de los estudiantes aprueben al término del semestre. Se identifica como un indicador de estos resultados la debilidad en la formación académica previa de la población de estudiantes que ingreso a primer año de ingeniería civil e ingeniería en ejecución el año 2016 (Coordinación de Cálculo 1 para Ingeniería, 2016). Además, en las entrevistas no estructuradas realizadas a los profesores que imparten el ramo, señalan que:
Los problemas de rendimiento académico, son consecuencia de una brecha entre los niveles de exigencia del programa de estudio de las carreras de Ingeniería Civil, y la de formación de base adquirida en años anteriores a su ingreso a la educación superior. Esta brecha incluye debilidades en: Dominio de conocimientos previos, tales como, aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y funciones. Habilidades básicas de razonamiento cuantitativo, pensamiento lógico abstracto, comunicación, resolución de problemas y argumentación.

En los textos utilizados a nivel universitario.

En los textos utilizados en el nivel universitario en la asignatura de Cálculo, podemos encontrar varias sugerencias, por ejemplo, en la bibliografía de la asignatura de Cálculo I para Ingeniería, inserta en el módulo básico de la Facultad de Ingeniería seleccionaremos de las sugerencias, los siguientes libros, considerados los más relevantes para esta investigación, que son:

- Cálculo una Variable, Undécima Edición, de George Thomas Jr. Editorial Pearson (texto guía).
- Cálculo 1 de una variable, Novena edición de Ron Larson y Bruce H. Erwards. Editorial Mc Graw Hill. (Stewart J. , 2012)
- Libro Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas Séptima Edición, de James Stewart. Editorial Cengage Learning.

En el libro Cálculo una Variable, Undécima Edición de George Thomas Jr., podemos encontrar la variación, como razón de cambio al inicio del capítulo 2: "Límites y Continuidad" pues se identifica que a partir de ahí se abordarán el concepto principal: la idea de límite, (George B. Thomas, 2006, pág. 73). Se puede evidenciar que la Razón de Cambio, es la idea fundamental en la cual se continúa construyendo el concepto de Límite, Derivadas e Integrales. Partiendo del concepto de velocidad promedio y razón instantánea, para continuar con las razones de cambio promedio y rectas secantes, para finalmente converger en el concepto de límite de valores de funciones. A través de ejemplos como la caída de una piedra de un acantilado desde el reposo, crecimiento poblacional de la mosca de la fruta y de la misma matemática. Como se puede observar en la Ilustración 1 y 2, ejemplo presentado en las páginas 75 y 76 de George B. Thomas (2006).

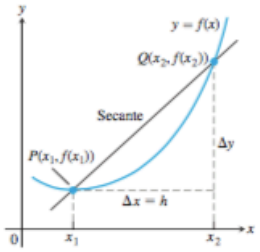


FIGURA 2.1 Una secante de la gráfica $y = f(x)$. Su pendiente es $\Delta y/\Delta x$, la razón de cambio promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

DEFINICIÓN Razón de cambio promedio en un intervalo

La **razón de cambio promedio** de $y = f(x)$ respecto de x en el intervalo $[x_1, x_2]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geométricamente, la razón de cambio de f en $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$ (figura 2.1). En geometría, la recta que une dos puntos de una curva es una **secante** de la misma. En consecuencia, la razón de cambio promedio de f desde x_1 a x_2 es idéntica a la pendiente de la secante PQ.

Muchas veces, los biólogos experimentales quieren saber la razón a la que crecen las poblaciones bajo condiciones controladas en el laboratorio.

EJEMPLO 3 La razón promedio de crecimiento en una población analizada en laboratorio

En la figura 2.2 se muestra el crecimiento poblacional de la mosca de la fruta (*Drosophila*) durante un experimento de 50 días. El número de moscas se contó en intervalos regulares de tiempo, y los valores se graficaron en relación con el tiempo; los puntos resultantes fueron unidos mediante una curva suave (de color azul en la figura 2.2). Encontrar la razón promedio de crecimiento entre los días 23 y 45.

Solución El día 23 había 150 moscas, y 340 el día 45. Por lo tanto, el número de moscas se incrementó $340 - 150 = 190$ en $45 - 23 = 22$ días. La razón de cambio promedio de la población entre los días 23 y 45 fue

$$\text{Razón de cambio promedio: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ moscas/día.}$$

Ilustración 1: pág. 75, (George B. Thomas, 2006).

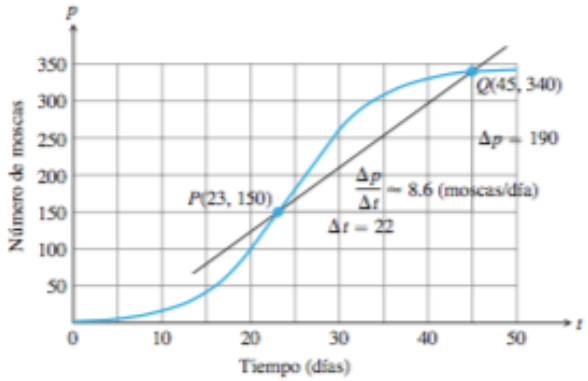


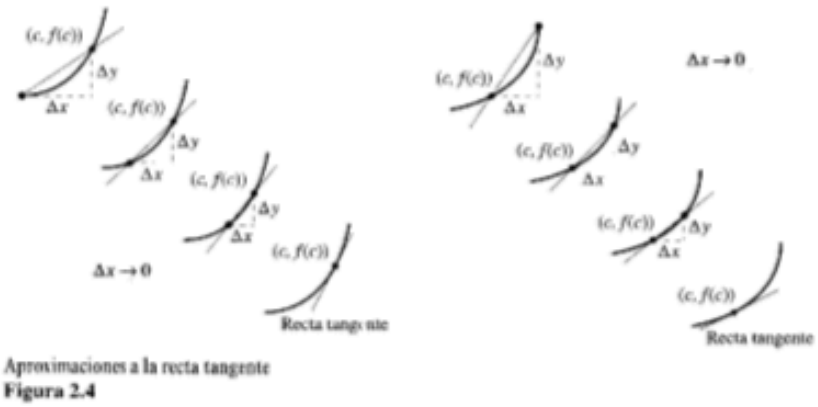
FIGURA 2.2 Crecimiento de la población de la mosca de la fruta en un experimento controlado. La razón de cambio promedio en 22 días es la pendiente $\Delta y/\Delta x$ de la recta secante.

Este promedio es la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q en la gráfica de la figura 2.2. ■

Sin embargo, la razón de cambio promedio entre los días 23 y 45 calculada en el ejemplo 3 no nos indica qué tan rápido se modificó la población tan sólo el día 23. Para conocer ese dato necesitamos examinar intervalos de tiempo más cercanos al día en cuestión.

Ilustración 2: pág. 76, (George B. Thomas, 2006).

En el libro de Cálculo 1 de una variable, Novena edición de Ron Larson y Bruce H. Erwards, podemos encontrar en el capítulo Preparación para el cálculo, en el subcapítulo P.2 Modelos lineales y ritmos o velocidades de cambio, entre las páginas 10, 11 y 12, como la pendiente de una recta puede interpretarse como una razón o taza, ritmo o velocidad de cambio, mediante ejemplos de Crecimiento poblacional y diseño técnico de una rampla de elevación de saltos de esquí acuático. En el capítulo 2: derivación, podemos evidenciar como se introduce el concepto de derivada realizando una pequeña aproximación histórica de esta problemática, mediante el problema de la recta tangente, también se alude a la pendiente de la recta secante como la razón entre el cambio en y es al cambio en x, siempre desde un punto de vista netamente matemático como se puede observar en la Ilustración 3 (Larzon & Edwards, 2010, pág. 97).



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

Ilustración 3: pág. 97, (Larson & Edwards, 2010).

En el libro Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas Séptima Edición, de James Stewart, podemos encontrar que al introducir el límite de una función se recurre al problema de la tangente y la velocidad, solicitándolo a los estudiantes que encuentren la ecuación de la recta tangente a una parábola, posteriormente se ejemplifica por medio de el destello (flash) de una cámara y el tiempo de liberación del mismo, posteriormente se enfrenta a los estudiantes al problema de la velocidad, asociándose con la pendiente de una recta tangente y/o recta secante. Para continuar con el concepto de límite propiamente tal. Se habla por primera vez de las razones de cambio, al introducir la derivada, al calcular la recta tangente a la curva, pero siempre en ejemplos de la misma matemática. Cuando se habla de que la derivada es una razón de cambio instantánea de una función en un punto, entonces se ejemplifica mediante la fabricación de un rollo de tejido de ancho fijo con el costo de producir dicho tejido. Luego se recurre al ejemplo de la deuda internacional de EU en el tiempo t. En el capítulo 3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales, se hace referencia explícita a distintas aplicaciones de la derivada, pero como razón de cambio aplicada a distintas situaciones, entre ellas la física, química, biología economía y otras ciencias, pudiendo encontrar más de 37 aplicaciones distintas, como se puede observar en la Ilustración 4 (Stewart J. , 2012, pág. 148).

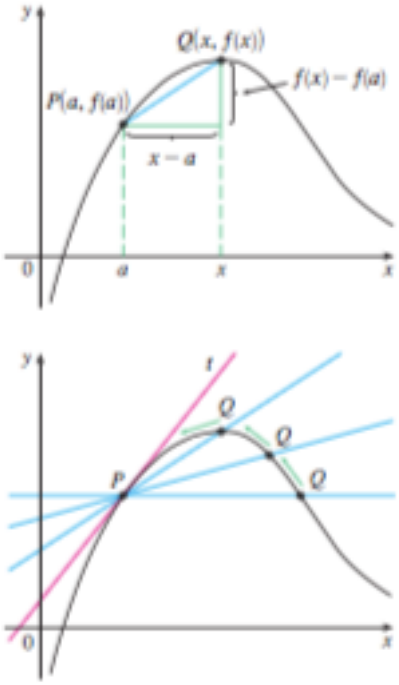


FIGURA 1

Ilustración 4: pág. 143, (Stewart J, 2012).

1.5. Antecedentes en la Educación Media.

A nivel internacional.

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (*Programme for International Student Assessment,* PISA), es un estudio realizado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, propone que los jóvenes cuando finalizan su escolaridad deben estar preparados para satisfacer los desafíos de las sociedades de hoy. Establecer indicadores de calidad con los cuales expresar cómo los sistemas educativos alcanzan dicha formación, es uno de los propósitos de esta prueba (Rico, 2006).

La evaluación PISA se lleva a cabo cada 3 años, y se aplica a los jóvenes de 15 años. Entrega información relevante que permite dar seguimiento de los resultados a través del tiempo, evaluando sus fortalezas y debilidades del propio sistema educativo, además esto permite poder realizar la comparación con sistemas educativos de otros países. El foco de está, es establecer si los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido, en la escuela, en la vida cotidiana (Rico,

2006). Esta evaluación se centra en lo que el estudiante necesitará en su futuro, buscando evaluar lo que puede hacer con sus conocimientos (Mineduc, 2013). Así en su relación con el mundo real, los ciudadanos enfrentan diversas situaciones matemáticas, por ejemplo: cuando compran, se alimentan, viajan, organizan su tiempo, en juegos, entre muchas otras, en las cuales deben mostrar sus competencias matemáticas.

Es necesario entonces tener claridad frente a lo que es una competencia, y esta se refiere a la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar la matemática en distintos contextos, lo que no debe ser percibido como un sinónimo de conocimientos y destrezas mínimas (Mineduc, 2013). Para Rico (2006) la competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano.

La competencia matemática es analizada en función de tres dimensiones interrelacionadas entre sí, como se puede ver en el siguiente recuadro:

Dimensiones	Categorías
Procesos	• Formulación • Empleo • Interpretación
Contenidos	• **Cambio y relaciones** • Espacio y forma • Cantidad • Incertidumbre y datos
Contextos	• Personal • Profesional • Social • Científico

Tabla 1: Dimensiones y categorías de la competencia matemática (Mineduc, 2013)

La dimensión de contenidos hace referencia a determinados conocimientos y conceptos matemáticos que son fundamentales a la hora de resolver un problema o cuándo se desea interpretar una situación en distintos contextos en los cuales los seres humanos se mueven. El currículum nacional está diseñado para equipar de sobre manera a los estudiantes con dichos

conocimientos. Es cierto que la matemática, como todas las disciplinas, tienen una tradición en el modo de organizar sus contenidos, que se ha discutido y construido a lo largo de la historia.

Sostenidas por una tradición de más de 200 años, las escuelas organizan el currículum de matemáticas mediante contenidos temáticos (Rico, 2006). Pero PISA intenta organizar los contenidos, destacando su funcionalidad, clasificándolos basados en los fenómenos que estudian y los tipos de problemas que surgen.

Dentro de esta dimensión está la *categoría de cambio y relaciones*, que hace referencia a la comprensión de los tipos fundamentales de cambios, así como a reconocer cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para descubrirlos y predecir los (Mineduc, 2013). Esto implica modelar el cambio por medio de las funciones y ecuaciones convenientes, además de crear, interpretar y traducir dichas representaciones. Cada fenómeno natural es una manifestación del cambio; el mundo en nuestro entorno muestra una multitud de estas relaciones (Rico, 2006). Los seres vivos que nacen, se desarrollan y mueren, constantemente están en procesos de cambio, los ciclos de las estaciones, el flujo de las mareas, los cambios climáticos, en los indicadores económicos, entre muchos otros. Pero ¿cómo podemos modelar matemática dicho cambio?, existen variados aspectos del contenido matemático tradicional, que nos permiten describir, modelar e interpretar los fenómenos de cambio, algunas de ellas son: las funciones y el álgebra, las ecuaciones y desigualdades, tablas y gráficos, razón de cambio, etc.

En la publicación *PISA Competencias Matemáticas: un requisito para la sociedad de la información, Marco de* evaluación, preguntas y ejemplos de respuestas de la prueba, de la Agencia de Calidad de la Educación División de Estudios, Departamento de Estudios Internacionales del Ministerio de Educación de Chile en conjunto con la OECD Programme for International Student Assessment Santiago, diciembre 2013, podemos encontrar las siguientes preguntas liberadas, que están en la categoría cambio y relaciones, en la prueba PISA, año 2012, 2006, 2003, 2000 y que fueron aplicada en nuestro país, son las siguientes:

- Pregunta 3 Barcos de vela. Pregunta PISA 2012, página 28.
- Pregunta 1 y 2 Frecuencia de goteo. Pregunta PISA 2012, página 29, 30.
- Pregunta 1, 2 y 3 Elena, la ciclista. Pregunta PISA 2012, página 42.
- Pregunta 3 Reproductores de mp3. Pregunta PISA 2012, página 57.
- Pregunta 3 Pingüinos. Pregunta PISA 2012, página 59.
- Pregunta 1, 2 y 4 El poder del viento. Pregunta PISA 2012, página 61.
- Pregunta 1, 2 y 3 Vender periódicos. Pregunta PISA 2012, página 71, 72 y 73.
- Pregunta 1, 2 y 3 Paseo en auto. Pregunta PISA 2006, página 74, 75.
- Pregunta 3 Bicicletas. Pregunta PISA 2006, página 82.

- Pregunta 1 y 2 Chateo por internet. Pregunta PISA 2003, página 89.
- Pregunta 1 y 2 El mejor automóvil. Pregunta PISA 2003, página 104 y 105.
- Pregunta 1, 2 y 3 Concentración de un medicamento. Pregunta PISA 2003, página 107, 108.
- Pregunta 1 Estanque de agua. Pregunta PISA 2003, página 114.
- Pregunta 1 Columpio. Pregunta PISA 2003, página 116.
- Pregunta 1 Pago por superficie. Pregunta PISA 2003, página 118.
- Pregunta 1 Calzado infantil. Pregunta PISA 2003, página 120.
- Pregunta 1, 2 y 3 Faro. Pregunta PISA 2003, página 122, 123.
- Pregunta 1 y 2 Latidos del corazón. Pregunta PISA 2003, página 130, 131.
- Pregunta 1 Concierto de Rock. Pregunta PISA 2003, página 132.
- Pregunta 1 Pasarelas Mecánicas. Pregunta PISA 2003, página 133.
- Pregunta 1 y 2 Caminar. Pregunta PISA 2000, página 138 y 139.
- Preguntas 1, 2 y 3 Manzanos. Pregunta PISA 2000, página 140, 141 y 142
- Preguntas 1, 2 y 3 Crecer. Pregunta PISA 2000, página 146, 147,148.
- Preguntas 1, 2, 3 y 4 Velocidad de un auto de carrera. Pregunta PISA 2000, página 149, 150.

En el Currículum Nacional.

Actualmente en Chile están vigentes para primero y segundo medio, en el sector de matemáticas, el Marco Curricular, según Decreto Nº 254/2009, que corresponde a los programas de estudio, según Decreto Nº 1358/2011 y para tercero y cuarto medio, el programa de estudio vigente, según Decreto Nº 1147/2015. La Propuesta Curricular para tercero y cuarto medio se encuentra en estudio.

En las Bases Curriculares vigentes de 7º básico a 2º medio, podemos encontrar diferentes alusiones a los conceptos de variación y/o cambio, modelación y graficación. Donde se identifica que la matemática es una herramienta fundamental que explica la mayoría de los avances de nuestra sociedad y les sirve de soporte científico, señala además que tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos; sin embargo, la matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para pensar y resolver problemas.

La modelación se presenta como una habilidad a desarrollar, considerándose como:

> Modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, este modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.); estimar, comprar impactos y representar relaciones.

En el eje temático de Álgebra y Funciones se hace mención al concepto de variación mediante la utilización del concepto de función para encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado.

En este sentido la gráfica aparece como uno de los distintos registros que tiene el alumno para representar su entorno para extraer la información que requieran.

En el Programa de Estudios de Primero Medio y Segundo Medio, vigentes según Decreto Exento nº 1264/2016, podemos encontrar la modelación y graficación presentes en los objetivos de aprendizaje que los estudiantes serán capaces de alcanzar, tanto en las habilidades como en los ejes temáticos por nivel, pero la variación/cambio sólo lo podemos encontrar en la variación de los parámetros a, b, c en una ecuación, como se puede observar en el Objetivo de Aprendizaje según el Eje Temático de Álgebra y Funciones para primero medio, en el OA 5 se señala que:

Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c;\ a, b, c\ \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima).

En tanto que, en segundo año medio, dentro de la unidad tres, correspondiente al eje de Álgebra, podemos encontrar que una de las habilidades a desarrollar corresponde a:

> Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada, al modificar los parámetros.

En ambos niveles la variación sólo encontramos presente a la variación como una modificación en los parámetros de una función y/o ecuación, y en como se ve afectada la relación entre las variables o en su gráfica.

En el Programa de Estudio de Tercero y Cuarto Medio, vigentes según Decreto Exento nº 1147/2015, imperante hasta el 2018 y 2019 respectivamente la modelación es una habilidad que se quieres desarrollar de manera transversal en toda la matemática de estos años. La graficación la podemos encontrar en las sugerencias de actividades para dar cumplimiento a los aprendizajes esperados de cada unidad. En cambio, la variación sólo la podemos encontrar presente en tercero medio como sugerencia de actividad para dar cumplimiento a un aprendizaje esperado número

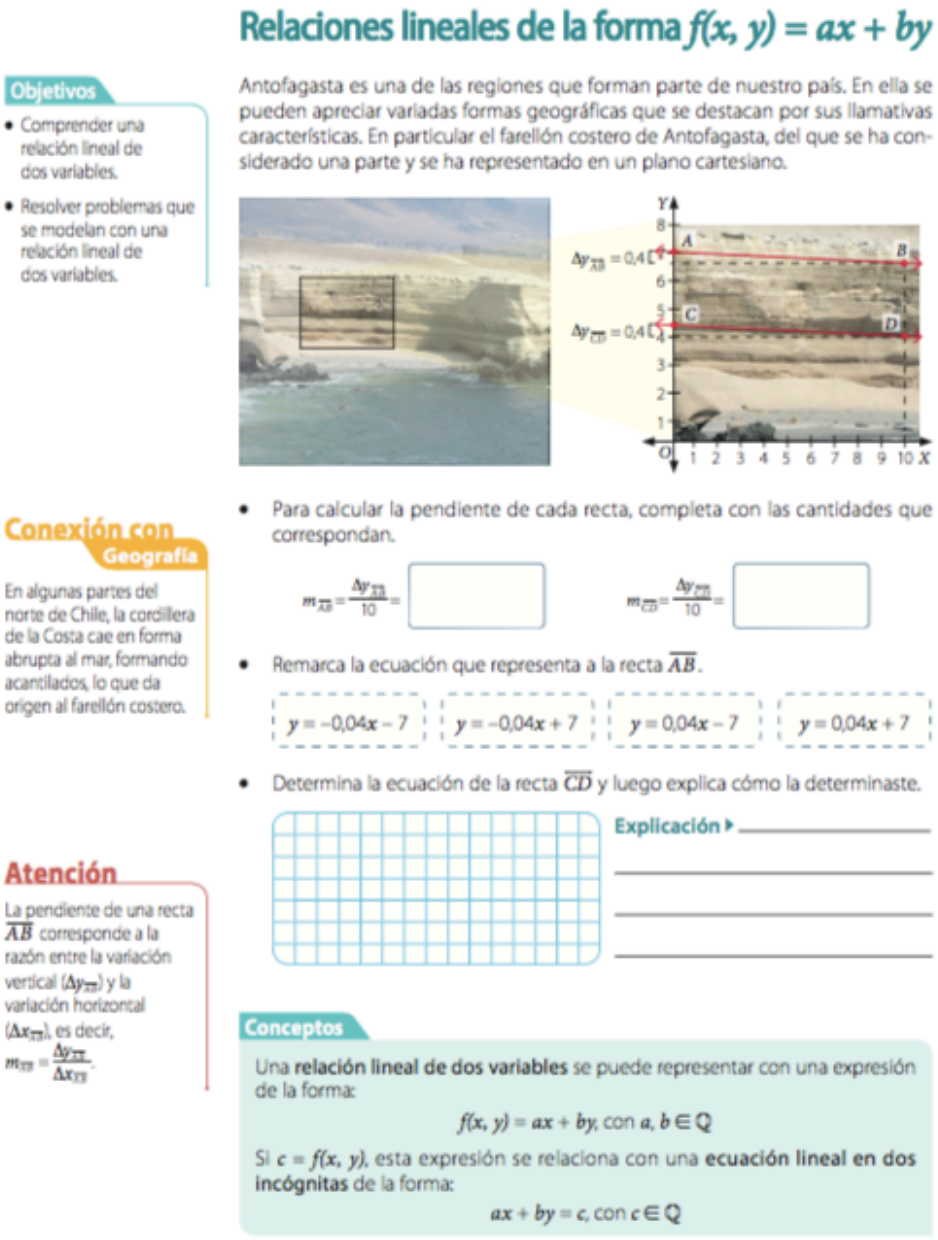
ocho, de la unidad número dos Álgebra, específicamente en la actividad número 4, 5 y 6 donde se pide observar como:

> Varían los valores de a, b y c, conjeturando sobre los efectos que tienen en la representación gráfica de la función.

En cuarto medio desaparece por completo el concepto de variación, como propiamente tal y sólo podemos encontrarla de manera encubierta en la traslación de la función potencia.

En los textos escolares nacionales.

Los textos escolares entregados por el Ministerio de Educación de Chile, a los establecimientos educacionales municipales y subvencionados, proporcionan una visión aterrizada de lo propuesto en los Programas de Estudio, es así como en el texto del estudiante correspondiente a primer año medio, editorial Santillana, entregado el año 2017, podemos encontrar en las páginas 130 y 133 en el tema 4, la relación entre dos variables, la variación de parámetros mediante la asignación distintos valores numéricos. Ahora es importante destacar que, en el mismo libro, en la página 124 podemos encontrar un pequeño apartado lateral, donde se define la pendiente de una recta como la razón de cambio vertical y la variación horizontal, en dos oportunidades más podemos encontrar a la variación, pero se refiere sólo a la variación porcentual del volumen de un cuerpo, como se puede observar en la Ilustración 5 (Fuentes, Maldonado, & Marambio, 2017).



Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$

Objetivos

- Comprender una relación lineal de dos variables.
- Resolver problemas que se modelan con una relación lineal de dos variables.

Antofagasta es una de las regiones que forman parte de nuestro país. En ella se pueden apreciar variadas formas geográficas que se destacan por sus llamativas características. En particular el farellón costero de Antofagasta, del que se ha considerado una parte y se ha representado en un plano cartesiano.

Conexión con Geografía

En algunas partes del norte de Chile, la cordillera de la Costa cae en forma abrupta al mar, formando acantilados, lo que da origen al farellón costero.

- Para calcular la pendiente de cada recta, completa con las cantidades que correspondan.

$m_{\overline{AB}} = \frac{\Delta y_{\overline{AB}}}{10} =$ ☐ $\quad m_{\overline{CD}} = \frac{\Delta y_{\overline{CD}}}{10} =$ ☐

- Remarca la ecuación que representa a la recta $\overline{AB}$.

$y = -0{,}04x - 7$ | $y = -0{,}04x + 7$ | $y = 0{,}04x - 7$ | $y = 0{,}04x + 7$

- Determina la ecuación de la recta $\overline{CD}$ y luego explica cómo la determinaste.

Explicación ▸ _____

Atención

La pendiente de una recta $\overline{AB}$ corresponde a la razón entre la variación vertical ($\Delta y_{\overline{AB}}$) y la variación horizontal ($\Delta x_{\overline{AB}}$), es decir, $m_{\overline{AB}} = \frac{\Delta y_{\overline{AB}}}{\Delta x_{\overline{AB}}}$.

Conceptos

Una **relación lineal de dos variables** se puede representar con una expresión de la forma:

$$f(x, y) = ax + by, \text{ con } a, b \in \mathbb{Q}$$

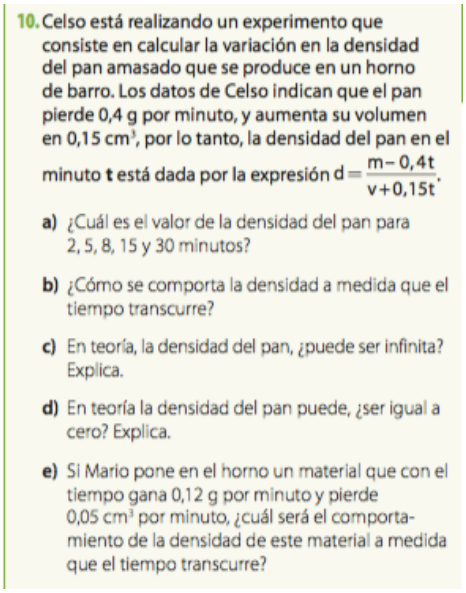
Si $c = f(x, y)$, esta expresión se relaciona con una **ecuación lineal en dos incógnitas** de la forma:

$$ax + by = c, \text{ con } c \in \mathbb{Q}$$

Ilustración 5: Texto escolar Iº medio, entregado por Mineduc. pág. 124, (Fuentes, Maldonado, & Marambio, 2017).

En el texto del estudiante correspondiente a segundo año medio, editorial Ediciones SM, entregado el año 2017, podemos encontrar el concepto de variación en un ejercicio propuesto correspondiente a la unidad número tres de Algebra en la página 169. Posteriormente, en la página 202 se pregunta por la variación que se produce en el cambio de longitud de una cuerda, que corresponde a un problema introductorio de la función raíz cuadrada. Para finalmente

aparecer en un par de oportunidades más, pero ligado ahora al coeficiente de variación y a la combinatoria (Martínez., Rupin, Jiménez, & Lorna, 2017).



10. Celso está realizando un experimento que consiste en calcular la variación en la densidad del pan amasado que se produce en un horno de barro. Los datos de Celso indican que el pan pierde 0,4 g por minuto, y aumenta su volumen en 0,15 cm^3, por lo tanto, la densidad del pan en el minuto **t** está dada por la expresión $d = \frac{m - 0,4t}{v + 0,15t}$.

a) ¿Cuál es el valor de la densidad del pan para 2, 5, 8, 15 y 30 minutos?

b) ¿Cómo se comporta la densidad a medida que el tiempo transcurre?

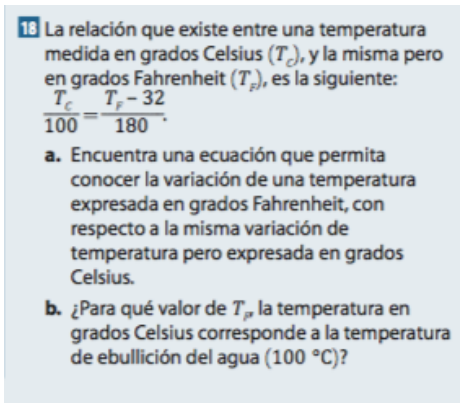
c) En teoría, la densidad del pan, ¿puede ser infinita? Explica.

d) En teoría la densidad del pan puede, ¿ser igual a cero? Explica.

e) Si Mario pone en el horno un material que con el tiempo gana 0,12 g por minuto y pierde 0,05 cm^3 por minuto, ¿cuál será el comportamiento de la densidad de este material a medida que el tiempo transcurre?

Ilustración 6: Texto escolar IIº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio propuesto 10, pág. 169, (Martínez., Rupin, Jiménez, & Lorna, 2017).

En el texto del estudiante correspondiente a tercero año medio, de Ediciones Cal y Canto, entregado el año 2017, podemos encontrar el concepto de variación en la unidad número dos, llamada “Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática”, asociada al ejercicio 43 de la página 127, en la cual se asocia a las medidas de un prisma, luego la encontramos en la unidad número tres, correspondiente al “Plano cartesiano y homotecia… un nuevo paso en geometría”, asociada a la aplicación de la geometría analítica, específicamente al estudio de variación de figuras geométricas producto de la homotecia. En la unidad número cuatro, llamada “Rectas en el plano… una mirada analítica”, la variación viene asociada al ejercicio 18 de la página 247, que hace referencia a encontrar una ecuación que permita conocer la variación de temperatura expresada en grados Fahrenheit, con respecto a la misma variación de temperatura, pero expresada en grados Celsius. Finalmente, también se encuentra asociado al coeficiente de variación, al rango de variación de los datos de un problema estadístico (Gottlieb. & Blumenthal., 2017).



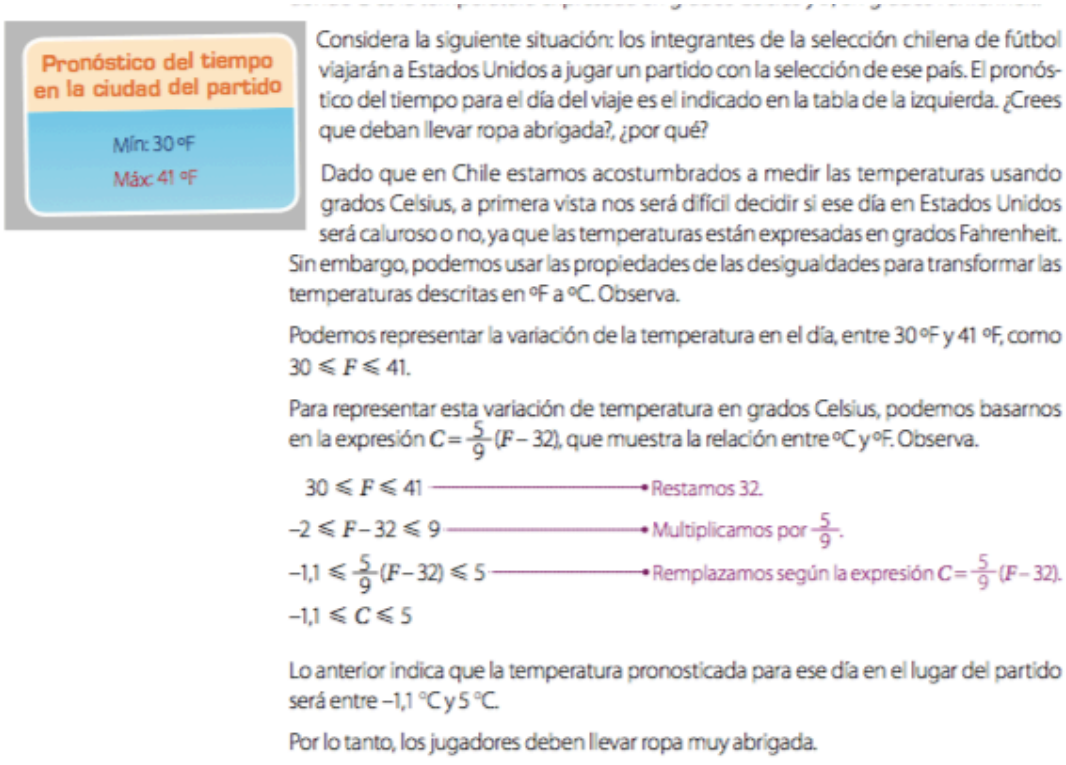
18 La relación que existe entre una temperatura medida en grados Celsius (T_C), y la misma pero en grados Fahrenheit (T_F), es la siguiente: $\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180}$.

a. Encuentra una ecuación que permita conocer la variación de una temperatura expresada en grados Fahrenheit, con respecto a la misma variación de temperatura pero expresada en grados Celsius.

b. ¿Para qué valor de T_F, la temperatura en grados Celsius corresponde a la temperatura de ebullición del agua (100 °C)?

Ilustración 7: Texto escolar IIIº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio 18, página 247, (Gottlieb. & Blumenthal., 2017).

Finalmente, en el texto del estudiante correspondiente a cuarto año medio, de Editorial Santilla, entregado el año 2017, encontramos el concepto de variación asociado a desigualdades en la página 32 y 33, sólo en dos problemas, representando la variación de temperaturas de un día, en el cual la temperatura mínima fue de 30ºF y la máxima 41ºF, o sea $30 \leq F \leq 41$, Aparece por última vez en la página 336, y sólo se nombra en una actividad complementaria asociada a la distribución normal y estatura (Venegas, Gutiérrez, & Muñoz, 2016).



Pronóstico del tiempo en la ciudad del partido

Mín: 30 °F

Máx: 41 °F

Considera la siguiente situación: los integrantes de la selección chilena de fútbol viajarán a Estados Unidos a jugar un partido con la selección de ese país. El pronóstico del tiempo para el día del viaje es el indicado en la tabla de la izquierda. ¿Crees que deban llevar ropa abrigada?, ¿por qué?

Dado que en Chile estamos acostumbrados a medir las temperaturas usando grados Celsius, a primera vista nos será difícil decidir si ese día en Estados Unidos será caluroso o no, ya que las temperaturas están expresadas en grados Fahrenheit. Sin embargo, podemos usar las propiedades de las desigualdades para transformar las temperaturas descritas en °F a °C. Observa.

Podemos representar la variación de la temperatura en el día, entre 30 °F y 41 °F, como $30 \leqslant F \leqslant 41$.

Para representar esta variación de temperatura en grados Celsius, podemos basarnos en la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, que muestra la relación entre °C y °F. Observa.

$30 \leqslant F \leqslant 41$ — Restamos 32.

$-2 \leqslant F - 32 \leqslant 9$ — Multiplicamos por $\frac{5}{9}$.

$-1{,}1 \leqslant \frac{5}{9}(F - 32) \leqslant 5$ — Remplazamos según la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

$-1{,}1 \leqslant C \leqslant 5$

Lo anterior indica que la temperatura pronosticada para ese día en el lugar del partido será entre −1,1 °C y 5 °C.

Por lo tanto, los jugadores deben llevar ropa muy abrigada.

Ilustración 8: Texto escolar IVº medio, entregado por Mineduc. Ejercicio propuesto, página 32, (Venegas, Gutiérrez, & Muñoz, 2016).

En la propuesta curricular para tercero y cuarto medio.

La propuesta para el plan diferenciado humanístico – científico, no ha sufrido modificaciones desde 1998, por lo que se pretende con este cambio es que los estudiantes puedan optar entre distintas trayectorias y proyectos de vida, de manera de profundizar en sus áreas de interés.

La Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile, durante el año 2017 realizó una propuesta curricular par tercero y cuarto medio, tanto para la Formación General como para la diferenciación científico humanista, que se inserta dentro de la Ley General de Educación (LGE, art. 31 de la Ley Nº 20370), que a fines del mismo año fue rechazada por el Consejo Nacional de Educación.

En la propuesta curricular para tercero y cuarto medio, la Matemática se encuentra dentro del área Ciencias: Naturaleza y Sociedad. Posee cuatro asignaturas de profundización, que son:

- Función y Límite.
- Derivadas e Integrales.
- Probabilidades, estadística descriptiva e inferencial.
- Programación computacional

Se centra en el estudio de las estructuras, modelos, y dinámicas del ámbito humano, sociocultural y natural; que corresponde a una de las tres áreas de aprendizaje para estos niveles.

La asignatura de Matemáticas del Plan Común propone que los estudiantes desarrollen su capacidad de análisis y estudio, presente y futuro, de modo de favorecer su tránsito al mundo laboral o profesional. Busca, además, que los estudiantes desarrollen su conocimiento, razonamiento y pensamiento matemático, su capacidad para resolver problemas y su habilidad de pensar en forma rigurosa y crítica. Para cumplir con todo lo anterior se propone que trabajen colaborativamente en modelamiento matemático en situaciones, para tomar decisiones fundamentadas, integrando las herramientas tecnológicas y por otra parte entender la Matemática como una actividad en desarrollo (Ministerio de Educación , 2017).

Encontramos que el enfoque curricular, de dicha propuesta, reconoce que el conocimiento matemático forma parte del acervo cultural de nuestra sociedad y constituye una disciplina cuya construcción empírica –inductiva - y su formación axiomática – por tanto, deductiva – surge de situaciones de variados ámbitos. Además, considera la construcción de la matemática como parte de la creación del ser humano, ligada a su historia y a su cultura, cuyo propósito es lograr la comprensión profunda tanto de fenómenos como de situaciones cotidianas, explicándolos, analizándolos y preverlos, como de la propia disciplina. La racionalidad de esta disciplina es

inseparable de toda actividad que se relacione con ella, además visualiza la importancia de fomentar el aprendizaje de la misma en un ambiente colaborativo, mediante la discusión.

En la asignatura de profundización dos: *Derivadas e Integrales*, podemos atisbar en el propósito formativo, que los conceptos de derivada e integral son de utilidad para un estudiante de educación media, ya que los prepara para seguir estudios superiores técnicos o universitarios en que la matemática es una herramienta central. **Reconociéndose la importancia de la articulación entre la enseñanza media y superior.**

El propósito formativo, de esta asignatura de profundización dos: *Derivadas e Integrales*, es:

> Este curso ofrece una introducción al concepto de derivada e integral a partir de problemas en los que se aplican estos conceptos. Por ejemplo, la noción de cambio como rapidez instantánea, la razón de cambio en Economía o Biología, la de tangente a una curva y la aceleración como un caso de segunda derivada. Más adelante, se abordará el concepto de integral y sus respectivas aplicaciones en la resolución de problemas y modelamiento de situaciones con apoyo de herramientas tecnológicas.

Cuyo Objetivo de Aprendizaje número uno es:

> Modelar situaciones que involucran razones de cambio promedio e instantáneo (aplicaciones a la física y casos de optimización), derivada de una función y sus propiedades, para resolver problemas propios de la disciplina, problemas sociales o problemas relacionados con la ciencia.

Queda en evidencia la importancia de la variación como razón de cambio es fundamental para crear una articulación entre la escuela y cálculo de primer año de universidad.

1.6. Objetivo de investigación.

Esta investigación reconoce una problemática a partir de la desarticulación entre la matemática del nivel medio con la matemática del nivel universitario. En este eslabón se confrontan la matemática centrada en los objetos matemáticos del nivel superior como lo son: el límite, la derivada, la integral, entre otras; y con la centración de los objetos matemáticos del nivel medio como lo son las funciones, polinomios, ecuaciones, entre otros. Se evidencia la necesidad de la creación de un puente entre la matemática ambos niveles, para ello urge el estudio de conceptos como la derivada, desde la razón de cambio y la variación. Para ello es importante la creación de

situaciones de aprendizaje para la articulación buscada, bajo la mirada de la Socioepistemología que permite resignificar dichos objetos matemáticos, rediseñando el discurso matemático escolar, el que coacciona fenómenos típicamente sociales, como lo son la adherencia, la exclusión y la opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crooci y Soto, 2015). Por esta razón, la investigación busca diseñar una situación de aprendizaje a la luz del pensamiento y lenguaje variacional, considerando el aprendiz, el escenario sociocultural en el cual se centrará la situación de aprendizaje y el saber mismo, creando actividades y contemplando las prácticas de referencia y la práctica social. Teniendo en cuenta los usos de la gráfica.

De esta manera el objetivo general de esta investigación es:

Diseñar y aplicar una situación de aprendizaje, que permita introducir la noción de la derivada como razón de cambio, a partir del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, permitiendo articular los conocimientos y habilidades provenientes del nivel medio con los conocimientos necesarios para el nivel superior.

Para lograr este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

- **Desarrollar una epistemología de la derivada como razón de cambio a partir del pensamiento y lenguaje variacional y el uso de la gráfica.**
- **Diseñar una propuesta de situación de aprendizaje en un contexto de la ley del enfriamiento de Newton y con utilización de la epistemología de la derivada.**
- **Aplicar la situación de aprendizaje en un contexto particular de aula.**
- **Analizar los resultados de la aplicación de la situación a partir de una ingeniería didáctica.**
- **Rediseñar la situación de aprendizaje a partir de los datos obtenidos.**

Capítulo 2: Marco Teórico

> *La Socioepistemología parte asumiendo que los problemas de enseñanza de las Matemáticas no provienen sólo de las prácticas memorísticas de los estudiantes, ni de las competencias docentes de sus profesores, sino que obedecen principalmente a la estructura, funcionamiento y naturaleza del saber matemático escolar puesto en juego* (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, Sociepistemología, Matemáticas y Realidad, 2014).

2.1. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemología

La enseñanza de nuestros niños y jóvenes es un asunto primordial para nuestra sociedad, en particular la enseñanza de las matemáticas. La preocupación de la sociedad ha sido tal, que incluso ha creado instituciones con la finalidad que la matemática y la ciencia en general se incorporen en la cultura de nuestra sociedad. Gastándose grandes suma de dinero para perfeccionar su enseñanza y superar las preocupaciones que surgen de la misma.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en la sociedad (Cantoral & Farfán, 2003), el estudio de la misma, como un estudio sistemático de los fenómenos que surgen desde ella, tiene tan sólo unas cuatro décadas.

Cantoral (2014) al analizar las palabras del Profesor Ímaza señala que para que la Matemática Educativa se constituyera como campo científico, se precisaron de tres demarcaciones, la primera de ellas plantea que el rol fundamental de la matemática educativa es que debe tomar bajo su control y adueñarse del saber que enseña, empoderarse. En una segunda demarcación surge el ver las dificultades de las matemáticas: el error, cómo un obstáculo; produciéndose una emergencia de un campo científico denominado Matemática Educativa. La tercera denominación, surge cuando se constituye y desarrolla el campo de la Matemática Educativa, permitiendo una mayor producción de investigaciones en este campo, y las investigaciones de corte sociocultural

permite pasar del examen de la aprehensión del objeto *en sí*, correspondiendo al conocimiento matemático en situación áulica, al análisis cabal del uso social de dicho objeto, correspondiente al saber situado en escenarios socioculturales, esto corresponde al estudio del objeto *para sí*.

La primera demarcación ubica a la Matemática Educativa como ciencia experimental, no filosófica, ni metodológica, sino pragmática, la segunda lleva del análisis del error al examen del obstáculo y la tercera, posibilita el paso que de lo -*en sí*, hacia lo -*para si* (Cantoral, 2011).

Esta triple demarcación logra pasar del Conocimiento al Saber, del Sujeto Epistémico al Sujeto Histórico y más ampliamente del Objeto a las Prácticas, como se puede apreciar en la siguiente Ilustración 9:

Ilustración 9: Triple demarcación del Conocimiento a las Prácticas.

El origen de la Matemática Educativa se remonta a la segunda mitad del siglo XX, y se ocupa principalmente de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Estos fenómenos están ligados a distintas problemáticas, asumiremos como problemática aquella que concierne a la evolución de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos son constituidos socialmente (Cantoral & Farfán, 2003). Estas problemáticas han evolucionado en distintos momentos, siendo estos:

- Una didáctica sin alumnos.

  Se ocupa de diseñar presentaciones de contenidos matemático escolar que se encontraba más accesible para los alumnos y para los profesores. Propone actividades que considera pertinente, pero se olvida de las dificultades propias que puede presentar el alumno, con dicho saber.

- Una didáctica sin escuela.

Cuando se pretende responder a las preguntas: ¿cómo aprenden las personas? Y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? Surge un nuevo paradigma de investigación, sonde se pretende buscar una aproximación cognitiva, que se realiza desde la observación y la descripción sistemática. Donde se pretende que mediante estudios cognitivos dar explicación de cómo se aprende matemáticas, o simplemente dar pautas de ello.

- Una didáctica en la escuela, pero sin escenarios.

  Las aproximaciones sistémicas han intentado analizar los fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema, donde se considera: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña. Donde se abre la posibilidad de articular las clases de matemática con las de ciencia.

- Una didáctica en escenarios socioculturales.

  Surge entonces la necesidad básica de dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento:

  - Su naturaleza epistemológica.
  - Su dimensión sociocultural.
  - Los planos cognitivos
  - Los modos de transmisión vía enseñanza.

Esta última evolución de la didáctica, que corresponde a una aproximación múltiple, es lo que formalmente se denomina *Socioepistemología.*

Los principios de la teoría Sociepistemológica, que corresponden al punto de partida y al fundamento de esta teoría son cuatro. Formando una red nodal, que puede ser observada en la Ilustración 10.

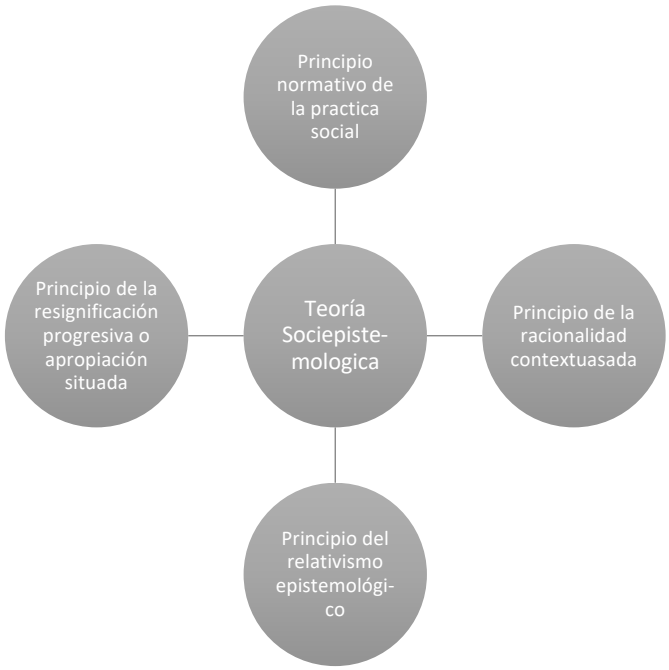


Ilustración 10: Principios de la Teoría Sociepistemológica.

- **Principio normativo de la practica social:** es fundamental para el funcionamiento de la teoría, se asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen como las generadoras del conocimiento.

- **Principio de la racionalidad contextualizada:** alude a la relación del sujeto con el saber es una función del contexto. Enuncia la racionalidad con la que se actúa dependiendo del contexto en el que el individuo se encuentre. La idea de escenario sociocultural propuesto por Crespo (2007), pues es en dicho escenario donde se construye el conocimiento, ya que es un producto sociocultural.

- **Principio del relativismo epistemológico:** se concibe que el saber es, de hecho, una multitud de saberes de verdades relativas, o sea que no tiene una verdad universal. Se acepta el saber popular, el saber técnico y el saber culto, pues en su conjunto caracterizan la sabiduría humana. Desde el ámbito educativo el error del alumno no se considera como una falla o carencia, sino se analiza para entender por qué está mal y esto es algo que debe develar el investigador. El relativismo epistemológico nos permite aceptar el conocimiento como localmente válido, derivado de siglos de experiencia.

- **Principio de la resignificación progresiva:** para la epistemología genética, la acción es la base del desarrollo del conocimiento, desde la acción del sujeto sobre el objeto se derivan los significados construidos. Dicho significado dependerá, en gran medida, del

escenario contextual donde se produce la acción. No aísla al sujeto, al individuo del medio, sino son fundamentales las interacciones que este realice, para enriqueces la resignificación que construya, con sus argumentaciones, el espacio de uso, los procedimientos y todo aquello que rodea al saber.

Desde la Socioepistemología surge la noción de objeto matemático, desde donde emerge, con una fuerte carga conceptual según la cual saber matemáticas es saber de sus objetos y de sus relaciones. Sin embargo, el problema educativo, no es la construcción de objetos abstractos, sino el de su significación compartida mediante el uso del conocimiento culturalmente situado (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014).

La aproximación Sociepistemológica a la investigación en matemática educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional (Cantaral, Farfán, Lezema, & Martinez-Sierra, 2006).

La Socioepistemología plantea que el conocimiento matemático es social, histórico y culturalmente situado; problematizando el conocimiento matemático a la luz de las circunstancias de su construcción, estableciendo que la Matemática, es una creación humana; por tanto, es posible su recreación, el saber se problematiza y se rediseña para fines didácticos.

A la hora de difundir el saber, la Socioepistemología sostiene que se forman discursos que facilitan la representación en la matemática alcanzando consensos entre los actores sociales (Cantaral, Farfán, Lezema, & Martinez-Sierra, 2006). Estos discursos reciben el nombre de *Discurso Matemático Escolar.*

2.2. El Discurso Matemático Escolar.

El *Discurso Matemático Escolar* (dME), no se reduce a la estructuración de los saberes, ni tampoco a como se organizan los contenidos temáticos, sino que se extiende hasta llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y significados compartidos. Legitima la imposición de significados, tanto a estudiantes como a docentes cuando reduce el saber al conocimiento segmentándolo, despersonalizándolo y descontextualizándolo. Por tanto, el dME debe rediseñarse, permitiendo que el docente se empodere de la enseñanza, apropiándose del saber a fin de profesionalizar la gestión educativa, mediante la producción de diseños situados de intervención pedagógica que problematizan al saber matemático escolar. (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014).

En el dME se ha evidenciado que posee una serie de características, que son descritas por Soto y Cantoral en el artículo: *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Sociepistemológica*, año 2014; estas son:

- *La atomización en los conceptos*: no se consideran los contextos sociales ni culturales del mismo conocimiento, que permite su construcción.
- *El carácter hegemónico*: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimiento, por sobre otros.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo*: se presentan los objetos matemáticos como si hubiesen existido siempre y con un orden determinado.
- *El carácter utilitario y no funcional del conocimiento*: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.
- *La falta de marcos de referencia*: se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras disciplinas.

Con estas características, se reconoce que el dME es impositivo, y que el conocimiento matemático es estático y no es posible ni su construcción, ni su modificación por parte del de los profesores y estudiantes, siendo estos comunicadores y aprendices de un conocimiento legítimamente socializado. Esta problemática reconoce que el problema de la enseñanza de las Matemáticas previene también del mismo conocimiento, de su estructura, su funcionamiento y de su naturaleza.

La Socioepistemología reconoce que el problema de la enseñanza no radica sólo en el estudiante y en su forma de pensar, ni tampoco radica solamente en los conocimiento que domina el maestro, sino también en que el objeto cultural que se está comunicando es un acto de enseñanza, que este no corresponde a la Matemática, sino que es de la matemática escolar (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014), y que este puede ser rediseñado, además problematiza el saber dentro de un paradigma epistemológico, donde se concibe el conocimiento matemático como aquel que se genera a partir de las prácticas socialmente situadas (Soto & Cantoral, 2014), estas prácticas son reconocidas como el dME y es necesario un estudio sistémico del mismo, para desarrollar propuestas para su rediseño, pero a la luz de la construcción social del conocimiento matemático.

Es importante reconocer las características que diferencian la Matemática, Matemática Escolar y Matemática Educativa, para comprender el dME y su rediseño, así poder diferenciar una de otra, estás son:

- *Matemática:* corresponde a la rama del saber científico, son bases en la verdad y comunidades internacionales robustas.
- *Matemática Escolar:* corresponde a la matemática derivada de la transposición hacia el ámbito escolar, es una escenificación ficticia del primero en un ambiente áulico.
- *Matemática Educativa:* corresponde a una disciplina científica que estudia los fenómenos didácticos ligados al saber.

La Matemática Escolar es el objeto del docente, por lo tanto, es rediseñable con fines del aprendizaje (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014), por consiguiente, es importante discutir acerca del cómo enseñar, qué enseñar, a quién enseñar y cuándo enseñar. El docente deberá considerar como saber teórico de referencia a la Matemática Educativa, tomando decisiones sobre las argumentaciones y procedimientos de los contenidos curriculares que entregará a sus estudiantes, atendiendo a sus racionalidades contextualizadas y al relativismo epistemológico, haciendo un rediseño de la matemática escolar, por lo tanto, rediseñando su dME.

Para la Socioepistemología lo más importante no es enseñar los resultados de una actividad, sino enseñar la actividad misma, pues asumimos que los estudiantes deben aprender matematizando, organizando y reorganizando su realidad, siendo todo lo imaginable y/o razonable para los propios estudiantes.

Se busca rediseñar el conocimiento, incorporando las dimensiones sociales, históricas, culturales e institucionales, que permiten efectivamente la construcción del conocimiento matemático. La Socioepistemología incorpora la noción de práctica social, para explicar el transito del conocimiento al saber (Soto & Cantoral, 2014).

2.3. El contexto social.

La teoría Sociepistemológica tiene por objeto de estudio la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional (Cantoral, 2014), se caracteriza por ser:

- Contextualizada.
- Relativista
- Pragmática.
- Funcional

Considera la complejidad de la naturaleza del saber y funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social. Propone que el estudio del conocimiento, social, histórico y culturalmente situado (Cantoral, 2014).

Dentro de la Matemática Educativa el triángulo didáctico ha sido base del sistema didáctico, donde se encuentra el saber, el profesor y el alumno. En la teoría Sociepistemológica se amplía la idea de *alumno* como *sujeto* (individual o colectivo), el *profesor* como *individuo o institución escolar* y al *saber* cómo *saber técnico, popular* o *culto*, como *sabiduría.* Cada uno de los vértices del triángulo didáctico (saber, alumno y profesor) y las relaciones entre ellas (sus aristas) pueden ser modificables al mirarlos desde la tesitura social, cuya naturaleza, al ser institucional, histórica y culturalmente situada, modifica a su vez las ideas de aprendizaje, enseñanza y animación, así como al saber, al profesor y al alumno, según se puede observar en la Ilustración 11 (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014).

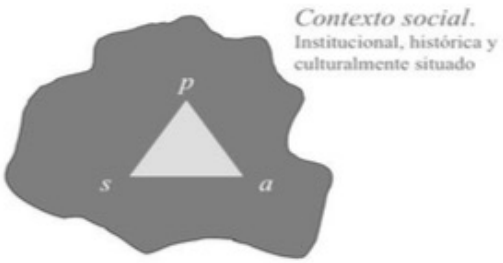


Ilustración 11: Triangulo didáctico extendido. (Cantoral, 1998).

Ricardo Cantoral (2014) señala que algunos autores caracterizan la relación entre profesor-alumno como *Animación*, profesor-saber como *Enseñanza* y alumno-saber como *Aprendizaje*, como se puede observar en la Ilustración 12.

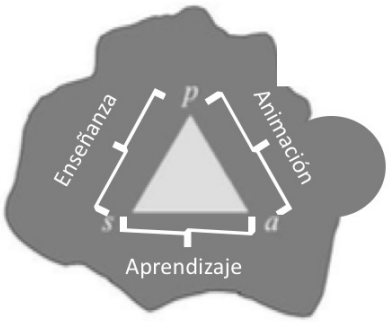


Ilustración 12: Triángulo didáctico caracterizado (Cantoral, 2014).

La Socioepistemología incorpora el contexto social y las perspectivas culturales para la significación del conocimiento. Aparecen ahora como principales actores de los procesos didácticos:

- El **aprendiz**: sujeto individual, colectivo o histórico.
- El **saber**: como conocimiento en uso o como construcción social del conocimiento.
- Los **escenarios socioculturales**: portadores del mundo real, cuyas relaciones son orientadas por las prácticas de referencia y normadas por las prácticas sociales.

De este modo el triángulo como base del desarrollo teórico es:

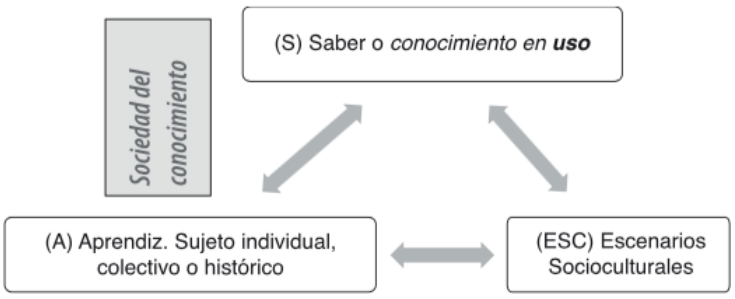


Ilustración 13: Triángulo didáctico en la Socioepistemología. (Cantoral, 2013).

El saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, y su introducción al sistema didáctico le obliga a hacer una serie de modificaciones, tanto en su estructura como en su funcionamiento (Cantoral, 2014). Al introducir el saber matemático al aula, se producen discursos que facilitan su comunicación, así como en los conceptos y en sus procedimientos, debiendo considerar diversos consensos que producen que el saber se despersonalice y descontextualice de su origen.

Si bien la Matemática es aceptada por la sociedad como universal, su enseñanza no lo es. Está, la enseñanza de las matemáticas, se sitúa en escenarios sociales y culturales específicos que habrá de tomarse en cuenta al momento de elaborar propuestas pedagógicas alternativas (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014).

Para articular la construcción social del conocimiento matemático, Montiel (2005) en su tesis doctoral Estudio Sociepistemológica de la función trigonométrica, propone el siguiente modelo:

Ilustración 14: Construcción Social del Conocimiento Matemático (Montiel, 2005)

Distingue desde el contexto histórico de origen a la actividad, la practica de referencia y las prácticas sociales como elementos básicos para describir su construcción social. El modelo que propone, se observa que una *actividad* es aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, que se articulan con otras actividades, el total de ellas se asocian con una *practica de referencia* y que es regulada por una *practica social*, es decir, la construcción del saber.

Para la teoría Sociepistemológica las prácticas sociales son los cimientos del conocimiento (*Principio normativo de las prácticas sociales*), el contexto en el cual el individuo o grupo construye el conocimiento que lo signifique y lo ponga en uso influye en el tipo de racionalidad que el sujeto emplea (*Principio de racionalidad contextualizada*). Una vez que este conocimiento es puesto en uso, o sea lo consolida como saber, su valides será relativa a su entorno (*Principio de relativismo epistemológico)*. Si a causa de su propia evolución y de la interacción del individuo con los diversos contextos, resignificara sus saberes enriqueciéndolos con variados significados (*Principio de resignificación progresiva*).

2.4. Los fenómenos del discurso matemático escolar.

Se discute la función de la matemática escolar, el cual se llama *Discurso Matemático Escolar*. A este se le critica para modificarlo y se estudia su construcción social, como se puede ver en la Ilustración 17.

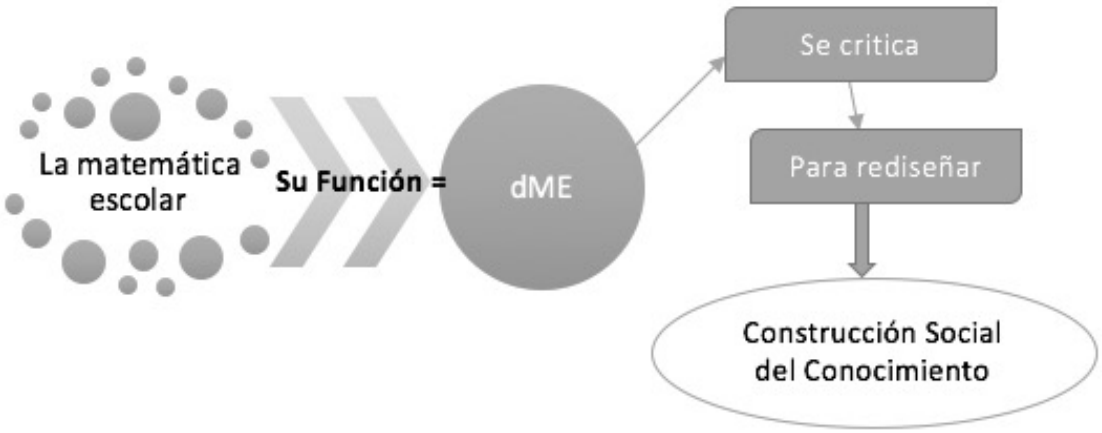


Ilustración 15: Matemática Escolar y la Construcción Social del Conocimiento.

Los modelos educativos olvidaron un sujeto a saber: la gente. La construcción social del conocimiento matemático, consiste en ponernos en el lugar de la gente; es decir, en los usos de su conocimiento matemático (la escuela, trabajo, ciudad). La ausencia de la inclusión de la gente ha generado un discurso matemático escolar que trastoca la ontología y la epistemología del conocimiento matemático (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015), provocando los fenómenos:

- La adherencia.
- La exclusión.
- La opacidad.

Cuya base epistemológica está en los usos del conocimiento matemático de distintas comunidades, entre ellas: la escuela, el trabajo, la ciudad, etc.

Se pretende lograr la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM). Como se puede ver en la ilustración 15. Haciéndose necesario la construcción de un marco de referencia que conlleve el rediseño del dME.

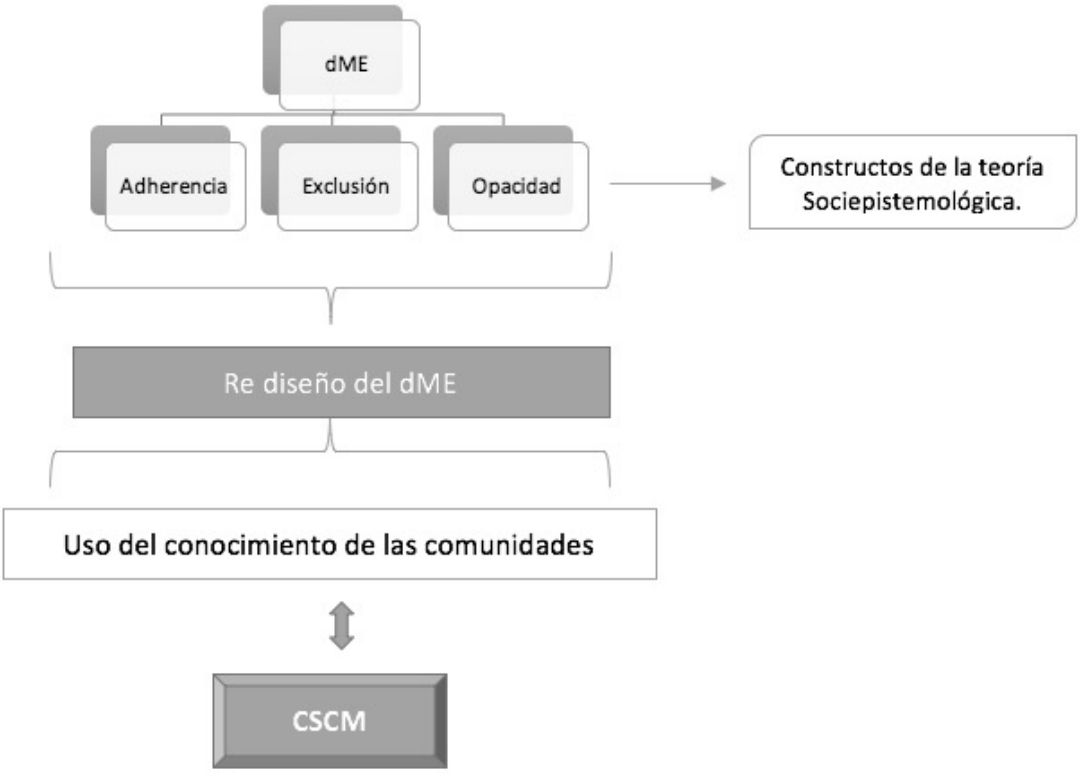


Ilustración 16: dME sus fenómenos y la CSCM.

La matemática y el cotidiano son dos conceptos que alcanzan grandes dimensiones, no es trivial hablar del conocimiento matemático, un tanto por su obra y otro tanto por su aprendizaje.

Los modelos educativos norman la matemática escolar alejándola de la génesis de la obra matemática (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015). Cada vez crece más la creencia contradictoria que la matemática no tiene relación con la realidad, pero está en todo lo que nos rodea, como se puede observar en la Ilustración 16.

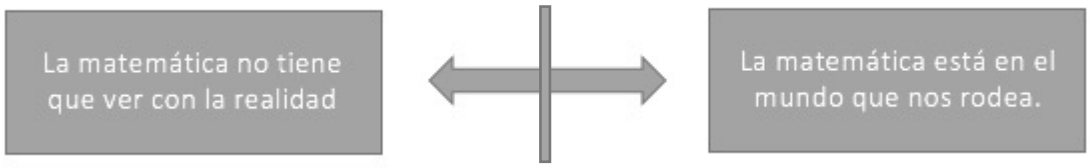


Ilustración 17: Contradicción en las creencias de la matemática.

Las sociedades valoran a la matemática como un conocimiento importante y por lo tanto habrá que aprenderla a costa de su poca visibilidad. Por su poca visibilidad se formulan adherencias sin cuestionar la utilidad de ese conocimiento, con afán de ganar homogeneidad en el aprendizaje, se soslaya y opaca la pluralidad del pensamiento matemático.

Lo que siempre nos ha preocupado es lo que saben de conocimiento matemático, pero no el uso del mismo. La preocupación principal en la enseñanza y aprendizaje de la matemática está en lo que se sabe; es decir, lo qué sabe el alumnado y el profesor del tema matemático en cuestión, pero no nos preocupamos en saber cómo usan ese conocimiento (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015).

En el ámbito educativo aparecen programas innovadores oficiales donde aparecen nuevos conceptos que definen nuevas formas de enseñar. En este contexto se derivan consignas como "llevar la matemática a la realidad del o la estudiante" y todavía más impactante "crear ambientes de la matemática de todos los días". Sin duda esta propuesta en sí parece sensata, pero choca con nuestra realidad educativa. Se desarrolla un currículum que sólo atiende los conceptos, de manera que los usos fueron soslayados. No existe un referente específico para hablar de una funcionalidad del conocimiento. Sin el conocimiento funcional no podríamos crecer como seres humanos (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015).

Se intenta tratar la naturaleza del conocimiento. Existen muchos estudios y pensamientos sobre el conocimiento y muchas maneras de explicarlo, pero cada vez tiene más tintes de pluralidad epistemológica. Esto se evidencia en el ejemplo presentado por Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015), donde se compara el conocimiento que tiene la gente, como un Auto descompuesto en la calle, y el conocimiento de expertos como componiendo un auto de lujo en un taller.

Ilustración 18: Conocimiento de la gente y de expertos.

En el libro *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad* podemos encontrar el siguiente ejemplo: Cierto conocimiento X, puede ser que no veamos la X a priori; sin embargo, la reinterpretamos con ideas, con cosas que uno hace a la luz de la cultura, de las formas de conocer y de vivir. Por ejemplo, las gráficas de las funciones son un conocimiento matemático, son expresiones que sistematizaron ciertos humanos, tienen su historia desarrollada, han sido reinterpretadas permanentemente. Hoy en los cursos de matemáticas se habla de

gráficas cartesianas sin entender su historia y su desarrollo. La comunidad de invidentes genera una epistemología y la comunidad de videntes genera otra sobre esta problemática. El problema está cuando la persona vidente impone su epistemología sin considerar la de los invidentes.

La matemática escolar, con sus programas, currículos y modelos educativos genera un discurso matemático escolar (dME) una epistemología dominante, el cual no considera el conocimiento matemático de la gente, por ende, tampoco al alumnado. Generándose así la ***exclusión*** *de la construcción social del conocimiento matemático* (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015).

Generándose otra problemática: Negar la pluralidad epistemológica en el ámbito escolar, por ejemplo: la problemática de fondo es que lo cotidiano está completamente excluido de lo que sucede en el aula.

Se supone que enseñamos para que los niños, niñas y jóvenes mejores su cotidiano, pero lo que se enseña en la escuela no responde a las situaciones de lo cotidiano, y peor aún, el conocimiento de lo cotidiano no se parece nada al de la escuela.

Se reconoce que existen dos epistemologías:

- La de la vida.
- La de la matemática escolar.

Estas epistemologías no se conocen, ni mucho menos dialogan entre ellas; pero el conocimiento legitimado por la sociedad, es el de la escuela. Generándose el fenómeno de la ***opacidad*** de la vida (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, & Soto, 2015).

Docentes, y en consecuencia estudiantes, se adhieren al dME (fenómeno de **adherencia**). No se atreven a trastocarlo, condición necesaria para lograr la dialéctica entre el conocimiento matemático y el cotidiano del aula, la vida.

El dME necesariamente debe ser trastocado, de esta manera se afrontarán los fenómenos de exclusión, opacidad y de adherencia.

Por una parte, está el conocimiento disciplinar y la institucionalización, pero también existen humanos que viven el conocimiento desde su función, desde su utilidad, desde sus usos.

Se debe considerar tres conocimientos matemáticos:

- El de la obra.
- El de la escuela.

- El de la ciudad.

Los efectos de la justificación razonada llevaron a la obra matemática a fortalecerse y a desarrollarse, se universalizó. Sin embargo, la matemática escolar no avanzó de la misma manera, por ejemplo: se puede hablar de un teorema A o B y no a priori se pregunta quién lo hizo, por qué, cuándo y cómo. No creamos una situación funcional donde los participantes con sus recursos humanos usen la proposición en un contexto específico. La justificación razonada soslayó la justificación funcional.

La separación de la matemática escolar con la realidad define las pautas de la problemática fundamental del aprendizaje de está.

Los constructos que responden a los fenómenos son:

- La identidad disciplinar
- La inclusión.
- La socialización en lo matemático.

2.5. La matemática funcional: modelación graficación.

La Socioepistemología, plantea que el conocimiento matemático se construye a través de las prácticas sociales, como pilar fundamental de la teoría. (Cordero, 2006), centrando su atención en el uso de la gráfica a través de la modelación.

Se tiene por creencia que primero se debe enseñar matemáticas y después, buscar la aplicación de tal conocimiento, considerando la modelación como una aplicación de la matemática. Sin embargo, la modelación está presente en el curriculum como una habilidad que se debe desarrollar.

Según Cordero (2006) existen dos grandes perspectivas, cuando se habla de conocimiento. A la luz de que el conocimiento es una representación de la realidad, se acepta que la modelación, en la enseñanza de las matemáticas, propicia las acciones que determinan que “ciertas cosas deben ser imitada”. Por lo que la modelación es una “representación” y en consecuencia se convierte en una “aplicación de la matemática”. Otra aceptación de la modelación, proviene del significado de modelo, que es considerado como “copia de algo” para ser reproducido. En el campo de la matemática se define como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas, o se entiende como que la modelación es la representación de un objeto en cuestión. Según Blum (et al, 2002) citado por Cordero (2006) en el campo de la matemática

educativa, las investigaciones apuntan a analizar la estructura de las representaciones e identificar sus registros semánticos para establecer relaciones con los procesos cognitivos de los individuos.

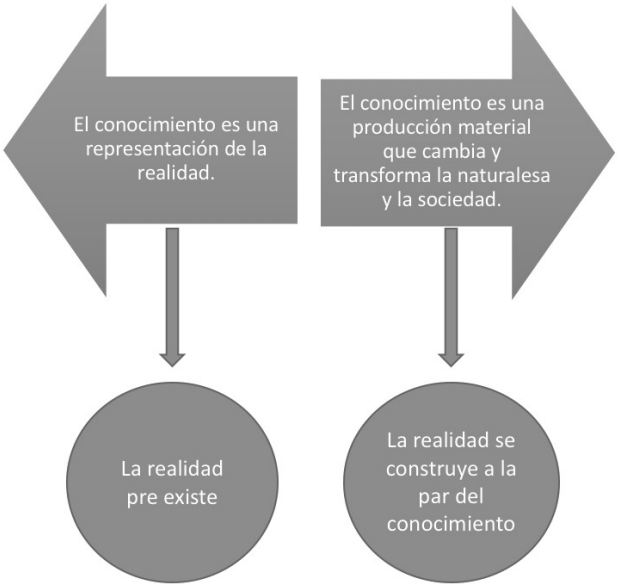


Ilustración 19: Perspectivas del conocimiento.

Es fundamental lograr que los estudiantes valoren socialmente el conocimiento matemático, para terminar con la concepción utilitaria del conocimiento y llevarlo al estatus de funcional, pues en este nivel permite desarrollar e integrar el conocimiento a la vida para transformarla y reconstruir significados permanentes en ella. Bajo esta perspectiva, la modelación en la matemática escolar tiene que ser al más robusto que una representación o una aplicación matemática, tiene que ser una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión (Cordero, 2006). Un ejemplo para ello es que la graficación es la argumentación de ciertas situaciones del Cálculo.

Para la Socioepistemología,

> La modelación posee su propia estructura, que está constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. (Cordero & Suárez, 2010).

La Socioepistemología de la Modelación-Graficación, representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de Situaciones de Modelación, cuya hipótesis especifica es: *la variación se resignifica a través de la modelación-graficación.* Es decir, una situación de aprendizaje debe generar en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas de las funciones que ahí intervienen.

Desde la gráfica de las funciones se crean argumentos, que los estudiantes construyen en su quehacer, capturando y transformado la información recibida de acuerdo a sus propias capacidades. Se crean secuencias de actividades, con la intensión de favorecer procedimientos para que los estudiantes formulen las propiedades de las funciones a través del comportamiento de sus gráficas (Cordero, 2006).

La graficación es en sí misma una modelación, pero no vista como "herramienta didáctica", sino como actividad que transciende y se resignifica, que transforma el objeto en cuestión. La graficación puede llevarse a cabo de múltiples formas y hacer ajustes a su estructura para producir un patrón deseable, pues es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

Para Roth y Bowen (2001) citados por Cordero (2006) vieron que en los ámbitos escolares y no escolares la necesidad de graficar para entender los datos de ciertas situaciones, pareciera que graficar no sólo es competencia de la cognición, sino que es una práctica social que ha permitido generar ciertos conocimientos matemáticos.

Existen datos epistemológicos que sustentan la idea de la pertinencia didáctica del uso de la gráfica en la modelación, estos son:

- La gráfica antecede a la función.
- La gráfica es argumentativa.
- El uso de las gráficas tiene un desarrollo.

Además, existe une epistemología del desarrollo del uso de las gráficas en la modelación, en donde se establecen tres momentos para Figuración de las Cualidades, estos son:

- Momento 1: Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento del uso de las gráficas.
- Momento 2: Construcción de argumentos en el uso de las gráficas.
- Momento 3: Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación.

Así se puede establecer el interés por comprender fenómenos de variación a través de figuras, lo que obliga a generar una funcionalidad de los conocimientos matemáticos. Establecer dicha relación que permita discriminar la forma en que se establece dicha relación, argumentando el

uso de la gráfica, nos permitirá luego generalizar el uso de las gráficas, mediante la puesta en funcionamiento del uso de la gráfica en la modelación.

Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de una función con su derivada o manejo simultáneo de dos o más órdenes de variación, máximos o mínimos o la acumulación de una función. Pero las gráficas de las funciones son el conocimiento en sí mismo que se desarrolla y que hoy aporta datos epistemológicos que propician nuevas hipótesis para trabajar la variación en la matemática escolar (Cordero & Suárez, 2010).

Rescatar los argumentos de los diferentes escenarios en donde se desarrolla la matemática, nos proporciona los elementos para formular Marcos de Referencia, que reconocen la pluralidad epistemológica de la matemática.

La epistemología del Cálculo y del Análisis reconoce en un primer momento tres posibles construcciones, cada una de ellas genera argumentos que permite construir nuevos conocimientos, estas son la Aproximación, Variación y Transformación. Del Valle (2015) en su tesis doctoral amplía estos tres argumentos a un cuarto, la Selección. Estos argumentos son distintos y seleccionar uno es parte esencial de la construcción. Es así como la derivada podrá ser reconstruida dependiendo de en que escenario se encuentre.

Esta epistemología pretende rediseñar el dME como se puede ver en la Tabla 2, impulsando el discurso basado en Marcos de Referencia, el cual se expresa desde el cotidiano de la gente que usa dicho conocimiento en una situación específica, como la variación, transformación y aproximación (Morales & Cordero, 2014, en Del Valle, 2015). Los diversos significados que podemos encontrar, estarán en concordancia con el contexto interactivo que componen la epistemología del Cálculo, que son resultado de la actividad humana (Cordero, 2001).

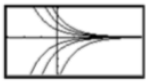
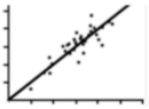
	SITUACIONES			
CONSTRUCCIÓN EN LAS PRÁCTICAS	VARIACIÓN	TRANSFORMACIÓN	APROXIMACIÓN	SELECCIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	Predicción $E_o+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots$	Optimización 

Tabla 2: Ampliación de la Socioepistemología del Cálculo y el Análisis. (Del Valle, 2015)

Cada una de las situaciones provienen de una construcción del Cálculo, que depende de la situación en donde se reconstruyen los significados y procedimientos de acuerdo a la experiencia vivida.

En la Situación de Variación las significaciones asociadas corresponden al flujo, movimiento, acumulación y a estados permanentes. Las clases de pregunta hacen referencia a las condiciones iniciales de un móvil $f(x_0)$ y $f'(x_0)$, prediciendo la siguiente posición $f'(x_0+h)$. El procedimiento consiste en la comparación de dos estados $f(x_0+h)-f(x_0)$ cuyos procesos y objetos se reflejan sobre cantidades, variación continua y distintos estados. Su argumento es la predicción desde un estado inicial a un estado posterior y el instrumento humano útil corresponde a la cantidad de variación continua (Cordero, 2001).

2.6. El pensamiento y lenguaje variacional.

Es importante reconocer que en la actualidad es imperante adecuar la enseñanza, a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los contextos históricos, institucionales y culturales que requiere la actividad matemática (Cantoral, 2013). Por lo que aprender matemáticas no se puede limitar al sólo hecho de reproducir el exterior, sino debe ser el resultado

de construcciones sucesivas, cuyo objetivo es garantizar el éxito de nuestro proceder frente a cierta situación, con lo cual resulta fundamental vislumbrar que es lo que nuestros estudiantes entienden por ejemplo por pendiente de una recta, no tan sólo que la sepan calcular.

Resulta entonces fundamental poder gestar en el aprendizaje el desarrollo del pensamiento matemático. Comprender la complejidad del conocimiento matemático, en el cual las nociones matemáticas desempeñan un papel dual: el de proceso y el del objeto, está determinado en función de la situación y de la conceptualización en la cual se enfrente.

Uno de los elementos fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias es el desarrollo del *Pensamiento y Lenguaje Variacional (*PyLVAR), pues existen diversos episodios de la vida cotidiana, y de los dominios de la ingeniería, que precisan del estudio del cambio. Caracterizados por la rigidez del discurso matemático escolar tradicionalista, donde predominan los algoritmos del tipo algebraico u otros aspectos formales de la matemática. Los estudios del cambio sirven para entender sus efectos en diversos fenómenos; este interés se deriva de la necesidad de predecir, pues el ser humano es incapaz de adelantar el tiempo para observar los resultados de los acontecimientos. Utilizándose la predicción como una herramienta para modelar los fenómenos de cambio.

El estudio de la variación es un elemento de los elementos necesarios en el aprendizaje del Cálculo, le dieron vida y permitieron su desarrollo. Pero que no ha sido propiciado en los salones de clase, dejando en su lugar un aprendizaje basado en recursos. Centrando la enseñanza en objetos formales carentes de referentes concretos. La ausencia de ideas variacionales en la enseñanza del nivel medio superior, no contribuye en el aprendizaje de profundos conceptos del Cálculo diferencial e integral (Cantoral, 2013). Por ejemplo, la derivada surge como una herramienta para el estudio del cambio, pero no obstante su enseñanza se reduce a técnicas de derivación o como una regla de los cuatro pasos, impidiendo de este modo el surgimiento de ideas variacionales.

En el libro *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*, Cantoral (2013) define que el *pensamiento y lenguaje variacional* estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le dé cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con las que personas asignan, comparten sentido y significados, utilizando estructuras y lenguajes variacionales.

El *pensamiento y lenguaje variacional* enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. El proceso de cambio lo podemos registrar y analizar a partir del estudio de la forma en qué varían las variables en juego, identificando

aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios. Este es tanto una línea de investigación, como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en lo que se ve involucrado el cambio y donde la necesidad de predecir estados futuros, motivando su estudio y el análisis de la variación. Podemos significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de las ideas variacionales que le dieron vida y desarrollaron esos conocimientos (Caballero & Cantoral, 2013).

El Pylvar se fundamenta en las ideas de cambio y variación, permitiendo resignificar los conocimientos matemáticos propios del cálculo, caracterizándose en la forma que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando lo que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios.

Se puede observar en la Ilustración 20 un modelo que permite interpretar la forma que se desarrolla el pensamiento y lenguaje variacional, que relaciona el uso sistémico de los elementos del PyLVAR, construido por Caballero (2012), quien documenta las dificultades de los profesores para usar ideas variacionales.

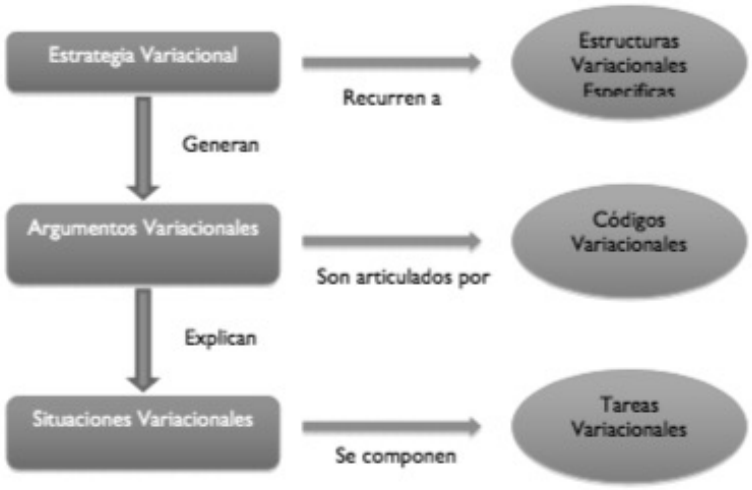


Ilustración 20: Modelo de interacción de los elementos del PyLVAR.

Los elementos que conforman los procesos de cambio en PyLVAR, son los siguientes:

Estrategia Variacional (EV): Consiste en una forma particular de razonar y *actuar ante una Situación Variacional (SV),* que posibilita el encarar dichas situaciones. Permiten reconocer *qué, cómo y cuándo cambia* dentro del sistema. Las estrategias variacionales que se han reconocido

en los trabajos desarrollados bajo la visión Sociepistemológica son, según Caballero y Cantoral (2013):

- *Comparación*: Está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, inicial y final, lo que permite identificar cambios y poder analizarlos en las características de su variación. Algunos de los términos utilizados son: “es más alto que”, “es más corto que”, “es más frio que”, etc.
- *Seriación*: Consiste en analizar varios estados sucesivos, relacionándose con la comparación. Por ejemplo: sin hablamos que una función estrictamente creciente en un intervalo, es la relación entre los estados intermedios que satisfacen.
- *Predicción*: Esa asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera de sintetizar y abstraer esta información en modelos predictivos.
- *Estimación*: A partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamiento a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción, donde los estados propuestos son locales. Se parte del hecho de conocer estados cambiantes, sin embargo, en este caso no se busca un patrón que pudiera seguir, sino más bien se proponen nuevos estados a corto plazo. Por ejemplo: en el análisis de temperaturas, la Estimación se puede usar para saber si habrá un crecimiento o disminución, en tanto que la Predicción para decir hasta qué punto crecerá, o saber algún valor específico de la temperatura dentro de algún tiempo.

Estructura Variacional Específica (EstV): Consiste en los conocimientos, herramientas y procesos matemáticos o científicos *que se usan en una SV para darle explicación*, y en las que se *apoyan las EV* para realizar el estudio de la variación.

Argumentos Variacionales (AV): *Una SV se caracteriza por el empleo* de argumentos de tipo variacional que recurren al análisis del cambio y sus cuantificaciones. Estos argumentos según Cantaral (2000) son utilizados por las personas cuando hacen uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones, que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. *Son este tipo de argumentos los que permiten dar explicación a las SV.*

Códigos variacionales (CV): Consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que *son articulados para generar los AV*. Estos códigos pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

Situación Variacional (SV): Es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre

diversos estados de cambio. Por otra parte, se considera que una situación no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que lleve a una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios de variables.

Tareas Variacionales (TV): Consiste en actividades, acciones y ejecuciones que *permiten organizar el estudio de la variación dentro de una SV* en acciones y objetivos específicos, dentro de contextos particulares (gráficos, analíticos, numéricos, etc.). *Se caracterizan por el empleo de una o más EV dentro de un mismo contexto de análisis,* lo que permite organizar el estudio de la variación en las SV en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos. Algunas TV son las siguientes:

- *Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia:* Esta tarea consiste en la construcción de gráficas, para lo cual se desarrolla un análisis de las variaciones correspondientes a la situación que se plantea, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. Aunque la forma de abordar esta tarea involucre el hallar algún patrón o comportamiento, el objetivo de esta tarea no es hallar eso, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercana posible la situación que se presenta (Soto, 2014).

    - Se usa la estrategia de comparación para establecer diferencias en la forma en que varía un sistema, lo que permite hacer un bosquejo de la gráfica correspondiente.
    - Uso de la estrategia de seriación, al analizar los diferentes estados de la gráfica al variar parámetros de la función, estableciendo una relación general sobre el movimiento de la gráfica, con lo que se tendrá de referentes para la construcción de gráficas con características particulares.
    - Dada una gráfica, se emplea la estrategia de comparación para establecer diferencia entre las gráficas de distintos movimientos y encontrar así los efectos que un cierto tipo de movimiento tiene sobre la gráfica. Lo que facilita la construcción de gráficas con características particulares.

- *Análisis gráfico con la variación como punto de referencia:* Esta tarea es similar a la de análisis de datos en tablas numéricas en el sentido de que busca patrones, relaciones comportamientos, tendencias y valores específicos, pero con la diferencia de que el análisis esta sobre la gráfica, así como elementos que surgen a partir de ella, como tangente, alturas, asíntotas, entre otros. Una característica de esta tarea es que las acciones a realizarse giran en torno al análisis de variaciones (Soto, 2014).

- Se usa la estrategia de predicción para analizar las variaciones de una gráfica cerca de un punto, con el fin de establecer el comportamiento de las gráficas en ese punto
- Se usa la estrategia de seriación para analizar la forma de variación en distintas gráficas, con lo cual se establece una relación entre la gráfica y el tipo de variación que la genera.
- Se comparan las alturas de una gráfica en dos o más puntos para establecer cuál es la grande, o si hubo un crecimiento o decrecimiento en los valores extremos de un intervalo.
- Se usa la estrategia de seriación para analizar un conjunto de alturas, ya sea de una gráfica o de un segmento, para encontrar el máximo o mínimo de esas alturas o para saber si el comportamiento es creciente o decreciente.
- Se compara las diferencias en las alturas de las gráficas de una función antes y después de puntos específicos para establecer el signo de la primera derivada.
- Dada una gráfica, se pide establecer el tipo de movimiento necesario para generar esa gráfica o una diferente. se emplea la estrategia de seriación para analizar cómo van cambiando las alturas de las gráficas con el paso del tiempo, para así establecer el tipo de movimiento necesario para generar dicha gráfica.

Para nuestra investigación proponemos un modelo donde muestra una interacción más dinámica de las relaciones del PyLVAR. Donde las Estrategias Variacionales (EV) actúa ante una Situación Variacional (SV), permitiendo reconocer qué, cómo y cuándo cambia dentro del sistema. Las EV que se reconocen son: Comparación, Seriación, Predicción y Estimación, la EV recurre además a las Estructuras Variacionales (EstV) que a su vez apoyan a las Estrategias Variacionales y estas EstV se usan para explicar una SV. Las Situaciones variacionales se componen de las Tareas Variacionales, que son empleadas por las EV, estás generan los Argumentos Variacionales, que explican la SV, que a su vez es empleada por los AV, que son articulados por los Códigos Variacionales (CV), esta dinámica se puede observar con mayor claridad en la Ilustración 21.

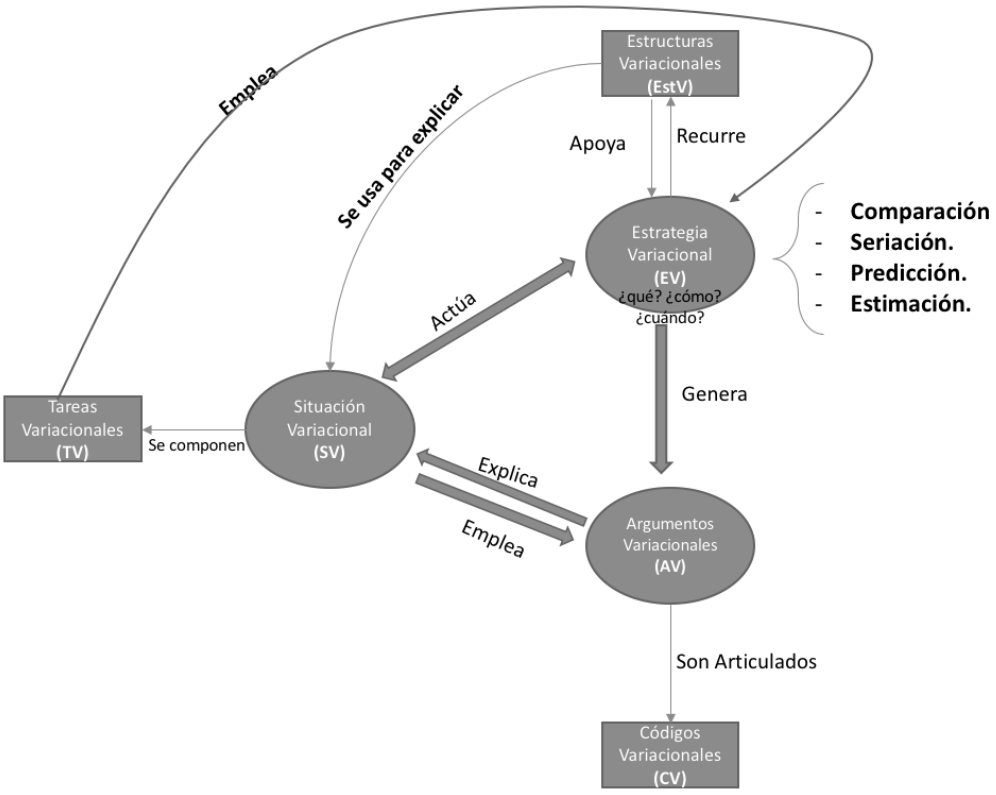


Ilustración 21.: Interacción dinámica de las relaciones en PyLVAR

Capítulo 3: Evolución Histórica.

> *El análisis epistemológico resulta fundamental al momento de la enseñanza, pues provee de historicidad a los conceptos matemáticos que normalmente la enseñanza presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Brinda también la posibilidad de evidenciar la disparidad entre el saber científico y el saber enseñado. (Farfán ,1997)*

3.1. Contexto histórico de la derivada.

Para llegar a lo que conocemos hoy por derivada, tuvieron que transcurrir siglos desde las primeras ideas relacionadas con la variación, infinitesimales y tangentes. La derivada es el concepto matemático que permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en todo fenómeno de la naturaleza o de la práctica humana. Está relacionada con tres nociones fundamentales: **el cambio**, **la razón promedio de cambio** y **la razón instantánea de cambio** (Vrancken & Engler, 2014) . Son innumerables las aplicaciones de este concepto, pues está presente de una u otra forma en la vida cotidiana, pero todo lo relacionado con ella, resulta abstracto y complejo para el estudiante, generándose serias dificultades al intentar comprender de manera optima los conceptos de este campo disciplinar.

El origen del cálculo está íntimamente relacionado con los incrementos y los cambios. Las variables y las funciones son elementos básicos para el estudio de la variación (Dolores, 2013). Lo que conduce en sus comienzos al estudio de la derivada y al desarrollo de su análisis es el estudio de la variación de múltiples fenómenos. La matemática posee un rol protagónico, cuando es necesario analizar, medir o cuantificar cualquier fenómeno. La medición del cambio, es un aspecto esencial de la variación y de los elementos eje en la formación del concepto de derivada (Vrancken & Engler, 2013). El cálculo posee fundamental importancia a la hora de encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos.

Basados en el *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemología* de Vrancken y Engler (2013), presentaremos la evolución de la derivada en

relación a las diferentes problemáticas con respecto a la variación abordados en diversos periodos históricos: Pre Historia, Edad Antigua, Edad Media, Edad Moderna y Edad Contemporánea. Analizando su desarrollo con respecto al papel otorgado y las distintas representaciones utilizadas en cada periodo de tiempo, como se muestra en la Ilustración 22.

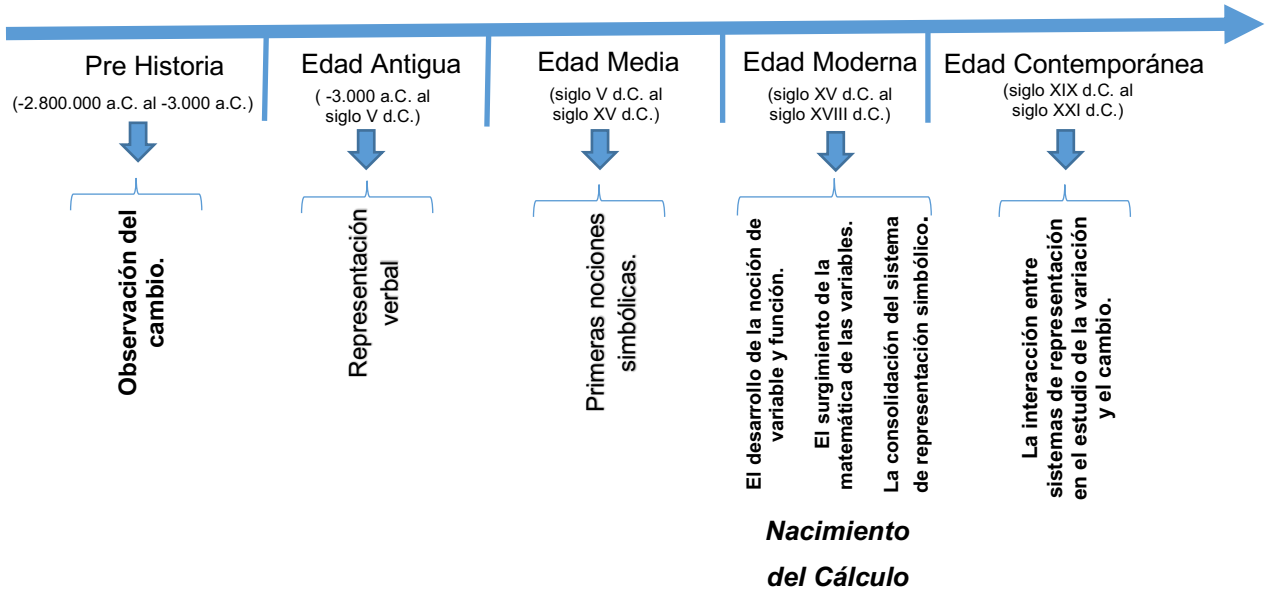


Ilustración 22: Evolución de la Derivada en una línea de tiempo.

- **Pre Historia:**

Observación del cambio.

Es en la Pre Historia cuando surgen las primeras ideas y nociones matemáticas. La observación de los cambios que produce el viento, el desplazamiento para la recolección de alimento; la sucesión del día y la noche y su relación con las estrellas (Castiblanco & Moreno, 2004), todas las actividades del hombre prehistorico permiten inferir que el hombre se hizo sensible y observo los fenómenos cambiantes, que impulsaron el desarrollo de tecnologías materias y simbólicas elementales (lenguaje oral, lenguaje gestual, lenguaje icónico y herramientas). Sientan las bases para el surgimiento de sistemas de representación mucho más complejos.

En este perido el ser humano comienza a registrar en arsilla, huesos o tablas de madera; sus observaciones del mundo que lo rodea. Un ejemplo de una antigua inscripción matemática es el hueso de Ishango en Zaire, tiene 25.000 años. A primera vista las marcas del hueso parecen estar hechas al azar, pero no se puede descartar la intensionalidad con que fueron realizadas, por ejemplo: una fila contiene los números prumos entre 10 y 20, cuya suma es 60. Otra fila

contiene los números 9, 11, 19 y 21, que tambien suman 60 (Stewart I. , 2007). Algunos tambien sugieren que este hueso representa el calendario lunar.

Ilustración 23: Hueso de Ishago expuesto en el Real Instituto Belga de Ciencias Naturales.

- **Edad Antigua.**

La representación verbal.

Las bases construidas durante la época de la Pre Historia permitieron el surgimiento de sistemas de representación escrita mucho más complejos. La consolidación de la escritura, hacia el año 3.000 a.C., promovió la aparición de diversos sistemas de registro, a través de los cuales es posible estudiar el saber social y cultural de dicha época (Vrancken & Engler, 2013).

Las referencias más antiguas sobre el estudio de los fenómenos de cambio vienen de los aportes surgidos desde las civilizaciones Mesopotámicas, en particular la Babilónica (2.000 a.C. al 600 a.C.), son ellos quienes determinan las leyes cuantitativas en sus tablas, donde registran por ejemplo su interés por la astronomía; en estas se observan los fenómenos que se repetían periódicamente, por ejemplo, los relacionados con la luna, el sol y los planetas.

Otra de estas representaciones se puede observar es en la Tablilla de Venus de Ammisaduga, la más antigua que se conoce relacionada con la astronomía; es un texto cuneiforme que habla de la aparición y desaparición de Venus en el firmamento, está es una estrella que pasa de aparece al atardecer a hacerlo al amanecer. Podemos afirmar que los babilonios no sólo entendían que

Venus era el mismo objeto que aparece en diferentes momentos del día, sino también llegaron a calcular su ciclo sinódico (es decir el tiempo que tardaba en aparecer en el mismo punto en el firmamento). Esta tablilla recoge las observaciones durante un periodo de 21 años, la duración de un ciclo venusiano era de 587 días. Los babilonios sólo erraron en 3 días, producto de que este ciclo encajase con el siglo lunar.

Ilustración 24: Tablilla Babilónica, registro ciclo venusiano.

Mediante los estudios de los babilonios, podemos evidenciar que ellos comprendieron problemas de variaciones continuas, como los periodos de visibilidad de un planeta con relación al ángulo que forma con el sol. Atraídos por la astrología, desarrollaron su tarea principal, que fue de intentar predecir sucesos. En sus tablillas se encuentran los intentos por aritmetizar observaciones difícilmente medibles, así como interpolaciones, lineales y geométricas.

Los babilonios avanzaron en lo que se denomina *álgebra retórica*, donde los problemas se enuncian y resuelven, sin utilizar una organización en las notaciones como las conocemos hoy ni tampoco con la utilización de letras para representar cantidades variables, simplemente con los términos: longitud, área y volumen. (Vrancken & Engler, 2013) (Castiblanco & Moreno, 2004).

Para Boyer (1986) y Ruiz (1998), ambos citados por Vrancken & Engler (2013), en las evidencias empíricas de los babilonios no es posible encontrar el uso de generalizaciones, sino sólo casos concretos; pero esto no significa que no existiera en su pensamiento, consciencia de dichas generalizaciones de los principios estudiados, ya que de otro modo no se podría explicar la analogía entre problemas del mismo tipo.

Es difícil encontrar aspectos y evidencia que permitan intuir la existencia de conceptos como variable y función, pero existe un aporte en los intentos de cuantificar y establecer regularidades de los fenómenos de cambio en sus tablas.

La civilización griega (2.800 a.C. al 600 d.C.) a partir del siglo VI a.C. se preocuparon, especialmente los pitagóricos, por explicar no sólo el cómo sino el por qué de las cosas (Castiblanco & Moreno, 2004) (Collete, 1986), lo que impulsa la *transformación de la matemática en una ciencia deductiva*.

En esta época se visualizaron distintos fenómenos, por ejemplo, los números para los Pitagóricos constituían el armazón inteligible de las formas en la aritmética figurativa; los concibieron y trataron sus relaciones utilizando piedrecillas que llamaban cálculos o psefoi. Además, determinaron algunas leyes simples de la acústica, que son consideradas como un intento por buscar una relación cuantitativa de dependencia entre las variables físicas, como la longitud de curva y los tonos de las notal emitidas al pulsarlas, pero este aspecto cuantitativo no fue tratado ampliamente (Collete, 1986).

Los elementos de Euclides contienen muchas representaciones mediante las imágenes que no pueden ser separadas del texto para su compresión, jugando la imagen un rol fundamental, pues su evocación permite construir la idea o concepto que quedará almacenada en la memoria. Además, Heráclito y Zenón utilizaron problemas como el movimiento, la continuidad y el infinito para sus estudios.

Aristóteles al estudiar el movimiento de los cuerpos se preguntaba cuales eran las causas reales del movimiento, originando las descripciones cualitativas del fenómeno de variación. Esto se puede evidenciar en el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado, en dicho fenómeno, indaga acerca de la naturaleza que el cuerpo que cae y como se modifican sus atributos en su caída, pero no genera procedimientos para cuantifica dicho movimiento, esto no lo realiza porque simplemente ello está fuera de su marco epistemológico (Muñoz, 2005).

El carácter geométrico de la matemática griega, el papal preponderante de las proporciones y la disociación entre número y magnitud son los principales obstáculos que hicieron que la época antigua el estudio de fenómenos de cambo sea aún muy reducido y que no sea posible halar de formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función. Otro factor importante es el escaso desarrollo de símbolos, expresiones algebraicas, que no existían, aunque en forma retórica, conceptualmente relacionado con la dependencia función (Azcárate y Deulofeu, 1996 en (Vrancken & Engler, 2013))

En los papiros encontrados como los de Rhin y de Moscú se ha podido analizar que la civilización egipcia (3.100 a.C. al 322 a.C.) logro algunos avances en el campo del algebra, a partir de la aproximación de problemas de la vida cotidiana, como en el cálculo de granos necesarios para producir cantidades de cerveza, la estimación de la comida de los animales, entre muchos otros. Avanzaron en la solución verbal de ecuaciones lineales y en el trabajo con progresiones geométricas y aritméticas ((Castiblanco & Moreno, 2004) ; (Collete, 1986)).

Lograron la estimación empírica de la duración de un año, debido a las crecidas del Río Nilo. A partir de la observación de los cambios y constantes en la visibilidad de una estrella (Sirio), en relación con la salida y ocultamiento del sol, estimaron y adoptaron un calendario civil con un año de 365 días, dividido en 12 meses de 30 días, más cinco días extras al final (Castiblanco & Moreno, 2004).

- **Edad Media.**

Primeras notaciones simbólicas.

La época de la oscuridad o del oscurantismo en Europa es un periodo histórico donde los árabes son quienes toman el relevo de los griegos en el estudio de las ciencias y son ellos quienes permitieron que su legado llegara hasta occidente a través de los barcos que navegaban para los intercambios comerciales. En este periodo se obtienen resultados concretos en las ciencias, incrementando por ejemplo el número de funciones conocidas y la forma en que eran estudiadas.

El siglo XII fue decisivo para el destino de Europa, para su cultura, ciencia y en especial para las matemáticas que comienza a ocupar un lugar preponderante en el estudio de las ciencias de la naturaleza. Pues producto de la caída del Imperio Bizantino, los estudiosos se refugian en Europa, especialmente en la Península Itálica, desde donde comienza a resurgir el estudio de las ciencias. Debe recordarse que en el siglo XI se dio la reconquista cristiana de España y Sicilia. Esto supuso una renovación y un resurgimiento del mundo cristiano, estos últimos son quienes absorben una gran cantidad de conocimiento del mundo griego y de otros lugares que habían sido preservados por los árabes (Ruiz, 2012).

En está época comienza a surgir la preocupación por descubrir lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia (Castiblanco & Moreno, 2004). Una de las principales cuestiones que se analizaron fueron los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. René de Cotret (1985) y Ruiz (1998), ambos citados por (Vrancken & Engler, 2013), afirman que en este periodo *se preguntaban por qué los planetas brillas, por qué el viento sopla, por qué se forma el*

arco iris, por qué la lluvia cae mientras que el fuego sube. Trataban de encontrar un modelo de universo que respondiese a estas cuestiones.

El nacimiento de las universidades europeas a finales del siglo XII e inicios del siglo XIII favorecerá al desarrollo de las matemáticas, y su difusión a un mayor número de personas. Por ejemplo, Oxford (1214), Paris (1200), Cambridge (1231), entre otras; hicieron grandes aportes para el desarrollo de las matemáticas, en especial a la noción de función. Con el nacimiento de las universidades podemos constatar una revolución intelectual cuyas principales características tiene a darle mayor importancia a la dialéctica o lógica que tiende a eclipsar a las demás artes (Collete, 1986).

Tomando como punto de partida las doctrinas aristotélicas, se realizan estudios cuantitativos de distintos fenómenos, destacando el estudio del movimiento local no uniforme, empezando a desplazar el interés del por qué suceden cambias al cómo suceden. Analizaron fenómenos sujetos al cambio, como el calor, la luz, la densidad, la velocidad. Una *forma* era cualquier cantidad o cantidad variable de la naturaleza. La intensidad o latitud de una forma era el valor numérico que había que asignarle, en relación a otra forma invariable que llamaban extensión o longitud, como el tiempo, la distancia o la cantidad de materia (Castiblanco & Moreno, 2004).

Durante el siglo XIV, Heytesbury (1313 – 1372/1373), Bradwardine (1290 – 1349) y Swineshead (1340 – 1354), lógicos y filósofos naturales del Merton Collage, abordaron la problemática de la cuantificación del cambio, las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde punto a otro de un cuerpo o desde un punto a otro del tiempo. Sus portes más importantes son las definiciones de velocidad uniforme y de movimiento uniforme acelerado, como los intentos por definir velocidad instantánea. Son a partir de estos conceptos que lograron deducir la regla del movimiento uniformemente acelerado que conocemos hoy.

Oresme (1323- 1382) realiza un original y completo trabajo sobre la intensificación de formas y cualidades, que se puede evidenciar en su *De Configurationibus Qualitatum et Motuum*. Continua el estudio de los fenómenos que cambian, proponiendo una aproximación geométrica de los estudios cinemáticos aritméticos desarrollados hasta el momento, en su teoría sobre las latitudes de las formas, representa mediante un dibujo la variación. Fundamenta el uso de los segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía, pues todo lo que es medible puede imaginarse como una cantidad continua, pasando a la representación de diversos tipos de cambio, utilizando recursos geométricos para el estudio de la variación. De esta forma, por ejemplo, representa la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, como se puede ver en la Ilustración 25.

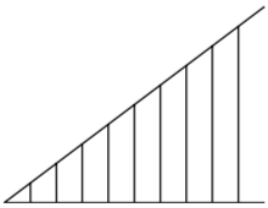


Ilustración 25: Representación del Cambio realizada por Oresme.

La representación que Oresme hace de la velocidad de un móvil en función del tiempo resulta de la representación del tiempo sobre una traza en un segmento horizontal, cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitud) y para cada instante traza un segmento perpendicular (latitud), cuya longitud representa la velocidad en aquel instante (Castiblanco & Moreno, 2004).

Representar la velocidad decreciente de una manera uniforme, lo hace por medio de segmentos desde $\overline{OA}$ a $\overline{OB}$, como se puede observar en la Ilustración 26.

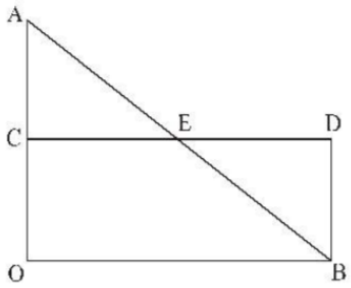


Ilustración 26: Representación de la velocidad decreciente de manera Uniforme. Longitud y Latitud.

Además, señalaba que $OBDC$ tiene la misma área que OAB (Ruiz, 2012). Para representar la curva, utilizaba los extremos superiores de las latitudes.

Según D' Hombres (1987, en Ruiz, 2012), Oresme al principio trabajó con los movimientos en forma general pero luego distinguió tres configuraciones distintas (Figura 1): *las uniformemente uniformes*, asociadas a un movimiento con velocidad constante, las *uniformes disformes* asociadas a un movimiento uniformemente acelerad y las *disformemente disformes* asociadas a movimientos con aceleración no constante, como se puede observar en la Ilustración 27.

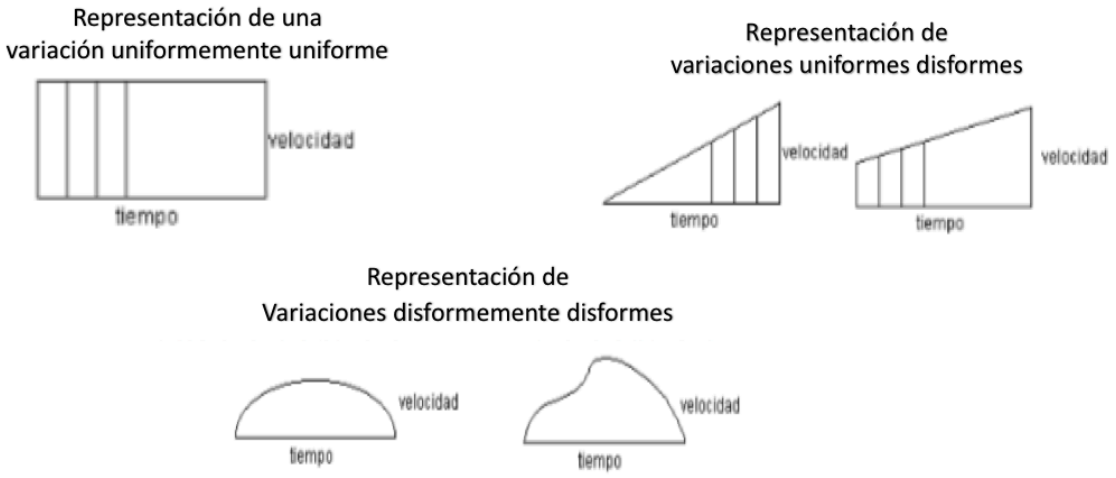


Ilustración 27: Representación de las variaciones, según Oresme.

Oresme pretendía comprender la naturaleza de los cambios de una forma sencilla, ya sean estos de origen cuantitativo o cualitativo. Considero la razón de cambio, y estableció una forma de representación que se ha llegado a afirmar como precursora de la representación en coordenadas (Ruiz, 2012). Sin embargo, el dibujo presente en su trabajo, la línea superior de intensidades, no aparece aislada; el fenómeno se representa a través de toda la figura, ya sean rectángulos, triángulos u otros; su superficie queda debajo de la curva, es decir por la integral. Por eso no puede ser una expresión de la dependencia en el sentido actual (Castiblanco & Moreno, 2004). Vislumbra la idea básica de que una función de una variable se puede representar por una curva.

La noción de gráfico, como elemento descriptivo de una cualidad, facilita el estudio de la variación de los fenómenos, que se constituyó como un tema de moda para los matemáticos de los dos siglos siguientes, independiente del contexto físico de la misma (Collete, 1986).

Azcárate y Deulofeu (1996, en (Vrancken & Engler, 2013)) expresan que, en el transcurso de estos estudios *comienzan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función*.

- **Edad Moderna.**

Durante esta época se vive un apogeo por los estudios sistemáticos en los procesos de variación y cambio relacionados con el movimiento, la intensidad luminosa y calórica, con los trabajos de

Tartaglia, Cardan, Galileo, Descartes, Wallis, Newton y Leibniz que construyeron a partir de los trabajos de Vieté con influencia de Napier ((Sigma, 1985, Pág. 43) (Castiblanco & Moreno, 2004)).

Siglos XV y XVI:

El desarrollo de la noción de variable y función.

En estos siglos sobresale el avance en los símbolos algebraicos que, junto con la trigonometría, favorecen el desarrollo del concepto de función. Vietè (1540 – 1603) es reconocido por ser una figura dominante y central de este periodo. Introduce los signos para numerosas operaciones y la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y coeficientes arbitrarios, esto se transforma en una importante contribución para la representación de funciones por medio de fórmulas (Vrancken & Engler, 2013).

Algunos problemas de la industria, de capital comercial o de la navegación, entre otros, permiten que surja un intento de darles solución por medio del estudio de las leyes generales de la naturaleza y su modelación mediante el uso de las fórmulas matemáticas.

Fue Galileo (1564-1642) quien recupera los avances gráficos de Oresme, en la representación de formas variables, en su libro *Dos Nuevas Ciencias* de 1638. Esté estudia el movimiento local y la rapidez, abordando el problema de la caída de los cuerpos. Realiza un estudio cuantitativo, donde se propone relacionar los conceptos de velocidad, aceleración y distancia recorrida. Mediante la utilización de instrumentos para medir los fenómenos, establece leyes que son autenticas relaciones funcionales (Vrancken & Engler, 2013). A pesar de basarse y expresarse en la clásica teoría griega de las proporciones, resulta su contribución decisiva para el establecimiento del concepto matemático de función (Castiblanco & Moreno, 2004).

Introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado del movimiento de un cuerpo en diferentes momentos de su trayectoria; esto supone el prefacio del tiempo como variable independiente. Se pregunta el cómo del fenómeno y calcula la evolución posterior del mismo, implica cuantificar estados posteriores de una cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales para predecir la evolución de un fenómeno de variación o cambio (Muñoz, 2005).

Galileo se pregunta cómo cae un cuerpo a la tierra, y no el por qué de dicho fenómeno. Eliminando las preguntas sobre las causas reales que hacía referencia a cualidades /atributos, e introduce mediciones. Medir para establecer relaciones entre distancia y tiempo (Muñoz, 2005). Reflexiona sobre la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependiendo del tiempo y el espacio transcurrido. Aplica los resultados del Merton Collage sobre el valor medio de una cualidad uniforme acelerada, para la descripción y análisis de cuerpos en caída libre. Su pregunta tiene

sentido en la cosmovisión en donde el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento, naciendo el principio de inercia.

Utiliza una representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. En dicha visualización del desplazamiento y el tiempo utiliza recursos equivalentes, como se puede observar en el enunciado del teorema 1, proposición 1, de su libro *Dos nuevas ciencias* (Galilei, 1638, pág. 173)

> *El tiempo en que cualquier espacio es atravesado por un cuerpo que comienza en reposo y es uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que ese mismo espacio se cruzaría por el mismo cuerpo que se mueve a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta y la velocidad justo antes de que la aceleración empezara.*

Para ello utiliza la siguiente representación que se puede observar en la Ilustración 28.

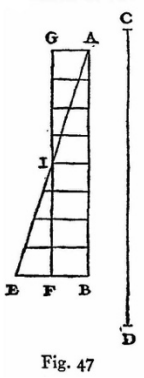


Ilustración 28: Representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. (Galilei, 1638, pág173)

Mediante esta representación visual de velocidad tiempo, Galileo concluye que los espacios recorridos por dos móviles son iguales. Ya que la velocidad es representada mediante los segmentos perpendiculares a AB, la velocidad está representada por el segmento AB, el espacio está representado en la línea auxiliar CD, A representa el instante en el que se inicia el movimiento, BE es la velocidad en el tiempo B o velocidad final del móvil, BF es la mitad de la velocidad anterior. El rectángulo $ABFG$ describe un movimiento uniforme de velocidad constante BF que sucede en el mismo tiempo que el anterior. El triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado del móvil. El área de ABE coincide con el área de $ABFG$. La suma de las líneas paralelas contenidos en ABE es igual a la de las líneas paralelas contenidas en $ABFG$.

A partir de estos y otros trabajos se comienza a desarrollar las ideas de variación y cambio como abstracciones obtenidas de la realidad. (Vrancken & Engler, 2013).

Según Azcárate y Deulofeu (1996 en (Vrancken & Engler, 2013)) otro de los avances importantes de la segunda mitad del siglo XVI, que permite llegar a considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números, fueron los avances en la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la aparición de los números imaginarios.

Siglo XVII:

El surgimiento de la matemática de las variables.

En este periodo se configuran varios factores, como la introducción de la geometría analítica, el auge de las ciencias naturales y las exigencias de la mecánica, que propiciaron nuevas soluciones para el problema de la tangente con los fenómenos de variación. Son tres los problemas que acuciantes:

- Determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento.
- Dada la velocidad del movimiento determinar la trayectoria en un tiempo determinado
- Problema de los máximos y mínimos.

Los avances en algebra alcanzados en los años anteriores, permitieron que Descartes (1596 – 1650) y a Fermat (1601 - 1665) adentrarse en la representación analítica. Ninguno de ellos invento el uso de las coordenadas o de métodos analíticos, ni tampoco fueron los primeros en aplicar el álgebra a la geometría. La contribución de ellos, independientes de cada uno, está en el hecho de reconocer una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Si a esto le sumamos los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir la ecuación con la curva correspondiente, entonces los podremos llamar los fundadores de la geometría analítica.

Su importancia está, en general, que se puede decir que Descartes comienza con un problema de lugar geométrico a partir del cual obtiene una ecuación del lugar, mientras Fermat se preocupa de partir de la ecuación y deducir las propiedades de su curva (Collette, 2000).

Al surgir nuevas curvas se presentaron nuevos problemas. Hacia 1636, se pública en Francia una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (“Método para investigar máximos y mínimos”), en esté exponen un método para encontrar el valor extremo de algunas variables y propone una manera de resolver el problema de las tangentes utilizando ideas cercanas a los infinitesimales; su importancia no está sólo en ser el primer método conocido para determinar máximos y mínimos, sino que presenta la idea de dar un incremento a cierta magnitud,

la cual tomaba así el aspecto de una variable (Alarcón, Suescún, & de la Torre, 2005). En esté utiliza elementos gráficos, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con dichos cambios cuando son extremadamente pequeños.

Según Alarcón, Suescún y de la Torre (2005), señalan que utilizan la traducción de Gonzáles Urbaneja quien utiliza letras minúsculas, para mostrar como Fermat utiliza las palabras para explicar su método:

> *Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:*
>
> 1. *Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).*
> 2. *Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.*
> 3. *Se sustituirá a continuación la incógnita original a por a + e, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.*
> 4. *Se "adigualarán", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.*
> 5. *Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.*
> 6. *Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.*
> 7. *Se suprimirán a continuación todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias y se igualará lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.*
> 8. *La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.*

Fermat emplea el simbolismo literal introducido por Vièta, que consistía en el uso exclusivo de letras mayúsculas. Además, se apoya del uso de elementos gráficos para explicar sus métodos.

Según explica Fermat, en el *Syncriseos et anastrophes* del año 1640 aproximadamente, el método para calcular máximos y mínimos se le ocurrió al observar que, si el segmento de longitud BB es dividido por un punto P en dos partes de longitudes A y $B - A$ es igual a una cantidad dada Z, como se puede observar en la siguiente figura:

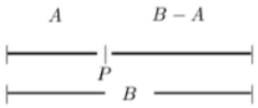


Ilustración 29: División del segmento B, propuesto por Fermat.

Pero su método no es del todo exacto, pues al final debe dividir por cero, lo que es contradictorio. Pero el método funcionaba en la practica y permitió resolver un sin número de problemas, a pesar de la incongruencia señalada. Fermat aplica este método a otros campos, como la determinación de los centros de gravedad de diferentes figuras geométricas o a la construcción de la tangente a una curva en un punto dado (Alarcón, Suescún, & de la Torre, 2005).

Su método posee las siguientes características:

- El método da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco permite distinguir un máximo de un mínimo.
- El procedimiento es puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.
- El método de máximos y mínimos de Fermat no implica, en principio, el concepto de límite. Utiliza ideas cercanas a los infinitesimales.

Fermat intenta determinar los puntos máximos y mínimos de algunas funciones, para ello estudia la curva, infiriendo que en cada punto de ella existe una recta tangente, tal que tiene una dirección que la caracteriza; pero en donde la función tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal (Vrancken & Engler, 2013).

Fermat aplica su método de los extremos a la determinación de las normales y tangentes a una curva, utilizando la parábola para ilustrar su método, como se puede observar en la Ilustración 30.

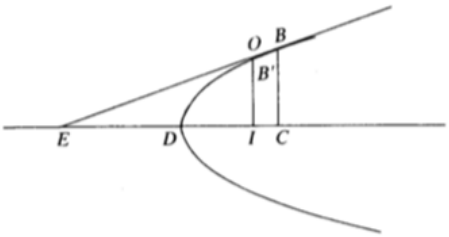


Ilustración 30: Aplicación del método de Fermat para los extremos a la determinación de las normales y tangentes a una curva. (Collette, 2000, pág. 29)

Considera la parábola DB de eje DC, como se ilustra en la figura 123. La idea es aplicar su método de máximos y mínimos para hallar la tangente a la parábola en el punto B. Según Vrancken y Engler (2013) **el proceso que utiliza Fermat se basó en la idea que si una secante S rota sobre uno de los puntos de intersección de manera que el punto más próximo se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante S se aproxima a la posición definida t. La recta que tiene esa posición se llama tangente a la curva, y el punto fijo, punto de contacto (o punto de tangencia). De todas las rectas que pasan a través de ese punto, la tangente es la que proporciona la mejor aproximación al curso de la curva en ese punto. Por ese motivo, la dirección de la tangente en el punto se llama también dirección de la curva en el punto.**

Según Descartes los argumentos que utiliza Fermat en su Methodus, no habían resuelto ningún problema de máximos o mínimos cuando determino la tangente a la parábola, aunque los resultados obtenidos por esté están en lo correcto, su método no podía ser empleado en general (Alarcón, Suescún, & de la Torre, 2005).

Cantoral y Farfán (2004) señalan que el método de Fermat, independiente de la problemática de la existencia de límites, depende de la relación explicita entre dos variables.

Los aportes de Fermat en la resolución de problemas fueron tan importantes que Lagrange, Laplace y Tannery, entre otros lo denominaron el inventor del cálculo.

Gracias a las contribuciones de Descartes y Fermat a la geometría analítica, más adelante fue posible utilizar un método general aplicable a todas las curvas de cierta clase. Aunque ellos no consiguieron proporcionar dicho método general, Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general, aplicable a un sin número de problemas. Mediante la utilización de la notación algebraica, establecieron una herramienta más eficaz que la geometría, pudiendo estudiar problemas de otras esferas.

Newton y Leibniz tratan con cantidades variables, Newton cantidades que varían con el tiempo, utilizando el tiempo como argumento y la idea intuitiva de movimiento continuo próxima al concepto de límite; analiza las variables dependientes como cantidades continuas que tienen cierta velocidad de cambio. Leibniz con una sucesión de valores infinitamente próximos, utilizando la idea del continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales.

Newton en su obra el *Método de las* Fluxiones escrito en 1671 y publicado en 1736, estudia las magnitudes que representan diversas formas de movimiento mecánico continuo, a las que varían continuamente las llamo *fluentes*, que corresponden a lo que hoy conocemos como funciones;

considera que estás magnitudes varían con el tiempo (Castiblanco & Moreno, 2004). (Vrancken & Engler, 2013). Posteriormente introduce la idea de las velocidades de las fluentes, que denomina como *fluxiones*.

En esta obra presenta los dos principales problemas del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración. Es decir, la ley para determinar la velocidad dada la distancia y dada la velocidad determinar la distancia.

Según Vrancken y Engler (2013) Newton para calcular las fluxiones, que son las razones de cambio instantáneas, expresaba la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Les imponía a las fluentes la condición de una *variación infinitesimal* y las representaba por x e y. En esta idea subyace el termino actual de derivada, pues estas son las derivadas de x e y con respecto a t $\left(x = \frac{dx}{dt}; y = \frac{dy}{dt}\right)$. La razón entre ellas es la derivada de y con respecto a x $\left(\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}\right)$.

Newton aplica el concepto de fluxión al problema de las tangentes, considerando las ideas desarrolladas por sus predecesores, considera una curva $f(x, y) = 0$ como el lugar geométrico determinado por la intersección de dos rectas en movimiento, una vertical y la otra horizontal, las coordenadas x e y del punto en movimiento son funciones del tiempo t y están representas por las rectas horizontal y vertical, como se puede observar en la Ilustración 31.

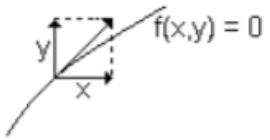


Ilustración 31: Vector velocidad como composición del movimiento horizontal y vertical de Newton.

El movimiento representado resultado de la composición del movimiento horizontal cuya velocidad está representada por el módulo del vector x y la del movimiento vertical por el módulo del vector y. **Aplicando la ley del paralelogramo se obtiene que el vector resultante cuya dirección determina la tangente a la curva, tiene como pendiente $\frac{y}{x}$.**

Newton en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, editada por primera vez en 1687 y con dos nuevas ediciones en 1713 y 1726, analiza el tratamiento que le da a la tangente. Esto se puede evidenciar en el lema VI de la sección primera del libro, que dice así:

> Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y *la tangente disminuirá hasta lo infinito*, desapareciendo en última instancia... (Isaac Newton, 1713. Traducción de Antonio Escohotado. En Serna, 2007, p. 93).

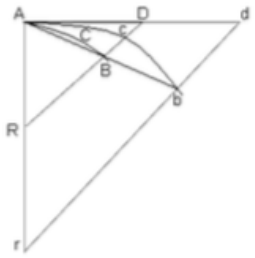


Ilustración 32: Tratamiento de Newton al problema de la tangente.

Newton considera la noción de lo *infinitamente pequeño* y cómo, al realizarse el proceso, la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A. Trabajó la idea del paso al límite ya que dicha tangente es el límite al que llega la cuerda AB. Utilizó ideas variacionales al mencionar que los puntos A y B se acercan uno al otro y se encuentran. Construyó las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones (Vrancken & Engler, 2013).

Llega a la conclusión de que una curva se comporta como una línea recta en una región muy cercana entre dos puntos de la misma, sin embargo, estos dos puntos son la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal con lo cual se puede intuir también el carácter variacional ya que su ángulo y posición va cambiando consecutivamente (Castañeda, Montiel, & Serna, 2012).

Leibniz se basa en concepciones geométricas para obtener un método para la resolución del problema de las tangentes y la determinación de áreas y volúmenes. Se inspira en sus primeros trabajos de sumas y diferencias de números, trasladando está idea al contexto del continuo. Desarrolla toda una teoría en base a sumas y diferencias infinitesimales, desde donde nacen las nociones de *diferencia e integrales*. La notación que emplea en sus estudios, es la que hasta el día de hoy utilizamos.

Señala que la sucesión infinita de valores de una variable, denominada x, la diferencia entre dos valores sucesivos es el diferencial de x , denotado por dx, que es infinitamente pequeño (infinitesimal) o despreciable comparado con los valores de x. Determina, además que la suma

de todas las diferenciales, denotaba por $\int dx$, da como resultado la variable completa x. Es decir $\int dx = x$.

Hacia 1637, se da cuenta que para determinar la tangente a la curva, se debe considerar la razón entre las diferencias de las ordenas y de las abscisas cuando estas tienden a cero, así como el cálculo de las áreas depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero y que ambos son problemas inversos, llegando a la misma conclusión de Newton (Castiblanco & Moreno, 2004) (Mateus, 2011).

En un escrito publicado en 1673 por Leibnitz, utiliza por primera vez la palabra *función*. En un principio no se utilizo para designar la relación formal entre la ordenada de un punto y su abscisa, sino se refiere a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes. En 1694, la palabra función se utiliza en un sentido más general, para referirse a problemas de geometría diferencial, aunque todavía es poco preciso ((Castiblanco & Moreno, 2004). (Vrancken & Engler, 2013)).

En la investigación llamada *Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial* Mateus (2011), propone la siguiente tabla resumen, donde se observan las diferencias y similitudes entre los trabajos de Leibniz y Newton.

Por Newton	Por Leibniz
• Concibe la derivada de $y = f(x)$ como el cociente entre fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, donde considera las fluxiones $\dot{x}$ y $\dot{y}$ como las velocidades en que cambian los fluentes *x*, *y*. Su concepción es cinemática. • El cociente *dy/dx* lo calcula como la tangente a la parábola $y^2 = ax$ en un punto $M = (x,y)$ de la figura. • Utilizó los incrementos infinitamente pequeños en *x* y en *y* como medio para determinar la fluxión o derivada. Era esencialmente el límite del cociente de los incrementos, cuando estos se hacían cada vez más pequeños. • La integral es una integral definida, es el fluente por determinar para una fluxión dada. • La orientación física de Newton radica en el concepto de velocidad. Término central para desarrollar el concepto derivada. • Resolvió problemas de áreas y volúmenes pensando enteramente en términos de cambio relativo. Para él, la diferenciación era básica; este proceso y su inverso resolvían todos los problemas del cálculo y, de hecho, el uso de la sumación para obtener un área, un volumen o un centro de gravedad aparece raramente en sus trabajos. • Utilizó las series para representar funciones, su manera de trabajar era empírica y concreta. • Newton no se molestó en formular reglas, aun cuando pudo haber generalizado fácilmente sus resultados concretos. Aunque inició muchos métodos, no hizo hincapié en ellos.	• Considera el cociente anterior *dy/dx* como cociente entre diferencias. • Trató directamente con los incrementos infinitamente pequeños en *x* y en *y*, es decir, con diferenciales, y determinó las relaciones entre ellos. • Considera el cociente anterior dy/dx como cociente entre diferencias. • Para Leibniz, sin embargo, el cociente *dy/dx* era "simplemente" un cociente con interpretación geométrica clara. Los problemas de interpretación se volvían más agudos al considerar derivadas de mayor orden. • La preocupación filosófica en Leibniz *fue* por las partículas últimas de la materia, que llamó *monadas*. • La integral es una suma infinita de diferenciales. • Pensaba primero en términos de sumación, aunque, por supuesto, estas sumaciones se calcularan mediante antidiferenciación. • Prefería la forma cerrada de series infinitas, para buscar resultados en términos finitos, utilizando las funciones trigonométricas y logarítmicas cuando no sirvieran las funciones algebraicas. • Leibniz vio las ampliaciones a largo plazo de las nuevas ideas que gestaba el naciente cálculo. • Leibniz estableció los cánones del cálculo, el sistema de reglas y fórmulas.

Tabla 3: Tabla similitudes de diferencias en los trabajos Newton y Leibniz, propuesta por Mateus (2011),

Siglos XVIII Y XIX: **La consolidación del sistema de representación simbólico.**

Durante el siglo XVII y XIX se consolida el sistema de representación simbólico del algebra actual y la noción de función se reafirma como representación de procesos de variación y cambio. Son los trabajos de Bernoulli (1700 -1782), Euler (1707 – 1783), Lagrange (1736 – 1813), Fourier (1772 – 1837) y Dirichlet (1805 – 1859) quienes ayudan en ese proceso.

En este periodo el análisis matemático va cobrando cada vez mayor importancia e independencia como disciplina, perdiendo su carácter geométrico y mecánico, aumentando su atributo

algebraico. Se amplia también el concepto de función como una representación de procesos de variación y cambio, gracias a los matemáticos de está época (Castiblanco & Moreno, 2004).

Euler, abandona el estudio de las curvas geométricas, instituyendo una nueva rama, basada en los infinitésimos, sobre la teoría formal de funciones. Este significo una separación entre el cálculo de variables (físicas o geométricas) a un cálculo de funciones numéricas (Muñoz, 2005). Precisa la noción de función definiendo nociones como constante, de la siguiente manera: "*cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado"* y cantidad variable, *"cantidad indeterminada, o universal, que comprende en si misma todos los valores determinados ".* En 1755 define una función como expresión analítica, señalando que "*la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes"* (Ruthing, 1984 en (Vásquez, Rey, & Boubée, 2008)).

Euler señala que toda función le corresponde una curva, por lo que también a cada curva debería representarse por una función, ampliando con ello el concepto de función, distinguiéndose dos clases: las continuas y las discontinuas.

Bernoulli, en1718, es quien realiza la primera definición de función como una expresión analítica: "Se llama función de una variable a una cantidad compuesta de manera que sea, por esa variable y por constantes". Euler, complementa la definición en 1748, cambiando la palabra "cantidad" por "expresión analítica". En 1755 Euler publica el "*Institutiones calculi differentialis*", en ella podemos observar la segunda definición del concepto de función, de manera totalmente general, afirmó que: "Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas por otras, así si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x y se llaman funciones de x".

En la publicación de Euler de 1797, llamada L'analyse infinitésimale en su segundo volumen, se puede evidenciar que los argumentos geométricos son dejados casi en su totalidad de lados. Se infiere que pretende formalizar el cálculo de Newton y Leibniz, con un mayor soporte matemático, manejando argumentos algebraicos, con ideas de los infinitesimales. Enuncia explícitamente el carácter variacional de la recta tangente mostrando un método algebraico, donde las explicaciones que muestran los cambios a partir de polinomios, auxiliándose de representaciones gráficas en donde se muestra como dos puntos infinitamente cercanos de una curva se convierten en la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal. (Castañeda, Montiel, & Serna, 2012)

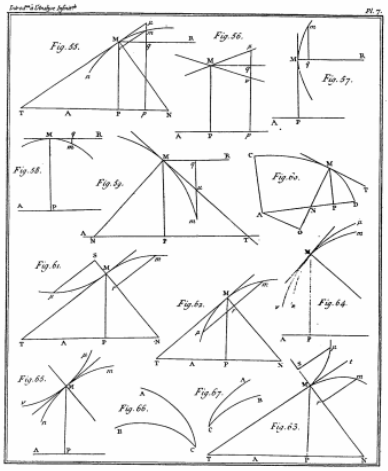


Ilustración 33: L'analyse infinitésimale en su segundo volumen, Euler (1797), página 437.

Euler es el primero en utilizar en 1740 la notación $f(x)$ para referirse a una función.

Dirichlet, discípulo de Fourier, propone en 1837 una definición amplia y general de función, expresada de la siguiente manera: "si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x"*. Al ser demasiado general, se cuestiona su definición, por ello formula un conjunto de condiciones, conocidas como condiciones de Dirichlet, que debían satisfacer las funciones para ser consideradas. Pero a pesar de ello, no fueron aceptadas del todo por los matemáticos de la época (Vásquez, Rey, & Boubée, 2008).

Lagrange, en su obra "*Théorie des fonctions analytiques"*, pubicada en 1797, define una función de una o varias cantidades, como "a cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientas que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes".

Con los trabajos de Bernoulli, Euler y Lagrange se consolida la noción de función como representación de procesos de variación y cambio, así como el sistema de representación simbólico.

Los matemáticos de esta época se dedicaron a explorar sus aplicaciones obteniendo resultados importantes en el cálculo variacional, la astronomía, la hidrodinámica y otros campos de la mecánica.

Cauchy en 1820, aporta en la reconstrucción de los fundamentos del análisis, sobre la base de la teoría de los límites, introduciendo el lenguaje algebraico de las desigualdades. Esto llevó a la aparición de definiciones sólidas sobre convergencia de series, límite, continuidad y diferenciabilidad. En 1823 definió la derivada de $f(x)$ como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ siempre que este límite exista (Vrancken & Engler, 2013).

Según Cordero (1994, en (Muñoz, 2005)) Cauchy (1789 – 1857) inicio la construcción de una teoría de integración y escribió la definición de función continua. Con el perfeccionamiento del concepto de límite, la construcción de la teoría de los números reales, la teoría de conjuntos y el desarrollo de la teoría de las funciones, se le da al análisis matemático una estructura lógica coherente, con la que los conceptos básicos son definidos rigurosamente a partir de los números reales y las funciones. La derivada es definida como un límite existente para funciones continuas.

Para la teoría de conjuntos el concepto de función alcanza un nuevo grado de generalidad. Con esta definición se evidencia una característica estática, como colección de pares ordenados, quedando oculto el carácter dinámico entre las variables, según Azcárate y Deulofeu (1996, p. 53), citados por Vrancken y Engler (2013) manifiestan que la noción de función "pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función".

- Edad Contemporánea:

  La interacción entre sistemas de representación en el estudio de la variación y el cambio.

A finales del siglo XIX y durante el siglo XX, surge un rigor en el estudio y el análisis de la matemática, transformado las distintas concepciones sobre está en los distintos campos y sobre como se concibe los sistemas de representación de procesos o fenómenos de variación y cambio. Alfonso (2002 en (Vrancken & Engler, 2013)) manifiesta que la Teoría de Conjuntos de Cantor (1845 – 1918), Zermelo (1871 – 1953), Frage (1848 – 1925) y Dedekin (1831 – 1916). y las paradojas en torno a los fundamentos de la matemática, conducen a que los matemáticos de la época desecharan los argumentos visuales y condujeran a la matemática a aspectos "más formales", extendiéndose a la estructura de los libros de textos en todos los niveles de la enseñanza de aquel periodo.

Durante el siglo XIX, evoluciona el concepto de función $y = f(x)$, junto con Dirichlet (1805 – 1859), quien presenta una definición "formal" moderna de función, Riemann (1826 – 1866) quien es considerado como fundador de la teoría moderna de funciones y Weierstrass (1815 – 1897) quien considera la idea de función como una relación aritmética entre dos variables, da la definición de función como correspondencia entre los elementos.

Durante el siglo XX, mediante avanza el nivel de la matemática evoluciona la definición de función haciéndose cada vez más abstracta, por ejemplo Goursat (1858 – 1936) da la definición de función de la siguiente manera *"Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y, esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$",* Lebesgue (1875 – 1941) considera que muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencia analítica, Frechet (1878 – 1973) generaliza la definición de función de la siguiente manera *"Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que V_x es una función (operación funcional), uniforme en un conjunto E de elementos de c, si a todo elemento A de E le corresponde un número bien determinada V_x ",* y Nicolás Bourbaki (s/n) quien señala que *" una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto"* (Vásquez, Rey, & Boubée, 2008).

El análisis funcional, una rama de las matemáticas, que trata del estudio de espacios de funciones, tiene sus raíces en el estudio de transformaciones y en el estudio de las ecuaciones. Lo funcional se remonta al cálculo de variaciones, implicando una función cuyo argumento es una función. Juega un papel preponderante en la matemática moderna, con trascendentes trabajos de matemáticos como: Hilbert (1862 – 1943), Riesz (1880 – 1956) y Banach (1892 – 1945).

El desarrollo tecnológico del siglo XX permite el uso de sistemas gráficos y algebraicos, abriendo un extenso campo de experimentación y desarrollo para la matemática, con importantes repercusiones en el campo de la educación (Vrancken & Engler, 2013).

La enseñanza de las matemáticas durante el siglo XX a experimentado una enorme evolución. Naciendo como una disciplina científica cuyo objeto de estudio es la relación de los saberes con la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos propios de la matemática. La introducción de nuevas herramientas, como la computación, a permitido la interacción entre diversos sistemas de representación, siendo esta una poderosa herramienta para observar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio.

3.2. Ley del Enfriamiento de Newton.

El diseño de la situación de aprendizaje esta brindada dentro del contexto de la *Ley del Enfriamiento de Newton*, permitiendo que los participantes utilicen herramientas y situaciones en un contexto social y cercano, acercándolos a la cotidianidad desde este ámbito. Además, la Ley del Enfriamiento es un claro ejemplo de aplicación de la razón de cambio.

Isaac Newton (1641 – 1727), es ampliamente reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. A sus 60 años acepta un puesto como funcionario nacional y se desempeña como responsable de la Casa de Monedas de su país. En este lugar tiene la misión de controlar el acuñado de monedas, es en este ambiente que probablemente se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales.

En 1701 publicó anónimamente los resultados de sus mediciones, en su obra *Scala graduum Caloris. Calorum Descriptiones & signa.* en *Philosophical Transactions*. Newton observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la temperatura del aire.

Las observaciones de Newton (1701), dieron a lugar a lo que hoy conocemos como la Ley del Enfriamiento de Newton, en esta se establece que la rapidez del enfriamiento (o calentamiento) de un objeto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y su ambiente. Si hacemos $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura del ambiente, entonces la ley queda formulada de la siguiente manera:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

Donde k es una constante que define el ritmo de enfriamiento del cuerpo.

Capítulo 4: Aspectos Metodológicos

> *La ID se interesa tanto en las propuestas pedagógicas basadas en investigación como en las metodologías específicas de la misma investigación. Esto permite que ella pueda ser vista en sí como una metodología de investigación dado que presenta como características el procurar un sistema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase; el llevar un registro de estudios de caso cuya validación se basa en la confrontación del análisis a priori y a posteriori, y cuyos objetivos pueden ser diversos (* (Farfán, 1997)*,* (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995)*)*

4.1. Diseño de la Situación de Aprendizaje.

Considerando que la evidencia recabada sostiene que la matemática escolar, con sus programas y curriculum han generado una epistemología dominante, el cual no considera el conocimiento matemático de la gente, proponemos en nuestra Situación de Aprendizaje rediseñar dicho discurso matemático escolar, provocando la **INCLUSIÓN** de situaciones del conocimiento del cotidiano, por medio del contexto de La Ley del Enfriamiento de Newton, está permite brindar un entorno cotidiano, cercano y real al estudiante, no menos importante es el hecho que está es un claro ejemplo de razón de cambio.

Por medio de la Situación de Aprendizaje que diseñaremos se pretende **SOCIALIZAR** el conocimiento que se genere desde esta situación, generando una **IDENTIDAD** entre la dialéctica del conocimiento matemático y la del cotidiano del aula, la vida.

Para la construcción de la situación de aprendizaje se consideran la predicción, graficación, modelación y el PyLVAR, todas ellas reconocidas como Prácticas Sociales que norman los estudios del cambio y la variación, ejemplos de las Prácticas de Referencia, prácticas que se organizan por medio de las Acciones como identificar, describir, caracterizar, representar, seleccionar, justificar, explicar, esbozar, argumentar, definir, interpretar, expresar, calcular,

analizar, medir, reconocer, graficar, construir, elaborar, inferir, examinar, proponer, graduar, ejemplificar, entre otras.

La situación de aprendizaje, pretende que la matemática escolar, se rediseñe. Para ello queremos responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué enseñar? la enseñanza de la derivada como razón de cambio, con la finalidad de que el aprendizaje sea significativo para el estudiante.
- ¿Cómo enseñar? Con la situación de aprendizaje propuesta.
- ¿A quién enseñar? A jóvenes con perfil matemático y con aspiraciones de seguir estudiando alguna Ingeniería.
- ¿Cuándo enseñar? Cuando los estudiantes estén en cuarto año medio.

La situación no pretende enseñar los resultados de la misma, sino se brinda la oportunidad de que los estudiantes aprendan matematizando, organizando y reorganizando su realidad.

De acuerdo a la epistemología la situación de aprendizaje busca poner en funcionamiento el uso de la gráfica en la modelación, a la cual los estudiantes deberán enfrentarse.

Se considerará en la construcción de la situación de aprendizaje el análisis epistemológico histórico para la construcción de la misma. Nos basaremos en la construcción de los momentos, que buscan rediseñar el dME, que realiza Zaldívar (2014) en su tesis doctoral.

La situación de aprendizaje está conformada por nueve Situaciones Variacionales (SV), cuatro correspondientes al primer momento, dos al segundo momento y tres al tercer momento. Cada una de las SV se componen de diferentes Tareas Variacionales (TV), que se detallan en la Tabla 4.

Primer Momento	Situación Variacional 1: Analizar el cambio a través del tiempo.	4 tareas variacionales
	Situación Variacional 2: Determinan comportamientos gráficos que muestran el cambio en una situación particular.	2 tareas variacionales
	Situación Variacional 3: Caracteriza la variación en una cantidad de tiempo.	3 tareas variacionales

	Situación Variacional 4: Identificar la pendiente como el cociente entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa.	7 tareas variacionales
Segundo Momento	Situación Variacional 1: Reconocer la noción de cambio como la pendiente de la recta tangente a la curva.	6 tareas variacionales
	Situación Variacional 2: Interpretar geométricamente la derivada como razón de cambio.	2 tareas variacionales
Tercer Momento	Situación Variacional 1: Reconocer la noción de cambio como la rapidez instantánea en el enfriamiento o calentamiento del agua.	7 tareas variacionales
	Situación Variacional 2: Describir el movimiento como un fenómeno previo a la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil en un período de tiempo.	4 tareas variacionales
	Situación Variacional 3: Describir la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil, en un periodo de tiempo, para predecir el cambio.	6 tareas variacionales

Tabla 4: Conformación de la Situación de Aprendizaje, considerando los Momentos, SV y TV.

Cada una de las Situaciones Variacionales que conforman la Situación de Aprendizaje, recibirán el nombre de Actividad, pues este apelativo es mucho cercano al contexto educacional en el cual se aplicará.

Con las situaciones variacionales del primer momento se pretende que los estudiantes a través del análisis del cambio a través del tiempo, aborden el *cambio*. Cuando determinen el comportamiento gráfico que muestran el cambio en una situación particular y caracterizando la variación en una cantidad de tiempo, se pretende que cuantifiquen dicho cambio a través de la *variación*, para finalmente llegar a que identifiquen la pendiente como el cociente entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa, trabajando de esta manera con la *pendiente*.

Las situaciones variacionales del segundo momento conducen al estudiante a reconocer la noción de cambio como la pendiente de la recta tangente a la curva, induciendo a este para que transite desde la *pendiente* a la *razón de cambio*. Para que así interprete geométricamente la derivada como razón de cambio. Trabajando implícitamente en la *derivada*.

En el tercer momento nos encontramos que las situaciones variacionales llevan al estudiante, en un primer instante a trabajar desde la *derivada como rapidez instantánea*, el enfriamiento o calentamiento del agua. Luego se pretende que, el estudiante se enfrente con el *movimiento*, como un fenómeno previo a la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil en un periodo de tiempo. Para finalmente describir la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil en un periodo de tiempo para llegar a la *predicción* del cambio.

Así podemos diseñar el instrumento para la conformación de la situación de aprendizaje, considerando el esquema presente en la Ilustración 34.

Ilustración 34: Esquema de diseño del Instrumento de la Situación de Aprendizaje.

En el primer momento llamado de Rutina, se pretende que los estudiantes expresen, desde su experiencia y vivencia aspectos que tienen que ver con el fenómeno en cuestión, determinen comportamientos gráficos que muestran el cambio, caracterizando la variación en una cantidad de tiempo, identificando la pendiente como variación de las variables de los ejes coordenados; se espera que el conocimiento surja por medio de representaciones pictóricas alusivas al cambio (Zaldívar, 2014). Es posible que los estudiantes, en un comienzo se expresen en lenguaje natural, pero con tecnicismos escolares matemáticos, pues la actividad está orientada a estudiantes con alto grado de manejo de las matemáticas. Además, se espera que empleen diferentes lenguajes variacionales como lo son principalmente la gráfica, tablas, frases, lenguaje común, lenguaje algebraico, gestos, entre otros. Como sucedía en la pre-historia, mediante la observación del

cambio de los fenómenos de la naturaleza o del diario vivir, y como en la Edad Antigua, donde representan la vida cotidiana mediante tablas, graficas, u otro medio. Este momento busca romper con el discurso matemático escolar de las gráficas y sus usos.

El segundo momento de Crisis se motiva al desenvolvimiento de los participantes a someterse a una estructura no considerada anteriormente, pasando de la idea de la pendiente a la derivada, permitiendo que, desde el estudio de la variación, se pase y transforme al estudio de la razón de cambio. Reconociendo la noción de cambio como pendiente de la recta tangente a la curva e interpretando geométricamente la derivada como razón de cambio. Para este transito se pretende que los estudiantes modelen una situación de enfriamiento de un líquido, por medio del uso de palitos de colores, en una representación gráfica de la función que lo modela. Lo anterior se genera por medio de problematizar las formas del uso de las gráficas que se generan en el momento anterior, como lo hace Oresme (1323 - 1382), al representar mediante un dibujo la manera en que las cosas varían, recurriendo a recursos geométricos para el estudio de la variación (Vrancken & Engler, 2013). Pero además el uso de los palitos permite la discusión de elementos relacionados con los aportes de Fermat (1601 – 1665), quien utiliza elementos del tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con estos cambios cuando se hacen muy pequeños. Su proceso se basa en la idea que si una secante, se deja un punto fijo de la intersección a la curva y de manera que el otro punto de la intersección se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante se aproxima a la posición definida por el primer punto fijo t. La recta que tiene esta posición se llama tangente a la curva, y dicho punto fijo se llama punto de tangencia. De todas las rectas que pasan por dicho punto, la que mejor representa la aproximación del curso de la curva es la recta tangente.

El tercer momento de Nueva Rutina se usa a la derivada como rapidez instantánea para poder predecir otros fenómenos, que sean posibles de modelar, considerando los argumentos anteriormente vistos. Se pretende mantener una estructura más compleja de argumentaciones sobre la noción de cambio, como modelos explicativos de rapidez instantánea en el enfriamiento o calentamiento del agua, describiendo el movimiento como un fenómeno previo a la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil en un período de tiempo, para finalmente describir estos en un periodo de tiempo, para predecir el cambio.

Configurado por tres actividades. Se procura generar predicciones y significados de los hechos que intervienen en un comportamiento específico, describiendo la velocidad, rapidez y aceleración, cambiando sólo el nombre una de las variables, promoviendo la gráfica como un modelo manipulable y predictivo. Se toma, además, la idea de Newton (1641 – 1727), quien trataba con cantidades que variaban en el tiempo, estudió las magnitudes variables que representan diversas formas de movimiento, las fluxiones o velocidades de las fluentes (actualmente conocida por funciones) son razones de cambio instantáneas, y expresan la rapidez

con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Es importante que en este momento se pretende seguir con la idea del trabajo manual, por parte del estudiante, del palito; así como Newton asoció también el concepto de fluxión con el problema de las tangentes, de manera similar a la desarrollada por sus predecesores. Considera que la curva es un lugar geométrico determinado por la intersección de dos rectas en movimiento, una vertical y otra horizontal, las coordenadas x e y del punto en movimiento son funciones del tiempo t y están representados por las rectas horizontal y vertical, respectivamente.

4.2. Metodología de la Investigación: Ingeniería didáctica.

La Ingeniería Didáctica surgió de la didáctica matemática francesa en los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica (De Fariaz Camos, 2006) , su nombre proviene de la analogía entre la actividad de un ingeniero con la actividad de un investigador en didáctica.

Desde su comienzo la Ingeniería Didáctica está ligada a las intervenciones didácticas (experimentales) en las clases, tomando la forma de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia en determinados fenómenos didácticos (Godino, y otros, 2013).

La ingeniería didáctica está basada sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995). Esta metodología posee una distinción atemporal de su proceso de experimentación, y consta de cuatro fases, estas son:

Fase 1: Análisis preliminar.

Esta fase no sólo se base en el cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995), sino también en la comprensión del análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, analizando el funcionamiento del sistema. De acuerdo a nuestra investigación, este análisis preliminar se encuentra en los capítulos anteriores.

Fase 2: Concepción y análisis a priori.

Comprende un análisis una parte descriptiva y una predictiva centrándose en las características de la situación, en nuestro caso en las características de las prácticas que se pretenden sean ejercidas por los jóvenes.

Fase 3: Experimentación.

Consiste en el proceso de experimentación misma. Es la fase de la realización de la ingeniería con la población de estudiantes, donde se establece el contacto entre el Investigador/profesor con los estudiantes objeto de la investigación.

F*ase 4: Análisis posteriori y evaluación.*

El análisis a posteriori se base en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, que incluyen observaciones de la situación puesta en práctica y las producciones de los estudiantes. En el proceso de validación se deberá construir en base a la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995).

De acuerdo a nuestra metodología, la experimentación, el análisis a posteriori, la validación interna corresponderá a las conclusiones que constituyen la fase final de esta tesis.

Capítulo 5: La Investigación.

> *La ingeniería didáctica como metodología de investigación, se caracteriza por estar constituido de un esquema experimental de "realizaciones didácticas" en el aula, además de un proceso de validación interno basado en el registro de los estudios de casos y en el contraste de los análisis a priori y posteriori. (Araya, Prendas & Salas, Construcción de una Ingeniería Didáctica Matemática para la Enseñanza del Concepto de Derivada y su Idoneidad)*

5.1. Análisis preliminar

Este análisis se complementa con el análisis teórico de esta tesis.

La situación de aprendizaje fue implementada en el Colegio Alicante del Rosal, establecimiento cuya dependencia es particular subvencionado, ubicado en la comuna de Maipú, con 3460 alumnos, de perfil científico – humanista.

Los niveles que posee el establecimiento educacional van desde nivel medio mayor a cuarto año medio.

Implementación.

La implementación se llevó a cabo en una sala de clases destinada a talleres del colegio, no es el aula habitual de los jóvenes. Se utilizó una cámara fotográfica para captar lo que realizaban los estudiantes de forma escrita.

El tiempo estimado para realizar la actividad fue de 3 horas aproximadamente, en los cuales se aplicaron la situación de aprendizaje dividida en sus tres momentos. Distribuyéndose en dos encuentros de 1 hora y 30 minutos.

Los participantes.

La situación de aprendizaje fue aplicada a 10 jóvenes del cuarto medio E, del establecimiento educacional; de perfil físico – matemático, esto quiere decir que aparte de las asignaturas del plan general, ellos deben cursar las asignaturas electivas de: matemática, física y biología. Los intereses de estos alumnos son de un alto grado de aceptación y motivación por las matemáticas y sus intereses futuros son seguir estudiando algún tipo de ingeniería.

Estos fueron divididos en tres grupos, conformados por los jóvenes, con la finalidad de fomentar la interacción entre ellos. Estos están compuestos por:

- Grupo 1: 3 jóvenes.
- Grupo 2: 3 jóvenes.
- Grupo 3: 4 jóvenes.

Dinámica.

Al inicio del primer encuentro se les explicó a los jóvenes que el taller que participarían les permitiría un tener un primer encuentro con cálculo de primer año de la universidad, y que el taller tenía fines investigativos y no calificativos para la asignatura de matemática. Además, de informarles que no era obligación participar de dicho taller, sólo los voluntarios podían participar, el resto del curso se quedaba en su sala de clases, en la hora de religión. Con los jóvenes voluntarios se dirigieron a la sala de taller.

Se les explicó a los jóvenes que podían expresas todas sus ideas, sus dudas, comentarios, etc., pues la finalidad era saber todos sus pensamientos y razonamientos que utilizaban, que no había razonamientos erróneos, que tuvieran la libertad de decir lo que quisieran.

Quien modela la situación es la profesora Andrea Pinto Vergara de la siguiente forma: cada momento está compuesto por distintas actividades que se encontraban impresas, y que eran entregadas una a una a los estudiantes, una vez finalizada la anterior.

Es importante destacar que la mayoría de los jóvenes (salvo uno) habían sido alumnos de la profesora Andrea Pinto cuando cursaban 7º y 8º básico, es decir existía entre profesor- alumno cierta confianza y conocimiento entre ellos.

5.2. Análisis a priori.

Las respuestas que esperamos de parte de los estudiantes durante la aplicación de la situación de aprendizaje propuesta, las cuales en conjunto forman el diseño de la misma, que tiene por finalidad resignificar la variación, por medio de la resignificación de la pendiente como razón de cambio. Abarcando el conjunto de hipótesis que posteriormente será confrontado con el análisis a posteriori.

La secuencia se divide en un total de nueve actividades, separados en tres momentos, cuyo objetivo final es que el estudiante por medio de *la situación de modelación* analice el cambio a través del tiempo, determinado el proceso para el cambio y la variación en una cantidad de tiempo, identificando la pendiente como el cociente entre la variación en la ordenada con la variación en la abscisa, reconociendo la noción de cambio como pendiente de la recta tangente a la curva, interpretando geométricamente la derivada como razón de cambio, reconociendo la noción de cambio como la rapidez instantánea en el enfriamiento o calentamiento del agua, describiendo la velocidad, la rapidez y la aceleración de un móvil, para finalmente predecir el cambio. Tomando como fenómeno de cambio la temperatura en el agua, en un hecho del cotidiano.

Primer momento.

En este primer momento se configura por cuatro situaciones variacionales y se espera que los estudiantes desde su experiencia y vivencia expresen aspectos que tienen que ver con el fenómeno del cambio. Identifique situaciones de su entorno que sufran alguna modificación a través del tiempo, determinen comportamientos gráficos que muestran el cambio en una situación particular, precisen la variación en una cantidad de tiempo e identifiquen la pendiente como el cociente entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa. La *Estrategia Variacional* que está presente en este primer momento es la de Comparación, pues se espera que la acción que los estudiantes realicen sea establecer diferencias estados, iniciales y finales, permitiéndoles identificar cambios y poder analizarlos mediante las características variacionales presentes en ellos.

Situación Variacional 1:

En esta primera Situación Variacional se espera que desde la observación de su entorno puedan analizar los cambios que se producen en su cotidiano. Las *Estructuras Variacionales* presente en esta primera Situación Variacional son el cambio, variable dependiente e independiente y variables cuantitativas y cualitativas.

TV a) ¿Podrías identificar elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo?

En este Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación de aprendizaje mediante los siguientes Argumentos *Variacionales* el reconocer los diferentes fenómenos de cambio, por medio de *Códigos Variacionales* representados por medio de frases sencillas, se expresen en lenguaje común para que luego utilicen un lenguaje con tecnicismos matemáticos, que son habituales considerando su perfil escolar, como por ejemplo *que nombren la temperatura, velocidad, crecimiento de una persona entre otros fenómenos que puedan identificar*

TV b) ¿Cómo notas estos cambios?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación de Aprendizaje mediante *Argumentos Variacionales* como el describir cuando algo cambia, como reconocer un antes y un después o como reconocer dos estados. Utilizando *Códigos variacionales* como frases sencillas en lenguaje común, que son habituales considerando su perfil escolar, que ejemplifique el cambio, estas podrían ser: cuando *algo crece*, *se achica como*, *crece como*, *cuando pasa el tiempo y está distinto*, *antes era diferente.*

TV c) ¿Cuáles son las características antes y después del cambio?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación de Aprendizaje mediante *Argumentos Variacionales* como caracterizar el antes y después y describir cómo cambio e identificando características comunes. Se espera que los estudiantes utilicen Códigos Variaciones como frases sencillas, en lenguaje común que caractericen y describan dicho como, como, por ejemplo: *que algo está frio y después caliente*, *esto tiene en común*.

TV d) ¿Cómo podrías representar este cambio?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación Variacional mediante Argumentos Variacionales como representar el cambio, además de identificar formas para representar dicho cambio. Se espera que los estudiantes utilicen *Códigos Variables* como la representación mediante tablas y/o gráficos, o también mediante un dibujo.

Situación Variacional 2:

En esta segunda Situación Variacional se espera que los estudiantes desde su experiencia matemática, sean capaces de determinar procesos para el cambio mediante un acercamiento a

la modelación del fenómeno de cabio de temperatura, en una ciudad durante un mes, a través de la representación gráfica de dicho fenómeno; pero además se pretende que conjeturen acerca del ¿Por qué? de dicha situación, determinando comportamientos gráficos que muestran el cambio en una situación particular. Las Estructuras Variacionales presentes en esta SV son máximos y mínimos, lo constante, cambio, variación, pendiente y crecimiento y decrecimiento.

Ernesto está estudiando cómo cambia la temperatura a lo largo de los días en un mes en la ciudad de Santiago.

TV a) ¿Cuál de estos gráficos representa mejor esta situación?

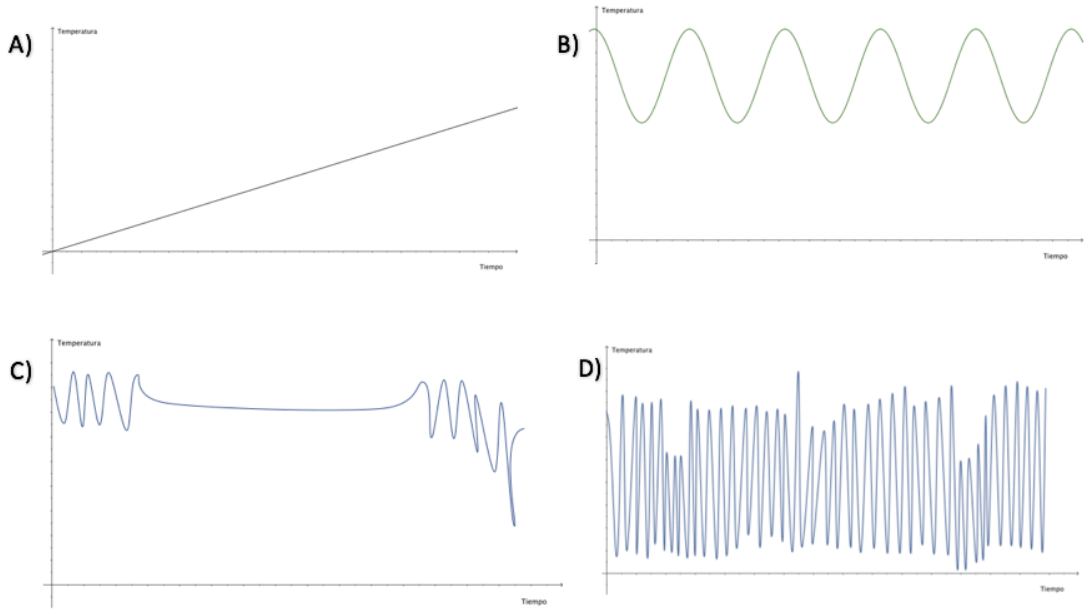


Ilustración 35: Alternativas propuestas para la TV a) Situación Variacional 2, Primer Momento.

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación Variacional mediante Argumentos Variacionales como seleccionar cual de las alternativas es la que mejor modela lo que se plantea, hallando un patrón de comportamiento que sea coherente con la situación de cambio propuesta, desarrollando un análisis global y local de la situación, marcando la letra D. Se espera que los estudiantes utilicen *Códigos Variables* como lo son las gráficas y las frases sencillas en lenguaje común, con tecnicismos matemáticos, propios de su perfil.

TV b) ¿Por qué?

Los Argumentos Variacionales utilizados en esta Tarea Variacional son las justificaciones del por qué de la elección realizada, desde la variación de los máximos o desde la variación de los mínimos, explicando por qué el patrón de comportamiento que seleccionaron explica la situación de modelación propuesta. Se espera que los estudiantes utilicen Códigos Variaciones como frases sencillas en lenguaje natural y en lenguaje con tecnicismos matemáticos propios de su perfil como alumnos como, por ejemplo: *por qué hay 30 días, porque ese es el que muestra las temperaturas máximas y mínimas, porque este es el que determina la temperatura que describe la ciudad de Santiago*, Los estudiantes pueden también utilizar los intervalos de tiempo constante como otro Código Variacional presente.

Situación Variacional 3:

En esta tercera Situación Variacional se espera que los estudiantes desde su experiencia determinen la variación que se produce en la temperatura del café en una cantidad de tiempo, que sean capaces de utilizar la gráfica para describir dicho cambio, utilizando pequeños intervalos de tiempo y discutiendo de la pertinencia del cambio en un tiempo determinado. Las Estructuras Variacionales presentes en esta SV son el cambio, variación, variables dependientes e independientes, función exponencial decreciente y la valorización.

Si dejas enfriando una taza de café para poder beberla, ya que se encuentra muy calienta.

TV a) ¿Cómo podrías describir el cambio?

Los Argumentos Variacionales utilizados en esta Tarea Variacional son las descripciones de las variables presentes en el fenómeno de cambio planteado. Para ello utiliza los Códigos Variacionales que articulan dichos argumentos, como lo son las gráficas, tablas o frases en lenguaje natural, como, por ejemplo: *que es lento, que es rápido, que dependerá de la temperatura ambiente, que dependerá de cuanto tiempo tengamos.*

TV b) ¿Cómo podrías describir el cambio en pequeños intervalos de tiempo?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los Argumentos Variacionales como describir los cambios que se producen en pequeños intervalos de tiempo, pero que además esbocen y representen dicho cambio utilizando el Código Variacional de la gráfica, del tipo continua y discontinuo, con o sin graduación de los ejes, o tabla como se puede observar en la Ilustración 36.

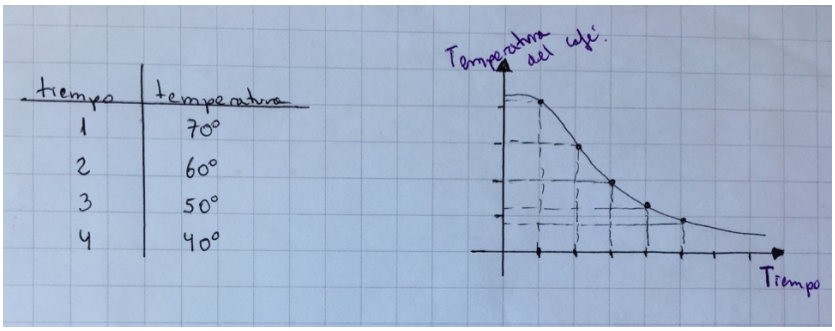


Ilustración 36:Código Variacional esperado para TV2, Situación Variacional 3, Primer momento.

TV c) ¿Cómo podrías describir el cambio un tiempo determinado?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen Argumentos Variacionales como el análisis de la situación planteada y la descripción de la misma para llegar a argumentar el cambio en el tiempo determinado, construyendo una idea del tiempo muy cercano o simplemente respondan que no es posible. El Código Variacional que articula dichos Argumentos Variacionales es la frase en lenguaje natural como, por ejemplo: *a medida que pasa el tiempo, midiendo lo que pasa, con una gráfica, no se puede, comparando el antes y el después*.

Situación Variacional 4:

En esta cuarta Situación Variacional se espera que los estudiantes identifiquen la pendiente como el cociente entre la variación de la ordena y la variación de la abscisa, explicando lo que significa dicho valor en el escenario del calentamiento o enfriamiento de un pollo, expresando el significado de dicho valor en la gráfica; y realizando cálculos simples, como el cálculo de la pendiente y cálculo de minutos y temperatura de acuerdo al contexto dado. Las Estructuras Variacionales presentes en esta SV son el cambio, pendiente, variación de la abscisa y ordenada, coeficiente de posición de la función afín, función afín con pendiente positiva y con pendiente negativa, variable dependiente e independiente.

Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos.

TV a) ¿Qué significa este valor?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como el definir el significado del valor de la razón de calentamiento del pollo en el horno, en la

situación de modelación planteada, desde el cotidiano. El Código Variacional que se espera es la frase en lenguaje natural como, por ejemplo: *que cada minuto sube 3 grados Celsius.*

TV b) ¿Qué significa gráficamente?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación Variacional mediante Argumentos Variacionales como la interpretación de la información entregada, expresada mediante una gráfica construida en base a los conocimientos de la función lineal y afín. Se espera que el Código Variacional utilizado por los estudiantes sea la gráfica, como la presenta en la Ilustración 37.

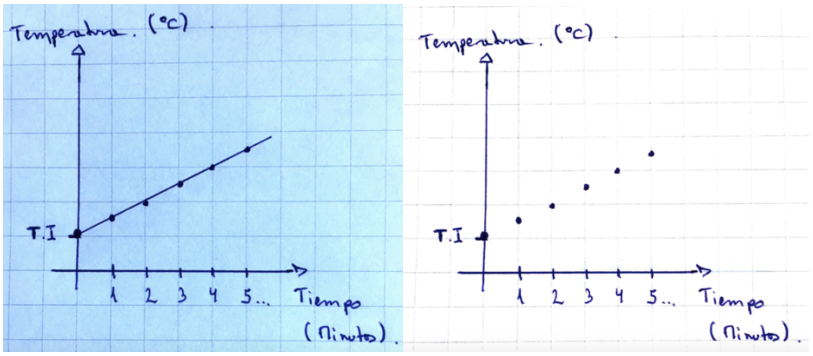


Ilustración 37: Código Variacional esperado en TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la gráfica en un punto?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes expliquen esta parte de la Situación de Aprendizaje utilizando Argumentos Variaciones como inferir acerca del valor de la pendiente en dicho punto, calculando que la pendiente es 3 o aplicando el modelo algebraico que es: $y = 3x + t_i$ o $y = mx + n$. Para ello se espera que los Códigos Variacionales utilizados sea la expresión algebraica y frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *la pendiente es 3*.

TV d) ¿A los cuantos minutos alcanza los 270°C?

Los Argumentos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen en esta Tarea Variacional son la de calcular a los cuantos minutos alcanza los 270ºC el pollo que esta en el horno, en la situación de modelación planteada, identificar e inferir que dicho tiempo dependerá de la temperatura inicial del pollo. Los Códigos Variaciones esperados son frases en lenguaje natural, como, por ejemplo: que *dependerá de la temperatura inicial, a los 90 minutos si el pollo esta a 0ºC, como máximo 90 minutos, no se puede saber porque no sabemos la temperatura del pollo.*

TV e) ¿Cuál es su temperatura a los 30 minutos?

Los Argumentos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen en esta Tarea Variacional calcular que en 30 minutos el pollo alcanzara una temperatura de 90ºC más la temperatura inicial del mismo, para ello deberá inferir que la temperatura a los 30 minutos dependerá de la temperatura inicial del pollo. Los Códigos variacionales esperados son frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *90 grados Celsius, 90ºC más la temperatura inicial del pollo, no se puede calcular.*

TV f) ¿Qué sucede con la gráfica cuando el pollo lo sacamos del horno y se enfría a razón de 3ºC/minuto?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como examinar, analizarla la información presentada, encontrando un modelo lineal inverso de la situación de modelación presentada, para luego esbozar una representación gráfica de la misma. Los Códigos Variaciones que articular dichos argumentos son y frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *disminuye lo mismo que aumenta, se inclina hacia abajo con pendiente negativa, la misma gráfica… pero al revés*; y la gráfica como la que se presenta en la Ilustración 38.

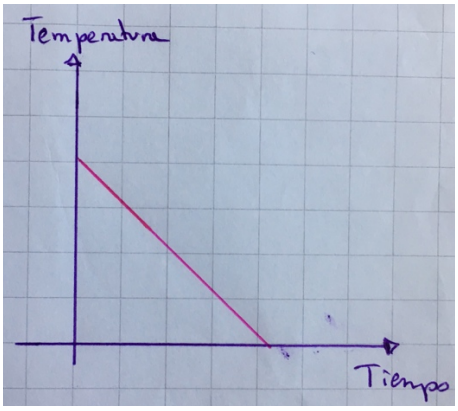


Ilustración 38: Código Variacional esperado en TV f) Situación Variacional 4.

TV g) ¿Cuánto se ha enfriado después de 7 minutos?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como calcular que después de 7 minutos la temperatura alcanzada. Mediante Códigos Variacionales como frases en lenguaje natural como, por ejemplo*: a alcanzado los 21ºC, 21ºC.*

Segundo momento

Este segundo momento está configurado por dos Situaciones Variacionales, y se espera que los estudiantes modelen una situación de enfriamiento de un líquido, por medio de la utilización de palitos de colores, problematizando las formas del uso de las gráficas que se generan en el anterior momento. Se motiva el desenvolvimiento de las estructuras de saberes vistas en el primer momento, al tratar de someter a los estudiantes a estructuras no consideradas con anterioridad. El uso de los palitos permite la discusión de elementos relacionados con los infinitesimales y las representaciones gráficas visuales, mescladas con ideas intuitivas del cambio al describir que es lo que sucede con dichos cambios cuando estos se hacen muy pequeños; basándose en la idea de la secante, dejando un punto fijo de la intersección de la curva y de manera que el otro punto de la intersección se acerca indefinidamente al primero, posicionando el punto de tangencia, representando el curso de la curva en dicho punto. La Estrategia Variacional que esta presente en este segundo momento es la Seriación, pues el estudiante deberá estudiar los estados sucesivos, presentes en la representación realizada con los palitos de colores y los movimientos de estos, relacionándose con la comparación entre ellos.

Situación Variacional 1:

En esta primera situación de variacional se espera que los estudiantes reconozcan la noción de cambio presente en la situación de modelación planteada, desde el cotidiano sea resignificada para distinguir la pendiente como la recta tangente a la curva. Las *Estructuras Variacionales* presente en esta primera Situación Variacional son la variable dependiente e independiente y variables, función exponencial, punto de equilibrio, razón de cambio, pendiente, variación en la abscisa y en la ordenada, razón de cambio.

Supón que posees una bebida en lata, tienes mucha sed, pero esta está tibia. Decides colocar la bebida en el refrigerador para enfriarla.

TV a) ¿Cuánto tiempo debes esperar para poder tomar la lata de bebida fría?

Los Argumentos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen es la inferencia respecto del tiempo de espera para poder beber la lata de bebida fría, además de reconocer las distintas variables que actúan para que la bebida se enfría, por ejemplo: la temperatura ambiente, la temperatura inicial de la lata de bebida o como la capacidad de enfriamiento del refrigerador. Los códigos variaciones que se esperan son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *depende de la temperatura ambiente, depende de la temperatura de la lata, depende de donde coloque la lata, depende del refrigerador de la lata, depende de la sed que tenga.*

TV b) ¿Cómo sería la curva que representa el enfriamiento de la lata de bebida a través del tiempo en el plano cartesiano?

Los Argumentos Variacionales que se espera de los estudiantes corresponde a la representación de la curva en el plano cartesiano. El Código Variacional que se espera de los estudiantes es la gráfica, como la que se puede observar en la Ilustración 39.

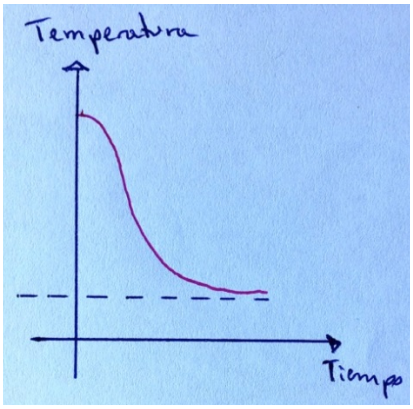


Ilustración 39: Código Variacional esperado en TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV c) Realiza nuevamente esta curva <u>sólo utilizando palitos</u>, lo más precisa posible. ¿Cuál es la posición más conveniente al colocar los palitos?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como examinar la situación planteada, proponer la mejor representación utilizando los palitos como herramienta para trazar la curva. El Código Variacional que articular dichos argumentos es la gráfica construida con los palitos, como la que se muestra en la Ilustración 40.

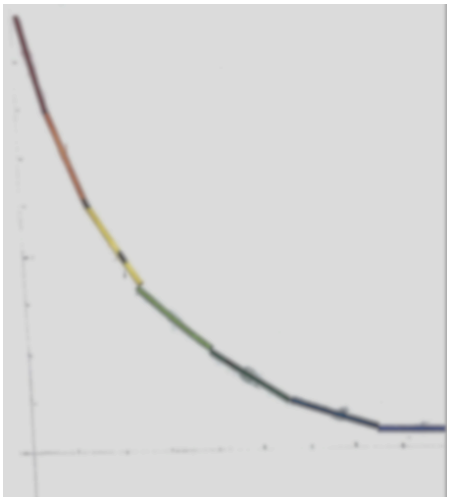


Ilustración 40: Código Variacional esperado en TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV d) ¿Qué representa el palito en esta situación?

En esta Tarea Variacional los Argumentos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen son la argumentación que construyan en la representación que le atribuyen al palito en la situación de aprendizaje, siendo este la variación (disminución o aumento) del cambio de la temperatura en el tiempo transcurrido. Los Códigos Variacionales que articulan los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural, con los tecnicismos propios de los estudiantes de acuerdo al perfil de ellos como, por ejemplo: *representa el cambio de temperatura en el tiempo que transcurre, lo que cambia la temperatura en un tiempo, como varía la temperatura, que la temperatura cambio.*

TV e) Elije tres palitos cualesquiera, (y márcalos en la hoja) ¿cuál es la pendiente de estos palitos?

Los Argumentos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen corresponde a la selección de los palitos, busquen una forma de calcular la pendiente entre ellos, para ello podrían graduar los ejes del plano cartesiano, identificando que entre estos puntos es posible construir una recta y que la pendiente entre los puntos será la pendiente de la recta que une a los puntos, o sea el palito. Podrían identificar también los puntos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El Código Variacional que se espera que empleen son la representación mediante un dibujo o bosquejo de la situación y mediante frases en lenguaje natural que describa lo que esta sucediendo con los palitos como, por ejemplo: *tiene pendiente negativa, disminuye la temperatura, tiene pendiente cero, su temperatura permaneces igual.*

TV f) Elije dos puntos cualquiera de la gráfica y calcula la pendiente <u>entre</u> ellos.

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como seleccionar los puntos cualquiera de la gráfica, posiblemente efectuar alguna graduación para proceder a calcular la pendiente solicitada e identificar que entre estos puntos es posible construir una recta y que la pendiente entre los puntos corresponderá a la pendiente de la recta, construida sobre los puntos seleccionados. El Código Variacional que articular dichos argumentos un dibujo de los palitos seleccionados, frases en lenguaje natural como: *tiene pendiente cero, no se puede calcular, todos los palitos tienen distinta pendiente.*

Situación Variacional 2:

En la segunda Situación variacional se espera que los estudiantes continúen trabajando con la misma situación del cotidiano de los estudiantes, pero interpretando geométricamente la derivada como razón de cambio**.** Usando la gráfica para estudiar la variación entre dos puntos, dejando uno fijo y moviendo el otro a través de la gráfica. Las Estructuras Variaciones presentes en esta

Situación Variacional son pendiente, recta secante, recta tangente, función exponencial, punto de equilibrio, razón de cambio, derivada

TV a) ¿Qué pasa con la pendiente a medida que dejo uno de los puntos fijos y comienzo acercar el otro?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que argumenten que la pendiente aumenta o disminuye, dependiendo de cuál es el punto que dejan fijo y cuál es el punto que mueven, que al mover el palito (recta) se modifica el valor de la pendiente que este posee. Los Códigos Variacionales que se espera que utilicen son la representación mediante un dibujo y frases variacionales como, por ejemplo: *tienden a disminuir o aumentar el valor de la pendiente, la pendiente cambia, la pendiente disminuye hasta ser cero, o a no existir.*

TV b) Marca en la hoja, la pendiente cuando ambos puntitos son uno. ¿Qué significa acercar un palito al otro fijo, en el problema de la lata de bebida?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los Argumentos variacionales como que expliquen y reconozcan que la pendiente del palito fijo finalmente será la misma que la del palito que voy acercando al otro, cuando ambos palitos son uno. Los Argumentos Variacionales que se espera que utilicen son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *la recta secante se vuelve tangente, cuando los puntos son uno, se obtiene la recta tangente;* y representación por medio de un dibujo o gráfica de la situación.

Tercer Momento.

Este tercer momento está configurado por tres Situaciones Variacionales, y se espera que los estudiantes por medio de la modelación del enfriamiento de una taza de café, la representación grafica de un fenómeno con las variables tiempo/temperatura y la modificación de este ultimo, se espera que los estudiantes mantengan una estructura más compleja de argumentaciones sobre la noción de cambio, explicando la rapidez instantánea por medio de modelos de calentamiento o enfriamiento del agua. Se toma la idea de Newton, quien estudia diversas formas de movimiento y las razones de cambio instantáneas, expresando la rapidez con que cambia una variable con respecto otra en un instante, esté también asocia la idea de tangente de manera similar a sus predecesores, considerando la curva como lugar geométrico determinado por la intersección de rectas en movimiento, una vertical y otra horizontal. La Estrategia Variacional que esta presente en este tercer momento es la *Predicción*, siendo asociada a la acción de poder anticipar comportamientos o estados, luego de realizar un análisis de la variación, abstrayendo información de los modelos predictivos.

Situación Variacional 1:

En la primera situación variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que sean capaces de mantener una estructura más compleja de argumentaciones sobre la noción de cambio, como modelo de reconocimiento de la noción de cambio como la rapidez instantánea en el enfriamiento del agua. Se espera además que el estudiante sea capaz de estudiar el fenómeno, realizando un análisis de las variaciones en distintos periodos de tiempo. Las Estructuras Variacionales presentes en esta SV son función, función exponencial, razón de cambio, pendiente, movimiento, creciente-decreciente, variación en los ejes x e y.

Tienes una taza de café, y este se encuentra a $80°C$, la temperatura ambiente del lugar donde te encuentras es de $24°C$, cuando han transcurrido 4 minutos desde que se sirvió, la temperatura del café es de $68°C$. A los 15 minutos de servido el café se encuentra a los $48°C$. Esta situación se puede observar en la siguiente gráfica:

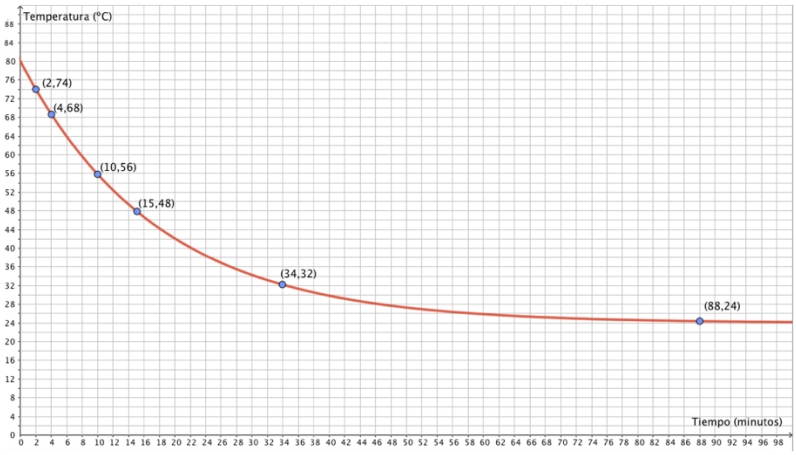


Ilustración 41:Gráfica propuesta para Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV a) ¿Cuánto disminuyo la temperatura entre el minuto 2 y 15?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que identifiquen que a los 2 minutos le corresponden 74º y a los 15 minutos le corresponde 48ºC, asocien la disminución con la resta, que operen la diferencia entre 74º y 48º para obtener 26º, y determinen que la variación corresponde a las diferencias en el eje Y. Los Argumentos Variacionales que se espera que utilicen son las frases en lenguaje natural como,

por ejemplo: *disminuyo en 26ºC, el promedio de la variación fue de 26º;* y representación por medio de un dibujo o gráfica de la situación.

TV b) ¿Cuánto tiempo tardo en ello?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que calculen el tiempo que tarda en disminuir 26ºC, asocien la disminución del tiempo con la variación en el eje X y que asocien la disminución con la resta. Los Códigos Variacionales presentes en esta TV son los referentes a frases en lenguaje natural de los estudiantes como, por ejemplo: *tardó 13 minutos, 13 minutos.*

TV c) ¿Cuál fue la variación en ese periodo?

En esta tarea variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que reconozcan que para calcular la variación en ese periodo deben considerar la variación de la temperatura (eje Y) y la variación del tiempo (eje X), o sea que calculen: $\frac{Temperatura}{Tiempo} = \frac{ºC}{minutos} = \frac{variación\ en\ eje\ Y}{variación\ en\ eje\ X} = \frac{26ºC}{13\ min} = 2ºC/min$. Los Códigos Variacionales que se esperan que los estudiantes utilicen son las frases en lenguaje natural y con tecnicismos matemáticos propios de ellos como, por ejemplo: la variación fue de 2ºC.

TV d) Elije dos puntos de la gráfica, coloca un palito en cada punto. ¿Cuál es la variación entre ambos puntos?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que seleccionen dos puntos de la gráfica, comparen los palitos posicionados, observen que un palito tiene mayor variación que otro, pues uno tiene mayor pendiente que el otro. Estimen que entre más cercano esté el palito al eje X, menor será la variación en el intervalo elegido, al tener una pendiente menor que los otros palitos que hubiera elegido, realicen los cálculos entre los puntos seleccionados e infieran que entre más cercano este el palio al eje Y, mayor será la variación en el intervalo elegido. Al tener una pendiente mayor que los otros palitos que hubiera elegido. Los Códigos Variacionales esperado que articulan los Argumentos Variaciones son los dibujos que podrían bosquejar de la situación y frases en lenguaje natural.

TV e) Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes empleen los siguientes Argumentos Variacionales como que comparen lo que pasa entre los palitos seleccionados, que distingan las diferencias entre los diferentes estados de estos, estimen que la diferencia entre las pendientes (variación) va a aumentar (o disminuir) poco a poco, que esperen que una pendiente se acerca a

la otra y supongan que finamente será la misma pendiente en ambos palitos. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes empleen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *que la variación disminuya, que se la diferencia se hace cero, podría aumentar o disminuir dependiendo de cual elija, la pendiente aumenta o disminuye dependiendo de la elección realizada.*

TV f) ¿Cuál es el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como estimar el valor de la variación, para ello deberán seleccionar los palitos que utilizarán y compilar la información recolectada para inferir que la variación será la misma, o que tienden a cero. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes empleen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo: *la variación es la misma, la variación es cero, tiende a cero.*

TV g) Si comparo el resultado de la pregunta d), con los resultados de la pregunta f) ¿qué obtengo?

En esta Tarea variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como visualizar lo que sucede en las preguntas d) y f), identifiquen que en la pregunta d) la variación corresponde al valor de la pendiente de los palitos y ambos poseen distinto valor, en cambio en la pregunta f) ambos palitos tienen el mismo valor de la pendiente, para comparar dichos resultados. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes empleen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo: la pendiente varia, la pendiente posee distintos valores en ambas preguntas.

Situación Variacional 2:

En la segunda Situación Variacional se espera que los estudiantes sean capaces de enfrentarse con el movimiento, siendo un fenómeno previo a la velocidad, rapidez y aceleración del un móvil. Se espera, además, que los jóvenes sean capaces desde la gráfica generen predicciones de los hechos. Las Estructuras Variacionales presentes en esta segunda situación son funciones, velocidad, rapidez, aceleración, máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento, pendiente, valorización.

Al observar la siguientes gráfica:

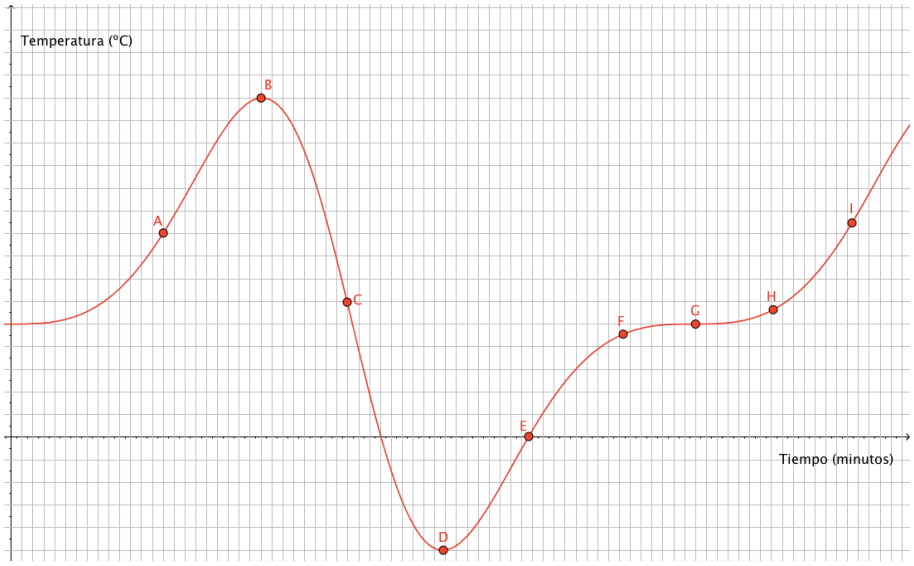


Ilustración 42: Gráfica propuesta para Situación Variacional 2, Tercer Momento.

TV a) ¿Cómo será la situación que está vinculada con ella?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como ejemplificar, proponer y producir una la situación vinculada con la modelación de algún fenómeno representado mediante la grafica entregada. Mediante Códigos Variaciones como las frases en lenguaje natural de los estudiantes, por ejemplo: *que hay un cuerpo que posee una temperatura inicial y comienza a subir su temperatura, luego de un tiempo baja rápidamente la temperatura hasta llegar bajo los cero grados, luego de un tiempo se comienza a calentar hasta alcanzar los cero grados Celsius, se sigue calentando muy lentamente y luego muy rápidamente.*

TV b) ¿Cuál es la temperatura inicial del móvil?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como observar y conjeturar acerca de un X_i, valorizando los ejes, por medio de algún valor mayor que cero. Los Códigos Variacionales que se espera que articulen los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural, por ejemplo: *que es mayor que cero, es un valor positivo, es igual al punto G.*

TV c) ¿Dónde es mayor la variación de temperatura, en F o en H?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como Identificar que la mayor variación se da en el punto H, para ello deberán comparas las variaciones en el punto F y en el punto H. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural, por ejemplo: *son parecidas, son casi iguales, es un poco mayor en H, es mayor en H.*

TV d) Describe lo que sucede entre cada par de punto.

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como la descripción en cada par de puntos varia la pendiente de las rectas que pudieran representar al unir dichos puntos, además de integrar lo anteriormente visto y decidir en que puntos la recta es creciente o decreciente. Los Códigos variacionales que se espera que los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural y con tecnicismos matemáticos propios del perfil de los estudiantes, por ejemplo: $\overleftrightarrow{AB}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero,* $\overleftrightarrow{BC}$: *la recta es decreciente y su pendiente es menor que cero,* $\overleftrightarrow{CD}$: *la recta es decreciente y su pendiente es menor que cero,* $\overleftrightarrow{DE}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero,* $\overleftrightarrow{EF}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero,* $\overleftrightarrow{FG}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero,* $\overleftrightarrow{GH}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero y que* $\overleftrightarrow{HI}$: *la recta es creciente y su pendiente es mayor que cero.*

Situación Variacional 3:

En la tercera Situación Variacional se espera que los estudiantes sean capaces de predecir el cambio, modificando el nombre de una sola de las variables, promoviendo la gráfica como un modelo manipulable y predictivo. Las Estructuras Variacionales presentes en esta Situación Variacional son función, pendiente, razón de cambio, derivada, movimiento, velocidad, aceleración, rapidez.

En base a la gráfica de la actividad anterior.

TV a) ¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como justificar lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y la temperatura, además que es posible predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si se someter

a condiciones similares, porque este será un modelo que para dicho fenómeno. Los Código Variacionales que articulan los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural como: *es algo que ya ocurrió, por lo que se puede saber lo que pasará si lo volvemos a hacer, la simulación ya fue efectuada, se puede estudiar el comportamiento en el gráfico.*

TV b) Si sólo cambiáramos la variable Temperatura por Distancia (metros). ¿qué describiría esta situación?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como sustituir las variables solicitadas y decidir lo que describiría dicho cambio. Los Códigos Variacionales que se espera que articulen los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural de los estudiantes como, por ejemplo: *describiría a la velocidad, la velocidad.*

TV c) ¿Dónde es mayor la velocidad en B o en C?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como suponer lo que ocurre en cada punto, en base a la visualización de la gráfica presentada y aplicando los conocimiento y experiencias previas, concluyendo que en el punto C es mayor la pendiente que en B. Los Códigos Variacionales que se espera los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural y con tecnicismos matemáticos propios del perfil de los estudiantes, por ejemplo: en C porque la pendiente es mayor.

TV d) Describe dónde aceleraba o desaceleraba el móvil, ¿en A, B y C?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como describir en que puntos se acelera o desacelera el móvil, por medio de la lectura del gráfico presentado. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural, por ejemplo: *que en A acelera, en B deja de acelerar y en C desacelera.*

TV e) ¿Qué paso entre F, G y H?

En esta Tarea variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como conjeturar lo que pasa en cada uno de los puntos, que identifiquen que la velocidad en estos puntos es siempre positiva y que existe una aceleración. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variacionales son las frases en lenguaje natural como, por ejemplo, que entre *F y G es menor la aceleración que entre G y H. Además, que alrededor de G (vecindad) tiende a no haber variación.*

TV f) En que otra situación, distinta al enfriamiento o calentamiento del agua, ¿podríamos analizar el cambio? ¿cómo?

En esta Tarea Variacional se espera que los estudiantes utilicen los Argumentos Variacionales como que reconozcan los modelos como: Posición/Tiempo; Fuerza/Tiempo, entre otros, que distingan además que al cambiar el nombre de las variables se sigue representando el cambio y la variación. Que es posible predecir en que otra situación se podría aplicar el modelo anteriormente visto, analizando las posibles aplicaciones. Los Códigos Variacionales que se espera que los estudiantes utilicen para articular los Argumentos Variaciones son las frases en lenguaje natural como, por medio de ejemplos de su cotidiano.

5.3. Experimentación y recolección de datos

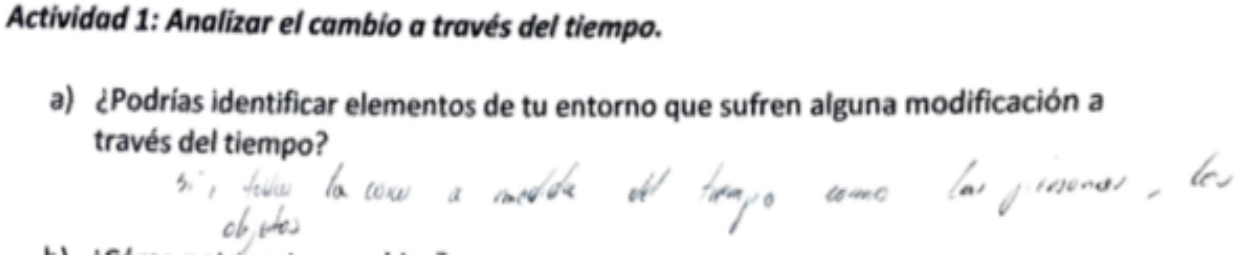
En la experimentación se obtuvieron los siguientes datos

En el Primer Momento de la Situación de Aprendizaje podemos encontrar las siguientes respuestas por parte de los estudiantes:

Situación Variacional 1:

TV a): *¿Podrías identificar elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo?*

Los estudiantes reconocen cambios cercanos a ellos mismo como la cantidad de viviendas que ha aumentado en el lugar donde ellos viven. Aparecen distintos contextos en donde es posible identificar cambios, como personas, movimiento, sonido, temperatura, presión, culturales, clima, agua, cambios físicos y sociales. He identifican que el cambio se produce a través del tiempo, como se puede observar en la siguiente respuesta del estudiante nº 2:


Actividad 1: Analizar el cambio a través del tiempo.

a) ¿Podrías identificar elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo?

Ilustración 43: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 1, Primer Momento.

TV b): *¿Cómo notas estos cambios?*

Los estudiantes reconocen que los cambios los notan mediante una comparación de estados, un antes y un después; utilizan como medida lo que ellos observan y a través de sus vivencias, el estudiante nº 3 señala: *por ejemplo, que en Av. El Rosal, que transito habitualmente y noto los cambios en el tiempo*, asiendo referencia como ha cambiado el lugar donde vive, en concordancia con la respuesta anterior que señalaba el número de viviendas que aumento donde él vivía, el estudiante 9 señala que *en la mañana existe una temperatura diferente que al medio día.*

TV c): *¿Cuáles son las características antes y después del cambio?*

Los estudiantes reconocen la existencia de un elemento común en el proceso del cambio, como por ejemplo el estudiante nº1 señala que *elementos en común, pero evaluando*. La comparación la realizan considerando lo que ha pasado antes y el después, determinando características que pueden ser percibidas sensorialmente por ellos como, por ejemplo, el estudiantenº5 *señala por el frio o el calor que hace en cada fecha*, y el estudiante nº3 señala que *antes avenida El Rosal llegaba hasta cierto punto y antes no existía un parque, era sólo peladero.*

TV d): *¿Cómo podrías representar este cambio?*

Los estudiantes señalan que para representar el cambio identifican las siguientes formar: tablas comparativas, líneas de tiempo, gráficos, gráficos de barras, imágenes de un tiempo atrás e imágenes de hoy. La gráfica sólo es nombrada. Identifican el tiempo como variable independiente. Es importante además señalar que los estudiantes nº6, nº7, nº 9 y nº10 identifican que la gráfica debe estar en función del tiempo, incluso el estudiante nº 9 identifica que en el eje X debe corresponderle el tiempo y en el eje Y le corresponde la variable, como se puede observar en la siguiente imagen:

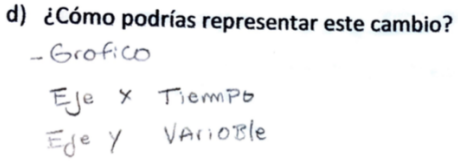


Ilustración 44: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 1, Primer Momento.

Situación Variacional 2:

TV a): *Ernesto está estudiando cómo cambia la temperatura a lo largo de los días en un mes en la ciudad de Santiago. ¿Cuál de estos gráficos representa mejor esta situación?*

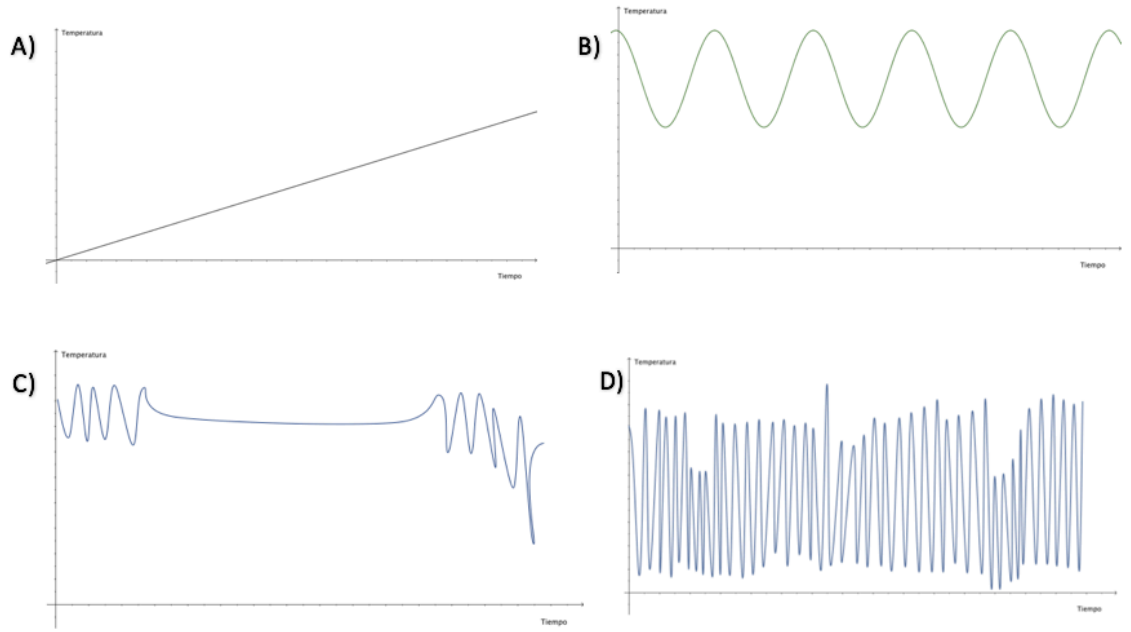


Ilustración 45: Alternativas propuestas para la TV a) Situación Variacional 2, Primer Momento.

Los estudiantes seleccionan la alternativa que modela de mejor forma la situación variacional planteada, marcando la letra D. Ninguno de los estudiantes que participa de esta actividad raya las gráficas.

TV b): *¿por qué?*

Los estudiantes justifican el por qué de la elección realizada identificando máximos y mínimos, comparan los gráficos, hablan de la seriación de los días del mes, encuentran un patron de comportamiento coherente con la situación propuesta, comienzan a hablar de variación y estabilidad.

El estudiante nº1 habla que los máximos y mínimos demuestran la variación de la temperatura.

Ilustración 46: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.

El estudiante nº 3 reconoce que la temperatura no es constante en el tiempo, y que no todos los días tendrán los mismos máximos y mínimos haciendo referencia a la alternativa B.

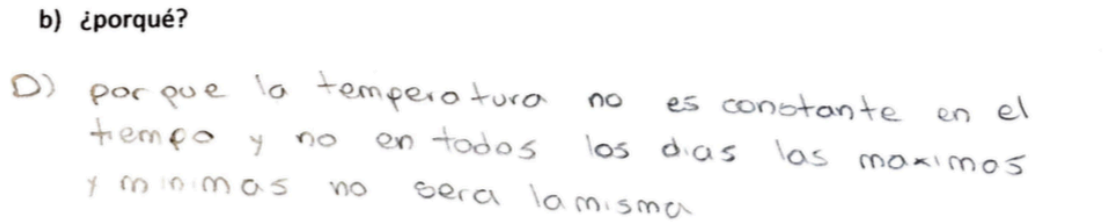


Ilustración 47: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.

El estudiante nº 9 señala que es la alternativa D porque en este gráfico se puede ver cada día temperaturas mínimas y máximas y las variaciones entre estas representan la variación.

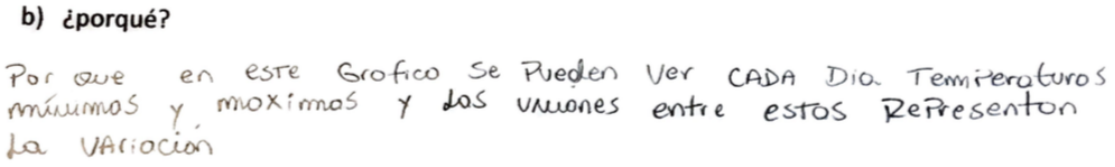


Ilustración 48: Respuesta estudiante nº9: TV b), Situación Variacional 2, Primer Momento.

Situación Variacional 3:

TV a): Si dejas enfriando una taza de café para poder beberla, ya que se encuentra muy calienta. ¿Cómo podrías describir el cambio?

Los estudiantes describen las variables presentes en el fenómeno planteado argumentando desde la gráfica, reconocen la existencia de una temperatura ambiente, y un estado de equilibrio,

la disminución de la temperatura dependiendo del tiempo, y que esta temperatura se podría medir, además identifican que la taza donde se encuentra el café absorbe energía.

El estudiante nº1 utiliza la gráfica, con tendencia lineal para describir dicho fenómeno, además señala que el café se enfría, ya que la taza absorbe energía para llegar a un equilibrio térmico.

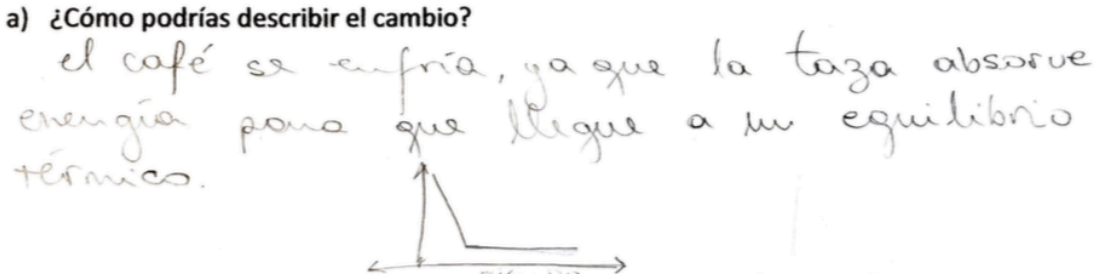


Ilustración 49: Respuesta estudiante nº1: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº2 señala que a medida que pasa el tiempo el café se va enfriando hasta llegar al equilibrio con el ambiente.

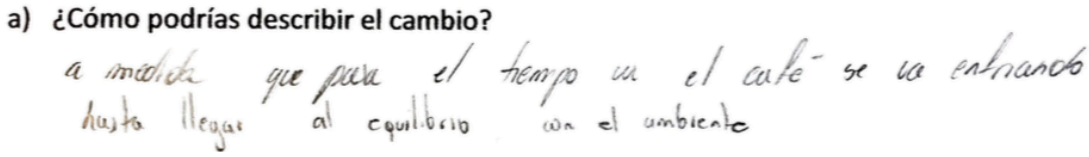


Ilustración 50: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº7 señala que compararía las diferencias entre el antes y después.

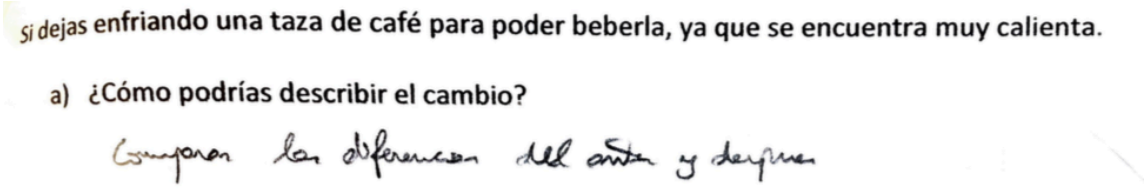


Ilustración 51: Respuesta estudiante nº7: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº9 señala que mediría la temperatura a lo largo del tiempo que transcurre y utilizaría un gráfico para representar dicho cambio.

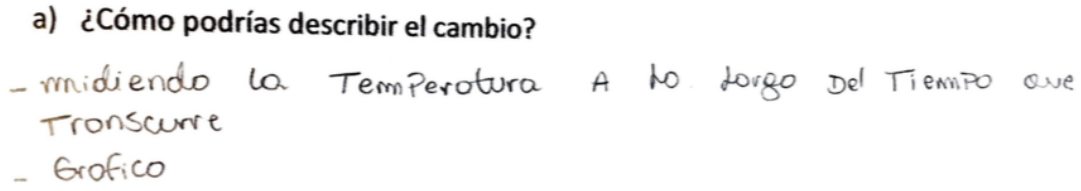


Ilustración 52: Respuesta estudiante nº9: TV a), Situación Variacional 3, Primer Momento.

TV b): *¿Cómo podrías describir el cambio en pequeños intervalos de tiempo?*

Los estudiantes describen los cambios a través de las argumentaciones que se dan al utilizar la gráfica, emanando dos tipos de representaciones gráficas, una en la se utiliza el continuo y otra en la cual se utilizan intervalos de tiempo. Reconocen la utilización de instrumentos que les permitirían la medición de las temperaturas que se dan en dicho fenómeno. Identifican además que en el infinito la temperatura tiende a ser constante. En todas las gráficas de los estudiantes la temperatura se estabiliza en un punto. Los argumentos que dan también se sostienen sin el uso de la gráfica, describiendo que medirían el cambio de temperatura cada ciertos segundo. También se observa que la variación se presenta en los estados antes y después, a través de la diferencia entre los tiempos.

El estudiante nº1 señala que utilizaría un instrumento para medir las temperaturas cada cierto segundo, además utiliza las gráficas para argumentar dicho cambio.

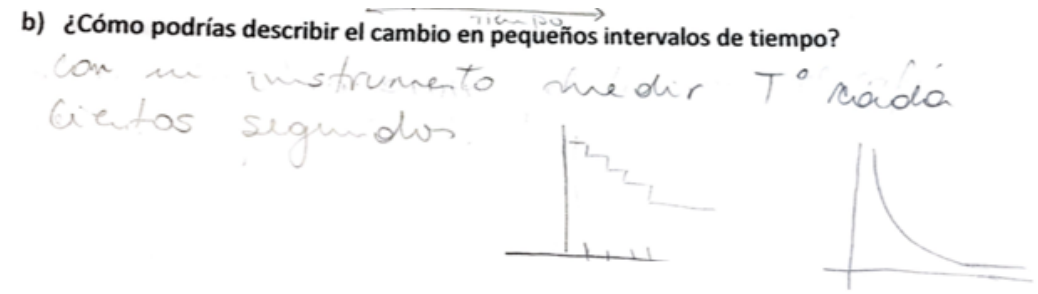


Ilustración 53: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº2 señala que la descripción del cambio lo realizaría midiendo cuanto cambio en un tiempo, utiliza además la gráfica utilizando el tiempo no como un continuo, sino como un gráfico de barras.

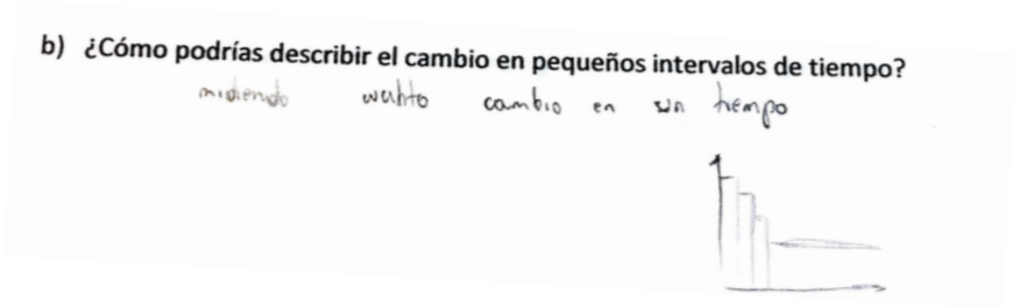


Ilustración 54: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº 9 utiliza el gráfico como argumento para describir el cambio, pero este gráfico esta construido a partir de una curva continua, donde sólo está graduado el eje X, pero no valorizado, ni tampoco se identifican las variables de cada eje.

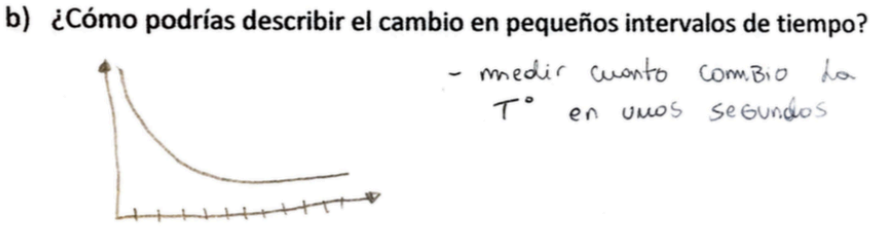


Ilustración 55: Respuesta estudiante nº9: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº8 utiliza el gráfico como argumento para describir el cambio, construido a partir de una curva continua, donde gradúa y valoriza ambos ejes e identificando las variables de cada eje.

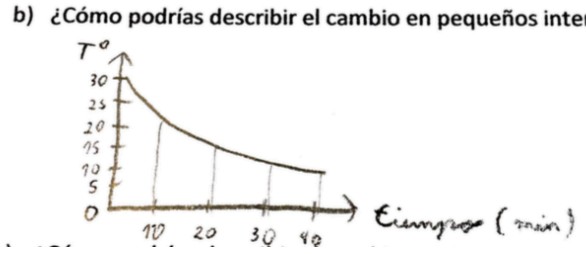


Ilustración 56: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº 3 señala que describiría el cambio con la diferencia de temperaturas entre distintos tiempos.

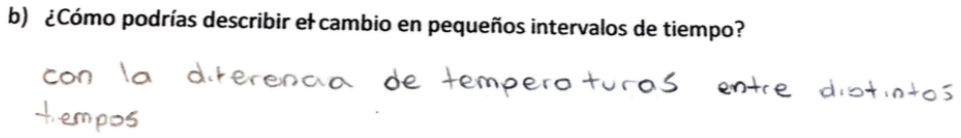


Ilustración 57: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 3, Primer Momento.

TV c): *¿Cómo podrías describir el cambio un tiempo determinado?*

Los estudiantes analizan el cambio desde el argumento de una vecindada en torno a un punto, otros estudiantes señalan que sólo se podría saber la de un instante determinado y otros señalan que se necesita de un tiempo inicial y final para poder obtener mediante dicha diferencia la descripción del cambio solicitado. Unos estudiantes también sostienen que no es posible describir el cambio en un tiempo determinado. La gráfica es utilizada como argumento que sostiene las afirmaciones empleadas.

El estudiante nº 10 señala que buscando la temperatura en un punto y la temperatura en un tiempo más y otro menos, ambos iguales y lo más cercano a la del punto central y buscar la pendiente. Utiliza un gráfico, señalando que en el gráfico la línea punteada representa una aproximación del cambio en el instante.

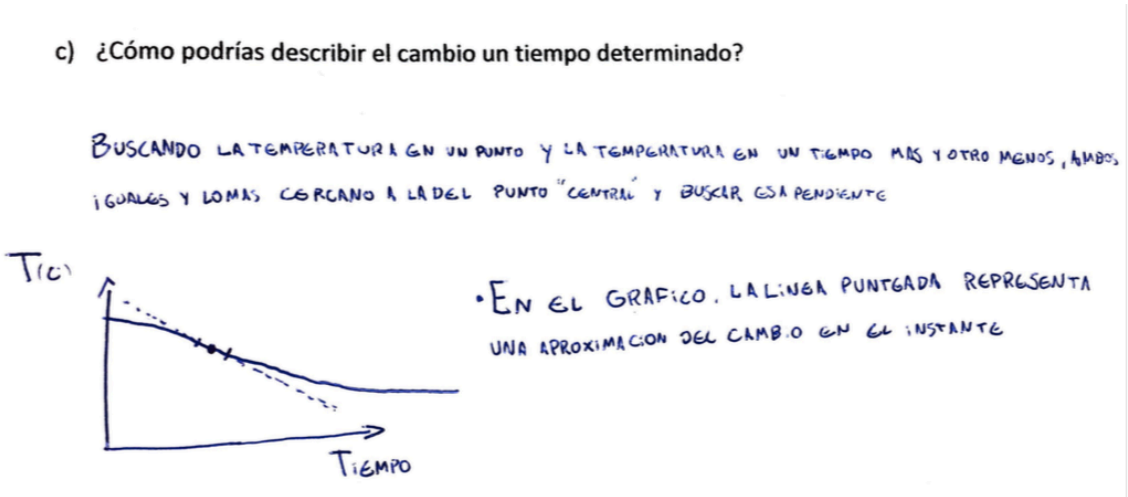


Ilustración 58: Respuesta estudiante nº10: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº 2 sostiene que sólo es posible conocerla en un instante de tiempo.

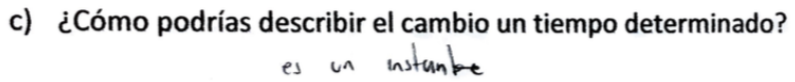


Ilustración 59: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº6 señala que hay un tiempo inicial y uno final. El punto final es restando al inicio y da como resultado o que cambia aquel factor.

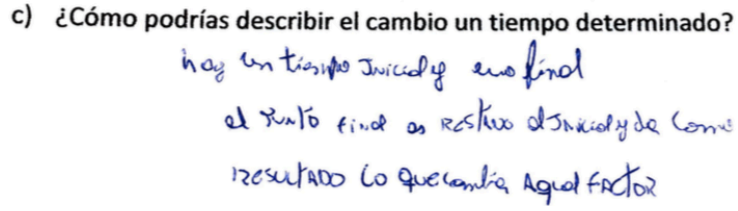


Ilustración 60: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento

El estudiante nº5 sostiene que sólo se puede tomar la temperatura en un momento específico.

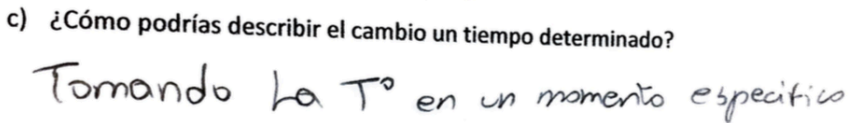


Ilustración 61: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.

El estudiante nº7 señala que no es posible, ya que no hay que comprar.

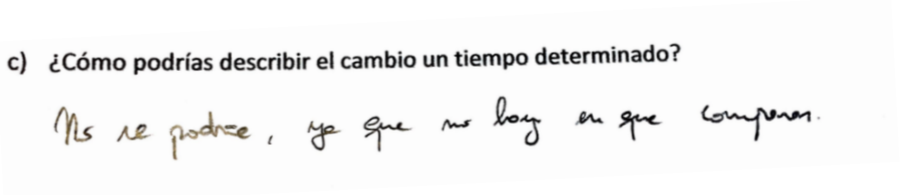


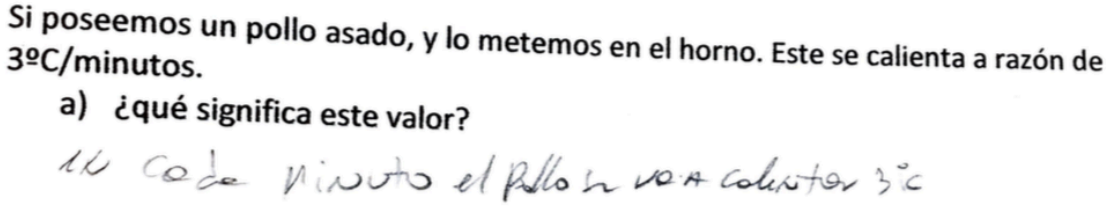
Ilustración 62: Respuesta estudiante nº7: TV c), Situación Variacional 3, Primer Momento.

Situación Variacional 4:

TV a): *Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos. ¿Qué significa este valor?*

Los estudiantes definen el valor de la razón señalando que la temperatura aumenta 3ºC cada minuto. reconocen que el valor 3ºC/minutos corresponde a la pendiente del modelo matemático propuesto.

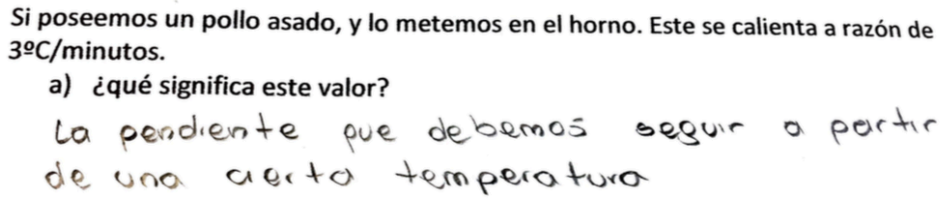
El estudiante nº4 señala que en cada minuto el pollo se va a calentar 3ºC.


Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos.

a) ¿qué significa este valor?

Ilustración 63: Respuesta estudiante nº4: TV a), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº3 señala que el valor 3ºC/minutos corresponde a la pendiente que debe seguir a partir de cierta temperatura.


Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos.

a) ¿qué significa este valor?

La pendiente que debemos seguir a partir de una cierta temperatura

Ilustración 64: Respuesta estudiante nº3: TV a), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV b): *¿Qué significa gráficamente?*

Los estudiantes interpretan la información entregada mediante el uso de la grafica para argumentar sus respuestas. Seis estudiantes al realizar la gráfica parten desde el cero para modelar mediante la misma la situación planteada, dos utilizan la representación gráfica, donde

reconocen la existencia de una temperatura mayor a cero como medida inicial de la gráfica. Evidenciándose una problemática presente al considerar la temperatura inicial del pollo. Otros recurren a una estrategia verbal para encontrar el significado gráfico. Reconocen que la situación planteada tiende a ser lineal.

El estudiante nº4 representa el plano cartesiano, ubica las variables en los ejes pero señala que la representación gráfica puede variar ya que no se sabe si estaba congelado o ya tenía una temperatura inicial el pollo, por lo que no realiza la gráfica.

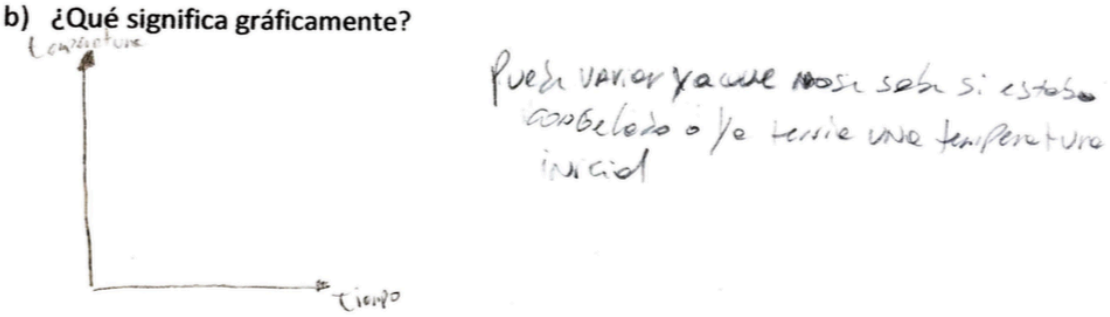


Ilustración 65: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº3 recurre a una estrategia verbal para encontrar el significado grafico, argumentando que la variación en grados por cada minuto.

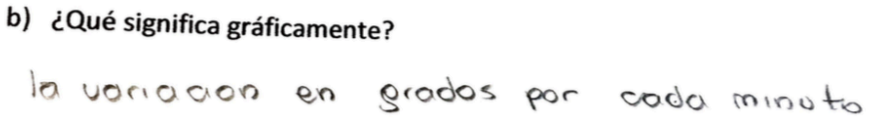


Ilustración 66: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº8 realiza una gráfica lineal de la modelación planteada, asumiendo que la temperatura del pollo es de 0ºC.

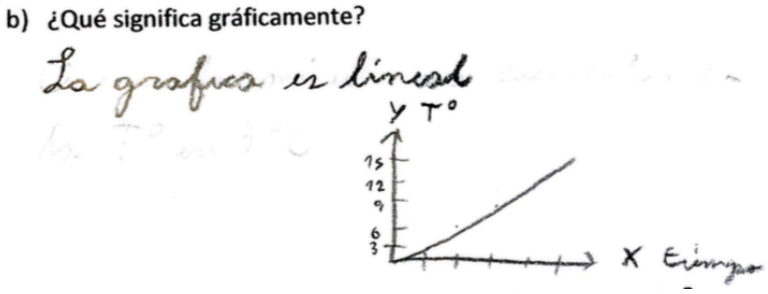


Ilustración 67: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº 6 señala que la gráfica es lineal y representa la temperatura inicial del pollo como un valor x.

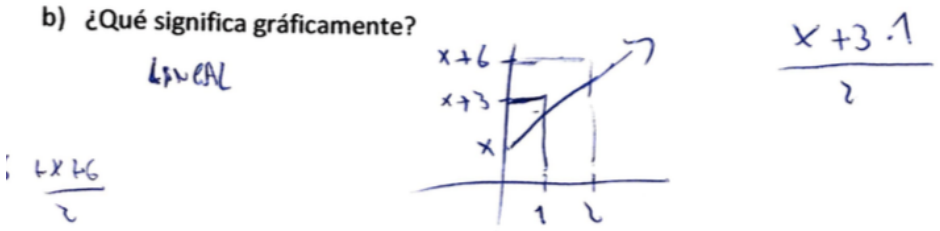


Ilustración 68: Respuesta estudiante nº6: TV b), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV c): *¿Cuál es el valor de la pendiente de la gráfica en un punto?*

Los estudiantes calculan que la pendiente es 3, otros señalan además que es necesaria la información respecto de dos puntos. Aplican el modelo algebraico $y = 3x + t_i$ o $y = mx + n$.

El estudiante nº4 señala que la respuesta es pendiente 3.

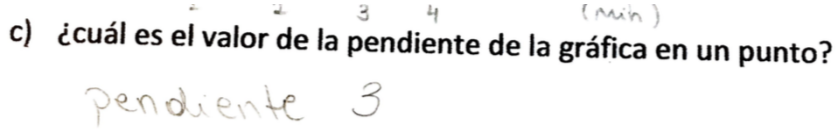


Ilustración 69: Respuesta estudiante nº4: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº 2 identifica que el valor de la pendiente corresponde al modelo algebraico $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

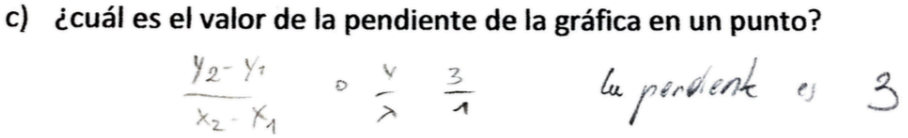


Ilustración 70: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº5 aplica el modelo algebraico $y = mx + n$ y reconoce que la pendiente es 3.

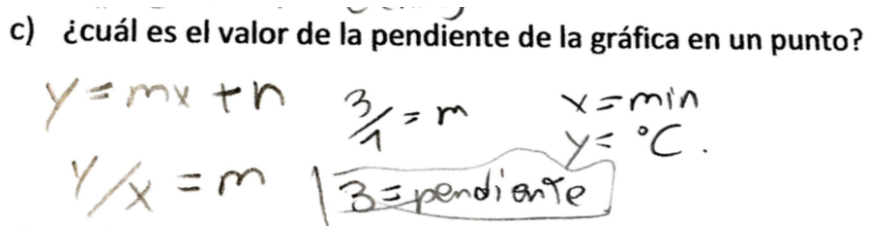


Ilustración 71: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº8 reconoce el modelo algebraico $y = mx + n$, pero además utiliza la gráfica como argumento de su respuesta, asumiendo que el pollo tiene una temperatura inicial de 0ºC.

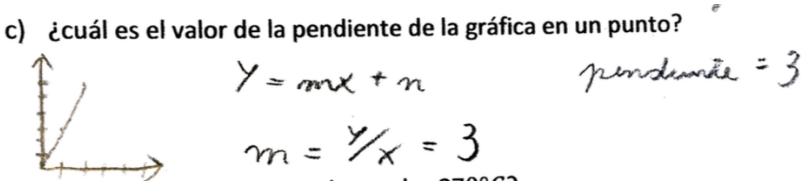


Ilustración 72: Respuesta estudiante nº8: TV c), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV d): *¿A los cuantos minutos alcanza los 270°C?*

Los estudiantes identifican e infieren que este tiempo dependerá de la temperatura inicial del pollo, suponen además que se demorara 90 minutos si su temperatura inicial es de 0ºC. Aplican la regla de tres para determinar que serán 90 minutos.

El estudiante nº 10 señala que dependerá de su temperatura inicial.

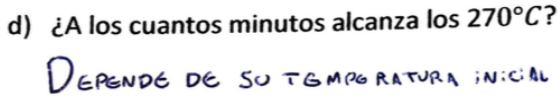


Ilustración 73: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº 2 señala que será de 90 minutos, si a temperatura inicial es 0ºC.

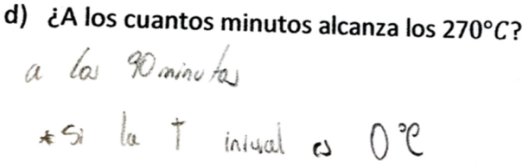


Ilustración 74: Respuesta estudiante nº2: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº9 señala que considera que la temperatura del pollo es 0ºC ya que de otra manera no se podría determinar.

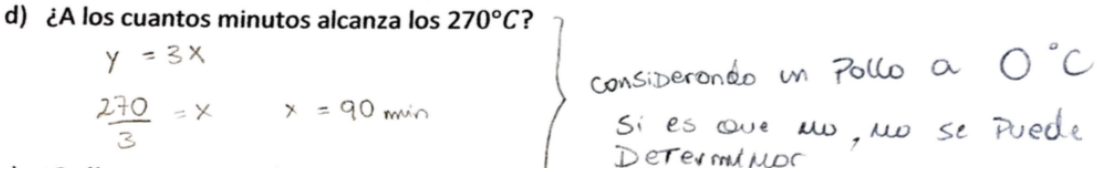


Ilustración 75: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV e): *¿Cuál es su temperatura a los 30 minutos?*

Los estudiantes calculan que en 30 minutos la temperatura será de 90ºC más la temperatura inicial del pollo. También señalan que sería 90ºC si la temperatura inicial del pollo fuera 0ºC.

El estudiante nº7 señala que será 90ºC, si la temperatura inicial fuera 0ºC.

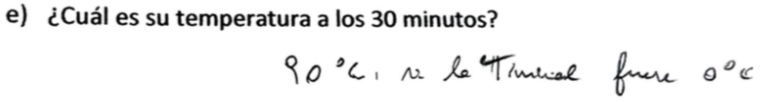


Ilustración 76: Respuesta estudiante nº7: TV e), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº1 señala que será 90ºC más de la temperatura inicial.

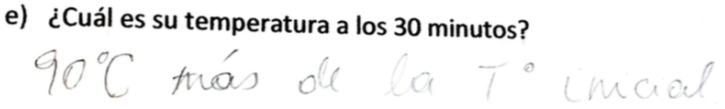


Ilustración 77: Respuesta estudiante nº1: TV e), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV f): *¿Qué sucede con la gráfica cuando el pollo lo sacamos del horno y se enfría a razón de 3ºC/minuto?*

Los estudiantes argumentan su respuesta desde la gráfica, indicando que su inclinación será hacia abajo y con la misma pendiente que cuando aumentaba, pero con valor negativo. También sus argumentos son del tipo explicativas que disminuirá hasta un punto de equilibrio, o será decreciente en la misma razón en la cual aumentaba.

El estudiante nº5 señala que decrece en la misma razón que aumenta.

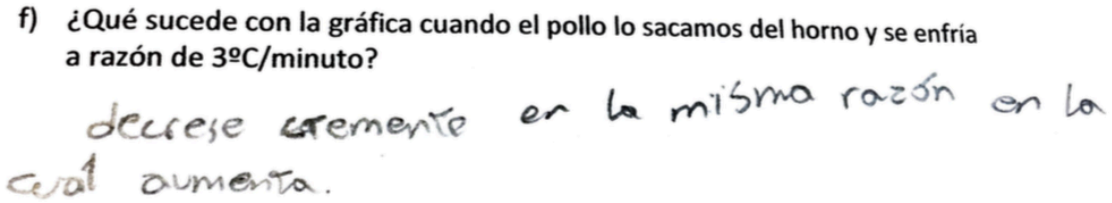


Ilustración 78: Respuesta estudiante nº5: TV f), Situación Variacional 4, Primer Momento.

El estudiante nº10 señala se inclina hacia abajo, teniendo pendiente negativa, además utiliza como argumento una representación gráfica.

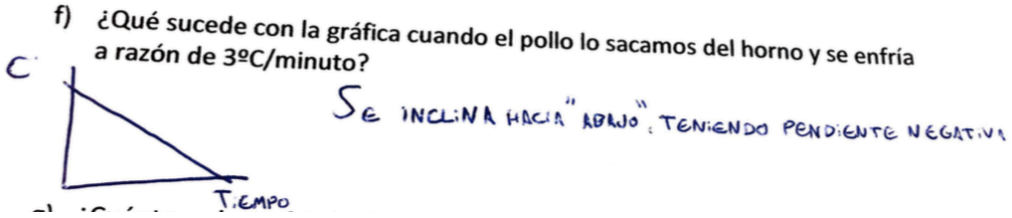


Ilustración 79: Respuesta estudiante nº10 TV f), Situación Variacional 4, Primer Momento.

TV g): *¿Cuánto se ha enfriado después de 7 minutos?*

Los estudiantes señalan que el cálculo después de 7 minutos corresponde a 21ºC.

El estudiante nº8 utiliza una proporcionalidad directa para justificar dicho cálculo.

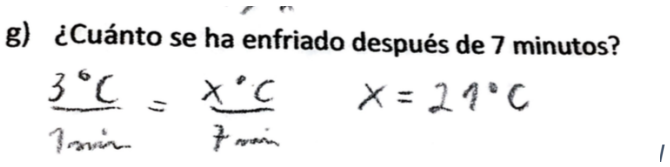


Ilustración 80: Respuesta estudiante nº8: TV g), Situación Variacional 4, Primer Momento.

En el segundo momento de la Situación de Aprendizaje podemos encontrar las siguientes respuestas por parte de los estudiantes:

Situación Variacional 1:

TV a): *Supón que posees una bebida en lata, tienes mucha sed, pero esta está tibia. Decides colocar la bebida en el refrigerador para enfriarla. ¿Cuánto tiempo debes esperar para poder tomar la lata de bebida fría?*

Los estudiantes infieren respecto del tiempo que deben esperar para poder beber la lata fría de bebida que dependerá de las distintas variables que influyen en ello, como la temperatura a la cual se encuentra la bebida, la razón a la que enfría el refrigerador, de la potencia del mismo. Justifican desde su lenguaje natural.

El estudiante nº 6 señala que depende de la temperatura de la bebida y de como enfría el refrigerador.

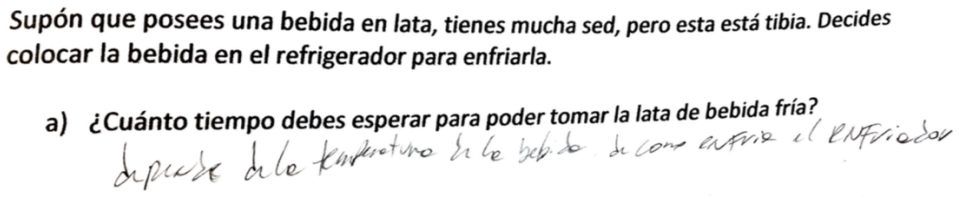


Ilustración 81: Respuesta estudiante nº6: TV a), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV b): *¿Cómo sería la curva que representa el enfriamiento de la lata de bebida a través del tiempo en el plano cartesiano?*

Los estudiantes argumentan desde la representación gráfica de la curva en el plano cartesiano.

El estudiante nº1 realiza una representación gráfica, modelando la situación propuesta mediante una curva, identificando las variables y graduando los ejes.

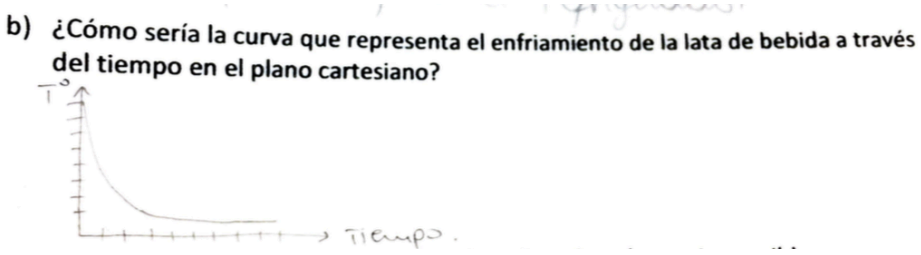


Ilustración 82: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº2 realiza una representación gráfica, modelando la situación propuesta mediante una curva, pero no identifica ni las variables, ni gradúa los ejes.

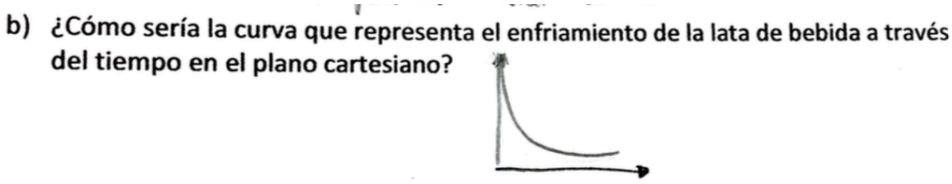


Ilustración 83: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV c): *Realiza nuevamente esta curva sólo utilizando palitos, lo más precisa posible. ¿Cuál es la posición más conveniente al colocar los palitos?*

Los estudiantes examinan la situación planteada y proponen las graficas construidas utilizando los palitos como herramienta para trazar la curva.

El estudiante nº6 construye la siguiente gráfica:

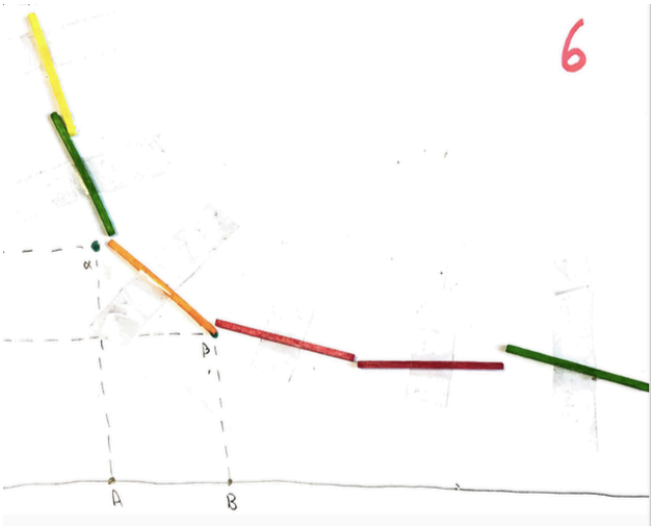


Ilustración 84: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 5 construye la siguiente gráfica:

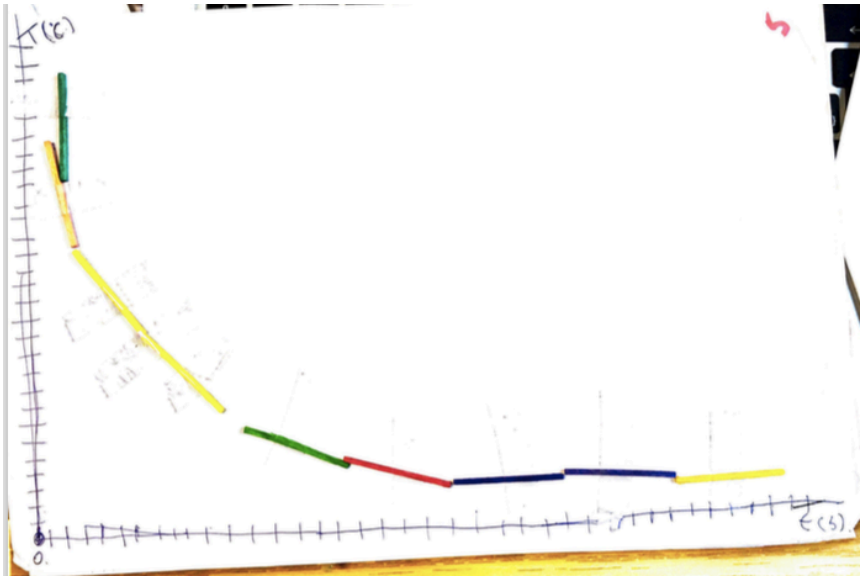


Ilustración 85: Respuesta estudiante nº5: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº3 construye la siguiente gráfica:

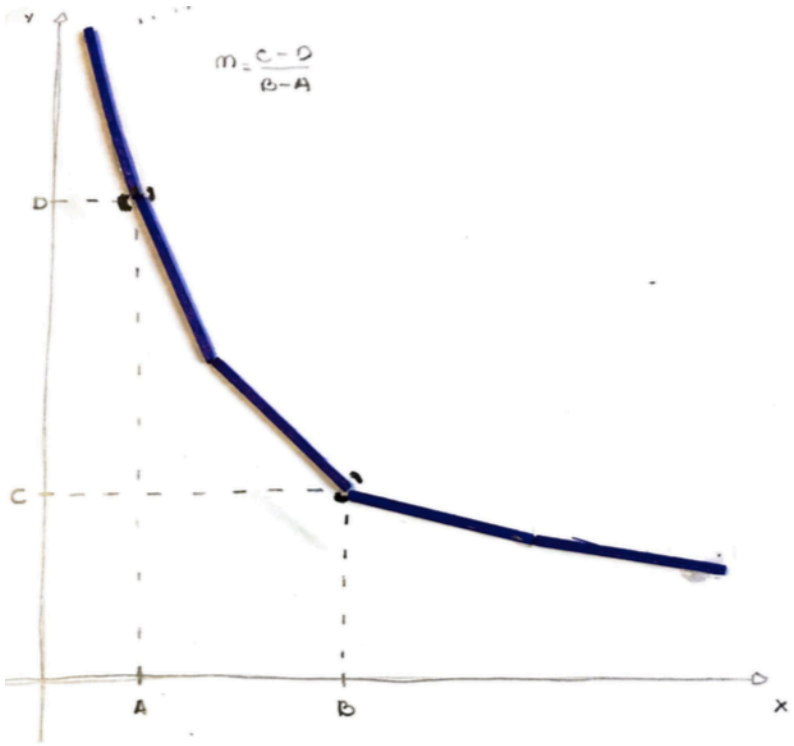


Ilustración 86: Respuesta estudiante nº3: TV c), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV d): *¿Qué representa el palito en esta situación?*

Los estudiantes utilizan argumentos que construyen a partir de la representación realizada con los palitos, identificando que corresponde a la variación de la temperatura en el tiempo, como esta disminuye en el tiempo. Señalan que corresponde a la variación de temperaturas en un intervalo de tiempo delta y en un tiempo determinado, además que el palito corresponde a una aproximación del cambio y que esté representa a la pendiente.

El estudiante nº3 señala que corresponde al delta de la temperatura en intervalos de tiempo.

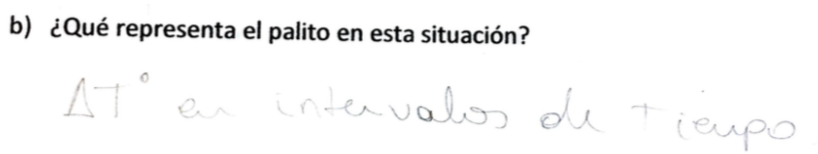


Ilustración 87: Respuesta estudiante nº3: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 4 señala que es la variación de temperatura en un determinado tiempo.

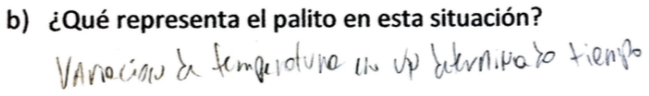


Ilustración 88: Respuesta estudiante nº4: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 5 señala que corresponde a la disminución de la temperatura en el tiempo.

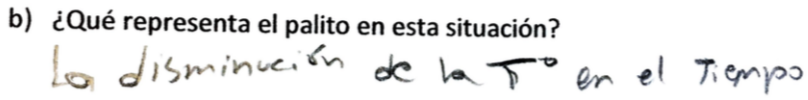


Ilustración 89: Respuesta estudiante nº5: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 8 señala que corresponde al cambio de temperatura.

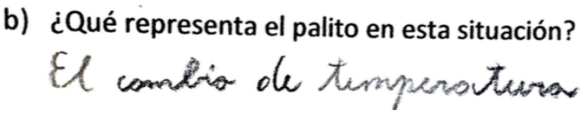


Ilustración 90: Respuesta estudiante nº8 TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 9 señala que corresponde a la pendiente

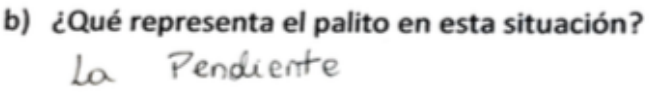


Ilustración 91: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 10 señala que el palito representa una aproximación del cambio.

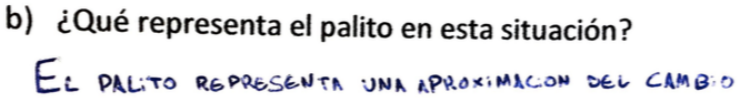


Ilustración 92: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV e): *Elije tres palitos cualesquiera, (y márcalos en la hoja) ¿cuál es la pendiente de estos palitos?*

Los estudiantes al seleccionan tres palitos cualesquiera algunos elijen aquellos donde la pendiente es cero, otros seleccionan palitos en distintas posiciones y argumentan que la pendiente tiende a disminuir, pero no es posible calcular el valor exacto, porque este dependerá del sistema de referencia que se tenga, otros estudiantes valorizan los palitos y realizan un cálculo basados en esa valorización. Realizan un dibujo o bosquejo de los palitos seleccionados, permitiéndoles representan y argumentar a través de esté sobre la pendiente de estos palitos, estos dibujos son representados sin el plano cartesiano y con el plano cartesiano. Un solo estudiante deja la respuesta en blanco.

El estudiante nº 1 bosqueja los palitos seleccionados con pendiente 0.

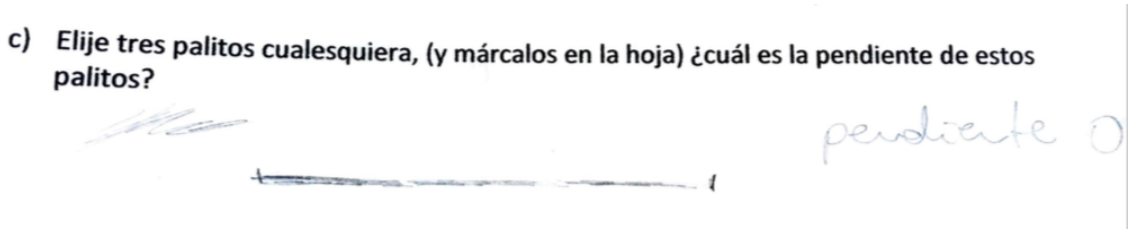


Ilustración 93: Respuesta estudiante nº1: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 5 bosqueja mediante un dibujo los palitos seleccionados y argumenta que la pendiente tiende a disminuir, pero no es posible calcular un valor exacto, porque no este dependería de su sistema de referencia.

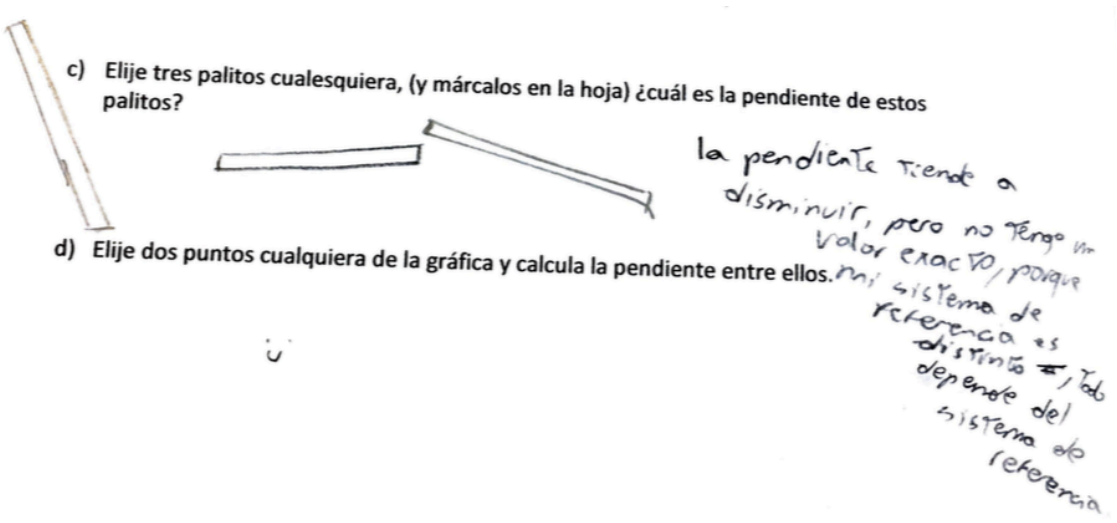


Ilustración 94: Respuesta estudiante nº5: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 8 bosqueja los palitos seleccionados y los valoriza, para a partir de dicha valorización calcular un valor para la pendiente.

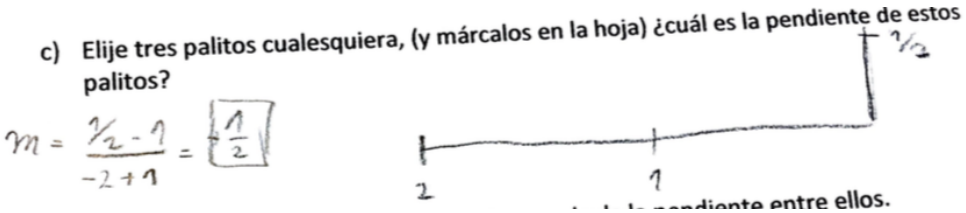


Ilustración 95: Respuesta estudiante nº8: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 9 bosqueja los palitos seleccionados y justifica que si la pendiente es negativa disminuirá la temperatura y que el valor de la pendiente dependerá de cual sea su sistema de referencia.

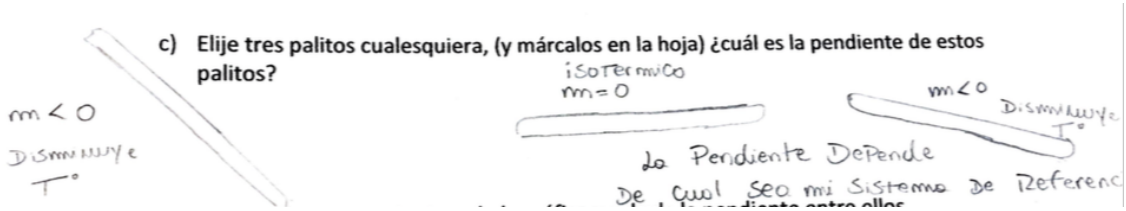


Ilustración 96: Respuesta estudiante nº9: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

El estudiante nº 10 realiza una representación en el plano cartesiano de los palitos seleccionados y realiza sus argumentos a partir de la grafica construida señalando que la pendiente de los palitos 1 y 2 es negativa, pero que 1 representa un mayor cambio que 2, y que el palito 3 su pendiente es 0, por lo que no hay cambio.

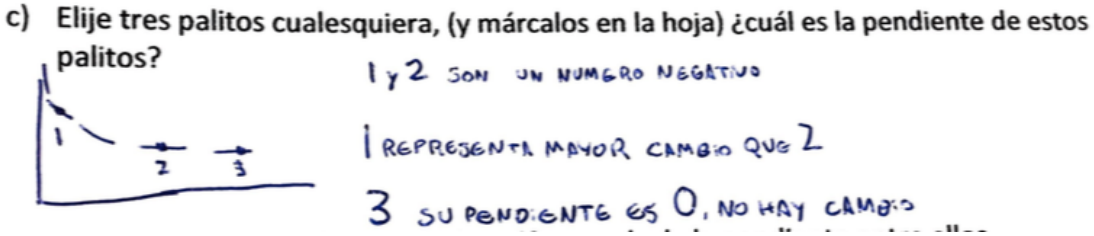


Ilustración 97: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

TV f): *Elije dos puntos cualquiera de la gráfica y calcula la pendiente entre ellos.*

Los estudiantes seleccionan dos palitos cualesquiera señalan que es necesario valorizar dichos puntos para poder realizar el cálculo seleccionado, otros estudiantes representan el valor de los puntos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y representan el cálculo solicitado con la fórmula de la pendiente entre los puntos.

El estudiante nº10 representa el valor de los puntos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y representa el cálculo solicitado mediante la fórmula de la pendiente.

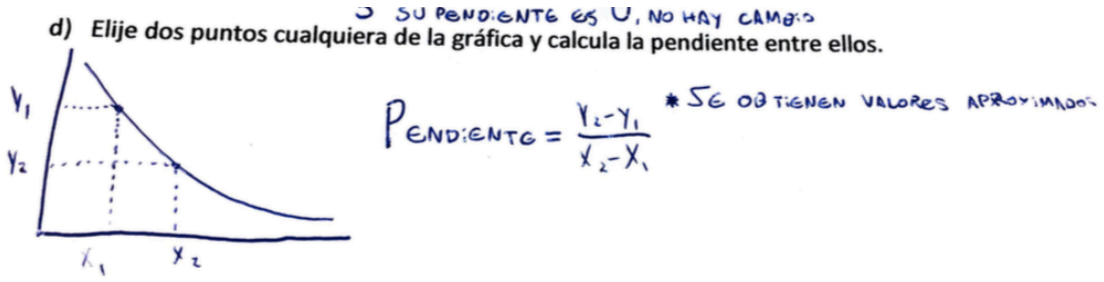


Ilustración 98: Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 1, Segundo Momento.

Situación Variacional 2:

TV a): *¿Qué pasa con la pendiente a medida que dejo uno de los puntos fijos y comienzo acercar el otro?*

Los estudiantes argumentan con frases en lenguaje natural como al acercarse mucho van a tener la misma pendiente, que el valor de la pendiente dependerá, ya que el valor absoluto puede aumentar o disminuir, dependiendo de cual palito acerquemos al otro; también señalan que si se acerca hasta quedar paralelo al eje X o Y se pendiente sería 0 e ∞ respectivamente, este argumento lo representan del apoyo de la gráfica en el plano cartesiano.

El estudiante nº2 señala que palitos tendrán la misma pendiente.

Ilustración 99: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº3 señala que el valor de la pendiente dependerá, pues su valor absoluto puede aumentar o disminuir dependiendo de que punto acercamos al otro.

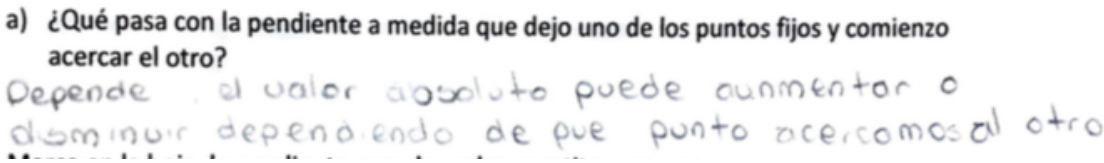


Ilustración 100: Respuesta estudiante nº3: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº1 señala que tiende a aumentar o disminuir, y apoya su argumento verbal apoyado de la una representación gráfica de lo que sucede con los palitos en distintos momentos del movimiento.

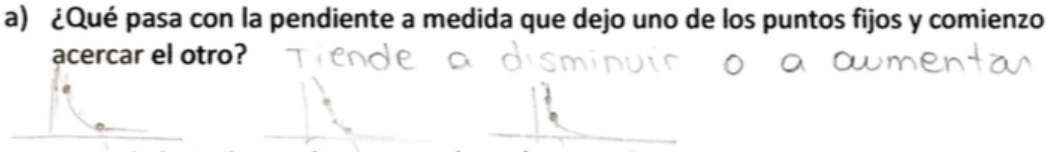


Ilustración 101: Respuesta estudiante nº1: TV a), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

TV b): Marca en la hoja, la pendiente cuando ambos puntitos son uno. ¿Qué significa acercar un palito al otro fijo, en el problema de la lata de bebida?

Los estudiantes señalan que cuando se cercan ambos puntitos la recta secante pasa a ser tangente, apoyan esta justificación desde el argumento gráfico de lo que sucede en distintos instantes con los puntitos seleccionados. Otro argumento que emerge del tipo lingüístico es que la derivada, cuando los la distancia entre dos puntos se vuelve 0, se describe la derivada de la recta.

El estudiante nº2 señala cuando los dos puntos se van juntando hasta ser una, ya que va a ser recta secante pasa a recta tangente y apoya su justificación desde el argumento de la construcción de sus sucesivas gráficas.

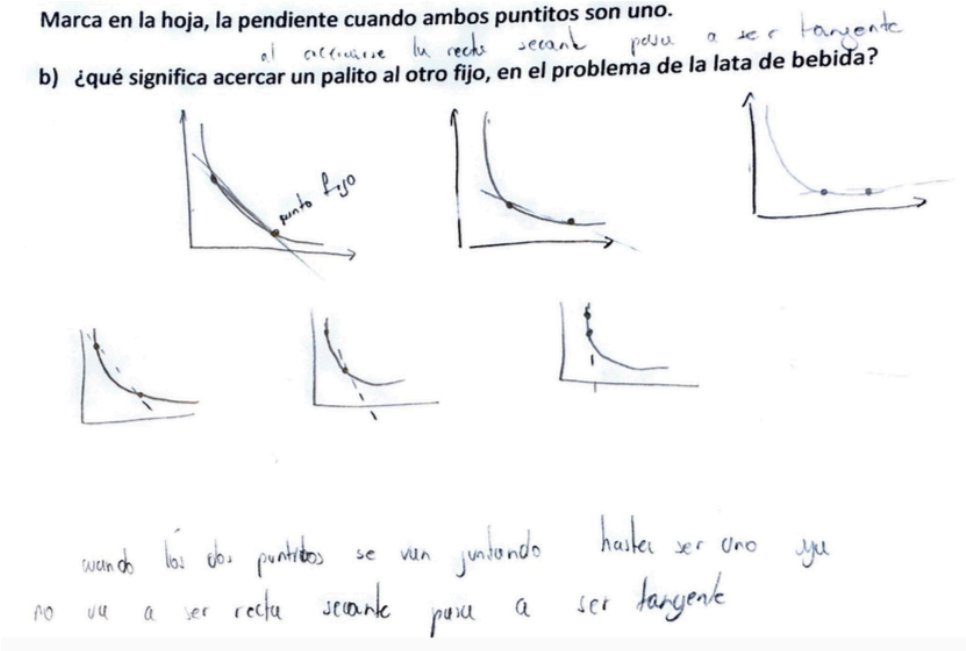


Ilustración 102: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº3 señala que la recta secante se vuelve tangente y apoya su justificación desde el argumento de la construcción de sus sucesivas gráficas.

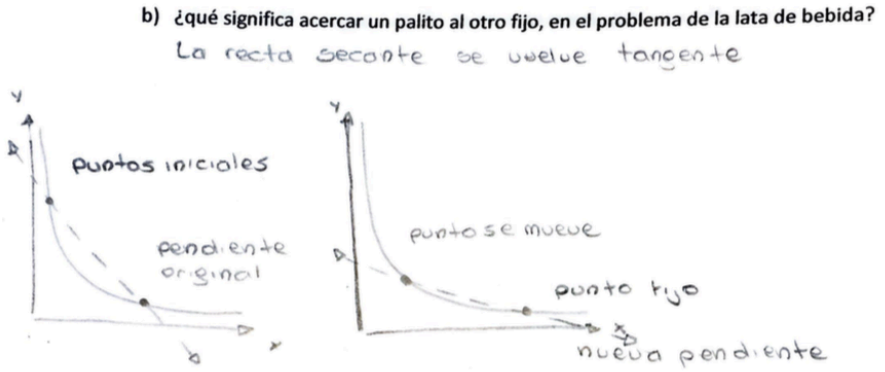


Ilustración 103: Respuesta estudiante nº3: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº4 señala que se vuelve recta tangente y apoya su justificación desde el argumento de la construcción de sus sucesivas gráficas.

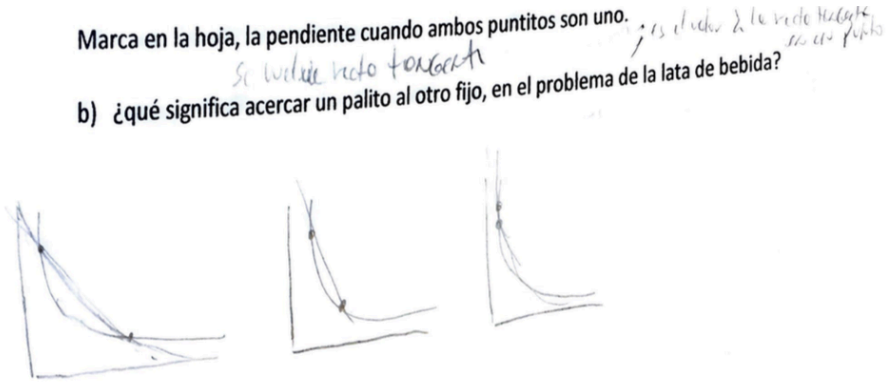


Ilustración 104: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº6 responde por medio del argumento de la construcción de sus sucesivas gráficas.

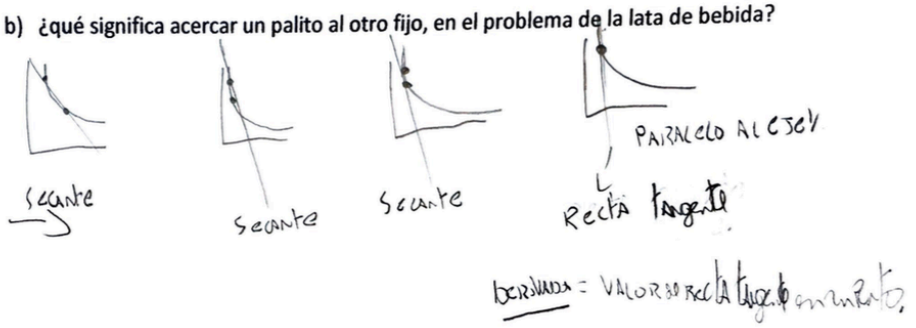


Ilustración 105: Respuesta estudiante nº6: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº7 señala que la recta se vuelve tangente a la curva, cuando los la distancia entre dos puntos se vuelve 0, se describe la derivada de la recta.

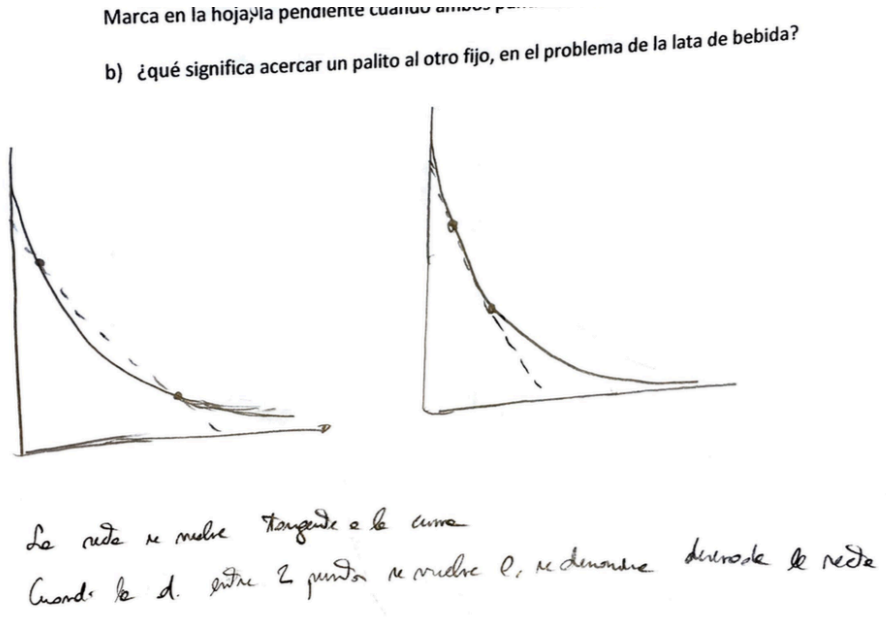


Ilustración 106: Respuesta estudiante nº7: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

El estudiante nº8 señala cuando los puntos se vuelven uno, pasa de una recta secante a una recta tangente.

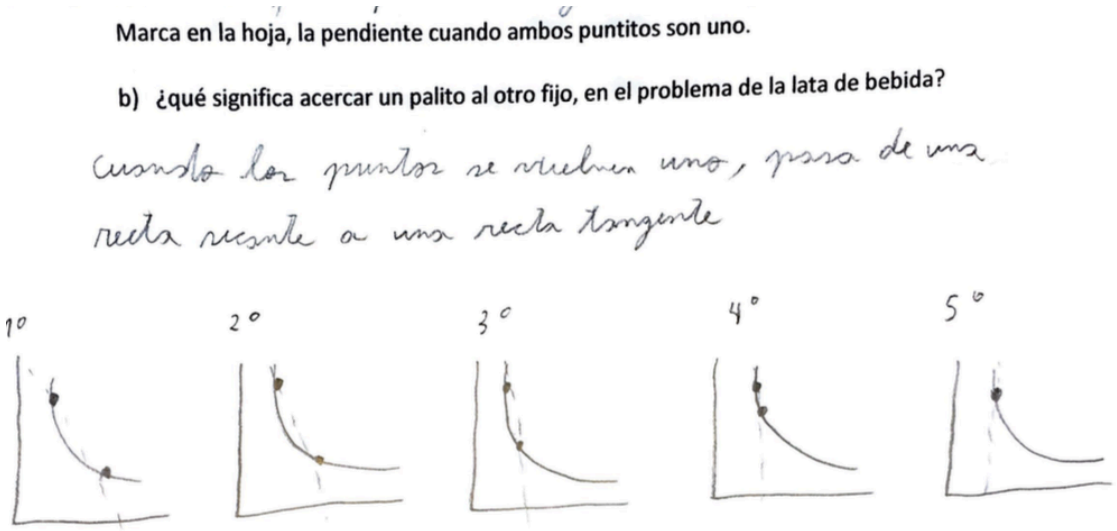


Ilustración 107: Respuesta estudiante nº8: TV b), Situación Variacional 2, Segundo Momento.

En el tercer momento de la Situación de Aprendizaje podemos encontrar las siguientes respuestas por parte de los estudiantes:

Situación Variacional 1:

TV a): *Tienes una taza de café, y este se encuentra a* $80°C$*, la temperatura ambiente del lugar donde te encuentras es de* $24°C$*, cuando transcurrieron 4 minutos desde que se sirvió, la temperatura del café es de* $68°C$*. A los 15 minutos de servido el café se encuentra a los* $48°C$*. Esta situación se puede observar en la siguiente gráfica:*

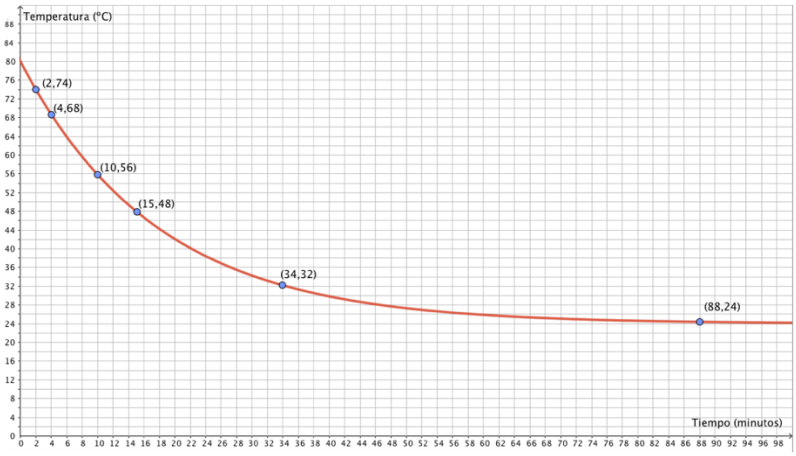


Ilustración 108: Gráfica propuesta para Situación Variacional 1, Tercer Momento.

¿Cuánto disminuyo la temperatura entre el minuto 2 y 15?

Los estudiantes identifican que entre los minutos 2 y 15 la temperatura disminuyo 26ºC, identifican la temperatura en los puntos 2 y 15 y realizan la diferencia mediante la operación resta y no realizan ningún argumento gráfico para responder a la pregunta.

El estudiante nº6 señala que el promedio de la variación fue de 26ºC.

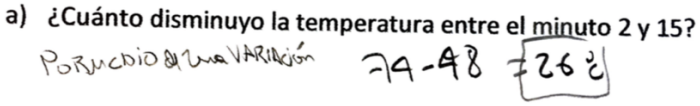


Ilustración 109: Respuesta estudiante nº6: TV a), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV b): *¿Cuánto tiempo tardo en ello?*

Los estudiantes calculan el tiempo que tarda en disminuir 26ºC corresponde a 13 minutos, asociando la disminución con la resta de los tiempos.

El estudiante nº4 señala que el delta tiempo es igual a 13 minutos.

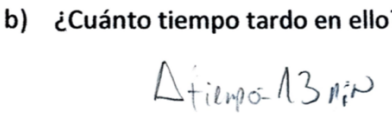


Ilustración 110: Respuesta estudiante nº4: TV b), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV c): *¿Cuál fue la variación en ese periodo?*

Los estudiantes asociaran la variación en este periodo con el cálculo de la pendiente de dicho periodo, asociando la razón entre temperatura y tiempo $\frac{Temperatura}{Tiempo} = \frac{ºC}{minutos} = \frac{variación\ en\ eje\ Y}{variación\ en\ eje\ X} = \frac{26ºC}{13\ min} = 2ºC/min.$

El estudiante nº2 reconoce que la variación en ese periodo corresponde a la razón entre $\frac{Temperatura}{Tiempo} = \frac{ºC}{minutos}$ y que esta es 2ºC.

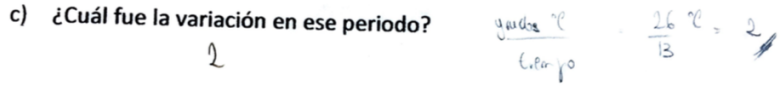


Ilustración 111: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

El estudiante nº6 reconoce que la variación en ese periodo corresponde al valor de la pendiente

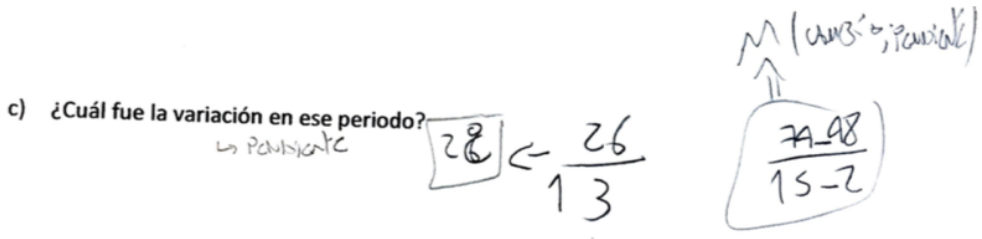


Ilustración 112:Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV d): *Elije dos puntos de la gráfica, coloca un palito en cada punto. ¿Cuál es la variación entre ambos puntos?*

Los estudiantes seleccionan puntos pertenecientes a la gráfica propuesta y realizan los cálculos para determinar el valor de la variación entre ambos puntos.

El estudiante nº8 selecciona dos puntos y calcula la variación entre ambos puntos.

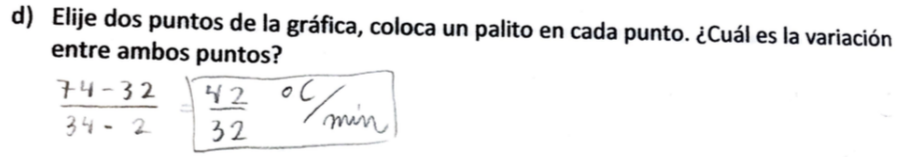


Ilustración 113: Respuesta estudiante nº8: TV d), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

El estudiante nº7 selecciona dos puntos y calcula la variación entre dichos puntos.

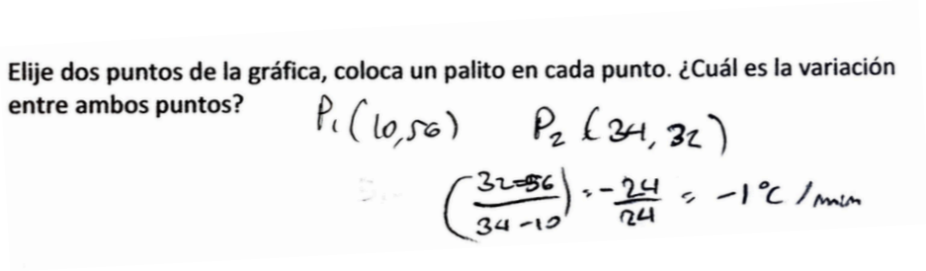


Ilustración 114: Respuesta estudiante nº7: TV d), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV e): *Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?*

Los estudiantes utilizan argumentos lingüísticos para señalar que la variación a medida que acerco los palitos disminuye o aumenta dependiendo de que punto mantenga fijo, especificando que se obtiene una pendiente más pequeña si se mueve el punto hacia el eje Y.

El estudiante nº 8 señala que la variación aumenta o disminuye dependiendo de que punto mantenga fijo y si al final son paralelas al eje X o Y.

e) **Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?**

Aumenta o disminuye dependiendo de que punto mantengo fijo y si al final son paralelos al eje X o Y

Ilustración 115: Respuesta estudiante nº8: TV e), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

El estudiante 10 señala que se obtiene una pendiente más pequeña si se mueve hacia el eje Y.

e) **Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?**

SE OBTIENE UNA PENDIENTE MAS PEQUEÑA SI SE MUEVE EL PUNTO HACIA EL EJE Y

Ilustración 116: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV f): *¿Cuál es el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan?*

Los estudiantes estiman que el valor de la variación cuando ambos palitos se juntos tiende a estar partido por cero, especifican además que si se juntan y son paralelos al eje X la variación es de 0ºC/min. Unos estudiantes señalan que, si es paralela al eje Y, la variación también es 0ºC/min, y manifiestan que tiende a expresarse como 0/0 lo que se indefine, pero valorizan unos puntos, realizan los cálculos, emanando que existe una situación problemática en este punto. Dos estudiantes no responden a la pregunta.

El Estudiante nº8 señala que su están juntas y paralelas al eje X es 0ªC/min y su es paralela al eje Y, también es 0ºC/min.

f) **¿Cuál es el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan?**

si estan junta y paralelo al eje X, es 0°C/min y si es paralela al eje Y, tambien es 0°C/min

Ilustración 117: Respuesta estudiante nº8: TV f), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

EL Estudiante nº10 señala que tiende a expresarse como 0/0 lo que se indefine, pero selecciona dos puntos y realiza los cálculos correspondientes con el valor de dichos puntos.

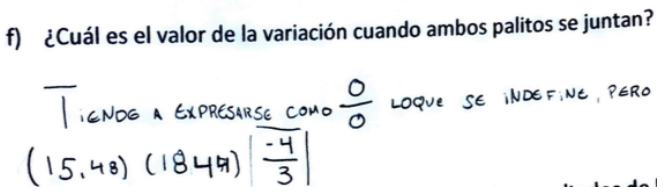


Ilustración 118: Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

TV g): *Si comparo el resultado de la pregunta d), con los resultados de la pregunta f) ¿qué obtengo?*

Los estudiantes señalan que mientras más cerca o lejos esta el punto fijo, la variación aumenta o disminuye, señalando además que se obtiene la pendiente. Cinco estudiantes no contestan la pregunta.

Estudiante nº8 señala que mientras más cerca o lejos esta el punto del punto fijo, la variación aumenta o disminuye.

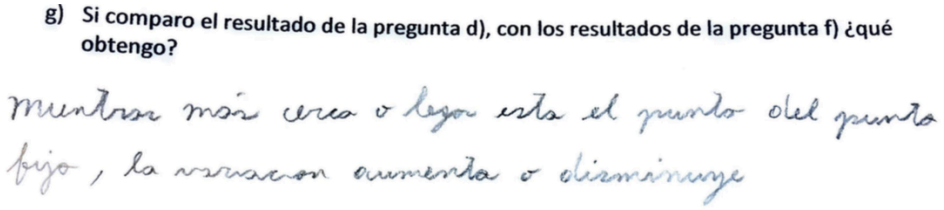


Ilustración 119:Respuesta estudiante nº8: TV g), Situación Variacional 1, Tercer Momento.

Situación Variacional 2:

TV a): *Al observar la siguiente gráfica:*

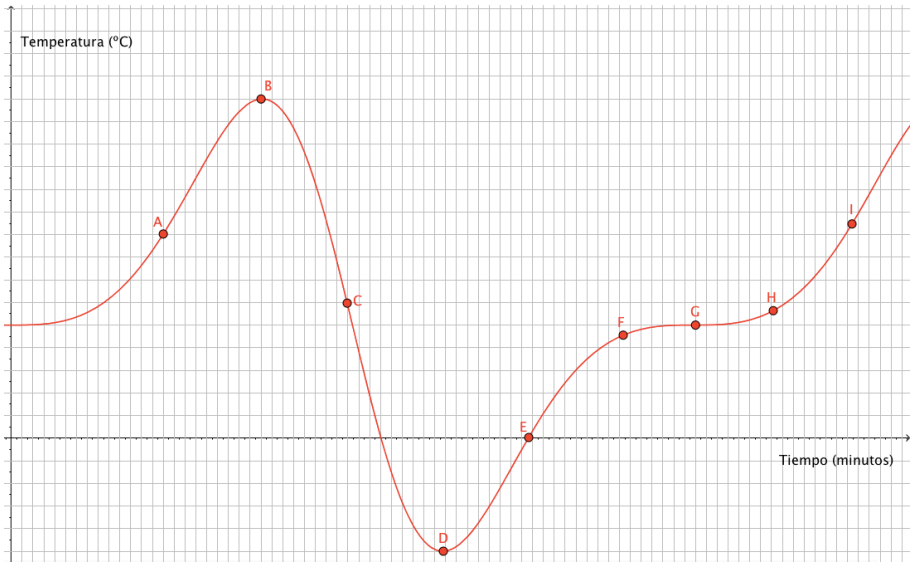


Ilustración 120: Gráfica propuesta para Situación Variacional 2, Tercer Momento.

¿cómo será la situación que está vinculada con ella?

Los estudiantes proponen y producen los siguientes ejemplos relacionados con la situación planteada, un auto se calienta y luego se enfría muy rápido, se vuelve a calentar, una bebida se calienta luego se enfría y luego se vuelve a calentar, esta ultima situación señalan que se puede aplicar a cualquier líquido, o puede representar un cambio en la temperatura que sube, baja y sube.

El estudiante nº2 señala que corresponde a una taza de café que se calienta luego se enfría y luego se vuelve a calentar, o un líquido cualquiera.

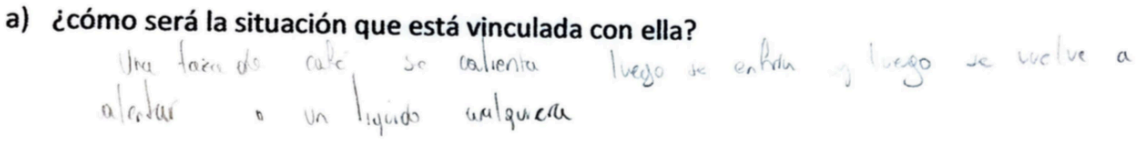


Ilustración 121: Respuesta estudiante nº2: TV a), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

TV b): *¿Cuál es la temperatura inicial del móvil?*

Los estudiantes observan y conjeturan que la temperatura inicial del móvil es mayor que cero o que es igual a la del punto G.

El estudiante nº1 señala que la temperatura es mayor a cero.

Ilustración 122: Respuesta estudiante nº1: TV b), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

EL Estudiante nº10 señala que la temperatura es igual que en "G".

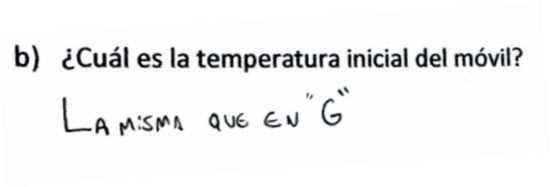


Ilustración 123: Respuesta estudiante nº10: TV b), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

TV c): *¿Dónde es mayor la variación de temperatura, en F o en H?*

Los estudiantes comparan el valor de la temperatura alcanzada en los puntos F y H e identifican que son muy parecidas, pero en H es ligeramente mayor.

El estudiante nº2 señala que la variación corresponde a la pendiente y que en el punto H es ligeramente mayor.

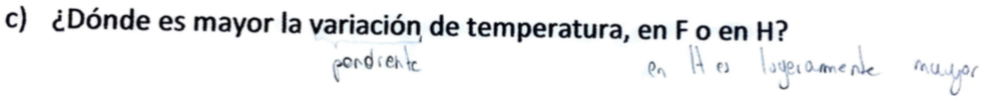


Ilustración 124: Respuesta estudiante nº2: TV c), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

TV d): *Describe lo que sucede entre cada par de punto.*

Los estudiantes señalan que en cada par de puntos varia la pendiente, y que la variación toma distintos valores a lo largo de la gráfica en el plano cartesiano.

Estudiante nº9 señala que varía la pendiente.

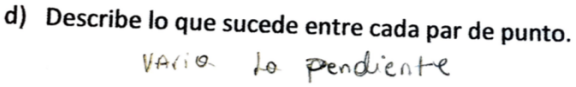


Ilustración 125: Respuesta estudiante nº9: TV d), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

Estudiante nº10 señala que la variación toma distintos valores a lo largo del plano.

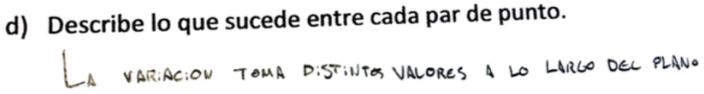


Ilustración 126: Respuesta estudiante nº10: TV d), Situación Variacional 2, Tercer Momento.

Situación Variacional 3:

TV a): *En base a la gráfica de la actividad anterior. ¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?*

Los estudiantes justifican lo que ocurrirá con el fenómeno respecto del tiempo y la temperatura señalando que si es posible predecir lo que ocurrirá pues es una experiencia ya realizada, precisando además que esto dependerá de que tan parecidas sean las condiciones del líquido y que se puede obtener valores cercanos si se obtiene la función que define la temperatura en base a puntos dados.

El estudiante nº4 señala que si ya que ya se aplico el experimento.

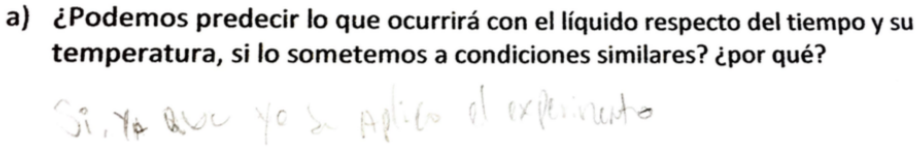


Ilustración 127: Respuesta estudiante nº4: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

El estudiante nº9 señala que depende de que tan parecido sean las condiciones del liquido, si son iguales se puede predecir su comportamiento ya que existen datos que lo comprueban

a) **¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?**

Depende de que tan parecidas sean las condiciones del liquido si son iguales si se puede predecir su comportamiento ya que existen datos que lo comprueban

Ilustración 128: Respuesta estudiante nº9: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

El estudiante nº10 señala que se puede obtener valores cercanos si se obtiene la función que define la temperatura en base a puntos dados.

a) **¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?**

SE PUEDE OBTENER VALORES CERCANOS SI SE OBTIENE LA FUNCION QUE DEFINE LA TEMPERATURA EN BASE A PUNTOS DADOS

Ilustración 129: Respuesta estudiante nº10: TV a), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

TV b): *Si sólo cambiáramos la variable Temperatura por Distancia (metros). ¿qué describiría esta situación?*

Los estudiantes sustituyen la variable solicitada determinando que describiría a la velocidad y describen que la velocidad corresponde a la distancia recorrida partido por tiempo.

El estudiante nº2 realiza un plano cartesiano donde ubica las variables, para apoyar su respuesta.

b) **Si sólo cambiáramos la variable Temperatura por Distancia (metros). ¿qué describiría esta situación?**

Velocidad

Ilustración 130: Respuesta estudiante nº2: TV b), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

TV c): *¿Dónde es mayor la velocidad en B o en C?*

Los estudiantes suponen lo que ocurre en cada punto, en base a las observaciones realizadas para concluir que la mayor velocidad se da en el punto C, pues su pendiente es mayor.

El estudiante nº6 señala que en el punto C, ya que la pendiente es mayor en dicho punto.

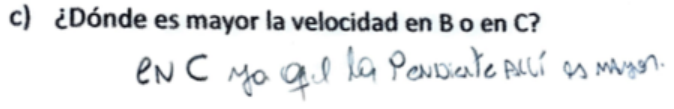


Ilustración 131: Respuesta estudiante nº6: TV c), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

TV d): *Describe dónde aceleraba o desaceleraba el móvil, ¿en A, B o C?*

Los estudiantes en base a la observación de la gráfica presentada describen que en el punto C acelera, y en los puntos B y C desacelera.

El estudiante nº1 señala que acelera en A y desacelera en B y C.

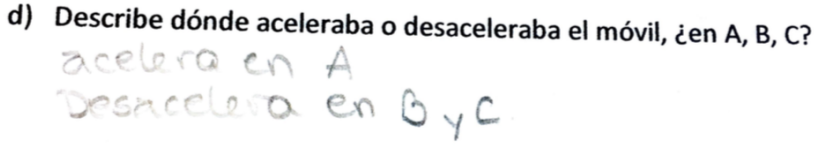


Ilustración 132: Respuesta estudiante nº1: TV d), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

TV e): *¿Qué paso entre F, G y H?*

Los estudiantes conjeturan que en los puntos F, G y H hubo un leve crecimiento en su velocidad, que la velocidad aumenta, especificando que en F y H el móvil acelera y en G su velocidad cambia poco. Los estudiantes nº1, nº2 y nº3 señalan que la velocidad disminuyo.

El estudiante nº10 señala que acelera en F y H, en G su velocidad cambia poco.

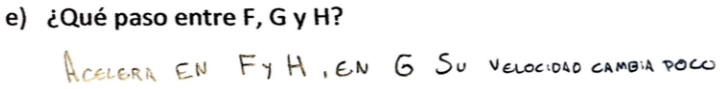


Ilustración 133: Respuesta estudiante nº10: TV e), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

El Estudiante nº5 señala que hubo un leve crecimiento de la velocidad.

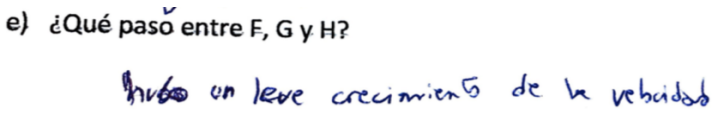


Ilustración 134: Respuesta estudiante nº5: TV e), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

TV f): *En que otra situación, distinta al enfriamiento o calentamiento del agua, ¿podríamos analizar el cambio? ¿cómo?*

Los estudiantes reconocen posibles aplicaciones del modelo anteriormente presentado en los modelos como posición/ tiempo, fuerza/tiempo, el gasto en un mes, al realizar el pago de la luz, eficiencia de una máquina según la temperatura de la misma, midiendo los datos según las variables y graficándolas.

El estudiante nº10 señala que, en la eficiencia de una máquina según la temperatura, midiendo datos según las variables y graficar.

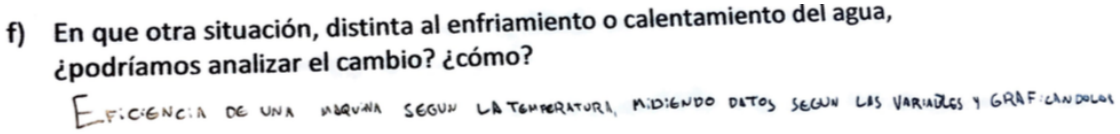


Ilustración 135:Respuesta estudiante nº10: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

El estudiante nº2 señala que en la situación posición /tiempo y fuerza/tiempo se podría analizar el cambio.

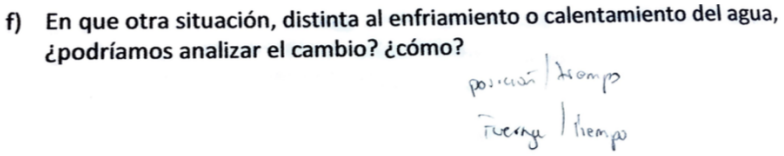


Ilustración 136: Respuesta estudiante nº2: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

El estudiante nº 1 señala que en la situación del como se calcula para pagar la luz en el mes se podría analizar el cambio.

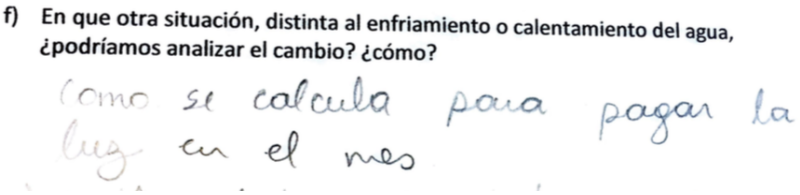


Ilustración 137: Respuesta estudiante nº1: TV f), Situación Variacional 3, Tercer Momento.

5.4. Análisis a Posteriori.

Al construir el análisis a Posteriori al contrastar el Análisis a Priori y la Experimentación evidenciamos que, en el Primer Momento, en la Situación de Variación 1 nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes observaron desde su entorno los cambios que se producen en su cotidiano, identificando variables cuantitativas y cualitativas, dependientes e independientes. Utilizando códigos variaciones en lenguaje natural con tecnicismos matemáticos.

TV b): Los estudiantes describen cuando algo cambia, reconociendo un antes y un después, explorando dos estados, la comparación la realizan utilizando como medidas lo que ellos observan y a través de sus vivencias.

TV c): Los estudiantes explican mediante argumentos variaciones como caracterizar el antes y el después, describiendo el cambio e identificando características comunes. Nombran la gráfica como uno de los recursos que utilizarían para representar el cambio, además de tablas comparativas, líneas de tiempo, e imágenes. Determinan características que son percibidas sensorialmente por ellos.

TV d): Los estudiantes representan el cambio además de identificar distintas formas para representar dicho cambio. Identifican el tiempo como variable independiente y determinan que la gráfica debe estar en función del tiempo, atribuyéndole al eje X el tiempo y al eje Y la variable en estudio.

En la Situación Variacional 2 del Primer momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes seleccionan cual de las alternativas planteadas mejor representa la situación, hallando el patrón de comportamiento que es coherente con la situación en cuestión, desarrollando un análisis global, sin embargo, ninguno de ellos raya las gráficas presentadas.

TV b): Los estudiantes justifican el por qué de la elección realizada identificando máximos y mínimos, comparando los gráficos, por medio de un análisis local hablan de la seriación de los días del mes, desde la variación de los máximos y mínimos, explicando el por qué del patrón de comportamiento que seleccionaron explica la situación de modelación propuesta.

En la Situación Variacional 3 del Primer momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes describen las variables presentes en el fenómeno de cambio planteado, reconociendo dos estados (antes y el después) y reconociendo la existencia de una temperatura ambiente, un estado de equilibrio, la perdida de calor en el tiempo, la medición de este fenómeno y reconocen que la taza en donde se encuentra el café absorbe energía. Elementos que no fueron considerados en el análisis a priori, situados desde su experiencia.

TV b): Los estudiantes describen los cambios que se producen en pequeños intervalos de tiempo, esbozan y representan dicho cambio argumentando desde el uso de la gráfica, emanando lo continuo y por intervalos de tiempo. reconocen la utilización de instrumentos con los cuales podrían medir el cambio en la temperatura de dicho fenómeno. Identifican que en el infinito la temperatura tiende a ser constante, reconociendo que se estabiliza en un punto. Ninguno de los estudiantes utiliza una tabla para describir los cambios en pequeños intervalos de tiempo.

TV c): Los estudiantes analizan la situación planteada y describen la misma para llegar a argumentar el cambio en el tiempo determinado, construyendo la idea de un tiempo muy cercano, de que sólo es posible conocer la de un instante determinado, que es necesario conocer la temperatura en un tiempo antes y después, como también responden que no es posible de determinar. La grafica la utilizan como argumento que sostiene sus afirmaciones.

En la Situación Variacional 4 del Primer momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes definen el significado del valor de la razón de calentamiento del pollo en el horno, señalando que la temperatura aumenta 3ºC cada minuto, reconociendo en este el valor de la pendiente del modelo matemático propuesto desde el cotidiano.

TV b): Los estudiantes interpretan la información entregada mediante el uso de la gráfica pera argumentar sus respuestas, algunos reconocen como temperatura inicial del pollo los 0ºC y otros le atribuyen una temperatura mayor a cero, donde se evidencia una problemática al considerar la temperatura inicial del pollo. Su respuesta es expresada mediante la construcción de una gráfica construida en base a los conocimientos de la función lineal y afín, pero también recurren a argumentos lingüísticos para describir la situación solicitada.

TV c): Los estudiantes infieren acerca del valor de la pendiente, calculando que es 3, aplicando el modelo algebraico $y = 3x + t_i$ o $y = mx + n$.

TV d): Los estudiantes identifican e infieren que el tiempo dependerá de la temperatura inicial del pollo, suponen que demorara 90 minutos si su temperatura inicial es de 0ºC.

TV e): Los estudiantes calculan que en 30 minutos la temperatura será de 90ºC más la temperatura inicial del pollo, infieren que la temperatura final dependerá de su temperatura inicial.

TV f) Los estudiantes argumentan su respuesta desde la gráfica, encontrando un modelo lineal inverso de la situación de modelación planteada, esbozan sus resultados mediante una representación gráfica. Reconocen además la existencia de un punto de equilibrio en la temperatura del pollo, aunque identifican que la razón en la cual disminuye la temperatura es la misma en la cual aumenta.

TV g): Los estudiantes señalan que el cálculo después de los 7 minutos corresponde a 21ºC.

En el Segundo Momento, en la Situación de Variación 1 nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes infieren respecto del tiempo que deberían esperar para poder beber la lata fría de bebida y que este tiempo dependerá de variables como la temperatura a la cual se encuentra la bebida, la razón a la que enfría el refrigerador y la potencia del mismo.

TV b): Los estudiantes argumentan desde la representación gráfica de la curva en el plano cartesiano, algunos identifican las variables en los ejes coordenados como también gradúan los ejes.

TV c): Los estudiantes examinan la situación planteada y proponen las gráficas construidas utilizando los palitos entregados como una herramienta para trazar la curva.

TV d): Los estudiantes utilizan argumentos que construyen a partir de la representación realizada con los palitos, identificando que corresponde a la variación de la temperatura en el tiempo. Señalan el palito corresponde a la variación de temperaturas en un tiempo delta, y en un tiempo determinado. Otra de las representaciones asignada por los estudiantes al palito es que este corresponde a una aproximación del cambio y a la pendiente.

TV e): Los estudiantes seleccionan tres palitos cualesquiera, algunos seleccionan tres palitos con pendiente cero, otros seleccionan palitos en distintas posiciones y argumentan que la pendiente de estos palitos tiende a disminuir, pero no es posible realizar un cálculo exacto, porque esta dependerá del sistema de referencia que se tenga, otros estudiantes valorizan los palitos y

realizan un calculo basados en dicha valorización. Los estudiantes realizan un bosquejo o dibujo de los palitos seleccionados permitiéndoles representar y argumentar a través de esté sobre la pendiente de los palitos; estas representaciones se presentan en un plano cartesiano y fuera de este.

TV f): Algunos estudiantes seleccionan dos palitos cualesquiera señalando que es necesario valorizar dichos puntos para poder realizar los cálculos solicitados. Otros estudiantes representan el valor de los puntos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representando el cálculo por medio de la formula de la pendiente de la recta a la cual pertenecen dichos puntos.

En la Situación Variacional 2 del Segundo Momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes argumentan con frases en lenguaje natural como que al acercarse mucho van a tener la misma pendiente y que este dependerá pues puede aumentar o disminuir, dependiendo de cual de los palitos dejemos fijo y cual acerquemos al otro; también señalan que si el palito se acerca hasta un punto donde queden paralelos al eje X su pendiente será cero y si el palito se acerca hasta un punto donde quede paralelo al eje Y su pendiente no se podrá determinar, este argumento es presentado con el apoyo de las gráficas construidas en el plano cartesiano.

TV b): Los estudiantes argumentan que cuando ambos puntitos comienzan a acercase la recta secante pasa a ser tangente, apoyan esta justificación desde el argumento de lo que sucede en distintos instantes con los puntitos seleccionados. Otro argumento que emerge es del tipo lingüístico con respecto de la derivada, reconociéndose que corresponde al valor de la recta tangente en dicho punto, cuando acerco los puntitos.

En el Tercer Momento, en la Situación de Variación 1 nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes identifican la temperatura en minutos 2 y 15, realizan la operación resta entre dichos instantes, para luego calcular que la temperatura disminuyo 26ªC. No realizan ningún argumento gráfico en la pregunta. No manifiestan explícitamente que dicha diferencia corresponde a las diferencias en el eje Y.

TV b): Los estudiantes calculan el tiempo que tarda en disminuir 26ªC corresponde a 13 minutos, asociando la disminución en el tiempo con la diferencia en el periodo. No manifiestan explícitamente que dicha diferencia corresponde a las diferencias en el eje X.

TV c): Los estudiantes asocian la variación en este periodo con el calculo de la pendiente utilizando, considerando y explicitando la información de las preguntas anteriores, de la variación en el eje X e Y, con el cálculo de la pendiente en dicho periodo, asociando la razón entre la temperatura y tiempo: $\frac{Temperatura}{Tiempo} = \frac{ºC}{minutos} = \frac{variación\ en\ eje\ Y}{variación\ en\ eje\ X} = \frac{26ºC}{13\ min} = 2ºC/min.$

TV d): Los estudiantes seleccionan puntos pertenecientes a la grafica propuesta y realizan cálculos para determinar el valor de variación entre ambos puntos, llegando cada uno a distintos resultados, esto permite comparar los palitos posicionados, observan que los palitos tienen distinta variación, pues dependerá de la pendiente que ellos tengan, a mayor pendiente, mayor variación.

TV e): Los estudiantes comparan los palitos seleccionados, y distinguen las diferencias entre los distintos estados de estos, utilizan argumentos lingüísticos para señalar que la variación a medida que acerco los palitos aumenta o disminuye dependiendo de que punto mantengo fijo, especificando que se obtiene una pendiente más pequeña si se mueve el punto hacia el eje Y. Concluyen en esta pregunta implícitamente que ambas pendientes son la misma cuando ambos palitos se juntan.

TV f): Los estudiantes estiman que el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan tiende a ser $\frac{0}{0}$, especifican que si juntan y están paralelas al eje X la variación corresponde a 0. Uno de los estudiantes manifiesta una situación problemática que señalando que cuando ambos se juntan y están paralelos al eje Y, entonces su variación también es 0, seguido a ello realiza cálculos, considerando dos puntos para ello, que le da distinto de 0. Los estudiantes distinguen la diferencia entre los estados, estiman la diferencia entre las pendientes sucesivas y como está aumenta o disminuye dependiendo de que puntito dejo fijo.

TV g): Los estudiantes señalan que entre más cerca o lejos este el punto fijo, la variación aumenta o disminuye, señalando además que se obtiene la pendiente. No llegan a concluir que en la pregunta d) la variación corresponde al valor de la pendiente de los palitos y ambos tienen distinto valor, en cambio en la pregunta f) ambos palitos tienen el mismo valor.

En la Situación Variacional 2 del Tercer Momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes proponen y ejemplifican distintas situaciones en relación al modelo planteado en la gráfica propuesta.

TV b): Los estudiantes observan y conjeturan que la temperatura inicial es mayor que cero o es aproximadamente igual al valor de la del punto G.

TV c): Los estudiantes comparan el valor de la temperatura alcanzada en los puntos F y H, identificando que son muy parecidas, pero que en H es un tanto mayor.

TV d): Los estudiantes señalan que en cada par de puntos la pendiente varía y que está toma distintos valores a lo largo de la gráfica en el plano cartesiano, pero no realizan la descripción especifica para cada par de puntos.

En la Situación Variacional 3 del Tercer Momento nos encontramos con las siguientes conclusiones:

TV a): Los estudiantes justifican lo que ocurrirá con el fenómeno respecto del tiempo y la temperatura señalando que si es posible predecir lo que ocurrirá pues está experiencia ya ha sido realizada, pues corresponde a un modelo de dicho fenómeno.

TV b): Los estudiantes sustituyen la variable solicitada determinando que describan la velocidad, especificando que esta corresponde a la distancia partido por tiempo.

TV c): Los estudiantes suponen que ocurre en cada punto en base a las observaciones realizadas desde el gráfico, aplicando los conocimientos y experiencias previas, concluyendo que en el punto C la pendiente es mayor que en B.

TV d): Los estudiantes en base a la observación de la gráfica presentada describen que en el punto C acelera y en los puntos B y C desacelera el móvil.

TV e): Los estudiantes conjeturan que en los puntos F, G y H hubo un leve crecimiento en su velocidad, que la velocidad aumenta, especificando que en F y H el móvil acelera y en G su velocidad cambia un poco. No señalan explícitamente que la velocidad es siempre positiva en estos puntos.

TV f): Los estudiantes reconocen posibles aplicaciones del modelo anteriormente presentado, distinguen que, aunque cambie el nombre de las variables se sigue representado el cambio y la variación. Que es posible predecir en que otra situación se podría aplicar el modelo anteriormente visto, analizando las posibles aplicaciones.

6. Conclusiones.

Consideramos que existe una desarticulación entre la matemática de la escuela y la matemática presente en primer año de universidad, existen dos lenguajes que no dialogan entre ellos, generándose un discurso matemático imperante en ambos mundos. La matemática escolar de cada nivel se encuentra centrada en los objetos matemáticos propios.

De acuerdo con lo señalado por Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto (2015) la epistemología dominante de cada nivel no considera el conocimiento matemático de la gente, por ende, de los estudiantes, generándose una *exclusión* de la construcción social del conocimiento matemático, se supone que enseñamos para que los jóvenes mejoren su cotidiano, pero lo que enseñamos no responde a situaciones de la su vida diaria. Peor aún, el conocimiento del cotidiano no se parece al conocimiento entregado en las instituciones educacionales, reconociéndose que existen dos epistemologías: la vida y la de la matemática escolar. Estas epistemologías no dialogan entre ellas, legitimando que el conocimiento entregado en la escuela, en consecuencia, se genera la *opacidad* del conocimiento de la vida. Los actores del sistema educacional se *adhieren* al dME legitimado, no atreviéndose a trastocarlo.

Con nuestra situación de aprendizaje pretendimos rediseñar el dME *incluyendo* el conocimiento cotidiano de la gente, por medio de la Ley del Enfriamiento de Newton, *socializando* el conocimiento que emerge de esta situación, par así generar una *identidad* entre la dialéctica del conocimiento matemático y la del cotidiano del aula, la vida.

En la sociedad presente hoy en día comienza a surgir, sobre todo en los jóvenes que cursan dichos niveles, respuestas a las preguntas obvias que surgen en forma natural como, por ejemplo: ¿y esto para qué me sirve?, ¿me va a servir cuando ejerza mi profesión? Por consiguiente, urge cambiar la forma en la que estamos presentando la matemática, no se puede seguir haciendo como se hacía tan sólo hace un par de décadas atrás; los jóvenes han cambiado, estamos en una sociedad del conocimiento. Se evidencia la necesidad de un puente entre la matemática de la escuela con la matemática de primer año de la universidad, para ello se debe construir una articulación que permita este transito, de esta forma rediseñar el discurso matemático escolar. Para poder crear dicha articulación se hace necesaria la creación de situaciones de aprendizaje, que permitan desarrollar las habilidades que permitan afrontar la matemática de nivel superior.

La variación es una noción fundamental en la enseñanza superior, resulta ser esencial en el cálculo de primer año de Ingeniería, pero este debe ser resignificado por los estudiantes, para dar mayor significación a conceptos más complejos como lo son: el límite, la integral y la misma derivada.

Es de conocimiento que la universidad asume que los estudiantes vienen con algunos conocimientos de base desde el colegio. En este nivel, por ejemplo, en el programa de estudio de Cálculo I perteneciente a la malla curricular de Ingeniería, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Chile, en el plan común, encontramos los siguientes contenidos que deben ser abordados en el curso, como la interpretación geométrica de la función derivada como razón de cambio y la utilización de la interpretación geométrica de la derivada en un punto de la curva, para calcular la pendiente de la recta tangente

En el nivel medio, de acuerdo a la propuesta curricular que no fue aprobada, específicamente en el programa de estudio para tercero y cuarto medio, se pide que los estudiantes sean capaces de identificar la noción de cambio como rapidez instantánea, la razón de cambio en Economía o Biología, la recta tangente a una curva y la aceleración como un caso de la segunda derivada, con ello se debe profundizar en la importancia de modelar situaciones que involucran razones de cambio promedio e instantáneo (aplicaciones a la física y casos de optimización), derivada de una función y sus propiedades, para resolver problemas propios de la disciplina, de las ciencias sociales y relacionados con la ciencia.

La evidencia internacional, como por ejemplo en la prueba PISA, encontramos que le cambio debe ser descubierto y debe ser utilizado como predictivo de fenómenos de la naturaleza, ya que es en esto fenómenos donde se evidencia la manifestación del cambio.

Al comienzo de esta investigación nos dimos cuenta de la importancia que ha tenido la matemática en nuestra sociedad, invirtiéndose recursos y tiempo para intentar perfeccionar su enseñanza. Son muchas las personas que día a día realizan numerosas investigaciones referentes a la matemática, evidenciamos específicamente ello en las investigaciones referentes a la derivada y que formaron parte de la inspiración y guía para esta misma.

Por ejemplo, la investigación de Vrancken y Engler (2014) *Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad* que hace referencia al estudio del cálculo, que juega un rol importante cuando es necesario medir algún fenómeno y las variaciones que se producen en el mismo. La investigación de García y Dolores (2011) *Derivada: Una propuesta para su comprensión* en donde exponen los principales elementos del diseño y puesta en escena de una propuesta para la enseñanza de la derivada en estudiantes principiantes universitarios. La investigación *El lenguaje variacional en el discurso de la información* de Dolores (2010) donde analiza desde la Socioepistemología, cómo se usa el lenguaje variacional en el discurso de la información. La investigación *Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional* de Engler y Camacho (2012) quienes se centran en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional.

Distintas teorías intentan responder al entendimiento de la construcción del conocimiento matemático, una de ellas es la Socioepistemología que tiene por objetivo explorar las formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula. Esta perspectiva reconoce la importancia de cuatro dimensiones: epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural. Desde donde se cuestiona el qué, a quién y por qué enseñar las cuestiones matemáticas.

Considerando todos aquellos antecedentes, nos fijamos como objetivo general de esta investigación:

Diseñar y aplicar una situación de aprendizaje, que permita introducir la noción de la derivada como razón de cambio, a partir del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, permitiendo articular los conocimientos y habilidades provenientes del nivel medio con los conocimientos necesarios para el nivel superior.

Para diseñar y aplicar la situación dé aprendizaje, que permita introducir la noción de la derivada como razón de cambio, tomamos la mirada de la Socioepistemología la cual permite brindar un soporte teórico para nuestra propuesta considerando al aprendiz, el saber mismo, permitiendo resignificar los objetos matemáticos en los niveles medio y superior.

Consideramos que los modelos educativos se olvidaron de las personas; cuando tomamos la construcción social del conocimiento matemático y posicionamos nuevamente a las personas desde ese lugar olvidado generamos que dicha ausencia, emanado desde el dME, genere tres fenómenos entrelazados: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Cuya base epistemológica se encuentra en los usos del conocimiento matemático, para así lograr rediseñar el discurso matemático escolar Esta investigación se desarrolla a la luz del pensamiento y lenguaje variacional, tomando el escenario sociocultural en el cual se centrara la situación de aprendizaje, por medio de la creación de actividades, las prácticas de referencia y la práctica social, para así elaborar Situaciones Variacionales compuestas por Tareas Variacionales, que se explican por los Argumentos Variacionales, que son articulados por medio de los Códigos Variacionales, que generan una Estrategia Variacional recurriendo a las Estructuras Variacionales especificas. Teniendo en cuenta los usos de la gráfica y de la modelación.

Para lograr nuestro objetivo general de investigación nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

- **Desarrollar una epistemología de la derivada como razón de cambio a partir del pensamiento y lenguaje variacional y el uso de la gráfica.**
- **Diseñar una propuesta de situación de aprendizaje en un contexto de la ley del enfriamiento de Newton y con utilización de la epistemología de la derivada.**

- **Aplicar la situación de aprendizaje en un contexto particular de aula.**
- **Analizar los resultados de la aplicación de la situación a partir de una ingeniería didáctica.**
- **Rediseñar la situación de aprendizaje a partir de los datos obtenidos.**

Todos estos objetivos se han cumplidos, desarrollamos una epistemología de la derivada como razón de cambio a partir del pensamiento y lenguaje variacional y el uso de la gráfica. Diseñamos una propuesta de situación de aprendizaje en un contexto de la ley del enfriamiento de Newton y por medio de la utilización de la epistemología de la derivada. Aplicamos esta situación de aprendizaje en un contexto de aula a alumnos de un cuarto medio de un liceo científico humanista, con perfil matemático y con intenciones de seguir estudiando alguna ingeniería. Analizamos los resultados de la aplicación de la situación a partir de una ingeniería didáctica y finalmente rediseñamos la situación a partir de los datos obtenidos, como se puede ver en el Anexo 7.2.

Consideramos en la construcción de la situación de aprendizaje el análisis epistemológico histórico. Pues para llegar a lo que hoy conocemos por derivada, tuvieron que transcurrir siglos desde las primeras ideas relacionadas con la variación, infinitesimales y tangentes. Evidenciamos por medio de la epistemología de la derivada, como esta es el concepto matemático que permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en todos los fenómenos de la naturaleza o de las prácticas humanas. Reconocimos que la derivada está relacionada con tres nociones fundamentales: **el cambio**, **la razón promedio de cambio** y **la razón instantánea de cambio**. Siendo innumerables las aplicaciones de la derivada, todo lo relacionado con ella resulta abstracto y complejo para los estudiantes, generándose serias dificultades al intentar comprender de manera optima este concepto en el campo disciplinar.

Basándonos en el *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemología* de Vrancken y Engler (2013), propusimos una presentación de su evolución histórica, en relación con las diferentes problemáticas con respecto a la variación en los diferentes periodos de tiempo. Consideramos lo que sucede con ser humano en la pre-historia, y como en la edad media representaban la vida cotidiana, contemplamos los trabajos de Oresme (1323 - 1382) y de Fermat (1601 – 1665) quienes utilizan elementos tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas del cambio, y lo que pasa con estos cuando se hacen muy pequeños. Tomamos, además las ideas de Newton (1641 – 1727) quien trabaja con cantidades que varían en el tiempo.

El contexto que utilizaremos para el diseño la situación de aprendizaje es La Ley del Enfriamiento de Newton, brindado a los estudiantes participes de la situación, el uso de herramientas y situaciones en un contexto social, real y acercando la cotidianidad desde este ámbito. Además, utilizamos la idea que esta ley es un claro ejemplo de aplicación de la razón de cambio.

Para diseñar y construir la situación de aprendizaje se consideraron la predicción, graficación, modelación y el pensamiento y lenguaje variacional. Además, nos basamos en la construcción de los momentos que realiza Zaldívar (2014) en su tesis doctoral. La situación de aprendizaje se conformó por nueve Situaciones Variacionales (SV), cuatro correspondientes al primer momento, dos al segundo momento y tres al tercer momento. Cada una de las SV se compusieron de dieciséis, ocho y diecisiete Tareas Variacionales respectivamente.

La situación fue aplicada en un contexto de aula, y no pretendía enseñar los resultados de la misma, sino se brinda la oportunidad de que los estudiantes de cuarto medio, con alto interés por la asignatura y con interese futuros de seguir estudiando alguna ingeniería, aprendieran matematizando, organizando y reorganizando su realidad.

Para analizar los resultados se la aplicación de la situación se utilizó la ingeniería didáctica, con sus cuatro fases: análisis preliminar, *concepción y análisis a priori, experimentación y análisis posteriori.*

En el análisis a priori, experimentación y análisis posteriori fueron analizadas uno a uno los momentos, las situaciones variacionales y cada una de las tareas variacionales. Evidenciando si bien los jóvenes responden de la manera que se esperaba, no logra quedar de manera explícita el concepto de variación claro. Los jóvenes comienzan a experimentar con la idea del cambio, luego con las ideas de variación y pendiente, para continuar con la idea de razón de cambio, pero la idea de derivada no se alcanza a desarrollar de una manera formal, sólo queda implícito en el estudiante. Quedando nuevamente este conocimiento soslayado. Trabajan con la idea de movimiento y finalmente con la idea de predicción.

En la situación de aprendizaje cada uno de los momentos tenía una finalidad, es así como podemos pesquisar en la situación variacional uno, del primer momento, que los estudiantes abordaron el ***cambio*** logrando observar desde su entorno los cambios que se producen en su cotidiano, identificando las variables, utilizando códigos variacionales en lenguaje natural, con tecnicismos matemáticos, pero además describiendo cuando algo cambia, reconociendo y caracterizando un antes y un después, explorando dos estados, describiendo el cambio e identificándolo con características comunes, la gráfica es nombrada como uno de los recursos para representar el cambio. Determinan características que son percibidas sensorialmente por ellos. En la segunda y tercera situación variacional los estudiantes lograron caracterizar la ***variación***, hallando un patrón de comportamiento coherente con la situación planteada, desarrollando un análisis global, para luego justificar el por qué de la elección identificando la variación de los máximos y mínimos, comparando las representaciones gráficas presentadas, por medio de un análisis local de la seriación de los días del mes, explicando el por qué del patrón de comportamiento que seleccionaron explica la situación propuesta, además reconocen la

existencia de una temperatura ambiente, de un estado de equilibrio, identificando que en el infinito la temperatura tiende a ser contante, reconociendo la estabilidad en un punto, la perdida de calor, la medición del fenómeno y esbozan dicho cambio desde las argumentaciones nacidas de la gráfica, emanando el continuo y describiendo los cambios que se producen en pequeños intervalos de tiempo. En la situación variacional cuatro encontramos que los estudiantes identifican la **pendiente** definiendo primeramente el valor de la razón de calentamiento del pollo en el horno, interpretando la información entregada mediante el uso de la gráfica para argumentar sus respuestas, problematizando lo referente a la temperatura inicial del pollo, en cero o en una temperatura mayor a cero; expresando su respuesta mediante la construcción de una gráfica en base a los conocimientos que poseen de la función lineal y afín, pero también recurriendo a argumentos lingüísticos para describir dicha situación. Infieren a cerca del valor de la pendiente y aplicándola al modelo algebraico. Reconocen que la variación en la temperatura y el tiempo, dependerá de las condiciones iniciales del pollo, y que la pendiente tendrá relación con dichas variaciones. Argumentan su respuesta desde la gráfica, encontrando un modelo lineal de la situación de modelación planteada.

En el segundo momento, conducía al estudiante a reconocer la noción de cambio como la pendiente de la recta tangente a la curva, induciendo a este para que transitara desde la **pendiente** a la **razón de cambio**, como se puede encontrar en lo que construyeron en la situación variacional uno, donde estos infieren respecto del tiempo que deben esperar para beber la lata fría, y como este tiempo dependerá de variables como la temperatura a la cual se encuentra la bebida, la potencia del refrigerador y la razón a la cual enfría. Argumentan desde la representación gráfica de la curva en el plano cartesiano, identificando las variables en los ejes cartesianos y graduándolos, examinan la situación planteada y proponen graficas construidas utilizando solo los palitos entregados como una herramienta para trazar la curva. Los estudiantes utilizan argumentos que construyen a partir de la representación realizada, identificando que los palitos corresponden a la variación de temperaturas en un tiempo delta, y en un tiempo determinado. Otra de las representaciones asignada por los estudiantes al palito es que este corresponde a una aproximación del cambio y a la pendiente. Al seleccionar los palitos solicitados, los estudiantes determinan que la pendiente tiende a disminuir, pero que no es posible realizar un cálculo exacto del valor de la misma, porque dependerá del sistema de referencia que se este utilizando, algunos valorizan estos puntos para poder realizar los cálculos seleccionados y otros representan el valor de los puntos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representando el cálculo por medio de la formula de la pendiente de la recta. En la situación variacional dos se esperaba que los estudiantes interpretaran geométricamente la derivada como razón de cambio, trabajando implícitamente con la **derivada**, argumentando con frases en lenguaje natural como que al acercarse mucho van a tener la misma pendiente y este valor dependerá de cual palito fijemos y cual sea el que acerquemos, especificando que si el palito que se acerca hasta un punto que

quede paralelo al eje Y su pendiente no se podrá determinar y si el palito se acerca hasta un punto donde quede paralelo al aje X, su pendiente será cero. Los estudiantes además argumentan que cuando ambos palitos comienzan a acercarse la recta secante pasa a ser tangente, apoyando dicha justificación desde el argumento de lo que sucede en distintos momentos con los puntitos seleccionados.

En la situación variacional uno, del tercer momento encontramos que se pretendía llevar al estudiante a trabajar la **derivada como rapidez instantánea**, reconociendo la noción de cambio como la rapidez instantánea en el enfriamiento o calentamiento del agua. Para ello los estudiantes identifican la temperatura en dos instantes de temperatura, para luego calcular la variación de la temperatura en dichos instantes. En un segundo momento se pretende que los estudiantes calculen la variación en el tiempo para alcanzar una temperatura. los estudiantes calculan la variación en ese periodo, calculando la pendiente asociada a la razón en la variación de temperatura/tiempo. En una segunda instancia los estudiantes observan que los palitos tienen distinta variación, pues esta depende de la pendiente que ellos tengan, a mayor pendiente, mayor variación; comparando los palitos seleccionados distinguiendo las diferencias entre los distintos estados de estos, utilizando argumentos lingüísticos para describir que la variación a medida que acerco los palitos aumenta o disminuye dependiendo del punto que deje fijo. Concluyendo que ambas pendientes serán las mismas cuando ambos palitos se juntan. Los estudiantes estiman que el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan tiende a ser $\frac{0}{0}$, espeficando que si se juntan y están paralelas al eje X la variación es cero. Uno de los estudiantes manifiesta una situación problemática respecto de lo que pasa cuando ambos palitos se juntan y quedan paralelos al eje Y. los estudiantes distinguen las diferencias entre los estados de los palitos, estimando la diferencia entre las pendientes sucesivas y como está aumenta o disminuye dependiendo del punto que deje fijo. No llegan a concluir que la en la pregunta d) la variación corresponde al valor de la pendiente de los palitos y ambos tienen distinto valor, en cambio en la pregunta f) ambos palitos tienen el mismo valor.

En la situación variacional dos se pretendía que el estudiante se enfrente con el **movimiento**, siendo un fenómeno previo a la velocidad, rapidez y aceleración del un móvil. Estos proponen y ejemplifican distintas situaciones en relación al modelo planteado en la gráfica propuesta, además observan y conjeturan como la temperatura inicial es mayor que cero o aproximadamente igual al valor de la del punto G, comparan el valor de las temperaturas en algunos puntos seleccionados de la gráfica, identificando que la pendiente en cada par de puntos la pendiente varía y que está toma distintos valores a lo largo de la gráfica en el plano cartesiano, pero no realizan la descripción especifica para cada par de puntos.

En la situación variacional tres se esperaba que los estudiantes describan la velocidad, rapidez y aceleración de un móvil en un periodo de tiempo para llegar a la **predicción** del cambio justificando lo que ocurrirá con el fenómeno respecto del tiempo y la temperatura, señalando que es posible predecir lo que ocurrirá puesta está experiencia ya ha sido realizada, pues corresponde a un modelo de dicho fenómeno. Los estudiantes sustituyen las variables solicitadas determinando que describen a la velocidad, además estudian lo que sucede en distintos puntos de la gráfica, donde acelera y desacelera el móvil, conjeturan respecto de la velocidad y como esta cambia. Reconocen posibles aplicaciones del modelo anteriormente presentando cambiando el nombre de las variables, pues continúa representando el cambio y la variación.

Es importante perfeccionar la guía de trabajo que materializa la situación de aprendizaje planteada, en la cuál los estudiantes evidencian los significados construidos en cada etapa, incluyendo formalizaciones de cada uno de los contenidos vistos. Esto con el afán de robustecer la articulación entre los conocimientos matemáticos de nivel medio con los conocimientos matemáticos de nivel superior, por ello proponemos el siguiente rediseño de la situación de aprendizaje a partir de los datos obtenidos:

7. Bibliografía

Alarcón, S., Suescún, C., & de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XIII, núm. 2*, 101-123 .

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato. *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 274-281.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 26*, 1197- 1205.

Cantaral, R., Farfán, R.-M., Lezema, J., & Martinez-Sierra, G. (2006). Sociepistemología y representación: algunos ejemplos. *Relime, Número Especial*, 83-102.

Cantoral, R. (2011). Socioepistemología da educação matemática. *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática.* Lisboa: UIED | Colecção Educação e Desenvolvimento.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* Distrito Federal, México: Secretaria de Educación Media Superior.

Cantoral, R. (jan-abr de 2014). ¿Qué es la matemática Educativa? *Rematec, 9*(15), 149 - 172.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*, 1-22.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* D.F., México: International Thomson Editores.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (Octubre de 2014). Sociepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Castañeda, A., Montiel, G., & Serna, L. (2012). Construcción de la recta tangente variacional a través de los usos del conocimiento del siglo XVII y XVIII. *Acta Latinoameticana de matemática Educativa. . 25*, págs. 939-947. D.F., México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.

Castiblanco, A., & Moreno, L. (2004). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.* Bogotá, D.C., Colombia: Ministerio de Educación Nacional Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

Collete, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas I.* Bogotá, Colombia: Siglo veintiuno editores.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II.* DF México: Siglo veintinuno editores.

Coordinación de Cálculo 1 para Ingeniería. (10 de noviembre de 2016). *Programa de Cálculo 1 para Ingeniería.* Obtenido de calculo1.dmcc.usach.cl: http://calculo1.dmcc.usach.cl/images/2016/CALCULO_I_PARA_INGENIERÍA_ES_mayo_2011Oficial.pdf

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modelación y graficación en la matemática escolar. *La Matematica e la sua Didattica,, 20*(1), 59-79.

Cordero, F., & Suárez, L. (23 de Junio de 2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Relime, 13*(4-II), 319-333.

Cordero, F., Gómez, K., SIlva-Crocci, H., & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. .* Barcelona, España: Editorial Gedisa, S.A.

De Fariaz Camos, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas., 2*.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas. Tesis no publicada.

Díaz, C. (2008). Modelo conceptual para la deserción estudiantil universitaria chilena. *Scielo, 34*(2), 65-86.

Dolores Flores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. . *Revista Latinoameticana de la Investigación en Matemática Educativa. , 13*(4), 241-254.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada.* Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Engler, A., & Camacho, A. (Agosto de 2012). Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguje variacional. *REVISTA PREMISA, 14*(54), 18-36.

Farfán, M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* D.F. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

Fuentes, B., Maldonado, L., & Marambio, V. (2017). *Texto del estudiante. Matemática 1º medio.* Santiago, Chile: Santillana.

Galilei, G. (1638). En *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nueue scienze* (págs. 173-174). Leida.

García Pérez, J. F., Frías Navarro, D., & Pascual Llobell, J. (1999). Potencia estadística del diseño de Solomon. *Psicothema, 11*(2), 431-436.

García, M. d., & Dolores, C. (2011). XIII CIAEM-IACME. *Derivada: Una propuesta para su comprensión.* , (págs. 1-8). Recife, Brasil.

George B. Thomas, J. (2006). *Cálculo una variable. Undécima edición. .* méxico: Pearson Educación.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). La Ingeniería Didáctica como investigación basada en el diseño. *Cerme 8.* Turquía.

Gottlieb., O., & Blumenthal., V. (2017). *Texto del Estudiante. Matemática 3º medio.* Santiago, Chile: Ediciones Cal y Canto.

Hernández Sampieri, R., Fernández, Carlos, & Pilar, B. (2006). *Metodología de la Investigación* (Cuarta ed.). México D. F. , México: McGraw-Hill.

Larzon, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de Una Variable. Novena Edición.* México: Mc Graw Hill.

Martínez., G., Rupin, P., Jiménez, & Lorna. (2017). *Texto del Estudiante. Matemáticas 2º medio.* Santiago, Chile: Ediciones SM.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fnsamento del cálculo diferencial . *Voces y Silencios: revista Latinoamericana de Educación, Vol 2*, 3-21.

Mineduc. (Diciembre de 2013). PISA COMPETENCIAS MATEMÁTICAS: Un requisito para la sociedad de la información. *Marco de evaluación, preguntas y ejemplos de respuestas de la prueba*. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación. División de Estudios, Departamento de Estudios Internacionales.

Ministerio de Educación . (2017). Bases del Futuro. *Propuesta Curricular para 3º y 4º Medio. Documento de consulta pública.* . Santiago: Mineduc.

Ministerio de Educación Chile. (2012). *Serie Evidencias: Deserción en la educación superior en Chile.* Santiago: Centros de Estudios Mineduc .

Ministerio de Educación de Chile. (octubre de 2015). Programa de Estudio Tercero Medio . *Matemática Programa de Estudio Tercero Medio* . Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación .

Ministerio de Educacón. (2013). Bases Curriculares 7º y 8º básico - 1º y 2º medio. pp 104-113. Santiago, Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica. . D.F.: Cicata-IPN Cinvestav-IPN, Tesis doctoral (no publicada) .

Montiel, G. (2006). Construcción Social de la Función Trigonomética. *CLAME*, 818-823.

Muñoz, G. (2005). Naturaleza de un Campo Conceptual del Cálculo Infinitesimal: Una Visión Epistemológica. *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa. Vol 18*, 589-595.

Newton, I. (1701). Scala graduum caloris. Calorum Descriptiones &sigma. Royal Society of London: Royal Society of London.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Ruiz, Á. (2012). *Historia y filosofía de las matemáticas.* San José de Costarrica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Soto, D. (2014). La dialéctica Exclusión - Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático. D.F., México: Cinvestav-IPN. Tesis doctoral (no publicada).

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión Sociepistemológica. . *Bolema, 28*(50), 1525-1544.

Stewart, I. (2007). *Historia de las Matemáticas. En los últimos 10.000 años. .* Libros Maravillosos.

Stewart, J. (2012). *libro Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas Séptima Edición.* México: Cengage Learning Editores, S.A.

Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudios de los esquemas conceptuales espistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 413-450. .

Vásquez, S., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 141 - 155.

Venegas, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2016). *Texto del Estudiante. Matemáticas IVº medio.* Santiago, Chile: Editorial Santillana S.A.

Vrancken, S., & Engler, A. (abril de 2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema, Río Claro (SP), 28*(48), 449-468.

Vrancken, S., & Engler, A. (marzo de 2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de educación matemática.*, 53-70.

Zaldívar, J. (Junio de 2014). Un estudi de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar. Distrito Federal, México.

Anexos.

8. Anexos.

8.1. Situación de Aprendizaje Aplicada

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPTO. DE MATEM. Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Situación de aprendizaje

Primer Momento:

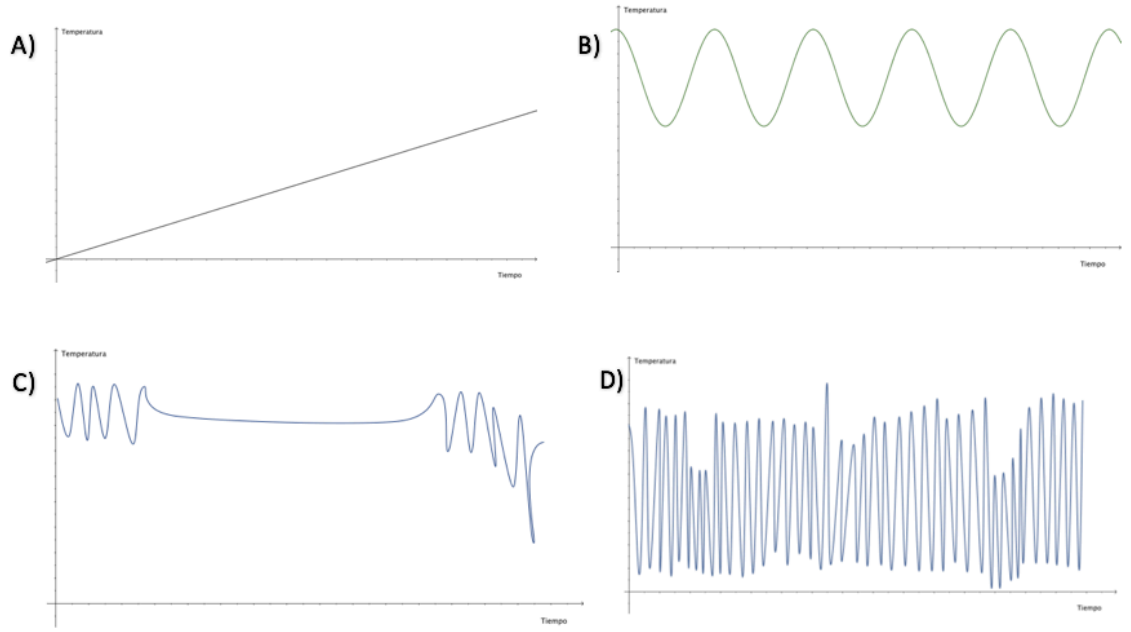
Actividad 1: Analizar el cambio a través del tiempo.

a) ¿Podrías identificar elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo?
b) ¿Cómo notas estos cambios?
c) ¿Cuáles son las características antes y después del cambio?
d) ¿Cómo podrías representar este cambio?

Actividad 2: Determinar procesos para el cambio.

Ernesto está estudiando cómo cambia la temperatura a lo largo de los días en un mes en la ciudad de Santiago.

a) ¿Cuál de estos gráficos representa mejor esta situación?



b) ¿por qué?

Actividad 3: Determinar la variación en una cantidad de tiempo

Si dejas enfriando una taza de café para poder beberla, ya que se encuentra muy calienta.

a) ¿Cómo podrías describir el cambio?
b) ¿Cómo podrías describir el cambio en pequeños intervalos de tiempo?
c) ¿Cómo podrías describir el cambio un tiempo determinado?

Actividad 4: Identificar la pendiente como el cociente entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa.

Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos.

a) ¿Qué significa este valor?
b) ¿Qué significa gráficamente?
c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la gráfica en un punto?
d) ¿A los cuantos minutos alcanza los $270°C$?
e) ¿Cuál es su temperatura a los 30 minutos?
f) ¿Qué sucede con la gráfica cuando el pollo lo sacamos del horno y se enfría a razón de 3ºC/minuto?

g) ¿Cuánto se ha enfriado después de 7 minutos?

Segundo Momento:

Actividad 1: Reconocer la noción de cambio como la pendiente de la recta tangente a la curva.

Supón que posees una bebida en lata, tienes mucha sed, pero esta está tibia. Decides colocar la bebida en el refrigerador para enfriarla.

a) ¿Cuánto tiempo debes esperar para poder tomar la lata de bebida fría?
b) ¿Cómo sería la curva que representa el enfriamiento de la lata de bebida a través del tiempo en el plano cartesiano?

Realiza nuevamente esta curva sólo utilizando palitos, lo más precisa posible.

a) ¿Cuál es la posición más conveniente al colocar los palitos?
b) ¿Qué representa el palito en esta situación?
c) Elije tres palitos cualesquiera, (y márcalos en la hoja) ¿cuál es la pendiente de estos palitos?
d) Elije dos puntos cualquiera de la gráfica y calcula la pendiente entre ellos.

Actividad 2. Interpretar geométricamente la derivada como razón de cambio.

e) ¿Qué pasa con la pendiente a medida que dejo uno de los puntos fijos y comienzo acercar el otro?

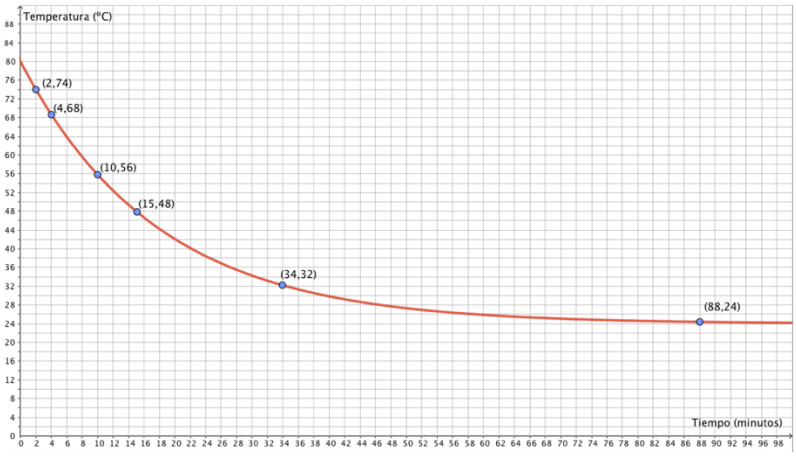
Marca en la hoja, la pendiente cuando ambos puntitos son uno.

f) ¿qué significa acercar un palito al otro fijo, en el problema de la lata de bebida?

Tercer Momento:

Actividad 1: Reconocer la noción de cambio como la rapidez instantánea en el enfriamiento o calentamiento del agua.

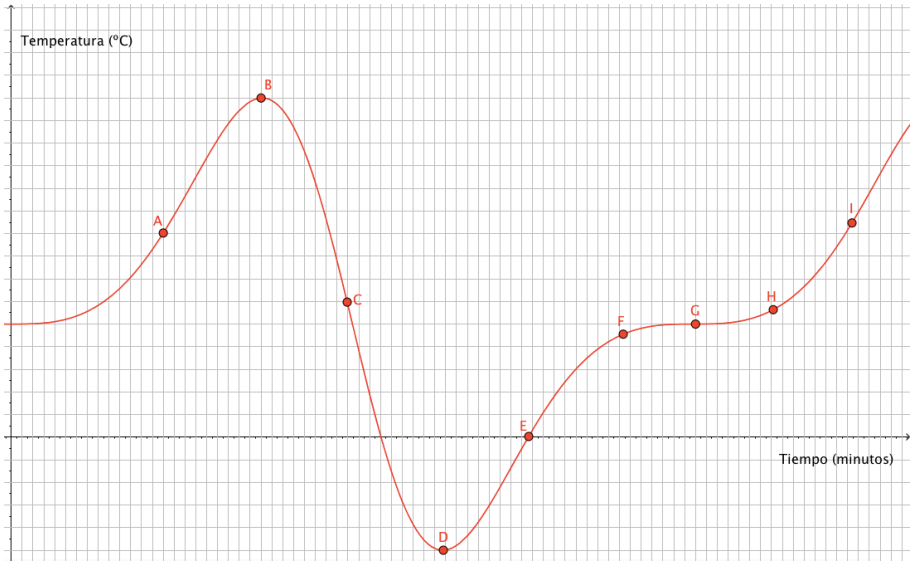
Tienes una taza de café, y este se encuentra a $80°C$, la temperatura ambiente del lugar donde te encuentras es de $24°C$, cuando transcurren 4 minutos desde que se sirvió, la temperatura del café es de $68°C$. A los 15 minutos de servido el café se encuentra a los $48°C$. Esta situación se puede observar en la siguiente gráfica:



a) ¿Cuánto disminuyo la temperatura entre el minuto 2 y 15?
b) ¿Cuánto tiempo tardo en ello?
c) ¿Cuál fue la variación en ese periodo?
d) Elije dos puntos de la gráfica, coloca un palito en cada punto. ¿Cuál es la variación entre ambos puntos?
e) Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?
f) ¿Cuál es el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan?
g) Si comparo el resultado de la pregunta d), con los resultados de la pregunta f) ¿qué obtengo?

Actividad 2: Describir la velocidad, la rapidez y la aceleración de un móvil en un periodo de tiempo.

Al observar la siguientes gráfica:



a) ¿cómo será la situación que está vinculada con ella?
b) ¿Cuál es la temperatura inicial del móvil?
c) ¿Dónde es mayor la variación de temperatura, en F o en H?
d) Describe lo que sucede entre cada par de punto.

Actividad 3: Predecir el cambio

En base a la gráfica de la actividad anterior.

a) ¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?
b) Si sólo cambiáramos la variable Temperatura por Distancia (metros). ¿qué describiría esta situación?
c) ¿Dónde es mayor la velocidad en B o en C?
d) Describe dónde aceleraba o desaceleraba el móvil, ¿en A, B o C?
e) ¿Qué paso entre F, G y H?
f) En que otra situación, distinta al enfriamiento o calentamiento del agua, ¿podríamos analizar el cambio? ¿cómo?

8.2. Situación de Aprendizaje Rediseñada.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPTO. DE MATEM. Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Situación de aprendizaje

Primer Momento:

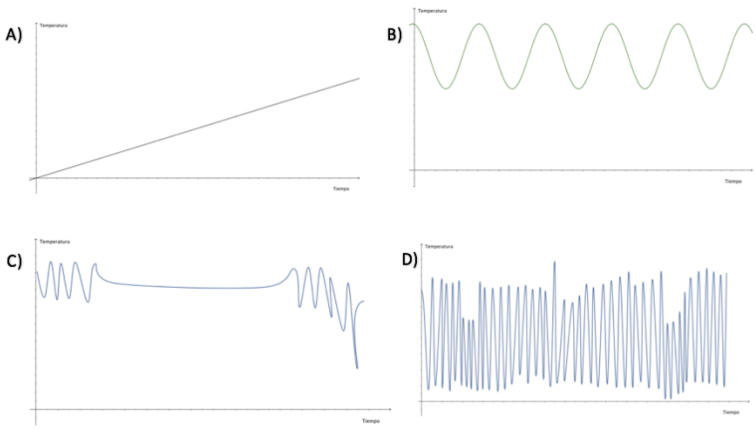
Actividad 1: Responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Podrías identificar elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo?
b) ¿Cómo notas estos cambios?
c) ¿Cuáles son las características antes y después del cambio?
d) ¿Cómo podrías representar este cambio?

Actividad 2:

Ernesto está estudiando cómo cambia la temperatura a lo largo de los días en un mes en la ciudad de Santiago.

a) ¿Cuál de estos gráficos representa mejor esta situación?



b) ¿por qué?

Actividad 3: Si dejas enfriando una taza de café para poder beberla, ya que se encuentra muy caliente.

a) ¿Cómo podrías describir el cambio?
b) ¿Cómo podrías representar el cambio en pequeños intervalos de tiempo?
c) ¿Cómo podrías analizar el cambio un tiempo determinado?

Actividad 4: Si poseemos un pollo asado, y lo metemos en el horno. Este se calienta a razón de 3ºC/minutos.

a) ¿Qué significa este valor?
b) ¿Qué significa gráficamente?
c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la gráfica en un punto?
d) ¿A los cuantos minutos alcanza los $270°C$?
e) ¿Cuál es su temperatura a los 30 minutos?
f) ¿Qué sucede con la gráfica cuando el pollo lo sacamos del horno y se enfría a razón de 3ºC/minuto?
g) ¿Cuánto se ha enfriado después de 7 minutos?

Segundo Momento:

Actividad 1: Supón que posees una bebida en lata, tienes mucha sed, pero esta está tibia. Decides colocar la bebida en el refrigerador para enfriarla.

a) ¿Cuánto tiempo debes esperar para poder tomar la lata de bebida fría?
b) ¿Cómo sería la curva que representa el enfriamiento de la lata de bebida a través del tiempo en el plano cartesiano?

Considerando que el **tiempo es una variable continua.** Realiza nuevamente esta curva sólo utilizando palitos, lo más precisa posible.

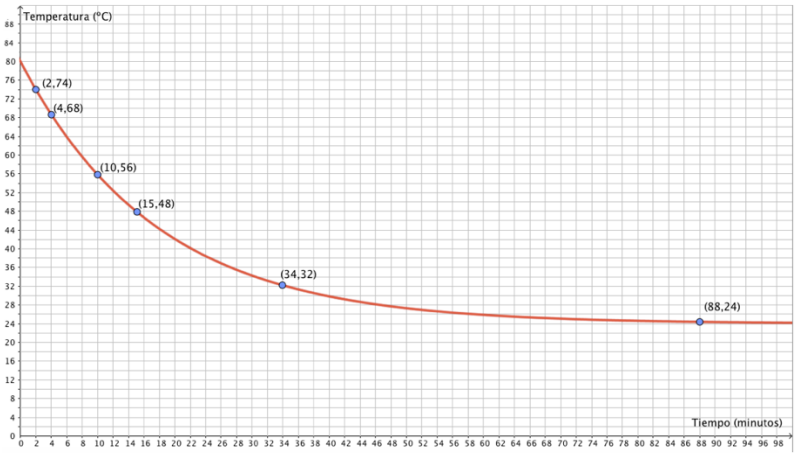
c) ¿Cuál es la posición más conveniente al colocar los palitos?
d) ¿Qué representa el palito en esta situación?
e) Elije tres palitos cualesquiera, (y márcalos en la hoja) ¿cuál es la pendiente de estos palitos?

Actividad 2. En base a la situación anterior.

a) Elije dos puntos cualquiera de la gráfica y calcula la pendiente entre ellos.
b) ¿Qué pasa con la pendiente a medida que dejo uno de los puntos fijos y comienzo acercar el otro?
c) Marca en la hoja, la pendiente cuando ambos puntitos son uno. ¿Qué significa acercar un palito al otro fijo, en el problema de la lata de bebida?

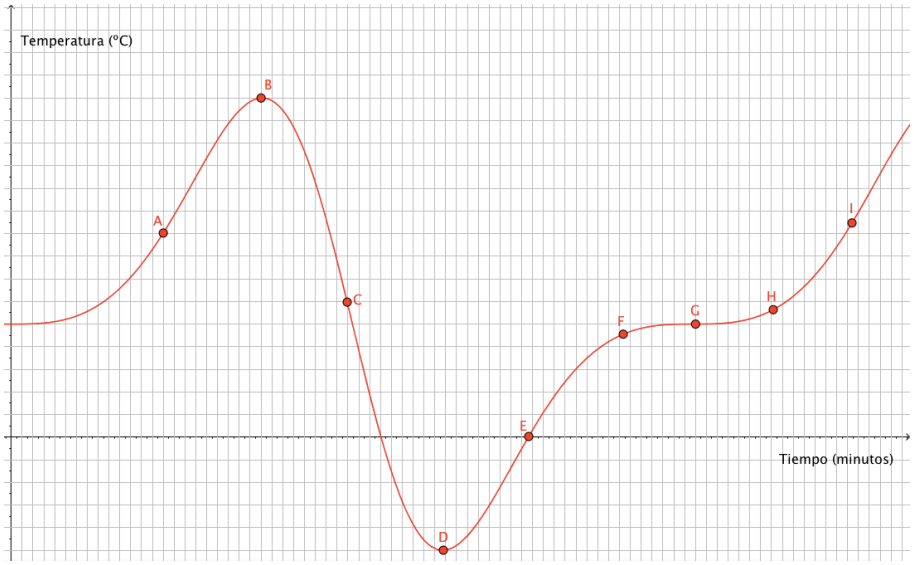
Tercer Momento:

Actividad 1: Tienes una taza de café, y este se encuentra a $80°C$, la temperatura ambiente del lugar donde te encuentras es de 24°C, cuando transcurren t4 minutos desde que se sirvió, la temperatura del café es de 68°C. A los 15 minutos de servido el café se encuentra a los $48°C$. Esta situación se puede observar en la siguiente gráfica:



a) ¿Cuánto disminuyo la temperatura entre el minuto 2 y 15?
b) ¿Cuánto tiempo tardo en ello?
c) ¿Cuál fue la variación en ese periodo?
d) Elije dos puntos de la gráfica, coloca un palito en cada punto. ¿Cómo es la variación entre ambos puntos?
e) Deja uno fijo y el otro comienza a acercarlo lentamente. ¿Qué sucede con la variación a medida que acerco los palitos?
f) ¿Cómo es el valor de la variación cuando ambos palitos se juntan?
g) Si comparo el resultado de la pregunta d), con los resultados de la pregunta f) ¿qué obtengo?

Actividad 2: Al observar la siguiente gráfica:



a) ¿cómo será la situación que está vinculada con ella?
b) ¿Cuál es la temperatura inicial del móvil?
c) ¿Dónde es mayor la variación de temperatura, en F o en H?
d) Describe lo que sucede entre cada par de punto.

Actividad 3: En base a la gráfica de la actividad anterior.

a) ¿Podemos predecir lo que ocurrirá con el líquido respecto del tiempo y su temperatura, si lo sometemos a condiciones similares? ¿por qué?
b) Si sólo cambiáramos la variable Temperatura por Distancia (metros). ¿qué describiría esta situación?
c) ¿Dónde es mayor la velocidad en B o en C?
d) Describe dónde aceleraba o desaceleraba el móvil, ¿en A, B o C?
e) ¿Qué paso entre F, G y H?
f) En que otra situación, distinta al enfriamiento o calentamiento del agua, ¿podríamos analizar el cambio? ¿cómo?