UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

TÍTULO: ESTRATEGIA PARA LA SUPERACIÓN DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS ASOCIADOS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

AUTOR: PABLO AUGUSTO ESTUARDO AWAD

PROFESORES GUÍA: GLADYS BOBADILLA ABARCA
RODOLFO BARRÍA RAMÍREZ

PROYECTO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO – CHILE

2018

Índice.

Capítulo I: Información referencial.

Título: "Estrategia para la superación de obstáculos epistemológicos asociados a la resolución de problemas de probabilidad condicional".

Resumen: El presente proyecto de graduación se centrará en la problemática que generan los obstáculos epistemológicos presentes en la resolución de problemas de probabilidad condicional en estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad Santiago de Chile. La importancia de dar solución a lo planteado se justifica por la relevancia que cobra la probabilidad condiciona a la hora de aplicar la Estadística, donde es considerada un concepto base de contenidos como la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales, y la inferencia estadística. Por otra parte, forma parte de los contenidos mínimos obligatorios de tercer año medio, y los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media, indican que un docente de matemática debe conocer y aplicar las probabilidades condicionales y comprender la relación de éstas con la independencia de eventos aleatorios, integrando estos conceptos en los teoremas de probabilidades totales y de Bayes.

A partir del marco teórico de registros y representaciones semióticas de Raymond Duval, la solución propuesta al problema de investigación es presentar una estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional que permita: poner en evidencia la necesaria coordinación entre varios registros de representación (árboles, tablas, escritura simbólica, lenguaje natural...) y describir las reglas de funcionamiento propias a cada registro y las de conversión de un registro a otro. Previo a su elaboración, fue necesario obtener información sobre el grado de comprensión, y de los obstáculos epistemológicos, que los sujetos de estudios manifiestan en relación a la resolución de problemas de probabilidad condicional, lo que fue posible gracias a la aplicación del *Cuestionario de Evaluación del Razonamiento Condicional*, cuya construcción forma parte de la tesis doctoral presentada por Díaz (2007). Junto con esto, se entrevistó a algunos docentes del área de Probabilidad y Estadística que impartan, o hayan impartido, clases a estudiantes de pedagogía en matemática, con el fin de obtener información sobre las formas de enseñanza relacionadas con los obstáculos epistemológicos que dificultan la resolución de problemas de este tipo. Finalmente fueron estos mismos docentes quienes exploraron la validez de la estrategia propuesta.

Capitulo II: Contexto, problema/ necesidad y alcances del estudio.

2.1. Antecedentes y contexto del problema o necesidad.

En la actualidad el eje datos y azar ha cobrado una mayor relevancia en el marco curricular de enseñanza media, reflejado principalmente en los últimos ajustes realizados donde se han incorporado una serie de nuevos contenidos. En la actualización del año 2009, aparece dentro de los contenidos mínimos obligatorios de tercero medio la resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades (MINEDUC, 2009). En relación a esto, es importante conocer los aprendizajes construidos por los futuros profesores de matemática sobre este conocimiento probabilístico, como también la mirada de la enseñanza de la probabilidad condicional de los docentes universitarios formadores de profesores.

Desde principios de la década del 80, a la actualidad, se han publicado diferentes trabajos relacionados con la didáctica de la probabilidad, en donde algunos de estos hablan sobre la importancia del concepto de probabilidad condicional y las complicaciones que conlleva en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Particularmente, un número considerable de investigadores se han centrado en identificar los diferentes obstáculos epistemológicos que generan dificultad a estudiantes en la comprensión de la probabilidad condicional, reconociendo las principales causas que conducen a errores en ciertos ejercicios relacionados con este tema.

Uno de los autores que investigó sobre esta problemática fue Falk (1986), quien encontró ciertos fundamentos sobre sus causas y efectos. Falk afirma que los estudiantes confunden los conceptos de *causalidad y condicionamiento*. En una relación causal entre dos sucesos A y B, si B es causa de A (o A es efecto de B), entonces necesariamente debe ocurrir primero B y después A, es decir, existe un orden temporal entre los sucesos. Por otra parte, en una relación condicional entre dos sucesos A y B (pensando en encontrar $P(A/B)$), la ocurrencia B incide en la probabilidad de ocurrencia de A, pero no necesariamente debe existir un orden temporal determinado entre ambos sucesos. Cuando un estudiante confunde estos dos conceptos, se genera en él la creencia de que si un suceso condicionante ocurre después, este no altera la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado, lo que Falk denominó como *falacia del eje temporal*.

Otra de las causas estudiadas por Falk es la *imprecisión del lenguaje ordinario*. Cuando se redacta el enunciado de un problema que requiere el empleo de la probabilidad condicional, en algunas ocasiones su interpretación puede ser muy subjetiva, provocando en el estudiante una concepción errada de la situación planteada. Cabe recalcar que no se está haciendo hincapié en la mala utilización del lenguaje, sino en que el planteamiento escrito de problemas de este tipo puede ser interpretado de diversas formas.

Existen dos efectos de interés relacionados con la imprecisión del lenguaje ordinario, en primer lugar, la denominada *falacia de la condicional transpuesta,* que corresponde a no discriminar entre P (A/B) y P (B/A). Cuando se escribe una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (por ejemplo, tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen entre sí (Batanero, 2012). El otro efecto relacionado es la *confusión entre la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta*. En un estudio realizado por Einhorn y Hogarth (1986) plantearon la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?, a lo que un número importante de estudiantes interpretaron esta situación de probabilidad conjunta como la probabilidad de comprar café dado que se fue al supermercado.

Finalmente, Kahneman y Tversky (1982) proponen que este tipo de obstáculos epistemológicos son causados por obstáculos presentes en conocimientos previos que son necesarios para comprender la probabilidad condicional. Para estos autores, el problema es que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de la probabilidad conjunta, específicamente la denominada *falacia de la conjunción*, definida como la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Confusiones de este tipo derivan posteriormente en obstáculos a la hora de estudiar conceptos más complejos que incorporan estos conocimientos, como la probabilidad condicional y los sucesos independientes.

2.2. El problema, preguntas del estudio o la necesidad a satisfacer.

En virtud de lo expuesto en el punto anterior, el presente proyecto de graduación centrará en los *obstáculos epistemológicos que dificultan la resolución de problemas de probabilidad condicional en estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.*

La importancia de dar solución a la problemática planteada radica principalmente en la relevancia que cobra este concepto en el terreno profesional y en la vida cotidiana. El desarrollo del razonamiento condicional les permite a los futuros docentes considerar todos los factores que afectan a un determinado problema y que condicionan su resolución, contribuyendo en su capacidad para tomar decisiones así como también en su capacidad argumentativa sobre las razones que validan su solución. Por otra parte, Batanero (2012) señala que la probabilidad condicional es un concepto base al aplicar la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de contenidos presentes en cursos posteriores dentro de la misma carrera universitaria, como la inferencia estadística, el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. Finalmente, dentro de los argumentos planteados para justificar el problema de investigación, se considerará lo establecido en los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media elaborados por el MINEDUC en el año 2012, en donde se señala que un profesor de matemática debe conocer y aplicar las probabilidades condicionales y comprender la relación de éstas con la independencia de eventos aleatorios, integrando estos conceptos en los teoremas de probabilidades totales y de Bayes, aspectos que son indispensables considerando que son contenidos que forman parte del currículum escolar de enseñanza media.

2.3. Objetivos del estudio (general y específicos).

Objetivo General.
Desarrollar una estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional orientada a superar obstáculos epistemológicos asociados a este contenido en estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.

Objetivos Específicos.
1. Obtener información sobre el grado de comprensión y los obstáculos epistemológicos que los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación manifiestan al momento de resolver problemas de probabilidad condicional. **2.** Obtener información sobre las formas de enseñanza de docentes del área Probabilidad y Estadística que impartan, o hayan impartido, clases a estudiantes de pedagogía en Matemática, en relación a los obstáculos epistemológicos que dificultan la resolución de problemas de probabilidad condicional. **3.** Formular un conjunto de recomendaciones, basadas en antecedentes obtenidos de estudiantes y docentes, a ser consideradas para la elaboración de una estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional orientada superar obstáculos epistemológicos asociados a este contenido. **4.** Explorar la validez de una estrategia, con recomendaciones para su uso, para la resolución de problemas de probabilidad condicional.

2.4. Alcances del estudio (Contribuciones y limitaciones principales).

En consideración del tiempo y otros recursos disponibles, este proyecto de graduación se limitará solo a tener validez al interior de esta casa de estudios. Es por esto que se ha decidido acotar los sujetos de estudio a estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación

Matemática y Computación, que hayan cursado la asignatura de “Probabilidad y Estadística” (correspondiente al cuarto semestre de la carrera). La condición propuesta, se debe al hecho que en dicho ramo es donde se aborda el contenido de probabilidad condicional.

En un principio, se pensó en la elaboración de un cuestionario con el fin de recoger información sobre el grado de comprensión y los obstáculos epistemológicos que manifiestan los sujetos de estudio, pero su diseño, construcción y validez tomaría más del tiempo que se dispone y desviaría el enfoque del proyecto, en consideración del objetivo general planteado. En virtud de esto, para cumplir lo propuesto anteriormente se utilizará el Cuestionario de Razonamiento sobre Probabilidad Condicional (RPC) presentado por Díaz (2007) en su tesis doctoral y el cual tiene por objetivo *contribuir a aportar alguna información sobre el grado de comprensión y las dificultades específicas que los estudiantes de psicología tienen respecto a la probabilidad condicional, como base para una acción diagnóstica y correctiva de los errores, en caso de encontrarlos*.

Para el cumplimiento del segundo objetivo específico, se pensó inicialmente en entrevistar a todos los docentes del área que impartieran clases de la asignatura “probabilidad y Estadística” a los sujetos de estudio, pero actualmente solo 2 profesores del Departamento de Matemática cumplen con esta condición y sólo se pudo contactar a 1 de ellos. Con el fin de obtener más puntos de vistas relacionados al tema, se decidió contactar a otros 2 profesores del área de Probabilidad y Estadística. Uno de ellos pertenece al Departamento de Física de esta Universidad, donde realiza clases a estudiantes de Licenciatura en Educación Física y Matemática, mientras que el otro forma parte del Departamento de Matemática, donde durante este año se desempeñó como docente en diferentes asignaturas de la carrera de Ingeniería Estadística, pero anteriormente tuvo la oportunidad de trabajar con estudiantes de Pedagogía en Matemática.

En relación a las contribuciones que se esperan del presente proyecto, la principal será contar con una estrategia innovadora y fundamentada en un marco teórico didáctico específico que permita a los estudiantes involucrados poder mejorar su desempeño a la hora de enfrentarse a problemas de probabilidad condicional. De esta forma, fortalecerán su formación en el razonamiento condicional, lo que les permitirá enfrentar cursos posteriores de probabilidad y estadística con conocimientos previos sólidos, y poder responder a los estándares exigidos a los futuros profesores de matemática de nuestro país.

Junto con esto, la aplicación de cuestionario RPC entregará información actual relevante sobre el grado de comprensión de este contenido y la identificación de los diferentes obstáculos epistemológicos que los estudiantes de la carrera puedan manifestar, quedando a disposición de los docentes del Departamento para que puedan realizar las evaluaciones que estimen convenientes.

Capítulo III: Marco teórico o referencial (estado del arte).

3.1. Origen y antecedentes teóricos del problema (descriptivos, explicativos y/o predictivos).

3.1.1. Noción de Obstáculo epistemológico.

El término obstáculo epistemológico fue introducido por el filósofo francés Gastón Bachelard (1938) en su libro *La formación del espíritu científico*. En este texto, el autor propone plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos, reconociendo que es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Para Bachelard, los obstáculos epistemológicos no se refieren a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento mismo, donde lo que se cree saber obstaculiza lo que se debiera saber. Al reflexionar sobre estos conocimientos que han sido erradamente interpretados, es posible encontrar la verdad (acto denominado por el autor como *arrepentimiento intelectual*) y de esta forma se *conoce en contra de un conocimiento anterior*, *destruyendo los conocimientos mal adquiridos o superando aquello que lo obstaculiza.*

Bachelard plantea que la ciencia se opone en absoluto a la opinión, afirmando que la opinión *piensa mal, no piensa y traduce necesidades en conocimientos. Al designar los objetos por su utilidad, ella prohíbe el conocerlos. Nada puede fundarse sobre la opinión: ante todo es necesario destruirla. Ella es el primer obstáculo a vencer.* Según esto, reconoce que el espíritu científico no permite tener opinión ante concepto que no son comprendidos, ya que incentiva a formular problemas y precisamente este sentido del problema es el que sindica el verdadero espíritu científico. Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta, y por lo tanto, si no hubo pregunta, no puede haber conocimiento científico. De esta forma, los obstáculos epistemológicos se incrustan en el conocimiento no formulado.

Posteriormente a lo planteado por Bachelar, el investigador francés Guy Brousseau se basa en esta idea para incorporarla a la didáctica de la matemática. En el año 1986, en su libro *Fundamentos y métodos de la didáctica,* precisa el término obstáculo como las causas que conducen a errores:

"Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo".

Según lo mencionado anteriormente, un ejemplo de obstáculo podría darse en un estudiante que observe el resultado de los cuadrados de diferentes números decimales de una cifra decimal que se encuentren en el intervalo $]0{,}1[$:

$$(0{,}2)^2 = 0{,}4\ ;\ \ (0{,}3)^2 = 0{,}9\ ;\ (0{,}4)^2 = 0{,}16;\ ;\ \dots\ ;\ (0{,}8)^2 = 0{,}64\ ;\ \dots\ ;\ (0{,}9)^2 = 0{,}81$$

Al observar estos resultados, es probable que el estudiante deduzca que al elevar al cuadrado la parte entera y la parte decimal por separado, es posible obtener de forma inmediata el resultado buscado. Al momento de afirmar que $(0{,}1)^2 = 0{,}1$ o que $(3{,}5)^2 = 9{,}25$; se está cometiendo un error que es producto de la manifestación de un conocimiento que fue eficaz bajo ciertas condiciones, pero que en este nuevo caso no es exitoso. Desde la mirada propuesta por el autor, el conocimiento se construye cuando el estudiante logra superar un obstáculo.

En resumen, Brousseau (1986) identifica ciertas características que debe cumplir un obstáculo:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo de forma esporádica.

Finalmente, Brousseu (1998) propone una arqueología de obstáculos, clasificando los diferentes obstáculos que se pueden generar en un sistema didáctico de acuerdo a sus diversos orígenes:

- Obstáculos ontogenéticos: También se les conoce con el nombre de obstáculos psicogenéticos, son consecuencia de las limitaciones de un sujeto debido a las características de su etapa de desarrollo. Por ejemplo, no es posible que un niño de 2 años comprenda el concepto de número.
- Obstáculos didácticos: Resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza o por el proyecto de un sistema educativo.
- Obstáculos epistemológicos: Son aquellos intrínsecamente relacionados con el rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta.

3.1.2. Investigaciones didácticas sobre obstáculos epistemológicos relacionados al concepto de probabilidad condicional.

Desde fines del siglo XX, a la actualidad, se han realizado diferentes investigaciones didácticas sobre obstáculos epistemológicos que aparecen en estudiantes al momento de resolver problemas en donde se debe emplear la probabilidad condicional. En esta sección se mostrarán los principales obstáculos identificados en estos estudios, donde destacan los aportes realizados por Falk (1986), Tversky y Kahneman (1982), Sánchez (1996), Einhorn y Hogarth (1986), y Batanero (2012).

3.1.2.1. Confusión entre causalidad y condicionalidad.

La causalidad es un concepto que ha sido estudiado por la filosofía a lo largo de la historia y comprendido por la gran mayoría de las personas, ya que es posible encontrar una infinidad de ejemplos de relaciones causa-efecto en la vida cotidiana. En una relación causal entre dos sucesos A y B, si B es causa de A (o A es efecto de B), entonces necesariamente debe ocurrir primero B y después A, es decir, debe existir un orden temporal entre ambos sucesos. Desde la mirada de la probabilidad, si B es causa de A, esto implicaría que $P(A/B) = 1$, debido a que siempre que suceda B, sucederá A. La relación causal estricta es difícil de encontrar en el mundo real, por lo que se hace necesario hablar de una relación de *causalidad débil* cuando al suceder B, altera la probabilidad de ocurrencia de A, es decir, $P(A/B) \neq P(A)$ (Batanero, 2012).

Continuando con el punto de vista probabilístico, cuando se habla de una relación condicional entre dos sucesos A y B, si B es el suceso condicionante y A es el suceso condicionado, entonces esto nos indica que la ocurrencia de B afecta en la probabilidad de ocurrencia de A, pero no necesariamente esta relación debe ser causal, ya que A puede preceder en el tiempo a B, sucederlo o pueden ocurrir simultáneamente. Además, A puede causar B, viceversa o pueden no tener relación causal.

Falk (1986) intuyó que sus estudiantes confundían el concepto de condicionalidad con causalidad, ya que normalmente argumentaban que para la existencia de una relación condicional entre dos sucesos, debía ocurrir primero el suceso condicionante y posteriormente el suceso condicionado. Para confirmar su hipótesis, les propuso a sus estudiantes el siguiente problema:

Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazo.

1. *¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar?*
2. *¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar?*

Los estudiantes no tuvieron problema para resolver el primer ejercicio, pero en el segundo la gran mayoría no logró encontrar la respuesta correcta. El argumento que se repitió prácticamente en la totalidad de las respuestas erróneas, fue que la probabilidad de la primera extracción de la bola negra no se ve alterada por la segunda extracción, debido a que esta última ocurre después. Ante este razonamiento la respuesta entregada por gran parte del curso fue $\frac{1}{2}$ (la respuesta correcta al problema planteado es $\frac{1}{3}$).

Al plantear esta pregunta, Falk quiso proponer un caso en que el suceso condicionante ocurriera después del condicionado, por lo que la relación condicional establecida en el problema, no era de causalidad. Al confundir estos dos conceptos, se genera en los estudiantes la creencia de que si un suceso condicionante ocurre después, este no altera la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado, lo que Falk denominó como *falacia del eje temporal*.

Por otra parte, Tversky y Kahneman (1982) también analizaron la confusión entre causalidad y condicionamiento investigando sobre el efecto de los esquemas causales en la percepción de una persona bajo incertidumbre. Cuando un suceso B es percibido como causa de un suceso A, al buscar $P(A/B)$ se dirá que la persona establece una *relación causal* entre A y B, por el contrario, si debe encontrar $P(B/A)$, se dirá que la persona establece una *relación diagnóstica*. Batanero (2012) propone un ejemplo de esta situación:

Se definen los siguientes sucesos:

- A: La hija tiene los ojos azules.
- B: La madre tiene los ojos azules.

Dada la definición de estos sucesos, bajo este contexto se percibe B como una causa de A, por lo que si se pide encontrar la probabilidad de que la hija tenga los ojos azules si la madre tiene los ojos azules ($P(A/B)$), se estará frente a una relación causal. En el caso que se pida encontrar la probabilidad de que la madre tenga los ojos azules si la hija tiene los ojos azules ($P(B/A)$), se estará frente una relación diagnóstica.

Tversky y Kahneman propusieron una serie de problemas cuyo propósito era comparar las probabilidades condicionales $P(X/Y)$ y $P(Y/X)$, en donde el suceso Y era percibido como "causa natural" del suceso X. Adicionalmente, establecieron la hipótesis de que $P(X) = P(Y)$, lo que necesariamente implicaría que $P(X/Y) = P(Y/X)$. Dado el contexto de los ejercicios, al calcular $P(X/Y)$ se establece una relación causal entre los sucesos, mientras que en el caso de $P(Y/X)$, la relación es diagnóstica. Pese a que ambas probabilidades condicionales eran iguales, la mayoría de los sujetos afirmó que $P(X/Y) > P(Y/X)$. De esta forma, los investigadores lograron probar que al calcular probabilidades condicionales, las relaciones causales son percibidas con más fuerza que las relaciones diagnósticas.

3.1.2.2. Relación entre probabilidad condicional e independencia.

La independencia estadística es un concepto que está estrechamente ligado a la probabilidad condicional. Dos sucesos son independientes, cuando la ocurrencia de uno de ellos no alterna la probabilidad de ocurrencia del otro, es decir, cuando $P(A/B) = P(B)$ o $P(B/A) = P(A)$. Sánchez (1996) propone que una de las causas de las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de estudiar la probabilidad condicional se debe a la falta de percepción de la independencia. Este investigador aplicó un cuestionario a 88 profesores de matemática que participaban en México de un programa de actualización. En dicho instrumento de evaluación, una de las preguntas planteadas fue:

Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A, el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina". ¿Los eventos A y B son independientes?

De los 88 docentes, 39 dieron una respuesta y sólo cuatro respondieron correctamente que los sucesos eran independientes utilizando la regla del producto. Entre las respuestas incorrectas, encontró dos tipos de razonamientos:

- El primero es el descrito por Kelly y Zwiers (1986), y corresponde a creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes. Ante este obstáculo epistemológico, los profesores respondieron que ambos sucesos no eran independientes por la presencia de la reina de tréboles. Para Kelly y Zwiers, la manifestación de este error se debe a la imprecisión del lenguaje ordinario, ya que la palabra "independiente" puede ser interpretada como "separado".
- El segundo razonamiento se relaciona directamente con la definición de probabilidad condicional. En este caso, la justificación fue; "Para que sean los sucesos sean independientes, se debe extraer una carta para verificar el suceso A y luego volver a colorarla en la baraja para verificar el suceso B. En el caso que se extraiga la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes". De esta forma, los docentes argumentan que para que la ocurrencia de un suceso no altere la probabilidad de ocurrencia de otro, es necesaria la extracción de dos cartas, pero en la definición del experimento se especifica que sólo se debe extraer una.

3.1.2.3. Falacia de la condicional transpuesta.

Otro de los obstáculos epistemológicos estudiados por Falk (1986) corresponde a la falta de discriminación entre las direcciones de la probabilidad condicional, y por tanto, creer que $P(A/B)$ es equivalente a $P(B/A)$. Esta confusión se denominada *falacia de la condicional transpuesta* y se presenta generalmente en problemas de contextos médicos, *donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico, con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad* (Batanero, 2012).

Para Falk, la causa de este obstáculo radica principalmente en la imprecisión del lenguaje ordinario, que es el utilizado al momento de redactar ejercicios de este tipo. Al plantear esto, el autor no quiere decir que el problema está en la persona que escribe el ejercicio, sino que es el propio lenguaje el que genera ambigüedades a la hora de interpretar un enunciado. Cuando se escribe una probabilidad condicional usando una expresión matemática, se establece claramente cuál es el suceso condicionante, y cuál es el suceso condicionado, pero al utilizar el lenguaje ordinario, la probabilidad condicional y su inversa no siempre se distinguen entre sí. Por ejemplo, la probabilidad de tener cáncer si se es fumador, puede ser confundida con la probabilidad de ser fumador si se tiene cáncer.

Batanero (2012) propone un problema a 194 futuros profesores de matemática y a 414 estudiantes de psicología, todos estudiantes de la Universidad de Granada (España). El objetivo del problema era detectar la presencia de la falacia de la condicional transpuesta en estos futuros profesionales:

Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

- *a) Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.*
- *b) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.*
- *c) Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.*

Puesto a que la prueba diagnóstica está diseñada para detectar el cáncer, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo, es altísima. Por el contrario, la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado positivo en el test es muy baja, y dada la gran cantidad de personas sanas en la ciudad, la probabilidad de tener cáncer si la prueba da positivo, no será tan alta como la probabilidad de que el test resulte positivo dado que la persona tiene cáncer.

Los resultados obtenidos en este estudio arrojaron que un 42,3% de los futuros profesores y el 59,2% de los estudiantes de psicología, afirmaron que ambos sucesos tenían la misma probabilidad, manifestando la creencia de la falacia de la condicional transpuesta. Por otra parte, 42,1% de los futuros docentes y el 32,1% de los futuros psicólogos, eligieron la alternativa “b”, que en definitiva, fue la respuesta correcta.

3.1.2.4. Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta.

La gran mayoría de los investigadores citados coinciden en que las dificultades que se generan en la comprensión de la probabilidad condicional se deben principalmente a la poca claridad que entrega el lenguaje ordinario a la hora redactar un problema, y que su desarrollo queda determinando por la interpretación que hace el estudiante del enunciado. Einhorn y Hogarth (1986) analizaron las confusiones que presentaban algunos estudiantes a la hora de resolver problemas e identificar si la situación planteada era un problema de probabilidad condicional o probabilidad conjunta. Estos autores pensaban que la causa de este obstáculo era el uso de la conjunción “y” en el enunciado de los ejercicios, y para comprobar su hipótesis plantearon a 24 estudiantes la siguiente pregunta:

¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?

Por las características de ambos sucesos (ir al supermercado y comprar café), sumado al uso de la conjunción “y”; casi la mitad de los estudiantes interpretó la pregunta en forma condicional como $P(comprar\ café/ir\ al\ supermercado)$. Resultados que llamaron la atención de los investigadores, ya que según sus opiniones, era prácticamente inmediato representar el problema usando probabilidad conjunta.

Tverskyy Kahneman (1982) reconocieron que una de las causas de las dificultades del aprendizaje de la probabilidad condicional, eran los obstáculos existentes en la comprensión de la probabilidad conjunta, afirmando que si un estudiante falla en la regla de la conjunción, no se puede esperar que use una regla más compleja. Uno de los obstáculos relacionados con la probabilidad conjunta y que da paso a una de las causas de los errores que se cometen al aplicar la probabilidad condicional, se denomina *falacia de la conjunción*, y fue explicada por Tverskyy Kahneman como *la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos, que la de uno de ellos por separado, o la de su unión.* Según los autores, la falacia de la conjunción se genera por la interpretación del conector “y”, ya que muchas personas consideran la conjunción como más representativa de la población generadora de cada suceso separado, o también porque la conjunción permite que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido.

3.2. Hipótesis / criterios de solución del problema y alternativas de satisfacción de la necesidad.

Para desarrollar este proyecto, se está partiendo de la hipótesis que los alumnos de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación manifiestan la presencia de diferentes obstáculos epistemológicos que les generan dificultades al momento de resolver problemas de probabilidad condicional. La gran mayoría de las investigaciones relacionadas directamente con estos temas centran su interés en las dificultades que se tienen con los propios conceptos probabilísticos y las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes. Sin embargo, no abordan detalladamente aquellos aspectos que tienen que ver con las estrategias o recursos operacionales asociados a la resolución de problemas que involucran a la probabilidad condicional, como por ejemplo, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia y los diagramas de Venn. Estos recursos mencionados suelen considerarse como "representaciones intuitivas", por la cercanía a la intuición de los estudiantes, y la mayoría de los docentes asumen que los alumnos son capaces de utilizarlos adecuadamente de forma espontánea.

Existe un marco teórico que considera este tipo de recursos como parte fundamental de los procesos de enseñanza-aprendizaje, *Los registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duva*l. En esta teoría, su autor reconoce la existencia de múltiples y diversos sistemas semióticos que hacen referencia a un mismo concepto matemático, cada uno de los cuales tiene sus dificultades y limitaciones. Entiende por representación semiótica *la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento* (Duval, 1995).

Puesto que cada representación es incompleta en relación al concepto que representa, ya que hace referencia a determinadas propiedades del objeto, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir. A continuación se mostrarán los principales registros propuestos por Duval en su teoría:

- Registro de la Lengua Natural (RLN): El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones:
- Registro Numérico (RN): Las representaciones de tipo numérico permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas. También permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como pueden ser la distributiva, conmutativa, etc. necesarias para la resolución de diversas tareas.
- Registro Figural-Icónico (RFI): Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.
- Registro Tabular (RT): Los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas permitiendo visualizar la información de manera global, establecer relaciones y

comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen, así como descubrir propiedades y características del objeto de conocimiento representado.

- Registro Algebraico (RA): Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa.
- Registro Geométrico (RGe): El registro geométrico admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.
- Registro Gráfico (RGr): El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc; La representación gráfica-cartesiana hace patentes diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, curvatura, etc.) que permiten apreciar el papel de los parámetros.

Según Duval, poder movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea y en el aprendizaje de un concepto, o bien poder elegir un registro en lugar de otro, es esencial en la actividad matemática. Duval (1993), llama semiosis a la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas, y noesis a la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto. Para Duval, un sistema semiótico, es decir un sistema de signos, y un sistema de representación son cosas diferentes, de modo que para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, debe poder permitir las tres acciones siguientes (Duval, 1993):

- *Identificación*: consiste en el reconocimiento de las representaciones que se presentan ante el sujeto, lo que implica una selección de rasgos en el contenido a representar.
- *Tratamiento:* consiste en la transformación de una representación en otra del mismo sistema.
- *Conversión:* consiste en la transformación de una representación en una representación de otro sistema semiótico.

Toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para poder obtener la comprensión. Es por ello que los objetos matemáticos no deben ser confundidos nunca con su representación.

Para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y se sea capaz de, primero, reconocer el mismo objeto de conocimiento a través de representaciones cuyos contenidos no tienen relación entre sí, y, segundo, reconocer y distinguir dos objetos a través de dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque dependen del mismo sistema de representación, es esencial poder movilizar diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, lenguaje funcional, lenguaje algebraico, gráfico, figuras, etc.) y desarrollar la coordinación entre ellos. Por este motivo, para Duval la transformación de registros y la capacidad de pasar de un registro de representación a otro ocupa un lugar importante y determinante en el aprendizaje de las matemáticas.

3.3. Fundamentos de las hipótesis, resultados o de los alcances de posibles alternativas de solución.

Si se considera esta teoría didáctica como sustento de la estrategia propuesta como objetivo general del presente proyecto, puede contribuir significativamente a la solución del problema de investigación. La presencia de obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas de probabilidad condicional puede ser interpretada como consecuencia de la dificultad de movilizar este objeto matemático por diferentes registros semióticos y de poder relacionarlos entre sí. Para esclarecer esta idea, se tomará como ejemplo la definición de probabilidad condicional.

Definición 2.14 **Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{2.5}$$

Imagen 3.3.1: Probabilidad y Estadística, George Canavos.

Como se muestra en la imagen 3.3.1., es posible apreciar que la definición de probabilidad condicional aparece representada a través de 2 registros, lengua natural y algebraico. La conversión entre estos 2 registros no es trivial, producto de que la ecuación que define la probabilidad condicional normalmente no es explicada en los textos, y por ende, las personas que estudian este concepto no logran comprender la justificación de por qué dicha expresión algebraica entrega la probabilidad de ocurrencia de A, ocurrido B. Este hecho puede significar un punto de partida para la presencia de obstáculos en los estudiantes, considerando que toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para poder obtener la comprensión.

Al momento de resolver un problema de probabilidad condicional, aparecen una serie de registros de representación que son necesarios coordinar para poder llegar al resultado final, dentro de los más utilizados estás los diagramas de árbol, diagramas de Venn, escritura simbólica, lenguaje natural, entre otros. Una enseñanza sistemática de estos registros es una ayuda para los alumnos en la resolución de un problema de probabilidad condicional y para la comprensión de los conceptos puestos en juego, donde es imprescindible describir las reglas de funcionamiento propias a cada registro y las de conversión de un registro a otro, e insistir en el hecho de que no necesariamente es algo que surja de manera espontánea en los alumnos (Dupuis, 1996).

A continuación, se detallarán los principales registros de representación que están presentes al momento de resolver un problema de probabilidad condicional, indicado sus características y funciones más relevantes:

Lengua Natural:

La mayoría de los enunciados de problemas de probabilidad condicional se presentan en un registro de lengua natural. En el proceso de *identificación* es donde el estudiantes debe ser capaz de reconocer los sucesos que intervienen en el enunciado, las relaciones de condicionalidad que se presentan, asociar correctamente los sucesos identificados con sus respectivas probabilidades y determinar con exactitud qué es lo que se le está preguntando. Cabe destacar que en la lengua natural es posible hacer uso de distintos signos para representar una misma situación, como también representar información diferente con un mismo signo.

Como ya se planteó anteriormente, la falta de precisión de este registro al presentarse como enunciado de un problema de probabilidad condicional, genera que ambigüedades y confusiones cuando se está llevando a cabo el proceso de identificación, provocando en los estudiantes interpretaciones erradas que pueden desencadenar en un obstáculo, como los que fueron citados en el apartado 3.2.1. Veamos un ejemplo clásico del enunciado de un problema de probabilidad condicional, donde para su resolución se debe emplear el teorema de Bayes:

Ejemplo 1: *De los tornillos que produce una fábrica, el 60% son producidos por la máquina A, y el resto, por la máquina B. Supóngase que el 12% de los tornillos producidos por A son defectuosos y que el 8% de los producidos por B son defectuosos. Se elige al azar un tornillo y resulta que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A?*

La primera acción a realizar cuando se intenta resolver un problema de este tipo debe ser la definición de cada uno de los sucesos involucrados. Este proceso corresponde a un *tratamiento*, ya que se está transformando una representación de lengua natural en otra dentro del mismo sistema. Para aclarar esta idea, se caracterizará el proceso de tratamiento a partir del ejemplo 1:

- A: El tornillo seleccionado proviene de la máquina A.
- B: El tornillo seleccionado de la máquina B.
- D: El tornillo seleccionado es defectuoso.
- ND: El tornillo seleccionado no es defectuoso.

Registro Figural – icónico:

Es aquí donde aparecen los diagramas de árbol. Este tipo representaciones son equivalentes a los enunciados de un problema de probabilidad condicional, por lo que su construcción corresponde a un proceso de *conversión* desde un registro de lengua natural hacia un registro figural – icónico. Específicamente, los diagramas de árbol muestran los sucesos que intervienen en el problema y las relaciones que presentan entre sí, donde cada una de sus ramas tiene los siguientes significados (ver imagen 3.3.2.):

- Las primeras ramas corresponden a las probabilidades de cada uno de los sucesos que generan la partición del espacio muestral (siempre la suma de esas probabilidades debe dar 1).
- Las segundas ramas corresponden a las probabilidades condicionales presentes en el problema, dada la ocurrencia de los sucesos de las primeras ramas.
- Si no se presentan más relaciones condicionales, las últimas ramas indican las probabilidades conjuntas entre los sucesos condicionantes y condicionados presentes en el problema, lo cual se obtiene inmediatamente a partir de las multiplicaciones respectivas entre las probabilidades de las primeras y segundas ramas.

El diagrama de árbol asociado al enunciado del ejemplo 1 sería:

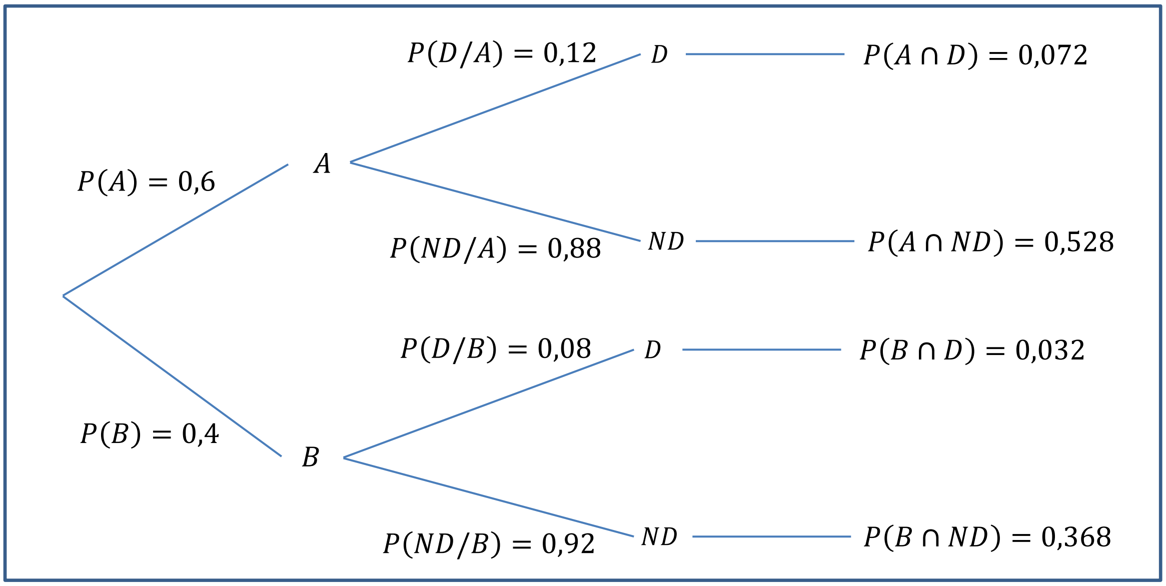


Imagen 3.3.2: Diagrama de árbol ejemplo 1.

Registro Tabular:

Al igual que los diagramas de árbol, este tipo de registros son equivalentes a los enunciados de problemas de probabilidad condicional, por lo que su elaboración correspondería a una conversión desde un registro de lengua natural a un registro tabular. Cada fila y cada columna representan los eventos que intervienen en el enunciado, donde cada una de las celdas indica la probabilidad conjunta entre los 2 sucesos asociados. Al sumar las celdas de cada fila y cada columna, se obtienen las probabilidades totales respectivas. En el caso del ejemplo 1, la tabla de contingencia asociada al enunciado del problema es:

	A	B	
D	$P(A \cap D) = 0{,}072$	$P(B \cap D) = 0{,}032$	$P(D) = 0{,}104$
ND	$P(A \cap ND) = 0{,}528$	$P(B \cap ND) = 0{,}368$	$P(ND) = 0{,}896$
	$P(A) = 0{,}6$	$P(B) = 0{,}4$	1

Imagen 3.3.3: Tabla de contingencia ejemplo 1.

A diferencia del diagrama de árbol, la tabla de contingencia entrega información sobre las probabilidades totales involucradas en el problema, pero no detalla las probabilidades condicionales como sí lo hace el diagrama de árbol.

Registro algebraico:

En la probabilidad condicional, se toman signos específicos para nombrar los distintos objetos que están inmersos en ella, estos son:

- Los sucesos se designan con letras del abecedario en mayúscula, en ocasiones con las primeras letras de éste y en otras con la letra inicial del suceso.
- La probabilidad de un suceso cualquiera A se denota como $P(A)$, y se interpreta como la probabilidad de ocurrencia del suceso A.
- La probabilidad de que ocurran dos o más sucesos a la vez, es decir la probabilidad conjunta entre, digamos A y B, se representa como digamos $P(A \cap B)$.
- La probabilidad condicional de ocurrencia del suceso A, dada la ocurrencia del suceso B, se expresa como $P(A/B)$.

Las representaciones en este registro corresponden a todos aquellas funciones, modelos o ecuaciones expresadas en lenguaje algebraico que permiten posteriormente obtener el valor numérico de cada probabilidad. Por ejemplo, para el caso del ejemplo 1, el registro algebraico asociado sería:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)},$$

lo que posteriormente, mediante un proceso de tratamiento se podría expresar como:

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(A \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D)} \\ &= \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B)}. \end{aligned}$$

Registro Numeral:

Es aquel valor numérico que representa la probabilidad por la que se pregunta en un problema. Para llegar a este registro, es necesario realizar una *conversión* desde una tabla de contingencia, diagrama de árbol o registro algebraico. Por ejemplo, para el problema propuesto, la *conversión* desde el registro algebraico hacia el registro numérico sería:

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B)} \\ &= \frac{0,12 \cdot 0,6}{0,12 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4} \\ &\approx 0,6923\,. \end{aligned}$$

Capítulo IV: Antecedentes y sugerencias para la solución.

4.1. Antecedentes de los estudiantes.

4.1.1. Sujetos de estudio.

La población objetivo corresponde a los 40 estudiantes matriculados el segundo semestre del año 2015 en la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación que hayan, o estén cursado, la asignatura de Probabilidad y Estadística impartida en el cuarto semestre de acuerdo a lo indicado en la malla curricular. En el caso de los estudiantes que se encuentran actualmente cursando el ramo, se les aplicó el cuestionario después que la profesora del curso abordó el contenido de probabilidad condicional.

Dado el pequeño tamaño de la población y el fácil acceso a esta, el propósito inicial fue trabajar con el universo completo de estudiantes. Debido a problemas para contactar a algunos alumnos, junto con la negativa de otros de participar en este estudio, fue posible aplicar el cuestionario a 30 personas, lo cual corresponde al 75% de la población total.

4.1.2. Objetivo del estudio.

Obtener información sobre el grado de comprensión, y de los obstáculos epistemológicos, que los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación manifiestan respecto a la resolución de problemas de probabilidad condicional, como base para la elaboración de la estrategia propuesta como objetivo general de presente proyecto de graduación.

4.1.3. Material y Método.

El instrumento utilizado fue el cuestionario RCP (ver anexo pág.109). Debido a que los sujetos de estudio ingresaron en distintos años a la carrera, la posibilidad de aplicarles el cuestionario a todos juntos se hizo muy compleja. La solución a esto fue aplicar el cuestionario por separado a cada grupo generacional. Se pidió la colaboración de algunos profesores del Departamento que impartieran alguna asignatura a cada generación, solicitándole una de sus clases para poder aplicar el instrumento. A continuación, se enuncian las instrucciones presentes en cada cuestionario, las cuales fueron leídas en voz alta frente a cada grupo:

- El siguiente cuestionario consta de 18 ítems y tiene por objetivo identificar algunos obstáculos de origen epistemológico asociados al contenido de probabilidad condicional del eje datos y azar.
- En los ítems 1, 2, 6, 8, 11, 12, 13, 15 y 16 deberás entregar una respuesta a cada pregunta (respuesta abierta).
- En los ítems 3, 4, 5, 7, 9, 10, 14, 17 y 18 deberás encerrar en un círculo la alternativa que te parezca correcta (selección única).
- En **TODOS LOS ÍTEMS** (selección única y respuesta abierta) debes justificar tu respuesta en el espacio en blanco que se considera entre pregunta y pregunta. Cabe destacar, que dicha justificación debe ser lo más clara y detallada posible, ya que de ella se obtendrá la información necesaria para este estudio.
- Tienes 90 minutos para contestar el cuestionario.

4.1.4. Análisis.

Se realizó un estudio descriptivo de los resultados obtenidos siguiendo la estructura propuesta por Díaz (2007). Los 18 ítems fueron clasificados en dos grandes ejes, los que evalúan los conocimientos de tipo lógico – matemático y los que determinan la presencia de obstáculos asociados a la probabilidad condicional. Para cada ítem se calcularon las frecuencias y porcentajes de cada respuesta, considerando el caso de las respuestas abiertas un puntaje de forma creciente, según su nivel de completitud.

4.1.5. Resultados sobre conocimientos Lógico – Matemático.

En este eje, los ítems se clasificaron en 3 grupos, resolución de problemas complejos de probabilidad condicional, discriminación entre diversos tipos de probabilidad y conocimiento conceptual del tema. A continuación se detallarán los resultados obtenidos para cada ítem según la clasificación planteada.

4.1.5.1. Resolución de problemas complejos de probabilidad condicional.

- En el **ítem 16** se evaluó la capacidad de resolución de un típico problema que involucra la aplicación del Teorema de Bayes. El criterio de puntuación es el siguiente (Díaz, 2007):

0. No se responde o se responde incorrectamente, no llegándose a la identificación correcta de todos los datos del problema.

1. Se construye un diagrama en árbol y/o tabla de contingencia adecuada, pero no finaliza el problema. Identifica los datos pertinentes y construye el diagrama, completando incluso datos faltantes. Ello requiere la identificación correcta del espacio muestral en el experimento producto, la asignación de probabilidades a cada uno de los sucesos que lo componen y la aplicación del axioma de la unión.
2. Diagrama en árbol correcto e identifica el problema como de probabilidad condicional, sin aplicar la regla de Bayes. Además de las destrezas del caso anterior, el estudiante muestra que diferencia el concepto y usa la notación de probabilidad condicional, diferenciando una probabilidad condicional de su transpuesta.
3. Calcula correctamente la probabilidad total. Además de los pasos anteriores, el alumno identifica el problema como de probabilidad condicional y llega al cálculo correcto del denominador de la fórmula, aplicando el cálculo de probabilidades compuestas y el axioma de la unión, pero hace un error en el numerador de la regla de Bayes.
4. Resuelve correctamente y el alumno finalmente calcula correctamente el numerador de la fórmula de Bayes.

Tabla 1: Frecuencias de respuestas ítem 16

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	6	20	20
1	5	16,7	36,7
2	8	26,7	63,4
3	2	6,6	70
4	9	30	100

Según los resultados entregados por la Tabla 1, solo el 30% de los estudiantes pudo resolver correctamente el problema. El hecho que 63,4% de los alumnos haya obtenido una puntuación menos o igual a 2, indica que el principal problema estuvo en calcular la probabilidad total (probabilidad de que la bola resulta ser defectuosa).

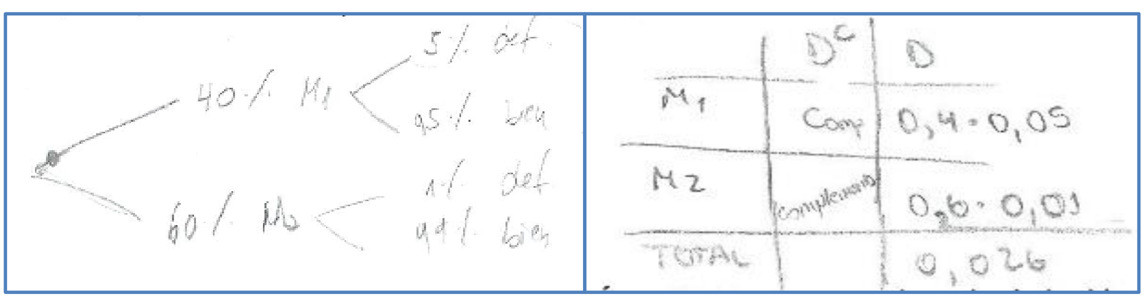


Imagen 1.1: diagrama de árbol y tabla de contingencia elaborados por 2 estudiantes

Para la resolución del ítem, 24 de los 30 estudiantes utilizaron un diagrama de árbol y/o una tabla de contingencia (ver imagen 1.1), mientras que los 6 restantes que no se apoyaron de ninguna de estas representaciones obtuvieron puntuación 0. Varios de los diagramas de árbol y tablas de contingencia elaborados presentaron errores, e incluso en estas últimas, un número importante de estudiantes completó las celdas con probabilidades condicionales en vez de escribir la probabilidad conjunta (ver imagen 1.2.), lo que posteriormente los llevó a llegar a un resultado incorrecto de la probabilidad total.

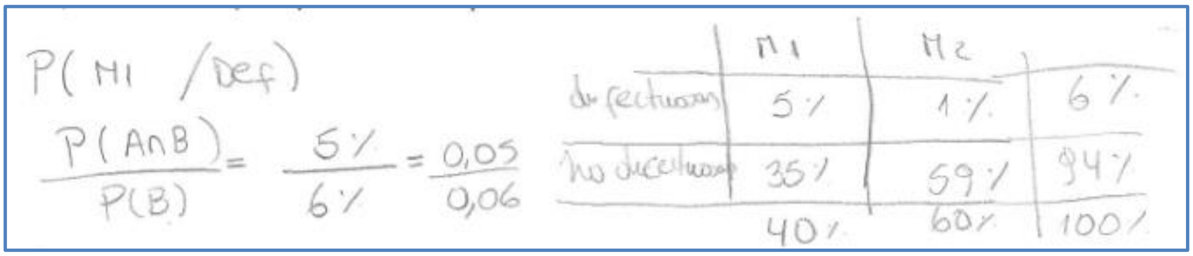


Imagen 1.2: respuesta ítem 16 realizada por un estudiante.

- En el **ítem 11** se evaluó la capacidad de resolver problemas sobre el Teorema de probabilidad total. El criterio de puntuación utilizado fue el siguiente (Díaz, 2007):

0. No se responde, o se responde incorrectamente, no llegándose a identificar correctamente los datos del problema: Ejemplo *"130".*
1. Identifica los datos o construye un diagrama de árbol, pero hace algún error de menor importancia. Ello requiere la identificación correcta del espacio muestral en el experimento producto, la asignación de probabilidades a cada uno de los sucesos que lo componen y la aplicación del axioma de la unión
2. Calcula la probabilidad total de personas que fuman. Además de los pasos anteriores, el alumno identifica el problema como de probabilidad condicional y llega al cálculo correcto del denominador de la fórmula, aplicando el cálculo de probabilidades compuestas y el axioma de la unión.

Tabla 2: Frecuencias de respuestas ítem 11

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	8	26,7	26,7
1	2	6,6	33,3
2	20	66,7	100

Los resultados (Tabla 2) indican que el 66,7% de los estudiantes llegan a la respuesta correcta. Al igual que en el ítem anterior, la gran mayoría de los estudiantes utilizó diagramas de árbol y/o tablas de contingencia para resolver el problema, donde nuevamente la mayoría de los puntajes 0 se deben a errores en la completación de la tabla de contingencia (ver imagen 2.1).

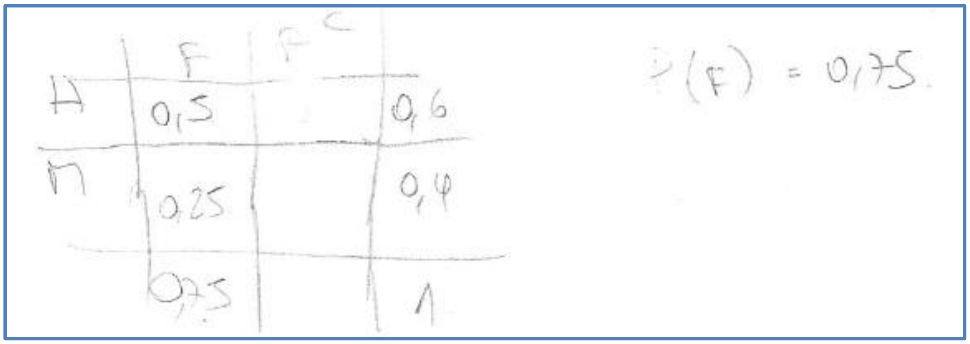


Imagen 2.1: respuesta ítem 11 realizada por un estudiante

Llama la atención que pese a que en el ítem 16 un gran número de estudiantes no logró llegar a la respuesta correcta por presentar dificultades en el cálculo de la probabilidad total, en el ítem 11 dos tercios de los alumnos resolvió correctamente la probabilidad total. Esto se puede explicar debido a que el ítem 16, al ser un problema de teorema de Bayes, involucra más pasos para llegar a la respuesta final y el grado de dificultad es mayor al del ítem 11.

- El **ítem 15** propone calcular una probabilidad conjunta de dos sucesos dependientes. Para su puntuación, se utilizó el siguiente criterio (Díaz 2007):

0. No se responde o se responde incorrectamente, no llegando a la identificación de todos los datos, por ejemplo*"55%".*
1. Identifican los datos o realizan el diagrama en árbol correctamente, como en el caso siguiente en que identifica incorrectamente el problema como de probabilidad condicional, en lugar de como probabilidad conjunta.

$$M = 0{,}91\ ;\ M^c = 0{,}09\ ; P(I/M) = 0{,}36\ ; P(NI/M) = 0{,}64$$

$$P(M/I) = \frac{P(I/M)}{P(M)} = 0{,}4$$

2. Resuelven el problema correctamente empleando la notación adecuada, empleando tanto un diagrama en árbol como la notación correcta y fórmula de la probabilidad condicional, identificando correctamente los datos del problema y aplicando la regla del

producto. En otros casos llegan a la probabilidad pedida sin emplear la fórmula explícitamente y/o sin elaborar un diagrama de árbol.

Tabla 3: Frecuencias de respuestas ítem 15

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	6	20	20
1	4	13,3	33,3
2	20	66,7	100

La Tabla 3 indica que el 66,7% de los estudiantes logró llegar a respuesta correcta. El 13,3% de los alumnos que obtuvieron un punto, dieron como respuesta a la pregunta una probabilidad igual a 0,4, pero solo la mitad de ellos escribió explícitamente la probabilidad pedida como condicional, mientras que la otra mitad estableció una proporción (ver imagen 3.1) para llegar dicho resultado. Finalmente, de los estudiantes que no obtuvieron puntos, 4 no entregaron ninguna respuesta y 2 dieron por resultado una probabilidad igual a 0,36.

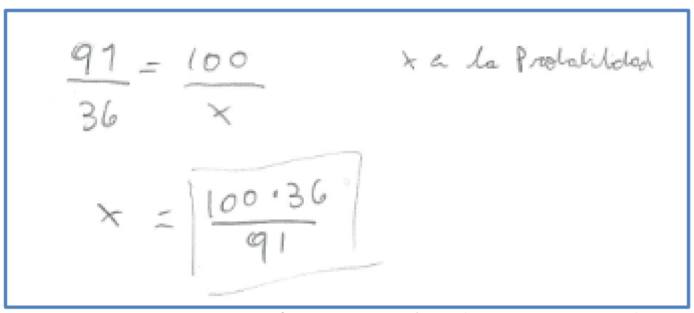


Imagen 3.1: respuesta ítem 15 realizada por un estudiante.

Cabe destacar que en el caso de los estudiantes que confundieron probabilidades simples con conjuntas o condicionales, esto puede ser producto de lo argumentado por Falk (1986) acerca de la poca precisión que entrega el lenguaje ordinario al momento de enunciar un problema de probabilidad condicional, considerando que el ítem 15 es presentado en forma verbal.

- En **ítem 13** se le pide a los estudiantes calcular una probabilidad conjunta de dos sucesos independientes. Para su puntuación, se utilizó el siguiente criterio (Díaz 2007):

0. No se responde o se responde incorrectamente, no llegando a identificar los datos.
1. Construye correctamente el árbol o deja indicada la fórmula, pero no resuelve el problema.

2. Resuelve correctamente. Por ejemplo en el caso siguiente el alumno identifica los datos y la probabilidad pedida y aplica correctamente la fórmula del producto para el caso de sucesos independientes.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8\,.$$

Tabla 4: Frecuencias de respuestas ítem 13

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	8	26,7	26,7
1	2	6,6	33,3
2	20	66,7	100

Del 66,7% que obtuvo la puntuación máxima, 7 de ellos escribieron detalladamente la probabilidad de la intersección de ambos sucesos aplicando la fórmula del producto para sucesos independiente, mientras que los 13 restantes solo registraron la multiplicación $0{,}7 \cdot 0{,}8$ sin escribir nada más. En el caso de los 2 estudiantes que obtuvieron un punto, ambos lograron identificar correctamente que la que la probabilidad solicitada correspondía a la intersección de los dos sucesos involucrados, pero cometieron errores al momento de calcular el resultado. Uno consideró que los sucesos eran dependientes y el otro utilizó el axioma de la intersección de sucesos, asumiendo que $P(A \cup B) = 1$ (ver imagen 4.1).

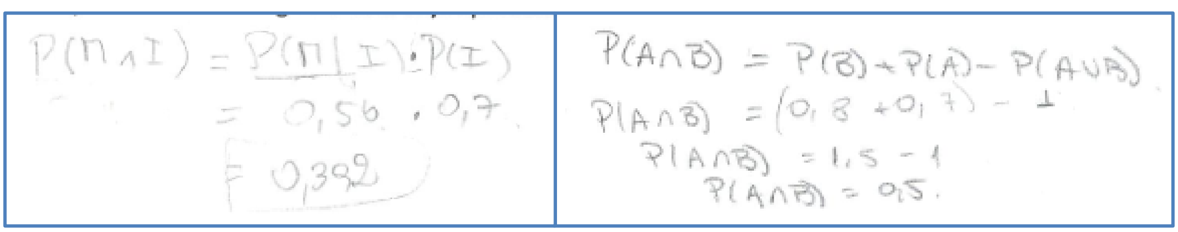


Imagen 4.1: respuesta erradas ítem 13 realizadas por 2 estudiantes distintos

- En el **ítem 12** se le solicita a los estudiantes calcular una probabilidad condicional donde los sucesos condicionantes son independientes al suceso condicionado, y por tanto, no inciden en su probabilidad de ocurrencia. La puntuación es la siguiente (Díaz 2007):

0. No se responde, o se responde incorrectamente. Por ejemplo, si se indica que el caso siguiente tiene mayor probabilidad de ser un valor impar, argumentando que ya hay muchos valores pares en la secuencia. En este caso se tiene una concepción incorrecta de independencia, ya que se supone que la probabilidad depende de los lanzamientos anteriores.

1. Se da una estimación frecuencial de la probabilidad. Corresponde al caso en que el alumno calcula la probabilidad a partir de la frecuencia relativa obtenida en los ensayos que se describen en el ítem, es decir, da cómo valor de la probabilidad el valor 10/15 (hay un total de 10 pares en los quince lanzamientos). En este caso el alumno podría considerar que estamos trabajando con un dado sesgado.
2. Se calcula correctamente la probabilidad, dando el valor 1/2. Los alumnos que proporcionan esta respuesta razonan correctamente que la probabilidad del siguiente lanzamiento no depende de los resultados en los anteriores.

Tabla 5: Frecuencias de respuestas ítem 12

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	3	10	10
1	1	3,3	13,3
2	26	86,7	100

Según los resultados entregados en la Tabla 5, la gran mayoría de los estudiantes no tuvo problemas para resolver este ítem. Solo una persona dio una estimación frecuencial de la probabilidad y los 3 alumnos que no obtuvieron puntajes dejaron la pregunta en blanco.

4.1.5.2. Discriminación entre diferentes tipos de probabilidad y lectura de tablas.

Este grupo solo considera el ítem 6, el cual está compuesto de 4 preguntas. El objetivo fue que los estudiantes, a partir de dos sucesos definidos (digamos A y B), calcularan una probabilidad simple, una probabilidad conjunta, una probabilidad condicional y una probabilidad condicional inversa. Para resolver cada uno de los problemas, era necesario obtener los datos de una tabla de doble entrada. En la Tabla 6 se presentan los resultados de los diferentes apartados del **ítem 6**.

Tabla 6: Frecuencias (y porcentajes) de respuestas ítem 6.

	I. $P(A)$	II. $P(A \cap B)$	III. $P(A/B)$	IV. $P(B/A)$
Incorrecto	0 (0)	3 (10)	3 (10)	3 (10)
Correcto	30 (100)	27 (90)	27 (90)	27 (90)

Del total de los estudiantes, el 90% contestó correctamente el ítem completo, mientras que el 10% restante, cometió errores en los apartados II, III y IV. En el caso de la probabilidad conjunta, los 3 alumnos que llegaron a resultados equívocos supusieron que los sucesos eran independientes, aunque la dependencia es patente en la tabla. Uno de ellos, cometió un error adicional, que fue expresar la probabilidad conjunta como la suma de los dos sucesos (ver imagen 6.1).

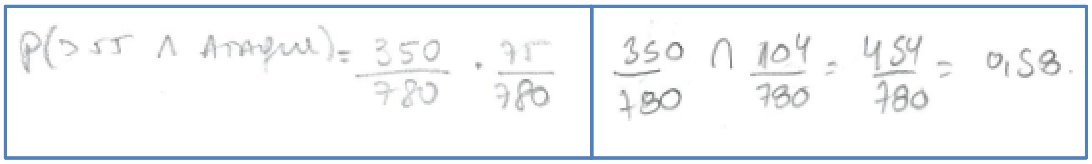


Imagen 6.1: respuestas erradas ítem 6 realizadas por 2 estudiantes distintos

En los apartados III y IV se esperaba que los posibles errores fueran la confusión de probabilidades condicionales y conjuntas, y efectivamente las respuestas incorrectas concordaron con la hipótesis previa. Al calcular $P(A/B)$, 2 estudiantes respondieron $P(A \cap B)$ y 1 $P(B/A)$, mientras que en el apartado IV, los mismos 2 estudiantes volvieron a dar como resultado $P(A \cap B)$. El otro restante calculó $P(B/A)$ como el cociente entre $P(A)$ y $P(B)$, confundiendo el numerador de la expresión que entrega el resultado y llegando a una probabilidad mayor a 1 (ver imagen 6.2).

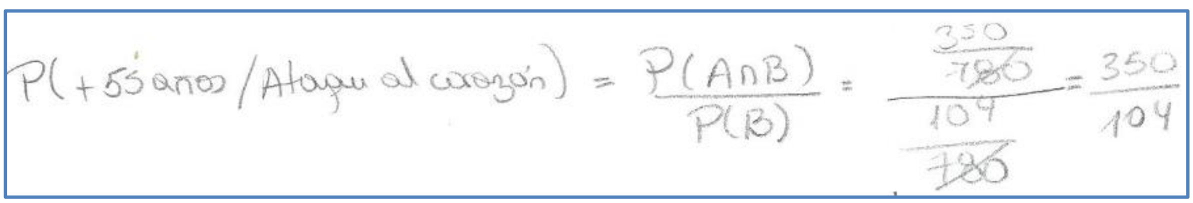


Imagen 6.2: respuesta estudiante ítem 6.

Es necesario recalcar que a nivel global, los resultados obtenidos por los estudiantes son bastantes positivos, considerando que en el mismo estudio realizado por Díaz (2007), los errores en los apartados III y IV se acercó al 40%.

4.1.5.3. Comprensión conceptual de la probabilidad condicional.

- El **ítem 1** evalúa la definición de probabilidad condicional, su puntuación es la siguiente (Díaz, 2007):

0. Respuesta totalmente incorrecta o no da respuesta. La incorrección se produce por confusión con probabilidad conjunta o simple.
1. Define correcta, pero imprecisamente una de las probabilidades pedidas, por ejemplo: *"En la probabilidad condicional, para que se dé un suceso, se tiene que dar otro".* Este

alumno se da cuenta que intervienen dos sucesos, pero la respuesta no es totalmente correcta porque matemáticamente podemos definir la probabilidad condicional, independientemente de que el suceso ocurra o no

2. Define correcta, y precisamente una de las probabilidades pedidas.
3. Define correcta, pero imprecisamente las dos probabilidades pedidas, como en el caso siguiente: *"Probabilidad simple: aquella en la que hay un sólo elemento y en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos".* La respuesta es imprecisa, porque en la probabilidad conjunta también intervienen dos sucesos. Otro ejemplo es el siguiente: *"La probabilidad simple es la probabilidad de que ocurra una variable y la condicional que ocurra sabiendo que ha ocurrido otra que la condiciona".* Es impreciso porque se refiere a variables y no a sucesos.
4. Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades pedidas. Por ejemplo: *"Probabilidad simple $P(A)$, calcular la probabilidad de un sólo suceso.*
   Probabilidad condicional $P(A) = P(A \cap B)/P(B)$, calcular la probabilidad de A dado la ocurrencia de B.

Tabla 7: Frecuencias de respuestas ítem 1

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	0	0	0
1	5	23,3	23,3
2	7	16,7	40
3	10	33,3	73,3
4	8	26,7	100

Los resultados indicados en la Tabla 7 muestran que el 26,7% de los estudiantes definió correcta y precisamente ambas probabilidades, y que todos los estudiantes definieron de manera correcta al menos una probabilidad. Hubo un patrón que se repitió en prácticamente todas las respuestas que no obtuvieron la puntuación máxima. La gran mayoría de los estudiantes definió correctamente la probabilidad condicional, pero al momento de definir la probabilidad simple, un número importante la definió como solo como "número de casos favorables dividido el número de casos totales", confundiendo la probabilidad de un solo suceso, con la probabilidad de un suceso en un modelo discreto uniforme (ver imagen 7.1).

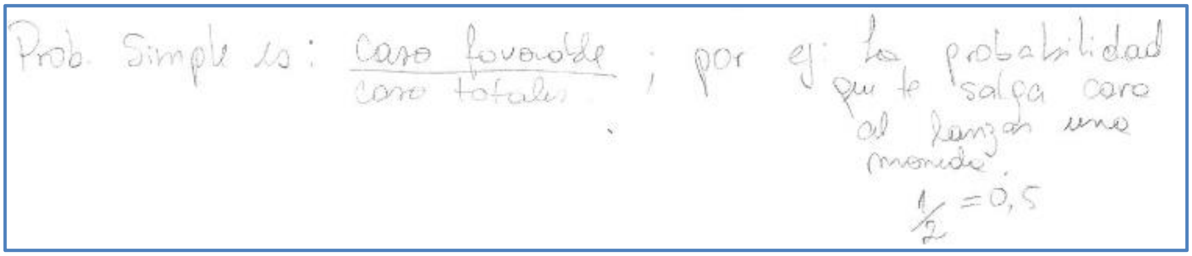

Prob. Simple es: $\frac{\text{caso favorable}}{\text{caso totales}}$; por ej: la probabilidad que te salga cara al lanzar una moneda. $\frac{1}{2} = 0,5$

Imagen 7.1: respuesta ítem 1 realizada por un estudiante.

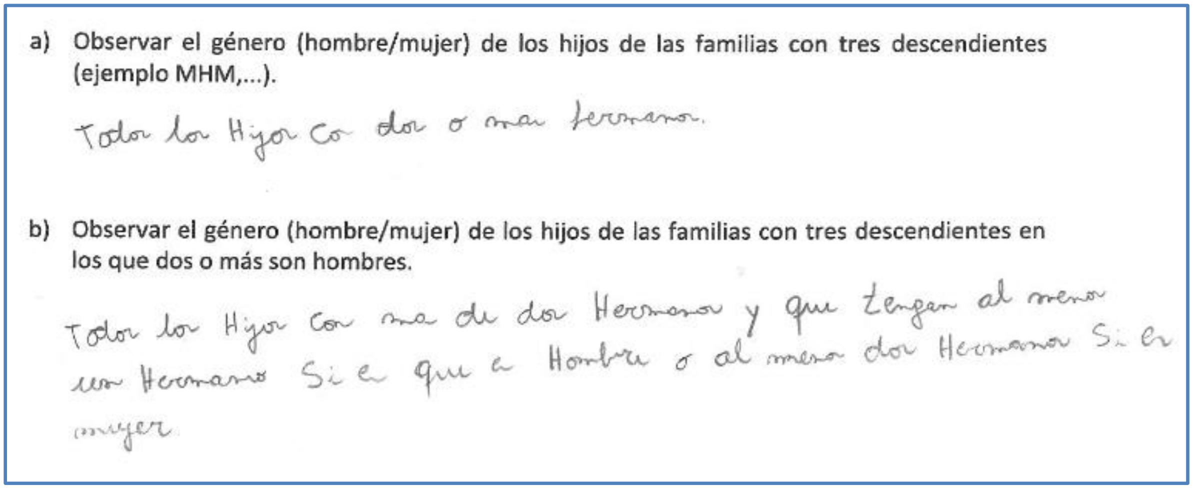
- El **ítem 2** busca que los estudiantes consideren que la probabilidad condicional supone una restricción del espacio muestral. El criterio de puntuación es el siguiente (Díaz, 2007):

  0. No responde o responde incorrectamente. Un ejemplo de respuesta incorrecta a la primera pregunta sería la siguiente: *(MF, MF, MF).*
  1. Falta más de un suceso del espacio muestral o no tiene en cuenta el orden, como en el siguiente ejemplo de respuesta a la primera pregunta: *{(MMM), (MMF), (MFF),(FFF)}*, pero restringe correctamente el espacio muestral *{(MMF), (MMM)}.*
  2. Responde correctamente. Un ejemplo de respuesta correcta es la siguiente: *Género de los hijos de las familias con tres descendientes {(MMM), (MMF), (MFM),(FMM), (FFM), (FMF), (FFM), (FFF)} y género de los hijos de las familias con tres descendientes en los que dos son varones {(MMM), (MMF), (MFM), (FMM)}.*

Tabla 8: Frecuencias de respuestas ítem 2

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	2	6,7	6,7
1	4	13,3	20
2	24	80	100

Dado que el interés es comprobar que los estudiantes restringen el espacio muestral, se ha considerado como respuesta correcta las puntuadas con 2 y 1 punto. Según dicho criterio, la Tabla 8 muestra que este ítem fue resuelto sin dificultad por prácticamente la totalidad de los alumnos. De los 2 estudiantes que no obtuvieron puntos, uno dejó la pregunta en blanco y el otro no logró comprender las instrucciones del problema (ver imagen 8.1).


a) Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes (ejemplo MHM,...).

Todos los Hijos Con dos o mas hermanos.

b) Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes en los que dos o más son hombres.

Todos los Hijos Con mas de dos Hermanos y que tengan al menos un Hermano Si es que es Hombre o al menos dos Hermanos Si es mujer.

Imagen 8.1: respuesta errada ítem 2 realizada por un estudiante.

- El **ítem 5** propone una situación de extracción de objetos sin reemplazo. En este tipo de ejercicios se logra visualizar de forma muy clara como la ocurrencia del suceso condicionante restringe el espacio muestral, alternando la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado. La Tabla 9 muestra que este ítem resultó ser sencillo para los estudiantes, ya que todos respondieron correctamente.

Tabla 9: Frecuencias de respuestas ítem 5

Una caja tiene cuatro focos, de los cuales dos son defectuosos. Se sacan dos al azar, uno tras otro sin reemplazo. Si el primer foco fue defectuoso, entonces:		
	Frecuencia	Porcentaje
a) Es más probable que el segundo sea defectuoso.	0	0
b) Es más probable que el segundo no sea defectuoso.	**100**	**100**
c) La probabilidad de que el segundo sea defectuoso es igual a la probabilidad de que no lo sea.	0	0

- El **ítem 8** se le propone al estudiante calcular una probabilidad condicional en una situación sincrónica y sin reemplazo. La puntuación es la siguiente (Díaz, 2007):
  0. No se responde, o se responde incorrectamente.
  1. Identifica los casos favorables o posibles, pero no resuelve el problema. Por ejemplo, en respuestas como 2/36, el estudiante confunde la probabilidad condicional con probabilidad simple.

2. Resuelve el problema correctamente bien por la regla de Laplace, bien por la fórmula del producto. Por ejemplo, en el caso siguiente el alumno resuelve el problema por la regla de Laplace: *“{(2,6), (3,4), (6,2), (4,3)}; 2/4=1/2= 0,5”.*

Tabla 10: Frecuencias de respuestas ítem 8

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	6	20	20
1	10	33,3	53,3
2	14	46,7	100

Como se puede apreciar en la Tabla 10, el 46,7% de los estudiantes llegó al resultado correcto. Por otra parte, los 10 alumnos que obtuvieron 1 punto, respondieron que la probabilidad pedida era 2/36, confundiendo la probabilidad condicional con probabilidad simple. Cabe destacar también, que la gran mayoría se ayudó de diagramas para representar el espacio muestral (ver imagen 10.1), mientras que otros (que obtuvieron la respuesta correcta) optaron por escribir el detalle de cada uno de los elementos del espacio muestral restringido por el suceso condicionante.

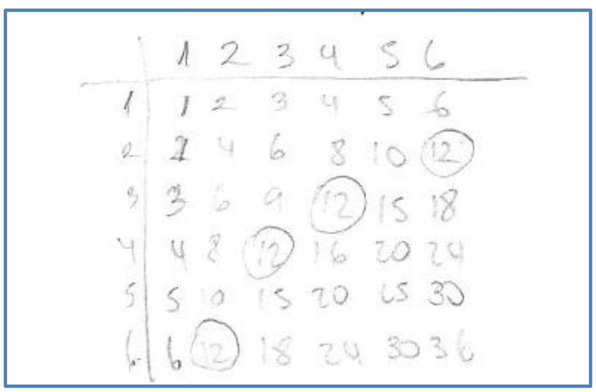


Imagen 10.1: representación espacio muestral realizado por un estudiante.

4.1.6. Resultados sobre obstáculos epistemológicos asociados a la probabilidad condicional.

Este es el otro eje de la clasificación realizada por Díaz (2007), donde los ítems que lo componen buscan determinar la presencia de obstáculos de origen epistemológico asociado a este contenido. Para esta parte del estudio, serán consideradas la falacia del eje temporal, falacia de la conjunción, falacia de la condicional transpuesta y el concepto de independencia.

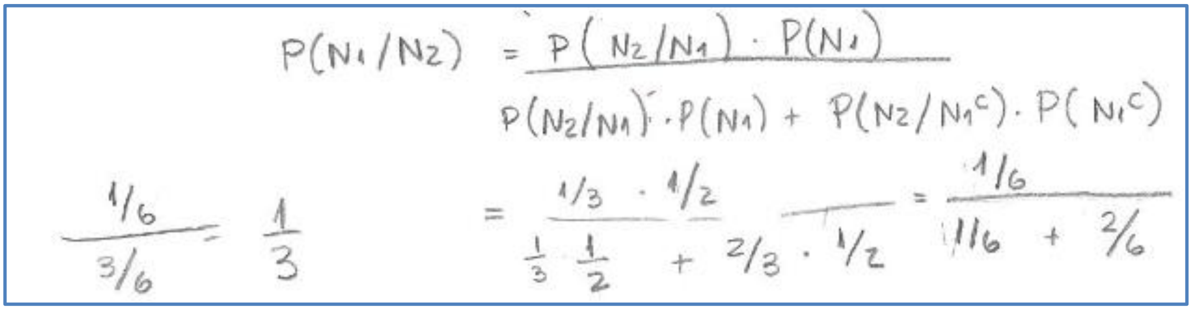
4.1.6.1. Falacia del eje temporal.

- El **ítem 17** corresponde al problema planteado por Falk (1986) a sus estudiantes. En su primera parte, las extracciones de las bolas son compatibles con el eje temporal, pero en la segunda, es donde se debe centrar toda la atención, ya que en la probabilidad condicional pedida, el suceso condicionante ocurre después del suceso condicionado.

Tabla 11: Frecuencias de respuestas ítem 5 (segunda parte).

¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N_1/N_2)$		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/3	**6**	**20**
b) No se puede calcular	8	26,7
c) 1/6	2	6,6
d) ½	14	46,7

La alternativa d) es la que manifiesta la presencia de este obstáculo en el estudiante, ya que al afirmar que la probabilidad pedida es 1/2, se está considerando que la extracción de la segunda bola, al ocurrir después, no puede alterar la probabilidad de ocurrencia de la extracción de la primera. Efectivamente esta fue la alternativa más elegida con un 46,7%, seguida de la opción *no se puede calcular,* con un 26,7%, lo que refleja que este ítem le genero gran dificultad a los estudiantes. La alternativa correcta a) fue seleccionada solo por el 20% de los alumnos, y cabe resaltar que al realizar la revisión de lo registrado por los alumnos en el espacio para desarrollar la respuesta, sólo una persona escribió de forma detallada como obtener la solución del problema mediante el teorema de Bayes (ver imagen 11.1), mientras que las otras 5 restantes, seleccionaron la alternativa a) pero dejaron en blanco el espacio para desarrollar la respuesta.



$$P(N_1/N_2) = \frac{P(N_2/N_1)\cdot P(N_1)}{P(N_2/N_1)\cdot P(N_1) + P(N_2/N_1^c)\cdot P(N_1^c)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 2/3 \cdot 1/2} = \frac{1/6}{1/6 + 2/6}$$

$$\frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Imagen 11.1: respuesta ítem 17 realizada por un estudiante

- En el **ítem 14**, al igual que en ítem 17, la probabilidad condicional pedida tenía la particularidad que el suceso condicionante ocurría después que el suceso condicionado. Para su solución, se podía proceder de la misma forma que en el ítem 17, mediante la utilización del teorema de Bayes, pero también existe otra forma de abordar el problema. Si se dejan caer, por ejemplo, 100 bolas por E, 50 irán por I y otras 50 por II; De estas últimas, 25 caen, aproximadamente por R, así como las 50 van por I. En total de cada 75 bolas que caen en R, aproximadamente 50 vienen por I, luego la probabilidad es 2/3.

La tabla 12, presentada a continuación, indica resultados categóricos. Los estudiantes que seleccionaron la alternativa a), correspondientes al 73,3%, no tomaron en cuenta las bolas que caen por B, es decir no consideraron el condicionamiento del suceso posterior, manifestando la falacia del eje temporal. Por otra parte, las 2 personas que seleccionaron la alternativa correcta, dejaron en blanco el espacio indicado para desarrollar el ejercicio, por lo que no es posible inferir si realmente siguieron un razonamiento adecuado para obtener su respuesta.

Tabla 12: Frecuencias de respuestas ítem 14

Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) ½	22	73,3
b) 1/3	0	0
c) 2/3	**2**	**6,7**
d) No se puede calcular	3	10
Blanco	3	10

Finalmente, cabe recalcar que sólo 1 de los 30 estudiantes escribió en el cuestionario una justificación correcta en el ítem 17 (imagen 11.1), mientras que en el ítem 14 no hubo desarrollos en los cuestionarios de las personas que contestaron acertadamente. Esto es clara evidencia de la dificultad que presentan los alumnos a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas.

4.1.6.2. Falacia de la conjunción.

- El **ítem 17** tiene por objetivo determinar si los estudiantes le asignan una probabilidad mayor a la intersección de sucesos, que a la probabilidad de uno de ellos por sí solo. Esto, como ya se describió en capítulos anteriores, se conoce con el nombre de falacia de la conjunción.

Cuando uno de los sucesos tiene una probabilidad muy alta en comparación con el otro, la intersección de los dos se ve más probable que el suceso de mayor probabilidad, por lo que aparece la falacia. Justamente esta idea es la que se trata de plantear en el ítem 17, ya que la probabilidad de que la súper estrella gane un set, es mucho mayor a la probabilidad de que lo haga su contrincante, y por lo tanto, se puede percibir como más probable que la súper estrella logre dar vuelta el partido y quedarse con el triunfo.

En el caso de la alternativa a), la probabilidad de que "el jugador pierda el primer set" corresponde a una probabilidad simple, mientras que para obtener la probabilidad del suceso descrito en la alternativa b), habría que calcular, por ejemplo, la probabilidad de que "el jugador pierda el primer set" y "gane el segundo" y "gane el tercero" y "gane el cuarto". En cualquier combinación de resultados que se de en la alternativa b), la probabilidad indicada correspondería a la probabilidad de intersección de sucesos independientes donde uno de ellos sería "el jugador pierde el primer set". En conclusión, la alternativa a) es la correcta y la selección de la alternativa b) correspondería a la manifestación de la falacia de la conjunción.

Tabla 13: Frecuencias de respuestas ítem 14

Supón que una estrella del tenis alcanza la final de Roland Garros en 2005. Para ganar el partido hay que ganar tres sets de cinco. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) El jugador pierde el primer set.	**18**	**60**
b) El jugador pierde el primer set pero gana el partido.	3	10
c) Los dos sucesos son igual de probables.	9	30

El 60% de los estudiantes ha contestado correctamente el ítem, mientras que sólo un 10% ha seleccionado la alternativa correspondiente a la falacia de la conjunción. En el caso del 30%

restante que ha considerado ambos sucesos como equiprobables, es importante considerar que pese a que su respuesta es incorrecta, no manifiestan la presencia del obstáculo epistemológico.

Está a la vista que los resultados obtenidos en este ítem son bastante favorables, más aún, si se comparan con los resultados del estudio realizado por Díaz (2007), donde solo 24,9% de los estudiantes que se les aplicó el cuestionario llegó a la respuesta correcta.

- En el **ítem 7**, si se define el suceso A como "tener una mamografía positiva", y el suceso B como "tener cáncer de pecho", el enunciado del problema entrega los valores de $P(A)$ y $P(A \cap B)$, y se pregunta por $P(B/A)$. El objetivo de esta pregunta es determinar si los estudiantes confunden la probabilidad condicional con la simple o conjunta, lo que correspondería a seleccionar los distractores b) o c).

Tabla 14: Frecuencias de respuestas ítem 7

La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es del 10,3%. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0,8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 0,8/10,3 = 0,776, probabilidad de 7,76%	**19**	**63,3**
b) 10,3 · 0,8 = 8,24, probabilidad del 8,4%	2	6,7
c) 0,8%	6	20
d) Blanco	3	10

Como es posible apreciar en la Tabla 14, el porcentaje de alumnos que acertaron en su respuesta alcanza el 63,3%, mientras que un 20% que optó por la opción c), confundió la probabilidad condicional solicitada con la probabilidad conjunta. Como ya se explicó en capítulos anteriores, varios autores atribuyen estas confusiones a la imprecisión que presenta el lenguaje ordinario a la hora de enunciar problemas de probabilidad condicional.

4.1.6.3. Falacia de la condicional transpuesta.

- El **ítem 10** corresponde a la pregunta planteada por Batanero (2012), donde bajo el contexto de problemas médicos, se busca determinar si los estudiantes le asignan el mismo valor a una probabilidad condicional y su transpuesta. La Tabla 15, presentada a continuación, detalla los resultados obtenidos:

Tabla 15: Frecuencias de respuestas ítem 10

Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.	5	16,6
b) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.	**11**	**36,7**
c) Los dos sucesos tienen la misma probabilidad	14	46,8

El razonamiento para llegar a la respuesta correcta ya fue explicado en el capítulo III, por lo que ahora solo se describirán las respuestas de los estudiantes. La alternativa que presenta mayor frecuencia es la c) con un 46,8%, y justamente es la opción que representa la falacia de la condicional transpuesta. La segunda opción con mayor frecuencia fue la alternativa b), con un 36,7%, que corresponde la respuesta correcta. Cabe destacar, eso sí, que uno de los participantes que seleccionó la opción b), afirmó en el espacio en blanco dejado para realizar cálculos, que pese a su elección, “matemáticamente ambas probabilidades son igual de probables”. La imagen 15.1 corresponde al argumento entregado por este alumno.

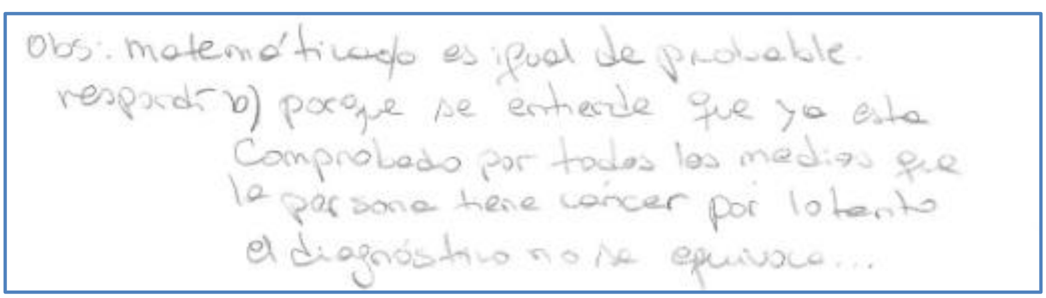

Obs: matemático es igual de probable.
respondí b) porque se entiende que ya esta
Comprobado por todos los medios que
la persona tiene cáncer por lo tanto
el diagnóstico no se equivoca...

Imagen 15.1: justificación ítem 10 realizada por un estudiante

En el estudio realizado por Batanero (2012), uno de los grupos a los cuales se les planteó esta pregunta eran futuros profesores de matemática. Si se comparan dichos resultados con los del presente estudio, son levemente mejores los obtenidos por los estudiantes españoles, donde el

42,3% de los participantes manifestaron la presencia del obstáculo epistemológico y el 42,1% logró contestar correctamente.

4.1.6.4. Concepto de independencia.

- El **ítem 4** corresponde a una adaptación realizada por Díaz (2007) de la pregunta planteada por Sánchez (1996), la cual fue presentada en el capítulo III, junto con la explicación de la respuesta correcta y la justificación de los distractores propuestos. El objetivo de esta es evaluar el concepto de independencia, para lo cual se plantea un problema de extracción de cartas de una baraja de naipes. Los resultados obtenidos por los sujetos de estudio se detallan en la Tabla 16:

Tabla 16: Frecuencias de respuestas ítem 4

Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros" y B el suceso "se extrae un rey". ¿Los sucesos A y B son independientes?		
	Frecuencia	Porcentaje
a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.	10	33,3
b) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda para ver si es oros.	10	33,3
c) Sí, porque P(rey de oros) = P(rey) · P(oros)	**3**	**10**
d) No, porque P(rey/oros) ≠ P(rey)	4	13,3
Blanco	3	10

La respuesta correcta, correspondiente a la alternativa c), fue escogida solo por el 10% de los estudiantes, siendo una de las frecuencias más bajas junto con la alternativa d). La mayor cantidad de errores se concentran en las alternativas a) y b), ambas con un 33,3% de elecciones. En el caso del primer distractor, corresponde a la confusión de independencia con mutua exclusividad, atribuido por Kelly y Zwiers (1986) a la imprecisión del lenguaje ordinario, en donde independiente también puede significar "separado". El segundo distractor, evalúa el error de suponer que el concepto de independencia sólo se puede aplicar en experimentos que se suceden en el tiempo.

4.2. Antecedentes de los docentes.

4.2.1. Sujetos de estudio.

Para el presente estudio, se entrevistó a 3 profesores del área de probabilidad y estadística de la Universidad de Santiago de Chile. Uno de ellos pertenece al Departamento de Física y actualmente imparte clases a los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Física y Matemática en la asignatura de Estadística y Probabilidades en Educación, que incorpora dentro de su programa el contenido de probabilidad condicional. Los 2 profesores restantes pertenecen al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación. Uno realizó el curso de Probabilidad y estadística a una parte de la población que se le aplicó el cuestionario RPC, mientras que el otro no tuvo la posibilidad este año de trabajar con estudiantes de pedagogía, pero si lo ha hecho a lo largo de su trayectoria académica.

4.2.2. Objetivo del estudio.

Obtener información sobre las formas de enseñanza de docentes del área Probabilidad y Estadística que impartan, o hayan impartido, clases a estudiantes de pedagogía en Matemática, en relación a los obstáculos epistemológicos que dificultan la resolución de problemas de probabilidad condicional.

4.2.3. Material y Método.

La entrevista (ver anexo pág. 114) fue elaborada con el fin de satisfacer el objetivo del estudio propuesto. Los aspectos considerados fueron los siguientes:

- Tiempo destinado a abordar el contenido de probabilidad condicional, considerando probabilidad total y teorema de Bayes.
- Conocer la estructura de una clase donde se aborde el contenido de probabilidad condicional.
- Recursos utilizados durante el desarrollo de una clase.
- Referencias bibliográficas utilizadas al momento de proponer ejercicios o actividades a los estudiantes.
- Conocer la opinión de los entrevistados sobre los aspectos que generan dificultades a sus estudiantes y qué estrategias o situaciones de aprendizaje proponen en virtud de su superación.

- Conocer si los docentes han detectado la presencia de los obstáculos identificados en la literatura, junto con obtener información si consideran dichos obstáculos durante sus clases y que estrategias utilizan para su superación.

Para su realización, se contactó por separado a cada uno de los docentes acordando día, horario y punto de encuentro para entrevistarlos de forma personal. Las respuestas fueron grabadas con un equipo telefónico, mediante una aplicación de “grabador de voz”.

4.2.4. Análisis.

Se realizó un estudio descriptivo de las respuestas de cada uno de los docentes para cada una de las preguntas, considerando aquellos aspectos más relevantes de sus argumentos. Para diferenciar las respuestas de los entrevistados, se utilizaron los seudónimos de Profesor 1, Profesor 2 y Profesor 3.

4.2.5. Resultados obtenidos.

Pregunta 1: *¿Cuántas horas de clases aproximadamente destina usted para abordar el contenido de probabilidad condicional, incluyendo probabilidad total y teorema de Bayes?*

Profesor 1: 2,25 o 3 horas.

Profesor 2: 6 horas.

Profesor 3: 3 horas.

Pregunta 2: *¿Podría describir brevemente la estructura de una clase impartida por usted donde se aborde el contenido de probabilidad condicional, considerando su inicio, desarrollo y cierre?*

Profesor 1: Al momento del inicio, el docente trata de proponer una situación de aprendizaje donde los estudiantes puedan ver de forma intuitiva el concepto de probabilidad condicional. Parte con un ejemplo clásico de una máquina que fabrica objetos, de los cuales un porcentaje de ellos resultan defectuosos. Luego plantea 2 problemas, uno de extracción de 2 objetos con reposición, y otro sin reposición, del tal forma que los estudiantes logren visualizar que en el segundo caso, la extracción del primer objeto produce una restricción del espacio muestral al momento de extraer el segundo objeto. A partir de esta noción intuitiva, formaliza el concepto de probabilidad condicional y propone ejemplos para que los estudiantes ejerciten durante la clase.

Profesor 2: Este docente prefirió abordar la pregunta considerando el teorema de Bayes. Al inicio le comenta al curso lo que va a realizar durante la clase. Luego enuncia el teorema algebraicamente dando todos los supuestos o condiciones que se deben dar para que se cumpla, haciendo hincapié en que significan cada una de dichas condiciones y tratando de ser riguroso con los elementos matemáticos involucrados. A continuación, entrega ejemplos mostrándoles a los estudiantes 3 métodos distintos para su resolución. El primero corresponde a definir los sucesos y sus probabilidades asociadas en función del enunciado, para luego resolverlo algebraicamente. El segundo corresponde a la construcción de un diagrama de árbol, detallando que las segundas ramas son probabilidades condicionales a las primeras ramas. El tercer método es a partir de tablas de doble entrada (tablas de contingencia), haciendo énfasis que esta estrategia entrega la información de las probabilidades conjuntas presentes en el ejercicio. Una vez mostrado los 3 métodos, el profesor le comenta al curso que este tipo de representaciones son solo esquemas y que no deben perder de vista la rigurosidad y formalidad de la definición de los sucesos y el trabajo algebraico.

Otro aspecto relevante mencionado por el docente es la utilización de conocimientos previos vistos en estadística descriptiva para caracterizar la noción de condicionalidad, como lo son las tablas de contingencia condicionales, las cuales se enfocan a considerar un subgrupo de los sujetos de estudio que cumplan con la condición de interés.

Profesor 3: Al momento del inicio, presenta la definición de probabilidad condicional y luego caracteriza verbalmente qué es una probabilidad condicional y en qué tipo de situaciones se puede presentar, todo esto ayudado del Diagrama de Venn, utilizado para mostrar gráficamente como la ocurrencia del suceso condicionante restringe el espacio muestral al momento de calcular la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.
Finalmente le muestra al curso algún ejemplo con enunciado y realiza las demostraciones de los teoremas. Cabe destacar que el docente comentó durante esta respuesta que no utiliza ni propone que los estudiantes trabajen con diagramas de árbol para la resolución de ejercicios de este tipo, principalmente porque encuentra que estas representaciones tienden más a confundir que a contribuir en el objetivo de llegar a la resultado correcto.

Pregunta 3: *Al momento de abordar el contenido de probabilidad condicional. ¿Qué recursos utiliza durante el desarrollo de sus clases? ¿Pizarra? ¿Proyector? ¿Guías de ejercicios? ¿Guías de contenidos? ¿Algún software? ¿Otro?*

Profesor 1: Pizarra, guía de ejercicios y guías de materias. En algunas ocasiones el docente utiliza el data show para proyectar los ejercicios presentes en las guías, como una forma de optimizar el tiempo de duración de la clase.

Profesor 2: Pizarra y guías de ejercicios. Si bien el profesor comenta que utiliza software durante la asignatura, este recurso está enfocado principalmente a abordar contenidos netamente estadísticos.

Profesor 3: Solo pizarra y guías de ejercicios.

Pregunta 4: *¿Qué referencias bibliográficas utiliza al momento de proponer ejercicios o actividades a sus estudiantes?*

Profesor 1: Principalmente utiliza las guías de probabilidad de la Facultad de Ciencias y el texto titulado "Probabilidad y Estadística, Aplicaciones a la Ingeniería" de Ramón D. Rivero.

Profesor 2: Utiliza 2 textos. Uno de ellos se titula "Estadística" y su autor es Mario F. Triolla, y el otro se titula "Probabilidad y Estadística" de George C. Canavos.

Profesor 3: También utiliza 2 textos como referencias bibliográficas: "Probabilidad y Estadística aplicadas a la ingeniería" Douglas C. Montgomery y George C. Runger, y "Probabilidad y *Aplicaciones Estadísticas" de Paul L. Meyer.*

Pregunta 5: *En relación al contenido de probabilidad condicional. ¿Qué aspectos considera usted que generan mayor dificultad en sus estudiantes? ¿Podría identificar los errores más frecuentes que se comenten? ¿En qué tipo de ejercicios se cometen estos errores? ¿Qué estrategias o situaciones de aprendizaje genera para que los estudiantes superen estas dificultades?*

Profesor 1: La principal dificultad detectada por este docente es que los estudiantes, al enfrentarse a ejercicios de este tipo, no logran identificar que se trata de un problema de probabilidad condicional, pese a que en su enunciado se utilizan explícitamente los conectores "dado que" o "si". En casos en que los alumnos logran darse cuenta que el problema presentado es de probabilidad condicional, tienden a confundir el suceso condicionante con el suceso condicionado, obteniendo $P(A/B)$ cuando se les ha preguntado por $P(B/A)$. Otra dificultad observada por el profesor se manifiesta cuando los estudiantes deben obtener el valor de una probabilidad condicional mediante un trabajo algebraico a partir de su definición y asumen que los sucesos independientes, llegando al siguiente resultado:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)\,,$$

sin siquiera darse cuenta que simplificaron y llegaron a obtener $P(A)$.

Con respecto al tipo de ejercicios donde se cometen estos errores, el docente plantea que principalmente es en problemas donde el enunciado aparece de forma verbal y los datos son entregados bajo un determinado contexto, argumentando que existen “sutilezas” que algunas veces son interpretadas de forma incorrecta y desencadenan en los errores descritos en el párrafo anterior. Por otra parte, cuando los datos de un problema son presentados en tablas, los resultados de los estudiantes tienden a ser más exitosos y generalmente no presentan mayores inconvenientes.

En relación a las estrategias o situaciones de aprendizaje para superar estas dificultades, el entrevistado propone que para que los estudiantes no confundan el suceso condicionante con el condicionado, hace hincapié en la forma en que se redacta la pregunta del problema recalcando como interpretar los conectores “dado que” o “si”, junto con mostrarles dibujos o representaciones gráficas de espacio muestral inicial versus el espacio muestral condicionado por el suceso.

Profesor 2: Al igual que lo argumentado por el “profesor 1”, este docente considera que la mayor dificultad es que los estudiantes no logran reconocer cuando un problema es de probabilidad condicional. Generalmente en estas situaciones interpretan que se les esta preguntado por la probabilidad conjunta entre el suceso condicionante y el condicionado, entregando como resultado solo el numerador de la definición de probabilidad condicional. Otra dificultad detectada se presenta al resolver problemas donde es necesario utilizar el teorema de Bayes. En estos casos el docente sostiene que cuando sus estudiantes utilizan diagramas de árbol, “quedan cortos” por el hecho que la pregunta invierte los sucesos que aparecen en el diagrama y no les da información sobre cómo proceder en el ejercicio.

Como estrategia para superar estas dificultades, el docente trata de recalcar a sus estudiantes que no se amarren a una sola forma de resolver ejercicios, porque dependiendo del tipo de problema, puede ser que un método sea más exitoso que otro (cabe recordar que los métodos que propone este docente son: desarrollo algebraico, diagrama de árbol y tablas de contingencia). En el caso particular de ejercicios relacionados al teorema de Bayes, el profesor considera que es preferible utilizar tablas de contingencia por sobre diagramas de árbol. Por otra parte, también platea que los estudiantes siempre deben tener presente que el dominador del teorema de Bayes corresponde a una probabilidad total y que por tanto su numerador debe uno de los sumandos que aparezcan en dicho denominador. En el caso que durante el desarrollo del problema el estudiante identifique que esto no está ocurriendo, puede concluir que su resultado está incorrecto y se está cometiendo un error al emplear el teorema.

Profesor 3: Al igual que sus otros 2 colegas, este docente también plantea que la mayor dificultad que presentan los estudiantes es diferenciar cuando en un problema se está preguntando por una probabilidad condicional, y cuando se está preguntando por una probabilidad conjunta. También afirma que a los alumnos presentan problemas al momento de trabajar con el complemento de una probabilidad condicional, manifestando la creencia de que el complemento de $P(A/B)$ es $P(A/B^c)$, en vez de $P(A^c/B)$. Cabe destacar esta dificultad no fue mencionada por los otros profesores ni tampoco formó parte de los obstáculos epistemológicos identificados en la literatura.

En relación a las estrategias para dar solución a estas dificultades, el profesor no profundizó mucho en este tema. Principalmente argumentó que mostraba bastantes ejercicios resueltos tratando de establecer relación entre lenguaje coloquial y teoría de conjuntos. Junto con esto, también considera relevante mostrarle al curso diferentes formas de enunciado que apunten a una misma pregunta, como una forma de poder distinguir entre tipos de preguntas y facilitar las ambigüedades que presentan algunas veces los enunciados representados de forma verbal.

Pregunta 7: *El término obstáculo en educación fue introducido por el investigador francés Guy Brousseau, quien plantea que: "El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo". Por ejemplo, cuando un estudiante afirma que:* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$*, está utilizando la noción de distributividad aprendida al momento de ver multiplicación de expresiones algebraicas. Ese conocimiento aplicado fuera de contexto, se constituye en un obstáculo que genera errores.*

Un importante número de investigadores se han dedicado a estudiar diferentes obstáculos asociados al contenido de probabilidad condicional. A continuación le nombraré algunos de *estos obstáculos y le daré una breve descripción. Para cada uno de ellos le voy a solicitar, si es posible, que me responda las siguientes tres preguntas:*

¿Ha detectado a menudo la presencia de este obstáculo en sus estudiantes? ¿Considera este obstáculo al momento de abordar el contenido de probabilidad condicional? ¿Qué estrategias, situaciones de aprendizaje, representaciones de los conceptos genera para que el estudiante supere dicho obstáculo?
Falacia del eje temporal: *Corresponde a la creencia de que si un suceso condicionante ocurre después, este no altera la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.*

Profesor 1: Este docente reconoce la presencia de este obstáculo en sus estudiantes, pero de forma esporádica. Para aclarar esta idea, busca proponer ejemplos donde no exista una relación temporal entre ambos sucesos y de está formar mostrarle a los alumnos que la relación de condicionalidad no necesariamente debe ser entendida como una relación de causa y efecto.

Profesor 2: En su respuesta, el docente plantea que este obstáculo se puede detectar en la medida de que el profesor proponga problemas de este tipo a sus estudiantes. En su caso personal, si ha observado la manifestación de esta creencia en sus estudiantes, pero lo atribuye más a dificultad de emplear el teorema de Bayes que ha lo que plantea la falacia. Considera este tipo de ejercicios solo como problemas asociados al teorema de Bayes y no como no como un “caso especial” en el cual haya que tener cuidado. Para su superación no propone ninguna estrategia en particular, solo los 3 métodos detallados anteriormente (diagramas de árbol, tablas de contingencia y desarrollo algebraico).

Profesor 3: Si bien el docente afirmó que nunca ha detectado la presencia de este obstáculo en sus estudiantes, intuitivamente suponía que ellos podían pensar que no tenía sentido condicionar un suceso mediante uno que ocurra en el futuro. Estos casos los consideraba como ejemplos del teorema de Bayes y en general manifestó que los alumnos no tenías mayores problemas para resolverlos.

Falacia de la condicional transpuesta: *Corresponde a no discriminar entre P (A/B) y P (B/A).*

Profesor 1: El docente no ha detectado que los estudiantes le asignen el mismo valor a $P(A/B)$ y $P(B/A)$, lo que sí ha detectado es que en algunas ocasiones dan como respuesta $P(B/A)$ cuando se les está pidiendo $P(A/B)$. La estrategia o situación de aprendizaje para superar este obstáculo fue informada en la pregunta 5.

Profesor 2: En este caso el docente nunca ha detectado la presencia de la falacia de la condicional transpuesta.

Profesor 3: Al consultarle por este obstáculo el docente afirmó que si bien efectivamente se manifiesta, generalmente se da en muy pocos casos. Para su superación, propone una interesante analogía. Mediante ejercicios, busca que los estudiantes relacionen el suceso condicionante con lo que "ya saben" y el suceso condicionado con lo que es aleatorio (entendiendo naturalmente que todos son eventos aleatorio). A partir de esto, el docente logra que sus estudiantes logren diferenciar suceso condicionate y condicionado, y de esta forma lograr diferenciar entre $P(A/B)$ y $P(B/A)$

Falacia de la conjunción: *Corresponde a la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión.*

Profesor 1: Nunca ha detectado este obstáculo y tampoco ha considerado estrategias para su superación.

Profesor 2: En este caso el docente nunca ha detectado la presencia de la falacia de la conjunción. Lo que sí, durante esta pregunta recordó un obstáculo que ha detectado con bastante frecuencia y que se relaciona a la intersección de sucesos. A momento de escribir la solución de un ejercicio de probabilidad conjunta, el profesor ha observado en muchos casos que los estudiantes utilizan la siguiente notación:

$$P(A \cap B) = P(A) \cup P(B).$$

Cuando se le consultó si consideraba que esto era un error solo de notación, afirmó que esto corresponde a un error conceptual, argumentando que este tipo de respuestas podrían informar que el estudiante no logra comprender que las probabilidades "caer en el espacio real". Además añadió que no ha podido erradicar esta creencia de los alumnos y que se repite en todas las generaciones.

Profesor 3: El docente nunca ha detectado la presencia de este obstáculo. Él cree que esto se debe a la rigurosidad matemática al momento de abordar los axiomas de probabilidad y la importancia que le da a la teoría de conjuntos, junto con los diagramas de Venn (considerando las probabilidades como áreas), como estrategias para que los estudiantes puedan tener una interpretación gráfica de estos fenómenos.

Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes.

Profesor 1: No ha detectado la manifestación de este obstáculo en sus estudiantes. Bajo el supuesto, el profesor argumenta que ambos conceptos son muy fáciles de ejemplificar, por lo que los caracterizaría con situaciones cotidianas de tal forma que los estudiantes logren comprender sus diferencias.

Profesor 2: El docente considera que este obstáculo se manifiesta recurrentemente, desconociendo el motivo de por qué los estudiantes no logran hacer esta distinción. Al momento de consultarle por una estrategia o situación de aprendizaje para su superación, contestó que solo intentaba buscar ejemplos cotidianos y sencillos que le permitieran al estudiante asociar estos 2 conceptos a situaciones concretas de su diario vivir para evitar este tipo de confusiones.

Profesor 3: Este obstáculo lo consideró como el más frecuente de 4 propuestos. Para su superación siempre considera dentro de la planificación de una clase donde aborde el concepto de independencia, hacer la distinción entre ambos conceptos y luego demuestra que 2 sucesos son mutuamente excluyentes, entonces es imposible que sean independientes. Finalmente agrego que esta creencia va desapareciendo con el correr de las clases y que al llegar el momento de la prueba, prácticamente no se manifiesta.

4.3. Recomendaciones y sugerencias.

En esta sección se expondrán todos aquellos antecedentes relevantes a considerar para la elaboración de la estrategia propuesta como objetivo general de este proyecto de graduación. La aplicación del cuestionario RCP, junto con las entrevistas realizadas a los docentes, permitieron obtener información fundamental para el diseño de la estrategia, principalmente porque dan la posibilidad de que este recurso apunte a superar aquellos obstáculos particulares manifestados por sujetos de estudio, e incorporar el punto de vista de los docentes y toda su experiencia a la hora abordar el contenido de probabilidad condicional.

La mayoría de los estudiantes que respondieron el cuestionario optan por construir diagramas de árbol y/o tablas de contingencia al resolver un problema de probabilidad condicional. Si bien en el primer tipo de representación la totalidad de los alumnos logra llevar a cabo correctamente la *conversión* del registro de lengua natural (enunciado del problema) al registro figural – icónico (diagrama de árbol), al momento de elaborar las tablas de contingencia, hubo un mismo error que fue cometido por el 10% de los estudiantes y que corresponde a completar las celdas de la tabla con probabilidades condicionales en vez de las probabilidades conjuntas. El obstáculo que entorpece este proceso de *conversión* es la confusión entre ambas probabilidades. Para aclarar esta idea véase el siguiente ejemplo:

Una fábrica dispone de dos máquinas $M1$ y $M2$ que fabrican bolas. La máquina $M1$ fabrica el $40\,\%$ de las bolas y la $M2$ el 60%. ***El $\mathbf{5\%}$ de las bolas fabricadas por $\mathbf{M1}$ y el $\mathbf{1\%}$ de las fabricadas por $\mathbf{M2}$ son defectuosas****. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por $M1$?*

El problema presentado corresponde al ítem 16 del cuestionario RCP. En el proceso de *identificación* del enunciado, el error expuesto anteriormente corresponde a interpretar la oración destacada de la siguiente forman (ver tabla 17):

- $M1$: La bola seleccionada proviene de la máquina 1.
- $M2$: La bola seleccionada proviene de la máquina 2.
- D: La bola seleccionada es defectuosa.
- ND: La bola seleccionada no es defectuosa.

Tabla 17: Ejemplo de confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta.

Interpretación correcta (probabilidad condicional)				Interpretación incorrecta (probabilidad conjunta)			
$P(D\,/\,M1) = 0{,}05$				$P(D \cap M1) = 0{,}05$			
$P(D\,/\,M2) = 0{,}01$				$P(D \cap M2) = 0{,}01$			
Tabla de contingencia correcta				Tabla de contingencia incorrecta			
	$P(M1)$	$P(M2)$			$P(M1)$	$P(M2)$	
$P(D)$	0,02	0,006	0,026	$P(D)$	0,05	0,01	0,06
$P(ND)$	0,38	0,594	0,974	$P(ND)$	0,35	0,59	0,94
	0,4	0,6			0,4	0,6	

Si bien la situación caracterizada corresponde a un caso particular donde se manifiesta la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, este obstáculo se manifestó en diferentes ítems del cuestionario RCP y además fue identificado por los docentes entrevistados como una de las dificultades más comunes en sus estudiantes a la hora de resolver problemas de este tipo, por lo que es necesario que en la estrategia a desarrollar considere un conjunto de recomendaciones que ayuden a los estudiantes a discriminar entre ambas probabilidades al momento de leer un problema. Para cumplir con esto, se analizaran diferentes enunciados de problemas de probabilidad condicional propuestos en las referencias bibliográficas que los docentes entrevistados utilizan en sus clases, con el fin de identificar y clasificar las formas más comunes de redactar estos problemas para luego proponer sugerencias para su correcta interpretación.

Pasando ahora a los alumnos que construyeron diagramas de árbol, llama la atención que pese a que todos se hicieron correctamente, solo 9,3 % de los estudiantes logró llegar a resultado final. Esto indica que los alumnos no logran hacer un uso correcto de esta forma de representación para ponerla a disposición del desarrollo del ejercicio. La imagen 17.1 muestra un diagrama de árbol "tipo" elaborado por los sujetos de estudios para resolver el ítem 16. Si bien los diagramas tenían diferencias en las letras asignadas a cada suceso y en la forma de representar las probabilidades (número decimal, fracción o porcentaje), la estructura general fue la misma en todos.

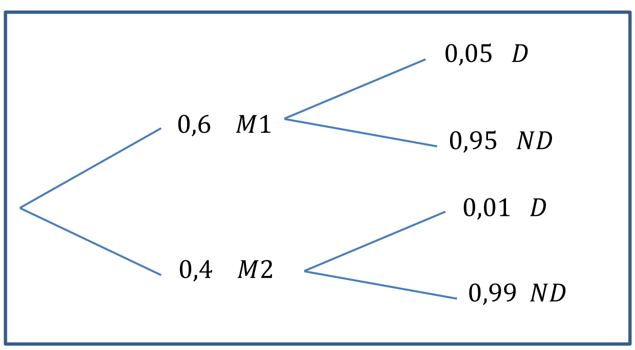


Imagen 17.1: Diagrama de árbol "tipo" elaborado por los estudiantes.

Como se puede apreciar en la imagen 17.1, cuando los estudiantes elaboran un diagrama de árbol solo registran los sucesos involucrados en los problemas pero escriben la representación de las probabilidades. Por ejemplo, en las segundas ramas, los valores numéricos aparecen asociados a los sucesos D y ND, y si bien visualmente estas ramas provienen de los sucesos

$M1$ y $M2$, no es posible inferir si el estudiante está interpretando dichas probabilidades como condicionales. Por otra parte, ningún alumno que optó por este tipo de representación completó las terceras ramas del árbol, correspondientes a las probabilidades conjuntas presentes en el problema. La imagen 17.2, mostrada a continuación, presenta un diagrama de árbol adecuado para representar el enunciado del ítem 16:

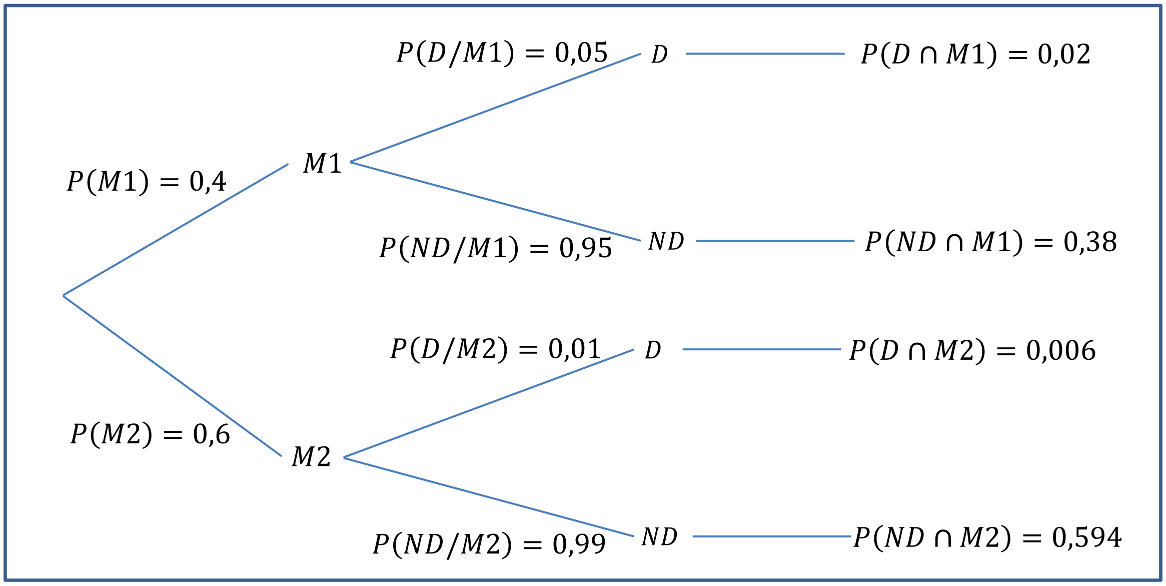


Imagen 17.2: *Diagrama de árbol adecuado ítem 16.*

En conclusión, pese a que estas representaciones son correctas, podrían ser mucho más precisas e incorporar más información relevante para encaminar el desarrollo del ejercicio. El hecho de que un alumno construya un diagrama de árbol similar al propuesto en la imagen 17.1 y no pueda llegar al resultado correcto, es señal de que el recurso no está cumpliendo con su objetivo. En la bibliografía indicada por los docentes entrevistados, no se explica cómo construir detalladamente este tipo representaciones, y generalmente en el contexto educativo son consideradas como “representaciones intuitivas” por la cercanía a la intuición de los estudiantes, asumiendo que el alumno debe acceder espontáneamente a su utilización adecuada. En contraposición a esta idea, según los argumentos entregados en los párrafos anteriores, es imprescindible que la estrategia que se desea desarrollar detalle cómo llevar a cabo los diferentes procesos de *conversión* entre los registros de representación involucrados (árboles, tablas, escritura simbólica, lenguaje natural, lenguaje algebraico, etc.) y que describa las reglas de funcionamiento propias a cada registro, para que de esta forma, exista una mayor claridad sobre cómo identificar y coordinar los diferentes procesos involucrados en la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Otro de los aspectos relevantes a considerar es la coordinación que debe existir entre las diferentes formas de representar el enunciado de un problema de probabilidad condicional con el registro algebraico involucrado. Este último se hace presente en la resolución del problema producto de la *conversión* de la pregunta planteada (registro de lengua natural). En el ejemplo que se ha propuesto, esta situación se representaría de la siguiente forma (ver imagen 17.3):

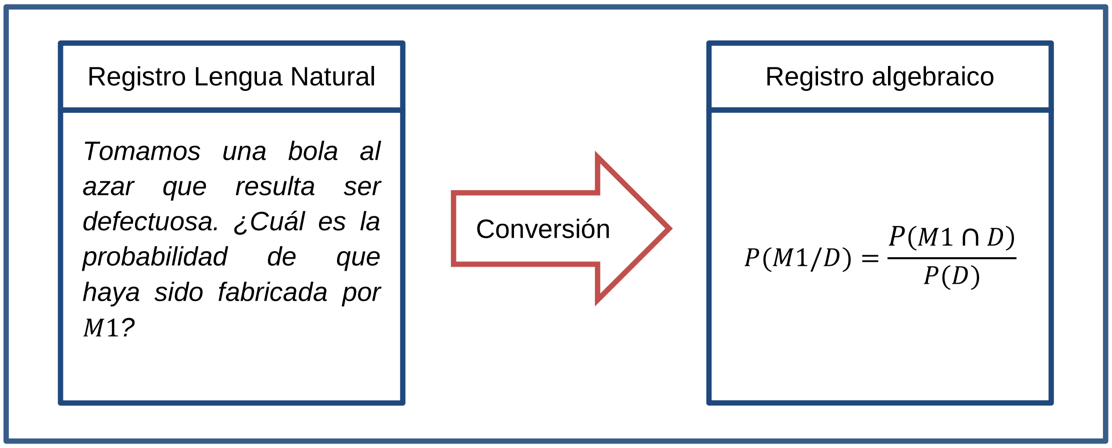


Imagen 17.3: Conversión pregunta del problema a registro algebraico.

Los obstáculos más comunes identificados en este proceso son la confusión entre probabilidad condicional y conjunta (interpretar la probabilidad pedida como $P(M1 \cap D)$), y la falacia de la condicional transpuesta (interpretar la probabilidad pedida como $P(D/M1)$), pero en general la mayoría de los estudiantes logra lleva a cabo esta *conversión* de forma correcta. El principal problema que se detectó en relación a este tema se dio en problemas donde se debía emplear el teorema de Bayes, y específicamente en el proceso de *tratamiento* de la representación de la pregunta en registro algebraico. La imagen 17.4 muestra el *tratamiento* correcto en el ejemplo propuesto:

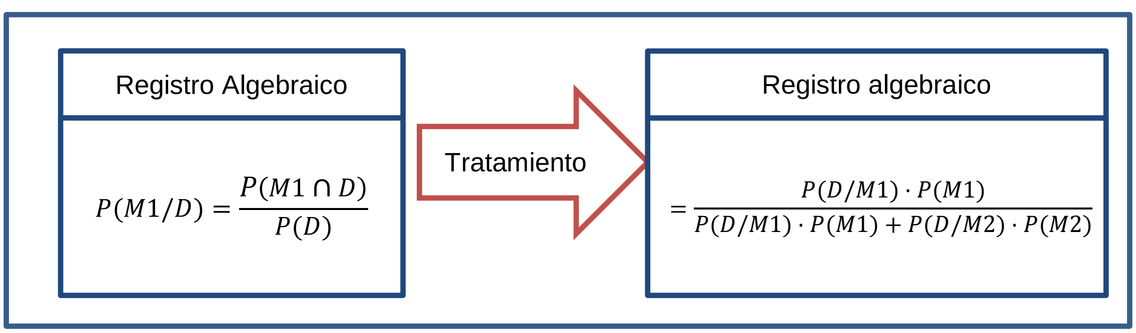


Imagen 17.4: Tratamiento del registro algebraico

A partir del cuestionario RCP, se pudo evidenciar que una vez que los estudiantes representan la pregunta del problema algebraicamente no logran “dar el salto” para poder llegar al resultado final, donde ese “salto” corresponde específicamente al teorema de bayes. Algunos de ellos incluso escribían en sus cuestionarios frases como “no recuerdo la fórmula” o simplemente anotaban signos de pregunta junto con la definición de la probabilidad condicional. Para dar solución a esto, la estrategia a desarrollar deberá considerar reglas claras del tratamiento de expresiones algebraicas durante la resolución del ejercicio, donde el objetivo será establecer una conexión entre las diferentes formas de representar el enunciado (diagramas de árbol o tablas de contingencia) con las reglas a seguir durante el proceso de tratamiento. Por ejemplo, las tablas de contingencia son muy útiles para representar las probabilidades totales involucradas en un problema, porque permiten visualizar gráficamente dichas probabilidades mediante la suma de las celdas asociadas. En el caso que un estudiante opte por ese tipo de representación y tenga la regla descrita anteriormente clara, no tendría problemas para encontrar el denominador del teorema de Bayes del ítem 16, dificultad que fue manifestada por el 63,4% de los estudiantes que respondieron dicha pregunta.

Uno de los docentes entrevistados comentó que consideraba que los diagramas de árbol y las tablas de contingencia eran solo esquemas que facilitan la resolución de un problema, y que desde un punto de vista formal y riguroso el trabajo algebraico es la forma correcta de resolver un ejercicio. En relación a esto, cabe destacar que la estrategia de resolución de problemas se sustentará en el principio de que cada representación es incompleta en relación al objeto que representa, pero en conjunto lo logran caracterizar en su totalidad, entregándole la misma validez a cada una de sus diferentes formas de representación. Lo importante es no olvidar la formalidad que se exige a un alumno en su respuesta, por lo que aspectos como la definición de los sucesos o el propio trabajo algebraico, serán considerados rigurosamente en la estrategia.

En relación a los obstáculos epistemológicos identificados en la literatura, como en el caso de la falacia de eje temporal y la falacia de la condiciona transpuesta, los docentes entrevistados concuerdan en que si un estudiante nunca se ha enfrentado a problemas enfocados a determinar la presencia de estos obstáculos, es muy probable que al momento de resolver un ejercicio de este tipo cometa el error buscado. Junto con esto, uno de los profesores afirma que el presentar problemas resueltos a los alumnos contribuye favorablemente en sus resultados. Dado que la estrategia que se quiere implementar busca ser exitosa para cualquier tipo de problema que se presente, no se enfocará particularmente a la superación de cada obstáculo por separado, sino más bien que en su conjunto, facilite la correcta interpretación de aquellos conceptos que posteriormente desencadenan en obstáculos epistemológicos. Lo que sí, es recomendable incorporar un apartado de ejercicios resueltos donde algunos de ellos se relacionen con los obstáculos que han sido propuestos, de tal forma que el estudiante pueda reconocer problemas de este tipo y que sea la propia estrategia la que le indique el camino a su superación.

Para finalizar este conjunto de recomendaciones y sugerencias, es necesario indicar aquellos aspectos que no serán considerados dentro de la estrategia a desarrollar. De la información obtenida del cuestionario RCP y de las entrevistas realizadas, fue posible inferir que los sujetos de estudio no presentan mayor dificultad al resolver problemas donde el enunciado es presentado mediante un registro tabular, por lo que no se incluirán ejercicios de este tipo. El otro aspecto que no se abordará en la solución al problema de investigación es la falacia de la conjunción, ya que en los ítems relacionados con este obstáculo el porcentaje de alumnos que manifestó su presencia fue bajísimo, y además fue uno de los obstáculos menos identificados por los docentes entrevistados.

V. Análisis a priori de la solución.

5.1 Descripción de la solución.

La solución a la problemática de investigación propuesta consiste en la elaboración de una estrategia para la resolución de problemas de probabilidad condicional basada en la teoría de registros y representaciones semióticas de Raymond Duval, dirigida a los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile (ver anexo pág. 82). El formato de presentación de la estrategia corresponde a un documento escrito, con una redacción explicativa que le permita al alumno poder realizar un estudio del material de forma totalmente personal.

El documento está dividido en tres partes, la primera de ellas se titula: **"Elementos presentes en el enunciado de un problema de probabilidad condicional"**. Este apartado comienza con una caracterización de los contextos más comunes que enmarcan a los problemas de probabilidad condicional, elaborado a partir de la revisión de diferentes ejercicios propuestos en las referencias bibliográficas comentadas por lo docentes en las entrevistas. La clasificación realizada fue la siguiente:

- **Contexto social:** Corresponden a los problemas que tienen como objeto aquellos fenómenos de sondeos de opinión, es decir, aquellas situaciones destinadas a conocer la opinión pública o estudios de una población específica, así como los reportes que se pueden presentar de las características demográficas y sociales de una determinada población. Por ejemplo, es común encontrar problemas enmarcados en contextos sociales relacionados con gustos sobre deportes, hábitos alimenticios, hábitos de consumo a nivel general, opiniones políticas, entre otros.

- **Contexto de industria:** Presente en aquellos problemas que hacen referencia a la producción de un determinado producto o artículo y si éste se elaboró de manera adecuada o defectuosa. También relaciona la obtención de productos por parte de proveedores y los mecanismos de acción, herramientas que son empleadas para detectar la presencia de errores, así como, la elección que puede realizar una persona al adquirir un determinado producto. Así mismo, se considera un problema donde se busquen las condiciones para el funcionamiento de un determinado mecanismo, como por ejemplo, circuitos eléctricos, alarmas de casas, computadores, etc.

- **Contexto médico:** Estos problemas se enmarcan bajo hechos fenomenológicos que tienen por objeto diagnosticar una determinada enfermedad mediante una prueba médica o el éxito de cierta medicina para la cura de alguna enfermedad, así como los resultados de un examen médico, tal y como es el caso de una radiografía, ecografía, mamografías, entre otros tipos de test.

- **Contexto de elementos típicos del azar:** Los problemas de probabilidad condicional que se enmarcan en este contexto hacen referencia a los objetos más comunes asociados al azar que normalmente están presentes en cualquier libro de probabilidad. Se consideraran en este contexto, problemas relacionados con la extracción de bolas de una urna, lanzamiento de monedas, lanzamientos de dados, juegos de lotería, etc.

Posteriormente, con el fin de facilitar el proceso de *identificación* de enunciados presentados en un registro de lengua natural, se establece una distinción entre la hipótesis del problema y la pregunta, entendiendo la primera como toda la información que se entrega en el enunciado de un problema y que es necesaria conocer para poder llegar a su solución, mientras que la segunda se define simplemente como una información desconocida a priori que se pide encontrar. Lo principal de esto es que al estudiante se le informa, que tanto la hipótesis como la pregunta, corresponden a probabilidades simples, conjuntas y/o condicionales asociadas a los sucesos involucrados en el problema, añadiendo que es fundamental ser capaz de poder discriminar entre las 3 probabilidades para poder resolver cualquier tipo ejercicio. A partir de esta idea, se presentan en esta sección los conectores más comunes incorporados en problemas de enunciado de verbal que son utilizados para representar probabilidades condicionales, con el fin de que el estudiante no caiga en el obstáculo de la confusión entre probabilidades conjuntas y condicionales. Para cada conector nombrado, se incluye un ejemplo en donde aparezca y luego la interpretación de la oración involucrada en lenguaje probabilístico (*conversión* de registro de lengua natural hacia registro algebraico).

Para aclara lo expuesto anteriormente, véase el siguiente ejemplo:

Conector: De los - De los que – De los de:

Ejemplo: El 60% de los estudiantes de un instituto de varones están inscritos en el taller de fútbol, mientras que el resto está inscrito en el taller de básquetbol. **De los de** fútbol, el 75% logra aprobar todas las asignaturas. El 65% **de los** inscritos en básquetbol también aprueban todas las asignaturas. **De los alumnos que** aprueban todas las asignaturas, ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un estudiante que esté inscrito en el taller de fútbol?

Sucesos:

- F: El alumno seleccionado está inscrito en fútbol.
- B: El alumno seleccionado está inscrito en básquetbol.
- A: El alumno seleccionado logra aprobar todas las asignaturas.

Interpretación del enunciado:

- $P(A/F) = 0{,}75$
- $P(A/B) = 0{,}65$
- ¿$P(F/A)$? (pregunta del problema).

Con esto finaliza la primera parte de la estrategia. El segundo apartado se titula: "**método de resolución de problemas de probabilidad condicional"**, y como su nombre lo indica, en él se explica el método creado para resolver cualquier tipo de ejercicios que involucren probabilidades condicionales detallando cada uno de los pasos a seguir durante el desarrollo del problema, poniendo en evidencia la necesaria coordinación entre varios registros de representación y describiendo las reglas de funcionamiento propias a cada registro y las de conversión de un registro a otro.

El primer paso propuesto es *definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema,* argumentando que es parte de la formalidad que se exige en la resolución de problemas probabilísticos y además es necesario para mantener el orden y la claridad de cada uno de los pasos que se irán realizando posteriormente.

El según paso es *utilizar un diagrama para representar la información del enunciado*, en donde el estudiante llevará a cabo un proceso de *conversión* desde un registro de lengua natural (enunciado del problema) hacia un registro figural-icónico (diagrama). El diagrama creado nace a partir de las principales características que presentan el diagrama de árbol y la tabla de contingencia. El primero de ellos, tiene la ventaja de que logra representar a todas las probabilidades presentes en un problema, estableciendo de forma clara la diferenciación entre sucesos condicionantes y condicionados, mientras que la tabla de contingencia es muy útil para representar las probabilidades conjuntas y para poder calcular probabilidades totales a partir de la suma de las filas o columnas correspondientes.

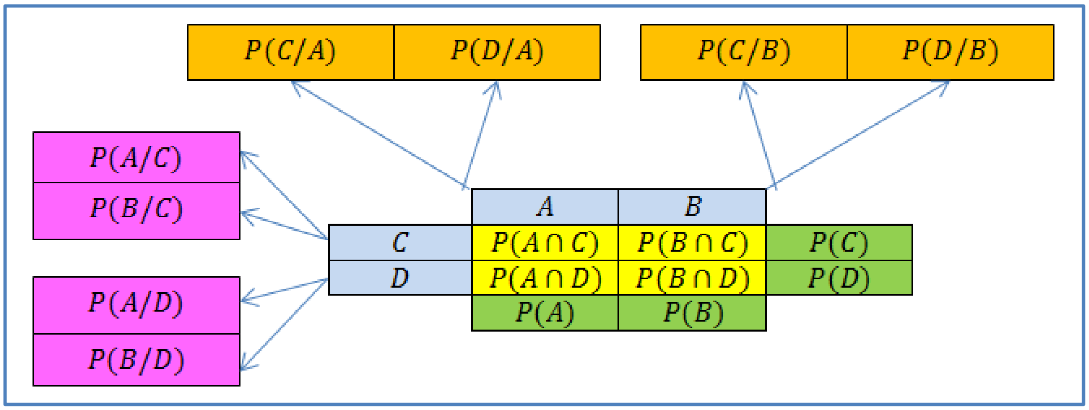


Imagen 18.1: Diagrama de representación del enunciado propuesto en la estrategia.

La imagen 18.1 muestra el diagrama que ha sido propuesto para representar el enunciado de un problema de probabilidad condicional. A continuación se explicarán las principales reglas consideradas en la estrategia para su utilización:

- En las **celdas de color celeste** se deben escribir las letras designadas para cada uno de los sucesos presentes el problema. En las celdas horizontales (A y B) van ubicados el par de sucesos que generan una partición del espacio muestral. Análogamente, en las celdas verticales (C y D), van ubicados el otro par de sucesos que generan una partición del espacio muestral.

- En las **celdas de color naranjo** se deben escribir todas las posibles probabilidades condicionales presentes en la hipótesis del problema, donde los sucesos condicionantes sean los que aparecen en las celdas celestes horizontales (A y B) y los sucesos condicionados sean los que aparecen en las celdas celestes verticales (C y D). La suma de las probabilidades presentes en el par de celdas naranjas con el mismo suceso condicionante debe ser igual a 1. Análogamente, la misma idea se repite para el caso de las **celdas de color rosado.**

Se debe cumplir que:

- $P(C/A) + P(D/A) = 1$
- $P(C/B) + P(D/B) = 1$
- $P(A/C) + P(B/C) = 1$
- $P(A/D) + P(B/D) = 1$

- En las **celdas de color amarillo** se deben escribir cada una las probabilidades conjuntas presentes en el enunciado del problema, considerando la fila y la columna a la que pertenecen. Cada probabilidad conjunta se puede obtener a partir de la regla del producto como se indica a continuación:

  - $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) = P(C) \cdot P(A/C)$
  - $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B) = P(C) \cdot P(B/C)$
  - $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = P(D) \cdot P(A/D)$
  - $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = P(D) \cdot P(B/D)$

- En las **celdas de color verde** se deben escribir cada una las probabilidades simples presentes en el enunciado del problema, considerando la fila o la columna a la que pertenecen. En el caso que no aparezcan probabilidades simples en el enunciado, las celdas se pueden ir completando a partir del teorema de probabilidad total**,** lo que correspondería a sumar las probabilidades conjuntas de cada par de celdas amarillas pertenecientes a la misma fila o a la misma columna. Además, la suma de las probabilidades simples del par de sucesos que particionan el espacio muestral debe ser igual a 1.

Se debe cumplir que:

- $P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap D)$
- $P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap D)$
- $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$
- $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$
- $P(A) + P(B) = 1$
- $P(C) + P(D) = 1$

Finalmente, el tercer y último paso consiste en *representar la pregunta del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.* El primer proceso involucrado es una *conversión* desde un registro de lengua natural (pregunta del problema) hacia un registro algebraico (lenguaje probabilístico), donde el estudiante debe tener presente las sugerencias entregadas en la primera sección para poder distinguir entre los diferentes tipos de probabilidades. Posteriormente el alumno debe llevar a cabo un proceso de *tratamiento* dentro del mismo registro algebraico que le permita llegar al valor pedido, a partir de la ecuación que representa la pregunta. En este proceso, la estrategia considera una conexión entre diagrama de representación y el desarrollo algebraico. Si bien el diagrama y las reglas establecidas en el segundo paso van guiando el camino hacia la respuesta, durante la solución del problema se establece una vinculación entre cada probabilidad obtenida con su respectivo contenido asociado, tal como lo indica la imagen 18.2.

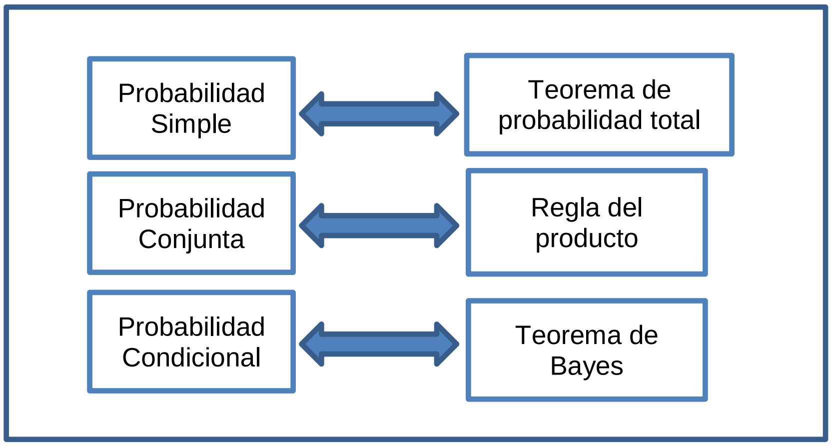


Imagen 18.2: Vinculación entre los diferentes tipos de probabilidades y su contenido asociado.

Finalmente la última sección se titula: **"ejercicios resueltos"**, y tal como su nombre lo indica, presenta una serie de problemas resueltos con el objetivo que el estudiante se familiarice con la estrategia propuesta. Dentro de las sugerencias incorporadas en este apartado, se le indica al estudiante que para cada problema, intente implementar la estrategia de forma personal, y que solo observe la resolución del ejercicio en el caso de presentar muchas dudas o para establecer una comparación con sus resultados.

Por otra parte, algunos de los problemas escogidos guardan relación con los principales obstáculos identificados gracias a la aplicación del cuestionario RCP, como es el caso de la falacia de la condicional transpuesta y la falacia del eje temporal. La idea de esto es que el estudiante se enfrente a este tipo de problemas, y que con la ayuda de estrategia logre interpretar correctamente la situación propuesta y superar el obstáculo.

5.2 Resultados esperados.

Una vez que el alumno haya estudiado la estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional, se espera, en primer lugar, que logre llevar a cabo correctamente el proceso de identificación del enunciado. Esto quiere decir que el estudiante será capaz de identificar cada una de las probabilidades presentes en el problema, discriminado entre probabilidades simples, conjuntas o condicionales, y reconociendo exactamente qué es lo que se le está pidiendo encontrar y cuál es la información que necesita para llegar al resultado buscado.

En segundo lugar se espera que el estudiante pueda emplear satisfactoriamente el diagrama de representación del enunciado, valorando su importancia a la hora de organizar y clasificar la información proporcionada, y reconociendo en él una ayuda útil al momento de guiar el desarrollo del ejercicio. Junto con esto, el alumno deberá ser capaz de relacionar cada probabilidad encontrada con su respectivo contenido asociado, ya sea regla del producto, teorema de probabilidad total o teorema de Bayes, logrando una coordinación entre el diagrama y el tratamiento de las expresiones algebraicas que se deben manipular. Esta vinculación le permitirá adicionalmente al estudiante comprender bajo qué circunstancias es necesario emplear cada uno de estos tres conceptos y las condiciones que se deben dar para utilización.

Finalmente, en relación a los obstáculos epistemológicos que dificultan la resolución de problemas de probabilidad condicional, es de esperar que los estudiantes logren enfrentarse a cualquier ejercicio presentado mediante un enunciado verbal, sin importar el contexto que lo enmarque. Esto considera que el alumno pueda distinguir entre probabilidades conjuntas y condicionales, consiguiendo llevar a cabo el proceso de conversión desde el registro de lengua natural hacia el registro algebraico. También considera que el estudiante logre discriminar entre una probabilidad condicional y su transpuesta, reconociendo que no necesariamente ambas probabilidades deben ser iguales, pese a que en algunas ocasiones el lenguaje verbal haga parecer lo contrario. Y por último, se considera que en problemas donde el suceso condicionante ocurra temporalmente después que el condicionado, el alumno comprenda que en estos casos el suceso condicionante sí genera una restricción del espacio muestral, y por ende, sí incide en la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.

5.3 Fortalezas y debilidades de la solución.

En relación a las fortalezas de la estrategia propuesta, es posible señalar que pese a ser diseñada para estudiantes de pedagogía en matemática y computación de la Universidad de Santiago, su diseño y estructura dan la posibilidad de que cualquier persona que tenga intenciones de resolver problemas de probabilidad condicional pueda estudiarla. Junto con esto, el diagrama de representación del enunciado que se elaboró le da un carácter innovador a la solución, ya que logra combinar las principales virtudes del diagrama de árbol y de la tabla de contingencia.

Por otra parte, pesé a que la estrategia considera un diagrama de representación en particular, la forma en cual se describe el método de resolución de problemas, le da al lector la flexibilidad de poder seguir los pasos que se indican utilizando el sistema de representación del enunciado que él estime conveniente. Más aún, en el caso que el alumno opte por no seguir la estrategia propuesta, el solo hecho de estudiar el documento le permitirá comprender y aplicar de mejor forma las probabilidades condicionales, integrar todos los conceptos involucrados y saber bajo qué circunstancias emplear los teoremas de probabilidades totales y de Bayes,

Por último, como ya se mencionó anteriormente en los resultados esperados, otra de las fortalezas más relevantes presentes en la estrategia de resolución de problemas, es que se enfoca a superar aquellos obstáculos y necesidades particulares de los sujetos de estudio, información que fue obtenida gracias a las entrevistas realizadas a los docentes y a la aplicación del cuestionario RCP.

Pasando ahora a las principales debilidades de la solución, cabe señalar que la estrategia no se enfoca en la superación de obstáculos como la falacia de la conjunción y la confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. El primer de ellos no fue considerado principalmente por los resultados obtenidos en el cuestionario RCP, donde fue posible evidenciar que sólo un 10% de los estudiantes manifestó la presencia del obstáculo y la gran mayoría llegó a resultados correctos en los ítems relacionados a este tema. En el caso del concepto de independencia, la estrategia se enfoca principalmente a los problemas “clásicos” de probabilidad condicional, en los cuales normalmente se calculan probabilidades conjuntas solo para poder obtener probabilidades totales o probabilidades condicionales a partir del teorema de Bayes, en situaciones donde los sucesos involucrados son dependientes. Por esta razón, se prefirió acotar y precisar los conceptos a tratar y no considerar la independencia entre sucesos.

Otra debilidad encontrada guarda relación con la exploración de la validez de la estrategia propuesta. En un principio se pensó en llevar a cabo este proceso a partir de una muestra de los mismos sujetos de estudio, donde a los estudiantes se les entregará el documento con la estrategia, se les diera un tiempo para estudiarla y posteriormente se les aplicara un instrumento de evaluación con el fin de obtener los antecedentes necesarios para determinar cuan exitosa podría llegar a ser la solución. Por problemas como la dificultad para contactar a los estudiantes, sumado también al tiempo disponible para cumplir con los plazos estipulados, se tomó la decisión de que sean los docentes que contestaron las entrevistas quienes determinen la validez de esta estrategia de resolución de problema.

5.4. Recomendaciones para su puesta a prueba.

El documento donde se presenta la estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional propone un formato y diseño auto explicativo que lo hacen ser un material de estudio personal. Por lo tanto, para su puesta a prueba, no se busca que el docente modifique la planificación del curso ni que cambie su forma de enseñanza, sino más bien que la considere como una herramienta adicional, que contribuya con el logro de los aprendizajes propuestos en el programa de la asignatura.

El propósito es que el docente lleve a cabo el desarrollo de las clases de la forma planificada. Una vez que haya abordado formalmente los contenidos de probabilidad condicional, teorema de probabilidad total y teorema de Bayes, justamente en el instante en que los estudiantes estén ejercitando y viendo las diferentes aplicaciones de estos conceptos, se le recomienda al docente que entregue el material al curso, ya sea de forma digital o impresa.

Es importante que el profesor les comunique a los alumnos que se trata de una estrategia de resolución de problemas que utiliza un sistema de representación que combina características del diagrama de árbol y de las tablas de contingencia. En ella, podrán encontrar sugerencias para reconocer y distinguir toda la información contenida en el enunciado del problema, junto con una descripción detallada sobre cómo enfrentar un ejercicio de este tipo, vinculando cada paso a seguir con los contenidos abordados durante la clase y sin perder de vista la rigurosidad y formalidad que exige una solución matemática. Cabe destacar que el estudio del material debe ser absolutamente voluntario, y que sea visto como una herramienta que ayude a aquellos estudiantes que presentan mayores dificultades.

VI. Análisis a posteriori de la solución y conclusiones.

6.1. Objetivo del estudio y metodología empleada.

El presente estudio tiene por objetivo explorar la validez de la estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional propuesta como solución al problema de investigación. Para su cumplimiento, se contactó vía correo electrónico a los tres profesores del área de probabilidad y estadística de la Universidad de Santiago que fueron entrevistados anteriormente para recopilar antecedentes sobre las formas de enseñanza del contendido de probabilidad condicional.

En dicho correo eléctrico se le solicitó a los profesor responder una nueva entrevista, pero esta vez con el propósito de que cada docente leyera y analizar previamente el documento donde se presenta la estrategia de resolución de problemas (material adjunto al correo), para luego responder de forma presencial una serie de preguntas que permitan recopilar la información necesaria para explorar la validez del recurso didáctico, y de esta forma poder implementar mejoras a la solución elaborada.

Una vez recibida la respuesta de los docentes, según su disponibilidad, se acordó el día y horario para realizar la entrevista. Al igual que la vez anterior, las respuestas fueron grabadas con un equipo telefónico mediante la aplicación de “grabador de voz”. Cabe destacar que antes de comenzar cada una de las entrevistas, se le recalcó a los docentes que la estrategia de resolución de problemas tiene por objetivo ser una herramienta complementaria a las clases de probabilidad condicional impartidas por el Departamento de Matemática y que por lo tanto, el documento no incluye definiciones ni demostraciones de teoremas relacionados al contenido. Junto con esto, se hizo hincapié en que el material está diseñado de tal forma que los estudiantes pueden estudiar la estrategia de forma personal.

6.2. Características del escenario y forma de abordar la entrevista.

El lugar elegido fue la oficina 425 ubicada en el cuarto piso del Departamento de Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. Esta habitación reúne todas las condiciones necesarias para realizar la entrevista; cuenta con calefacción, una buena iluminación y tiene dos sillas ubicadas en lados opuestos de un escritorio destinadas para el entrevistado y el entrevistador.

En cuanto a la vestimenta utilizada por el entrevistador, se optó por una tenida semi formal en tono oscuro, compuesta por zapatos, pantalón de tela, camisa y chaleco. Todo esto con el propósito de entregar una imagen de seriedad y formalidad al entrevistado, para así no llamar su atención ni desviar el objetivo principal de la entrevista.

Al momento de comenzar la entrevista se le comunicó al entrevistado el objetivo y propósito de manera general, sin abundar en detalles que predispongan sus respuestas. Luego se acordó el tiempo requerido para la entrevista, junto con las normas de confidencialidad y la solicitud de su autorización para poder grabar la conversación. Durante la entrevista se empleó un lenguaje formal con el fin de generar una relación asimétrica entre entrevistador y entrevistado, buscando en todo momento que el docente se sienta totalmente cómodo y generando un ambiente agradable para el diálogo, con un tono de voz neutro que no dé posibilidad alguna de influenciar o dar luces de los puntos de vista del entrevistador sobre el tema.

6.3. Elaboración del guion.

Para la elaboración del guion de la entrevista (ver anexo pág. 116) se tomó en cuenta lo planteado por Merton y Kendall (1946), quienes sugieren que en casos como este es conveniente utilizar la “técnica del embudo”. Esta técnica consiste en ordenar los temas guías según la siguiente lógica:

- De lo general a lo particular.
- De lo amplio a lo concreto.
- De lo superficial a lo profundo.
- De lo informativo a lo interpretativo.

En relación a la forma de redacción de las preguntas, se consideró las propuestas elaboradas por los mismos autores citados, quienes señalan que cada pregunta:

- Debe hacer referencia a un solo aspecto o dimensión.
- Debe adaptarse a las características de quien va a responder.
- Debe ser formulada de manera breve y sencilla.
- No debe ejercer influencia sobre la respuesta.
- No debe incomodar al entrevistado.

Teniendo presente estas consideraciones, se elaboró una tabla de especificaciones con todos los aspectos relevantes que deben estar presentes en el guion de la entrevista, con el fin de poder cumplir con el objetivo planteado de explorar la validez del recurso metodológico. A continuación se presenta la tabla de especificaciones propuesta, con las dimensiones visualizadas y sus respectivos indicadores:

Dimensión 1	Indicadores de la dimensión 1
La estrategia desarrolla capacidades específicas en el análisis estadístico que permiten superar los obstáculos epistemológicos en la resolución de problemas sobre probabilidad condicional.	1. Comprendo mejor el problema usando la estrategia. 2. Al enfrentarme a una tarea, soy capaz de identificar cual es el mejor forma de solución que puedo utilizar. 3. Cuando leo un problema soy capaz de generar un modo de solución. 4. El uso de tablas y diagramas facilita el análisis del problema. 5. Comprendo el significado de los conectores dentro de un enunciado. 6. He logrado interpretar correctamente el enunciado problemático. 7. Puedo resolver los problemas con menos dificultad. 8. Es una estrategia útil para la resolución de problemas. 9. La estrategia es eficaz. 10. La estrategia me permite comprender la materia en vez de memorizarla. 11. Puedo identificar lo que necesito para resolver un problema. 12. Aprendo más y mejor con esta estrategia. 13. Entrega elemento fundamentales para la discusión del problema. 14. Ayuda a identificar información importante.
Dimensión 2	**Indicadores de la dimensión 2**
La estrategia desarrolla la capacidad de autoconocimiento respecto de la componente afectiva del proceso de aprendizaje.	1. Encuentro interesante esta estrategia. 2. El comprender la estrategia me hace sentirme más seguro al momento de resolver un problema. 3. Puedo pedir ayuda a los demás cuando lo necesito porque se reconocer donde se presentan mis dificultades. 4. Tengo mayor confianza que me permite comprender y manejar problemas más complejos. 5. La estrategia me ayudó a tener una perspectiva crítica de mi desempeño en la resolución de problemas.

6.4. Análisis.

Se realizó un estudio descriptivo de las respuestas de cada uno de los docentes por separado, analizando aquellos aspectos más relevantes de sus argumentos y vinculándolos con los indicadores esperados de las dos dimensiones propuestas. Al igual que en la entrevista anterior, nuevamente se utilizarán los seudónimos de Profesor 1, Profesor 2 y Profesor 3.

6.5. Resultados obtenidos.

Pregunta 1: *¿Considera usted que esta estrategia desarrolla capacidades específicas en el análisis estadístico que permiten superar los obstáculos o dificultades presentes en un problema de probabilidad condicional? ¿Cuáles serían esas capacidades?*

Profesor 1: El docente contesta inmediatamente que sí, argumentando que la estrategia es útil, porque su utilización le permite al estudiante desarrollar la capacidad de concluir que en una frecuencia condicional no se habla de un espacio muestral completo, sino que se habla de una sub dimensión o sub categoría, concepto que para un alumno puede llegar a ser muy abstracto. Junto con esto, la estrategia entrega las herramientas necesarias para que el estudiante pueda conjeturar que en problemas de este tipo ya no se está hablando del número total de casos, si no que se habla a un total marginal, ya sea fila o columna.

Profesor 2: El docente comenta que la estrategia propuesta le entrega al estudiante la capacidad de responder de forma ordenada un problema, introduciendo una metodología clara que le permite llegar al resultado final. Además, indica que la formalidad matemática es empleada de forma correcta en la estrategia, y una de sus principales fortalezas es que al mostrar en el diagrama todos los resultados integrados, le da al estudiante la posibilidad de evitar memorizar ciertos teoremas, e incluso le permite entender mejor los fundamentos que están detrás de dichos teoremas. Junto con esto, el profesor señala que el diagrama de representación, al tener todas las “combinaciones posibles” (probabilidades involucradas), da la posibilidad de jugar y generar actividades en donde al estudiante se le entreguen algunas probabilidades y tenga que llegar a completar todo el diagrama, añadiendo que este tipo de ejercicios son muy utilizados en la teoría de decisiones.

Profesor 3: En el caso de este docente, parte indicando que los principales obstáculos o dificultades aparecen cuando el estudiante no domina los contenidos probabilísticos, no es capaz de comprender que se le está preguntando o no identifica de forma correcta lo que se le está pidiendo. En relación a esto, señala que la estrategia sí desarrolla capacidades específicas en el análisis estadístico, porque le permite al estudiante trabajar de forma ordenada el problema, argumentar cada paso a seguir con fundamentos probabilísticos e interpretar de forma correcta el enunciado. Todo esto contribuye a que el estudiante tenga la capacidad de tomar las mejores decisiones para llegar a la respuesta final.

Pregunta2: *¿Cree usted que esta estrategia facilita la resolución de problemas de probabilidad condicional? ¿Por qué?*

Profesor 1: Al momento de abordar esta pregunta, el docente hace la diferenciación entre la "buena utilización" y la "mala utilización" de la estrategia, añadiendo que será una herramienta facilitadora de resolución de problemas, siempre cuando se tenga una comprensión global de la problemática y no sea utilizada de forma memorística. Si se usa de forma correcta, permite aterrizar conceptos abstractos de la probabilidad condicional a situaciones concretas, junto con identificar los principales elementos presentes en la hipótesis de problema, con herramientas concretas que facilitan la interpretación del enunciado, como lo son la diferenciación de todas las probabilidades involucradas en los problemas y su relación con los conectores más frecuentes utilizados en la elaboración de las preguntas.

Profesor 2: En esta pregunta, el docente indica que en casos de estudiantes que tengan un estilo de aprendizaje visual les será de gran ayuda, porque se plantean de forma gráfica conceptos que son más bien abstractos. Ahora bien, en el caso de estudiantes que se sienten más cómodos con elementos algebraicos, formulas y "matemática más dura", el profesor señala que probablemente la estrategia no le facilitará la resolución de problemas, pero tampoco se lo dificultará, lo que sí, le entregará una forma alternativa de ver las cosas. Por otra parte, el docente agrega que el diagrama propuesto en la estrategia se ubicaría de forma intermedia entre lo que sería la "matemática dura" y algo más intuitivo como son los Diagramas de Venn, que muchas veces no logran generar el vínculo entre los teoremas y la representación gráfica, como si lo genera el diagrama propuesto en la estrategia.

Profesor 3: "Eso dependerá de la forma que le acomode a el estudiante de resolver problemas". Esto fue lo primero que mencionó el docente al responder la pregunta, para luego argumentar que algunos de los problemas propuestos se pueden resolver de forma inmediata y que no es necesario seguir todos los pasos. Ahora bien, cuando se presentan problemas de mayor complejidad, con mucha información en el enunciado, la estrategia se transforma en un agente facilitador, principalmente porque ayuda a identificar la información entregada y permite dar un desarrollo del problema ordenado paso a paso, vinculando correctamente cada paso con los Teoremas de probabilidad total y de Bayes.

Pregunta 3: *¿El diagrama de representación del enunciado propuesto contribuye al análisis del problema? ¿Por qué?*

Profesor 1: El docente indica que sí, argumentando que el diagrama propuesto ayuda a representar estos problemas que muchas veces pueden ser ambiguos en su lenguaje y llevan a entender de forma errada la información del enunciado. Junto con esto, comenta que cuando se abordan estos problemas de forma gráfica, permite identificar con mayor facilidad lo que se está pidiendo, y en el caso del diagrama creado, funciona como un buen intermediario entre el lenguaje formal del enunciado y el lenguaje probabilístico.

Profesor 2: En este caso, el docente indica que el diagrama permite resumir toda la información involucrada en el problema. El hecho de mostrar las probabilidades condicionales asociadas a los sucesos y todas las probabilidades conjuntas, permite aterrizar todos los conceptos abstractos a un solo elemento gráfico, y de esta forma, facilitar el análisis sobre donde se localiza lo conjunto y lo marginal, para luego decidir qué camino seguir para llegar al resultado final.

Profesor 3: El diagrama propuesto tiene la ventaja de mostrar todas las probabilidades posibles que pueden aparecer en un problema de este tipo. Por otra parte, el docente considera que si bien su diseño puede parecer complejo, la tabla de doble entrada presente en el centro del diagrama ayuda a obtener de forma clara las probabilidades totales de los sucesos definidos y esto se vincula muy bien con las probabilidades condicionales representadas por las ramas que salen de cada suceso, lo que permite facilitar la utilización del Teorema de Bayes.

Pregunta 4: *¿Considera que esta estrategia le entrega seguridad al estudiante? ¿Por qué?*

Profesor 1: En su respuesta el docente considera que sí, principalmente porque la forma de presentar la estrategia es muy clara y detallada, junto con entregar herramientas sobre cómo abordar los diferentes tipos de problemas de probabilidad condicional. Cuando un alumno lograr dominar de forma correcta la estrategia, tendrá la seguridad absoluta que podrá llegar al resultado correcto.

Profesor 2: Al responder esta pregunta, el docente toma elementos que ya mencionó anteriormente, argumentando que en casos de estudiantes que son más bien visuales, que les facilita el realizar esquemas y el ordenar información en una tabla, la estrategia definitivamente les entregará más seguridad, principalmente porque comprenderán de mejor forma los contenidos. En el caso de los estudiantes que son más "algebraicos", le podría entregar más seguridad, en el sentido de poder visualizar un enfoque alternativo y ver plasmado lo que ya manejan en esta nueva metodología.

Profesor 3: El docente parte su respuesta indicando que para tener seguridad al momento de resolver un problema, es fundamental tener un dominio absoluto de los contenidos vinculados al ejercicio. Partiendo de dicha hipótesis, la estrategia contribuye significativamente a entregar seguridad al estudiante, porque la metodología propuesta hace un recorrido por todos los procesos cognitivos que son necesarios para llegar al resultado final; identificar lo que le están pidiendo, definir los sucesos involucrados, utilizar esa información a través del diagrama de representación y relacionarlo con la definición de probabilidad condicional, el Teorema de probabilidad total y teorema de Bayes, para finalmente llegar al resultado final. Cuando se tiene esa estructura clara sobre cada paso a seguir, es posible ir evaluando si el desarrollo del ejercicio es correcto, y de esa forma, sentir mayor seguridad de su resultado.

Pregunta 5: ¿Cree usted que el estudio de esta estrategia le permite al estudiante reconocer sus principales dificultades en relación a problemas de probabilidad condicional?

Profesor 1: Comienza la respuesta con una reflexión, comentando su creencia de que para los estudiantes, en general, lo más relevante es el resultado final, y no buscan aquellos aspectos en los cuales pueden cometer errores. Dicho esto, añade que durante el desarrollo de un ejercicio, normalmente los estudiantes no se hacen preguntas sobre las principales dificultades que puedan existir en los problemas de probabilidad condicional, por lo que la respuesta a la pregunta planteada dependerá absolutamente de cada alumno. Además señala que el documento entrega una estrategia clara para resolver problemas y da la oportunidad de que el estudiante pueda reconocer sus errores, pero finalmente el cumplimiento de esto queda en manos del alumno.

Profesor 2: En su respuesta el docente considera como primera dificultad la interpretación correcta del enunciado, es decir, el reconocer las probabilidades que se le entregan como hipótesis y el poder identificar lo que se está preguntando. En relación a esto, comenta que le pareció novedoso el trabajo previo que se realiza sobre la descripción de los contextos probabilísticos más comunes y los ejemplos de conectores más frecuentes, agregando que esos elementos son muy útiles para superar la dificultad señalada. La otra dificultad que menciona es la comprensión clara de lo que es una partición de un espacio muestral, junto con los Teoremas de Probabilidad Total y de Bayes, indicando que la forma que tiene la estrategia de relacionar estos conocimientos probabilísticos con el diagrama de representación gráfica, entrega una herramienta útil para la construcción de estos elementos abstractos.

Profesor 3: El docente responde que en el apartado de ejercicios resueltos, cada uno de los problemas propuestos se vincula con los obstáculos por lo que se les preguntó en la primera entrevista. Si bien el profesor 3 no recordaba con claridad todos los obstáculos, mencionó que en el documento se hace alusión a las formas erradas de interpretar el enunciado de un problema probabilístico, como confundir una probabilidad condicional con una probabilidad conjunta, confundir el suceso condicionante con el condicionado y la creencia de que si el suceso condicionante ocurre después del suceso condicionado, no se altera la probabilidad de ocurrencia de este último. Además indicó que le gustó la forma como fueron abordados estos obstáculos en el apartado de ejercicios resueltos, porque le permite al estudiante comprender los fundamentos de estos errores, junto con identificar si él tenía alguna de dichas creencias, para que de esta forma pueda reconocer sus principales dificultades.

Pregunta 6: ¿El uso de esta estrategia le permite al estudiante tener una perspectiva crítica de su desempeño en relación a la resolución de problemas?

Profesor 1: Su respuesta comienza indicando que la estrategia propuesta le da un punto de partida al estudiante para resolver un problema. En el caso que el alumno, al leer el problema no tenga la claridad absoluta sobre cómo abordarlo, el seguir la estrategia le permitirá dividir el problema inicial que tiene un alto grado de dificultad, en sub problemas que son más alcanzable y que en definitiva llegar a un resultado final. Todo esto, el docente lo relacionó con el hecho de que al obtener una respuesta al problema, el alumno podrá tener una perspectiva crítica de su desempeño y lograr concluir si su resultado fue el correcto o no, y en el caso que de cometer algún error, tendrá la posibilidad de revisar cada uno de los pasos desarrollados para identificar donde falló.

Profesor 2: En una breve respuesta, el docente indica que no, ya que la estrategia no tiene el objetivo de permitirle al estudiante tener una perspectiva crítica de su desempeño, fundamentando que ese tipo de análisis se debe realizar después de la resolución del problema.

Profesor 3: El docente considera que sí, argumentando que la forma en la cual se presenta la estrategia, le entrega la posibilidad al estudiante de ir autoevaluando su desempeño en función del cumplimiento de cada uno de los pasos a seguir. Por otra parte, señala que la vinculación de cada paso con los contenidos probabilísticos le entrega una perspectiva crítica de su desempeño, en el sentido de que el estudiante tiene la posibilidad de argumentar su procedimiento con fundamentos teóricos y no caer en un trabajo mecánico de seguir cada paso sin entender lo que realmente está haciendo.

6.6. Conclusiones.

En primer lugar, se comenzará esta reflexión considerando el último objetivo específico de este proyecto de graduación desarrollado a lo largo del capítulo VI: explorar la validez de la estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional propuesta como solución al problema de investigación. En relación a los resultados obtenidos en las entrevistas a los docentes, se recoge evidencia del cumplimiento total de los indicadores propuestos en la tabla de especificaciones, para ambas dimensiones. Si bien, existen diferentes puntos de vista de cada docente en las preguntas realizadas, en lo medular, hay reflexiones que convergen en ideas comunes. A continuación se tomaran los conceptos más relevantes de sus respuestas y su vinculación con cada uno de los indicadores propuestos.

Dentro de las capacidades que consideraron los docentes que la estrategia puede desarrollar en los estudiantes de pedagogía, se señala la comprensión de elementos abstractos propios de la disciplina, como lo son la restricción del espacio muestral generada por el suceso condicionante, la definición de probabilidad condicional, el Teorema de Probabilidad Total y el Teorema de Bayes. También se indicó en reiteradas respuestas, que la estrategia contribuye a desarrollar un problema de forma ordenada, lo que lleva al alumno a tomar decisiones correctas durante el proceso de resolución, empleando una metodología clara que le permita obtener un resultado final. Todo lo indicado anteriormente se relaciona directamente los siguientes indicadores de la dimensión 1:

1. Comprendo mejor el problema usando la estrategia.

2. Al enfrentarme a una tarea, soy capaz de identificar cual es el mejor forma de solución que puedo utilizar.
3. Cuando leo un problema soy capaz de generar un modo de solución.
8. Es una estrategia útil para la resolución de problemas.
9. La estrategia es eficaz (permita obtener un resultado final).
10. La estrategia me permite comprender la materia en vez de memorizarla.
12. Aprendo más y mejor con esta estrategia.
13. Entrega elemento fundamentales para la discusión del problema.

En relación a si la estrategia facilita o no la resolución de problemas, los tres profesores estuvieron de acuerdo en que sí, con la salvedad de que el profesor 2 hizo la acotación de que los estudiantes que se sienten más cómodos trabajando en un registro algebraico, puede que la conversión hacia el registro figural – icónico no sea necesaria para ellos. Dentro de los principales argumentos que validan sus respuestas, destacan que la estrategia propuesta ayuda a la correcta interpretación de la información proporcionada por el enunciado del problema, a través del diagrama de representación y la identificación de los principales conectores usados (conversión del registro de lengua natural hacia el registro figural – icónico), junto con la vinculación del diagrama de representación con los diferentes teoremas asociados a la probabilidad condicional (conversión del registro figural – icónico hacia el registro algebraico), facilitando la comprensión estos contenidos. Lo mencionado anteriormente evidencia el cumplimiento de los siguientes indicadores de la dimensión 1:

4. El uso de tablas y diagramas facilita el análisis del problema.
5. Comprendo el significado de los conectores dentro de un enunciado.
6. He logrado interpretar correctamente el enunciado problemático.
7. Puedo resolver los problemas con menos dificultad.
11. Puedo identificar lo que necesito para resolver un problema.
14. Ayuda a identificar información importante.

En el caso de los aspectos más relevantes que hacen alusión a la dimensión 2, los 3 docentes entrevistados concuerdan en que para que un estudiante se sienta seguro al momento de resolver un problema, es primordial que tenga un pleno dominio y comprensión de los contenidos que se están trabajando. Como ya se argumentó anteriormente, los profesores concuerdan con que la estrategia entrega herramientas que permiten interpretar correctamente los problemas, emplear favorablemente esa información a través del diagrama de representación y relacionarla con los teoremas propios de la probabilidad. Todo esto le permitirá al estudiante una mejor comprensión de los contenidos, y por lo tanto, le entregará mayor seguridad.

En cuanto a las principales dificultades identificadas por los docentes, están el interpretar correctamente la información proporcionada en el enunciado del problema, junto con los diferentes obstáculos de origen epistemológico que se han descrito a lo largo del proyecto. Todas están dificultades son abordadas en la estrategia de resolución de problemas, entregando herramientas concretas para identificar el origen de los obstáculos, junto con sugerencias para su superación. Por otra parte, cuando se consultó si el uso de esta estrategia le permite al estudiante tener una perspectiva crítica de su desempeño en relación a la resolución de problemas, si bien el profesor 2 planteó que no era necesario que la estrategia considerara esto, los otros 2 docentes concordaron con que la estrategia le permite al estudiante ir autoevaluando su desempeño en función del cumplimiento de cada uno de los pasos a seguir, junto desarrollar una perspectiva crítica de sus logros, principalmente porque tendrá la posibilidad de argumentar su procedimiento con fundamentos teóricos y no caerá en el trabajo mecánico de seguir cada paso sin entender lo que realmente está haciendo. Luego, tomando la evidencia indicada en los últimos 2 párrafos, es posible determinar el cumplimiento de los indicadores de la dimensión 2:

1. Encuentro interesante esta estrategia.
2. El comprender la estrategia me hace sentirme más seguro al momento de resolver un problema.
3. Puedo pedir ayuda a los demás cuando lo necesito porque se reconocer donde se presentan mis dificultades.
4. Tengo mayor confianza que me permite comprender y manejar problemas más complejos.
5. La estrategia me ayudó a tener una perspectiva crítica de mi desempeño en la resolución de problemas.

Finalmente, haciendo un breve repaso del camino seguido a lo largo del presente proyecto de graduación, se comenzó obteniendo información a través del cuestionario CRP sobre el grado de comprensión y los obstáculos epistemológicos que los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Computación manifiestan al momento de resolver problemas de probabilidad condicional, luego se obtuvo información sobre las formas de enseñanza de docentes del área Probabilidad y Estadística en relación a dichos obstáculos, posteriormente, tomando toda información obtenida y basándose en el marco teórico de registros y representaciones semióticas de Raymond Duval, se presentó una estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional orientada a superar obstáculos epistemológicos asociados a este contenido, para finalmente explorar su validez a través de las entrevistas abordadas en este último capítulo. En conclusión, la realización de cada uno de los objetivos específicos que se fijaron, han permitido cumplir con el objetivo general del proyecto.

Referencias.

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. Mexico: Siglo XXI

Batanero, C., Díaz, C. (2006). *Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional.* España: Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. (2012). *Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza.* Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://www.tecdigital. itcr.ac.cr/revistamatematica/). Vol. 12.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica, *RDM* Nº 9 (3). Versión en español publicada por Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.

Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. (Hernandez, &Villalba, Edits.) *PMME de la UNISON.*

Canavos, G. C., & Medal, E. G. U. (1987). *Probabilidad y estadística*. McGraw Hill

Castillo, L. & Palma, K. (2012). *Problemas Didácticos y Epistemológicos Inherentes a la Probabilidad Condiconal y al Teorema de Bayes (tesis pregrado*). Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.

Díaz Batanero, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*

Dupuis, C. (1996). "Arbres et tableaux de probabilité: Analisé en terms de registres de représentation". Repéres - IREM, 22: 51- 72.

Duval, R. (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Einhorn, H. J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, Falk, R. (1986). *Conditional probabilities: insights and difficulties*. Jerusalem, Israel: Department of Psychology and the Sturman Centre for Human.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). *Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory*. Teaching Statistics.

Meyer, P. L. (1973). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas* (No. QA273. 25. M49 1973.). Fondo educativo interamericano.

MINEDUC (2009) *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: Gobierno de Chile.

MINEDUC (20012) *Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media*. Santiago: Gobierno de Chile.

Runger, D. M. G., & Montgomery, D. C. (1996). *Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería*

Sánchez, E. (1996). *Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Educación Matemática (pp. 389-404). México.

Triola, M. F. (2004). *Estadística*. Pearson educación.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Anexos.

Anexo 1: Estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

ÍNDICE

ELEMENTOS PRESENTES EN EL ENUNCIADO DE UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

CONTEXTOS MÁS COMUNES.

Consideraremos el contexto como aquella situación particular en la que los problemas de probabilidad condicional están formulados, es decir, el conjunto de escenarios o hechos fenomenológicos en que se enmarca el enunciado de los problemas. A continuación mostraremos una clasificación de los contextos más frecuentes presentes en problemas de este tipo, basándose en una revisión bibliográfica de los principales textos de probabilidad y estadística.

Contexto social.

Los problemas que se enmarcan en este contexto, tienen como objeto aquellos fenómenos de sondeos de opinión, es decir, aquellas situaciones destinadas a conocer la opinión pública o estudios de una población específica, así como los reportes que se pueden presentar de las características demográficas y sociales de una determinada población. Por ejemplo, es común encontrar problemas enmarcados en contextos sociales relacionados con gustos sobre deportes, hábitos alimenticios, hábitos de consumo a nivel general, opiniones políticas, entre otros.

Contexto de industria.

Los problemas de probabilidad condicional que se enmarcan en un contexto de industria, hacen referencia al control de calidad en la producción de un determinado producto o artículo. También relaciona la obtención de productos por parte de proveedores y los mecanismos de acción, herramientas que son empleadas para detectar la presencia de errores, así como, la elección que puede realizar una persona al adquirir un determinado producto. En particular, se considera para el contexto de industria, problemas donde se refiere la fabricación de televisores por dos máquinas distintas y su relación televisor defectuoso y no defectuoso. Así mismo, se considera un problema donde se busquen las condiciones para el funcionamiento de un determinado mecanismo, como por ejemplo, circuitos eléctricos, alarmas de casas, computadores, etc.

Contexto médico.

Los problemas de probabilidad condicional que se enmarcan en un contexto médico hacen referencia a los hechos fenomenológicos que tienen por objeto diagnosticar una determinada enfermedad mediante una prueba médica o el éxito de cierta medicina para la cura de alguna enfermedad, así como los resultados de un examen médico, tal y como es el caso de una radiografía, ecografía, mamografías, entre otros tipos de test.

Contexto de elementos típicos del azar.

Los problemas de probabilidad condicional que se enmarcan en este contexto hacen referencia a los objetos más comunes asociados al azar que normalmente están presentes en cualquier libro de probabilidad. Se consideraran en este contexto, problemas relacionados con la extracción de bolas de una urna, lanzamiento de monedas, lanzamientos de dados, juegos de lotería, etc.

HIPÓTESIS Y PREGUNTA.

Todo problema de probabilidad condicional está compuesto por 2 partes fundaménteles: **hipótesis y pregunta**. Llamaremos hipótesis a toda la información (datos) que entrega el enunciado de un problema y que es necesaria conocer para poder llegar a su solución, mientras que la pregunta es simplemente una información desconocida a priori, que se nos pide encontrar. En el caso de los enunciados de problemas de probabilidad condicional, es de suma importa considerar que **tanto sus hipótesis como sus preguntas, siempre estarán compuestas por probabilidades simples, conjuntas y/o condicionales asociadas a los sucesos involucrados en el problema.** La distinción entre estos tres tipos de probabilidades no siempre es sencilla, por lo que es relevante hacer una correcta interpretación de las oraciones presentes en el enunciado que representan cada probabilidad. Veamos a continuación las principales características de cada una de ellas:

Probabilidad simple ($P(A)$).

Corresponde al valor numérico asociado a la probabilidad de ocurrencia de **un solo evento.** Para identificar las probabilidades simples presentes en el enunciado de un problema, es siempre importante tener presente los sucesos asociados generan una partición del espacio muestral del experimento aleatorio que está involucrado en el problema, y por tanto la suma de las probabilidades simples siempre es igual a uno.

Probabilidad conjunta ($P(A \cap B)$).

Corresponde al valor numérico asociado a la probabilidad de ocurrencia de los **resultados comunes de dos o más sucesos.** La forma más común en la que se presentan las probabilidades conjuntas en el enunciado es relacionado los sucesos mediante el conector “y”. Ahora bien, en algunos casos que no hace uso explícito del conector “y”, por lo que su interpretación no siempre es tan clara. Al final de este apartado veremos algunos ejemplos que facilitarán la identificación de las probabilidades conjuntas para estos casos.

Probabilidad condicional ($P(A/B)$).

Corresponde al valor numérico asociado a la probabilidad de ocurrencia de **un suceso dada la ocurrencia de otro suceso.** Para identificar las probabilidades condicionales presentes en el enunciado de un problema es importante tener presente que el suceso condicionante genera una restricción del espacio muestral al momento de calcular la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.

Una de las dificultades que pueden aparecer al interpretar un enunciado, es **confundir las la probabilidades condicionales con probabilidades conjuntas.** Con el fin de que no se presente esta confusión, veremos a continuación los **conectores más utilizados** en los problemas de enunciado verbal que permiten determinar la presencia de probabilidades condicionales:

Conector: De los - De los que – De los de:

Ejemplo: El 60% de los estudiantes de un instituto de varones están inscritos en el taller de fútbol, mientras que el resto está inscrito en el taller de básquetbol. **De los de** fútbol, el 75% logra aprobar todas las asignaturas. El 65% **de los** inscritos en básquetbol también aprueban todas las asignaturas. **De los alumnos que** aprueban todas las asignaturas, ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un estudiante que esté inscrito en el taller de fútbol?

Sucesos:

- F: El alumno seleccionado está inscrito en fútbol.
- B: El alumno seleccionado está inscrito en básquetbol.
- A: El alumno seleccionado logra aprobar todas las asignaturas.

Interpretación del enunciado:

- $P(A/F) = 0{,}75$
- $P(A/B) = 0{,}65$
- ¿$P(F/A)$? (pregunta del problema).

Conector: Entre los que – entre los de:

Ejemplo:

En una población se ha determinado que la proporción fumadora **entre los que** mueren de cáncer de pulmón es del 94%. El tanto por ciento de fallecimientos por cáncer de pulmón es 1,27%, y el tanto por ciento de población fumadora es el 30%. ¿Qué tanto por ciento de la población fumadora contrae cáncer de pulmón?

Sucesos:

- F: El individuo es fumador

- M: El individuo muere de cáncer de pulmón.

Interpretación:

- $P(M/F) = 0{,}94$

Conector: Si.

Ejemplo:

Durante los últimos años se ha escrito mucho sobre la posible relación entre fumar y el cáncer pulmonar. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. La proporción encontrada de fumadores es de 0,45. **Si** se selecciona al azar un paciente con cáncer pulmonar, ¿Cuál es la probabilidad de sea fumador?

Sucesos:

- C: El paciente seleccionado padece de cáncer pulmonar.
- F: El paciente seleccionado es fumador.

Interpretación:

¿ $P(F/C)$? (Pregunta del problema).

Conector: Sabiendo que – habiendo – suponiendo que:

Ejemplo:

En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Hallar:

1. La probabilidad de que **habiendo** funcionado la alarma, no haya habido peligro.

2. Probabilidad de **suponiendo que** haya un peligro, la alarma no funcione.

3. Probabilidad de que **sabiendo que** la alarma no ha funcionado, haya un peligro.

Sucesos:

- P: Se produce un peligro.
- P^C: No se produce peligro.
- A: La alarma funcione.

- A^C: La alarma no funcione.

Interpretación:

- ¿ $P(P^C/A^C)$? (pregunta 1).
- ¿ $P(A^C/P)$? (pregunta 2).
- ¿ $P(A^C/P)$? (pregunta 3).

Conector: Dado.

Ejemplo:

Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin devolver la primera a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, **dado** que se extrajo una bola negra en primer lugar?

Sucesos:

- $N1$: La primera bola extraída es negra.
- $N2$: La segunda bola extraída es negra.

Interpretación:

- ¿ $P(N2/N1)$? (pregunta del problema).

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

A continuación presentaremos un método para resolver problemas que involucren probabilidades condicionales. Para su explicación, propondremos un ejemplo e iremos detallando cómo realizar cada uno de los pasos presentes en el método. Es importante que el lector tenga presente los comentarios realizados en el apartado anterior, principalmente que las hipótesis y la(s) pregunta(s) que contenga el problema siempre serán probabilidades simples, conjuntas y/o condicionales, y que considere las sugerencias comentadas para poder establecer de forma correcta la distinción entre los diferentes tipos de probabilidades.

Ejemplo: *En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que la alarma no funcione?*

c) *¿Cuál es la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro?*

Pasos a seguir.

1. DEFINIR CADA UNO DE LOS SUCESOS INVOLUCRADOS EN EL PROBLEMA.

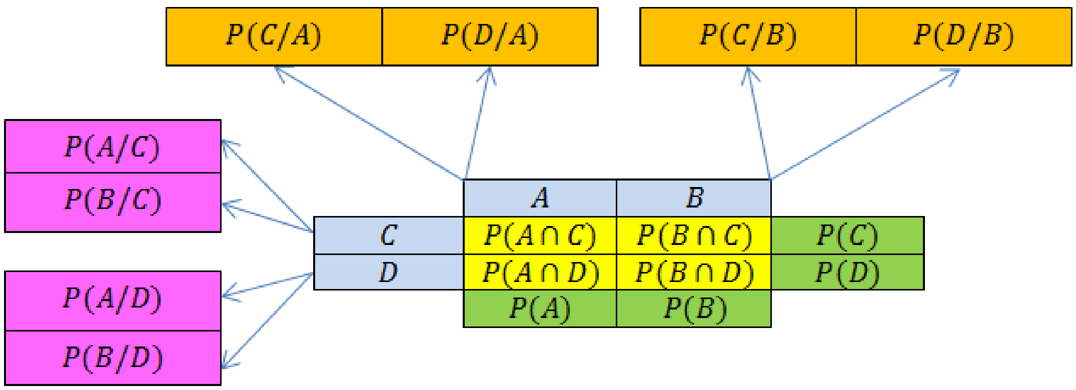
Siempre es lo primero que debemos realizar en problemas de este tipo, simplemente por el hecho de que la persona que desee leer el desarrollo de nuestro ejercicio debe tener en claro las variables que le hemos asignado a cada suceso. Es parte de la formalidad que se exige en la resolución de problemas probabilísticos y además es fundamental para mantener el orden y la claridad de cada uno de los pasos que se irán realizando posteriormente. Para evitar confusiones, recomendamos al lector utilizar letras que puedan ser relacionadas con los sucesos definidos.

En el ejemplo propuesto, esto sería:

- E: Se produce un peligro.
- E^c: No se produce un peligro.
- F: La alarma funciona.
- F^c: La alarma no funciona.

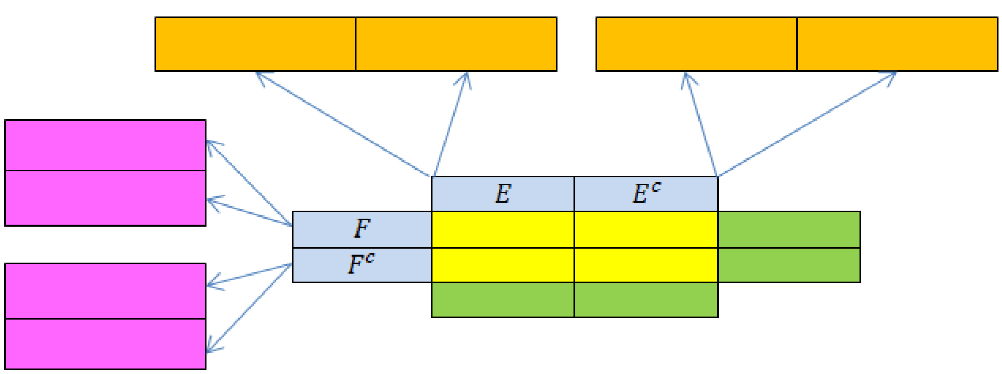
2. UTILIZAR UN DIAGRAMA PARA REPRESENTAR LA INFORMACIÓN DEL ENUNCIADO.

Una vez definidos los sucesos, nuestro objetivo será representar toda la información entregada en el enunciado mediante el siguiente diagrama que explicaremos a continuación.

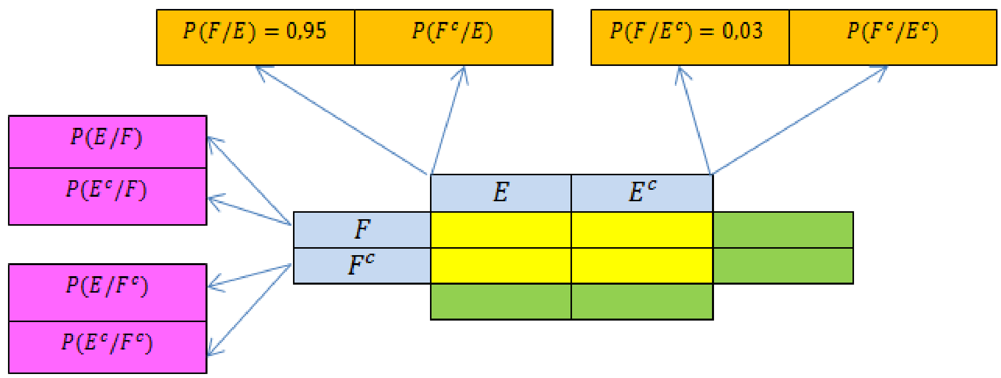


Se ha decido darle determinados colores a ciertos grupos de celdas con el fin de facilitar la explicación sobre cómo ir completando nuestro diagrama. **Es importante recalcar que el primer paso es ir rellenando las celdas solo con la información proporcionada en la hipótesis del ejercicio.**

- En las **celdas de color celeste** se deben escribir las letras designadas para cada uno de los sucesos presentes el problema. **En las celdas horizontales (A y B)** van ubicados el par de sucesos que generan una partición del espacio muestral. Análogamente, **en las celdas verticales (C y D)**, van ubicados el otro par de sucesos que generan una partición del espacio muestral. En el ejemplo esto sería:



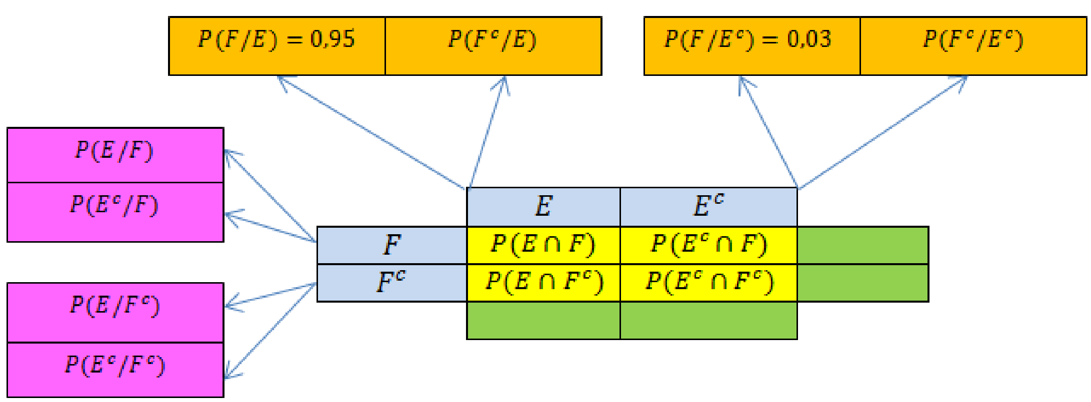
- En las **celdas de color naranjo** se deben escribir todas las posibles probabilidades condicionales presentes en la hipótesis del problema, donde los sucesos condicionantes sean los que aparecen en las celdas celestes horizontales y los sucesos condicionados sean los que aparecen en las celdas celestes verticales. La suma de las probabilidades presentes en el par de celdas naranjas con el mismo suceso condicionante debe ser igual a 1. La misma idea se repite para el caso de las **celdas de color rosado.** En el ejemplo esto sería:



Dónde

- $P(F/E) + P(F^c/E) = 1$
- $P(F/E^c) + P(F^c/E^c) = 1$
- $P(E/F) + P(E^c/F) = 1$
- $P(E/F^c) + P(E^c/F^c) = 1$

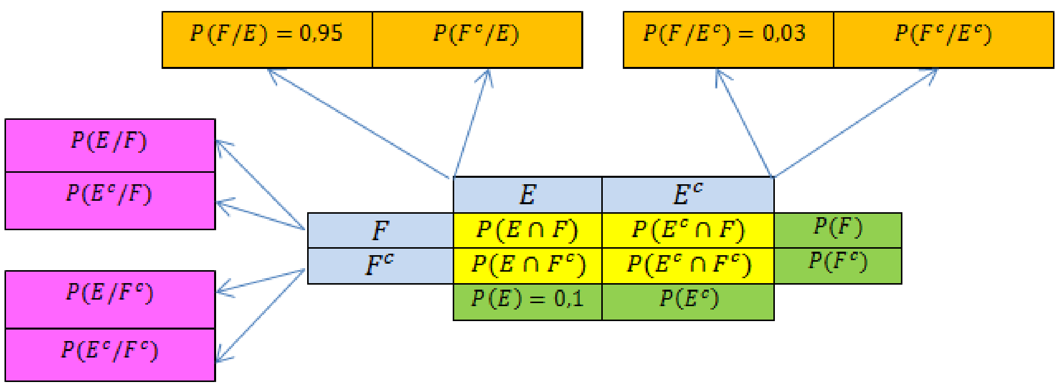
- En las celdas de color amarillo se deben escribir cada una las **probabilidades conjuntas** presentes en el enunciado del problema, considerando la fila y la columna a la que pertenecen. En el caso que no aparezcan probabilidades conjuntas en el enunciado, las celdas se pueden ir completando a partir de **la regla del producto**. Para aclarar esta idea, veamos cómo sería en el ejemplo propuesto:



Dónde (regla del producto):

- $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F/E) = P(F) \cdot P(E/F)$
- $P(E \cap F^c) = P(E) \cdot P(F^c/E) = P(F^c) \cdot P(E/F^c)$
- $P(E^c \cap F) = P(E^c) \cdot P(F/E^c) = P(F) \cdot P(E^c/F)$
- $P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c/E^c) = P(F^c) \cdot P(E^c/F^c)$

- Finalmente, en las celdas de color verde se deben escribir cada una las **probabilidades simples** presentes en el enunciado del problema, considerando la fila o la columna a la que pertenecen. En el caso que no aparezcan probabilidades simples en el enunciado, las celdas se pueden ir completando a partir del **teorema de probabilidad total,** lo que correspondería a sumar las probabilidades conjuntas de cada par de celdas amarillas pertenecientes a la misma fila o a la misma columna. Además, la suma de las probabilidades simples del par de sucesos que particionan el espacio muestral debe ser igual a 1. Para aclarar esta idea, veamos cómo sería en el ejemplo propuesto:



Dónde (teorema de probabilidad total):

- $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$
- $P(E^c) = P(E^c \cap F) + P(E^c \cap F^c)$
- $P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$
- $P(F^c) = P(E \cap F^c) + P(E^c \cap F^c)$

Y además se cumple que:

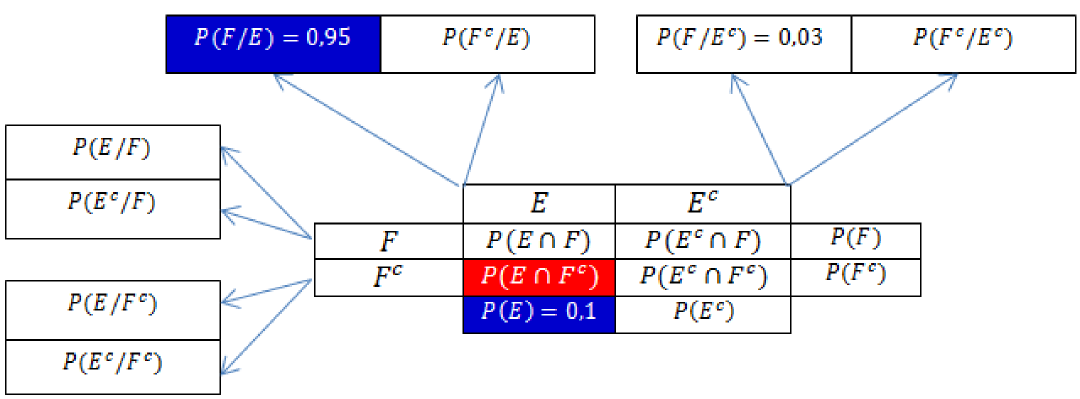
- $P(E) + P(E^c) = 1$
- $P(F) + P(F^c) = 1$

3. REPRESENTAR LA(S) PREGUNTA(S) DEL PROBLEMA EN LENGUAJE PROBABILÍSTICO Y OBTENER LA INFORMACIÓN NECESARIA PARA LLEGAR AL RESULTADO PEDIDO.

En el punto 2 hemos representado toda la información entregada en el enunciado del problema mediante un diagrama que nos permite apreciar de forma gráfica todas las posibles probabilidades involucradas en el ejercicio y las relaciones existentes entre ellas. Ahora que ya sabemos cómo encontrar las probabilidades desconocidas, el objetivo del paso 3 será, en primer lugar, determinar las probabilidades que se nos están preguntando, para luego ir obteniendo todas las probabilidades que sean necesarias para llegar al resultado final. Es importante considerar que no debemos perder de vista la rigurosidad del trabajo algebraico.

- Comencemos por la primera pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que* ***haya un peligro y la alarma no funcione****?*

En la redacción de la pregunta se está haciendo uso explícitamente del conector "y", por lo que claramente se nos está preguntando por la probabilidad de la intersección de los sucesos E y F^C. Como ya vimos anteriormente, mediante la **regla del producto** podemos obtener cualquier **probabilidad conjunta**. El diagrama que se presentará a continuación, corresponde al obtenido al finalizar el paso 2, con la salvedad que se ha destacado con **color rojo** la celda correspondiente a la probabilidad preguntada, y con **color azul** las dos celdas que debemos considerar para emplear la regla del producto.



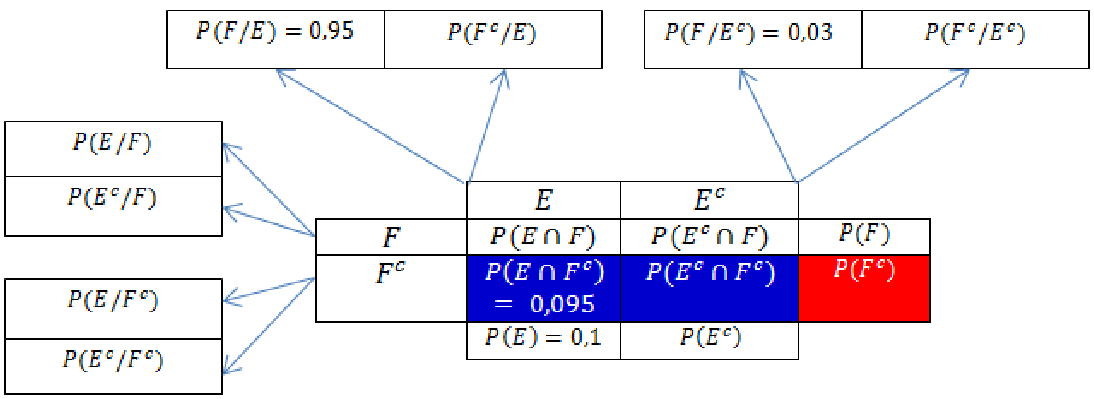
Por lo tanto, aplicando la regla del producto tenemos que:

$$P(E \cap F^c) = P(E) \cdot P(F/E) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}095$$

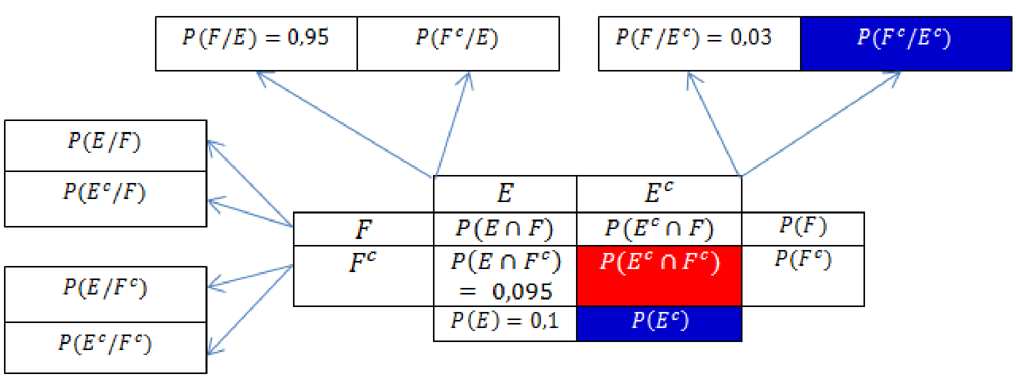
Para finalizar, entregamos la respuesta a la pregunta realizada: *La probabilidad de que haya peligro y la alarma no funcione es de 0,095.*

- Continuemos con la segunda pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que* ***la alarma no funcione****?*

En este caso se nos está preguntando por una **probabilidad simple** donde el suceso involucrado es F^c. Para encontrar este tipo de probabilidades debemos ocupar el **teorema de probabilidad total**, donde nuestro diagrama nos permite observar de forma clara las probabilidades presentes en el teorema. Al igual que en la pregunta anterior, destacaremos con **color rojo** la celda correspondiente a la probabilidad preguntada, y con **color azul** las dos celdas que debemos considerar para emplear la regla del producto.



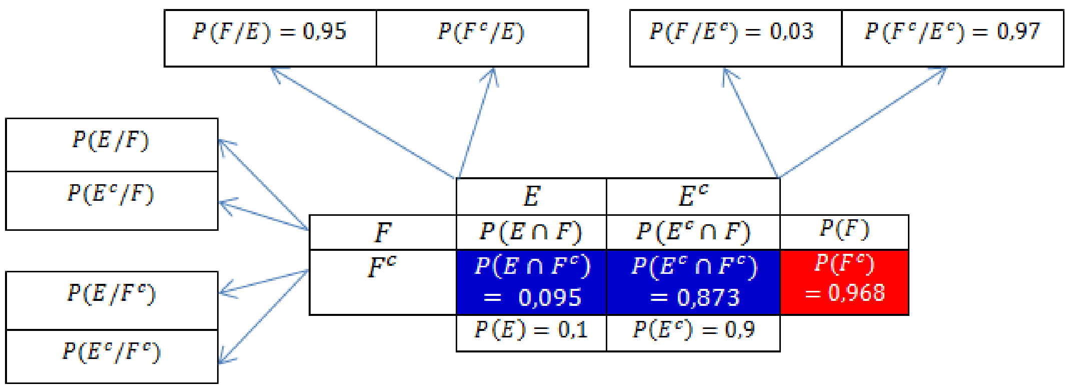
Como vimos anteriormente, para obtener una probabilidad simple debemos sumar cada una de las probabilidades conjuntas asociadas a la misma fila. En la pregunta a) ya determinamos $P(E \cap F^c)$, por lo que ahora solo nos falta encontrar $P(E^c \cap F^c)$.



Para encontrar $P(E^c \cap F^c)$, debemos utilizar la regla del producto y multiplicar $P(F^c/E^c)$ con $P(E^c)$. Estos dos factores son desconocidos, pero si recordamos las reglas sobre como completar nuestro diagrama tenemos que:

- $P(F/E^c) + P(F^c/E^c) = 1$
- $P(E) + P(E^c) = 1$

De esta forma podemos completar el diagrama con la información necesitada para poder plantear las ecuaciones requeridas para llegar al resultado buscado.



Por la regla del producto tenemos que:

$$P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c/E^c) = 0{,}9 \cdot 0{,}97 = 0{,}873$$

Luego aplicando el teorema de probabilidad total:

$$P(F^c) = P(E \cap F^c) + P(E^c \cap F^c) = 0{,}095 + 0{,}873 = 0{,}968$$

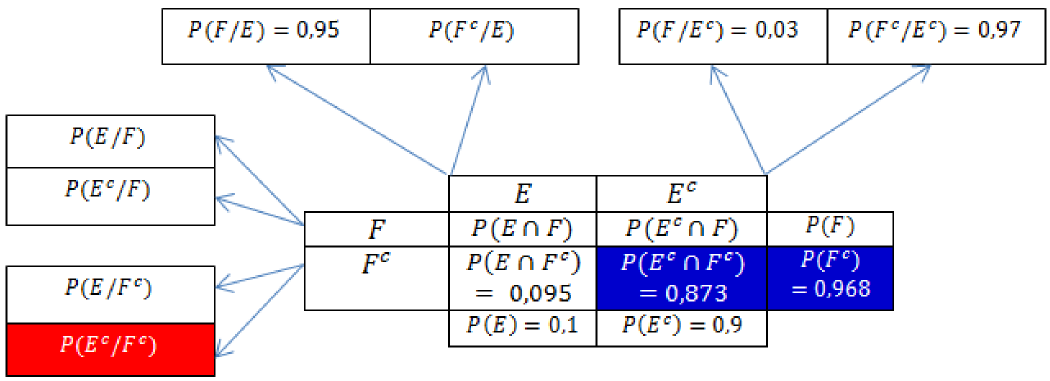
Y finalmente la probabilidad de que la alarma no funcione es de 0,968.

- Pasemos ahora a la última pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de que **habiendo no funcionado la alarma, no haya habido peligro**?*

En este caso se nos está preguntando por una **probabilidad condicional**, donde el suceso condicionante es F^c y el suceso condicionado es E^c. Siempre cuando se nos pregunte por una probabilidad condicional (en este caso $P(E^c/F^c)$) y conozcamos su condicional transpuesta (en este caso $P(F^c/E^c)$), debemos utilizar el **teorema de Bayes** para poder llegar al resultado pedido. En este tipo de situaciones, se le sugiere al lector partir el desarrollo del ejercicio utilizando la **definición de probabilidad condicional,** y será nuestro diagrama quien posteriormente le indique el camino a seguir.

De la definición de probabilidad condicional tenemos que:

$$P(E^c/F^c) = \frac{P(E^c \cap F^c)}{P(F^c)}$$



Gracias al desarrollo de las primeras 2 preguntas, ya tenemos toda la información necesaria para poder llegar a la respuesta. Recordemos, mirando el diagrama, como encontramos los valores de $P(E^c \cap F^c)$ y $P(F^c)$.

$$P(E^c/F^c) = \frac{P(E^c \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P(E^c) \cdot P(F^c/E^c)}{P(E \cap F^c) + P(E^c \cap F^c)} = \frac{\boldsymbol{P(E^c) \cdot P(F^c/E^c)}}{\boldsymbol{P(E) \cdot P(F^c/E) + P(E^c) \cdot P(F^c/E^c)}}$$

Justamente la **expresión destacada** se obtiene mediante el **teorema de Bayes**, donde el numerador corresponde a una probabilidad conjunta obtenida gracias a que conocíamos la probabilidad de condicional transpuesta a la probabilidad condicional preguntada, y el denominador corresponde a la probabilidad total del suceso F^c. Lo interesante de esto, es que no es necesario memorizar el teorema de Bayes para responder este tipo de preguntas, ya que basta con partir utilizando la definición de probabilidad condicional y luego, con la ayuda de nuestro diagrama, podemos ir encontrando las probabilidades necesarias para llagar al resultado final.

En conclusión, utilizando el teorema de Bayes tenemos que:

$$P(E^c/F^c) = \frac{P(E^c) \cdot P(F^c/E^c)}{P(E) \cdot P(F^c/E) + P(E^c) \cdot P(F^c/E^c)} = \frac{0{,}873}{0{,}968} \approx 0{,}9$$

Finalmente, la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya peligro es de aproximadamente 0,9.

EJERCICIOS RESUELTOS.

Con el objetivo que el lector se familiarice con la estrategia propuesta, presentaremos a continuación una serie de ejercicios resueltos donde se detallarán cada uno de los pasos a seguir en el camino a su solución. Se sugiere que en cada uno de los problemas, el estudiante intente implementar la estrategia de forma personal, y que solo observe la resolución del ejercicio en el caso de presentar muchas dudas o para establecer una comparación con sus resultados.

Cabe destacar que la selección de los problemas no fue azarosa, y más bien lo que se pretende es mostrar un abanico amplio de posibles ejercicios a los que se pueda enfrentar el lector. Es por esto que incluiremos problemas que normalmente generan dificultades en los estudiantes, y que por ello, han sido objeto de estudio de variadas investigaciones del ámbito de la didáctica de la matemática.

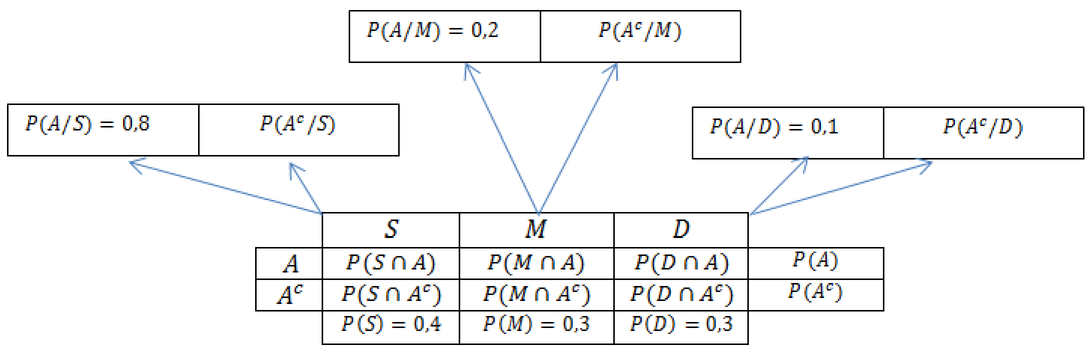
Problema 1: *Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto. Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es de 0,8. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0,2. Si el PNB disminuye, la probabilidad de que las acciones aumenten es de sólo 0,1. Si para los siguientes seis meses se asignan las probabilidades 0,4, 0,3 y 0,3 a los sucesos, el PNB aumenta, es el mismo y disminuye, respectivamente, determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.*

Solución:

1. Definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema.

- S: El PNB aumenta.
- M: El PNB se mantiene.
- D: El PNB disminuye.
- A: El valor de las acciones aumentan.
- A^c: El valor de las acciones no aumentan.

2. Utilizar un sistema de representación para el enunciado.



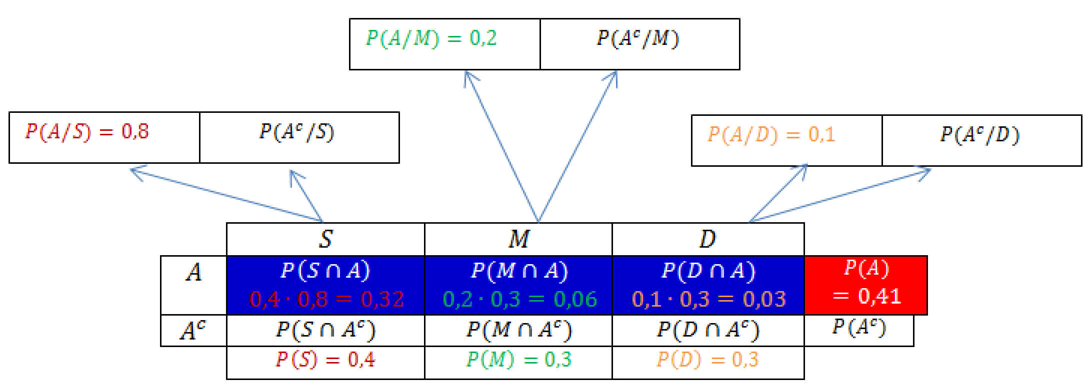
En este problema son 3 sucesos los que generan una partición del espacio muestral (S, M y D), donde podemos apreciar que la suma de cada una de sus probabilidades es igual a 1. Con respecto al diagrama, no hemos incluido las ramas asociadas a las otras probabilidades condicionales, principalmente porque no son parte de la hipótesis del problema.

3. Representar la(s) pregunta(s) del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.

Pregunta del problema: *Determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.*

Lenguaje probabilístico: ¿$P(A)$?

Se nos está preguntando por una **probabilidad simple**, por lo tanto debemos ocupar el **teorema de probabilidad total** para llegar a la respuesta.



Como podemos apreciar en nuestro diagrama, para llegar al resultado pedido necesitamos las probabilidades conjuntas $P(S \cap A)$, $P(M \cap A)$ y $P(D \cap A)$. Recordemos que dichas probabilidades las debemos obtener utilizando la regla del producto, según como nos indica la estructura del diagrama. Finalmente para obtener $P(A)$, debemos sumar cada una de las probabilidades conjuntas obtenidas. Ahora que ya tenemos toda la información necesaria, estamos en condiciones de presentar el desarrollo de nuestra respuesta:

Por el teorema de probabilidad total tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(S \cap A) + P(M \cap A) + P(D \cap A) \\
&= P(S) \cdot (A/S) + P(M) \cdot P(A/M) + P(D) \cdot P(A/D) \\
&= 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \\
&= 0{,}41
\end{aligned}
$$

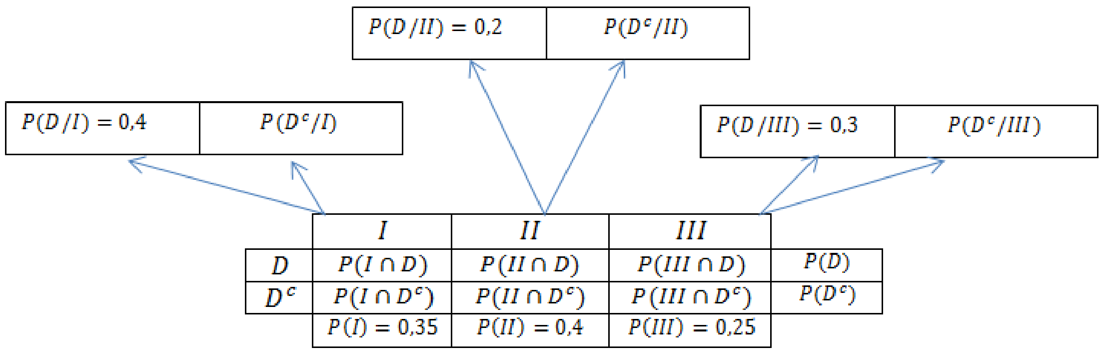
Respuesta: *Luego la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses es de 0,41.*

Problema 2: *Con base en varios estudios una compañía ha clasificado, de acuerdo con la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio, al que se le asignan las probabilidades de 0,35; 0,40 y 0,25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de las formaciones del tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III. Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determínese la probabilidad de que exista una formación del tipo II.*

Solución:

1. **Definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema.**
    - I: La formación geológica corresponde al tipo I.
    - II: La formación geológica corresponde al tipo II.
    - III: La formación geológica corresponde al tipo III.
    - D: Se descubre petróleo.
    - D^c: No se descubre petróleo.

2. Utilizar un sistema de representación para el enunciado.

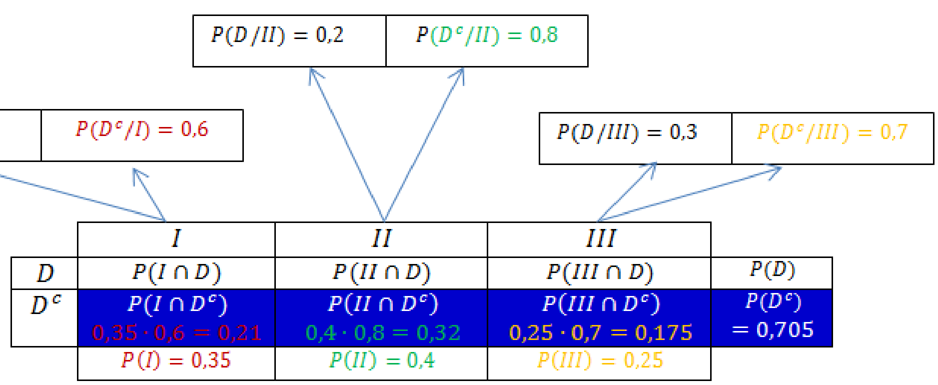


3. Representar la(s) pregunta(s) del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.

Pregunta del problema: *Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determínese la probabilidad de que exista una formación del tipo II.*

Lenguaje probabilístico: ¿$P(II/D^c)$?

Se nos está preguntando por la **probabilidad condicional** $P(II/D^c)$ y a partir de la hipótesis de problema es sencillo conocer $P(D^c/II)$, por lo tanto debemos emplear el **teorema de Bayes** para llegar a la respuesta pedida. Recordemos que siempre que nos pregunten por una probabilidad condicional, el primer paso es utilizar su definición y luego será el propio diagrama quien no irá guiando hacia el resultado final.



De la definición de probabilidad condicional tenemos que:

$$P(II/D^c) = \frac{P(II \cap D^c)}{P(D^c)}$$

Como podemos apreciar en nuestro diagrama, el denominador corresponde a la probabilidad total del suceso D^c y el numerador es uno de los sumandos de dicha probabilidad total. Ahora que ya contamos con toda la información necesaria, veamos el desarrollo formal del ejercicio.

Por el teorema de Bayes, tenemos que:

$$P(II/D^c) = \frac{P(II) \cdot P(D^c/II)}{P(I) \cdot P(D^c/I) + P(II) \cdot P(D^c/II) + P(III) \cdot P(D^c/III)}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}35 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}7}$$

$$\approx 0{,}45$$

Respuesta: *La probabilidad de que exista una formación del tipo II dado que la compañía no descubre petróleo en ese lugar es de aproximadamente 0,45.*

Problema 3: *Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Hubo un testigo del accidente. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul, ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?*

Solución:

Este problema está dentro de los más citados en la literatura sobre probabilidad condicional, principalmente porque el lenguaje empleado en su redacción es muy poco preciso y deja un margen muy amplio para que el lector realice una interpretación inadecuada de los sucesos y de las probabilidades pedidas.

Con frecuencia la gente asigna a esta probabilidad un valor de alrededor del 80%, por lo que es obvio que al dar esta respuesta no están utilizando el hecho de que sólo el 15% de los taxis son azules. Cabe destacar que la dificultad de este problema no guarda relación ni con la hipótesis planteada ni con la pregunta propuesta, sino más bien con la forma de presentar la información.

1. Definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema.

- V: El taxi es de color verde
- A: El taxi es de color azul.
- TV: El testigo identificó el taxi como verde.
- TA: El testigo identificó el taxi como azul.

2. Utilizar un sistema de representación para el enunciado.

El identificar los sucesos involucrados en el problema no debiese generar mayor dificultad. El problema está en identificar los antecedentes proporcionados por la hipótesis del problema. Es claro que $P(V) = 0{,}85$ y $P(A) = 0{,}15$, ahora bien, el resto de la información entregada es compleja de interpretar. La clave está en vincular la oración: ***"el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%",*** con los sucesos involucrados en el problema, por ejemplo:

¿Qué ocurre **si** el testigo identifica el auto como azul **dado** que es verde?

La respuesta es que fallaría en su sentencia, y por lo tanto $P(TA/V) = 0{,}2$. Ahora, si quisiéramos conocer $P(TV/V)$, el suceso definido indica que el testigo acertó en su veredicto y por tanto dicha probabilidad sería igual 0,8. Análogamente $P(TV/A) = 0{,}2$ y $P(TA/A) = 0{,}8$. Finalmente, la representación del enunciado queda de la siguiente forma:

$P(TA/A) = 0{,}8$	$P(TV/A) = 0{,}2$	$P(TA/V) = 0{,}2$	$P(TV/V) = 0{,}8$

	A	V	
TA	$P(A \cap TA)$	$P(V \cap TA)$	$P(TA)$
TV	$P(A \cap TV)$	$P(V \cap TV)$	$P(TV)$
	$P(A) = 0{,}85$	$P(V) = 0{,}15$	

3. Representar la(s) pregunta(s) del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.

Pregunta del problema: *Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul, ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?*

Lenguaje probabilístico: ¿ $P(A/TA)$?

$P(TA/A) = 0{,}8$	$P(TV/A) = 0{,}2$

$P(TA/V) = 0{,}2$	$P(TV/V) = 0{,}8$

	A	V	
TA	$P(A \cap TA)$ $0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$	$P(V \cap TA)$ $0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$	$P(TA)$ $= 0{,}71$
TV	$P(A \cap TV)$	$P(V \cap TV)$	$P(TV)$
	$P(A) = 0{,}85$	$P(V) = 0{,}15$	

De la **definición de probabilidad condicional** tenemos que:

$$P(A/TA) = \frac{P(A \cap TA)}{P(TA)}$$

Por el **teorema de Bayes**:

$$P(A/TA) = \frac{P(A) \cdot P(TA/A)}{P(A) \cdot P(TA/A) + P(V) \cdot P(TV/A)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}8}{0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}2} \approx 0{,}76$$

Respuesta: *Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul, la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul es de aproximadamente 0,76.*

Problema 4: *En una población dada un individuo tiene una posibilidad entre 10.000 de tener una enfermedad E. Se sabe que si se está enfermo de E, la probabilidad que un test diagnóstico T de positivo es de 0.99. Si no se está enfermo de E, la probabilidad que el test diagnóstico T de positivo es de 0.001.*

¿Qué te parece más probable?

a) Que una persona tenga la enfermedad E si ha dado positivo el test.
b) Que el test de positivo si la persona tiene la enfermedad E.
c) Ambos sucesos son igual de probables.

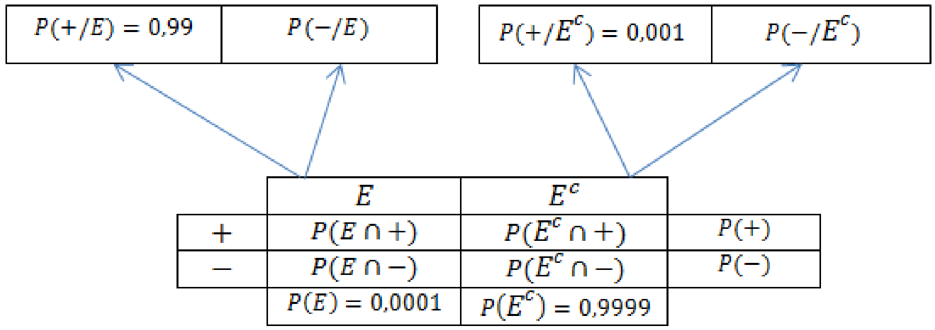
Solución:

1. Definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema.

- E: La persona tiene la enfermedad E.
- E^c: La persona no tiene la enfermedad E.

- $+$: El test diagnóstico T da positivo.
- $-$: El test diagnóstico T da negativo.

2. Utilizar un sistema de representación para el enunciado.



3. Representar la(s) pregunta(s) del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.

En este caso se nos informa sobre 2 sucesos y se nos pregunta cuál de ellos es más probable.

a) Que una persona tenga la enfermedad E si ha dado positivo el test ($P(E/+)$).

b) Que el test de positivo si la persona tiene la enfermedad E ($P(+/E)$).

Normalmente en preguntas de contextos médicos, se tiende a confundir la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha dado positivo el test de diagnóstico, con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad. A nivel general, esta confusión corresponde a no discriminar entre las direcciones de la probabilidad condicional, y por tanto, creer que $P(A/B)$ es equivalente a $P(B/A)$. En el caso particular de esta pregunta, si leemos los sucesos de las opciones a) y b), la poca precisión del lenguaje ordinario genera en nosotros la creencia de que ambos sucesos son equiprobables. Por esto hemos querido hacer acotación que **no necesariamente una probabilidad condicional es igual a su transpuesta** y lo comprobaremos ahora con el desarrollo de este problema.

Sabemos por la hipótesis del problema que $P(+/E) = 0{,}99$, por lo tanto basta con que determinemos $P(E/+)$ para ver cuál de los 2 sucesos involucrados es más probable.

$P(+/E) = 0,99$	$P(-/E)$

$P(+/E^c) = 0,001$	$P(-/E^c)$

	E	E^c	
$+$	$P(E \cap +)$ $0,0001 \cdot 0,99$	$P(E^c \cap +)$ $0,9999 \cdot 0,001$	$P(+)$
$-$	$P(E \cap -)$	$P(E^c \cap -)$	$P(-)$
	$P(E) = 0,0001$	$P(E^c) = 0,9999$	

De la **definición de probabilidad condicional** tenemos que:

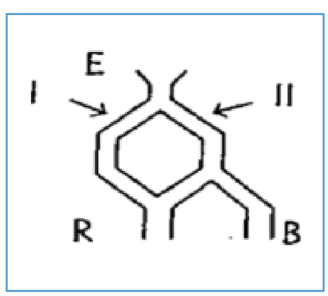
$$P(+/E) = \frac{P(+ \cap E)}{P(E)}$$

Por el **teorema de Bayes**:

$$P(+/E) = \frac{P(E) \cdot P(+/E)}{P(E) \cdot P(+/E) + P(E^c) \cdot P(+/E^c)} = \frac{0,0001 \cdot 0,99}{0,0001 \cdot 0,99 + 0,9999 \cdot 0,001} \approx 0,09$$

Respuesta: *Si bien a priori ambos sucesos parecían igual de probables, se concluye que la probabilidad del suceso definido en la opción a), es mayor que la probabilidad del suceso de la opción b).*

Problema 5: *Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I? Debes considerar que la probabilidad de que la bola pase por I es la misma a que pase por II. Análogamente, si la bola viene por II, es igual de probable que pase por R o por B.*



Solución:

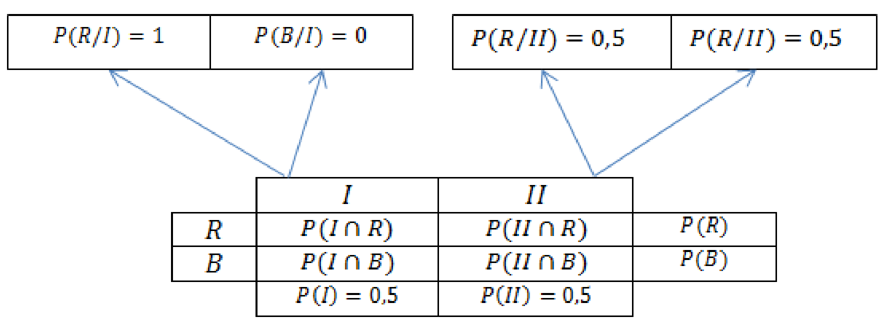
La pregunta a este problema corresponde a la probabilidad condicional de que la bola pase por el canal I, dado que salió por el canal R. En diferentes estudios que se han realizado en base a este problema, los estudiantes tienden a responder inmediatamente que la probabilidad pedida es 0,5; argumentando que: *como el hecho que la bola salga por R ocurre después a que la bola tome el canal I o II, no tiene incidencia en la probabilidad pedida, y por lo tanto basta con calcular solo la probabilidad que la bola pase por el canal I.*

Lo interesante de esta pregunta es que el suceso condicionante (que la bola salga por R), ocurre temporalmente después al suceso condicionado (que la bola pase por el canal I). En problemas que se da esta condición, por ejemplo, que se nos pide calcular $P(A/B)$ y temporalmente ocurra A primero y después B, tendemos a creer que B no puede alterar la probabilidad de ocurrencia de A. Veremos ahora en el desarrollo del ejercicio, que esta creencia es falsa.

1. Definir cada uno de los sucesos involucrados en el problema.

- I: La bola pasa por el canal I.
- II: La bola pasa por el canal II.
- R: La bola sale por el canal R.
- B: La bola sale por el canal B.

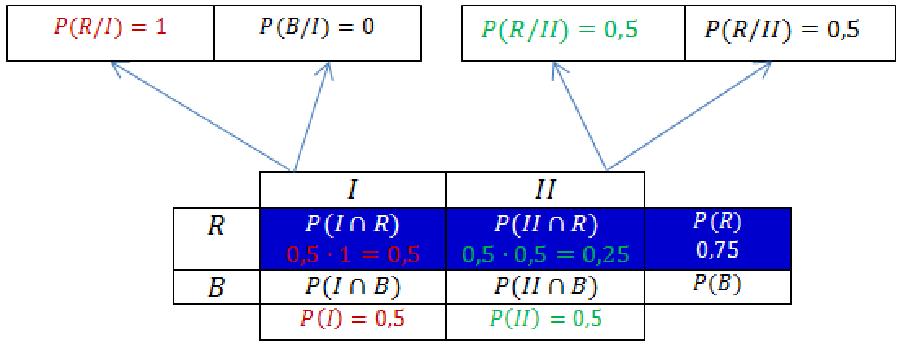
2. Utilizar un sistema de representación para el enunciado.



3. Representar la(s) pregunta(s) del problema en lenguaje probabilístico y obtener la información necesaria para llegar al resultado pedido.

Pregunta del problema: *Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?*

Lenguaje probabilístico: ¿ $P(I/R)$?



De la **definición de probabilidad condicional** tenemos que:

$$P(I/R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)}$$

Por el **teorema de Bayes**:

$$P(I/R) = \frac{P(I) \cdot P(R/I)}{P(I) \cdot P(R/I) + P(II) \cdot P(R/II)} = \frac{0{,}5 \cdot 1}{0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 0{,}\bar{6}$$

Con esto se demuestra que si el suceso condicionante ocurre después, este si puede alterar la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.

Respuesta: *La probabilidad de que la bola pase por el canal I dado que salió por el canal R es de* $0{,}\bar{6}$.

Anexo 2: Cuestionario de Evaluación del Razonamiento Condicional (RCP).

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN
DEL RAZONAMIENTO CONDICIONAL RPC

Indique en el recuadro el año de ingreso a la carrera:

Instrucciones:

- El siguiente cuestionario consta de 18 ítems y tiene por objetivo identificar algunos obstáculos de origen epistemológico asociados al contenido de probabilidad condicional del eje datos y azar.
- En los ítems 1, 2, 6, 8, 11, 12, 13, 15 y 16 deberás entregar una respuesta a cada pregunta (respuesta abierta).
- En los ítems 3, 4, 5, 7, 9, 10, 14, 17 y 18 deberás encerrar en un círculo la alternativa que te parezca correcta (selección única).
- En **TODOS LOS ÍTEMS** (selección única y respuesta abierta) debes justificar tu respuesta en el espacio en blanco que se considera entre pregunta y pregunta. Cabe destacar, que dicha justificación debe ser lo más clara y detallada posible, ya que de ella se obtendrá la información necesaria para este estudio.
- Tienes 90 minutos para contestar el cuestionario.

Ítem 1. Define probabilidad simple y probabilidad condicional, dando un ejemplo de cada una de ellas.

Ítem 2. Completa el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes (ejemplo MHM,...).

b) Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes en los que dos o más son hombres.

Ítem 3. Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Hubo un testigo del accidente. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul, ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

a) $80/100$
b) $15/100$
c) $(15/100) \cdot (80 \cdot 100)$
d) $\frac{15 \cdot 80}{85 \cdot 20 + 15 \cdot 80}$

Ítem 4. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7 (sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oro" y B el suceso "se extrae un rey". ¿Los sucesos A y B son independientes?

a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
b) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.
c) Sí, porque $P(rey\ de\ oros) = P(rey) \cdot P(oros)$.
d) No, porque $P(rey\ /\ oros) \neq P(rey)$.

Ítem 5. Una caja tiene cuatro focos, de los cuales dos son defectuosos. Se sacan dos al azar, uno tras otro sin reemplazo. Si el primer foco fue defectuoso, entonces:

a) Es más probable que el segundo sea defectuoso;
b) Es más probable que el segundo no sea defectuoso;
c) La probabilidad de que el segundo sea defectuoso es igual a la probabilidad de que no lo sea.

Ítem 6. En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados:

	Menos de 55 años	**Más de 55 años**	**Total**
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

I. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
II. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?
III. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
IV. Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Ítem 7. La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es el $10{,}3\%$. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

a) $\frac{0{,}8}{10{,}3} = 0{,}776$, probabilidad del $7{,}76\%$.
b) $10{,}3 \cdot 0{,}8 = 8{,}24$, probabilidad del $8{,}4\%$.
c) $0{,}8\%$

Ítem 8. Hemos lanzado dos dados y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Ítem 9. Supón que una estrella del tenis alcanza la final de Roland Garros en 2005. Para ganar el partido hay que ganar tres sets de cinco. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

a) El jugador pierde el primer set.
b) El jugador pierde el primer set pero gana el partido.
c) Los dos sucesos son iguales de probables.

Ítem 10. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

a) Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
b) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
c) Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

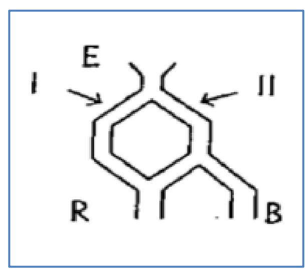
Ítem 11. En una ciudad el 60% son hombres y el 40% mujeres. El 50% de los hombres y el 25% de las mujeres fuman. Si se escoge una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

Ítem 12. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Se trata de un dado no sesgado (es decir todos los números tienen la misma probabilidad). Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces: par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par. Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada?

Ítem 13. Un grupo de alumnos de un colegio se examina de matemáticas e inglés. La proporción de alumnos que aprueban matemáticas es del 80% y la proporción de alumnos que aprueba inglés es del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

Ítem 14. Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal 1?

a) $1/2$
b) $1/3$
c) $2/3$
d) No se puede calcular.



Ítem 15. En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y, de ellos, el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?

Ítem 16. Una fábrica dispone de dos máquinas $M1$ y $M2$ que fabrican bolas. La máquina $M1$ fabrica el $40\ \%$ de las bolas y la $M2$ el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por $M1$ y el 1% de las fabricadas por $M2$ son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por $M1$?

Ítem 17. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin devolver la primera a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N2/\ N1)$

a) $1/\ 2$
b) $1/\ 6$
c) $1/\ 3$
d) $1/4$

¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N1/ N2)

a) $1/\ 3$
b) No se puede calcular
c) $1/\ 6$
d) $1/\ 2$

Ítem 18 Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Qué suceso es más probable?

a) Sacar dos bolas rojas.
b) Sacar primero una bola roja y luego una azul.
c) Los dos sucesos son iguales de probables.

Anexo 3: Entrevista a docentes 1.

Buenos días/tardes, mi nombre es Pablo Estuardo y soy estudiante del programa de Magíster en Educación Matemática de esta casa de estudios. Antes de comenzar, le quería agradecer su disposición a colaborar en este proyecto de graduación. El motivo de esta entrevista es poder recoger información sobre diferentes formas de enseñanza vinculadas al contenido de probabilidad condicional. ¿Le parece si comenzamos con la entrevista?

1. ¿Cuántas horas de clases aproximadamente destina usted para abordar el contenido de probabilidad condicional, incluyendo probabilidad total y teorema de Bayes?

2. ¿Podría describir brevemente la estructura de una clase impartida por usted donde se aborde el contenido de probabilidad condicional, considerando su inicio, desarrollo y cierre?

3. Al momento de abordar el contenido de probabilidad condicional. ¿Qué recursos utiliza durante el desarrollo de sus clases? ¿pizarra? ¿proyector? ¿guías de ejercicios? ¿guías de contenidos? ¿algún software? ¿otro?

4. ¿Qué referencias bibliográficas utiliza al momento de proponer ejercicios o actividades a sus estudiantes?

5. En relación al contenido de probabilidad condicional. ¿Qué aspectos considera usted que generan mayor dificultad en sus estudiantes? ¿Podría identificar los errores más frecuentes que se comenten? ¿En qué tipo de ejercicios se cometen estos errores?¿Qué estrategias o situaciones de aprendizaje genera para que los estudiantes superen estas dificultades?

6. El término obstáculo en educación fue introducido por el investigador francés Guy Brousseau, quien plantea que: "El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo". Por ejemplo, cuando un estudiante afirma que: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, está utilizando la noción de distributividad aprendida al momento de ver multiplicación de expresiones algebraicas. Ese conocimiento aplicado fuera de contexto, se constituye en un obstáculo que genera errores.

Un importante número de investigadores se han dedicado a estudiar diferentes obstáculos asociados al contenido de probabilidad condicional. A continuación le nombraré algunos de estos obstáculos y le daré una breve descripción. Para cada uno de ellos le voy a solicitar, si es posible, que me responda las siguientes tres preguntas:

- ¿Ha detectado a menudo la presencia de este obstáculo en sus estudiantes?
- ¿Considera este obstáculo al momento de abordar el contenido de probabilidad condicional? (si la respuesta es no, no hacer la siguiente pregunta)
- ¿Qué estrategias, situaciones de aprendizaje, representaciones de los conceptos genera para que el estudiante supere dicho obstáculo?

Falacia del eje temporal: Corresponde a la creencia de que si un suceso condicionante ocurre después, este no altera la probabilidad de ocurrencia del suceso condicionado.

Falacia de la condicional transpuesta: Corresponde a no discriminar entre P (A/B) y P (B/A).

Falacia de la conjunción: Corresponde a la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión.

Confusión entre eventos independientes y mutuamente excluyentes.

Anexo 4: Entrevista a docentes 2.

Buenos días/tardes, mi nombre es Pablo Estuardo, estudiante del programa de Magíster en Educación Matemática de esta casa de estudios. Antes de comenzar, le quería agradecer su disposición a colaborar en este proyecto de graduación.

Considerando que usted es especialista en el área de probabilidad y estadística, hemos querido contactarlo con el objetivo de que esta entrevista nos permita explorar la validez de la estrategia de resolución de problemas de probabilidad condicional que se le envió por mail. Aprovecho de comentarle que este documento fue elaborado con el propósito de que los estudiantes de pedagogía en matemática cuenten con un material de estudio, complementario al curso, que entregue herramientas concretas que faciliten la resolución de problemas de este tipo. ¿Le parece si comenzamos con la entrevista?

1. ¿Considera usted que esta estrategia desarrolla capacidades específicas en el análisis estadístico que permiten superar los obstáculos o dificultades presentes en un problema de probabilidad condicional? ¿Cuáles serían esas capacidades?

2. ¿Cree usted que esta estrategia facilita la resolución de problemas de probabilidad condicional? ¿Por qué?

3. ¿El diagrama de representación del enunciado propuesto contribuye al análisis del problema? ¿Por qué?

4. ¿Considera que esta estrategia le entrega seguridad al estudiante? ¿Por qué?

5. ¿Cree usted que el estudio de esta estrategia le permite al estudiante reconocer sus principales dificultades en relación a problemas de probabilidad condicional?

6. ¿El uso de esta estrategia le permite al estudiante tener una perspectiva crítica de su desempeño en relación a la resolución de problemas?