UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemática y computación

DISEÑO PARA LA RESIGNIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN UN ESCENARIO DE ECONOMÍA. UN ESTUDIO DESDE EL COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LAS FUNCIONES

AUTOR: **Leonel Antonio Guerrero Cerda**

Profesor Guía: Dr. Héctor Silva Crocci

Trabajo de Titulación presentado para obtener el Grado Académico de Magíster en Educación en Matemática

Santiago – Chile

2018

© Leonel Antonio Guerrero Cerda.
Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando incluya la cita bibliográfica del documento.

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS _____ ***iv***

INDICE DE TABLAS Y FIGURAS _____ ***vi***

Resumen _____ ***viii***

Abstract _____ ***ix***

Introducción _____ ***x***

CAPÍTULO I: La Problemática _____ ***3***

1.1. Motivaciones de la investigación _____ **3**

1.1.1. *Libro 1:* Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera de C.H.Edwards, Jr y David E. Penney (1993). _____ 7

1.1.2. *Libro 2:* El texto Ecuaciones diferenciales con problemas en la frontera de Dennis G.Zill, Michael R. Cullen (2002). _____ 11

1.1.3. *Libro 3:* El texto Matemáticas Avanzadas para Ingeniería de Erwin Kreyszig (2009). _____ 16

1.2. Pregunta de Investigación _____ **22**

1.3.- Objetivos _____ **23**

CAPÍTULO II: Antecedentes _____ ***27***

2.1. Antecedentes _____ **27**

2.2. El comportamiento con tendencia de lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales _____ **31**

2.3. El sistema económico de León Walras _____ **35**

2.4. Noción de la Oferta y Demanda _____ **36**

CAPÍTULO III: _____ ***41***

CAPÍTULO III: Marco teórico y Metodológico _____ ***41***

3.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa _____ **41**

3.2. Metodología _____ **45**

CAPÍTULO IV: Diseño de situación _____ ***50***

4.1. Análisis preliminar _____ **50**

4.1.1. Lo epistemológico del diseño _____ 51

4.1.2. Lo situacional del modelo dinámico de oferta y demanda _____ 52

4.1.3. En Síntesis _____ 57

4.2. Análisis A priori: diseño de la actividad didáctica **58**
4.2.1. Momento 1 60
4.2.2. Momento 2 74
4.2.3. Momento 3 80

4.3. Análisis a posteriori **86**
4.3.1. Análisis del Momento 1 86
4.3.2. Análisis del Momento 2 103
4.3.3. Análisis del Momento 3 110

CAPÍTULO V: Conclusiones ***116***

5.1. Conclusiones **116**

5.2. Sugerencias para un rediseño de la situación **117**

Bibliografía ***120***

INDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1: Definición de la Ecuación Lineal de primer orden y descripción del proceso de resolución por Edwards y Penney (1993) 7

Tabla 2: Método de solución de la ecuación lineal y ejemplo, Edwards y Penney (1993) 8

Tabla 3: Comentario respecto de la solución y gráfica de las curvas solución de la ecuación, Edwards y Penney (1993) 9

Tabla 4: Definición de la Ecuación Lineal de primer orden por Zill & Cullen (2002) 11

Tabla 5: Método de solución de la ecuación lineal, Zill & Cullen (2002) 12

Tabla 6: Método de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden, Zill & Cullen (2002) 13

Tabla 7: Definición de la ecuación diferencial lineal de primer orden por Kreyszig (2009). 16

Tabla 8: Solución de la ecuación diferencial como una ecuación exacta, Kreyszig (2009) 17

Tabla 9: Fórmula de Leibnitz y problema de aplicación de la ecuación lineal, Kreyszig (2009) 18

Tabla 10: Problema de ecuación lineal con condiciones iniciales, Kreyszig (2009) 19

Figura.1. Comportamiento tendencial de $yx = Ce - x$ 32

Figura.2. Comportamiento tendencial de $yx = k + Ce - x$ 32

Figura 3. Comportamiento tendencial de $yx = x - 1 + Ce - x$ 33

Figura 4. Comportamiento tendencial de la solución de $ay' + y = x$*, para distintos valores de* a. 34

Figura 4: Proceso de convergencia al equilibrio. 36

Figura 5: Curvas de oferta y demanda. 37

Figura 6: Definición de Transformación lineal usada por Roa y Oktac (2010), pp. 102. 42

Figura 7: Ejemplos de preguntas usadas en Guzmán (1998), pp. 13. 42

Figura 8. Gráfica de la solución de la ecuación $y' + 2y = 3$ 52

(4) 52

Figura 9. Funciones lineales de oferta y demanda. 53

Figura 10. Comportamiento tendencial de la solución 55

Figura 11: Síntesis, lo epistemológico de Cordero con lo situacional de Walras. 57

Figura 12: Estructura general del diseño de situación didáctica. 59

Figura 13. Actividad 1, Momento 1 60

Figura 14. Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = b$ 61

Figura 15. Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = t$ 62

Figura 16. Campo de direcciones de la ecuación $y't + yt = t$ 62

Figura 17: Solución de la ecuación diferencial $y't + yt = ebt,\ b > 0$ 63

Figura 18. Solución de la ecuación diferencial $y't + yt = ebt, b < 0$ 63

Figura 19. Actividad 2, Momento 1 64

Figura 20. Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 3$ 65

Figura 21: Campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 3$ 66

Figura 22: Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' - 2y = 3$ 66

Figura 23: Campo de direcciones de la ecuación diferencial y'-2y=3 67

Figura 24: Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y'x + y2x = 3$ 67

Figura 25: Campo de direcciones de la ecuación diferencial $y't + 2yt = t$ 68

Figura26: Actividad 3, Momento 1 69

Figura 27: Gráficas de soluciones de la ecuación diferencial $ay't + yt = t2$ 71
Figura 28: Actividad 4, Momento 1 72
Figura 29: Actividad 5, Momento 2. 74
Figura 30: Gráfica de $Pt = 12 - 4e - 20t$ 75
Figura 31: Actividad 6, Momento2. 76
Figura 32: Gráfica de$Pt = 15 + 5e - 2t$ 77
Figura 33: Actividad 7, Momento 2 78
Figura 34: Actividad 8, Momento 3. 80
Figura 35: Gráfica de la función $Pt = 12 - 4e - 20t.$ 81
Figura 36: Gráfica de la función $Pt = t22 - t2 + 14 - 14e - 2t$ 82
Figura 37: Gráfica de la función $Pt = 4 + 2te - 2t + 8.$ 82
Figura 38: Actividad 9, Momento 3. 83
Figura 39: Gráfica de la solución $Pt = 12 - 4e - 20t$ 84
Figura 40: Gráfica de la solución $Pt = t22 - t2 + 14 - 14e - 2t$ 84
Figura 41: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 1 87
Figura 42: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 2. 89
Figura 43: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 3. 91
Figura 44: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 4. 92
Figura 45: Campos de direcciones de la ecuación diferencial $y´t + yt = t$ 93
Figura 46: Actividad 2, Grupo 2. 96
Figura 47: Pregunta a), Actividad 2, Grupo 4. 98
Figura 48: Pregunta b) y c), Actividad 2, Grupo 4 99
Figura 49: Actividad 3, Grupo 4. 100
Figura 50: Actividad 4, Grupo 4. 101
Figura 51: Actividad 5, Grupo1. 103
Figura 52: Actividad 5, Grupo 2 104
Figura 53: Actividad 5, Grupo 3. 105
Figura 54: Actividad 5, Grupo 4. 106
Figura 55: Actividad 6, Grupo 1. 107
Figura 56: Actividad 6, Grupo 2. 108
Figura 57: Actividad 6, Grupo 3. 108
Figura 58: Actividad 7, Momento 2. 109
Figura 59: Actividad 8, Grupo 4 110
Figura 60: Actividad 9, Grupo 4. 111

Resumen

Este proyecto de tesis tiene como objetivo rediseñar una situación de aprendizaje orientado a la resignificación de la ecuación diferencial en una comunidad de Ingenieros Comerciales a través de los usos de la Economía en la ley de oferta y la demanda, fundamentada con argumentos teóricos entregados por la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. En particular, la fuente de los argumentos es el libro "*El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*" de Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016).

Con los argumentos se pretende que el estudiante de Ingeniería Comercial identifique y analice las relaciones que posibiliten la interacción entre los contextos algebraico y gráfico, y que posteriormente pueda usar esta epistemología en el estudio de un fenómeno económico como es el de oferta y demanda. En este sentido, el rediseño de situación consiste en una serie de actividades que tienen como objetivo general desarrollar relaciones entre el contexto algebraico y el contexto gráfico de las funciones que componen la ecuación diferencial lineal de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$, $ay'(t) + y(t) = F(t)$. Dicho comportamiento implica la variación del parámetro a en lugar de resolver la ecuación diferencial para hallar las soluciones, y además considerar dichas soluciones ahora como un modelo que determina comportamientos y tendencias.

Esta categoría del comportamiento tendencial quiere decir que se analizan las ecuaciones diferenciales desde una mirada cualitativa, es decir, la preocupación no está en la resolución de la ecuación diferencial, sino que en el comportamiento de las soluciones que tienden a la función a la cual está igualada la ecuación. Con esta epistemología se busca la relación funcional de la ecuación diferencial en un modelo dinámico de mercado (ley de oferta y demanda).

Las ecuaciones diferenciales es una rama de la matemática que carece de sentido en el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería comercial ya que, tanto en los libros de texto como en la enseñanza tradicional, se centran principalmente en métodos algebraicos. Esto involucra un proceso analítico que cuando se experimentan las ecuaciones diferenciales con algún problema aplicado, este se hace a través de un problema alejado de su contexto disciplinario.

Abstract

The objective of this thesis project was to design a learning situation oriented towards the resignification of the differential equation in a community of Commercial Engineers through the uses of the Economy in the law of supply and demand, based on theoretical arguments delivered by the socioepistemological theory of Educational Mathematics. In particular, the source of the arguments is the book "The trend behavior, the stable and linear differential equations. A graphic argument " from Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016).

It is intended that the student of Commercial Engineering identify and analyze the relationships that enable the interaction between the algebraic and graphic contexts, and that later he can use this epistemology in the study of an economic phenomenon such as supply and demand.

In this sense, the situation redesign consists of a series of activities whose general objective is to develop relationships between the algebraic context and the graphic context of the functions that make up the linear differential equation of the form $y'(t) + ay(t) = F(t)$, $ay'(t) + y(t) = F(t)$. This behavior implies the variation of the parameter a instead of solving the differential equation to find the solutions, and also consider these solutions now as a model that determines behaviors and trends.

This category of trend behavior means that differential equations are analyzed from a qualitative perspective, that is, the concern is not in the resolution of the differential equation, but in the behavior of the solutions that tend to the function to which the equation is equated. This epistemology seeks the functional relationship of the differential equation in a dynamic market model (law of supply and demand).

Differential equations is a branch of mathematics that has no meaning in the learning of commercial engineering students since, in both textbooks and traditional teaching, they focus mainly on algebraic methods. This involves an analytical process that when differential equations are experienced with some applied problem, this is done through a problem far from its disciplinary context.

.

Introducción

Este proyecto de tesis tiene como objetivo rediseñar una situación de aprendizaje orientado a la resignificación de la ecuación diferencial en una comunidad de Ingenieros Comerciales a través de los usos de la Economía en la ley de oferta y la demanda, fundamentada con argumentos teóricos entregados por la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Lo que se busca es que el estudiante de Ingeniería Comercial por medio de elementos didácticos identifique y analice las relaciones que posibiliten la interacción entre los contextos algebraico[1] y gráfico, y que posteriormente pueda usar esta epistemología en el estudio de un fenómeno económico como es el de oferta y demanda. Esta interacción se dará a partir de considerar nociones de comportamiento de las funciones con cierta tendencia.

En este sentido, el rediseño de situación consiste en una serie de actividades que tienen como objetivo general desarrollar relaciones entre el contexto algebraico y el contexto gráfico de las funciones que componen la ecuación diferencial lineal de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$, $ay'(t) + y(t) = F(t)$. Dicho comportamiento implica la variación del parámetro a en lugar de resolver la ecuación diferencial para hallar las soluciones, y además considerar dichas soluciones ahora como un modelo que determina comportamientos y tendencias.

Esta categoría del comportamiento tendencial quiere decir que se analizan las ecuaciones diferenciales desde una mirada cualitativa, es decir, la preocupación no está en la resolución de la ecuación diferencial, sino que en el comportamiento de las soluciones que tienden a la función a la cual está igualada la ecuación. Con esta epistemología se busca la relación funcional de la ecuación diferencial en un modelo dinámico de mercado (ley de oferta y demanda).

Hoy la matemática escolar manifiesta que el conocimiento es intacto, sin posibilidades de modificarse, normada por una matemática estructurada, donde el estudiante sólo se remite a la tarea de aprenderlo o conocerlo, más no a construirlo. Esto origina que escinda de sentidos y significados, soslayando y opacando la pluralidad del pensamiento matemático.

Al respecto Mendoza (2012) señala, "*que no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional, en tanto que se busca explicar la matemática desde la matemática misma, soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo e incluso, desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático".* Entonces se observa que hay

[1] Lo algebraico se toma del libro "*El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*" de Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016). Este término se manifiesta a lo largo de toda la tesis y semánticamente será lo mismo que lo algorítmico.

ausencia de marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático, utilitario, lineal y estático, que se ha centrado principalmente en los objetos matemáticos.

La socioepistemología propone una resignificación de la ecuación diferencial, ya que proporciona elementos que permiten a los estudiantes construir una matemática funcional. La matemática funcional hace referencia a que los estudiantes usen los conceptos en diferentes situaciones, pero que estos no sean utilizados porque el profesor les enseñó problemas tipos, sino que sean capaces de dada una situación dar un uso propio a lo aprendido.

De este modo, en el proyecto de tesis se hace uso de la epistemología que propone Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldivar en el libro "*El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales. Una argumentación gráfica*" (2016), en el que plantean que el comportamiento tendencial de las soluciones llevan a métodos cualitativos y establece relaciones entre las funciones que componen la ecuación diferencial. Además señalan que la gráfica de la solución de una ecuación diferencial lineal es un comportamiento que se mira de forma completa y es un significado de la ecuación diferencial. Los usos que se les puede dar a la gráfica hacen emerger conocimientos que no son considerados en el **discurso Matemático Escolar** (dME), que entre sus consecuencias no considera los usos de estas ecuaciones en la comunidad de los Ingenieros Comerciales.

Con respecto a lo situacional, la epistemología del comportamiento tendencial de las funciones (Cordero et. al., 2016) se articula con el modelo dinámico de oferta y demanda del economista León Walras (1874).

De este modo, el proyecto de tesis se estructura en cinco capítulos en los cuales se desarrollan las ideas antes expuestas.

En el primer capítulo del proyecto se desarrolla una contextualización del escenario en el cual se da la problemática y se define la comunidad a la cual estará dirigido la secuencia de aprendizaje. Además se muestra una parte de los contenidos del curso en cuestión y se hace un análisis de algunos textos usados como textos guías del curso (Mat023), donde la mayoría de ellos presentan una visión de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden desde un contexto que identificaremos como lo algebraico. Por otro lado, se expondrán las motivaciones y objetivos de este trabajo de tesis que se relacionan con un rediseño de la situación de aprendizaje que resignifique las ecuaciones diferenciales de primer orden en estudiantes de ingeniería comercial.

En el segundo capítulo se hace un estado del arte desde la Matemática Educativa acerca de las ecuaciones diferenciales. Asimismo, se formula a la ley de oferta y demanda de Walras (1874) como lo situacional del rediseño de situación de aprendizaje.

En el capítulo tres se describen los elementos teóricos que permiten el análisis presentado en este proyecto. Se destaca a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa como el Marco Teórico que se usa en este proyecto. Asimismo, se desarrollan los aspectos metodológicos del proyecto. En este sentido, se usa como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica, por lo que se plantean las diferentes fases como mecanismos de validación interna del diseño de situación que aquí se propone. Las fases se relacionan con: el análisis preliminar de los argumentos epistemológicos; el análisis a priori y diseño de la situación; la experimentación y el análisis a posteriori; y finalmente la confrontación entre el análisis a priori con el posteriori, lo que permitirá validar el diseño.

El cuarto capítulo presenta el análisis a priori de la situación de aprendizaje, donde en primera instancia se analizan por actividad cada una de las posibles y esperadas respuestas que puedan dar los estudiantes al experimentar con la secuencia. En una segunda instancia, luego de la experimentación del rediseño de situación, se presenta el análisis a posteriori de cada una de las respuestas de los estudiantes, para luego hacer una confrontación de estos resultados con los que se proponía como posibles respuestas en el análisis a priori. Esto permitió ajustar la secuencia del diseño y generar algunas reflexiones para futuros proyectos.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones principales de este proyecto, y de consideraciones que se tuvieron antes de experimentar el diseño.

Finalmente, en el Anexo se muestra la situación de aprendizaje que se experimentó con la comunidad de Ingenieros Comerciales y cuyo análisis expresa la resignificación de las ecuaciones diferenciales lineales en un escenario de ley de oferta y demanda.

CAPÍTULO I: La problemática

CAPÍTULO I: La Problemática

Este proyecto de tesis hace uso de una epistemología del conocimiento matemático que dota de nuevos significados a la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático. La epistemología puesta en uso se constituye en un programa de investigación que estudia al conocimiento matemático como una construcción social, es decir, se estudia a la matemática no como un saber estático y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se resignifica de acuerdo a lo situacional en que es usado.

1.1. Motivaciones de la investigación

Este proyecto de tesis se plantea sobre la base de interrogantes y vacíos que dan a conocer estudiantes de Ingeniería Comercial, de una universidad chilena, al cursar la asignatura de Matemáticas 3 (Mat023). Este proyecto, específicamente, fortalece el tema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Cabe destacar que los estudiantes, manifiestan que los contenidos programáticos de la asignatura son extensos y abstractos y que en general no existe ningún tipo de relación entre los que se les enseña y lo que tiene que ver con su campo laboral.

En este sentido, cuando se estudian las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, estas se relacionan con el mundo de la ingeniería, esto es, problemas de caída libre, desintegración radioactiva, crecimiento poblacional, problemas de persecución, mezclas, entre otros. Aplicaciones que están alejados del campo laboral de un Ingeniero Comercial.

En este escenario cabe citar a Cordero, (2015) quien hace alusión a como el dME escinde de la funcionalidad del conocimiento matemático. *Por esta razón se formulan adherencias sin cuestionar la utilidad de ese conocimiento, se altera su naturaleza que deriva en la generación de sentimientos de auto exclusión y los modelos educativos con el afán de ganar homogeneidad de su aprendizaje, soslayando y opacando la pluralidad del pensamiento matemático (Cordero, 2015, pp. 16).*

Es más, se ha observado que los estudiantes son capaces de resolver algebraicamente una ecuación diferencial lineal de primer orden sin dificultad, pero sin lograr entender el significado gráfico de dicha solución. Ellos son capaces de utilizar las propiedades con algún grado de dificultad, pero a la hora de preguntarles respecto a significados asociados no se ponen en uso sus conocimientos. Este fenómeno indica que los estudiantes logran tener una manipulación algebraica de las ecuaciones diferenciales, pero que está carente de significado.

Respecto de esto (Cantoral, 2003, pp. 363) señala, "*es sabido que la manera de abordar la matemática en el sistema escolar ocurre mediante la centración en los objetos matemáticos, concebidos estos como entidades abstractas que son ejemplificadas y ejercitadas; eludiendo en el tratamiento didáctico la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante, esto es, se concibe que las matemáticas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y, en consecuencia, externas al individuo, siendo el profesor quien comunica verdades preexistentes a sus alumnos, normado por el dME* ". Por tanto, la *construcción social* del conocimiento queda rezagada en el *dME*.

La asignatura de Matemáticas 3 (Mat023) se dicta para todos los estudiantes que cursan el segundo año de cualquiera de las Ingenierías que imparte la Universidad Federico Santa María, incluyendo a aquellos estudiantes que están en la carrera de Ingeniería Comercial, bajo la modalidad de curso semestral; por año, lo cursan alrededor de 1000 estudiantes, solo en los campus de Santiago (San Joaquín y Vitacura).

Conforme al Plan de Estudio de las Ingenierías, se encuentra inserta en el Ciclo Profesional, con una carga horaria semanal de 6 horas – reloj (distribuidas en 4,5 horas de teoría y 1,5 de práctica) y como prerrequisito es necesario haber aprobado matemáticas 2 (Mat 022) que se dicta los dos semestres de cada año.

En el programa se señala que el objetivo del curso es: Al aprobar el curso, el alumno será capaz de utilizar el lenguaje y las técnicas propias del cálculo diferencial en varias variables para analizar y resolver problemas provenientes de los ámbitos físicos, ingenieriles, económicos u otros.

Respecto al programa del curso, este está conformado por cinco unidades: Transformaciones Lineales, Funciones en Varias variables, Ecuaciones Diferenciales de primer y orden superior, Transformada de Laplace y Series e Integral de Fourier.

En particular en uno de las unidades, Ecuaciones diferenciales, los temas que se abordan son:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden, problemas de valor inicial, aplicaciones: problemas de crecimiento y decrecimiento, enfriamiento, mezclas químicas, circuitos eléctricos simples. Ecuaciones de variables separables, ecuaciones autónomas. Singularidades y/o puntos de equilibrio, líneas y planos de fase.

- Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior: ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, wronskiano, solución de ecuaciones lineales no homogéneas por el método de los coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros, sistemas de ecuaciones diferenciales. Aplicaciones: modelos oscilatorios en sistemas

mecánicos y eléctricos y los planos de fase correspondientes, modelos económicos y modelos de dos poblaciones, problemas con valor en la frontera.

La bibliografía utilizada es:

Textos guías:

- Kreyszig, E. "Matemáticas avanzadas para ingeniería". Volumen I y II, Editorial Limusa, 1994.

- Stein, S. and Barcellos, A. "Cálculo y Geometría Analítica" Volumen I y II Editorial McGraw Hill, 1995.

- Zill, D. and Cullen, M. “Ecuaciones diferenciales con problemas en la frontera”, Editorial Thomson Learning, 2002.

Textos de Referencia:

- Kreider, D., Kuller, R., Ostberg, D. "Ecuaciones Diferenciales", Editorial Fondo Interamericano de Desarrollo, 1973.

- Stewart, J. "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano 1994.

- Marsden, J., Tromba, A. "Cálculo vectorial". Editorial Adisson Wesley 1986.

- Edwards, C., Penney, D. "Cálculo con Geometría Analítica". Editorial Prentice Hall 1994.Cuarta Edición.

- Thomas, G., Finney, R. "Cálculo con Geometría Analítica", Editorial Adisson-Wesley 1987.Sexta Edición.

Como problemática se pretende develar la supremacía de lo algebraico respecto de lo numérico y lo geométrico, en los libros que se usan actualmente en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en estudiantes de ingeniería comercial.

Para ello se realizó una revisión de algunos libros de texto universitarios de ecuaciones diferenciales que se encuentran en la bibliografía del curso, con el objetivo de presentar y analizar algunas de las visiones que expresan estos textos, en particular en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogénea.

En ellos se podrá observar cómo él dME se expresa en la formación de ingenieros comerciales. Se destaca el carácter utilitario y no funcional de la matemática con el que se forma a los futuros profesionales al soslayar el hecho de que la matemática también puede responder a otras disciplinas, como el de la ingeniería comercial.
Es por esto que se plantea que el dME excluye a la comunidad de ingenieros comerciales de una matemática funcional que les permita resignificar ésta desde lo situacional de su quehacer como disciplina.

En este sentido, se le asigna un papel relevante a los textos como guía de estudiantes y docentes en la construcción de significados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. El brindar una supremacía al contexto algebraico por sobre otros contextos como lo gráfico o numérico, provoca que la matemática escolar carezca de sentido y significados, opacando el desarrollo del pensamiento matemático.

1.1.1. *Libro 1:* Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera de C.H.Edwards, Jr y David E. Penney (1993).

1.5 Ecuaciones lineales de primer orden

En la sección 1.4 se mostró cómo resolver una ecuación diferencial de variables separables por integración *después* de multiplicar ambos lados por un factor apropiado. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (y > 0), \tag{1}$$

se multiplicaron ambos lados por el factor $1/y$ para llegar a

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x; \quad \text{esto es,} \quad D_x(\ln y) = D_x\left(x^2\right). \tag{2}$$

Debido a que cada lado de la ecuación (2) puede identificarse como una *derivada* (respecto de la variable independiente x), todo lo que queda por hacer son dos integraciones simples, lo cual nos lleva a $\ln y = x^2 + C$. Por esta razón la función $\rho(y) = 1/y$ se llama *factor integrante* de la ecuación original en (1). Un **factor integrante** para una ecuación diferencial es una función $\rho(x, y)$ tal que la multiplicación de cada lado de la ecuación diferencial por $\rho(x, y)$ produce una ecuación en la cual cada lado es reconocible como una derivada.

Con ayuda de un factor integrante apropiado, existe una técnica estándar para resolver la **ecuación lineal de primer orden**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

en un intervalo en el cual las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3) por el factor de integración

$$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{4}$$

El resultado es

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}. \tag{5}$$

Porque

$$D_x\left[\int P(x)\,dx\right] = P(x),$$

el lado izquierdo es la derivada del *producto* $y(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$, entonces la ecuación (5) es equivalente a

$$D_x\left[y(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Integrando ambos lados de esta ecuación se llega a

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx + C.$$

Finalmente, resolviendo para y se obtiene la solución general de una ecuación lineal de primer orden dada en (3):

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx + C\right]. \tag{6}$$

Esta fórmula **no** debe memorizarse, pues en un problema específico es más simple usar el *método* por el cual se desarrolló tal fórmula. Esto es, para resolver una ecuación que puede escribirse de la forma de la ecuación (3) con las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ mostradas explícitamente, se pueden intentar los siguientes pasos.

Tabla 1: Definición de la Ecuación Lineal de primer orden y descripción del proceso de resolución por Edwards y Penney (1993)

MÉTODO: SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Empezar por calcular el factor de integración $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$.
2. Posteriormente, multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por $\rho(x)$.
3. Identificar el lado izquierdo de la ecuación resultante como la derivada de un producto:

$$D_x\,[\rho(x)y(x)] = \rho(x)Q(x).$$

4. Finalmente, integrar la ecuación,

$$\rho(x)y(x) = \int \rho(x)\,Q(x)\,dx + C,$$

después resolver para y y obtener la solución general de la ecuación diferencial original.

Comentario 1. Dada una condición inicial $y(x_0) = y_0$, se puede (como siempre) sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en la solución general y resolver para conocer el valor de C llegando así a una solución particular que satisface la condición inicial.

Comentario 2. No es necesario proporcionar explícitamente una constante de integración cuando se encuentra el factor integrante $\rho(x)$. Por eso se sustituye

$$\int P(x)\,dx \quad \text{con} \quad \int P(x)\,dx + K$$

en la ecuación (4), cuyo resultado es

$$\rho(x) = e^{K+\int P(x)\,dx} = e^K e^{\int P(x)\,dx}.$$

Pero el factor constante e^K no afecta materialmente el resultado de multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial en (3) por $\rho(x)$, por eso podemos tomar $K = 0$. Por lo tanto, se puede escoger para $\int P(x)dx$ *cualquier* antiderivada conveniente de $P(x)$, sin preocuparse por añadir una constante de integración. ■

Ejemplo 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - y = \tfrac{11}{8}e^{-x/3}, \quad y(0) = -1.$$

Solución Aquí se tiene $P(x) \equiv -1$ y $Q(x) = \frac{11}{8}\,e^{-x/3}$, así que el factor de integración es

$$\rho(x) = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x}.$$

La multiplicación de ambos lados de la ecuación por e^{-x} nos lleva a

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}, \tag{7}$$

la cual identificamos como

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}.$$

Tabla 2: Método de solución de la ecuación lineal y ejemplo, Edwards y Penney (1993)

50 Capítulo 1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Así, la integración respecto de x resulta

$$e^{-x}y = \int \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}\,dx = -\tfrac{33}{32}e^{-4x/3} + C,$$

y multiplicando por e^x proporciona la solución general

$$y(x) = Ce^{x} - \tfrac{33}{32}e^{-x/3}. \tag{8}$$

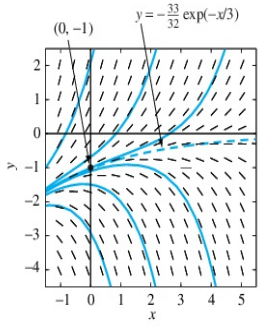


FIGURA 1.5.1. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = y + \frac{11}{8}e^{-x/3}$.

La sustitución de $x = 0$ y $x = -1$ nos da ahora $C = \frac{1}{32}$. Así, la solución particular deseada es

$$y(x) = \tfrac{1}{32}e^{x} - \tfrac{33}{32}e^{-x/3} = \tfrac{1}{32}\left(e^{x} - 33e^{-x/3}\right). \quad \blacksquare$$

Comentario. La figura 1.5.1 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación (7), incluyendo una que pasa a través del punto $(0, -1)$. Observe que algunas soluciones crecen rápidamente en la dirección positiva conforme se incrementa x, mientras que otras crecen rápidamente en la dirección negativa. El comportamiento de una curva solución dada se determina por su condición inicial $y(0) = y_0$. Los dos tipos de comportamiento están separados por la solución particular $y(x) = -\frac{33}{32}e^{-x/3}$ para la cual $C = 0$ en la ecuación (8) tal que $y_0 = -\frac{33}{32}$ para la curva solución que está punteada en la figura 1.5.1. Si $y_0 > -\frac{33}{32}$, entonces $C > 0$ en la ecuación (8), de tal manera que el término e^x eventualmente domina el comportamiento de $y(x)$, y así $y(x) \to +\infty$ conforme $x \to +\infty$. Pero si $y_0 < -\frac{33}{32}$, entonces $C < 0$, y de este modo ambos términos en $y(x)$ son negativos y por tanto $y(x) \to -\infty$ conforme $x \to +\infty$. En consecuencia, la condición inicial $y_0 = -\frac{33}{32}$ es *crítica* en el sentido de que las soluciones que inician arriba de $-\frac{33}{32}$ en el eje y crecen en la dirección positiva, mientras que las soluciones que inician debajo de $-\frac{33}{32}$ crecen en dirección negativa conforme $x \to +\infty$. La interpretación de un modelo matemático frecuentemente depende de encontrar esa condición crítica que separe el tipo de comportamiento de una solución de otra distinta. $\blacksquare$

Tabla 3: Comentario respecto de la solución y gráfica de las curvas solución de la ecuación, Edwards y Penney (1993)

En este texto la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea la resuelven encontrando un factor de integración, el cual es "impuesto" por fórmula, sin explicar cómo se obtiene, para luego llegar a la fórmula de Leibnitz.

Es decir, dada la ecuación diferencial de la forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, definida en un intervalo donde $P(x)\ y\ Q(x)$ son continuas.

Si multiplicamos esta ecuación por el factor $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ se obtiene:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Luego expresan el lado izquierdo de la igualdad como la derivada de un producto, quedando:

$$D\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x),$$

Integrando con respecto a x se obtiene:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)$$

Obteniendo la fórmula de Leibnitz, que recomiendan no aprenderla de memoria, pese a esto, en la próxima página dan una especie de receta en la cual entregan paso a paso como se resuelve dicha ecuación.

En la siguiente página se da un ejemplo de un PVI que se resuelve siguiendo las indicaciones anteriormente dadas, obteniendo una solución particular de esta, se hace un pequeño estudio cualitativo graficando campos de isóclina y alguna curvas solución analizando el comportamiento de las soluciones cuando la variable independiente tiende al infinito.

El procedimiento completo, de alguna forma nos entrega una perspectiva de cómo se está privilegiando el contexto algebraico, donde la solución de la ecuación diferencial lineal es expresada a través de una fórmula y pasa a ser relevante en él desarrollo del tema posteriormente.

A continuación se revisa otro texto guía del estudiante de ingeniería comercial en el cual también identificaremos esta supremacía de lo algebraico en la presentación de la ED.

1.1.2. *Libro 2:* El texto Ecuaciones diferenciales con problemas en la frontera de Dennis G.Zill, Michael R. Cullen (2002).

40. $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = e^x$

41. $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = x$

42. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

Problema para discusión

43. Revisemos el concepto de factor integrante que se presentó en los problemas 37 a 42. Las dos ecuaciones, $M\,dx + N\,dy = 0$ y $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$, ¿son necesariamente equivalentes en el sentido que una solución de la primera también es una solución de la segunda o viceversa?

2.3 ECUACIONES LINEALES

■ *Definición de una ecuación diferencial lineal* ■ *Forma normal de una ecuación lineal*
■ *Variación de parámetros* ■ *Método de solución* ■ *Factor integrante* ■ *Solución general*
■ *Función definida por una integral*

En el capítulo 1 definimos la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n como sigue:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Recuérdese que linealidad quiere decir que todos los coeficientes sólo son funciones de x y que y y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia. Entonces, cuando $n = 1$, la ecuación es lineal y de primer orden.

DEFINICIÓN 2.3 **Ecuación lineal**

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

es una **ecuación lineal.**

Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \qquad (2)$$

Debemos hallar una solución de (2) en un intervalo I, sobre el cual las dos funciones P y f sean continuas.

Tabla 4: Definición de la Ecuación Lineal de primer orden por Zill & Cullen (2002)

En la descripción que sigue ilustraremos una propiedad y un procedimiento, y terminaremos con una fórmula que representa una solución de (2). La propiedad y el procedimiento son más importantes que la fórmula, porque ambos se aplican también a ecuaciones lineales de orden superior.

Propiedad El lector puede comprobar por sustitución directa que la ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución **es** la **suma** de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

y y_p es una solución particular de (2). Podemos determinar y_c por separación de variables. Escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0,$$

al integrar y despejar ay obtenemos $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por comodidad definiremos $y_c = cy_1(x)$, en donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. Aplicaremos de inmediato el hecho que $dy_1/dx + P(x)y_1 = 0$, para determinar a y_p.

Procedimiento Ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (2), siguiendo un procedimiento llamado **variación de parámetros.** Aquí, la idea básica es encontrar una función, u, tal que $y_p = u(x)y_1(x)$, en que y 1, que está definida en el párrafo anterior, sea una solución de la ecuación (2). En otras palabras, nuestra hipótesis de y_p equivale ay, $= cy_1(x)$, excepto que el "parámetro variable" u reemplaza a c. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (2) obtenemos

$$\frac{d}{dx}[uy_1] + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx} + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}_{\text{cero}} + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

de modo que

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x).$$

Separamos variables, integramos y llegamos a

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx.$$

De acuerdo con la definición de y_1, tenemos

$$y_p = uy_1 = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx.$$

Tabla 5: Método de solución de la ecuación lineal, Zill & Cullen (2002)

Así,

$$y = y_c + y_p = ce^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Entonces, si (1) tiene una solución, debe poseer la forma de la ecuación (4). Recíprocamente, por derivación directa se comprueba que la ecuación (4) es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación (2).

No se debe tratar de memorizar la ecuación (4). Hay un modo equivalente y más fácil de resolver la ecuación (2). Si se multiplica (4) por

$$e^{\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

y después se deriva $$e^{\int P(x)\,dx} y = c + \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx} y\right] = e^{\int P(x)\,dx} f(x), \tag{7}$$

llegamos a $$e^{\int P(x)\,dx} \frac{dy}{dx} + P(x) e^{\int P(x)\,dx} y = e^{\int P(x)\,dx} f(x). \tag{8}$$

Al dividir este resultado entre $e^{\int P(x)\,dx}$ obtenemos la ecuación (2).

Método de solución El método que se recomienda para resolver las ecuaciones (2) consiste, en realidad, en pasar por las ecuaciones (6) a (8) en orden inverso. Se reconoce el lado izquierdo de la ecuación (8) como la derivada del producto de $e^{\int P(x)\,dx}$ por y. Esto lleva a (7). A continuación integramos ambos lados de (7) para obtener la solución (6). Como podemos resolver (2) por integración, después de multiplicar por $e^{\int P(x)\,dx}$, esta función se denomina **factor integrante** de la ecuación diferencial. Por comodidad resumiremos estos resultados.

Solución de una ecuación lineal de primer orden

i) Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se convierte a la forma de (2); esto es, se hace que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

ii) Hay que identificar $P(x)$ y definir el factor integrante, $e^{\int P(x)\,dx}$

iii) La ecuación **obtenida** en el paso *i* se multiplica por el factor integrante:

$$e^{\int P(x)\,dx} \frac{dy}{dx} + P(x)\, e^{\int P(x)\,dx} y = e^{\int P(x)\,dx} f(x).$$

iv) El lado izquierdo de la ecuación **obtenida** en el paso *iii* es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, y; esto es,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx} y\right] = e^{\int P(x)\,dx} f(x).$$

v) Se integran ambos lados de la ecuación **obtenida** en el paso *iv*.

Tabla 6: Método de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden, Zill & Cullen (2002)

En el texto de Dennis G.Zill, Michael R. Cullen, la ecuación diferencial se enfrenta de una manera distinta que el texto anterior. Se ocupa un procedimiento que será útil también en la resolución de ecuaciones lineales de orden superior (variación de parámetros). Se toma una solución de la

forma $y(x) = y_c + y_p$, donde y_c es solución de la ecuación homogénea e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Es decir, el procedimiento es el siguiente:

Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

Sea la solución general de la ecuación diferencial (1) de la forma $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, donde $y_c(x)$ es la solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

e $y_p(x)$ es solución particular de (1).

Para determinar $y_c(x)$, resolvemos (2) por separación de variables.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$lny = -\int P(x)dx + K$$

$$y = e^{-\int P(x)dx + K}$$

$$y_c(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Para determinar la solución $y_p(x)$ (solución particular de (1)), se usará variación de parámetros, es decir, se toma $y_p(x) = u_1(x) \cdot y_c(x)$, donde $y_c(x)$ es la solución de la ecuación homogénea. Luego,

$$y_p'(x) = u_1'(x)y_c(x) + u_1(x){y_c}'(x)$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial (1), se obtiene:

$$u_1'(x)y_c(x) + u_1(x)y_c'(x) + P(x)u_1(x)y_c(x) = Q(x)$$

$$u_1(x)\left[\underbrace{y_c'^{(x)} + P(x)y_c(x)}_{0}\right] + u_1'(x)y_c(x) = Q(x)$$

$$u_1(x)y_c(x) = Q(x)$$

Separando variables, se tiene:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{Q(x)}{y_c(x)} \quad \Longrightarrow \quad u_1(x) = \int \frac{Q(x)}{y_c(x)} dx \, .$$

Luego,

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \, . \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx \, .$$

Por lo tanto,

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \, . \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx \, .$$

Como se puede observar, este método de resolución de la ecuación diferencial es distinto al texto anterior ya que deduce de forma natural lo que en el texto anterior denominan el factor integrante. Este método de resolución es usado con posterioridad para resolver ecuaciones diferenciales lineales, no solo de primer orden, sino que también de orden superior.

Pese a este intento de movilizar al estudiante a una manera distinta de ver y resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, el autor recomienda no memorizar esta solución, pero resulta que entrega un resumen en el cual se señalan los pasos a seguir para encontrar la solución de la ecuación diferencial, es decir, entrega una especie de recetario paso a paso en que lo algebraico toma un valor predominante en la discusión. A continuación se presenta un tercer libro de referencia usados por la comunidad de estudiantes de ingeniería comercial en el cual también se exhibe la supremacía de lo algebraico en la difusión de las ecuaciones diferenciales.

1.1.3. *Libro 3:* El texto Matemáticas Avanzadas para Ingeniería de Erwin Kreyszig (2009).

Problemas de la sección 1.6

1. Comprobar (4).
2. Comprobar la exactitud en el ejemplo 1 usando la prueba usual.
3. Comprobar la solución del ejemplo 2, según se indica.
4. Dar los detalles de la deducción de (8).
5. Comprobar que el teorema 1 no puede usarse para resolver el ejemplo 4.
6. Comprobar que y, xy^3 y x^2y^5 son factores integrantes de $y\,dx + 2x\,dy = 0$ y resolverla.

Verificar que la función F dada es un factor integrante y resolver el problema con valor inicial:

7. $2y\,dx + x\,dy = 0$, $y(0.5) = 8$, $F = x$
8. $3y\,dx + 2x\,dy = 0$, $y(-1) = 1.4$, $F = x^2y$
9. $(1 + xy)\,dx + x^2\,dy = 0$, $y(1) = 0$, $F = e^{xy}$
10. $dx + (x + y + 1)\,dy = 0$, $y(2.5) = 0.5$, $F = e^y$
11. $(2x^{-1}y - 3)\,dx + (3 - 2y^{-1}x)\,dy = 0$, $y(1) = -1$, $F = x^2y^2$
12. $y\,dx + [y + \tan(x + y)]\,dy = 0$, $y(0) = \pi/2$, $F = \cos(x + y)$
13. $y\,dx + [\coth(x - y) - y]\,dy = 0$, $y(3) = 3$, $F = \operatorname{senh}(x - y)$
14. $(2xe^x - y^2)\,dx + 2y\,dy = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$, $F = e^{-x}$

Encontrar un factor integrante F para las siguientes ecuaciones y resolverlas (por inspección o usando los teoremas 1 y 2):

15. $2\cos \pi y\,dx = \pi \operatorname{sen} \pi y\,dy$
16. $y\cos x\,dx + 3\operatorname{sen} x\,dy = 0$
17. $(2y + xy)\,dx + 2x\,dy = 0$
18. $2y\,dx + 3x\,dy = 0$
19. $(1 + 2x^2 + 4xy)\,dx + 2\,dy = 0$
20. $2x\,dx = [3y^2 + (x^2 - y^3)\tan y]\,dy$
21. $(y + 1)\,dx - (x + 1)\,dy = 0$
22. $5\,dx - e^{y-x}\,dy = 0$
23. $ay\,dx + bx\,dy = 0$
24. $(3xe^y + 2y)\,dx + (x^2e^y + x)\,dy = 0$

En cada caso, encontrar las condiciones para que F sea un factor integrante de (1). *Sugerencia.* Suponer que $F(P\,dx + Q\,dy) = 0$ es exacta y aplicar la ecuación (5) de la sección 1.5.

25. $F = x^a$
26. $F = y^b$
27. $F = x^ay^b$
28. $F = e^y$

29. Utilizando el problema 27, deducir el factor integrante del problema 11.
30. **(Comprobación)** Siempre es importante comprobar las soluciones. En relación con el método presente, resulta particularmente esencial ya que quizás sea necesario excluir la función $y(x)$ dada por $F(x, y) = 0$. Para ver este hecho, considérese $(xy)^{-1}\,dy - x^{-2}\,dx = 0$; demostrar que un factor integrante es $F = y$ y que lleva a $d(y/x) = 0$, por tanto $y = cx$, donde c es arbitraria, pero $F = y = 0$ no es una solución de la ecuación original.

1.7 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si puede escribirse como

(1) $$y' + p(x)y = r(x).$$

Tabla 7: Definición de la ecuación diferencial lineal de primer orden por Kreyszig (2009).

El rasgo característico de esta ecuación es que es lineal en y y y', en tanto que p y r pueden ser *cualesquiera* funciones de x dadas.

Si el segundo miembro $r(x)$ es cero para toda x en el intervalo en el que se considera la ecuación (se escribe $r(x) \equiv 0$), se dice que la ecuación es **homogénea;** de no ser así, se dice que es **no homogénea.**

Se encontrará ahora una fórmula para la solución general de (1) en algún intervalo I, suponiendo que p y r son continuas en I. Para la ecuación homogénea

$$y' = p(x)y = 0 \tag{2}$$

esto es muy sencillo. De hecho, al separar las variables se tiene

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx, \quad \text{por tanto} \quad \ln|y| = -\int p(x)\,dx + c^*$$

y al tomar exponentes en ambos miembros

$$\boxed{y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}} \qquad (c = \pm e^{c^*} \text{ cuando } y \gtrless 0); \tag{3}$$

en este caso también puede tomarse $c = 0$ y obtener la *solución trivial* $y \equiv 0$.

La ecuación no homogénea (1) se resolverá a continuación. Resulta que posee la grata propiedad de tener un factor integrante que sólo depende de x. De hecho (1) se escribe primero como

$$(py - r)\,dx + dy = 0.$$

Esta expresión es $P\,dx + Q\,dy = 0$, donde $P = py - r$ y $Q = 1$. Por tanto, la ecuación (6) de la sección 1.6 se reduce a

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p(x).$$

Puesto que sólo depende de x, la ecuación (1) tiene un factor integrante $F(x)$, que se obtiene directamente por integración y tomando exponentes [como en (7), sección 1.6]:

$$F(x) = e^{\int p\,dx}.$$

Al multiplicar (1) por esta F y aplicando la regla para derivar un producto, se obtiene

$$e^{\int p\,dx}(y' + py) = (e^{\int p\,dx}y)' = e^{\int p\,dx}r.$$

Ahora se integra con respecto a x,

$$e^{\int p\,dx}y = \int e^{\int p\,dx}r\,dx + c$$

Tabla 8: Solución de la ecuación diferencial como una ecuación exacta, Kreyszig (2009)

y se despeja y, abreviando $\int p\,dx$ por h,

$$\textbf{(4)} \qquad \boxed{y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right], \qquad h = \int p(x)\,dx.}$$

Esto representa la solución general de (1) en la forma de una integral.[11] (No importa la elección del valor de la constante de integración en $\int p\,dx$; ver el problema 2.)

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' - y = e^{2x}.$$

Solución. En este caso,

$$p = -1, \qquad r = e^{2x}, \qquad h = \int p\,dx = -x$$

y de (4) se obtiene la solución general

$$y(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}\,dx + c\right] = e^{x}[e^{x} + c] = ce^{x} + e^{2x}.$$

De manera alternativa, la ecuación dada puede multiplicarse por $e^{h} = e^{-x}$, encontrándose

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^{x}$$

y se integran ambos miembros, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$ye^{-x} = e^{x} + c, \qquad \text{Por tanto} \qquad y = e^{2x} + ce^{x}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Problema de mezcla

El tanque de la figura 10 contiene 200 galones de agua en los que están disueltas 40 lb de sal. Al tanque entran 5 galones de salmuera por minuto, cada uno de los cuales contiene 2 lb de sal disuelta, y la mezcla, cuya uniformidad se mantiene agitándola, sale a la misma razón. Encontrar la cantidad de sal $y(t)$ que hay en el tanque en cualquier tiempo t.

Solución. Primer paso. Modelado. La razón de cambio con el tiempo $y' = dy/dt$ de $y(t)$ es igual al flujo de entrada $5 \times 2 = 10$ [lb/min] de sal menos el flujo de salida. El flujo de salida [lb/min] es $(5/200) \times y(t) = 0.025y(t)$ ya que $y(t)$ es la cantidad total de sal que hay en el tanque y 5 gal/200 gal es la fracción del volumen que sale por minuto. De manera alternativa, $y(t)$ es la cantidad total de sal, en consecuencia $y(t)/200$ es la cantidad de sal por galón, y salen 5 gal/min. Por tanto, el modelo es $y' = 10 - 0.0025y$, es decir, el problema con valor inicial

$$y' + 0.025y = 10, \qquad y(0) = 40.$$

Figura 10. Tanque en el ejemplo 2.

[11] Si la integral no puede integrarse usando los métodos convencionales de cálculo (como ocurre con frecuencia en la práctica), quizás tenga que usarse un método numérico para integrales (sección 18.5) o para la propia ecuación diferencial (secciones 20.1, 20.2).

Tabla 9: Fórmula de Leibnitz y problema de aplicación de la ecuación lineal, Kreyszig (2009)

Segundo paso. Solución de la ecuación. En (4), con t en lugar de x, se tiene $p = 0.025$, $h = 0.025t$, $r = 10$ y se llega a la solución general

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-0.025t}\left[\int e^{0.025t} \cdot 10\, dt + c\right] \\ &= e^{-0.025t}\left[\frac{10}{0.025} e^{0.025t} + c\right] \\ &= ce^{-0.025t} + 400. \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = c + 400 = 40$ se obtiene $c = -360$ y como respuesta la solución particular

$$y(t) = 400 - 360e^{-0.025t} \text{ [lb]}.$$

Se observa que la cantidad de sal que hay en el tanque aumenta de manera monótona. ¿Puede el lector explicar esto físicamente? ∎

Desde luego, quizás la ecuación (4) no sea necesaria en casos simples como los ejemplos 1 y 2, pero resultará de utilidad en ecuaciones más complicadas.

EJEMPLO 3 Resolver

$$y' + 2y = e^x(3 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 2x).$$

Solución. Aquí $p = 2$, $h = 2x$, de donde por (4) se obtiene

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}\left[\int e^{2x}e^x(3 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 2x)\, dx + c\right] \\ &= e^{-2x}[e^{3x} \operatorname{sen} 2x + c] \\ &= ce^{-2x} + e^x \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$ ∎

EJEMPLO 4 Problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y' + y \tan x = \operatorname{sen} 2x, \qquad y(0) = 1.$$

Solución. Aquí $p = \tan x$, $r = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, y

$$\int p\, dx = \int \tan x\, dx = \ln |\sec x|.$$

De lo anterior se ve que en (4),

$$e^h = \sec x, \qquad e^{-h} = \cos x, \qquad e^h r = (\sec x)(2 \operatorname{sen} x \cos x) = 2 \operatorname{sen} x,$$

y la solución general de la ecuación en cuestión es

$$y(x) = \cos x\left[2\int \operatorname{sen} x\, dx + c\right] = c \cos x - 2 \cos^2 x.$$

A partir de esta expresión y de la condición inicial, $1 = c \cdot 1 - 2 \cdot 1^2$, de donde $c = 3$ y la solución del problema con valor inicial es

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x.$$ ∎

Tabla 10: Problema de ecuación lineal con condiciones iniciales, Kreyszig (2009)

En este texto la solución de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

la encuentran tomando un factor de integración que sólo depende de la variable x, transformado la ecuación diferencial $[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$ en una ecuación diferencial del tipo exacta. Es decir,

$$\mu[P(x)y - Q(x)]dx + \mu dy = 0$$

Tomando

$$M(x,y) = \mu P y - \mu Q \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \mu P$$
$$N(x,y) = \mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0$$

Entonces:

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{\boldsymbol{N(x,y)}} = \frac{\mu P - 0}{\mu} = P(x)$$

Por tanto, la ecuación diferencial tiene un factor de integración de la forma $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Luego si se multiplica la ecuación (3) por el factor de integración, se obtiene:

$$e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$
$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C$$

Obteniendo finalmente, la fórmula de Leibnitz

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)$$

En este tercer libro la ecuación diferencial la resuelven de una manera distinta a los otros textos presentados, puesto que al realizar un ejemplo recurren inmediatamente a la fórmula algebraica obtenida al final de la presentación.

Con este planteamiento se puede observar cómo se define y soluciona una ecuación diferencial lineal de primer orden. Esto expresa cómo es la actividad matemática que se está desarrollando implícitamente en el curso de Mat023. Se puede inferir cómo el contexto algebraico se impone en este curso, debido a que se emplean diversos métodos cuantitativos para encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, podemos señalar que se presenta un concepto matemático que se estudia bajo la mirada algebraica, lo cual implica que cuando se ven aplicaciones de estos conceptos solo se hace a través de ejercicios de tipo físicos, lo cual se aleja de lo situacional que envuelve al quehacer de los ingenieros comerciales. Teóricamente, parafraseando a Cordero et al., (2016), el dME promueve una enseñanza hegemónica del conocimiento matemático donde predomina el contexto algebraico.

Desde la óptica disciplinar que se adopta en este proyecto de tesis, este tipo de difusión de las ecuaciones diferenciales de primer orden en los textos escolares da cuenta de la supremacía de los procedimientos algebraicos en la enseñanza de las matemáticas, lo que conlleva a que los estudiantes piensen en la existencia de un recetario que les permitirá resolver cada una de las ecuaciones a las que se enfrentan (Cordero, et al, 2016).

Los textos escolares en la educación toman un papel relevante, ya que señalan los caminos de todas las acciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto para estudiantes como profesores. Para el docente funciona como su fuente de información en su práctica de la enseñanza. Es decir, el texto conforma un marco de referencia para el profesor y para los estudiantes, que dado la supremacía de lo algebraico genera una perpetuidad de la hegemonía del dME.

Finalmente se puede señalar que los textos y los docentes juegan un papel primordial en la generación de significados de las matemáticas en los estudiantes. En este sentido, sí la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se promueve solo en el contexto algebraico, es decir opacando la pluralidad de otros contextos como el numérico y gráfico, el aprendizaje será carente de sentidos y significados en el desarrollo del pensamiento matemático en los ingenieros comerciales.

1.2. Pregunta de Investigación

En contexto cabe preguntarse, ¿cómo contrapesar la supremacía del contexto algebraico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden en estudiantes de ingeniería comercial?

De acuerdo a Cordero et al (2016) históricamente, el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias se ha desarrollado en tres grandes escenarios: el algebraico, el numérico y el geométrico. En este sentido, desde el punto de vista epistemológico la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias se ha desarrollado bajo esos tres escenarios. No obstante, en los textos escolares predomina el contexto algebraico escindiendo de los contextos numérico y gráfico.

Los programas de estudio y los libros de texto expresan un predominio del escenario algebraico, con algunos acercamientos a lo numérico y geométrico. Esto conlleva, como consecuencia, que se tenga una visión acotada de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales. En otras palabras, los programas actuales desarrollan un enfoque algorítmico-algebraico. Esto da cuenta del desarrollo de conceptos matemáticos acabados que son carentes de significados. A modo de contrapesar la supremacía del contexto algebraico que promueve el dME en el proyecto de tesis se usará la categoría del *comportamiento tendencial de las funciones* que plantean Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016) en el libro "*El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*". Este libro suministra la epistemología usada en el proyecto de tesis para diseñar una situación de aprendizaje que resignifique las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en estudiantes de ingeniería comercial.

En términos genéricos, esta epistemología precisa que los elementos didácticos a poner en uso en el diseño de situación consisten en relacionar los contextos algebraico y gráfico de las ecuaciones diferenciales. Esta perspectiva se basa en argumentos cualitativos de las ecuaciones diferenciales que emergen en la interacción permanente entre ecuaciones y gráficas (Cordero et al, 2016). El desarrollo de esta epistemología del comportamiento con tendencia de las ecuaciones diferenciales se desarrolla en el apartado 4.4.1 titulado lo epistemológico del diseño.

Esta epistemología es la que será usada para suministrar nuevos significados a las ecuaciones diferenciales de primer orden, en donde lo situacional se relaciona con la ingeniería comercial y su relación con la ley de oferta y demanda de Walras (1874), comunidad usuaria del conocimiento matemático que atiende este proyecto de tesis.

Con los antecedentes expuestos en este apartado junto con la pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos de la investigación.

1.3.- Objetivos

Este trabajo tiene como propósito diseñar una situación de aprendizaje que permita resignificar las Ecuaciones Diferenciales lineales en estudiantes de Ingeniería Comercial, a través de los usos de la economía en la ley de oferta y demanda. En este sentido, el objetivo general, así como los objetivos especifico del proyecto de investigación quedan denotados por:

Objetivo general:

- Diseñar una situación de aprendizaje que resignifique las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en estudiantes de ingeniería comercial usando como argumento el comportamiento tendencial de las funciones.

Objetivos específicos:

- Determinar la epistemología del conocimiento matemático para configurar el diseño de la situación de aprendizaje.
- Configurar el diseño de situación de aprendizaje.
- Experimentar el diseño de situación con estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial.
- Analizar los datos de la experimentación de la situación para ajustar el diseño de situación como producto final del proyecto.

CAPÍTULO II: Antecedentes

CAPÍTULO II: Antecedentes

2.1. Antecedentes

Para la mayoría de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial, las ecuaciones diferenciales carecen de significado y de sentido, es decir, no logran identificar en que se pueden utilizar dado el contexto en el cual ellos se desarrollan. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales no logran ser funcionales en lo situacional del quehacer del ingeniero comercial.

Al respecto Mendoza (2012) señala *que "no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional, en tanto que se busca explicar la matemática desde la matemática misma, soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo e incluso, desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático"*. Este planteamiento precisa que hay ausencia de marcos de referencia para hacer funcional este conocimiento.

En la historia de la educación de ecuaciones diferenciales podemos encontrar diversos estudios respecto de las dificultades, errores y usos de estas, en la enseñanza y aprendizaje en la comunidad de ingenieros. (Guerrero, Camacho, Mejía 2010; Mendoza 2012, Mendoza, Cordero 2014).

En este sentido, se plantea que el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales queda anclado a la re memorización de métodos que permiten la resolución de ejercicios y problemas. Esto hace concebir a las ecuaciones diferenciales como definiciones y métodos que se deben aprender para resolver una extensa lista de ejercicios cuyo tratamiento por excelencia es el de tipo algebraico.

En los últimos años variadas líneas de investigación se han preocupado de ajustar los cursos introductorios a las ecuaciones diferenciales (Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004; Buchanan, Manar y Lewis, 1991; Hernández, 1995). Un punto a destacar se relaciona con incorporar representaciones gráficas y numéricas como herramienta de análisis de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, Buchanan et al (1991), Gollwitzer (1991), Moreno y Laborde (2003), y Blanchard (1994), han evidenciado en sus trabajos que con el uso de softwares matemáticos que permiten visualizar gráficas de soluciones, campos de direcciones, así como la expresión algebraica de las soluciones de ecuaciones diferenciales, fortalece el aprendizaje de estos conceptos en los estudiantes.

Usar dispositivos tecnológicos para la manipulación de gráficas de funciones, visualizar conceptos, generar habilidad de análisis, así como favorecer las nociones de predicción y simulación, resulta una manera de trastocar la forma en que se ha enseñado tradicionalmente las ecuaciones diferenciales.

Otra dificultad que han reportado líneas de investigación es el tránsito entre distintos registros de representación. En este sentido, Guerrero et al (2010) manifiestan *que "durante el trabajo de los estudiantes en el registro gráfico para la interpretación de las soluciones, es muy clara la escasez de notación matemática o el uso de alguna estrategia matemática para justificar sus afirmaciones"*. En general los estudiantes al momento de enfrentarse a una ecuación diferencial, la idea que manejan se reducen a la aplicación de alguna estrategia de clasificación y posteriormente a su resolución a través de alguna fórmula.

Hace más de 20 años que Tall (1986) pone de manifiesto la importancia de utilizar algún software específico para el estudio cualitativo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, facilitando con esto la interpretación correcta de su proceso de resolución y desarrollo, así como de la comprensión del concepto de ecuación diferencial, incorporando así en su configuración el tratamiento gráfico, numérico y algebraico de manera conjunta.
Por otro lado, también podemos señalar que los textos que se utilizan en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales hacen que se dificulte la comprensión de ellas, ya que privilegian el contexto algebraico, centrándose en la aplicación de técnicas de integración para después ver alguna aplicación en problemas de modelación, como una forma de mostrar la importancia de esta, minimizando la utilización del contexto gráfico y numérico.

Tal como lo describe Cantoral (2013) afirmando que "*el libro de texto juega un papel protagónico: se constituye como un objeto pluridimensional que pueda juzgarse de diferentes enfoques. Es a la vez el apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de los estudiantes como de profesores; y es un instrumento de poder dado que contribuye a la uniformación lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes" (Cantoral, 2002, pp.18)*.

En general, en la mayoría de los textos de ecuaciones diferenciales el tema de la ecuación diferencial lineal de primer orden se presenta de la siguiente manera:

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene varios tipos de representaciones, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad y' + P(x)y = g(x)$$

Si consideramos la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

donde P y Q son funciones continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Un **factor integrante** para la ecuación (1) es una expresión de la forma:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad (2)$$

Si multiplicamos la ecuación diferencial (1) por el factor de integración (2), se obtiene:

$$e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}P(x)y = e^{\int p(x)dx}Q(x). \qquad (3)$$

Notemos que la ecuación anterior se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}\{ye^{\int P(x)dx}\} = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Integrando respecto de x, obtenemos:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C.$$

Para finalmente obtener:

$$y = e^{\int P(x)dx}\{\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\} \quad \textbf{Formula de Leibnitz.}$$

Si consideramos la ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)y = g(x) \qquad (4).$$

Se tiene la siguiente explicación del factor integrante:

El factor de integración es una función $\mu(x)$ tal que si multiplicamos cada miembro de la ecuación diferencial por este factor, lleva a la ecuación a una forma que es inmediatamente integrable.

$$\mu(x)\, y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)g(x) \qquad (5)$$

La idea de este procedimiento es encontrar $\mu(x)$ de tal forma que el lado izquierdo de la ecuación (5) sea la derivada de alguna función. Luego:

Se suma y se resta $\mu'(x)y$ en el lado izquierdo de la ecuación (5), obteniendo:

$$[\mu'(x)y + \mu(x)\, y'] - [\mu'(x) - P(x)\mu(x)]y = \mu(x)g(x) \qquad (6)$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar el segundo miembro del lado izquierdo de la ecuación (6), e igualarlo a cero. Esto nos permite escribir la ecuación (6) como:

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \qquad (7)$$

lo que implica que el lado izquierdo de la ecuación (7) es inmediatamente integrable.

Anteriormente habíamos tomado

$$\mu'(x) - P(x)\mu(x) = 0 \qquad (8)$$

Si asumimos que $\mu(x)$ es positivo, entonces la ecuación (8) se puede escribir:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(\ln \mu(x)) = P(x).$$

Integrando, se obtiene:

$$\ln \mu(x) = \int P(x)dx + C.$$

Tomando $C = 0$ se obtiene $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Obteniendo finalmente:

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)}$$

Estos son algunos ejemplos de cómo socializan los textos el tema de la ecuación diferencial lineal de primer orden, el factor de integración y las soluciones de ésta, lo que muestra un predominio del contexto algebraico ante el contexto gráfico. Este predominio del contexto algebraico no da oportunidad de que el estudiante pueda visualizar otras maneras de comprender las soluciones, así como la misma ecuación diferencial.

Los textos y los docentes juegan un papel primordial en la generación de significados en los estudiantes. Si la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se da solo en el contexto algebraico, es decir se expresa una supremacía de análisis cuantitativos por sobre análisis de naturaleza cualitativa, esto origina que sea pobre en sentidos y significados opacando la pluralidad del pensamiento matemático.

2.2. El comportamiento con tendencia de lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales

Desde la Matemática Educativa se ha planteado que la interpretación de las soluciones de una ecuación diferencial expresadas en forma gráfica y algebraica, debería constituir uno de los objetivos principales de un curso de ecuaciones diferenciales, y sobre todo si tomamos en consideración los estudios reportados por Cordero y Solís (2001), Cordero (2001), los cuales dan cuenta de una noción que permite reconstruir significados a través de la noción de comportamiento tendencial de las funciones (CTF). Esta noción no sólo considera análisis de naturaleza cuantitativa, sino que también análisis cualitativo.

Es justamente el (CTF), lo que usaremos para explicar el comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial lo cual será usado más adelante en el rediseño de la situación. La fuente será el libro "El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica" de Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016). En este libro se plantea que "*el comportamiento tendencial de las soluciones lleva a métodos cualitativos y establece relaciones entre las funciones que componen la ecuación diferencial. La gráfica de la solución entrega un comportamiento y es un significado de la ecuación diferencial. Para lograr comprender el comportamiento tendencial de las soluciones es necesario cambiar algunas concepciones del método cuantitativo.* Uno de los cambios centrales es que "*una ecuación diferencial lineal es una relación entre funciones que determinan comportamientos (Cordero et al, 2016, pp. 40)"*.

Para explicar que es el comportamiento tendencial de las soluciones, tomaremos una ecuación diferencial de la forma $y'(x) + y(x) = F(x)$ y haremos variar $F(x)$, estableciéndose relaciones entre la solución de la ecuación y el comportamiento de $F(x)$. Por ejemplo, si determinamos el comportamiento de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$y'(x) + y(x) = 0 \qquad \text{y}$$

$$y'(x) + y(x) = k,$$

se podrá anticipar la solución de la ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = x$ buscando el comportamiento tendencial de $y(x)$.

Si tomamos la primera ecuación $y'(x) + y(x) = 0$, de ella sabemos que su solución general es $y(x) = Ce^{-x}$. La gráfica de $y(x)$ nos indica que cuando $x \to \infty \Rightarrow y(x) = Ce^{-x} \to 0$, además el signo de C nos dice si la curva está arriba o abajo del eje x.

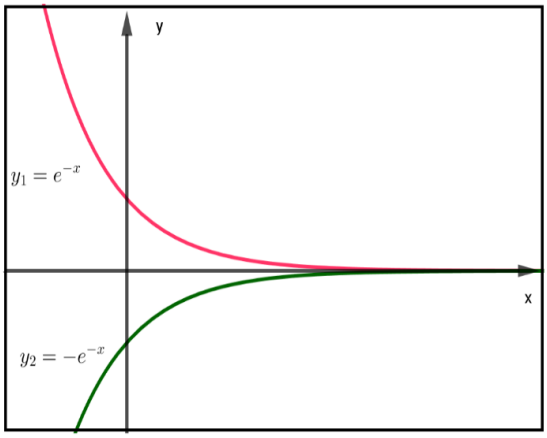


Figura.1. Comportamiento tendencial de $y(x) = Ce^{-x}$

La segunda ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = k$, tiene como solución general a $y(x) = k + Ce^{-x}$. La gráfica de $y(x)$ nos entrega un comportamiento tendencial a la recta $y(x) = k$, es decir, cuando $x \to \infty \Rightarrow y(x) = k + Ce^{-x} \to k$, ya sea por arriba o abajo del eje x.

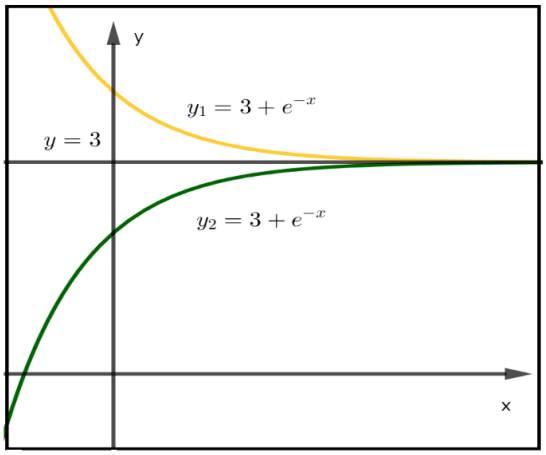


Figura.2. Comportamiento tendencial de $y(x) = k + Ce^{-x}$

Como se puede ver en ambas ecuaciones aparece un comportamiento tendencial. Con este análisis uno podría preguntarse entonces, si en la ecuación $y'(x) + y(x) = x$, la solución $y(x)$ tenderá a x.

Se puede encontrar que la solución general de esta ecuación diferencial es $y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$ y como podemos ver que cuando, $x \to \infty \Rightarrow y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$ tiende a comportarse como una recta de pendiente 1.

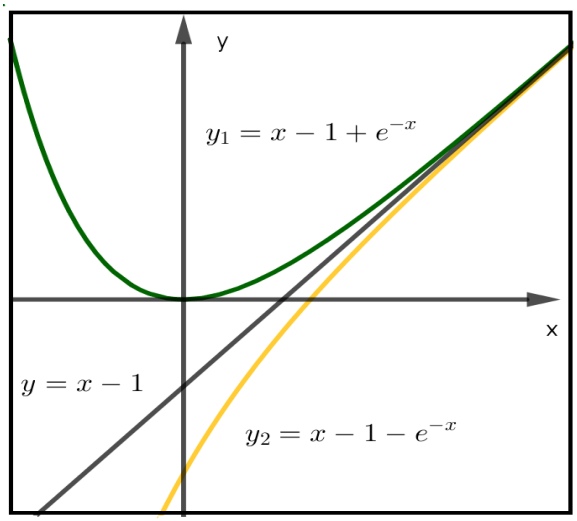


Figura 3. Comportamiento tendencial de $y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$

Luego la solución de la ecuación $y'(x) + y(x) = x$ tiene un comportamiento tendencial a x.

Esta noción del comportamiento tendencial favorece el desarrollo de la modelación a través de ecuaciones diferenciales. Estas consisten en hacer variaciones de los parámetros que componen la ecuación diferencial.

Por ejemplo si consideramos ecuaciones diferenciales de la forma:

$$ay'(x) + y(x) = F(x)$$
$$y'(x) + ay(x) = F(x)$$
$$y'(x) + y(x) = aF(x)$$

Sería interesante saber cómo es el comportamiento de la solución $y(x)$.

El comportamiento tendencial consiste en considerar el coeficiente de y' y la función $F(x)$, para determinar gráficamente el comportamiento de $y(x)$. Es así como para la ecuación diferencial $ay'(x) + y(x) = F(x)$, su solución es de la forma: $y(x) = G(x) + Ce^{-\left(\frac{x}{a}\right)}$, donde $G(x) = \frac{e^{-(x/a)}}{a}\int e^{\left(\frac{x}{a}\right)}F(x)dx$. Si hacemos $x \to \infty$ entonces $y(x) \to G(x)$, es decir, $y(x)$ se comporta como $F(x)$, luego el coeficiente a modifica la razón de cambio del comportamiento.

Si consideramos la ecuación diferencial $ay'(x) + y(x) = x$ cuya solución es de la forma: $y(x) = x - a + Ce^{-(x/a)}$, se tiene que el comportamiento de $y(x)$ es tendencial a $F(x)$, en el sentido de que la función $G(x)$ tiene la misma pendiente que la función $F(x) = x$, pero, con un desplazamiento de a unidades en el eje x, con $a > 0$. Algunas gráficas de esta solución para distintos valores del parámetro a se pueden observar en la Figura 4.

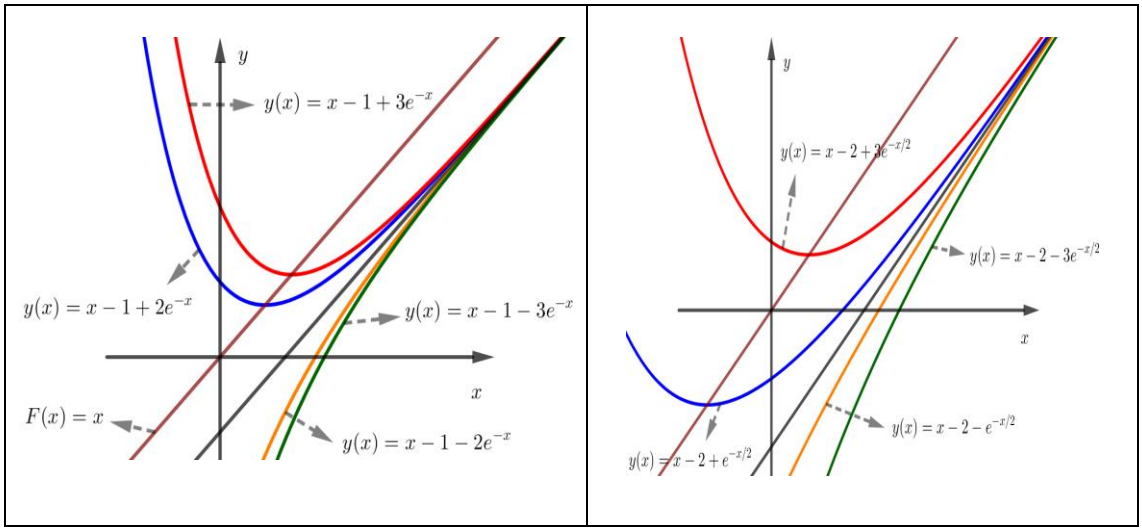


Figura 4. Comportamiento tendencial de la solución de $ay' + y = x$, para distintos valores de a.

Esto nos muestra que se puede predecir el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial, dado el patrón de comportamiento de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Lo anterior entrega una noción de la epistemología del comportamiento tendencial de las soluciones que proponen Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016), la cual se usará en el diseño de una situación de aprendizaje para la resignificación de las ecuaciones diferenciales con estudiantes de ingeniería comercial.

Se destaca que en este proyecto de tesis se da una mirada diferente al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, puesto que se reconoce el uso del comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial en un problema específico de oferta y demanda, lo que permitirá resignificar las ecuaciones diferenciales en la comunidad de ingenieros comerciales a través de análisis cualitativos de la gráfica. En el siguiente apartado se plantea lo situacional del diseño que se relaciona con la ley de oferta y demanda planteado por León Walras en el año 1874.

2.3. El sistema económico de León Walras

El economista León Walras desarrollo la primera formulación sistemática de la teoría matemática del equilibrio económico general en sus Eléments d'économie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale (1874). En ella incorporó gran parte de la teoría clásica.

Algunos elementos esenciales del aparato conceptual utilizado por Walras tienen relación con los conceptos de función de oferta y demanda y la noción de utilidad marginal decreciente. Estos ya habían sido formulados matemáticamente por autores como Bernoulli, Cournot y Dupuit.

En términos generales hay dos áreas principales en las que se reconoce que Walras alcanzó su objetivo de contribuir al desarrollo del análisis económico científico: la teoría de la demanda según la utilidad marginal y el análisis del equilibrio general.

Tal como señala Cámara (2000), Walras fue un economista matemático e ideológicamente distante del **laissez faire**[2]. Se diferenció de la gran mayoría de los economistas de su época en tres aspectos:

- Creía en la economía como una disciplina teórica positivista.
- Pensaba que la utilización de las matemáticas en el estudio de la investigación económica era algo esencial.
- Combatió firmemente la política del laissez faire.

Walras deriva la curva de demanda de un bien de la curva de oferta del otro. Analiza después el equilibrio del consumidor, es decir, las condiciones para la maximización de su satisfacción. Lo anterior se resume en la siguiente Figura.

[2] Laissez faire, es una expresión francesa que significa “dejen hacer, dejen pasar”; una práctica caracterizada por una abstención de dirección o interferencia especialmente con la libertad individual de elección y acción.

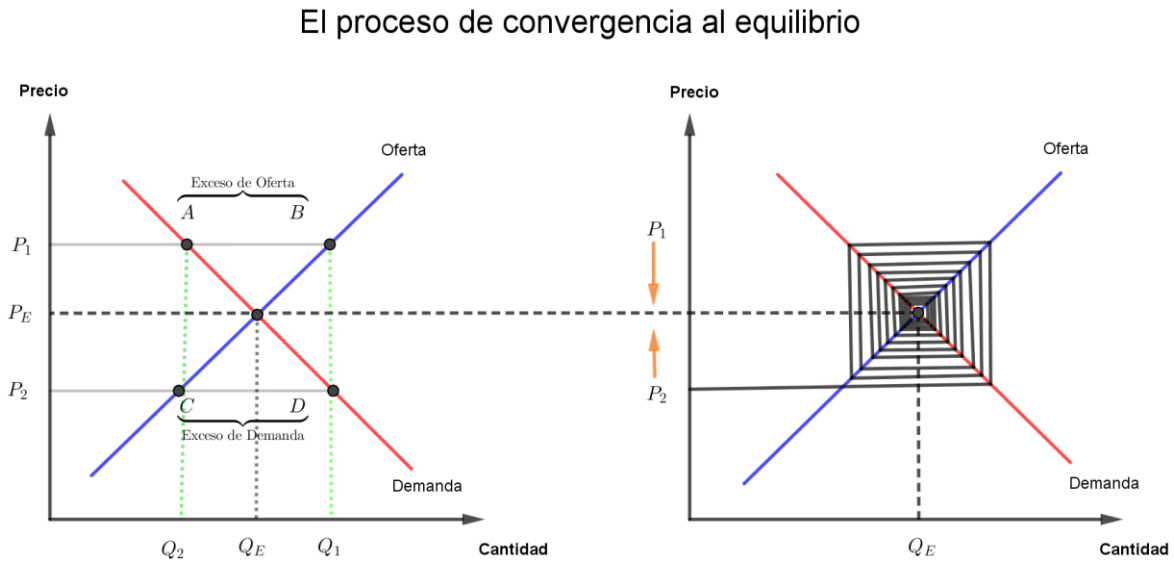


Figura 4: Proceso de convergencia al equilibrio.

El proceso de ajuste se realiza vía precios hasta que se eliminan los excesos de oferta y demanda y el mercado se vacía. Se produce en forma natural una convergencia hacia un punto de equilibrio que es socialmente aceptable. El concepto de la ley de oferta y demanda se explicará de forma más detallada en el siguiente apartado.

2.4. Noción de la Oferta y Demanda

La ley de oferta y demanda es un modelo económico básico postulado para la formación de precios de mercado de los bienes dentro de la escuela neoclásica, usada para explicar una gran variedad de fenómenos y procesos tanto macroeconómicos como microeconómicos.

La curva de demanda registra las preferencias de los consumidores y sus posibilidades de comprar, mientras que la de oferta refleja las posibilidades y costos de producción de las empresas. La superposición de ambas implica comparar posibilidades y costos de producción con preferencias y posibilidades de los consumidores.

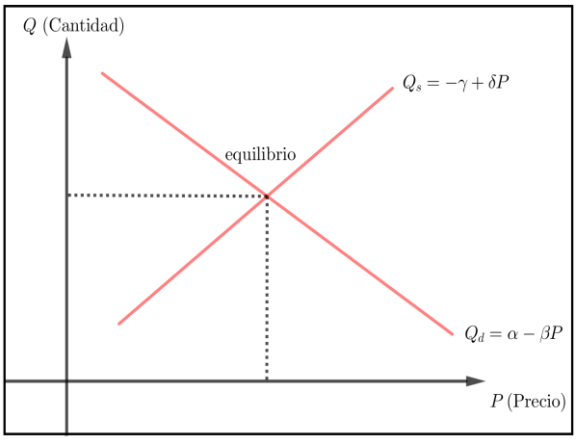


Figura 5: Curvas de oferta y demanda.

"*La curva denotada por Q_d es la curva de demanda, mientras que la denotada por Q_s es la curva de oferta, ambas definidas para un producto determinado demandado por un grupo de consumidores y ofrecido por un grupo de empresas. El punto de intersección (P_0, Q_0) entre ambas curvas corresponde al punto de equilibrio, que es el punto en el que las preferencias y posibilidades de los consumidores coinciden con las posibilidades y costos de las empresas. A ese precio los consumidores están dispuestos a comprar todo lo que los productores están ofreciendo. A su vez, estos pueden satisfacer plenamente la demanda de los consumidores*" (Massad, 2013, pp 44).

Entiéndase por equilibrio como "el conjunto de variables escogidas e interrelacionadas, ajustadas de tal modo entre sí que no prevalezca ninguna tendencia inherente al cambio en el modelo que constituyen" [3], donde la palabra "escogidas" se refiere al hecho de que existen variables que, por decisión del analista, no han sido incluidas en el modelo y la palabra "interrelacionadas" sugiere que, para alcanzar el equilibrio, todas las variables del modelo deben hallarse simultáneamente en estado de reposo.

Cabe destacar que este modelo de oferta y demanda es un elemento esencial en el quehacer cotidiano de un ingeniero comercial. De ahí que en este proyecto de tesis se use este para suministrar lo situacional del diseño de situación para que estudiantes de ingeniería comercial resignifiquen las ecuaciones diferenciales. En el próximo capítulo se presentan los aspectos teóricos y metodológicos del proyecto.

[3] Fritz Machlup, "Equilibrium and Disequilibrium: Misplaced Concreteness and Disguised Politics", *Economic Journal*, marzo 1958, pág. 9. (Reimpreso en F. Machlup, *Essays on Economic Semantics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.

CAPÍTULO III: Marco teórico y metodológico

CAPÍTULO III:

CAPÍTULO III: Marco teórico y Metodológico

En el capítulo I, la problemática, se planteó la problemática y los objetivos del proyecto de tesis. Posteriormente, en el capítulo II titulado antecedentes, se expone un estado del arte sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, así como de lo situacional que será usado en el rediseño propuesto, esto es, la ley de oferta y demanda de Walras (1874).

Este tercer capítulo, el marco teórico, denota la ontología usada en el proyecto de tesis tanto en la configuración del rediseño como en los análisis y planteamiento epistemológico del tema. De ahí que en este apartado se retrate de manera general los fundamentos de la teoría socioepistemológica puesto que estos son los argumentos teóricos desplegados en la discusión. Se caracteriza el concepto de dME como la problemática fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, se caracteriza la metodología usada en el rediseño de situación. Esta metodología, la ingeniería didáctica, suministra las fases de análisis usadas en la configuración del rediseño.

3.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La Matemática Educativa, también llamada Didáctica de la Matemática, como disciplina científica estudia procesos asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el seno de la disciplina cohabita una variedad de marcos teóricos cuyo aspecto inherente entre ellos se relaciona con una postura epistemológica ante la construcción del conocimiento matemático ya sea de manera cognitiva, social, en el aula, entre otros.

Por nombrar algunos marcos teóricos: Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995): Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986); Teoría APOE (Dubinsky, 1991); Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 1990; Farfán, 1993; Cordero, 1994); Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011); entre otros.

Algunos marcos teóricos retratan las construcciones y mecanismos mentales usados por los individuos en la construcción de objetos matemáticos. Por ejemplo, Oktaç y Roa (2010) dan a conocer el procedimiento que siguieron para el diseño de una descomposición genética que construya el concepto de transformación lineal delineando dos posibles caminos. En el primero se supone que un individuo construye el concepto general de transformación como objeto (entendiendo por transformación las funciones definidas entre espacios vectoriales sobre un campo), ya que las propiedades de preservación de suma vectorial y producto por un escalar

son transformaciones sobre T donde es posible determinar si dicho objeto cumple o no las propiedades. El segundo camino, el objeto espacio vectorial es asimilado por el esquema de función. De esta forma un individuo puede generalizar su esquema de función aceptando que las funciones pueden definirse entre espacios vectoriales. Como característica común entre los dos caminos, señalan Oktaç y Roa (2009), es concebir la construcción de las dos propiedades de linealidad de manera independiente (Figura 6).

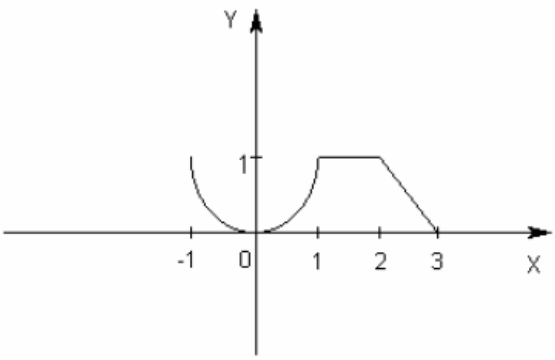
Propiedad 1. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T: U \to V$ una función tal que para todo $u_1, u_2, \in U$ se tiene que $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.

Propiedad 2. Sean U y V espacios vectoriales sobre K y $T: U \to V$ una función tal que para todo $u \in U$ y para todo $c \in K$ se tiene que $T(cu) = cT(u)$.

Figura 6: Definición de Transformación lineal usada por Roa y Oktac (2010), pp. 102.

Otros marcos teóricos estudian las conversiones de registros de representaciones semióticas usados en la construcción de conceptos matemáticos. Por ejemplo, Guzmán (1998) estudia la incidencia de los registros de representación semiótica en el aprendizaje de nociones relativas a las funciones. Para ello considera los registros gráfico, algebraico y lenguaje natural con estudiantes de primer año de ingeniería respecto a funciones reales y el sentido que estas nociones cobran para ellos. Para ello aplica un cuestionario que fue aplicado a estudiantes de un curso de cálculo diferencial. A continuación se presenta una pregunta del cuestionario (Figura 7) y un análisis general del que reporta Guzmán (1998).

Dada la función *f* cuya representación gráfica está dada por



¿es *f* continua en el punto de abscisa $x=3/2$?

Figura 7: Ejemplos de preguntas usadas en Guzmán (1998), pp. 13.

Según Guzmán (1998), esta pregunta está planteada en el registro gráfico con la cual pretende que a partir del gráfico los estudiantes respondan si la función es continua, o no, en el punto dado. Es decir, se busca que se reconozca que la función es continua en el punto y que puedan

argumentar este hecho. La pregunta obliga a los estudiantes a exhibir en su argumento la comprensión que tiene acerca del concepto de continuidad en un punto, así como a la real comprensión que estos tienen sobre la definición estudiada en clases.

En general, como conclusión del análisis de las respuestas del cuestionario, Guzmán (1998) reporta que las respuestas de los estudiantes están dadas en un solo tipo de registros, dejando de lado las conversiones a otros registros. En general, las respuestas quedan en el registro en cual les fue planteada la pregunta, privilegiando el registro algebraico el cual es dominante en las clases.

En particular la teoría socioepistemológica, marco teórico usado en el proyecto de tesis, en palabras de Cantoral y Farfán (2003):

> *"…estudia fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza"* (Cantoral & Farfán, 2003, pp. 36).

En este sentido, desde la socioepistemología se ha señalado que el discurso Matemático Escolar (dME) es el elemento que define la problemática fundamental de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tal razón se plantea el rediseño del dME a partir de la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM).

La matemática escolar se ha fundamentado bajo un sistema de razón que norma las prácticas y las representaciones sociales de los diferentes actores del sistema didáctico. Este sistema de razón se caracteriza por ser hegemónico, utilitario, sin marcos de referencia que permitan resignificar la matemática, la centración en los objetos matemáticos y su presentación lineal y acabada. A este sistema de razón se le ha denominado discurso Matemático Escolar (Soto y Cantoral, 2015).

Cada una de estas características presenta un aspecto esencial de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El carácter hegemónico del dME se expresa en la supremacía de algunas argumentaciones del conocimiento por sobre otras. El estudio de esta característica nos ha mostrado la importancia de reconocer una pluralidad epistemológica y que ésta sea integrada al dME al momento de ser rediseñado (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

El carácter utilitario se materializa en la aplicabilidad de los conceptos que son enseñados y que deben ser aprendidos. En contraparte se propone dar un vuelco a esta concepción utilitaria del conocimiento para poner el foco en el carácter funcional del conocimiento. Esto quiere decir, que

se concibe al conocimiento como aquel que permite al humano transformase y transformar su realidad (Cordero, 2008).

La centración en los objetos matemático (conceptos y procedimientos matemáticos) se ha expresado en una educación matemática que pone en el centro la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teoremas, demostraciones, entre otras, donde el uso del conocimiento ha sido soslayado. Esto ha hecho entender la importancia de cambiar el foco hacia las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral, 2003).

La falta de marcos de referencia no han permitido que los actores del sistema didáctico resignifique el conocimiento matemático. Debemos recordar que la matemática responde a diferentes disciplinas y ámbitos del conocimiento, es en el estudio de las diferentes situaciones y escenarios que encontraremos esos marcos de referencia que permitirán el rediseño del dME. Un elemento importante que se ha estudiado en el programa de investigación socioepistemológico es la transversalidad del conocimiento para compensar esta carencia del dME.

Por último, el conocimiento acabado y lineal se expresa en una concepción del conocimiento preexistente al humano (Soto y Cantoral, 2015).

Estas características en su conjunto hacen que el dME nos excluya de la construcción social del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica. Esta violencia se expresa en la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos matemáticos ante la construcción del conocimiento matemático. En efecto, el discurso Matemático Escolar no permite cuestionar ni trastocar a la matemática escolar provocando una adherencia a la hegemonía de sus argumentos. Es decir, se produce una especie de fidelidad absoluta la cual resulta nociva para reconocer la problematización del conocimiento matemático.

Resignificar este discurso Matemático Escolar bajo la construcción social del conocimiento matemático debe significar que la matemática escolar se fundamente en la pluralidad del conocimiento matemático y, por ende, forme parte de los marcos de referencia para su enseñanza y aprendizaje.

Desde la socioepistemología se parte de la premisa de que las *prácticas sociales* son las generadoras del conocimiento matemático (Cordero, 2008). El humano ha sido soslayado en la difusión de dicho saber. Aquí toma sentido hablar de dos epistemologías que no dialogan en la enseñanza de las matemáticas, una que tiene que ver con el cotidiano de la gente y la otra con la epistemología del dME.

Para contrapesar la hegemonía del dME se usará la categoría del *comportamiento tendencial de las funciones*. Esto quiere decir que los elementos didácticos que se pondrán en uso en el rediseño de situación consisten en relacionar los contextos algebraico y gráfico. Esta perspectiva

se basa en argumentos cualitativos que emergen en la interacción permanente entre ecuaciones y gráficas (Cordero et al, 2005). El detalle de esta epistemología del comportamiento tendencial de las funciones se desarrolla en el apartado 5.5.1 lo epistemológico del diseño.

El comportamiento tendencial de las funciones es la epistemología usada para suministrar nuevos significados a las ecuaciones diferenciales de primer orden, en donde lo situacional se relaciona con la ingeniería comercial, comunidad usuaria del conocimiento matemático.

3.2. **Metodología**

Se enmarca el proyecto de tesis en un paradigma de investigación de corte cualitativo. En este sentido, se toma como metodología de investigación para la validación del rediseño de la situación de las ecuaciones diferenciales a la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), la cual se caracteriza por un esquema experimental basado en realizaciones didácticas. Esto quiere decir que se considera la concepción, realización, observación y análisis que se desarrollan a partir de la hipótesis epistemológica de trabajo.

Esta metodología se caracteriza también, comparando con otros tipos de investigaciones que se basan en experimentaciones, por la forma de validación que tiene asociada. En este sentido, generalmente las investigaciones de experimentaciones se sitúan en un enfoque comparativo de validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Por el contrario, la ingeniería didáctica se sitúa en estudios de caso cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

La metodología de la ingeniería didáctica se compone de fases que denotan una distinción temporal del proceso investigativo, esto es: análisis preliminar; análisis a priori; experimentación; análisis a posteriori y validación.

- El análisis preliminar: Además de un cuadro teórico general, éste se basa en una serie de análisis preliminares teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. En el caso de este proyecto se plantea un análisis epistemológico de los contenidos a desarrollar, esto es el comportamiento tendencial de las funciones; así como lo situacional que tiene relación con el modelo de oferta y demanda.
- El análisis a priori: Se debe concebir como un análisis de control de significado. En este sentido, el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los participantes y sus significados. El análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva, centrada en las características inherentes de una situación que se ha diseñado y que se va a implementar.

- La experimentación: Consiste en una revisión exhaustiva de los sucesos que acontecen durante la experimentación con cierta población de estudio. En el caso de este proyecto, la población de estudio tiene relación con estudiantes de ingeniería comercial manteniendo un registro exhaustivo de lo acontecido durante la experimentación.
- Análisis a posteriori y validación: El análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos en el desarrollo de la experimentación. Estos datos se enriquecen con otros datos obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas, aplicadas en distintos momentos de la investigación. Ahora bien, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación del diseño en cuestión.

•

CAPÍTULO IV: Diseño de situación

CAPÍTULO IV: Diseño de situación

Este capítulo versa sobre la configuración del diseño de situación en el que se pondrá uso la epistemología del comportamiento tendencial de las funciones (cordero et al, 2016) cuyo aspecto situacional se relaciona con la ley de oferta y demanda (Walras, 1874). De ahí que en este cuarto capítulo, por una parte, se desarrolla el análisis preliminar del diseño en el que se denotan los aspectos epistemológicos y situacional de la situación de aprendizaje.

Asimismo, se presenta el análisis a priori de la situación de aprendizaje denotando el objetivo general de esta, así como los objetivos específicos de cada momento de la situación. En este sentido, se analizan por actividad las posibles y esperadas respuestas que puedan dar los estudiantes al experimentar la situación.

Posteriormente se presenta el análisis a posteriori de cada una de las respuestas dadas por los estudiantes que experimentaron el diseño de situación. Estás son confrontadas con lo esperado en el análisis a priori. Esta confrontación permite recomendar ajustes para el diseño, así como generar reflexiones para futuros proyectos.

La experimentación del diseño se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Universidad Técnica Federico Santa María. Son estudiantes de segundo año que ya han cursado la asignatura Mat023 de su carrera, específicamente en el contenido de ecuaciones diferenciales, lo que en cierta forma garantiza que dichos estudiantes cuenten con las conductas de entrada necesarias para la experimentación de las actividades propuestas.

En la experimentación del diseño de situación se usó el paquete computacional de carácter libre GEOGEBRA, cuya ventaja radica en que el estudiante puede visualizar la gráfica de las soluciones de la ecuación diferencial y con ello conjeturar los patrones de comportamiento de dichas soluciones.

4.1. Análisis preliminar

En general, con la noción de dME se plantea que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrolla dentro del plano algorítmico – algebraico. Es por esto que con este proyecto se pretende fortalecer el uso de la información gráfica que entrega la solución de la ecuación diferencial y así desarrollar en los estudiantes de ingeniería comercial un análisis cualitativo de las soluciones. En la siguiente sección se presenta de manera general los aspectos epistemológicos usados en el diseño.

4.1.1. Lo epistemológico del diseño

El diseño de la situación de aprendizaje respecto a lo epistemológico se basó en el trabajo de Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016), los cuales plantean un tratamiento didáctico que ayuda tanto al docente como al estudiante a ampliar el dominio de conocimiento de las ecuaciones diferenciales al analizar las interacciones entre los contextos algebraico y gráfico, y a modificar en alguna medida los acercamientos tradicionales que se hacen del tema.

De ahí que en las actividades de la situación subyacen cuatro dimensiones, esto es: lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo social. En este sentido, Cordero et al (2016) precisan respecto a estas categorías:

Sobre lo epistemológico se señala que durante el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales los contextos han transitado entre lo algebraico, lo numérico y lo geométrico. No obstante, el dME no considera dicho desarrollo, centrando la enseñanza de las ecuaciones diferenciales sólo en lo algebraico.

Respecto a lo cognitivo se señala que la dificultad con la cual se encuentra el estudiante es justamente el poder transitar de un contexto al otro. Esta dificultad se ha generado ya que durante años ha primado una epistemología dominante del conocimiento que impone argumentos, significados y procedimientos, olvidando los contextos y las situaciones específicas que son usados al momento de construir algún conocimiento matemático específico.

Por otra parte, en lo didáctico se señala la posibilidad de enseñar a los estudiantes a considerar soluciones cualitativas. Esto con el afán de encontrar un equilibrio de enseñanza más satisfactorio desde un punto de vista epistemológico y cognitivo.

Finamente, en cuanto a lo social se señala la necesidad de incorporar argumentaciones más acordes a la necesidad del estudiante, en el sentido de desarrollar una matemática funcional.

En este sentido, el rediseño de situación consiste en una serie de actividades que los estudiantes deberán realizar en grupos pequeños, el cual tiene como objetivo general permitir el contacto con los estudiantes de Ingeniería Comercial de segundo año, donde se ponga en discusión la importancia del comportamiento tendencial de las soluciones, y que esta lleva a métodos cualitativos y establece relaciones entre las funciones que componen la ecuación diferencial lineal de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$, $ay'(t) + y(t) = F(t)$. Dicho comportamiento implica la variación del parámetro a en lugar de resolver la ecuación diferencial para hallar las soluciones, y además considerar dichas soluciones ahora como un modelo que determina comportamientos y tendencias.

En resumen, se establecen relaciones entre la solución de la ecuación $y(t)$ y el comportamiento tendencial hacia la función $F(t)$, lo que permite caracterizar la solución de la ecuación diferencial sin necesidad de resolverla.

Por ejemplo, si consideramos la ecuación diferencial lineal $y'(t) + ay(t) = b,\ a > 0$, cuya solución es de la forma $y(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$. Considerando valores muy grandes de t para la solución $y(t)$, se tiene: $t \to \infty \ \Rightarrow\ y \to G(t) = \frac{b}{a}$. Luego tenemos que la gráfica de $y(t)$ tiende a la recta $G(t) = \frac{b}{a}$ para valores muy grandes de t. Entonces podemos decir que la solución de la ecuación diferencial presenta un patrón de comportamiento en su gráfica, en el sentido de que corresponde a una recta con pendiente cero, al igual que la función $F(t)$, pero, que corta al eje y en $\frac{F(t)}{a}$. Gráficamente se tiene:

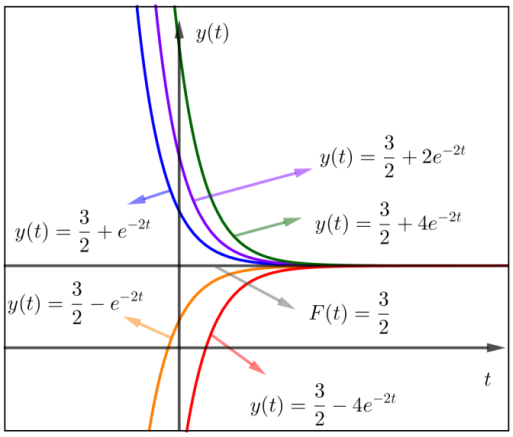


Figura 8. Gráfica de la solución de la ecuación $y' + 2y = 3$.

4.1.2. Lo situacional del modelo dinámico de oferta y demanda

Por otra parte, para el diseño de la situación de aprendizaje respecto a lo situacional se va a considerar el modelo dinámico del economista León Walras[4], para explicar el ajuste a través de las funciones de oferta y demanda lineal.

Para ello consideremos, las funciones de demanda y oferta para un bien particular:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta P \quad (\alpha, \beta > 0) \\ Q_s &= -\gamma + \delta P \quad (\gamma, \delta > 0) \end{aligned} \qquad (4)$$

[4] Walras fue economista que vivió entre 1831 y 1910. Parte fundamental de su trabajo lo dedicó a la determinación de los precios en una situación de libre y perfecta competencia.

La primera (segunda) ecuación indica que en cada instante la cantidad demandada $Q_d = Q_d(t)$ (ofertada $Q_s = Q_s(t)$) decrece (crece) linealmente con el precio $P = P(t)$.

Si se igualan las ecuaciones y luego se despeja P, se obtiene:

$$\alpha - \beta P = -\gamma + \delta P \quad \leftrightarrow \quad \alpha + \gamma = (\beta + \delta)P \quad \leftrightarrow \quad P = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Luego el precio de equilibrio estará dado por:

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \quad \text{(=alguna constante positiva)} \qquad (5)$$

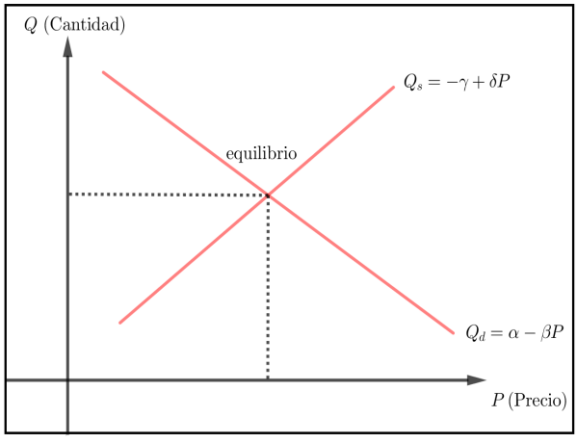


Figura 9. Funciones lineales de oferta y demanda.

Si ocurre que el precio inicial $P(0)$ está precisamente en el nivel $\bar{P}$, el mercado estará ya en equilibrio y no hará falta un análisis dinámico.

El caso interesante es cuando $P(0) \neq \bar{P}$, sólo será posible obtener $\bar{P}$ después de un proceso de ajuste, durante el cual no sólo cambiará el precio a través del tiempo, sino que las funciones de demanda y oferta, por ser funciones de P, también deberán cambiar con el tiempo.

4.1.2.1. La trayectoria temporal

Luego a lo anterior; dado un intervalo de tiempo suficiente para que actúe por sí mismo el proceso de ajuste, el **proceso dinámico** postula que la variación instantánea del precio (con respecto al tiempo) es, en todo momento, directamente proporcional al exceso de demanda $(Q_d - Q_s)$ que prevalece en ese momento. La ecuación diferencial que modela este fenómeno es:

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_d - Q_s) \quad (k > 0), \tag{6}$$

donde k representa un *coeficiente de ajuste* (constante).

En virtud de las ecuaciones de demanda y oferta (1), nuestra ecuación diferencial quedará:

$$\frac{dP}{dt} + k(\beta + \delta)P = k(\alpha + \gamma), \tag{7}$$

lo que es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogéneo.

Imponiendo la condición de que $P(0) = P_0$, se obtiene que $C = P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, luego la trayectoria temporal del precio es:

$$P(t) = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} + \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right) e^{-k(\beta+\delta)t}, \tag{8}$$

como $\bar{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (precio de equilibrio), entonces:

$$P(t) = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})e^{-k(\beta+\delta)t}. \tag{9}$$

4.1.2.2. La estabilidad dinámica de equilibrio

Como P_0 y $\bar{P}$ son ambas constantes, entonces el factor clave en el **comportamiento tendencial de la solución** de la ecuación, es la expresión exponencial $e^{-k(\beta+\delta)t}$. Como $\beta + \delta > 0$ y k>0, podemos decir que la expresión tiende a cero cuando $t \to \infty$.

En consecuencia, dadas las hipótesis del modelo, podemos decir que la trayectoria temporal conducirá a la situación de precio de equilibrio. En una situación como esta, donde la trayectoria temporal de la variable dependiente $P(t)$ converge hacia el nivel $\bar{P}$, decimos que el equilibrio es ***dinámicamente estable***.

Según cuales sean las magnitudes relativas de $P(0)$ y $\bar{P}$, la solución de (6) abarcará tres casos posibles:

1. Si $P_0 = \bar{P}$ entonces $P(t) = \bar{P}$. En este caso la trayectoria temporal del precio puede representarse gráficamente por una línea recta horizontal. El equilibrio se alcanza de manera inmediata. Esto indica que los precios permanecerán constantes e iguales al valor que hay en la actualidad.
2. Si $P_0 > \bar{P} \quad \rightarrow \quad (P_0 - \bar{P}) > 0$, pero, este término disminuirá a medida que un aumento en t disminuya el valor de $e^{-k(\beta+\delta)t}$. De esta forma la trayectoria temporal se aproximará al nivel de equilibrio $\bar{P}$ desde arriba.
3. Si $P_0 < \bar{P} \quad \rightarrow \quad (P_0 - \bar{P}) < 0$, el análisis es análogo al caso anterior, pero, el equilibrio se alcanza desde abajo.

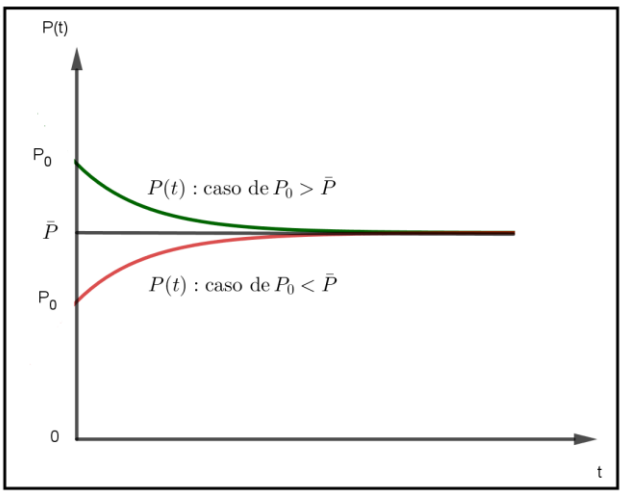


Figura 10. Comportamiento tendencial de la solución

Los estudiantes se ayudarán de esta epistemología para poder predecir con argumentos gráficos, si un modelo de oferta y demanda específico presenta estabilidad o no.

Una de las características de lo anterior es que el tipo de actividades que se generaron para la comprensión de la estabilidad, implican la modelación y un énfasis en la gráfica como modelo tendencial.

4.1.3. En Síntesis

La figura 11 sintetiza cómo el diseño de la situación didáctica, articula lo epistemológico de Cordero et al. (2016) con lo situacional del modelo de oferta y demanda de Walras (1946).

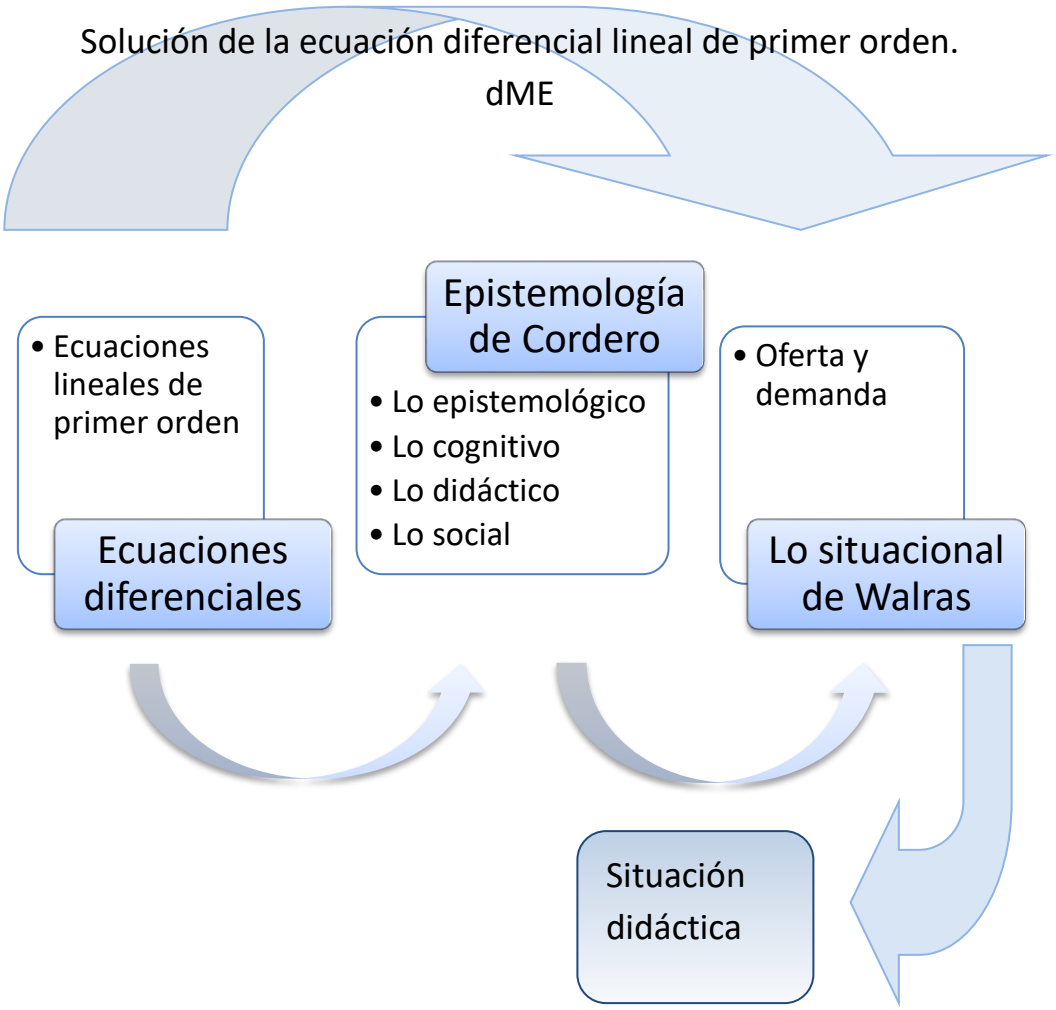


Figura 11: Síntesis, lo epistemológico de Cordero con lo situacional de Walras.

4.2. **Análisis A priori: diseño de la actividad didáctica**

El diseño consta de tres momentos, y encada uno de ellos está presente el comportamiento tendencial de la solución de la ecuación diferencial. Cabe destacar que la estructura de estos momentos es planteada por Cordero et al (2016), pero que en este proyecto son usados para articular estos con la ley de oferta y demanda de Walras (1874).

En el primer momento se promueve el análisis a través de la gráfica de los distintos comportamientos que tiene la solución de acuerdo a variaciones de los parámetros de la ecuación diferencial. El segundo momento resignifica el comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial al modelo de oferta y demanda. Mientras que el tercer momento hace una integración de los dos momentos anteriores en el cual se tendrán que relacionar la ecuación diferencial con su solución y su gráfica, además de analizar la estabilidad o inestabilidad del modelo económico.

La figura 12 se presenta un esquema que sintetiza el propósito global, como los propósitos locales, del rediseño de situación que se desarrolló con el proyecto de tesis.

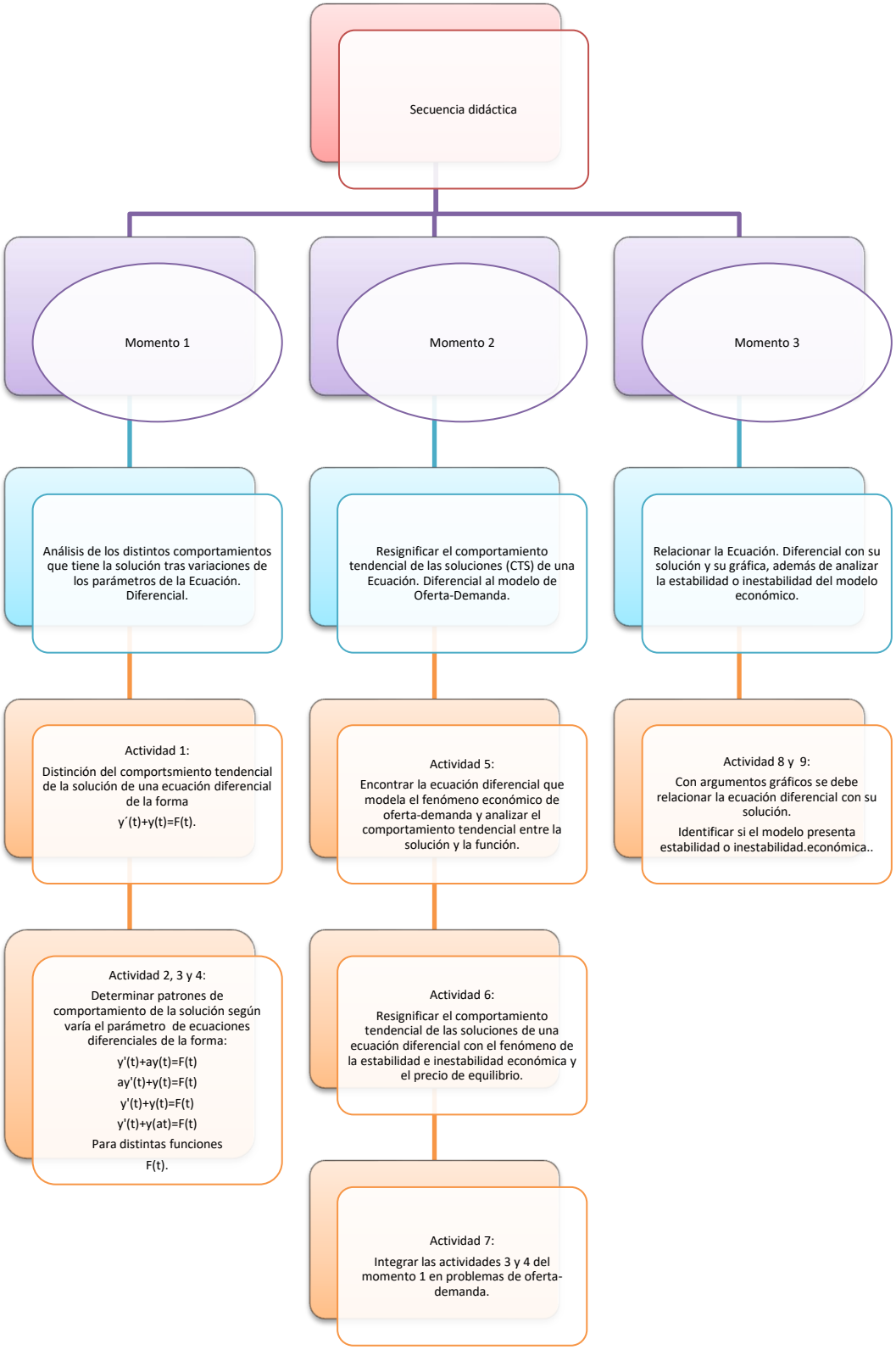


Figura 12: Estructura general del diseño de situación didáctica.

4.2.1. Momento 1

Este momento se caracteriza por que el estudiante podrá manipular diferentes formas de la ecuación diferencial lineal de primer orden y observar a través de la gráfica los distintos comportamientos que tiene la solución de acuerdo a variaciones de los parámetros de la ecuación diferencial.

Este momento consta de cuatro actividades, el paso de una a otra intenta resignificar la gráfica de la solución de una ecuación diferencial y establecer que la gráfica es un comportamiento que se debe mirar de forma completa.

Actividad 1

Considere el siguiente grupo de ecuaciones diferenciales:

$$y'(t) + y(t) = F(t), \text{ donde}$$

$$F(t) = b \quad b \text{ constante.}$$
$$F(t) = t$$
$$F(t) = e^{bt} \quad b \neq 1, b \in IR$$

Halle la solución para cada una de las ecuaciones diferenciales.

Discuta el comportamiento tendencial entre la solución $y(t)$ y la función $F(t)$.

Grafique usando cada una de las soluciones y compárela con la gráfica de la función $F(t)$ correspondiente. Para realizar las gráficas de las soluciones puede hacer uso de Geogebra.

Figura 13. Actividad 1, Momento 1

En la primera actividad se toma una lista de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $y'(t) + y(t) = F(t)$, donde se varía $F(t)$.

Se requiere que el estudiante logre identificar la ecuación, como una ecuación diferencial lineal de primer orden, y que esta se puede resolver encontrando un factor de integración la cual expresa la solución como:

$$y(t) = e^{\int P(t)dt}\left\{\int e^{\int P(t)dt}F(t)dt + C\right\}$$

Posteriormente el estudiante tendrá que estudiar el comportamiento de la solución cuando la variable independiente $t \to \infty$, dándose cuenta que la tendencia es parecida a la gráfica de la función $F(t)$. Con esto se tendrá un primer acercamiento al comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden.

A continuación presentamos algunas soluciones de la Actividad 1:

a) Ecuación diferencial:

$$y'(t) + y(t) = b$$

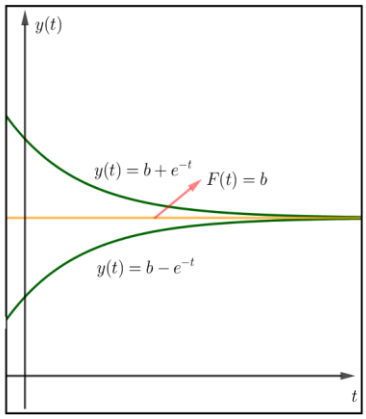
Ecuación diferencial	**Comportamiento tendencial de la solución**	**Gráfica de la solución**
$y'(t) + y(t) = b$ Tomamos un factor integrante de la forma $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$ Ocupando la fórmula de Abel, se obtiene la solución de la forma: $y(t) = e^{-t}(be^t + C)$ $y(t) = b + Ce^{-t}$	Si consideramos $t \to \infty$, se tiene que $y(t) = b + Ce^{-t} \to b$	

Figura 14. Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = b$

b) Ecuación diferencial:

$$y'(t) + y(t) = t$$

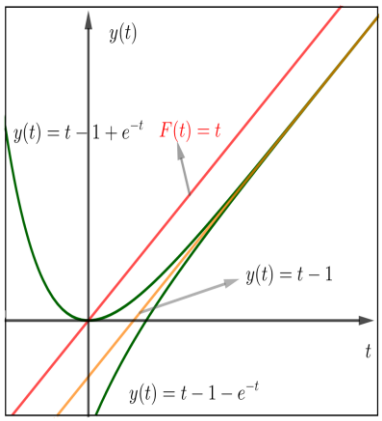
Ecuación diferencial	Comportamiento tendencial de la solución	Gráfica de la solución
$y'(t) + y(t) = t$ Tomamos un factor integrante de la forma $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$ Ocupando la fórmula de Abel, se obtiene la solución de la forma: $y(t) = e^{-t}(te^t - e^t + C)$ $y(t) = t - 1 + Ce^{-t}$	Si consideramos $t \to \infty$, se tiene que $y(t) = t - 1 + Ce^{-t}$ $\to t - 1$ Es decir, su comportamiento es como una recta con pendiente igual a 1.	

Figura 15. Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = t$

Otra forma de enfrentar el ejercicio es usando los conocimientos previos referentes a la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva, y con esto graficar los campos de direcciones (con Geogebra) que tendrán la misma tendencia que la función $F(t)$.

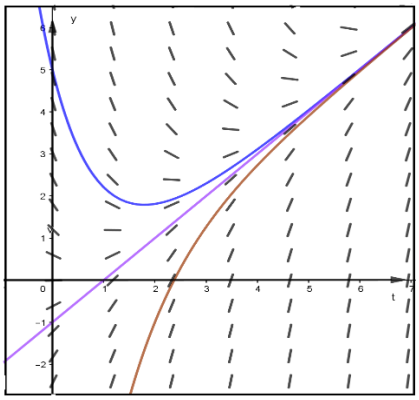


Figura 16. Campo de direcciones de la ecuación $y'(t) + y(t) = t$

c) Ecuación diferencial:

$$y'(t) + y(t) = e^{bt}$$

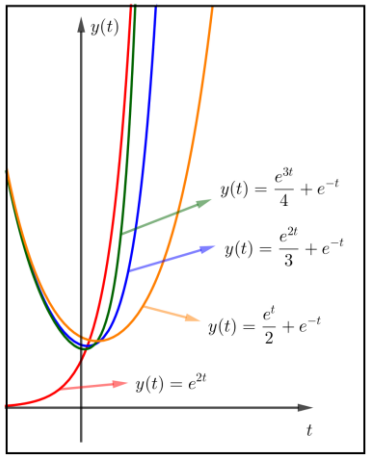
Ecuación diferencial	Comportamiento tendencial de la solución	Gráfica de la solución
$y'(t) + y(t) = e^{bt}$ Tomamos un factor integrante de la forma $\mu(t) = e^{\int dt} = e^{t}$ Ocupando la fórmula de Abel, se obtiene la solución de la forma: $y(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{(b+1)t}}{b+1} + C\right)$ $y(t) = \frac{e^{bt}}{b+1} + Ce^{-t}$ $b \in IR^{*}$ y $b \neq -1$	Si consideramos $t \to \infty$, se tiene que $y(t) = \frac{e^{bt}}{b+1} + Ce^{-t}$ Tiende a $\frac{e^{bt}}{b+1}$. Es decir, $y(t) \to \frac{e^{bt}}{b+1}$	 Para $b > 0$.

Figura 17: Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = e^{bt}$, $b > 0$

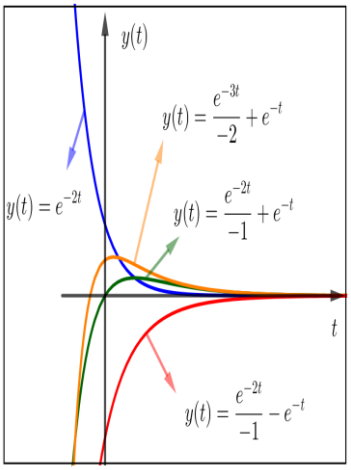
Ecuación diferencial	Comportamiento tendencial de la solución	Gráfica de la solución
$y'(t) + y(t) = e^{bt}$ Tomamos un factor integrante de la forma $\mu(t) = e^{\int dt} = e^{t}$ Ocupando la fórmula de Leibnitz, se obtiene la solución de la forma: $y(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{(b+1)t}}{b+1} + C\right)$ $y(t) = \frac{e^{bt}}{b+1} + Ce^{-t}$ $b \in IR^{-}$ y $b \neq -1$	Si consideramos $t \to \infty$, se tiene que $y(t) = \frac{e^{bt}}{b+1} + Ce^{-t}$ Tiende a $\frac{e^{bt}}{b+1}$. Es decir, $y(t) \to \frac{e^{bt}}{b+1}$	 Para $b < 0$.

Figura 18. Solución de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = e^{bt}, b < 0$

Actividad 2

Considere la siguiente secuencia de ecuaciones diferenciales para algunos casos particulares de $F(x)$:

a) $y'(t) + ay(t) = b$
$ay'(t) + y(t) = b$

b) $y'(t) + ay(t) = t$
$ay'(t) + y(t) = t$

c) $y'(t) + ay(t) = e^{bt}$
$ay'(t) + y(t) = e^{bt}$

Analice las diferentes situaciones, exclusivamente con argumentos gráficos. Utilice Geogebra.

Figura 19. Actividad 2, Momento 1

En esta actividad el estudiante se enfrenta a un problema distinto al de la actividad anterior, en el sentido de que ahora se toma una lista de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

$$y'(t) + ay(t) = F(t)$$
$$ay'(t) + y(t) = F(t)$$

con $F(t)$ una función continua en un cierto intervalo $I \subseteq IR$.

Es decir, se varía el parámetro a para poder establecer algún tipo de relación entre el comportamiento de la solución de la ecuación y dicho coeficiente, es decir, establecer patrones de comportamiento según varía el parámetro a. Este cambio del coeficiente es fundamental, ya que hace ver de manera natural a la función como "*una instrucción que organiza comportamientos*". Además de que el estudiante debe contrastar este resultado con argumentos gráficos, haciendo uso de Geogebra. Esto nos hace pensar que el comportamiento tendencial de las funciones efectivamente es un argumento.

Si $ay'(t) + y(t) = F(t)$ entoces $y(t)$ se comporta como $F(t)$, sin embargo el parámetro a modifica la razón de cambio del comportamiento.

Algunas soluciones de esta actividad serían:

a) Ecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) = b;\ \ a, b > 0$$

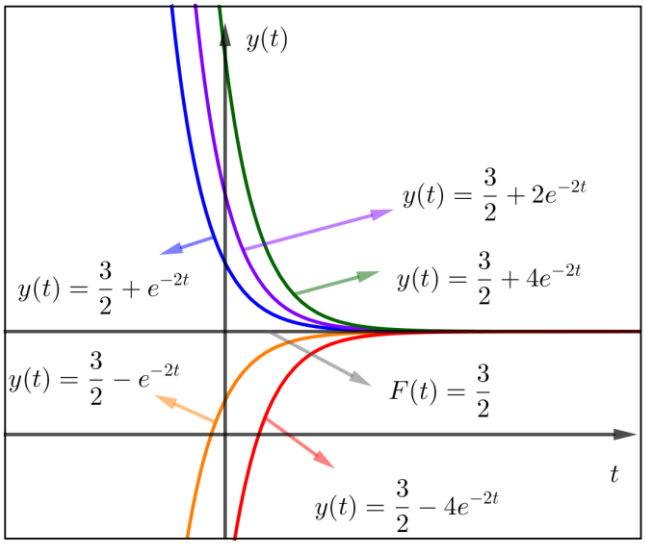
Ecuación diferencial	Gráfica de la solución
$y'(t) + ay(t) = b$ Su factor de integración es de la forma: $\mu(t) = e^{at}$ Luego por la fórmula de Leibnitz su solución es $y(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$	

Figura 20. Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 3$

Otra forma de resolver este ejercicio es analizando la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva, esto permite graficar los campos de direcciones que tendrán la misma tendencia que la función $F(t)$.

$$y'(t) + ay(t) = b \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = b - ay(t)$$

Entonces,

$$y'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - ay(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) < \frac{b}{a};\ \ a, b > 0$$

$$y'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - ay(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) > \frac{b}{a};\ \ a, b > 0$$

Luego su campo de direcciones sería:

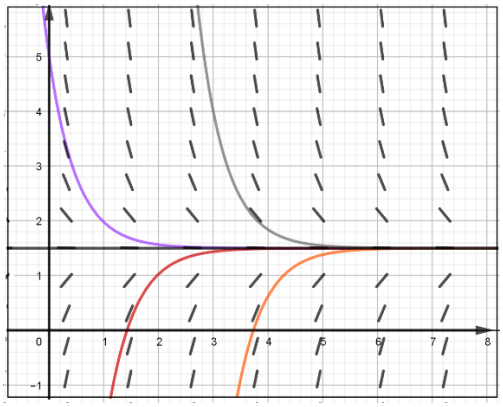


Figura 21: Campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 3$

En el caso en que $y'(t) + ay(t) = b;\ \ a < 0, b > 0$ tenemos:

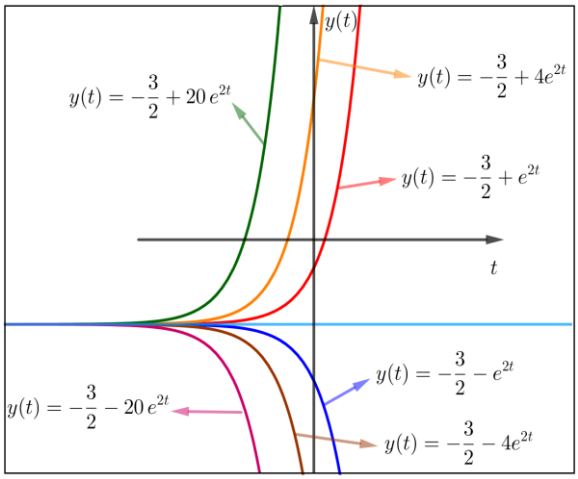
Ecuación diferencial	**Gráfica de la solución**
$y'(t) + ay(t) = b$ Su factor de integración es de la forma: $\mu(t) = e^{at}$ Luego por la fórmula de Leibnitz su solución es $y(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$	

Figura 22: Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' - 2y = 3$

Y si dibujamos los campos de direcciones haciendo uso de la interpretación geométrica de la derivada, se tiene:

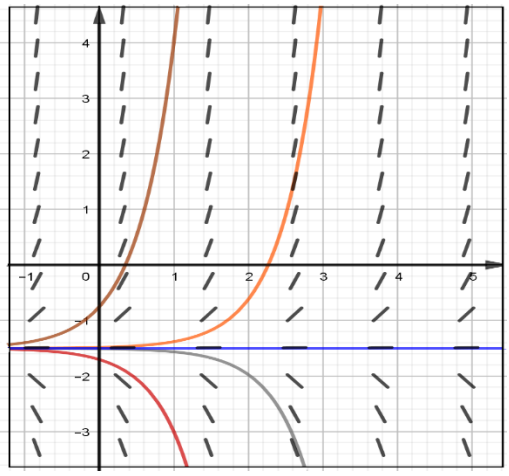


Figura 23: Campo de direcciones de la ecuación diferencial y'-2y=3

b) Ecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) = t$$

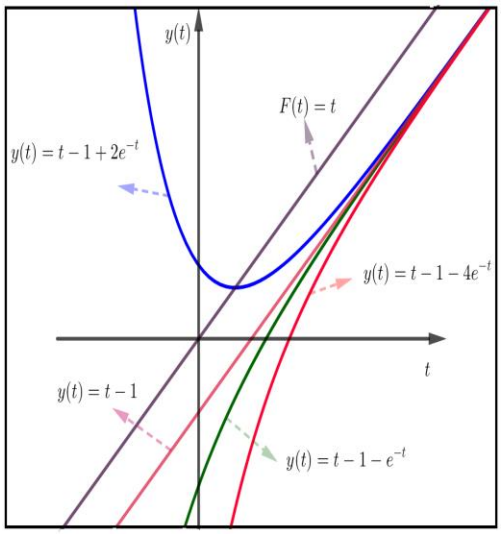
Ecuación diferencial	**Gráfica de la solución**
$y'(t) + ay(t) = t$ Su factor de integración es de la forma: $\mu(t) = e^{at}$ Luego por la fórmula de Leibnitz su solución es $y(t) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + Ce^{-at}$	

Figura 24: Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial $y'(x) + y(2x) = 3$

Ahora si analizamos la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva, se tiene:

$$y'(t) + ay(t) = t \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = t - ay(t)$$

Entonces:

$$y'(t) = t - ay$$

$$y'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - ay > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > ay \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{a} > y\,; \quad a > 0, a \neq 0$$

$$y'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - ay < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < ay \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{a} < y\,; \quad a > 0, a \neq 0$$

Luego su campo de direcciones sería:

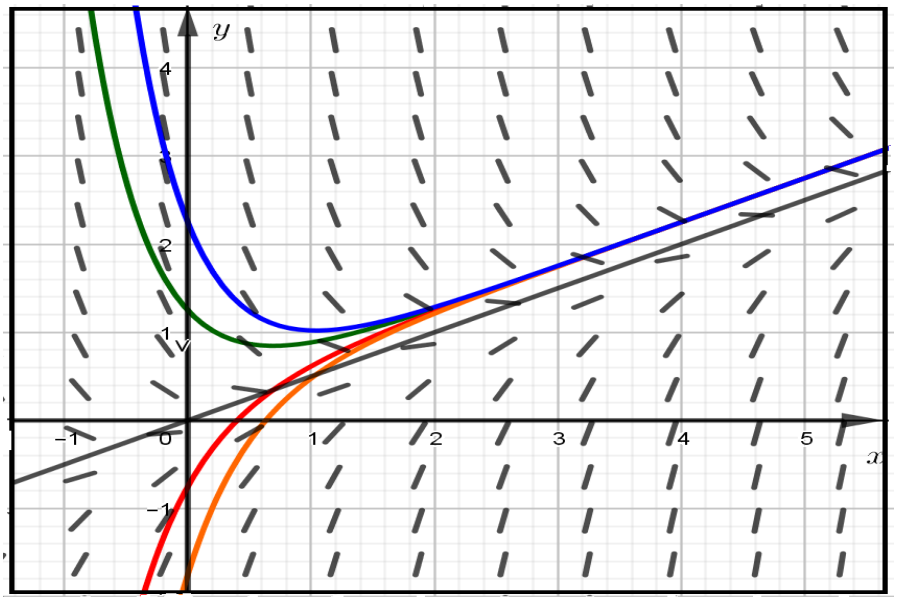


Figura 25: Campo de direcciones de la ecuación diferencial $y'(t) + 2y(t) = t$

Luego el campo de direcciones estará desplazado en $\frac{1}{4}$ unidades hacia la derecha respecto de las soluciones de la ecuación diferencial.

El análisis para $a < 0$ se hace de forma análoga al anterior.

Actividad 3

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $ay'(t) + y(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)}$.

En la siguiente tabla, unir la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo, para cada ecuación diferencial.

Ecuación diferencial	$\boldsymbol{G(t)}$
$2y'(t) + y(t) = \cos t$	$t^2 - t + 6$
$3y'(t) + y(t) = t^2 + 5\mathrm{t} + 3$	$\frac{1}{4}(t+1)$
$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}sen\ t$
$5y'(t) + y(t) = sen\ t$	$\frac{1}{26}sen\ t - \frac{5}{26}\cos t$

Figura26: Actividad 3, Momento 1

En esta actividad se presentan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $ay'(t) + y(t) = F(t)$, para cada una de ellas deberán identificar la forma de la solución entre un conjunto de ellas y argumentar por qué son de esta forma. Con esto se logra un reconocimiento de patrones de soluciones, es decir, determinar comportamientos tendenciales entre la ecuación diferencial y su solución.

Dicho comportamiento implica el variar los parámetros en vez de resolver la ecuación para encontrar las soluciones.

Esta actividad se puede responder teniendo en claro lo siguiente:

Tenemos la ecuación diferencial de la forma: $ay'(t) + y(t) = F(t)$ que se puede expresar como $ay'(t) = F(t) - y(t)$. Luego la idea es encontrar el coeficiente a de la ecuación para que $y(t)$ tienda rápida o lentamente hacia $F(t)$.

Por ejemplo:

Tomemos la ecuación diferencial $ay'(t) + y(t) = t, a \neq 0$ cuya solución es $y(t) = t - a + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)}$. Esta solución es tendencial a $F(t)$, ya que si tomamos $t \to \infty$ tenemos que la solución $y(t) = t - a + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)} \to G(t) = t - a$. Luego la función $G(t) = t - a$ tiene exactamente la misma pendiente que la función $F(t) = t$, pero, se aleja a unidades de esta.

Por lo tanto, si tomamos la ecuación diferencial $\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$, tenemos que su solución es $y(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{4} + Ce^{-2t} \rightarrow G(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}$ cuando $t \to \infty$. Luego la función $G(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}$ tiene la misma pendiente que la función $F(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$, pero se aleja $\frac{1}{2}$ unidades hacia la derecha.

Por otro lado, si tomamos la ecuación diferencial $ay'(t) + y(t) = t^2$, se tiene que su solución es de la forma $y(t) = t^2 - 2at + 2a^2 + Ce^{-t}$ y cuando $t \to \infty$ el comportamiento tendencial de la solución es a $G(t) = t^2 - 2at + 2a^2$.

Luego el vértice de la función cuadrática $G(t) = t^2 - 2at + 2a^2$ es $V = (a, a^2)$, produciéndose un patrón de comportamiento para estas soluciones respecto de la función $F(t) = t^2$, para distintos valores del parámetro a.

A continuación presentamos gráficas de soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$y' + y = t^2; \quad 2y' + y = t^2; \quad 3y' + y = t^2$$

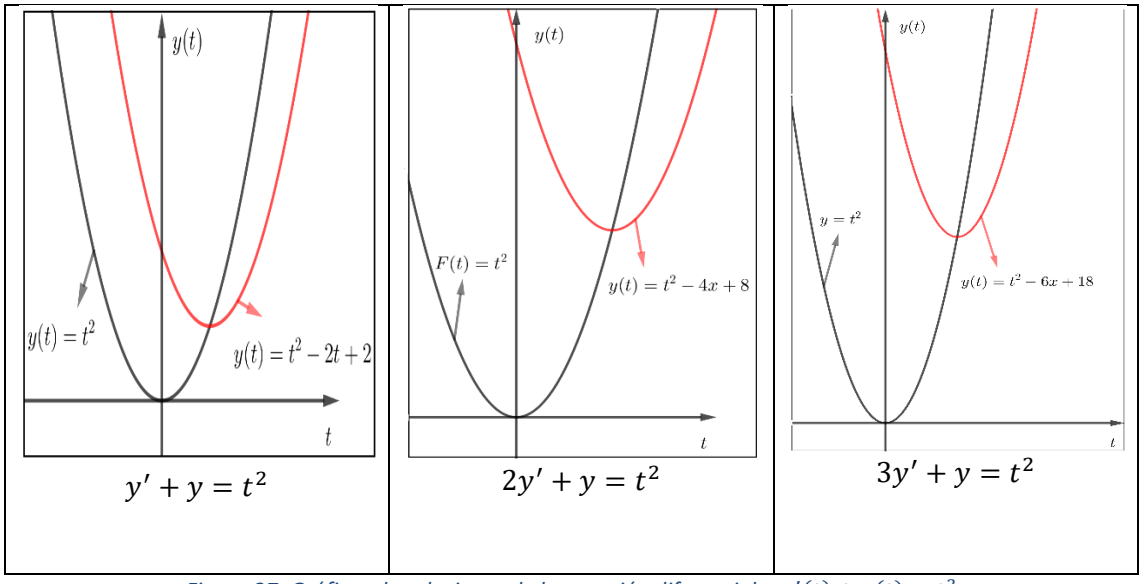


Figura 27: Gráficas de soluciones de la ecuación diferencial $ay'(t) + y(t) = t^2$

Ahora si tomamos la ecuación diferencial $ay' + y = t^2 + 5t + 3$, se tiene que su solución es de la forma $y(t) = t^2 + (5 - 2a)t + 2a^2 + 3 - 5a + Ce^{-t}$ que cuando $t \to \infty$ entonces $y(t) = t^2 + (5 - 2a)t + 2a^2 + 3 - 5a + Ce^{-t} \quad \to \quad G(t) = t^2 + (5 - 2a)t + 2a^2 + 3 - 5a$.

Luego el vértice de la función cuadrática $G(t) = t^2 + (5 - 2a)t + 2a^2 + 3 - 5a$ es $V = \left(\frac{2a-5}{2}, \frac{4a^2-13}{4}\right)$, produciéndose también un patrón de comportamiento para estas soluciones respecto de la función $F(t) = t^2 + 5t + 3$, para distintos valores del parámetro a.

Por lo tanto, si usamos este argumento para la ecuación diferencial

$$3y'(t) + y(t) = t^2 + 5\mathrm{t} + 3$$

tenemos que su solución tendrá el mismo comportamiento que la función

$$G(t) = t^2 - t + 6$$

Que es la misma parábola que describe la función $F(t) = t^2 + 5t + 3$, pero, con un corrimiento en su vértice a $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$

Actividad 4

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-at}$.

En la siguiente tabla, una la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo para cada ecuación diferencial.

Ecuación diferencial	$G(t)$
$y'(t) + 2y(t) = t$	$\frac{t}{2} - \frac{1}{4}$
$y'(t) + 3y(t) = t^2 + 5\text{t} + 3$	$\frac{5}{26} sen\, t - \frac{1}{26}\cos t$
$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{t^2}{3} + \frac{13t}{9} + \frac{14}{27}$
$y'(t) + 5y(t) = sen\, t$	$\frac{1}{5} sen\, t + \frac{2}{5}\cos t$

Figura 28: Actividad 4, Momento 1

En esta actividad se presentan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$. Para cada una de ellas deberán identificar la forma de la solución según el parámetro a, y tras ello relacionarla con la función $G(t)$. Con esto se logra un reconocimiento de patrones de soluciones, es decir, determinar comportamientos tendenciales entre la ecuación diferencial y su solución.

Si se toma la ecuación de la forma $y'(t) + ay(t) = t, a > 0$, tenemos que su solución es de la forma $y(t) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + Ce^{-at}; a > 0$.

Si hacemos tender $t \to \infty$ se tiene que $y(t) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + Ce^{-at} \to G(t) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$.

Por lo tanto, se tiene que la función lineal $G(t)$ tiene una variación en su pendiente de

$m = \frac{1}{a}$, y un corrimiento horizontal hacia la derecha en $\frac{1}{a}$, $a > 0$, respecto a la función $F(t) = t$.

Por lo tanto, si ecuación diferencial fuese $y'(t)+\frac{1}{2}y(t)=\frac{1}{4}\left(t+\frac{3}{2}\right)$, entonces su solución es $y(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-\left(\frac{t}{2}\right)}$, la que tiende a $G(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}$ cuando $t\to\infty$. Es decir, la gráfica de la función $G(t)$ tiene un corrimiento horizontal hacia la derecha de $1\Big/\frac{1}{2}=2$ unidades respecto a la gráfica de la función $F(t)=\frac{1}{4}\left(t+\frac{3}{2}\right)$.

Ahora si la ecuación diferencial fuese de la forma $y'(t)+ay(t)=t^2$ sus soluciones son de la forma $y(t)=\left(\frac{1}{a}\right)t^2-\left(\frac{2}{a^2}\right)t+\frac{2}{a^3}+Ce^{-at}$.

En este caso cuando $t\to\infty$ $y(t)\to G(t)=\left(\frac{1}{a}\right)t^2-\left(\frac{2}{a^2}\right)t+\frac{2}{a^3}$, luego a medida que va cambiando el valor del parámetro $a, a>0$ para la ecuación diferencial dada, tendremos gráficas de $G(t)$ (parábolas) cuyo vértice irá cambiando según el parámetro $V=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a^3}\right)$. También se puede observar que las gráficas de estas funciones crecen más lentamente respecto de la gráfica de la función $F(t)=t^2$ a medida que el valor de a se incrementa.

Por lo tanto, para la ecuación $y'(t)+3y(t)=t^2+5\mathrm{t}+3$ se tiene que la función $G(t)$ será igual $G(t)=\frac{t^2}{3}+\frac{13t}{9}+\frac{14}{27}$.

4.2.2. Momento 2

En este momento el objetivo es hacer funcional para los estudiantes las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y resignificar el comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial al modelo de oferta y demanda.

Actividad 5

La oferta y la demanda de un producto de consumo, están definidas en términos del precio por las expresiones: $Q_S = 60 + 2P$ y $Q_D = 120 - 3P$. Si la constante de proporcionalidad es $k = 4$ y el precio inicial es 8 unidades monetarias. Se pide:

- Bajo el supuesto de que en todo momento la tasa de cambio del precio (con respecto al tiempo) es, directamente proporcional a la *demanda*. Obtener la ecuación diferencial que entrega el modelo.
- Discuta el comportamiento tendencial entre la solución $P(t)$ y la función $F(t)$.
- Grafique la solución y compárela con la gráfica de la función $F(t)$ correspondiente.

Figura 29: Actividad 5, Momento 2.

En esta actividad se entregan la oferta y la demanda de un producto en términos del precio. Se les pide que con estos datos puedan encontrar la ecuación diferencial que mejor modela este fenómeno económico, además de analizar bajo los argumentos que entrega el Momento 1 el comportamiento tendencial entre la solución $P(t)$ y la función $F(t)$. La actividad finaliza con la gráfica de la solución de la ecuación y la función.

Lo primero que se debe realizar para contestar esta actividad es encontrar la trayectoria temporal $P(t)$. Para ello se debe utilizar la ecuación diferencial que mejor modela este fenómeno que es:

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_d - Q_s), \quad (k > 0)$$

Luego si tomamos los datos que se entregan tenemos;

$$\frac{dP}{dt} = k(120 - 3P - 60 + 2P) \iff \frac{dP}{dt} = 4(120 - 3P - 60 - 2P) \iff \frac{dP}{dt} + 20P = 240$$

Luego la solución de dicha ecuación es: $P(t) = 12 + Ce^{-20t}$. Si se impone la condición inicial $(P(0) = 8)$ se tiene que $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$.

Con respecto a esta solución se puede decir que el estado de equilibrio es $P(t) = 12$, y la ecuación es estable, ya que $k(\beta + \delta) = 20 > 0$, luego $P(t) \to 12$ cuando $t \to \infty$.

La gráfica de la solución y de la función $F(t) = 12$ es:

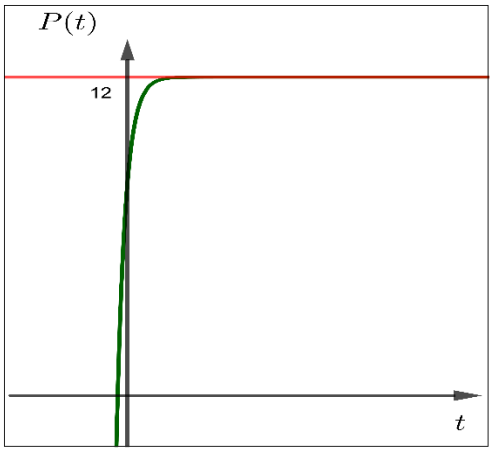


Figura 30: Gráfica de $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$.

Actividad 6

La oferta y demanda de un cierto bien están dadas en miles de unidades respectivamente por:

$$Q_S = 160 - 5P(t) - 3\frac{dP}{dt} \quad \text{y} \quad Q_D = 40 + 3P(t) + \frac{dP}{dt} \quad \text{con} \quad P(0) = 20 \text{ dólares.}$$

Se pide:

Encontrar la ecuación diferencial que modela estos fenómenos económicos. Analice con argumentos gráficos si el modelo presenta estabilidad o inestabilidad económica y determine el precio de equilibrio (si existe).

Figura 31: Actividad 6, Momento2.

Acá se entregan la oferta y la demanda de un producto en términos del número de unidades. Al igual que en la actividad anterior se les pide que encuentren la ecuación diferencial que modela el fenómeno, pero, la diferencia es que con esta actividad logran resignificar el comportamiento tendencial de las soluciones con el fenómeno de la estabilidad e inestabilidad económica y el precio de equilibrio.

Aplicando el principio económico de oferta y demanda, es decir, $Q_d = Q_s$ se tiene:

$$160 - 5P(t) - 3\frac{dP}{dt} = 40 + 3P(t) + \frac{dP}{dt}$$

Lo que da la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dP}{dt} + 2P = 30$, cuya solución es

$$P(t) = 15 + Ce^{-2t}$$

Para determinar si existe estabilidad de precio y el precio de equilibrio, es necesario resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{dP(t)}{dt} - 2P(t) = 30; \quad P(0) = 20$$

Luego la solución particular está dada por $P(t) = 15 + 5e^{-2t}$, cuya gráfica es:

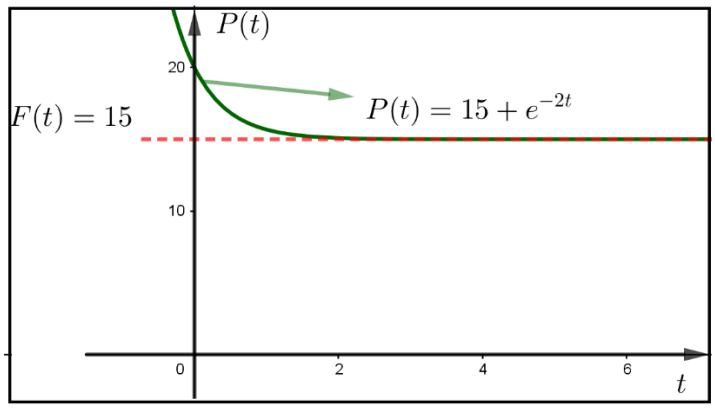


Figura 32: Gráfica de $P(t) = 15 + 5e^{-2t}$.

Por otra parte, cuando $t \to \infty$, $P \to 15$, entonces se puede concluir que en este caso se presenta estabilidad de precio, y el precio de equilibrio es 15 dólares.

Actividad 7

En la columna de la izquierda aparecen escritas cuatro ecuaciones diferenciales que representan algún problema de oferta-demanda; en la columna de la derecha están escritas seis expresiones para la función $P(t)$. Relaciona la ecuación diferencial con la expresión o expresiones que creas que representan su solución.

Ecuación diferencial	**Expresión para $P(t)$**
	$\mathrm{P(t)} = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$
$P'(t) + 20P(t) = 240$	$P(t) = 15 + 5e^{-2t}$
$P'(t) + 2P(t) = t^2$	$P(t) = 12 - 4e^{-20t}$
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$	$P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$
$P'(t) + 2P(t) = 30$	$P(t) = 25e^{(3/2)t} - 20$
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$	$\mathrm{P(t)} = 2 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$

Figura 33: Actividad 7, Momento 2

En esta actividad se presentan una diversidad de ecuaciones diferenciales que representan un problema de oferta y demanda, pero, en cada uno de ellos deberán identificar la forma de la solución entre un conjunto de ellas y argumentar por qué son de esta forma. La idea es utilizar los patrones que se lograron identificar en la actividad 3 y 4 del momento 1.

Por la actividad 3 y 4 del Momento 1, se tiene que:

La ecuación general $y'(t) + ay(t) = F(t)$ tiene como solución $P(t) = e^{-at}\int F(t)e^{-at}dt + Ce^{-at}$, dependiendo de la función $F(t)$. Luego las ecuaciones:

- $P'(t) + 20P(t) = 240$ debe tener como solución a la función $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$ ya que $F(t) = 240$ la cual queda dividida por $a = 20$.
- $P'(t) + 2P(t) = t^2$ tiene como solución a la función $P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$ ya que la solución general de la ecuación diferencial $y'(t) + ay(t) = t^2$ es $y(t) = \left(\frac{1}{a}\right)t^2 - \left(\frac{2}{a^2}\right)t + \frac{2}{a^3} + Ce^{-at}$, con $a = 2$.
- Análogamente para la ecuación diferencial $P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$ se tiene que su solución debe tener la forma $P(\mathrm{t}) = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$.

4.2.3. Momento 3

En este momento se examina el comportamiento tendencial de la solución, para ello se elaboró dos actividades que integran los elementos obtenidos en las actividades anteriores.

Actividad 8

En la columna de la izquierda aparecen escritas cinco ecuaciones diferenciales que representan algún problema de oferta-demanda; en la columna de la derecha están las gráficas de seis funciones $P(t)$. Debes relacionar la ecuación diferencial con la gráfica o gráficas que creas que representan su solución. Para el análisis debes considerar si el modelo presenta estabilidad o inestabilidad económica, además del precio de equilibrio (si existe).

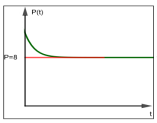
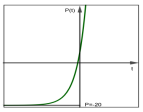
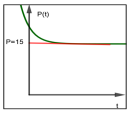
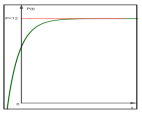
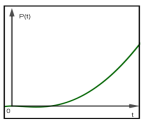
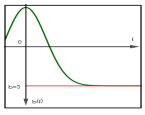
Ecuación diferencial	**Gráfica de $P(t)$**
$P'(t) + 20P(t) = 240$	
$P'(t) + 2P(t) = t^2$	
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$	
$P'(t) + 2P(t) = 30$	
	
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$	

Figura 34: Actividad 8, Momento 3.

En esta actividad se entregan un grupo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que representan un modelo de oferta y demanda, las cuales se tienen que relacionar con una o más

gráficas que representen la solución de la ecuación. Haciendo uso de dicha gráfica el estudiante debe identificar si el modelo económico presenta estabilidad o inestabilidad.

Para resolver estos ejercicios se hace uso de la actividad anterior, es decir, como ya se conoce la forma de la solución de dichas ecuaciones se hace uso del comportamiento tendencial de dichas soluciones cuando $t \to \infty$.

Entonces:

Para la ecuación $P'(t) + 20P(t) = 240$, su solución es de la forma $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$ que cuando $t \to \infty \implies P(t) \to G(t) = 12$. Luego su gráfica es de la forma:

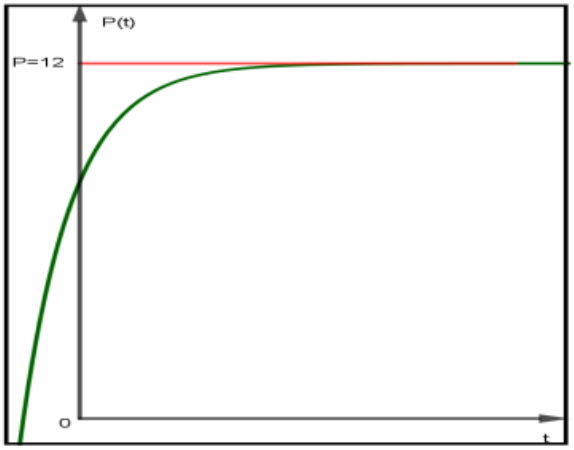


Figura 35: Gráfica de la función $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$.

Para la ecuación $P'(t) + 2P(t) = t^2$, su solución es de la forma: $P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$ la que tiende a $G(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$ cuando $t \to \infty$. Luego su gráfica es de la forma

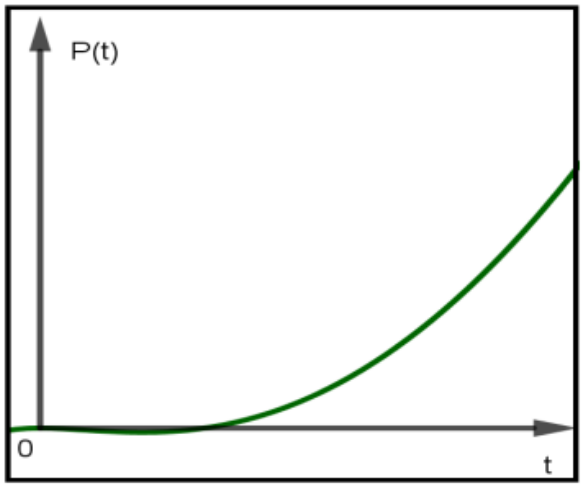


Figura 36: Gráfica de la función $P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$

Para la ecuación $P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$, su solución es de la forma: $P(\mathrm{t}) = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$ la que tiende a $G(t) = 8$ cuando $t \to \infty$. Luego su gráfica es de la forma:

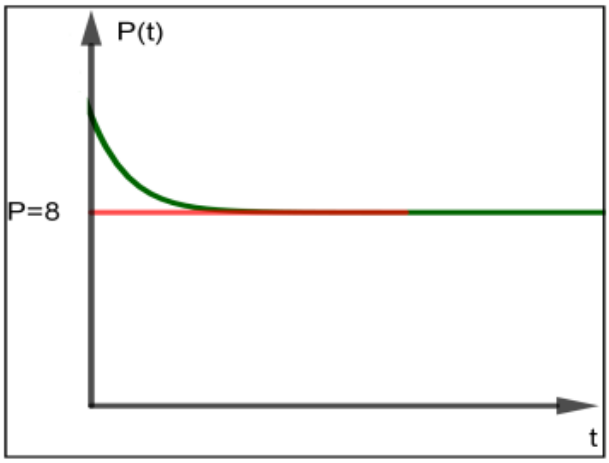


Figura 37: Gráfica de la función $P(t) = (4 + 2t)e^{-2t} + 8$.

Actividad 9

Relacione las tres columnas

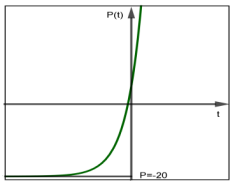
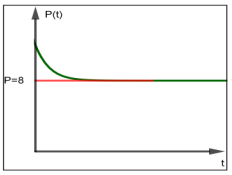
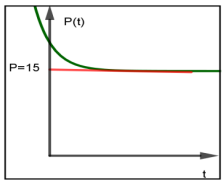
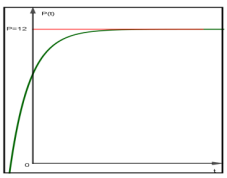
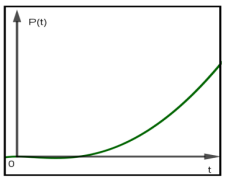
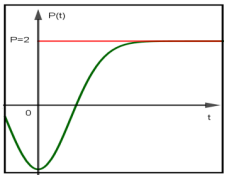
Ecuación diferencial	**Gráfica de $P(t)$**	**Expresión de $P(t)$**
$P'(t) + 20P(t) = 240$		$\mathrm{P(t)} = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$
$P'(t) + 2P(t) = t^2$		$P(t) = 15 + 5e^{-2t}$
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$		$P(t) = 12 - 4e^{-20t}$
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$		$P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$
		$P(t) = 25e^{(3/2)t} - 20$
$\mathrm{P'(t)} + 2\mathrm{P(t)} = 30$		$\mathrm{P(t)} = 2 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$

Figura 38: Actividad 9, Momento 3.

La actividad 9 es similar a la anterior, pero, se agrega una columna más que es la solución de la ecuación diferencial, por ende, el estudiante tendrá que relacionar la ecuación diferencial con su solución y su gráfica.

Haciendo uso de las dos actividades anteriores se tiene que:

Para la ecuación $P'(t) + 20P(t) = 240$, su solución es $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$ y su gráfica es de la forma:

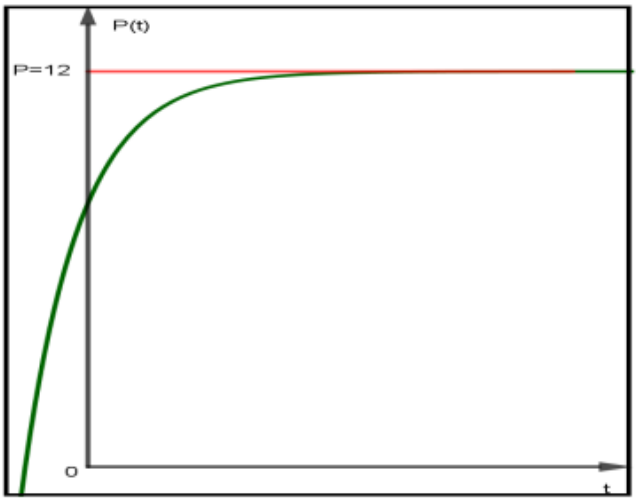


Figura 39: Gráfica de la solución $P(t) = 12 - 4e^{-20t}$

Para la ecuación $P'(t) + 2P(t) = t^2$, su solución es $P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$ y su gráfica es de la forma:

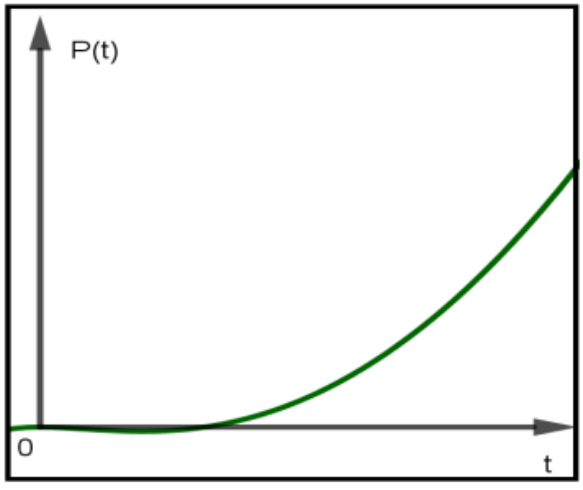


Figura 40: Gráfica de la solución $P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$

Para el resto de la Actividad el desarrollo es análogo al anterior.

Las actividades señaladas en la secuencia tienen como propósito contrapesar la falta de marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático que expresa el dME, recuperando categorías del conocimiento matemático como la modelación-graficación y el comportamiento tendencial de las funciones, las cuales están presentes en escenarios distintos a los que comúnmente se tocan en el aula. En este sentido, el diseño de situación propone caminos que ayuden al estudiante a reflejar el uso de su conocimiento matemático en situaciones que estén acordes a su futuro laboral.

4.3. Análisis a posteriori

El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acontecidos durante la implementación de la situación didáctica diseñada. En esta etapa es que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina efectivamente si fueron alcanzadas las expectativas o cuanto más allá nos desviamos de los resultados que se esperaban.

De esta confrontación entre el análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma.

4.3.1. Análisis del Momento 1

4.3.1.1. Actividad 1

En esta actividad se toma una lista de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $y'(t) + y(t) = F(t)$, donde se varía $F(t)$. Los cuatro grupos en estudio lograron identificar la ecuación diferencial como una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea. En general, no tuvieron problema con encontrar la solución de la ecuación, dando evidencia que el proceso algebraico – algorítmico lo manejan bien. El grupo A, fue el único que evidencia la existencia de un factor de integración con el cual se puede resolver la ecuación diferencial, los otros tres grupos solo aplicaron la fórmula de Leibnitz

$$y(t) = e^{\int P(t)dt}\left\{\int e^{\int P(t)dt}F(t)dt + C\right\}$$

para obtener la solución. Una vez obtenida esta, los grupos se ayudaron de Geogebra para realizar las gráficas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales planteadas.

Posteriormente los cuatro grupos hacen un análisis del comportamiento de la solución cuando la variable independiente $t \to \infty$, dándose cuenta que la tendencia es parecida a la gráfica de la función $F(t)$. Con esto ellos logran tener un primer acercamiento al comportamiento tendencial de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden.

A continuación presentamos las hojas de respuesta de los cuatro grupos:

- **Grupo 1**:

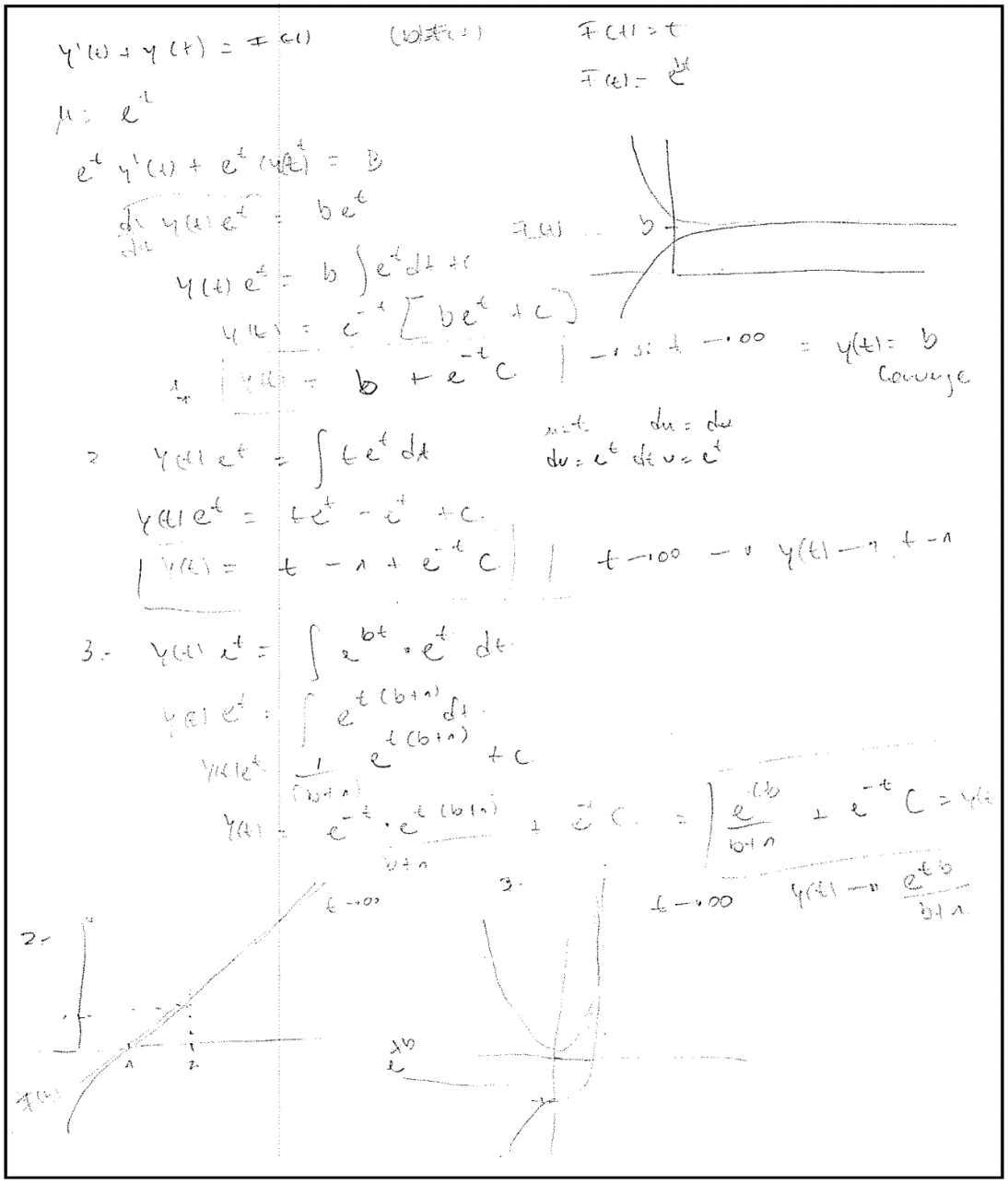


Figura 41: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 1

Como se puede visualizar, este grupo inmediatamente vincula la solución de la ecuación diferencial con $F(t)$, usando argumentos cualitativos y gráficos (con ayuda del Geogebra). Para todas las ecuaciones planteadas toman un valor particular de la constante C para graficar la solución. Pese a ello, en la segunda ecuación de esta actividad, el grupo solo gráfica una solución de la ecuación diferencial y de forma equivocada grafican la función $F(t) = t$, ya que la trasladan en una unidad hacia la derecha. Esto les lleva a interpretar de forma equivocada el

comportamiento de la solución con la función $F(t) = t$. Esto no les permitió interpretar lo que estaba pasando con la gráfica de las soluciones respecto de que en el primer cuadrante las soluciones tienden a comportarse como una recta con pendiente igual a la función $F(t) = t$ con un traslado de una unidad hacia la derecha.

En la ecuación 3 grafican de forma errónea la función $F(t) = e^{bt}$, ya que no se dan cuenta que esta función es siempre positiva para todo t. Pese a este error, fueron capaces de visualizar que en el primer cuadrante las soluciones tienen un comportamiento bastante parecido al de la función $F(t) = e^{bt}$. Cabe señalar que el estudio anterior sólo se hizo en el caso en que $b > 0$.

Con todo lo anterior, este grupo dio evidencias de entender que si la variable t se hace tender al infinito las soluciones se comportaban de manera parecida a la función $F(t)$.

- **Grupo 2**

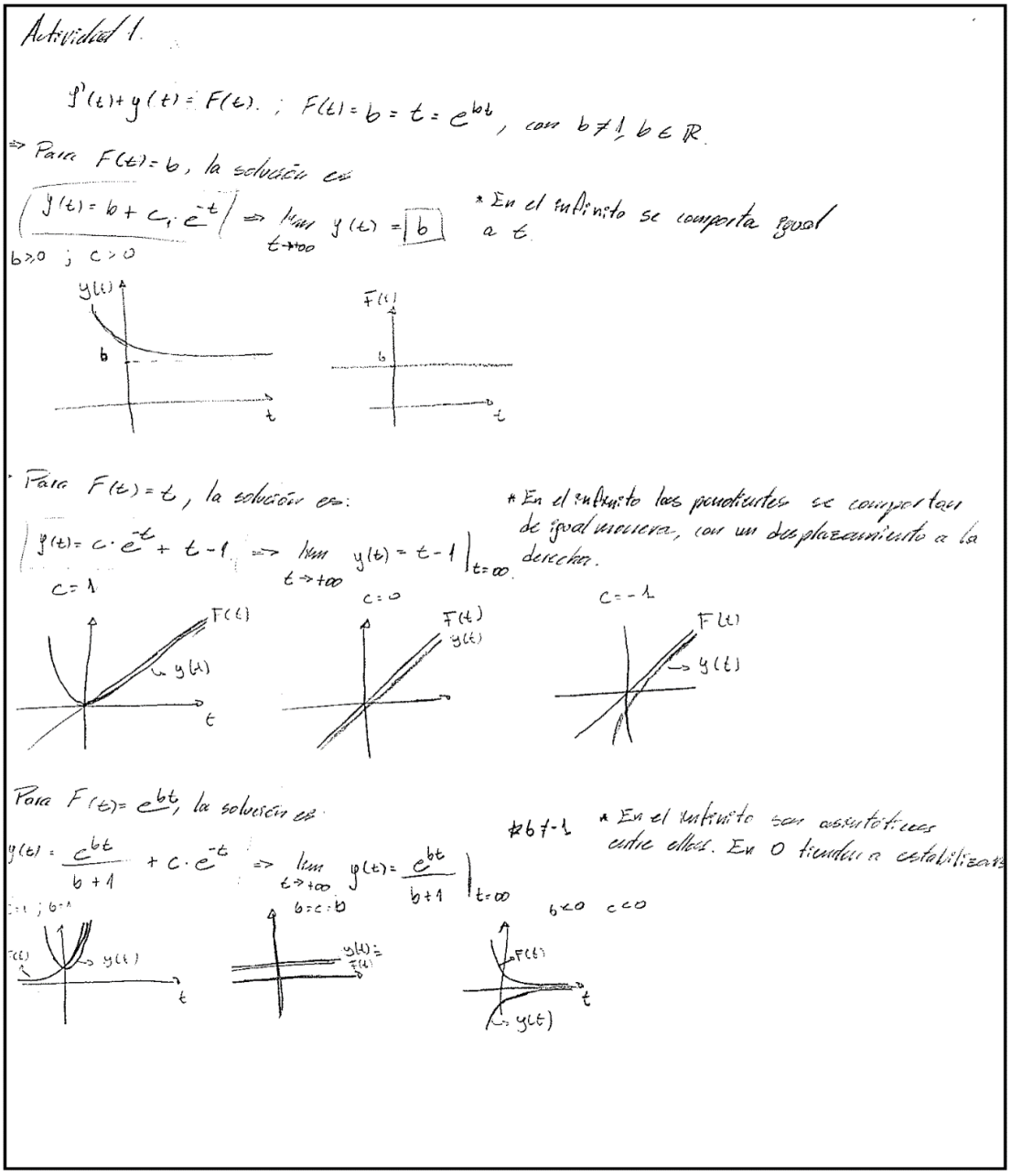


Figura 42: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 2.

Este grupo resolvió las tres ecuaciones diferenciales aplicando la fórmula de Leibnitz. En el caso de la primera ecuación hicieron un análisis gráfico sólo usando un valor particular de la constante C de la solución, es decir, para $C > 0$ y $F(t) = b, b > 0$, luego vieron que pasaba cuando la variable independiente se hacía tender al infinito, dándose cuenta que la solución empezaba a tender por arriba a la constante b, en sus palabras: "*en el infinito se comporta igual a* b".

En el análisis de la segunda ecuación diferencial, lo hacen de forma similar que la anterior, pero, ahora intentan el análisis con la gráfica de más de una solución con distintos valores de C, además de la función $F(t) = t$.

Cuando grafican la solución de la ecuación con $C = 0$ junto con la función, se dan cuenta que las gráficas son dos rectas paralelas (tienen la misma pendiente), pero, una desplazada hacia la derecha respecto de la otra sin especificar cuantas unidades, específicamente dicen: "*en el infinito las pendientes se comportan de igual manera, con un desplazamiento hacia la derecha*".

Para el valor $C = 1 \ y \ C = -1$ graficaron de forma errónea las soluciones, ya que las hicieron tender a la gráfica de la función $F(t) = t$ y no a la gráfica de la función $y(t) = t - 1$.

Para la tercera ecuación diferencial, es decir, $y'(t) + y(t) = e^{bt}$, hacen un análisis gráfico para tres casos, $b > 0, \ b = 0 \ y \ b > 0$ y con un solo valor para la constante de la solución C. Para los tres casos estudiados hacen el siguiente comentario "*en el infinito son asintóticas entre ellas. En 0 tienden a estabilizarse*"

Calculan el límite a la solución cuando la variable independiente tiende a infinito y llegan a la conclusión que la solución tiende al valor $\frac{e^{bt}}{b+1}$.

- **Grupo 3**

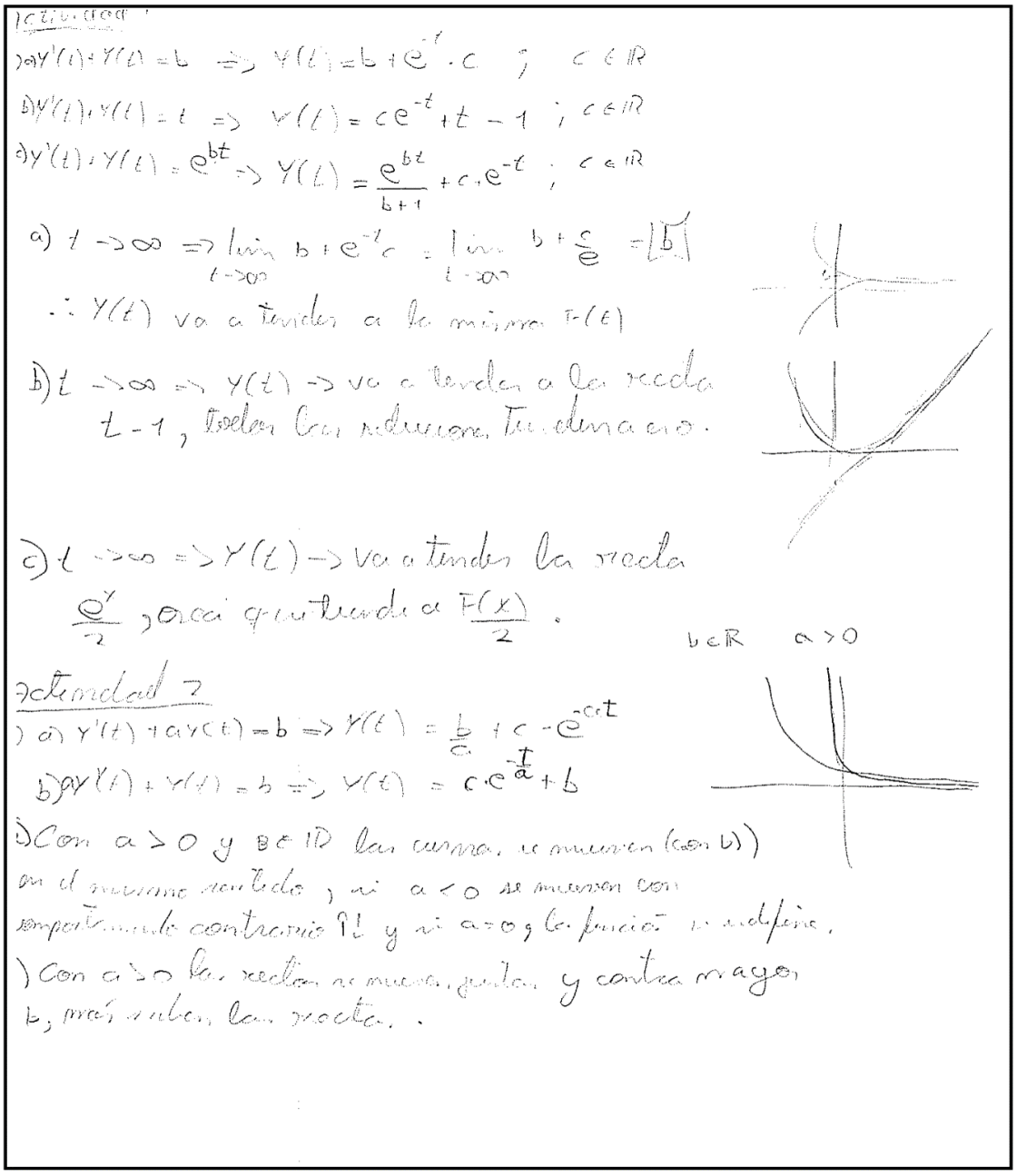


Figura 43: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 3.

Este Grupo realiza bien el tratamiento algebraico – algorítmico al calcular las soluciones de las tres ecuaciones diferenciales, pero, no logran un tratamiento visual completo de la situación, no advierten del todo la gráfica de la soluciones de las ecuaciones.

A las tres soluciones le aplican el límite cuando $t \to \infty$, dándose cuenta de que la solución tiende a la función $F(t)$.

- **Grupo 4**

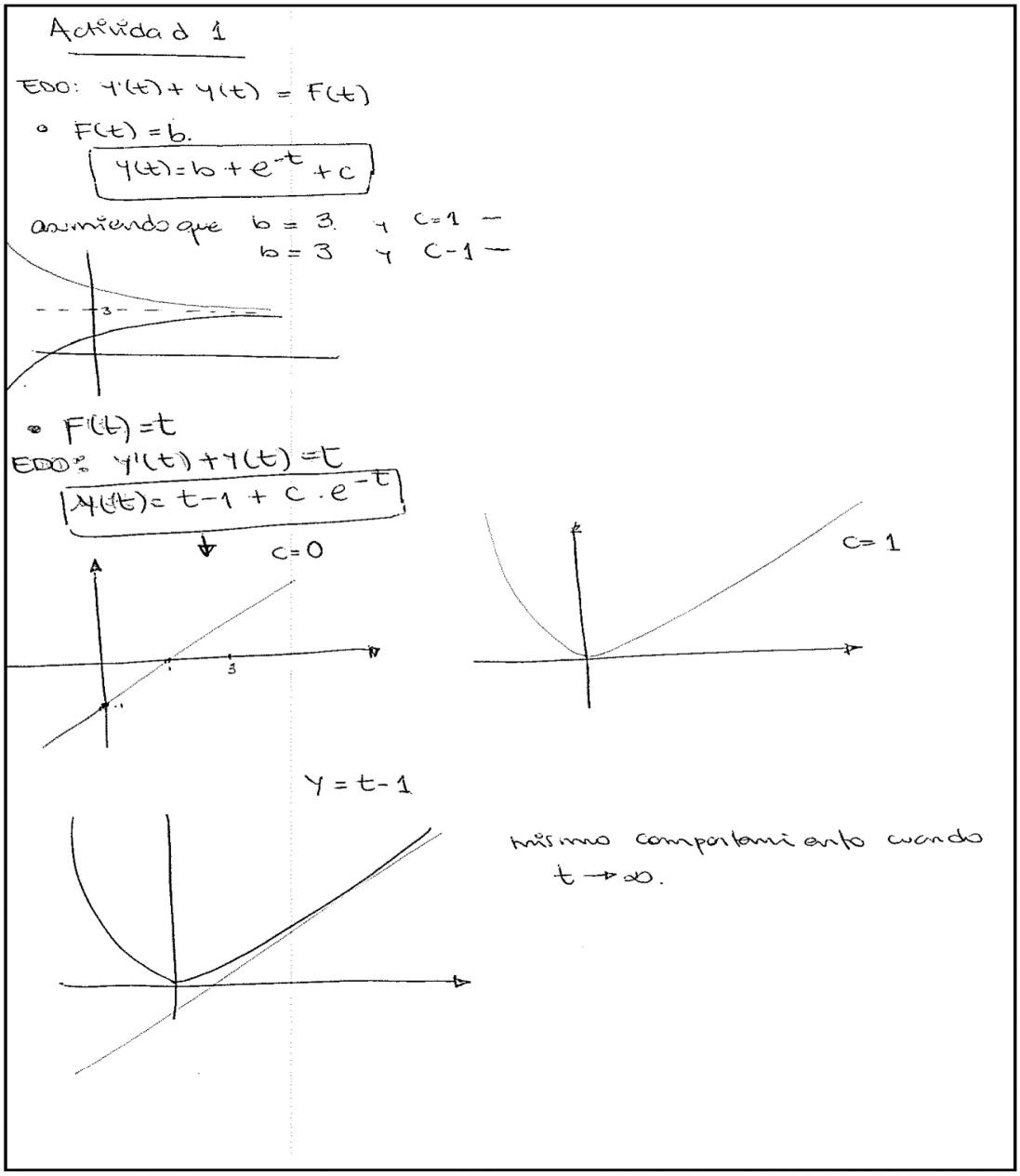


Figura 44: Respuesta de la Actividad 1, Grupo 4.

Al igual que los otros grupos, no hubo problemas con encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Para graficar las soluciones, en los tres casos tomaron valores específicos de b y de la constante de la solución C. En los tres casos encontraron que la gráfica de la solución de la ecuación se

comporta de manera similar a la función de la ecuación diferencial, cuando la variable independiente tiende al infinito.

Luego con respecto a esta actividad los estudiantes respondieron básicamente lo que se esperaba de ellos, aunque con argumentos un tanto limitados en el sentido de las gráficas que realizaron. Ninguno de los grupos hizo un análisis respecto de la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva y con esto graficar los campos de direcciones. Lo que se esperaba en esta actividad es que algunos estudiantes hubiesen podido hacer un análisis como indica la Figura 42.

Sea la ecuación diferencial:

$$y'(t) + y(t) = t$$

Despejando $y'(t)$ se tiene:

$$y'(t) = t - y(t)$$

$$y'(t) > 0 \iff t - y(t) > 0 \iff y(t) < t$$

$$y'(t) < 0 \iff t - y(t) < 0 \iff y(t) > t$$

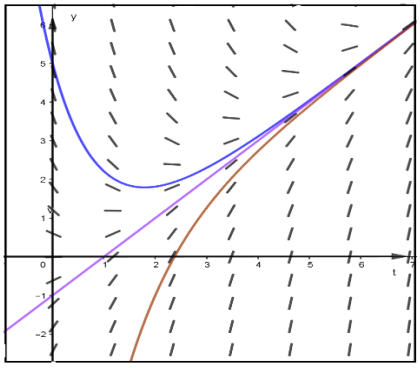


Figura 45: Campos de direcciones de la ecuación diferencial $y'(t) + y(t) = t$

Esto manifiesta de alguna manera que los estudiantes manejan la idea de derivada, pero, bajo un punto de vista algebraico y no geométrico. Esto sucede justamente porque los estudiantes tienden a mantener por más tiempo en sus registros mentales los procesos algebraicos, ya que durante todo su proceso educacional se le ha dado importancia a ese tipo de registros, dejando la modelación prácticamente de lado. Los docentes y el proceso educativo tienden a creer que la gráfica y las interpretaciones geométricas (que son una forma de modelación) son una aplicación de la matemática, al contrario de lo que señala Cordero (2006) que dice "*la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático*".

Pese a estas dificultades, que son asignadas por el dME, los estudiantes lograron realizar un primer acercamiento al comportamiento tendencial de las soluciones de la ecuación diferencial, que es justamente lo que se quería conseguir con esta primera actividad de la situación didáctica.

4.3.1.2. Actividad 2

En esta Actividad, se considera una secuencia de ecuaciones diferenciales de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$, con $F(t) = b,\ t,\ e^{bt}$. En general todos los grupos no tuvieron problema con la resolución de las ecuaciones diferenciales, no obstante, los análisis planteados se desarrollan de distinta manera.

Por ejemplo:

- El **Grupo 1** a través de la solución de la ecuación diferencial, tomaron $t \to \infty$ obteniendo la convergencia de $y(t)$, para luego graficar algunas soluciones particulares.
  Las soluciones particulares que graficaron fueron hechas con valores de $C > 0$, por lo que las soluciones convergen a $y(t)$ por arriba. Desestimaron graficar las soluciones para valores de $C < 0$.
  Luego a través de la gráfica intentaron establecer patrones de comportamiento según varía el parámetro a y b, todo esto haciendo una comparación entre las soluciones de las ecuaciones de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$ y $ay'(t) + y(t) = F(t)$ con $F(t) = b,\ t$ y e^{bt}.
  Para la ecuación $y'(t) + ay(t) = b$, establecieron el siguiente patrón:
  - ✓ *Si* $a > b,\ y(t)$*, tenderá a un rango* $(0,1)$. Esto como una forma de decir que las soluciones convergen a $\frac{b}{a}$ en una franja que está entre 0 y 1.
  - ✓ *Si* $a < b,\ y(t)$*, tiende a una expresión mayor que 1*. Lo cual es erróneo ya que en este caso la convergencia seguiría dándola el cociente $\frac{b}{a}$, con $b > 0$.
  - ✓ *Si* $a = b,\ y(t)$ *tiende a 1*.
  - ✓ *Si* $a = 0$ *se indetermina.*

  Todo lo anterior bajo la hipótesis $a > 0$.
  Luego colocan una nota en la cual dicen, si $a < 0$, el comportamiento es inverso, lo cual es erróneo ya que en el infinito la solución también se va al infinito.
  Para la ecuación $ay'(t) + y(t) = b$ dicen lo siguiente respecto del comportamiento de su solución según distintos valores de sus parámetros:
  - ✓ Si $a > b$, es una constante mayor a b.
  - ✓ Si $0 < a < 1$, la recta se acerca al cero.
  - ✓ Si $a = 0$, la recta es el eje x.
  - ✓ Si $a = b$, la recta tenderá a una constante.

Por otro lado con respecto a la ecuación diferencial $y'(t) + ay(t) = t \;\; y \;\; ay'(t) + y(t) = t$, dicen lo siguiente:

- ✓ Si a está en la ecuación $y'(t) + ay(t) = t$ muestra un comportamiento cuya pendiente es menor, con lo cual se podrá demorar más.
- ✓ Si $ay'(t) + y(t) = t$ el comportamiento de la función será más rápido ya que la pendiente de la función fue mayor.

Este análisis es un tanto erróneo ya que para valores mayores de $a > 1$ el comportamiento de las soluciones es al revés de lo que declaran los estudiantes.

Para las ecuaciones de la forma $y'(t) + ay(t) = e^{bt} \;\; y \;\; ay'(t) + y(t) = e^{bt}$ encuentran la solución de una de ellas ya que la otra estaba mala y realizan un bosquejo de alguna solución particular. No realizan análisis respecto de comportamiento, según los valores de los parámetros.

- **El Grupo 2** encontró de buena forma las soluciones de las ecuaciones diferenciales y luego hacen un análisis gráfico, especificando que sólo tomarán el valor $C = 1$ para la constante de integración, con lo cual facilitan bastante el desarrollo de su análisis.

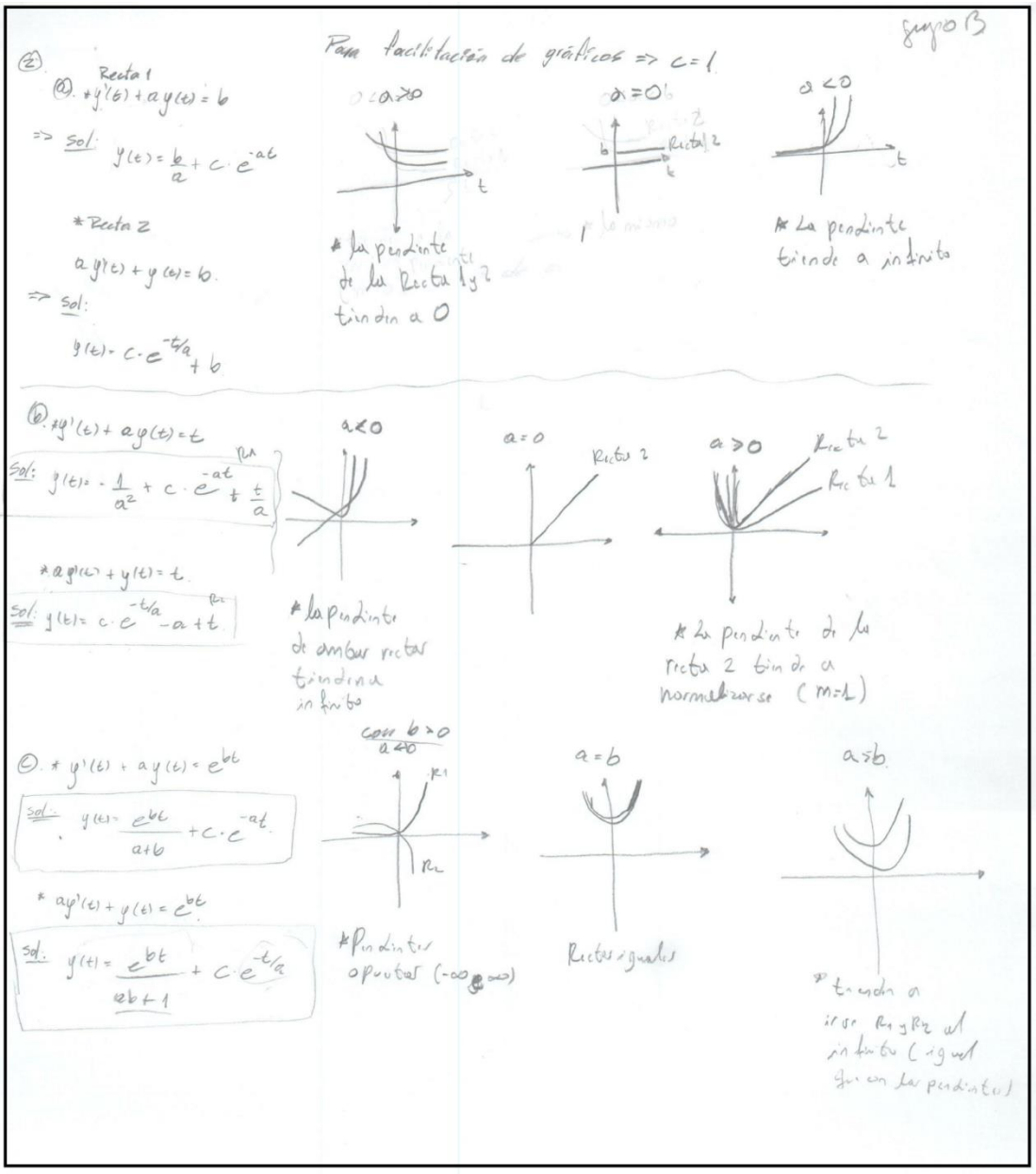


Figura 46: Actividad 2, Grupo 2.

Como se ve en la Figura 43 en la pregunta a) de la Actividad 2 realizan la gráfica de soluciones particulares de las dos ecuaciones diferenciales, especificando comportamientos de la solución según sea el valor que tome el parámetro a. Las gráficas son hechas sólo para un valor específico de la constante de integración $C > 0$. Al hacer la comparación entre las soluciones de las ecuaciones involucradas hacen los siguientes comentarios. Para *"$a > 0$, la pendiente de la recta 1 y 2 tienden a cero*", lo que es falso, ya que en ese caso las soluciones tienden a una recta horizontal según sea el valor que tome a y b. Por otro lado, para *"$a < 0$ la pendiente tiende a infinito y si $a = 0$ la recta es horizontal".*

Para la **pregunta b) y c)**, básicamente hacen lo mismo. Realizan gráficas para algunos casos particulares de la solución y luego emiten comentarios respecto de cuál es el comportamiento de las funciones respecto de la pendiente de la recta 1 y 2. Comentarios que en parte son reales, pero, para situaciones muy limitadas.

- El **Grupo 3**, encontró las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales involucradas en la actividad. Graficaron escasamente algunas soluciones y con ellas se ayudaron para realizar algunos comentarios respecto del comportamiento da las soluciones según varía el parámetro a.

  Para la **pregunta a)** primera ecuación diferencial, dicen: "Con $a > 0$ y $b \in IR$ las curvas se mueven (con b) en el mismo sentido y si $a < 0$ se mueven con comportamiento contrario, es decir, mientras una crece la otra decrece, y si $a = 0$, la función se indefine.

  Para la segunda ecuación en su análisis dicen: *"con $a > 0$ las rectas se mueven juntas y si el b crece, más suben las rectas"*.

  Para la **pregunta b)** el único comentario que hacen es que *"en la primera ecuación a no puede ser igual a cero, al contrario de la segunda ecuación que con $a = -1$, las funciones son iguales",* lo que es verdad, ya que efectivamente en el infinito las soluciones de las ecuaciones diferenciales tienden a comportarse de la misma forma.

  En la **pregunta c)**, grafican de mala forma algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales, lo que les perjudica en su análisis posterior de la situación. Hacen comentarios como: "*podemos notar que cuando $ay'(t)$ con $a > 0$, $y(t)$ se comporta como una función par, pero cuando $y'(t)$ está sola, con $a < 0$, $y(t)$ se comporta como una función impar*".

- **Grupo 4**

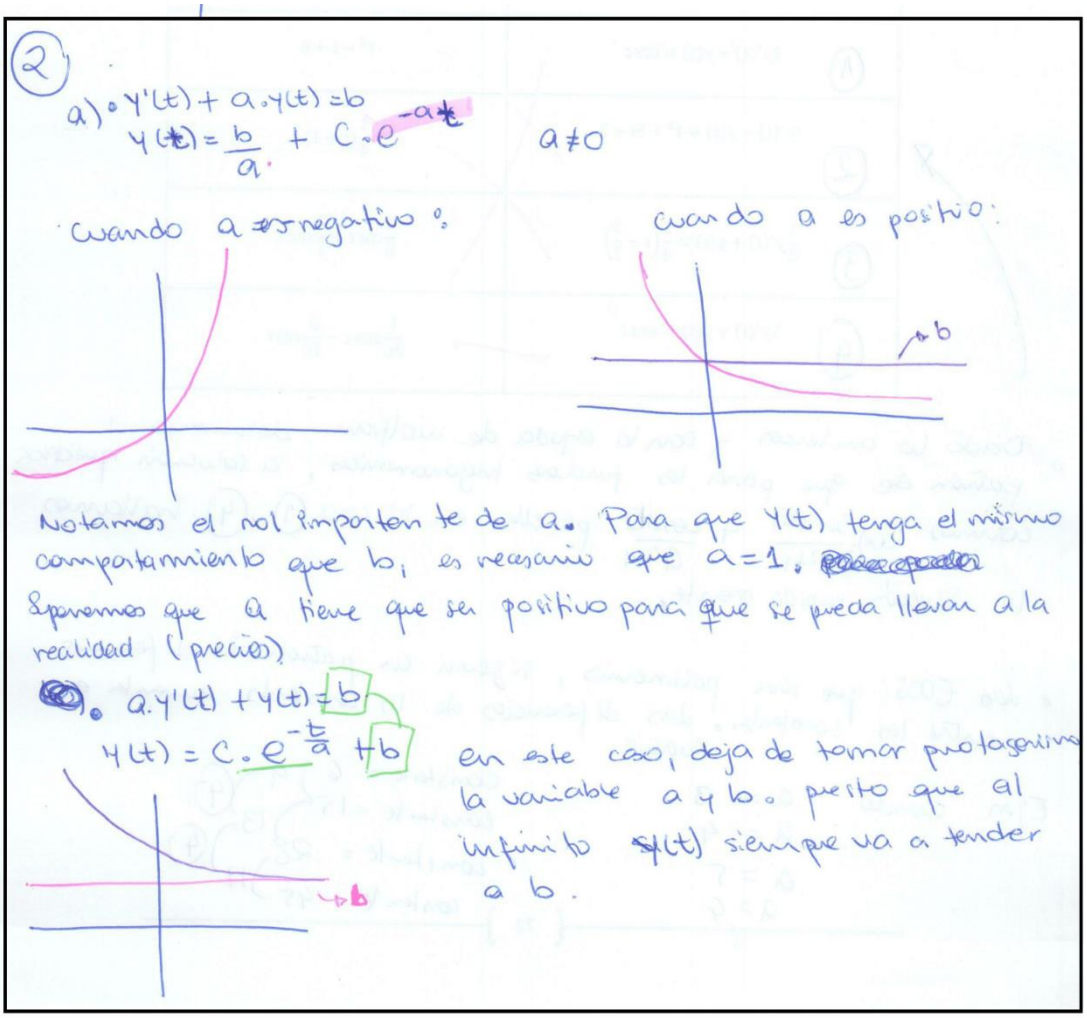


Figura 47: Pregunta a), Actividad 2, Grupo 4.

Como se puede observar en la Figura 44, para la ecuación diferencial $y'(t) + ay(t) = b$ los estudiantes de este grupo se dieron cuenta que la convergencia sólo se daba cuando el valor del parámetro es $a > 0$. Hacen hincapié en que el rol del parámetro a es importante, de hecho argumentan que si $a = 1$ la solución $y(t)$ tendrá el mismo comportamiento que b e incluso suponen que a tiene que ser positivo para que el fenómeno estudiado tenga sentido en su realidad, es decir, **precios**. No le dan ninguna importancia en la solución al parámetro b, salvo la importancia que tiene en la ecuación diferencial. Por otro lado, para la ecuación $ay'(t) + y(t) = b$, desestiman la importancia de los parámetros a y b, ya que comentan "*en este caso, deja de tomar protagonismo la variable* a y b*, puesto que al infinito* $y(t)$ *siempre va a tender a* b".

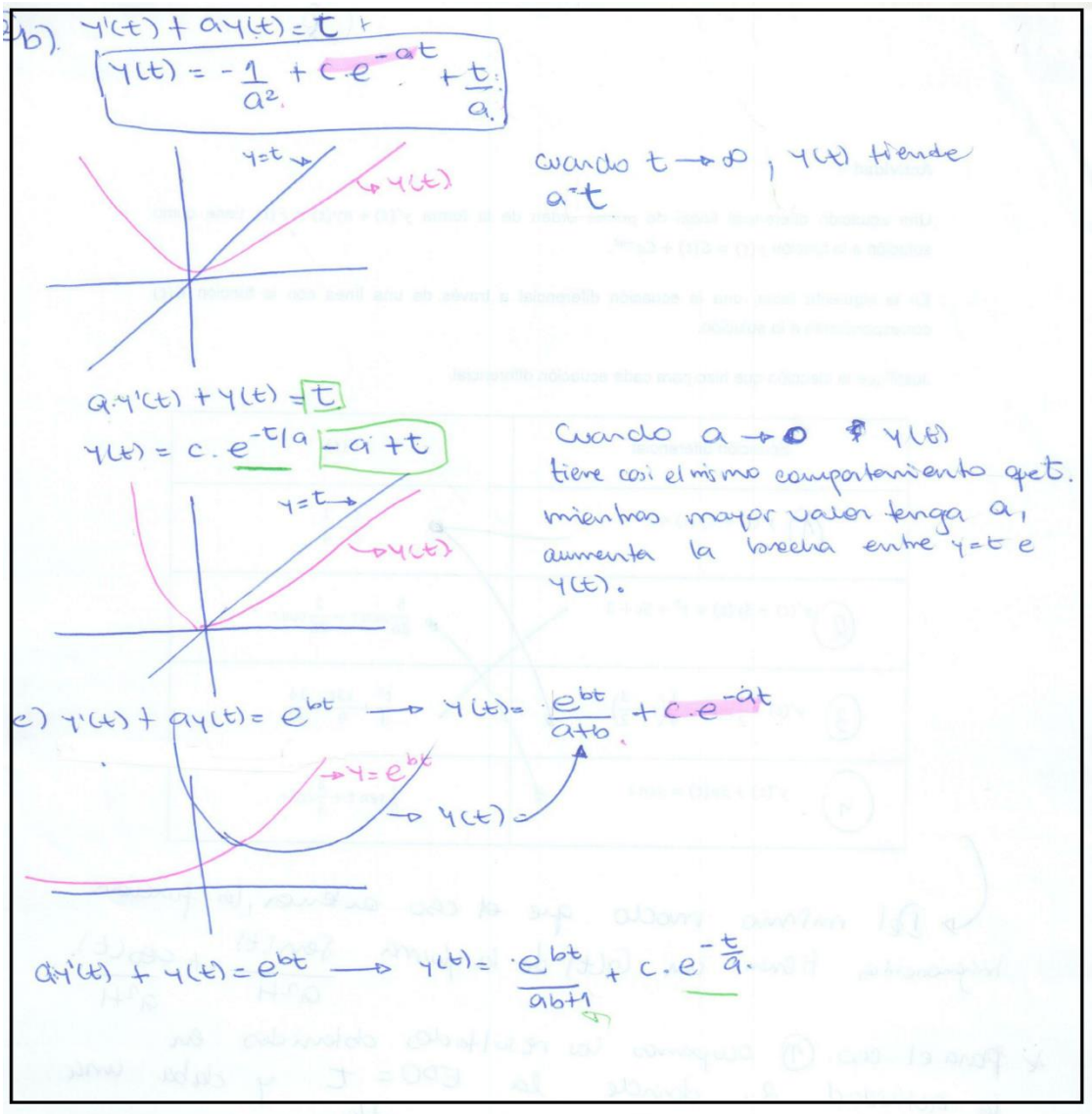


Figura 48: Pregunta b) y c), Actividad 2, Grupo 4.

En la **pregunta b)** para ambas ecuaciones diferenciales, grafican la función $F(t) = t$ y sobre la misma gráfica bosquejan una solución particular de la ecuación.

En la primera ecuación hacen un breve análisis, sólo comentan que cuando $t \to \infty$, $y(t)$ tiende a $F(t) = t$. No existe ningún comentario respecto a los valores que podría tomar el parámetro a, para que efectivamente la solución de la ecuación diferencial tenga un comportamiento "parecido" al de la función $F(t)$.

En cambio en la segunda ecuación diferencial intentan darle sentido al rol que juega el parámetro a en la solución de la ecuación, haciendo el siguiente comentario:

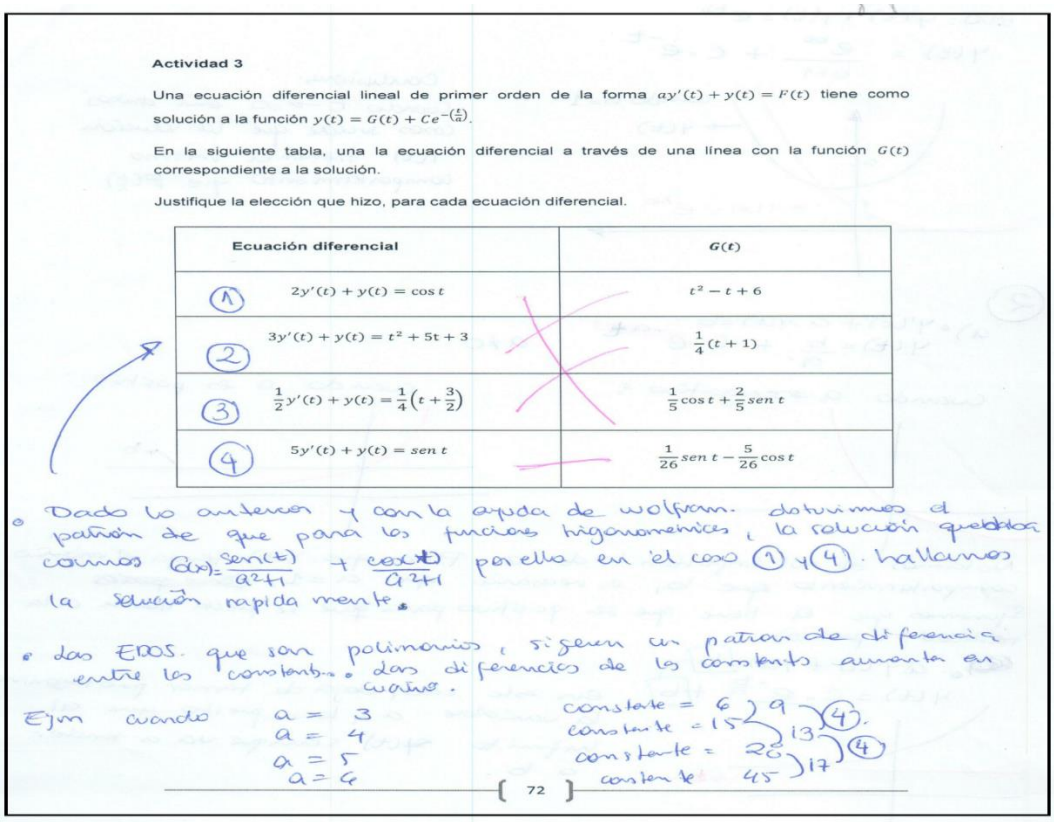
"cuando $a \to 0$, $y(t)$ tiene casi el mismo comportamiento que $F(t) = t$. Mientras mayor valor tenga a, aumenta la brecha entre $F(t) = t$ e $y(t)$".

En la **pregunta c)** solo calculan la solución y hacen un bosquejo de una solución particular de la ecuación diferencial y de la función $F(t) = e^{bt}$.

4.3.1.3. Actividad 3 y 4

En estas Actividades, los grupos trabaron sin ningún problema ya que con ayuda de las dos actividades anteriores fueron capaces de entablar patrones de conductas de las soluciones, es decir, determinar comportamientos tendenciales entre la función $F(t)$ de la ecuación diferencial y la función $G(t)$ que es parte de la solución de la forma $y(t) = G(t) + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)}$ o $y(t) = G(t) + Ce^{-at}$.

Cabe señalar que sólo el grupo 4 intentó realizar un análisis más profundo en estas actividades. Cambiaron las constantes dadas en cada actividad por un parámetro a, e intentaron ver qué pasaba cuando este parámetro iba cambiando. En la Figura 46 y 47 se encuentra el análisis realizado:



Actividad 3

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $ay'(t) + y(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)}$.

En la siguiente tabla, una la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo, para cada ecuación diferencial.

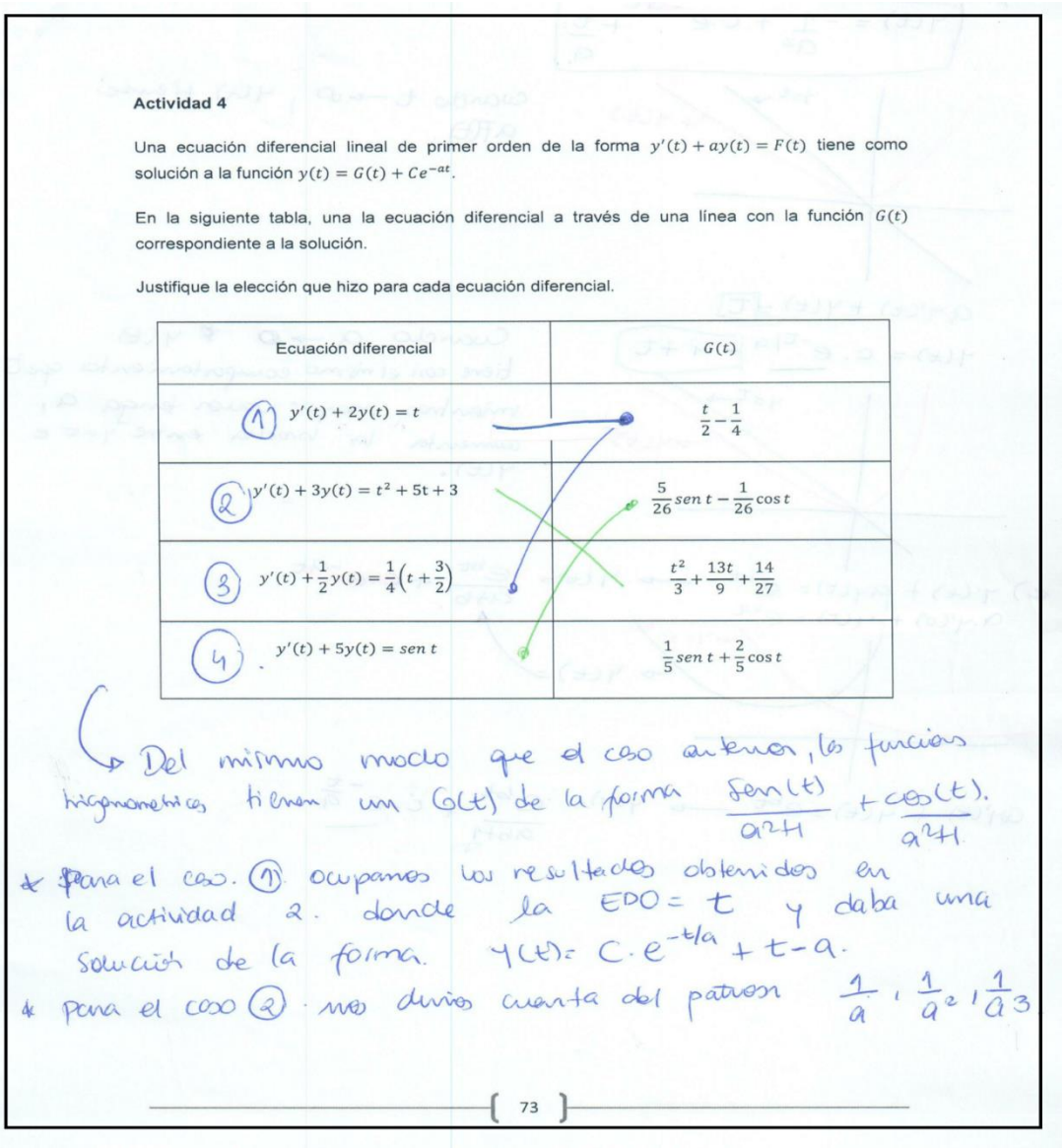
Ecuación diferencial	$G(t)$
(1) $2y'(t) + y(t) = \cos t$	$t^2 - t + 6$
(2) $3y'(t) + y(t) = t^2 + 5t + 3$	$\frac{1}{4}(t+1)$
(3) $\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}sen\, t$
(4) $5y'(t) + y(t) = sen\, t$	$\frac{1}{26}sen\, t - \frac{5}{26}\cos t$

- Dado lo anterior y con la ayuda de wolfram: determinamos el patrón de que para las funciones trigonométricas, la solución queda como $G(x) = \frac{sen(t)}{a^2+1} + \frac{cos(t)}{a^2+1}$ por ello en el caso (1) y (4) hallamos la solución rapida mente.
- Las EDOS. que son polinomios, siguen un patron de diferencia entre los constantes. Las diferencias de los constantes aumenta en cuatro.

Ejm cuando $a = 3$, constante = 6, 9, (4)
$a = 4$, constante = 15, 13, (4)
$a = 5$, constante = 28, 17, (4)
$a = 6$, constante 45

72

Figura 49: Actividad 3, Grupo 4.



Actividad 4

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-at}$.

En la siguiente tabla, una la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo para cada ecuación diferencial.

Ecuación diferencial	$G(t)$
(1) $y'(t) + 2y(t) = t$	$\frac{t}{2} - \frac{1}{4}$
(2) $y'(t) + 3y(t) = t^2 + 5t + 3$	$\frac{5}{26}sen\,t - \frac{1}{26}\cos t$
(3) $y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{t^2}{3} + \frac{13t}{9} + \frac{14}{27}$
(4) $y'(t) + 5y(t) = sen\,t$	$\frac{1}{5}sen\,t + \frac{2}{5}\cos t$

Del mismo modo que el caso anterior, las funciones trigonométricas tienen un G(t) de la forma $\frac{sen(t)}{a^2+1} + \frac{\cos(t)}{a^2+1}$.

* para el caso (1) ocupamos los resultados obtenidos en la actividad 2. donde la EDO = t y daba una solución de la forma $y(t) = C \cdot e^{-t/a} + t - a$.
* para el caso (2) me dimos cuenta del patron $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$

73

Figura 50: Actividad 4, Grupo 4.

En estas dos Actividades los estudiantes de sólo dos grupos (Grupos 3 y4) intentaron encontrar algún patrón de comportamiento para el parámetro a de la ecuación diferencial, para luego poder relacionar la ecuación diferencial de la columna de la izquierda con la posible función $G(t)$ de la columna de la derecha.

Algunos patrones de comportamiento que encontraron son:

Si la ecuación diferencial fuese de la forma $y'(t) + ay(t) = t^2$ determinaron que el patrón de comportamiento de la función $G(t)$ (que es una función cuadrática), es el siguiente:

- El coeficiente que acompaña a t^2 tiene que estar dividido por a.
- El coeficiente que acompaña a t va dividido por a^2.

- El coeficiente constante va dividido por a^3.

Lo que es cierto, ya que la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$y(t) = \left(\frac{1}{a}\right)t^2 - \left(\frac{2}{a^2}\right)t + \frac{2}{a^3} + Ce^{-at},$$

lo que implica que la función $G(t) = \left(\frac{1}{a}\right)t^2 - \left(\frac{2}{a^2}\right)t + \frac{2}{a^3}$.

En el análisis a priori se tenía contemplado desarrollos como:

Si la ecuación diferencial es de la forma: $y'(t) + ay(t) = t^2$ entonces su solución es $y(t) = \left(\frac{1}{a}\right)t^2 - \left(\frac{2}{a^2}\right)t + \frac{2}{a^3} + Ce^{-at}$, lo que implica que $G(t) = \left(\frac{1}{a}\right)t^2 - \left(\frac{2}{a^2}\right)t + \frac{2}{a^3}$ lo que es una ecuación cuadrática cuyo vértice va cambiando según $V = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^3}\right)$ para $a > 0$, de acuerdo a la gráfica de la función $F(t) = t^2$.

Lo mismo pasa con la ecuación de la forma $ay'(t) + y(t) = t^2$ que tiene solución $y(t) = t^2 - 2at + 2a^2 + Ce^{-t}$, lo que implica que $G(t) = t^2 - 2at + 2a^2$ cuyo vértice va cambiando según $V = (a, a^2)$ para $a > 0$ respecto de la función $F(t) = t^2$.

Pese a que los estudiantes no dieron argumentos como estos, se evidencia que lograron percibir la génesis del problema, ya que fueron capaces de darse cuenta que el parámetro a de la ecuación diferencial era relevante en la forma de la solución de la ecuación diferencial y obviamente en el comportamiento tendencial de la solución respecto de la función $F(t)$.

4.3.2. Análisis del Momento 2

4.3.2.1. Actividad 5

En esta Actividad, se entregan la oferta y la demanda de un producto de consumo en términos del precio dada por las expresiones $Q_S = 60 + 2P$ y $Q_D = 120 - 3P$. Se les pide que con estos datos puedan encontrar la ecuación diferencial que mejor modela este fenómeno económico, además de analizar el comportamiento tendencial entre la solución $P(t)$ y la función $F(t)$. La actividad finaliza con la gráfica de la solución de la ecuación y la función.

Todos los grupos coincidieron en que el punto de equilibrio de la oferta y la demanda se da cuando $Q_S = Q_D$, es decir, cuando $60 + 2P = 120 - 3P$ lo que implica que para $P = 12$ las curvas de oferta y demanda se intersectan. Lo que causó problemas en esta actividad fue el planteamiento matemático del fenómeno económico, por lo que el profesor tuvo que intervenir y explicar de qué forma se podía plantear matemáticamente la situación. Posteriormente en el cálculo de la ecuación diferencial y posterior análisis de la solución de manera gráfica, fue rápida para ellos, amparados lógicamente en el trabajo realizado con anterioridad en las actividades del Momento1.

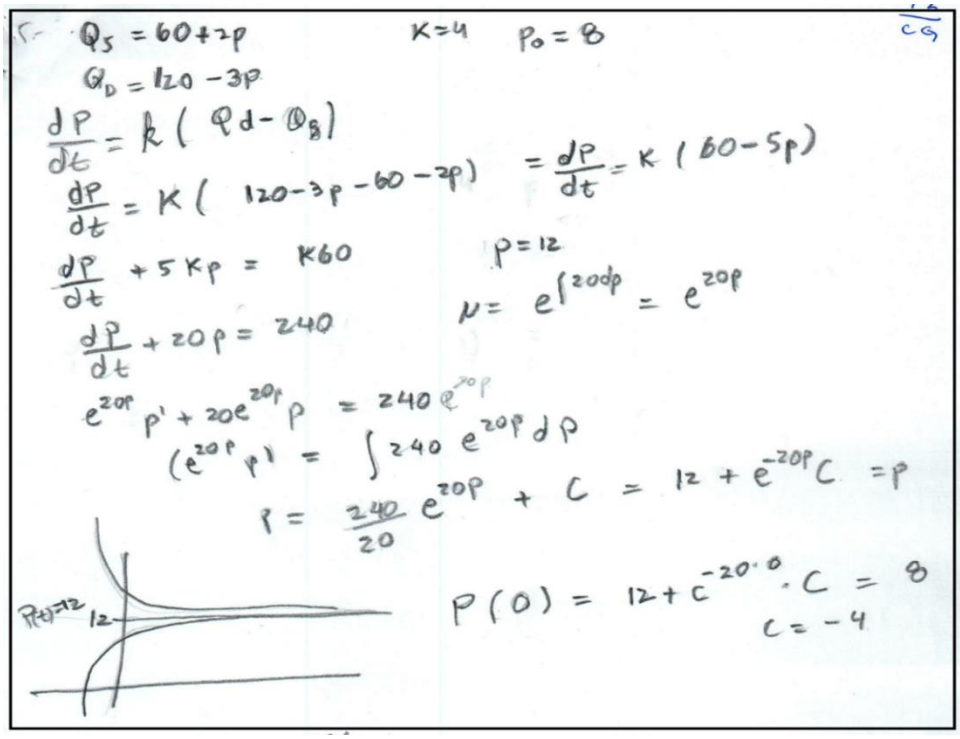


Figura 51: Actividad 5, Grupo1.

En la Figura 48 se puede observar que el Grupo 1 encuentra la solución general de la ecuación diferencial, y posteriormente impone la condición inicial para encontrar el valor de la constante

C, pero, no explícita la solución particular de la ecuación diferencial. Esto les impide ver el comportamiento de esta solución respecto del equilibrio del problema de oferta y demanda, impulsados quizás por las actividades del Momento 1, terminando con la gráfica de una función que no existe para este problema en particular.

Por otro lado, los grupos 2, 3 y 4 hicieron algún tipo de comentario respecto del comportamiento de la solución cuando la variable independiente tiende al infinito.

En particular el Grupo 2, encuentra la solución particular de la ecuación diferencial y luego la gráfica junto con el precio de equilibrio, haciendo un pequeño comentario respecto al comportamiento tendencial de la solución $P(t)$ y la función $F(t)$, "*por lo tanto se estabiliza*". Esto se puede evidenciar en la Figura 49.

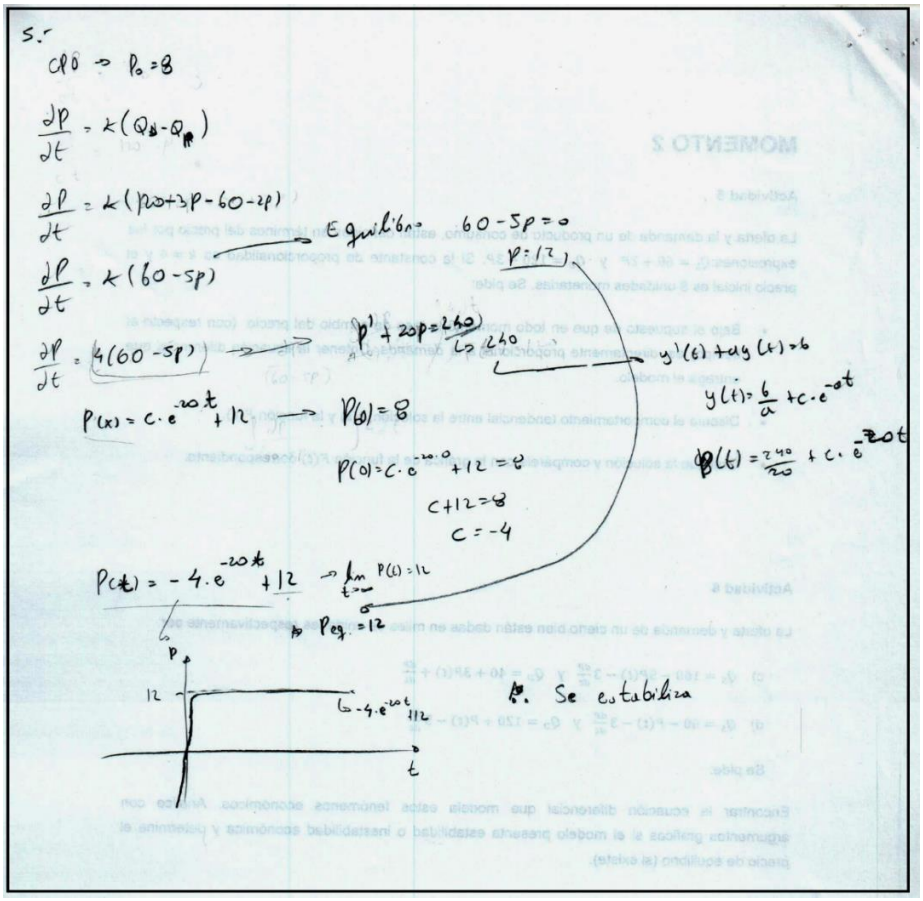


Figura 52: Actividad 5, Grupo 2

El Grupo 3 hace el mismo desarrollo algebraico que el resto de los Grupos para encontrar la solución general y la particular de la ecuación diferencial, pero, a diferencia de los otros no hicieron ningún gráfico para la solución particular, siendo que el problema pedía explícitamente

este hecho. También hacen un comentario respecto del comportamiento tendencial de la solución, dicen, "*cuando t tiende a infinito $P(t)$ nos da el precio*". Esto como una forma de decir que la solución tiende al precio de equilibrio cuando t tiende a infinito (ver Figura 50).

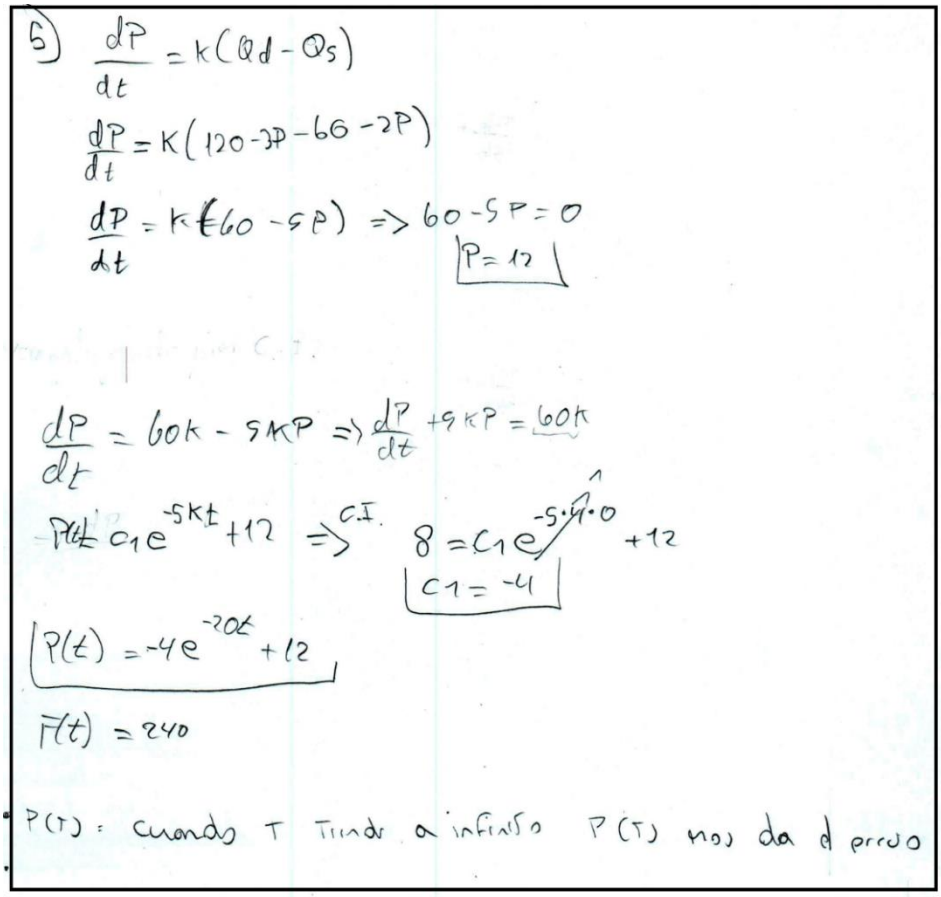


Figura 53: Actividad 5, Grupo 3.

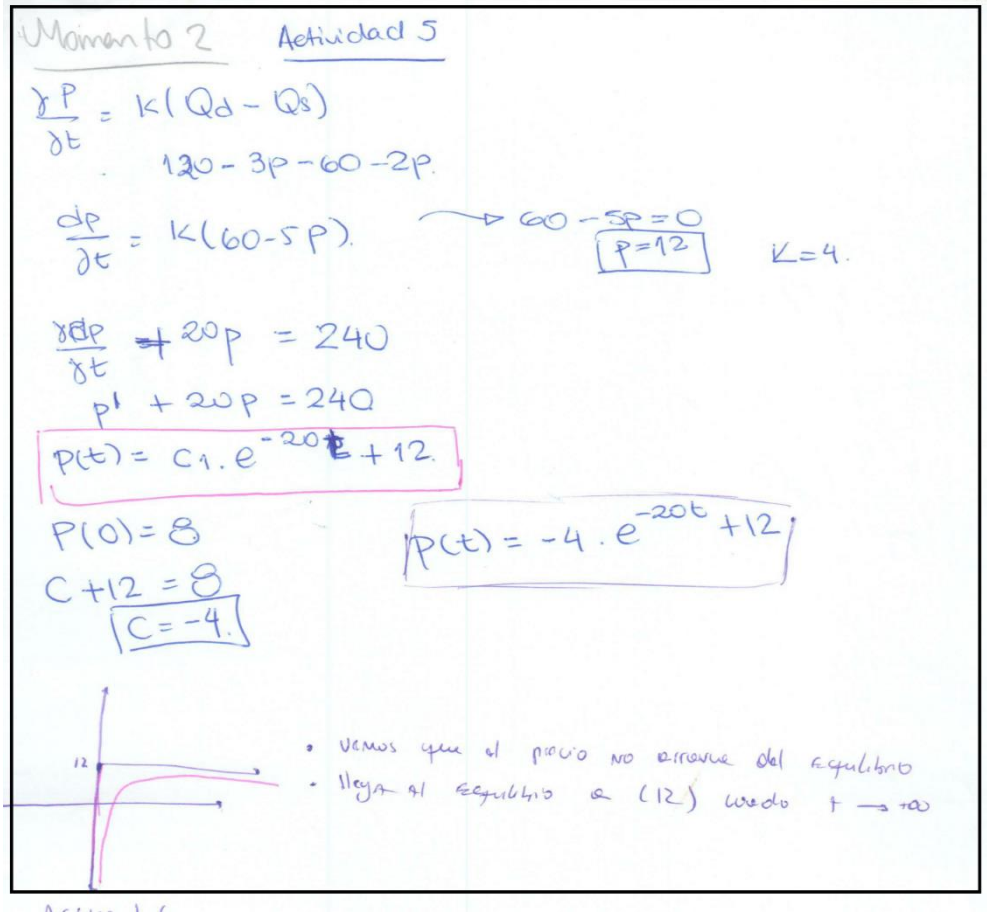


Figura 54: Actividad 5, Grupo 4.

Por otro lado, según la Figura 51 se puede ver que el Grupo 4 encuentra la solución general y particular de la ecuación diferencial y también realizan la gráfica de esta, junto con el precio de equilibrio. Luego haciendo uso de esta gráfica hacen el siguiente análisis "*vemos que el precio no arranca del equilibrio. Llega al equilibrio a (12) cuando* $t \to \infty$", que es exactamente lo que se esperaba que contestaran los estudiantes en esta actividad.

4.3.2.2. Actividad 6

Acá los estudiantes de cada grupo no tuvieron problema en plantear la ecuación diferencial ya que se les entregaba la oferta y la demanda de un producto en términos del número de unidades (la dificultad del planteamiento de la ecuación diferencial fue resuelta por el profesor en la actividad anterior). Con esta actividad deberían lograr resignificar el comportamiento tendencial de las soluciones con el fenómeno de la estabilidad e inestabilidad económica y el precio de equilibrio.

Todos los grupos lograron resolver la ecuación diferencial del modelo, pero, no encontraron la solución particular de la ecuación diferencial del problema de valor inicial. Luego hicieron el análisis con argumentos basados en gráficas de soluciones para distintos valores de la constante C, salvo el grupo 3.

Con respecto al comportamiento tendencial de la solución y a la condición de estabilidad o inestabilidad, el Grupo 1 no hace comentarios al respecto, el Grupo 2 comenta: "*se estabiliza*", el Grupo 3 pese a no hacer ninguna gráfica comenta: "*nuestro precio en equilibrio es 15, es un modelo que presenta estabilidad económica. Si representa estabilidad económica, ya que la gráfica representa complementos perfectos.*" Y el grupo 4 no hace comentarios.

A continuación en las Figuras 52, 53 y 54 se muestran los análisis planteados por los Grupos 1, 2 y 3.

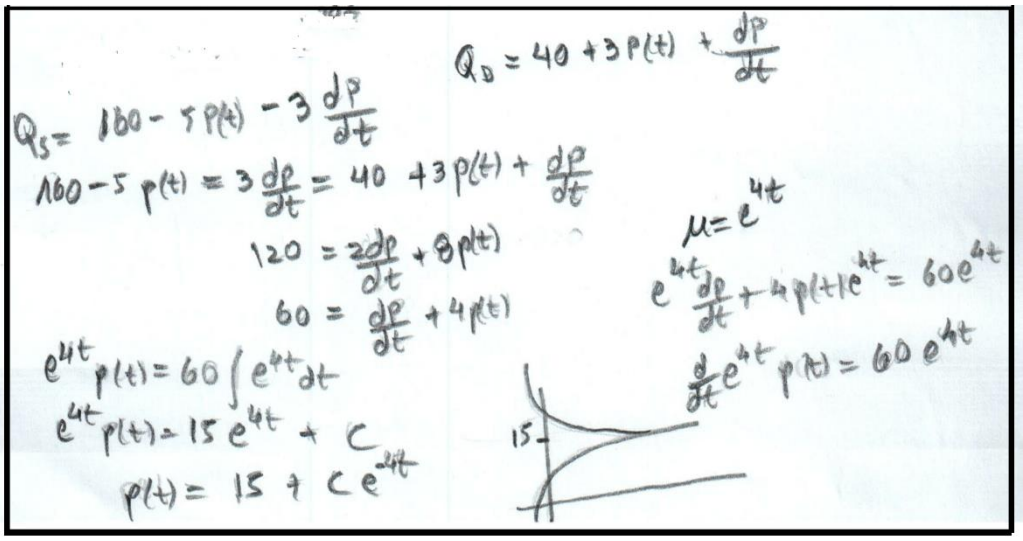


Figura 55: Actividad 6, Grupo 1.

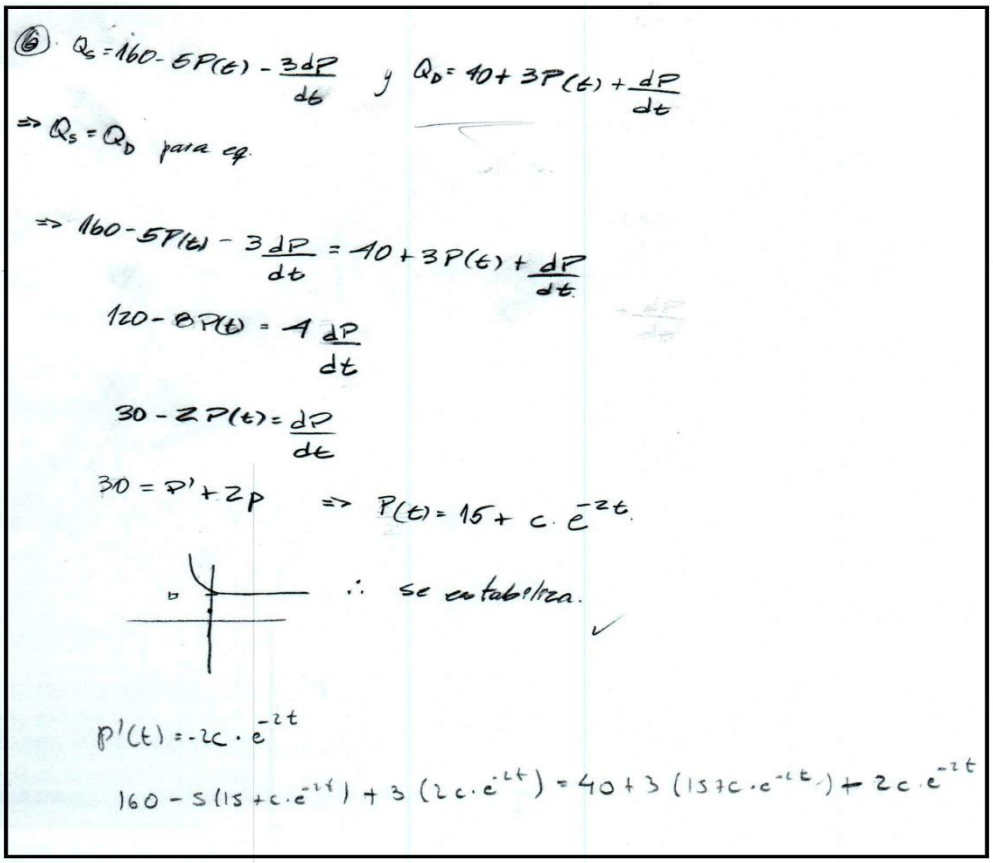


Figura 56: Actividad 6, Grupo 2.

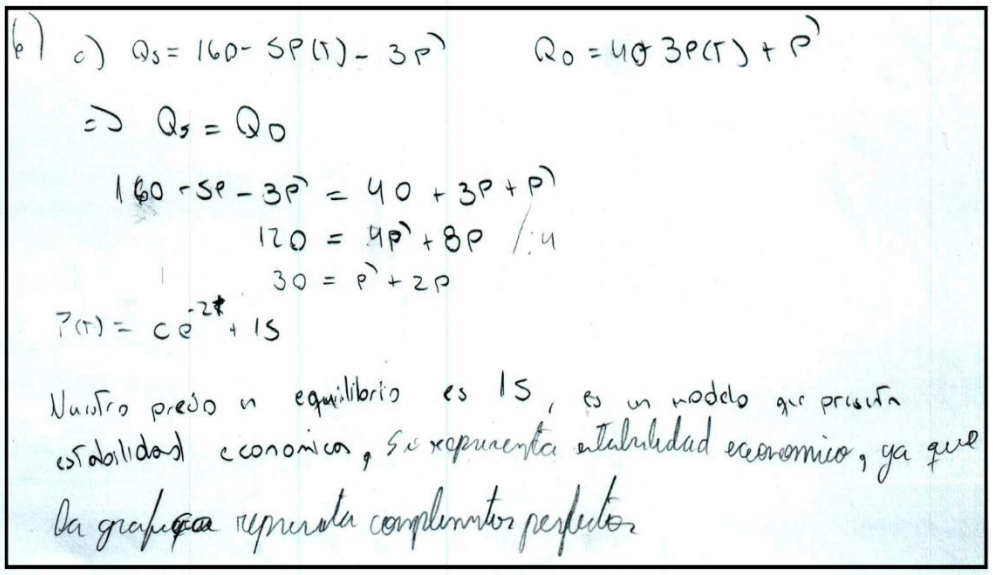


Figura 57: Actividad 6, Grupo 3.

Podemos decir que con esta Actividad se logró exactamente lo que se pedía, es decir, que los estudiantes lograran resignificar el comportamiento tendencial de las soluciones en un problema

de oferta – demanda, en el cual se debería señalar si el modelo era estable o inestable económicamente hablando.

4.3.2.3. Actividad 7

Los cuatro grupos realizaron rápidamente esta Actividad, ya que lograron identificar y utilizar los patrones que se identificaron en la Actividad 3 y 4 del Momento 1. No realizaron ningún cálculo de soluciones, sólo identificaron la forma de la ecuación diferencial que modelaba un problema económico y lo relacionaron con la forma que podía tener la solución. A continuación en la Figura 55 se muestra la solución de unos de los grupos. Cabe recalcar que todos los grupos contestaron exactamente lo mismo.

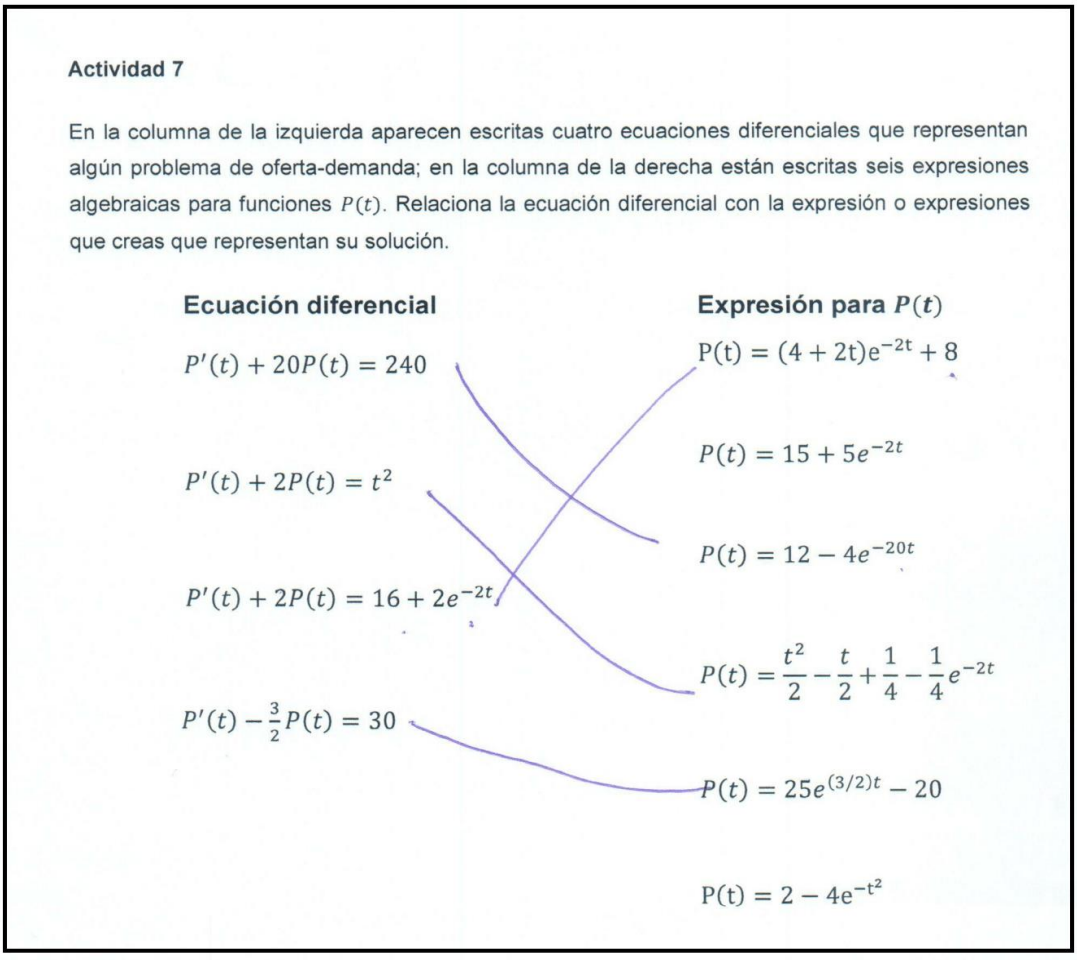


Figura 58: Actividad 7, Momento 2.

4.3.3. Análisis del Momento 3

4.3.3.1. Actividad 8

Tal como se esperaba los estudiantes hicieron uso de los aprendizajes dados por los dos momentos anteriores para responder la Actividad 8. No era necesario calcular las soluciones de las ecuaciones diferenciales para darse cuenta de la forma de la gráfica de dicha solución. Lo que ayuda a encontrar la gráfica correspondiente a la ecuación diferencial, es encontrando la forma del punto de equilibrio (Actividad anterior) y el signo del parámetro a, que corresponde a lo estudiado en la actividad 2 y3 del Momento 1.

Luego fueron capaces de relacionar la ecuación diferencial que representa un problema de oferta-demanda con la gráfica de la solución (ver Figura 56).

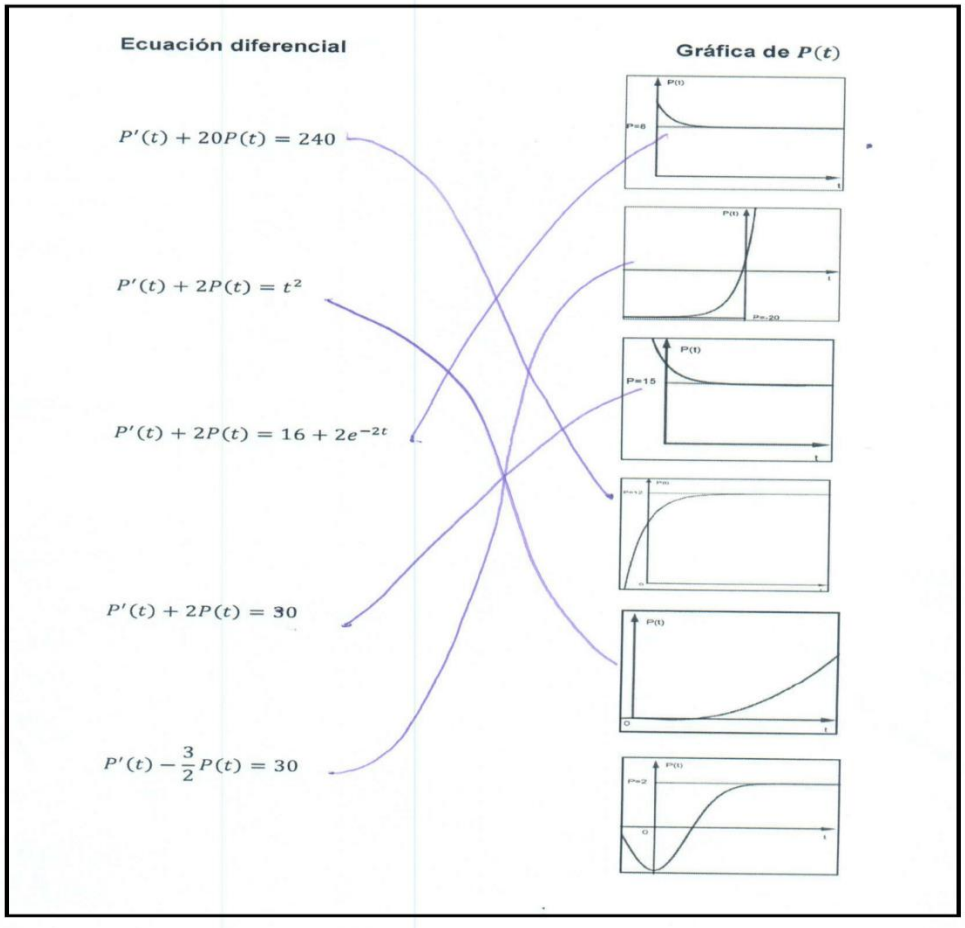


Figura 59: Actividad 8, Grupo 4

4.3.3.2. Actividad 9

En esta Actividad los estudiantes necesitaron un nivel de abstracción mayor que en la Actividad anterior, relacionaron las ecuaciones diferenciales con su gráfica y su solución, es decir, lograron identificar y analizar las relaciones que posibilitan la interacción entre los contextos algebraico y gráfico (ver Figura 57).

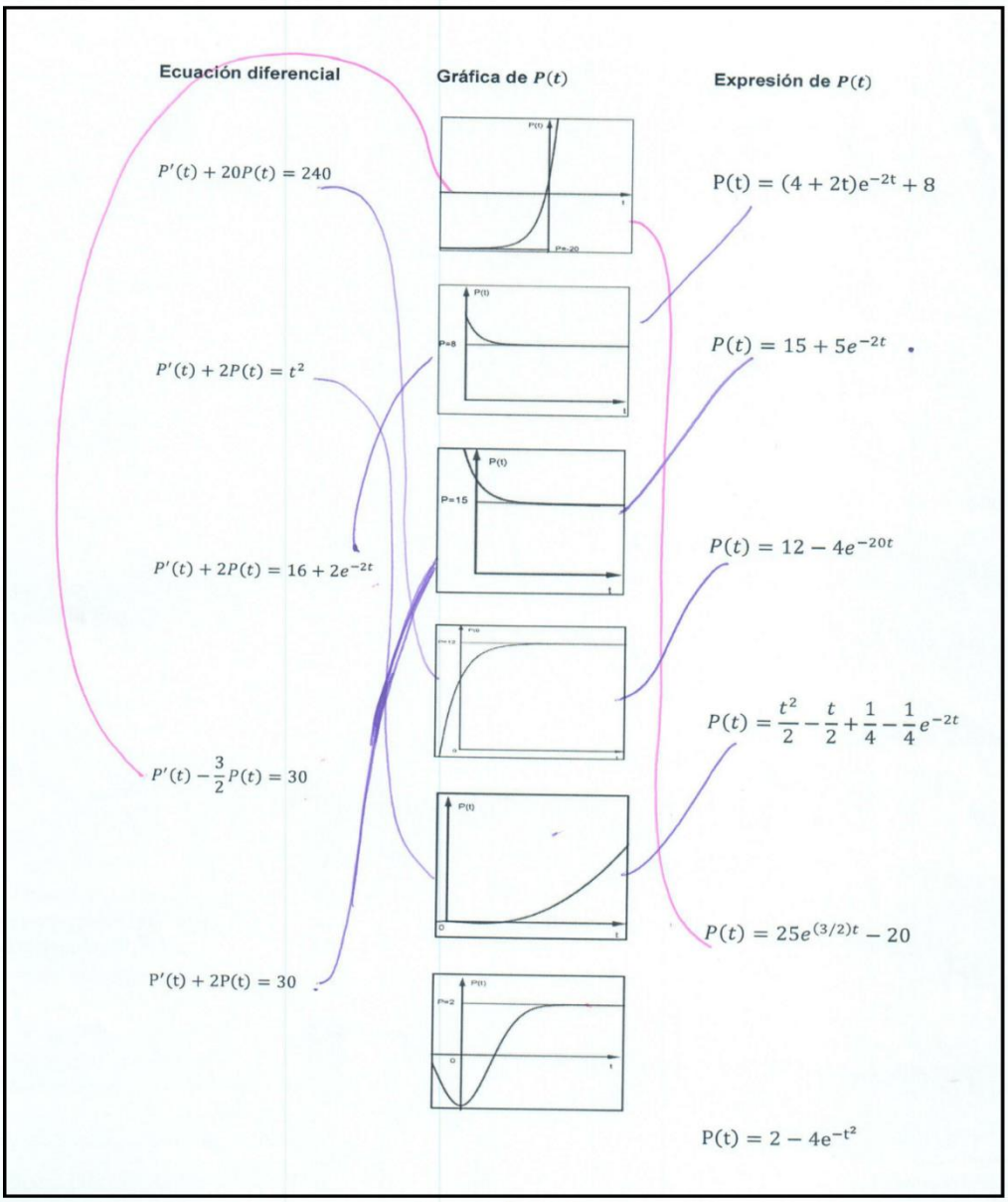


Figura 60: Actividad 9, Grupo 4.

Para desarrollar esta actividad los estudiantes tuvieron que relacionar las actividades de los Momentos anteriores. Con esta actividad se puede dar cuenta de que los estudiantes lograron hacer una exploración entre la solución de la ecuación, con la ecuación diferencial y su gráfica.

Se logró que los estudiantes pudieran ver las ecuaciones diferenciales desde un punto de vista distinto al que les impone el dME, es decir, desde un punto de vista cualitativo enfocado al contexto de su ámbito de su quehacer profesional.

Cabe destacar que con la experimentación del diseño se constata que en general los estudiantes de ingeniería comercial no tienen problemas al trabajar la parte algebraica - algorítmica, puesto que todos los grupos obtuvieron las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden planteadas utilizando la fórmula de Leibnitz. De manera teórica, esto se puede interpretar que en los estudiantes prevalece el dME que expresa el curso de Matemáticas 023, pues se desarrollan análisis cuantitativos las ecuaciones diferenciales. En otras palabras, este planteamiento señala que hay una adherencia a la hegemonía que impone el dME.

Aquí vienen los efectos: Tal adherencia no permitió desarrollar otra alternativa de análisis de las soluciones para las ecuaciones planteadas, como por ejemplo, trabajar con las propiedades geométricas de la derivada (campos de direcciones) para obtener información eficiente acerca del comportamiento de las soluciones en los problemas planteados.

Sin embargo, el uso del software GEOGEBRA ofreció una alternativa distinta de análisis, en el sentido de que pudieron ampliar su panorama respecto de la ecuación diferencial, ya que además de tener la solución de la ecuación ahora contaban con la gráfica de esta, permitiéndoles analizar la ecuación diferencial de manera cualitativa. Este análisis cualitativo fortaleció el desarrollo posterior de las siguientes actividades.

Una situación a destacar es que los cuatro grupos lograron responder de forma correcta todas las preguntas de la situación. Se logró una buena recepción y mucho entusiasmo de parte de ellos. Con esto, de manera general, se concluye que la situación de aprendizaje logró llegar a todos los estudiantes en el sentido de resignificar el uso de las ecuaciones diferenciales para determinar la estabilidad de un modelo de oferta/demanda entendiendo que este tipo de actividades cercanas a su quehacer profesional están alejadas de las impuestas en su currículo de MAT 023.

CAPÍTULO VI: Conclusiones

CAPÍTULO V: Conclusiones

5.1. Conclusiones

El objetivo general de este proyecto de tesis ha sido rediseñar una situación de aprendizaje que permita a estudiantes de Ingeniería Comercial resignificar las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para tal cometido, bajo el modelo dinámico del economista León Walras (problema de oferta y demanda) como lo situacional del rediseño, se usó la epistemología del comportamiento tendencial de las funciones que reportan Cordero et al (2016). En este sentido, el proyecto apuntó a darle un significado distinto al estudio de las ecuaciones diferenciales en la comunidad de Ingenieros Comerciales considerado un análisis cualitativo, es decir, se establecieron relaciones entre el comportamiento de la solución de la ecuación y los coeficientes de un problema económico de oferta y demanda para luego concluir a través de la gráfica de las soluciones si ese problema tiene o no estabilidad económica. Por lo tanto, la gráfica de la solución es un comportamiento que se estudia de forma completa y es un significado de las ecuaciones diferenciales.

Con este estudio se plantea que impartir la asignatura Mat023 enfocándose en la bibliografía del curso, así como en algún texto sugerido por la coordinación académica, influye en la forma de enseñar los temas, ya que como se presentó en el capítulo I la literatura parte de la presentación formal de las ecuaciones diferenciales seguidos de las formas de resolución de la ecuación y luego realizan algún tipo de aplicación en la física o al mundo de la Ingeniería. Esto presupone una práctica de enseñanza que, influenciada por los textos, privilegia los procedimientos algebraicos por sobre la comprensión y uso de los conceptos o la gráfica.

Por lo tanto, si se desea contribuir a la comprensión de la visualización y funcionalidad de las ecuaciones diferenciales por los estudiantes de Ingeniería Comercial, es indispensable modificar trascendentemente el ambiente en el aula; tratar de crear ambientes de aprendizaje donde se enseñe a los estudiantes a considerar soluciones cualitativas y a incorporar argumentaciones que corresponden a categorías de una matemática funcional, lo que complementa los tratamientos algebraicos y algorítmicos que se están realizando.

Con el problema de la estabilidad de la oferta y demanda (Walras, 1874), se caracterizó lo propio de la comunidad de conocimiento a la cual pertenecen los Ingenieros Comerciales en formación. En ese sentido, se reconoce una intimidad en la construcción de conocimiento de esta comunidad, en tanto que reconoce el argumento del comportamiento tendencial de las soluciones en la situación económica de oferta y demanda.

Sin duda esta es una situación donde se presenta el conocimiento desde una perspectiva distinta a la que propone la enseñanza tradicional, ya que permite fortalecer significados funcionales de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en estudiantes de Ingeniería Comercial, lo cual contribuye de manera significativa en la resignificación de su conocimiento matemático.

La situación que se rediseñó constó de tres momentos: analizar los distintos comportamientos que tiene la solución tras variaciones de los parámetros de la Ecuación Diferencial; resignificar el comportamiento tendencial de las soluciones (CTS) de una Ecuación Diferencial en el modelo de Oferta-Demanda; y relacionar la Ecuación Diferencial con su solución y su gráfica, además de analizar la estabilidad o inestabilidad del modelo económico. Con cada una de las actividades del Momento 1 se pretende que el estudiante desarrolle y establezca patrones de comportamiento de la función y de la gráfica según se varían los parámetros de la ecuación diferencial. Con las actividades del Momento 2 se pretende resignificar los comportamientos encontrados en las actividades del Momento 1 en problemas específicos de la ley de oferta y demanda. Por último, en las actividades del Momento 3, se pretende hacer explícito el aprendizaje logrado en los dos Momentos anteriores, en tanto que se relaciona la ecuación diferencial proveniente de un problema económico con su solución y su gráfica.

Cabe mencionar que en la experimentación del rediseño los entrevistados expresaron entusiasmo al realizar la secuencia, acrecentándose cada vez más a medida que transcurría el trabajo en ésta. Con lo reportado en el análisis a posteriori se estima que lograron una visión distinta del significado tradicional de las ecuaciones diferenciales, que resulta funcional al quehacer de esta comunidad de conocimiento.

5.2. Sugerencias para un rediseño de la situación

En la configuración del rediseño de situación reportada en este proyecto de tesis e se usó el libro de Cordero et al (2016) “El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica”. En este libro se reporta una epistemología y algunos diseños de situación, los cuales fueron modificamos y ajustados a lo situacional del problema de oferta y demanda (Walras, 1874).

Sin duda esta situación admite mejoramientos y se puede nutrir de otros trabajos y otras experiencias que se puedan rescatar del aula. De hecho en un principio la situación se había pensado que debía realizarse sin uso de software para graficar, pero por razones de tiempo y de objetivos se incorporó el Geogebra como ayuda para realizar dichas tareas. De hecho, Guerrero et al, (2010) manifiesta que “*mediante la implementación conjunta de los registros algebraico y gráfico con ayuda de un medio computacional desde el inicio del curso de ecuaciones diferenciales, se podrán construir gradualmente los conceptos asociados a una ecuación*

diferencial y el significado funcional de la solución o soluciones de las ecuaciones diferenciales" (Guerrero et. al, 2010, pp. 348).

Cabe señalar que en una primera versión la secuencia estaba diseñada para experimentarla en tres módulos de clase de una hora y media cada uno, pero por asuntos relacionados a la programación del curso se decidió llevarlo a sólo dos módulos, es decir, 3 horas cronológicas. Para lograr que este recorte de horas en la experimentación no afectara la intencionalidad de ésta, se ajustaron algunas actividades del rediseño. Es así como:

En el Momento 1 por ejemplo, específicamente en la Actividad 1 se eliminaron las ecuaciones diferenciales cuya función a la cual estaban igualadas eran expresiones con $\cos t$,$\sin t$, la función parte entera y polinomios de grado mayor a 1. En la Actividad 2 se eliminaron aquellas ecuaciones diferenciales cuya función involucraba cambios en la variable independiente, como por ejemplo, $F(at)$ o $F(t+a)$ que sin duda habría enriquecido la discusión, pero se prefirió dejarlo para un futuro trabajo. La Actividad 3 y 4 se dejaron tal como se había pensado desde un principio.

En el Momento 2, la Actividad 5 fue la única que tuvo cambios. Acá se decidió eliminar aquel problema económico que presentaba inestabilidad económica, ya que con el primer problema de esta actividad, más las actividades que se presentaron el Momento 1, al estudiante le quedaba claro la tendencia de la función y cuando decidir si una cierta función ligada a un problema de oferta y demanda presentaba estabilidad o inestabilidad económica.

El Momento 3 quedó tal como se había concebido en un principio, ya que se observó que la incorporación de los Momentos 1 y 2 en estas actividades fue inmediata. Luego lograron la resignificación de la ecuación diferencial.

Los cambios realizados a la situación inicial permitió realizar un rediseño de la situación experimentada (ver Anexo). Para la implementación de este rediseño de situación se tuvo en cuenta lo situacional de la comunidad de conocimiento inicial (ingenieros comerciales), lo cual es evidentemente una limitación de esta situación.

Pero se pueden hacer nuevos rediseños de esta situación, como por ejemplo, agregar funciones sinusoidales a las ecuaciones diferenciales logrando ampliar la comunidad de conocimiento (Ingenieros civiles y/o Mecánicos) a los cuales se puede experimentar.

Bibliografía

Bibliografía

Arslan, S., Chaachoua, H. y Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations: What effects of a teaching to algebraic dominance http://www.ieme-organisers.dk/tsg12/papers/arslan-tsg12.pdf.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995a). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R., Moreno L.,Gómez P., Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9 (3), 281–308.

Biembengut, M., & Hein, (2007). Modelagem Matemática no Ensino. Sao Paulo, Brasil: Contexto.

Blanchard, P. (1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint. The College Mathematics Journal, 25(5), pp. 385-395.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Rechercher en Didactique des Mathématiques 7(2), 33-115.

Buchanan, J.L., Manar, T.J. y Lewis, H. (1991), en Zimmermann, W. Cunnigham, S. (eds). Visualilization in Teaching and learning Mathematics. Mathematical Association of America, USA, pp. 139-146.

Buendía, G. (2010). El uso de las gráficas para resignificar elementos de las ecuaciones diferenciales lineales. Enviado para su publicación Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Cámara, A. (2000). El sistema económico de León Walras. Rect@, Actas(8), 235-306.

Cantoral, R. (1990). Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analítica. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 6(1). 27-42.

Cantoral, R. (2002). Enseñanza de la matemática en la educación superio. Revista Sinéctica, 19, Recuperado de www.portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Historico/019

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudio sobre la construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Chiang, A. C. (1999). *Metodos Fundamentales de Economía Matemática*. Tercera edición. McGraw-Hill/Interamericana de Mexico.

Cordero, F. (1994). Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento de cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1), pp. 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). Las gráficas de la funciones como una argumentación del Cálculo. Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica. Edición especial CASIO. Tercera edición.

Cordero, F., Muñoz, G., Ruiz, B., Suarez L. (2005) Comportamiento tendencial de las funciones: La linealidad de los polinomios. Editorial Trillas. México.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del dME. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19 (pp. 824 – 830). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nellinsegnamento-apprendimento della matematica. La Matematica e la sua Didattica, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama \& A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15(3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva, H. y Soto, D. (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Gedisa Editorial. Primera edición.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, E. J. y Zaldivar, J. (2016). El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentaci\'on gr\'afica. Gedisa Editorial. Primera edici\'on.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F. (2006). *La modellazione e la rappresentazione grafica nell´insegnamento-apprendimento della matematica. La Matematica e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15(3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Gedisa Editorial. Primera edición.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, E. J. y Zaldivar, J. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*. Gedisa Editorial. Primera edición.

Del Valle, T. (2015). Los usos de la optimización: Un marco de referencia y la teoría socioepistemológica. Valparaíso, Chile.

Douady, R. (1995): La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento, en P. Gómez (ed.): Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 61-96.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Peter Lang.

Farfán, R.M. (1993). Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Ferruzzi, E. C., Goncalves, M. B., Hruschka, J. y de Almeida, L. M. W. (2004). *Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnología.* Memorias del World Congress on Engineering and Technology Education. Sao Paulo, Brasil.

Gollwitzer, H. (1991). Visualization in differential equations, en Zimmermann, W. Cunnigham, S. (eds). Visualilization in Teaching and learning Mathematics. Mathematical Association of America, USA, pp. 149-156.

Guerrero, C. (2008). Interpretación de las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Estrategias y Dificultades. Tesis de maestría. Cinvestav, México.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Vol.: 28 Núm.:3.

Guzmán, I (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a las funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1 (1), 5 - 21.

Hernandez, A. (1995). Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales. Tesis de doctorado. Cinvestav, México.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genéses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9 – 24.

Massad, C. (2013). Mis clases de economía y algo más…, Microeconomía y Macroeconomía. Editorial Universitaria. Primera Edición.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad de conocimiento. En flores, R. (Ed). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (25), pp. 1023-1030. México: CLAME.

Mendoza, J., Cordero, F. (2014). Matemática Funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de Ingenieros Civiles. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1557-1563). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica: Ejemplos e Ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones (pp. 61-88). D.F., México: Lectorum.

Moreno, J. y Laborde, C. (2003). Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différéntielles dans un environnement de géométrie dymamique. Actes du Congrès Europèen ITEM, Reims, France.

Rivera, M. y Arrieta, J. (2007). La algoritmia; una práctica social de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales. En C. Crespo (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, pp. 456-460. México: CLAME A.C.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1), 89 - 112.

Silva-Crocci, H (2010). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Silva-Crocci, H (2013). Matemática Educativa en Latinoamérica: Adherencia e Identidad Disciplinar. Memoria Pre.Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Silva-Crocci, H. (2014). La identidad disciplinar en un programa de investigación latinoamericano de matemáticos educativos: Resistencia, organización y adherencia. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Silva-Crocci, H. (2017). Matemática Educativa y la identidad disciplinar en programas de formación inicial de profesores de matemáticas chilenos. En L. Pino-Fan, A. Poblete y V. Díaz (Eds.), Perspectivas de la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas en Chile (pp. 23-44). Osorno, Chile: Cuadernos de Sofía.

Soto, D. (2014). La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D., y Cantoral, R. (Diciembre de 2015). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. Boletín de Educación Matemática, 28(50), 1525-1544, ISSN 0103-636X.

Suárez D. y Dávila P. (2012). Documentación narrativa de experiencias pedagógicas: una modalidad de investigación interpretativa y una estrategia de formación de docentes. En de Souza, E. (org.). Educacao e ruralidades: memórias e narrativas (auto) biográficas. Salvador: EDUFBA.

Tall, D., & West, B. (1992). Graphic Insight into Mathematical Concepts. The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching, B. Cornu.& A. Ralston (Ed.), UNESCO, Par\'{i}s, 117–123.

Walras, L. (1874). Éléments d'Économie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale (1st. part) Laussane: Guillaumin.

ANEXOS

DISEÑO DE LA SITUACIÓN APLICADO

MOMENTO 1

Actividad 1

Considere el siguiente grupo de ecuaciones diferenciales:

$$y'(t) + y(t) = F(t), \text{ donde}$$

$$F(t) = b \quad b \text{ constante.}$$
$$F(t) = t$$
$$F(t) = e^{bt} \quad b \neq 1, b \in IR$$

Halle la solución para cada una de las ecuaciones diferenciales.

Discuta el comportamiento tendencial entre la solución $y(t)$ y la función $F(t)$.

Grafique cada una de las soluciones y compárela con la gráfica de la función $F(t)$ correspondiente. Para realizar las gráficas de las soluciones puede hacer uso de Geogebra.

Actividad 2

Considere la siguiente secuencia de ecuaciones diferenciales para algunos casos particulares de $F(x)$:

a) $y'(t) + ay(t) = b$
$ay'(t) + y(t) = b$

b) $y'(t) + ay(t) = t$
$ay'(t) + y(t) = t$

c) $y'(t) + ay(t) = e^{bt}$
$ay'(t) + y(t) = e^{bt}$

Analice las diferentes situaciones, exclusivamente con argumentos gráficos. Utilice Geogebra.

Actividad 3

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $ay'(t) + y(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-\left(\frac{t}{a}\right)}$.

En la siguiente tabla, una la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo, para cada ecuación diferencial.

Ecuación diferencial	$\boldsymbol{G(t)}$
$2y'(t) + y(t) = \cos t$	$t^2 - t + 6$
$3y'(t) + y(t) = t^2 + 5t + 3$	$\frac{1}{4}(t + 1)$
$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}sen\ t$
$5y'(t) + y(t) = sen\ t$	$\frac{1}{26}sen\ t - \frac{5}{26}\cos t$

Actividad 4

Una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $y'(t) + ay(t) = F(t)$ tiene como solución a la función $y(t) = G(t) + Ce^{-at}$.

En la siguiente tabla, una la ecuación diferencial a través de una línea con la función $G(t)$ correspondiente a la solución.

Justifique la elección que hizo para cada ecuación diferencial.

Ecuación diferencial	$G(t)$
$y'(t) + 2y(t) = t$	$\frac{t}{2} - \frac{1}{4}$
$y'(t) + 3y(t) = t^2 + 5\mathrm{t} + 3$	$\frac{5}{26} sen\, t - \frac{1}{26}\cos t$
$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)$	$\frac{t^2}{3} + \frac{13t}{9} + \frac{14}{27}$
$y'(t) + 5y(t) = sen\, t$	$\frac{1}{5} sen\, t + \frac{2}{5}\cos t$

MOMENTO 2

Actividad 5

La oferta y la demanda de un producto de consumo, están definidas en términos del precio por las expresiones:$Q_S = 60 + 2P$ y $Q_D = 120 - 3P$. Si la constante de proporcionalidad es $k = 4$ y el precio inicial es 8 unidades monetarias. Se pide:

- Bajo el supuesto de que en todo momento la tasa de cambio del precio (con respecto al tiempo) es, directamente proporcional a la *demanda*. Obtener la ecuación diferencial que entrega el modelo.
- Discuta el comportamiento tendencial entre la solución $P(t)$ y la función $F(t)$.
- Grafique la solución y compárela con la gráfica de la función $F(t)$ correspondiente.

Actividad 6

La oferta y demanda de un cierto bien están dadas en miles de unidades respectivamente por:

$Q_S = 160 - 5P(t) - 3\frac{dP}{dt}$ y $Q_D = 40 + 3P(t) + \frac{dP}{dt}$ con $P(0) = 20$ dólares.

Se pide:

Encontrar la ecuación diferencial que modela estos fenómenos económicos. Analice con argumentos gráficos si el modelo presenta estabilidad o inestabilidad económica y determine el precio de equilibrio (si existe).

Actividad 7

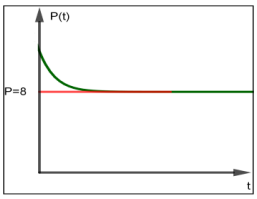
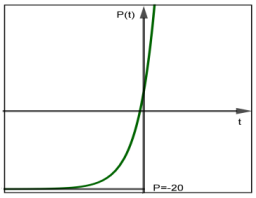
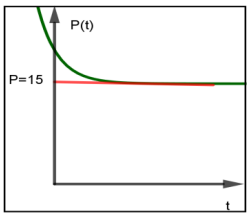
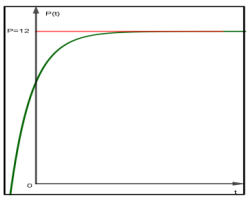
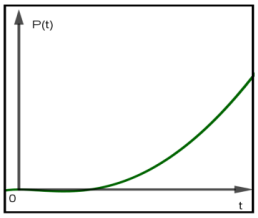
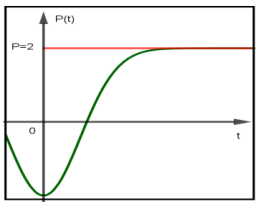
En la columna de la izquierda aparecen escritas cuatro ecuaciones diferenciales que representan algún problema de oferta-demanda; en la columna de la derecha están escritas seis expresiones para la función $P(t)$. Relaciona la ecuación diferencial con la expresión o expresiones que creas que representan su solución.

Ecuación diferencial	**Expresión para $P(t)$**
$P'(t) + 20P(t) = 240$	$\mathrm{P(t)} = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$
$P'(t) + 2P(t) = t^2$	$P(t) = 15 + 5e^{-2t}$
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$	$P(t) = 12 - 4e^{-20t}$
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$	$P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$
	$P(t) = 25e^{(3/2)t} - 20$
	$\mathrm{P(t)} = 2 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$

MOMENTO 3

Actividad 8

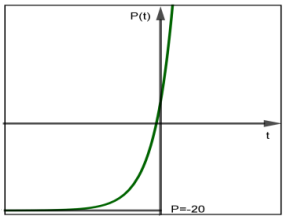
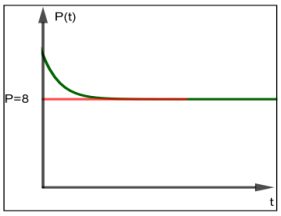
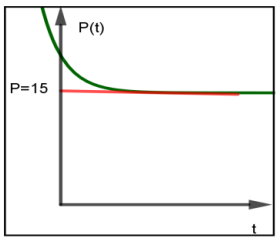
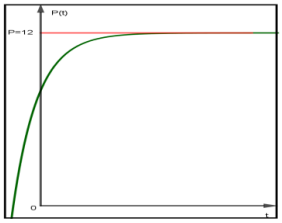
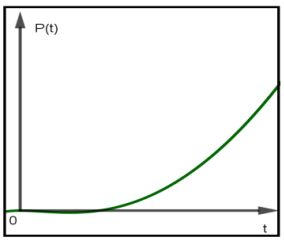
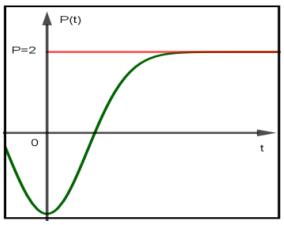
En la columna de la izquierda aparecen escritas cinco ecuaciones diferenciales que representan algún problema de oferta-demanda; en la columna de la derecha están las gráficas de seis funciones $P(t)$. Debes relacionar la ecuación diferencial con la gráfica o gráficas que creas que representan su solución. Para el análisis debes considerar si el modelo presenta estabilidad o inestabilidad económica, además del precio de equilibrio (si existe).

Ecuación diferencial	**Gráfica de $P(t)$**
$P'(t) + 20P(t) = 240$	
$P'(t) + 2P(t) = t^2$	
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$	
	
$P'(t) + 2P(t) = 30$	
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$	

:

Actividad 9

Relacione las tres columnas:

Ecuación diferencial	Gráfica de $P(t)$	Expresión de $P(t)$
$P'(t) + 20P(t) = 240$		$\mathrm{P(t)} = (4 + 2\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 8$
$P'(t) + 2P(t) = t^2$		$P(t) = 15 + 5e^{-2t}$
$P'(t) + 2P(t) = 16 + 2e^{-2t}$		$P(t) = 12 - 4e^{-20t}$
$P'(t) - \frac{3}{2}P(t) = 30$		$P(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$
		$P(t) = 25e^{(3/2)t} - 20$
$\mathrm{P}'(\mathrm{t}) + 2\mathrm{P}(\mathrm{t}) = 30$		$\mathrm{P(t)} = 2 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$