UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Caracterización de la Competencia Comunicativa Matemática de los Profesores de Educación Matemática de Chile

Hank Kael Apablaza Apablaza

Profesora tu: Claudia Lorena Vargas Díaz

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Santiago – Chile

2018

© Hank Kael Apablaza Apablaza, 2018

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra sólo con fines académicos y no comerciales, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Hoja de calificación

Caracterización de la Competencia Comunicativa Matemática de los Profesores de Educación Matemática de Chile

Hank Kael Apablaza Apablaza

Este trabajo de graduación fue elaborado bajo la supervisión de la profesora tutora Sra. Claudia Vargas Díaz del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora:

_____

Claudia Vargas Díaz
Profesora Tutora

_____

Rayén Antillanca Quintrequeo
Profesora Informante

_____

Rafael Labarca Briones
Director del Departamento

_____

Marco Villalta Paucar
Profesor Informante

Agradecimientos

"Gracias a la vida, que me ha dado tanto,
me dio el corazón, que agita su marco,
cuando miro el fruto, del cerebro humano…"

Violeta Parra

Estas líneas son para agradecer a todas aquellas personas que creyeron en este proyecto y alentaron a seguir trabajando en él.

En primer lugar a mi profesora tutora, Sra. Claudia Vargas-Díaz, por el tiempo destinado a las reuniones, por creer siempre en mis capacidades, por sus constantes motivaciones y palabras de aliento y por impulsarme siempre a seguir adelante de la manera más apropiada y rigurosa.

En segundo lugar a los miembros de la comisión calificadora, Sra. Rayén Antillanca y Sr. Marco Villata, por el tiempo destinado a la revisión de este trabajo, obteniendo como consecuencia comentarios y recomendaciones para el mejoramiento del escrito de la tesis.

En tercer lugar a los profesores que participaron de esta investigación mediante la grabación de una de sus clases o respondiendo la encuesta, a los jefes de las carreras de pedagogía en matemática que destinaron parte de su tiempo en responder la encuesta.

Por último, Proyecto DICYT-USACH 31633VD Caracterización y Desarrollo de Competencias Comunicativas en la Formación de Profesores de Matemática, financiado por la Vicerrectoría de Investigación, Desarrollo e Innovación y Proyecto "Fachbezogene Partnerschaften" en Formación de Profesores financiado por Servicio Alemán de Intdrcambio Académico DAAD, a cargo de la Doctora en Didáctica de la Matemática Claudia Vargas Díaz.

Hank Kael Apablaza Apablaza

Dedicatoria

> No negaré, eso sí, que me gustaba. Su inmaterial y vaga compañía. Que era como el espíritu sereno. Que a las flores domésticas anima. Yo no puedo ocultar de ningún modo. La importancia que tuvo su sonrisa. Ni desvirtuar el favorable influjo. Que hasta en las mismas piedras ejercía.
>
> Nicanor Parra

Este proceso es el inicio de una carrera sin fin. En esta parte de mi formación han actuado gran cantidad de personas de mi entorno sociocultural, de entre las cuales destaco a aquellos que han sido pacientes, afectuosos, sinceros, rigurosos, compresivos y fieles conmigo:

A mis padres Luis e Isabel, pues son ellos la tierra, el agua, la cerca y la vara en mi etapa de crecimiento continuo; son mi refugio y mi dicha, son quienes me apoyan incondicionalmente en momentos de tristeza y alegría. A mis hermanas Evelyn e Isabel, pues durante toda la vida siempre nos tendremos a nosotros.

A mis amigos Fernanda, Omar, Cristóbal P., Álvaro, Harry, Nancy, Agner; pues son ellos los que me brindan alegrías, compañía, seguridad y afecto.

A Soledad Cabañas, por su constante preocupación y apoyo en la gestión de los procesos académicos.

A mis profesores del programa del MEM, que participaron en mi formación, en especial a Claudia Vargas-Díaz, quien fue agente constante de motivación, apoyo y confianza desde que fui su alumno y de quien estoy profundamente agradecido.

A todos ellos les quiero mucho.

Hank Kael Apablaza Apablaza

Resumen

La competencia de la comunicación, representa una competencia de interés nacional. Dentro de los estandares orientadores para las carreras de pedagogía en Chile, se declara que *"el futuro profesor o profesora esta consciente del papel fundamental que tiene la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje"* (MINEDUC, 2012).

En particular, en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la competencia de la comunicación se transforma en una competencia de carácter fundamental para el profesor.

De esta manera, con el objetivo de caracterizar esta competencia para el profesor de matemática, se analizaron los perfiles de egreso de los programas de formación de profesores de matemática, junto a sus mallas curriculares; y se constrastaron con encuestas realizadas a docentes en ejercicio de la profesión. Dentro de los principales resultados que se obtuvieron de este análisis, es que los profesores aplican estrategias de comunicación basados en su experiencia de aula.

También, se realizó una encuesta a los jefes de carrera del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas (CRUCH), obteniendose como resultado que la competencia de la comunicación es desarrollada de forma transversal.

Se analizan también, los casos de Gonzalo y Pedro. Se graba una clase y se analiza la transcripción de los episodios desde tres aristas. Primeramente, se identifican las Fases del Episodio de la clase propuestos por Martinic & Rojas (2015); en la segunda, sus Unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula. Finalmente, se realiza un Análisis didáctico de cada uno de los episodios desde el enfoque ontosemiótico (Font, Planas, & Godino, 2010) en sus dos primeros niveles, es decir, se identificaron las prácticas metamáticas y se identificaron los objetos y procesos matemáticos.

El principal resultado obtenido, es la utilización de la **pregunta abierta** y la **pregunta dirigida** como herramientas para generar dialogo y comunicación.

Palabras Claves: comunicación, competencia comunicativa, profesores de matemática, formación de profesores.

Abstract

The competence of the communication, represents a competition of national interest. Within the guiding standards for pedagogical careers in Chile, it is stated that "the future teacher is aware of the fundamental role of communication in the teaching and learning process" (MINEDUC, 2012).

In particular, in the process of teaching and learning mathematics, the competence of communication is transformed into a fundamental competence for the teacher.

In this way, in order to characterize this competence for the mathematics teacher, some profiles of the mathematics teacher training programs were analyzed, together with their curricular map; and they were contrasted with surveys carried out to professors in the exercise of the profession. Among the main results obtained from this analysis, is that teachers apply communication strategies based on their classroom experience.

Also, a survey was conducted to the heads of the Council of Rectors of Chilean Universities (CRUCH), obtaining as a result that communication competence is developed transversally.

The cases of Gonzalo and Pedro were also analyzed. A class is recorded and the transcription of the episodes is analyzed from three edges. First, the Phases of Episode of the class proposed by Martinic & Rojas (2015) are identified; in the second, its Thematic Units and Typical Classroom Activities. Finally, a didactic analysis of each episode is made from the ontosemiotic approach (Font, Planas, & Godino, 2010) in its first two levels, mathematical practices were identified and mathematical objects and processes were identified.

The main result obtained is the use of the **open question** and the **question addressed** as tools to generate dialogue and communication.

Key words: communication, communicative competence, mathematics teachers, teacher training.

Tabla de contenido

Hoja de calificación i
Agradecimientos ii
Resumen v
Abstract vi
Índice de Tablas x
Introducción 1
Capítulo 1: Objetivos de la investigación 3
Capítulo 2: Marco Teórico 4
2.1 Comunicación 4
2.2 Comunicación en educación 6
2.3 Comunicación de la matemática 8
2.4 Competencia comunicativa del profesor de matemática 11
Capítulo 3: Metodología 14
Capítulo 4: Análisis de mallas curriculares y perfiles de egreso 16
4.1 Perfiles de egreso de carreras de Pedagogía en Chile 16
4.2 Mallas curriculares de Pedagogía en Matemática 36
Capítulo 5: Encuesta a jefes de carrera 37
5.1 Análisis de las respuestas de los jefes de Carrera 37
Capítulo 6: Encuesta a profesores en ejercicio de la profesión 45
6.1 Gráficas 45
6.2 Análisis de las respuestas de los profesores 48
Capítulo 7: Episodios 52
7.1 Episodio 1 (Gonzalo). (02.12.2016) 54
7.1.1 Análisis de las fases del Episodio 1. PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO y CIERRE PEDAGÓGICO. 55
7.1.2 Unidades temáticas y actividades típicas de aula del Episodio 1 (Gonzalo) 70
7.1.3 Análisis didáctico del Episodio 1 75

7.2 Episodio 2 (Gonzalo). (05.12.2016) 82
7.2.1 Análisis de las fases del Episodio 2: PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO. 82
7.2.2 Unidades temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 2 84
7.2.3 Análisis didáctico del Episodio 2 (Gonzalo) 90
7.3 Episodio 3 (Gonzalo). (05.12.2016) 100
7.3.2 Unidades temáticas y actividades típicas de Aula del Episodio 3 (Gonzalo) 102
7.3.3 Análisis didáctico del Episodio 3 (Gonzalo) 105
7.4 Episodio 1 (Pedro) 114
7.4.1 Análisis de las fases del Episodio 1 (Pedro): PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO 115
7.4.2 Unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 1 (Pedro) 118
7.4.3 Análisis didáctico del Episodio 1 (Pedro). 120
7.5 Episodio 2 (Pedro) 128
7.5.1 Análisis de las fases del Episodio 2 (Pedro): INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO. 128
7.5.2 Unidades temáticas y Actividades típicas de aula del Episodio 2 (Pedro). 130
7.5.3 Análisis didáctico del Episodio 2 (Pedro) 132
Capítulo 8: Discusión final, conclusiones, recomendaciones y aportes 140
8.1 Discusión final 140
8.2 Conclusiones 142
8.3 Recomendaciones 144
8.4 Aportes 145
Referencias 146
Anexos 151
Respuestas de los profesores al Cuestionario de percepción sobre habilidades comunicativas para enseñar matemática 152
Transcripción del Episodio 2 de Gonzalo. 161
Transcripción del Episodio 3 de Gonzalo 190
Transcripción del Episodio 1 de Pedro. 217

Transcripción del Episodio 2 de Pedro 253

Mallas de formación de profesores de las Universidades del CRUCH 284

Índice de Tablas

Tabla 1: Transcripción del Episodio 1 y fases de la enseñanza *70*
Tabla 2: Secuencias temáticas y actividades típicas de aula (Martinic & Rojas, 2015) *74*
Tabla 3: Prácticas matemáticas del Episodio 1 ..... *76*
Tabla 4: Objetos matemáticos del Episodio 1 ..... *79*
Tabla 5: Procesos matemáticos del Episodio 1 ..... *81*
Tabla 6: Fases de la enseñanza del Episodio 2 ..... *84*
Tabla 7: Secuencias temáticas de la enseñanza del Episodio 2 ..... *89*
Tabla 8: Prácticas matemáticas del Episodio 2 ..... *91*
Tabla 9: Objetos matemáticos del Episodio 2 (Gonzalo) *97*
Tabla 10: Procesos matemáticos del Episodio 2 (Gonzalo) *99*
Tabla 11: Fases del Episodio 3 (Gonzalo) *102*
Tabla 12: Unidades temáticas y actividades típicas de Aula del Episodio 3 (Gonzalo) *104*
Tabla 13: Prácticas matemáticas del Episodio 3 (Gonzalo) *106*
Tabla 14: Objetos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo) *112*
Tabla 15: Procesos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo) *113*
Tabla 16: Fases del Episodio 1 (Pedro) *118*
Tabla 17: Secuencias temáticas y Actividades típicas de aula. Episodio 1 (Pedro) *119*
Tabla 18: Practicas matemáticas del Episodio 1 (Pedro) *122*
Tabla 19: Objetos matemáticos del Episodio 1 (Pedro) *126*
Tabla 20: Procesos matemáticos del Episodio 1 (Pedro) *127*
Tabla 21: Fases del Episodio 2 (Pedro) *129*
Tabla 22: Unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 2 (Pedro) *131*
Tabla 23: Prácticas matemáticas del Episodio 2 (Pedro) *132*
Tabla 24: Objetos matemáticos del Episodio 2 (Pedro) *138*
Tabla 25: Procesos matemáticos del Episodio 2 (Pedro) *139*

Índice de Figuras

Figura 1: Segundo modelo de comunicación. Mayor, J. (1984) *5*
Figura 2: Marcos de contextos de competencias (2003) *12*
Figura 3: Distribución por género de profesores encuestados *45*
Figura 4: Universidad de obtención de Título profesional *46*
Figura 5: Región donde trabaja *46*
Figura 6: Dependencia del establecimiento donde trabaja *47*
Figura 7: Años de ejercicio de la profesión docente *47*
Figura 8: Configuración de objetos (Font, Planas, & Godino, 2010) *77*
Figura 9: Representación ontosemiótica del conocimiento matemático. (Font, Planas, & Godino, 2010) *80*
Figura 10: Teoremas de Euclides – Texto del estudiante Matemática I° Medio (Díaz, Rodríguez, & Fuentes, 2016, pág. 210) *114*
Figura 11: Modelo de comunicación de la matemática de profesores de Chile *143*

Introducción

Al observar una clase de matemática en cualquier institución y/o establecimiento educacional chileno, podemos distinguir ciertos aspectos:

- El propósito del docente es que los alumnos aprendan cierto contenido específico de la matemática, utilizando para aquello, recursos metodológicos de su formación inicial, creencias desde lo experiencial de lo que es enseñar matemática, distintas representaciones del objeto matemático, conocimiento disciplinar matemático, recursos empíricos (libros, guías, presentaciones, procesadores gráficos, la pizarra) y principalmente el dialogo unidireccional y/o bidireccional.
- El propósito de los alumnos es aprender lo que el profesor les ha planificado enseñar. Para aquello, los estudiantes utilizan y ponen en juego las habilidades y actitudes necesarias para cumplir dicho propósito, ya sea tomando notas en su cuaderno de apuntes, interpelando lo que el profesor les quiere transmitir, tomando decisiones de que es lo importante respecto de lo que el profesor les comunica y poniendo en juego habilidades y destrezas para la comprensión y aprehensión del objeto matemático tratado.

En cada una de estas actividades, los participantes comparten diálogos, gestos y un lenguaje propio de cada clase. Lo que nos hace preguntarnos ¿Qué papel juega la comunicación en la enseñanza de la matemática?, ¿Con que herramientas está capacitado el profesor para enseñar matemática?, ¿Qué habilidades, o, mejor dicho, que competencias debe poseer el profesor de matemática para la enseñanza de la matemática? Y especifícamente, ¿La competencia de la comunicación matemática es desarrollada por los planes de formación de profesores? Y si no es así, ¿Cómo se pueden desarrollar competencias comunicativas en los futuros profesores de matemática en Chile?

Interesa, por tanto, indagar, analizar y caracterizar la competencia de la comunicación de los actuales profesores de matemática en Chile.

Para aquello, en el marco de la didáctica de la matemática, la investigación consta del estudio de dos casos y su posterior transcripción y análisis en tres aristas:

- Las fases del Episodio (Martinic & Rojas, 2015), que consiste en identificar las categorías de PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO, CIERRE PEDAGÓGICO y CIERRE.
- Las unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula (Martinic & Rojas, 2015), que consiste en identificar las actividades típicas que se desarrollan en la sala de clases por parte del profesor y los estudiantes, tales como las secuencias DECLARATIVAS

(explicación o exposición del profesor), TRABAJO PRIVADO (procedimental 1), TRABAJO EN GRUPO O COLECTIVO (procedimental 2), EXPOSICIÓN DE LOS ESTUDIANTES (procedimental 3), EVALUACIÓN (procedimental 4), METACOGNITIVA, ORGANIZATIVA (normalización) y REVISIÓN de tareas.

- Análisis didáctico de cada Episodio desde el enfoque ontosemiótico (Font, Planas, & Godino, 2010) en sus dos primeros niveles:
    - Nivel 1: Identificación de las prácticas matemáticas
    - Nivel 2: Identificación de objetos y procesos matemáticos

El caso de Gonzalo, un profesor de matemática con 3 años de ejercicio de la profesión, titulado de la Universidad de Santiago de Chile. Él trabajaba, en el momento de la grabación, en un liceo de la comuna de Recoleta y que forma parte de la fundación Mano Amiga.

El caso de Pedro, un profesor con 5 años del ejercicio de la profesión, titulado de la Universidad de Santiago de Chile. Desempeña su labor docente en un colegio de la comuna de Melipilla.

Los profesores fueron filmados dictando contenidos correspondientes a los ejes de Geometría y al eje de Datos y Azar propuestos por el marco curricular chileno.

Corresponde también, indagar y analizar los planes y programas de formación docente en las universidades pertenecientes al Consejo de Rectores de las Universidades de Chile (CRUCH). Para aquello, se obtienen las mallas Curriculares y perfiles de Egreso desde los sitios web oficiales de cada institución, se realiza una encuesta a los jefes de carrera a cargo de los programas de formación, para ser consultados respecto del *Desarrollo de habilidades comunicativas para enseñar matemática en la Formación de Profesores de Educación Matemática* y se analizan sus respuestas.

Finalmente, nos interesa conocer la opinión de los profesores de matemática en ejercicio. Para aquello, se analizan las respuestas obtenidas mediante una encuesta online sobre sus *percepciones sobre habilidades comunicativas para enseñar matemática.*

Capítulo 1: Objetivos de la investigación

La comunicación es una parte esencial de la educación matemática y de la matemática. Es una forma de compartir ideas y aclarar la comprensión. A través de la comunicación, las ideas se convierten en objetos de reflexión, refinamiento, discusión, y enmienda (The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2000).

Además, es por medio de la comunicación, que se espera que el estudiante construya significados, reflexione, analice e intercambie interpretaciones; proceso que además le permitirá, a través de la confrontación de conjeturas, expresarlas con el lenguaje propio de la matemática (Jiménez Espinosa, Suárez Ávila, & Galindo Mendoza, 2010)

De esta manera, se hace necesario que el profesor cuente con las herramientas, habilidades y competencias necesarias para comunicar la matemática a sus estudiantes en la sala de clases. El problema es, por tanto, identificar ¿Qué herramientas comunicativas posee el profesor de matemática chileno? ¿Qué habilidades y competencias comunicativas fueron y/o son desarrolladas por los programas de formación de profesores de las universidades chilenas?

Así, el objetivo general de esta investigación es *"Analizar las competencias comunicativas de los profesores de matemática en Chile, identificando elementos teóricos, en los programas de formación inicial, y prácticos, en registros audiovisuales"*.

Gonzalo y Pedro son dos profesores titulados de la Universidad de Santiago de Chile, que se desempeñan en enseñanza media, en colegios Científico – Humanista y de dependencia particular subvencionado. Ambos llevan alrededor de 4 o 5 años de ejercicio de la profesión docente.

Los objetivos específicos de esta investigación son:

- Analizar la situación actual de la formación de profesores de matemática en relación con la competencia comunicativa en programas de formación en Chile.
- Reconocer elementos teóricos y prácticos que sirvan para caracterizar la competencia comunicativa en la formación de futuros profesores de matemática

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Comunicación

La comunicación representa el pilar fundamental de la construcción de nuestras sociedades y para el profesor en ejercicio, representa una competencia fundamental en el desarrollo de situaciones de Enseñanza y Aprendizaje. Pero ¿qué entendemos por comunicación?

Para Lasswell (1964), quien desarrolló uno de los modelos de comunicación más influyentes, la comunicación se define como *el acto intencional de una persona de dirigir un mensaje a otra* (2008). En este modelo podemos identificar dos de los elementos claves de toda comunicación, el emisor (quien es el que emite el mensaje) y el receptor (que es a quien va dirigido el mensaje). Pero este modelo nos deja una serie de inquietudes respecto de la comunicación: ¿la comunicación es unidireccional?, ¿importa el lenguaje que utilizamos? ¿La forma en que transmitimos el mensaje?, ¿el medio que utilizamos?, ¿el lugar y el momento en que se transmite el mensaje?

Cada una de estas preguntas, dejan al descubierto ciertos elementos de un proceso de comunicación, lo que Aróstegui (2008) describe como elementos básicos del acto comunicativo:

- **El emisor:** es la entidad (individuo o grupo) que produce una señal con intención de comunicarse. Se es emisor sólo en tanto en cuanto se está produciendo la señal. En principio, no es necesario mencionar como requisito indispensable del emisor el que éste posea el conocimiento de un código estricto. Por otro lado, el emisor se comunica, además, como resultado de un comportamiento voluntario; este comportamiento, a su vez, está inducido por un objetivo concreto, que puede concebirse en términos generales como un deseo de originar un determinado conjunto de representaciones en la mente del destinatario, a partir de las cuales se intenta producir ciertos cambios en el entorno.

- **El receptor:** es la entidad (individuo o grupo) con el que el emisor quiere comunicarse por medio de la señal. Quedan excluidos de la condición de destinatario los receptores ocasionales que captan por casualidad una señal que no va dirigida a ellos. En consecuencia, la denominación de “destinatario” es preferible a la más clásica de “receptor”. En las interacciones dialogales, emisor y destinatario van intercambiando sus papeles, por lo que son de aplicación las consideraciones hechas con respecto al emisor.

- **La señal o mensaje:** el mensaje, soporte físico o psicofísico de la transmisión, se presenta, pues, como una secuencia de elementos tomados de un repertorio de signos por el emisor, quien los reúne conforme a ciertas leyes inherentes al mensaje que debe

transmitir al receptor. La comunicación sólo tiene lugar cuando estos elementos son comunes a la pareja emisor-receptor. El receptor recibe el conjunto de signos que constituyen el mensaje y los identifica con los signos almacenados en su propio repertorio. Como se ha indicado, para que estos signos puedan calificar de mensajes para la comunicación, es necesario que exista intencionalidad, que no sea el azar quien domine esta relación.

- **El código:** en un sistema de comunicación, es todo el conjunto de conocimientos que poseen en común el emisor y el receptor antes de iniciar la comunicación.
- **El canal o medio a través del que se produce el mensaje:** puede hablarse de canal como el conjunto de eslabones que constituyen el sistema material de paso entre el mensaje emitido y la sensación resultante para el receptor humano. Existirán, por un lado, los niveles fisiológicos sensoriales (contacto táctil, audición, visión, equilibrio, etc.) y, por otro, los canales propiamente técnicos, cuya misión es enviar el mensaje a través del tiempo y el espacio, por medio de aparatos más o menos complejos que se basan, en general, en la utilización de transductores del tipo telemático, tecnologías para los medios de comunicación de masas o individuales, como el teléfono con imagen.

Mayor, J. (1983) (15) en Guardia (2009) establece que la comunicación es *"el intercambio significativo entre sistemas interactivos"*. Presenta, además, un diagrama en el que se muestran la interacciones entre estos sistemas.

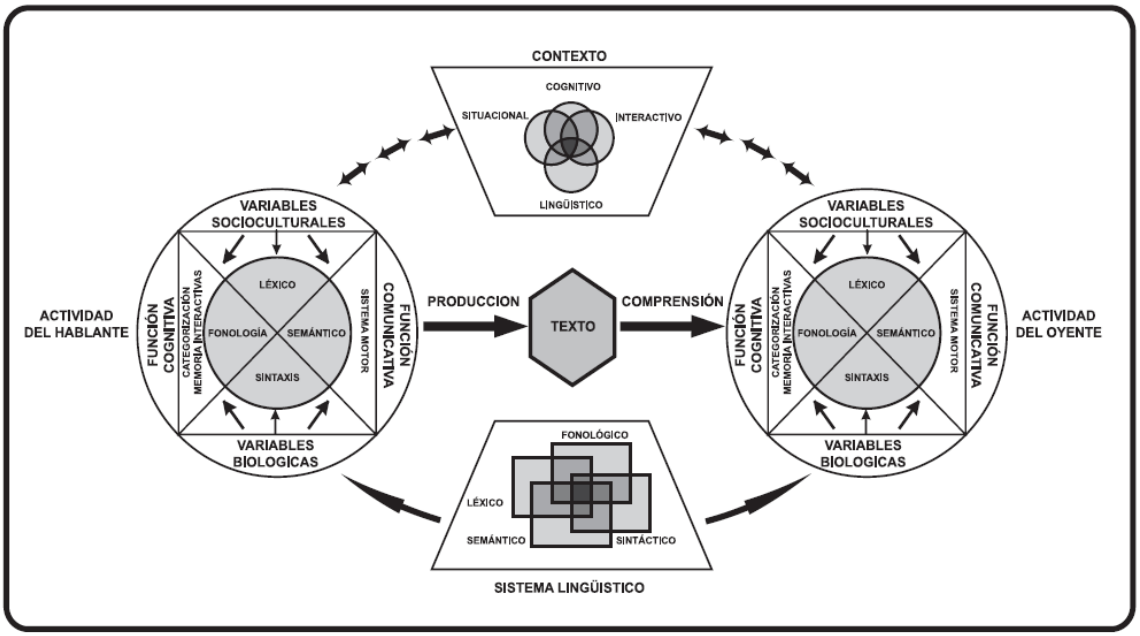


Figura 1: Segundo modelo de comunicación. Mayor, J. (1984)

En este modelo, podemos observar la interacción entre el contexto, el sistema lingüístico, el emisor y el receptor. Se establece, además, que la comunicación puede ser verbal y no verbal. En este diagrama se puede apreciar a la comunicación como un proceso dinámico, en el que intervienen diversos factores (el contexto, el lenguaje verbal y no verbal, el ambiente, el emisor, el receptor).

Por consiguiente, entenderemos la comunicación como un acto intencional de una persona que quiere emitir un mensaje a otra con el objeto de transmitir representaciones mentales en el receptor, en un proceso dinámico, en la que el emisor y receptor intercambian sus roles codificando y decodificando el mensaje en el lenguaje utilizado y a través de canales fisiológicos o técnicos.

2.2 Comunicación en educación

En el ejercicio de la profesión docente, la comunicación como competencia para el desarrollo de situaciones de Enseñanza y Aprendizaje en el aula de manera oral o escrita es fundamental. Múltiples reformas educativas, en la actualidad, centran su atención en la comunicación y el papel que juega en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Jiménez Espinosa, Suárez Ávila, & Galindo Mendoza, 2010).

Es por ello, que debemos entender a que nos referimos cuando hablamos de comunicación en educación.

El rol del profesor como comunicador ha ido cambiando en función de los nuevos paradigmas de Enseñanza y Aprendizaje que se han ido desarrollando a lo largo de los años (Rodríguez R., 2000):

- **Paradigma Conductista:** El rol del profesor como comunicador tenía que ver con la emisión de mensajes cuidadosamente estructurados, que generaran en el receptor-alumno la respuesta correcta evidenciadora de la conexión adecuada.
- **Paradigma de los procesos grupales:** La comunicación se conceptualizó como multidimensional y multicanal. El rol del profesor como comunicador, se visualizó como animador y conductor de procesos grupales, con un fuerte énfasis en la creación de un clima favorecedor de la comunicación y de facilitación de la interacción.
- **Paradigma cognitivista:** Durante el proceso de comunicación, se hizo especial énfasis en la significatividad de los signos utilizados para comunicar la información. Por tanto, el profesor debía interiorizarse de las ideas o conocimientos previos de sus alumnos y buscar referentes que sirvieran para construir ámbitos comunes entre comunicadores y comunicatorios.

- **En la actualidad**, se enfatiza la circularidad del proceso de comunicacional en el cual los roles de emisor y receptor son intercambiables. El rol del profesor en la comunicación se mide en su habilidad de poner en juego su capacidad dialógica, su actitud de aceptación y acogida, su madurez vocacional y su capacidad de relación haciendo uso de todos los elementos del ambiente generadores de mensajes educativos.

En el contexto de la formación de profesores en Chile, el Sistema Nacional de Desarrollo Profesional Docente ha establecido estándares pedagógicos; entendidos como el conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes profesionales necesarias para el desarrollo del proceso de enseñanza; para la formación inicial docente con el fin de asegurar la calidad y equidad en la educación.

Dentro de estos estándares, nos detenemos en el Estándar 9 que establece que el docente egresado de pedagogía *se comunica oralmente y por escrito de forma efectiva en diversas situaciones asociadas a su quehacer docente* (MINEDUC, 2012), el cual evidencia que los estudiantes de pedagogía deben ser formados en competencias comunicativas.

De esta manera, este estándar orientador, establece que los programas de formación inicial deben procurar que sus egresados:

- Estén conscientes del rol fundamental que cumple la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Sean capaces de comunicarse de forma oral y escrita de manera adecuada, coherente y correcta, en los contextos que se desenvuelve.
- Sean lectores competentes.
- Reconozcan la dificultad que plantea el lenguaje en los diversos contextos (lenguaje utilizado entre amigos, entre pares, dentro de la comunidad escolar, en el aula, en la región geográfica en la que se encuentra) con el objetivo de facilitar el aprendizaje y la inserción social

Para el cumplimiento de este estándar de desempeño, establece los siguientes indicadores:

Lo que se manifiesta cuando[1]:

1. Es capaz de conceptualizar, analizar, sintetizar, argumentar, interpretar, evaluar, inferir y explicar ideas o temas en forma oral o escrita.

[1] (Estándares orientadores para las carreras de pedagógia en educación media, 2012)

2. Interpreta adecuadamente diversos tipos de textos orales y escritos del ámbito académico y es capaz de evaluarlos críticamente considerando su contenido y organización.

3. Se expresa de manera adecuada, coherente y correcta al desarrollar temas de su disciplina y profesión, tanto en ámbitos académicos como en el contexto escolar, ya sea en forma oral y escrita.

4. Domina diversos recursos pedagógicos para incentivar a sus estudiantes a ampliar su vocabulario para favorecer su desarrollo lingüístico, cognitivo y el dominio progresivo del lenguaje técnico de la disciplina.

5. Lee en forma crítica los mensajes de los medios de comunicación.

6. Produce textos adecuados, coherentes y correctos en su gramática y ortografía, tanto en el ámbito académico como profesional.

7. Dialoga y debate sobre temas propios de su disciplina y su profesión en situaciones comunicativas formales, entregando opiniones informadas.

Además, dice Hernández (1996),

> *"cuando en la comunicación no se dan las condiciones que garantizan la comprensión, se recae en el ritual, en el sin sentido, en la obligación ilegítima, en el aburrimiento"*

Lo anterior hace referencia, en mi perspectiva, a las relaciones que puede establecer el profesor entre los elementos básicos de la comunicación.

Dados estos antecedentes y en el marco de la nueva política nacional docente, se hace necesario caracterizar y desarrollar la competencia comunicativa para la formación del profesor de matemática.

2.3 Comunicación de la matemática

La comunicación pedagógica y las habilidades de comunicación docentes son temas que siempre están presentes en el diseño y en la implementación de los procesos de formación inicial docente (Rodríguez R., 2000).

Estudios en didáctica de las matemáticas plantean que *la comunicación de la materia en cualquier etapa formativa requiere de un tratamiento espacial* (Vargas & Giménez). Sin embargo, esta responsabilidad queda a cargo de asignaturas específicas o de manera transversal dentro de los programas de formación inicial docente (Rodríguez R., 2000).

Dentro de la realidad nacional, y considerando las universidades que pertenecen al CRUCH, gran parte de los perfiles de egreso de las carreras que otorgan el título de profesor de matemática, hacen referencia a dichas habilidades y competencias:

- Es un profesional…con **competencias comunicativas** y sociales… (Universidad Católica de Temuco, Copyrights © 2013, 2016)
- **Comunica de forma oral y escrita la matemática en un lenguaje apropiado** a su interlocutor a fin de alcanzar un dominio adecuado de la disciplina. (Pontificia Universidad Católica de Valparaiso, 2018)
- …usar un lenguaje disciplinario para describir, ejemplificar, interpretar relacionar, explicar y/o fundamentar y **comunicar** términos, principios, conceptos, objetos, reglas, razonamientos, procedimientos, desarrollos y soluciones… (Universidad de Santiago de Chile, 2018)
- Realización de la enseñanza: … Organizar y administrar la clase para el logro de los objetivos de aprendizaje, gestionando el uso del tiempo y del espacio, a través del uso de la **comunicación efectiva**, formulando preguntas y tareas que incentiven, comprometan y desafíen el pensamiento de cada estudiante, escuchando cuidadosamente las ideas de sus alumnos y estableciendo normas de convivencia contextualizadas a la situación de aprendizaje… (Universidad de Santiago de Chile, 2018)
- Aplicará su saber creativo y científico con criterio reflexivo, tendrá mayores capacidades para aprender a aprender, **comunicarse** y adaptarse al cambio, incorporando avances tecnológicos e informáticos. Los egresados evidenciarán competencias en las dimensiones **del saber, saber ser, saber hacer y saber convivir** (Universidad de Talca, 2017)

Por tanto, queda en evidencia que la comunicación en la enseñanza de la matemática requiere de una atención especial en los procesos de formación inicial del profesor de matemática en Chile.

Pero ¿qué entendemos por *comunicación de la matemática*? Para el National Council of Teachers of Mathematics (NTCM), se entiende por comunicación de la matemática como un estándar que implica (Vargas-Díaz, 2013):

- Organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación
- Expresar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.

- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás
- Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.

Al acercarnos al concepto de competencia, debemos hacer una revisión de algunas de las definiciones establecidas por varios autores.

1.- Competencia lingüística es el conocimiento que el hablante-oyente tiene de su lengua (Noam Chomsky, 1964) citado en Trujillo- Segoviano, J. (2014)

2.- Posee competencia profesional quien dispone de los conocimientos, destrezas y actitudes necesarias para ejercer su propia actividad laboral, resuelve los problemas de forma autónoma y creativa, y esté capacitado para actuar en su entorno laboral y en la organización del trabajo (Bunk, 1994) citado en (Tobón, 2010).

3.- Las competencias son una compleja estructura de atributos necesarios para el desempeño de situaciones específicas, que combinan aspectos tales como actitudes, valores, conocimientos y habilidades con las actividades a desempeñar (Gonczi y Athanasou, 1996) citado en (Tobón, 2010).

4.- Las competencias son una "actuación idónea que emerge en una tarea concreta, en un contexto con sentido, donde hay un conocimiento asimilado con propiedad y el cual actúa para ser aplicado en una situación determinada, de manera suficientemente flexible como para proporcionar soluciones variadas y pertinentes" (Bogoya, 2000, p. 11) citado en (Tobón, 2010).

Ahora, bien, cuando hablamos de competencia debemos decir que se trata de un conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes necesarios para desempeñarse en el ámbito laboral.

Mas específicamente, en el contexto de nuestra investigación, cuando hablamos de competencia matemática:

1. Rico (2006), hace referencia *a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.*
2. Para Niss (2002) *la competencia matemática significa la capacidad de comprender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticos en los que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel.*
3. Por otra parte, Vargas (2013) define la **Competencia Comunicativa Matemática** como la capacidad social comunicativa de enseñar matemática, la cual se desarrolla cuando el profesor reflexiona acerca de la importancia de la comunicación para enseñar a un grupo de alumnos interesados en aprender matemática.

De cada una de estas definiciones acerca de la competencia comunicativa matemática, podemos identificar indicadores que caracterizan esta competencia en el profesor de matemática y que están estrechamente relacionadas con la comunicación de la materia:

- Organizar el pensamiento matemático
- Expresar de forma coherente y clara
- Analizar y evaluar el pensamiento matemático
- Usar el lenguaje matemático
- Razonar y comunicar eficazmente las ideas y conceptos matemáticos
- Comprender y utilizar las matemáticas
- Interés por aprender matemática

2.4 Competencia comunicativa del profesor de matemática

Cuando hablamos de competencias docentes, no podemos dejar de lado el conocimiento curricular y profesional que debe estar bajo su dominio. Y al hablar de conocimiento y competencia, debemos referirnos ineludiblemente a sus distintas dimensiones.

Rajadell (2001) establece tres dimensiones para el proceso de enseñanza:

- Dimensión del **Saber**: que se centra en la adquisición y dominio de determinados conocimientos.
- Dimensión del **Saber Hacer**: pretende que la persona desarrolle aquellas habilidades que le permitan la realización de ciertas acciones o tareas, teniendo en cuenta la capacidad de modificación y transferencia posterior a diferentes contextos.
- Dimensión de **Ser**: profundiza en la faceta afectiva de la persona, en la que juegan un papel prioritario la modificación y consolidación de intereses, actitudes y valores. La tarea de aprender a percibir, reaccionar y cooperar de manera positiva ante una situación o un objeto acoge una complejidad superior que la simple retención de conocimientos.

Cada una de estas dimensiones respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje, nos entregan luces respecto de la competencia del profesor de matemática y su desempeño de calidad en el aula y en su quehacer profesional.

Es así, que diversos autores definen la competencia del profesor de matemática a través de estas tres dimensiones del conocimiento. Por ejemplo, para Tejada[2] (2005) *la competencia es el conjunto de saberes (saber, saber hacer, saber estar y saber ser, conocimientos, procedimientos y actitudes) combinados, coordinados e integrados en el ejercicio profesional. El dominio de estos saberes le 'hace capaz' de actuar a un individuo con eficacia en una situación profesional*.

Álvaro Poblete y Verónica Díaz (2003) establecen que la competencia del profesor de matemáticas es entendida como la descripción de la habilidad adquirida efectiva y eficientemente al ejecutar el acto de enseñar matemáticas. (…) Del mismo modo, la competencia la hemos asociado a *marcos de contextos* de competencias del profesor de matemáticas, constituidos por objetos tanto de contenido matemático como didáctico, transversal y evolutivo, que el profesor coloca en juego en su accionar en aula.

Estos marcos están conformados por el *saber de contenido* de matemática y sobre la matemática: el *saber-hacer didáctico*… el *ser transversal*… y el *saber-ser evolutivo.*

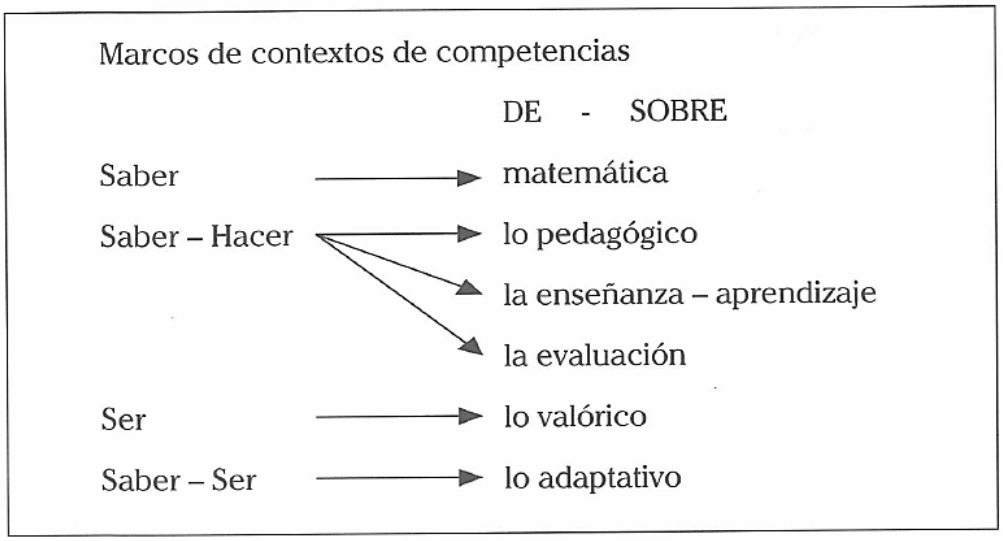


Figura 2: Marcos de contextos de competencias (2003)

Ahora, en el contexto y rol del profesor de matemática entenderemos por competencia al conjunto de saberes:

- Saber: referido conocimiento disciplinar propio del ejercicio de la profesión docente y de su especialidad.

[2] (Competencias comunicativas del maestro en formación, 2008)

- Saber hacer: referido al dominio de metodologías, gestión de la clase y evaluación.
- Saber estar: referido al clima de aula y a su actuación en la comunidad educativa
- Saber ser: referido al ejercicio de la profesión docente

De acuerdo con lo anterior, entenderemos la competencia comunicativa del profesor de matemática como su capacidad de comunicar la matemática en el aula y en la comunidad educativa, como una síntesis de habilidades que permite la comunicación y el dialogo en situaciones de Enseñanza y Aprendizaje de la matemática y como un conjunto de saberes pedagógicos y disciplinares propios de su profesión.

Capítulo 3: Metodología

El propósito de esta investigación, como ya hemos mencionado anteriormente, es analizar las competencias comunicativas que los profesores de matemática en Chile poseen. Para aquello, se debe analizar la situación actual de la formación de profesores de matemática y establecer su relación con la competencia de comunicar la matemática en las aulas. Además, se deben indagar sobre los elementos teóricos y prácticos que nos permitan caracterizar dicha competencia.

Es por lo que, con el fin de analizar la situación actual de la formación de profesores de matemática con respecto a la competencia comunicativa, se construirá una encuesta, sometida a juicio experto, dirigida a los directores y jefes de carrera de los programas de formación inicial de las universidades del CRUCH. Para este análisis, no podemos dejar de lado a los profesores de matemática que ejercen la profesión en las aulas chilenas. Es por ello, que encuestaremos (vía online) a profesores en ejercicio, con el fin de indagar sobre la percepción de sus habilidades comunicativas.

Para reconocer elementos teóricos que permitan caracterizar la competencia comunicativa, se descargarán las mallas y perfiles de los planes de formación de Profesores de matemática de las universidades pertenecientes al CRUCH desde sus sitios web oficiales, y se analizarán con respecto a las competencias comunicativas de los profesores de matemática.

Con el propósito de reconocer elementos prácticos que sirvan para caracterizar la competencia comunicativa en la formación de futuros profesores de matemática, se filmarán a dos profesores en ejercicio, que se desempeñen en primer año de enseñanza media. Cada uno de los videos de dividirán en episodios y se transcribirán. Cada transcripción será organizada en una tabla que contenga:

- Las líneas de transcripción
- Observaciones de investigador, respecto de conductas observables del profesor
- Las fases del episodio, propuestos por Martinic & Rojas (2015)

Luego, cada transcripción se analizará con respecto:

- A las fases del episodio (Martinic & Rojas, 2015)
- Las unidades temáticas y actividades típicas de aula (Martinic & Rojas, 2015)
- Se identificarán las prácticas matemáticas (Font, Planas, & Godino, 2010)
- Se identificarán los objetos y procesos matemáticos (Font, Planas, & Godino, 2010)

Para la recolección de la información hemos considerado ciertos aspectos relevantes (Hernández Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista Lucio, 2006):

- Las encuestas son realizadas de manera online, por lo que se evita inducir respuestas de los participantes.
- Los participantes narran sus experiencias sin ser enjuiciados, ni criticados (en el caso de las encuestas y el registro audiovisual).
- La muestra se escoge teniendo en consideración su ambiente natural y cotidiano (la sala de clases – el investigador no interviene en ningún momento de la clase, solo se limita a registrar audiovisualmente la clase)
- Para los casos, los profesores en estudio deben ser profesores de matemática, egresados de alguna de las universidades del CRUCH en ejercicio de su profesión

Capítulo 4: Análisis de mallas curriculares y perfiles de egreso

Existe consenso nacional (en el marco de la ley de la Nueva Carrera Docente (2015)) e internacional (en proyectos destinados a generar políticas públicas de la OCDE (2013)), que para mejorar los resultados de los estudiantes es necesario elevar la calidad de los docentes.

Dentro de los indicadores de calidad de los docentes, se encuentran indicadores que hacen referencia al conocimiento pedagógico, y en particular, en nuestra investigación, al conocimiento didáctico y matemático (Pavié, 2011), que permita generar dinámicas de enseñanza y aprendizajes efectivas para los estudiantes, monitorear y evaluar la comprensión de los aprendizajes de una clase y/o de una actividad y tomar decisiones respecto de su quehacer pedagógico.

Las instituciones de educación superior que están sujetas a abordar dichas políticas públicas en Chile son las universidades del Consejo de Rectores de Chile.

A continuación, presentamos un extracto de los perfiles de egreso de las carreras de Pedagogía en Matemática de las universidades pertenecientes al Consejo de Rectores de Chile (CRUCH), obtenidos desde las páginas web oficiales de cada universidad.

4.1 Perfiles de egreso de carreras de Pedagogía en Chile

a) **Universidad de Chile:** Pedagogía en Educación Media en Matemáticas y Física

Descripción y objetivos del programa

El propósito del programa es formar Licenciados con una sólida formación en Física y Matemática, como base para la formación de un profesional para la educación media, que le permita vincular el conocimiento y la experiencia científica actual, con las necesidades nacionales en el área de la enseñanza de las ciencias, y que contribuya al mejoramiento de la calidad de la educación científica, cimiento del desarrollo de la ciencia y la tecnología (SISIB, 1994 - 2017).

b) **Pontificia Universidad Católica de Chile:** Pedagogía Media en Matemática

Perfil de quien egresa

Un profesor o una profesora egresa de nuestro Programa con el grado Académico de Licenciado en Educación y con el Título Profesional de Profesor de Educación Media en Matemática. Como Licenciado en Educación se espera que sea capaz de:

- *Dominar conocimientos disciplinarios, cómo se construyen y cómo son representados en el currículum para generar aprendizajes de calidad en los estudiantes.*
- *Contextualizar el marco curricular vigente a la propia realidad escolar e implementar escenarios de aula, pertinentes y relevantes, para generar un aprendizaje de calidad en todos los estudiantes.*
- *Asumir un rol profesional comprometido y colaborar con la comunidad para desarrollar un proceso de reflexión y mejora de su cultura escolar.*

Como Profesor de Educación Media en Matemática se espera que sea capaz de:

- *Dominar el conocimiento disciplinar y propiciar las instancias para que todos sus estudiantes puedan construir sus aprendizajes en Matemática.*
- *Conducir el proceso de enseñanza y aprendizaje en contextos auténticos, logrando el aprendizaje en todos sus alumnos y transformando el contexto en el que se inserta.*
- *Enseñar en contextos auténticos logrando el aprendizaje en sus alumnos y transformando el contexto en que se inserta.*
- *Desempeñarse profesionalmente en la comunidad educativa (alumnos, pares, dirección, y apoderados) y en la comunidad circundante más amplia, atendiendo la necesidad de formación continua* (Pontificia Universidad Católica de Chile, 2015)

c) **Universidad de Concepción:** Pedagogía en Matemática y computación

Descripción:

La carrera de Pedagogía en Matemática y Computación está destinada a entregar los aspectos esenciales del área y de las Ciencias de la Educación. Además, tiene como objetivo formar al estudiante para que asuma una actitud científica ante el fenómeno del conocimiento, el cual es central y necesario a cualquier acción educativa que tiene como objetivo estimular y facilitar el aprendizaje (Unidad de Admisión y Registro Académico Estudiantil, Universidad de Concepción, s.f.).

d) **Pontificia Universidad Católica de Valparaíso:** Pedagogía en Matemáticas

Perfil de egreso

El Profesor de Matemáticas egresado de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso es un profesional universitario formado en el marco del Humanismo Cristiano que posee una formación que se manifiesta en competencias disciplinarias, pedagógicas y prácticas integradas a través de la Didáctica de la Matemática, complementada con herramientas tecnológicas y de idioma extranjero, que le permiten desempeñarse de manera adecuada en las instituciones educacionales de su ámbito profesional.

Competencias Genéricas de Formación Fundamental

- *Demuestra un compromiso ético y lo expresa en valores tales como iniciativa, responsabilidad y perseverancia para un apropiado ejercicio profesional.*
- *Demuestra en su quehacer una actitud ética y de responsabilidad social acorde con los valores desarrollados que se refleja en su relación con el educando como persona.*
- *Se comunica en forma clara y precisa, tanto en lenguaje oral como escrito, en su desempeño profesional.*
- *Utiliza correctamente idioma inglés tanto en la comunicación oral como escrita, y asimismo sabe interpretarlo y comprenderlo en los diferentes contextos de su actividad profesional.*

Competencias Específicas Disciplinares

- *Comprende y analiza conceptos, relaciones básicas y teoremas fundamentales, sintetizándolos en ideas y reconociendo los métodos que conforman las teorías basales de distintas áreas de la Matemática, así como comprende su carácter fundamental dentro del constructo matemático para obtener un dominio adecuado de la disciplina.*

- *Plantea y obtiene soluciones totales o parciales a problemas que se originan en la Matemática, disciplinas afines o situaciones cotidianas, mediante la abstracción, el lenguaje matemático, la elección adecuada del contexto teórico y del método matemático pertinente, como ser razonamiento lógico-deductivo o interpretación cualitativa de datos cuantitativos, con el fin de alcanzar un dominio adecuado de la disciplina.*

- *Desarrolla demostraciones matemáticas, las que construye y elabora mediante argumentaciones en las que se identifican claramente las hipótesis y las conclusiones, para fundamentar, expresar y comunicar correctamente ideas matemáticas utilizando el método y lenguaje propios de la disciplina.*

- *Comunica de forma oral y escrita matemática en un lenguaje apropiado a su interlocutor a fin de alcanzar un dominio adecuado de la disciplina.*

Competencias Específicas Profesionales

- *Comprende y analiza nociones básicas y teorías fundamentales de la Didáctica de la Matemática para la obtención de un dominio adecuado de la disciplina como tal y orientar desde allí su quehacer en el proceso de enseñanza-aprendizaje.*

- *Examina y articula diferentes modelos de secuencias enseñanza-aprendizaje de la matemática, incluida la propuesta de metas de aprendizajes clara y apropiada, el conocimiento de modelos y elaboración de instrumentos de evaluación apropiados, para diseñar e implementar secuencias de enseñanza-aprendizaje de la matemática en el aula.*

- *Desarrolla la reflexión didáctica, permanente y autónoma, desde la teoría y apoyada en evidencias, que le permiten enriquecer continuamente el desempeño de su profesión.*

- *Lidera y/o participa activamente en equipos pedagógicos e interdisciplinarios en instituciones educacionales a fin de promover la enseñanza y los aprendizajes de la matemática.*

- *Utiliza aplicaciones informáticas de procesamiento de textos científicos, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar, resolver problemas y transmitir matemática y en su quehacer profesional* (Pontificia Universidad Católica de Valparaiso, 2018).

e) **Universidad de Santiago de Chile:** Pedagogía en Matemática y Computación

Perfil de Egreso

El perfil profesional de egreso del Profesor de Estado en Matemática y Computación y Licenciado en Educación Matemática y Computación de la USACH, con su carácter multidisciplinario, está dirigido a contar con un docente especializado para una actuación competente en ámbitos y tareas profesionales complejas en un sistema educativo con múltiples y dinámicas demandas, aplicando conocimientos científicos y herramientas tecnológicas actualizadas y, proporcionando soluciones oportunas y eficaces, valóricamente aceptables y con reconocimiento social.

Para cumplir apropiadamente su rol social el perfil de egreso comprende competencias fundamentales disciplinarias e interdisciplinarias de un saber y un saber hacer científico fundamentado, alineado con competencias profesionales de la educación para las decisiones docentes y de gestión educacional. Ellas son concordantes con rasgos personales claves para sus relaciones interpersonales en un contexto de respeto a la pluralidad, y un desarrollo profesional sustentado en capacidades de investigación, innovación, emprendimiento, trabajo en equipo y, de una práctica profesional reflexiva que combina capacidades de autoaprendizaje con postulados axiológicos - como la honestidad, la solidaridad, el respeto por la persona humana y su entorno, la tolerancia y la responsabilidad social.

El perfil de nuestra carrera contiene un registro de atributos y características que distinguen a nuestro Profesor de Estado en Matemática y Computación; así como también al Licenciado en Educación Matemática y Computación, respecto a otros profesionales similares. En primer lugar, se distinguen cinco dominios o ámbitos de acción profesional y en cada uno de ellos un conjunto de competencias que comprenden familias de situaciones de desempeños cuidadosamente seleccionadas. Los dominios son:

1. ***Experticia disciplinaria**: El egresado, cuenta con un conjunto de saberes y de utilización de sus conocimientos que le permita ser **un referente social** a nivel de unidad educativa o local. En particular, usando los conocimientos disciplinarios se espera que el egresado domine los objetivos, metodologías relaciones, límites, aplicaciones e importancia de la matemática, computación,*

estadística y educación matemática para favorecer el desarrollo personal y colectivo en una variedad de contextos dinámicos.

En particular para cumplir dicho propósito se pretende que para cada disciplina el egresado esté en condiciones de :a) usar un lenguaje disciplinario para describir, ejemplificar, interpretar relacionar, explicar y/o fundamentar y comunicar términos, principios, conceptos, objetos, reglas, razonamientos, procedimientos, desarrollos y soluciones; b) Aplicar las metodologías, estrategias, procedimientos y técnicas propios de la matemática, la computación y la estadística en variedad de tipos de situaciones y contextos del trabajo disciplinario y sus aplicaciones , c) Auto dirigir su aprendizaje disciplinario mediante la identificación de sus propias necesidades de aprendizaje, aplicando estrategias para satisfacerlas y monitoreando sus procesos y resultados.

2. ***Diseño de la enseñanza disciplinaria****: El egresado, comprende la concepción, el diseño y la planificación de la enseñanza en matemática, computación y estadística para su labor docente, determinando lo que se va a enseñar, el por qué se va a enseñar, el cómo se va a enseñar, el cuándo se va enseñar y el cómo se va a evaluar, tanto a nivel programas de estudios e unidades y de planificaciones de clases.*

En particular estará en condiciones de:

Seleccionar los contenidos y objetivos a enseñar de acuerdo a las características del currículo, el nivel escolar y los estudiantes a atender; estableciendo una progresión de los logros de aprendizajes, y fundamentando la toma de decisiones en referentes institucionales, disciplinarios y de educación matemática:

- *Diseñar el ambiente de aprendizaje, seleccionando o adaptando materiales didácticos y especificando la secuencia de la ejecución de la enseñanza, a nivel programas de estudios, unidades y planificaciones de clases.*
- *Diseñar, elaborar y planificar instrumentos y procedimientos de obtención de información evaluativa para propósitos diagnósticos, formativos, sumativas y de certificación de aprendizajes, justificando la calidad de la información evaluativa de acuerdo a la satisfacción de características técnicas básicas.*

3. ***Realización de la enseñanza****: Este tipo de conocimiento implica que el egresado de la carrera es un activo y efectivo mediador entre los conocimientos matemáticos, de computación y estadística y sus estudiantes para sus logros de los aprendizajes y competencias matemáticas, de computación y estadísticas. El*

egresado, cuenta con un repertorio de enfoques, metodologías, estrategias, recursos y técnicas para abordar con flexibilidad sus diseños de acuerdo a los contextos y situaciones emergentes para la interactividad y dinamismos centrados en la facilitación y los logros de los estudiantes, como también, para la evaluación y monitoreo de sus procesos y resultados de aprendizajes de esta mediación,

En particular estará en condiciones de

- *Implementar de estrategias de enseñanzas coherentes, significativas y flexibles que permitan mediar entre el conocimiento experto y el aprendizaje de los estudiantes, relacionándolos con situaciones auténticas y su aplicación en la vida cotidiana.*
- *Organizar y administrar la clase para el logro de los objetivos de aprendizaje, gestionando el uso del tiempo y del espacio, a través del uso de la comunicación efectiva, formulando preguntas y tareas que incentiven, comprometan y desafíen el pensamiento de cada estudiante, escuchando cuidadosamente las ideas de sus alumnos y estableciendo normas de convivencia contextualizadas a la situación de aprendizaje*
- *Aplicar instrumentos y procedimientos de obtención de información evaluativa para propósitos diversos, interpretando la información evaluativa de varios tipos y fuentes, para la retroalimentación de los aprendizajes de sus estudiantes, y la certificación de los mismos*

4. ***Vinculación profesional con la organización educativa.*** *Para cumplir con su rol social, el Profesor de Estado en Matemática y Computación. El Licenciado en Educación Matemática y Computación, debe ser capaz de vincularse profesionalmente a una unidad educativa convirtiéndose en un actor (y modelo) que comparte un patrón valórico organizacional. Debe cooperar con la dirección y promover espacios de participación y conversación entre los actores de su establecimiento educativo y con las redes que se generan en la comunidad local y nacional. Debe colaborar con la misión e identidad institucional y el enriquecimiento y concreción tanto del proyecto educativo de su establecimiento, como de las metas nacionales en educación, particularmente en educación matemática.*

En particular estará en condiciones de:

- *Analizar el contexto interno y externo de la unidad educativa en la que desempeñará su rol profesional*
- *Describir las responsabilidades, funciones y tareas principales de su rol profesional en una unidad educativa.*
- *Colaborar en la construcción de la convivencia escolar y en la promoción de valores y actitudes para el autocuidado de los estudiantes, de acuerdo con el Proyecto Institucional.*
- *Participar en actividades complementarias relacionadas con el Proyecto Educativo Institucional o en proyectos específicos que requieran su experticia profesional.*

5. ***Desarrollo profesional****: Este ámbito consiste en que el egresado debe estar en condiciones para avanzar en su desarrollo profesional consolidando la importancia de su rol social mediante su permanente reflexión sobre su práctica profesional en la acción y sobre la acción. Valorando la importancia de actualizarse permanentemente, participando en el trabajo en equipo y en proyectos pedagógicos innovadores, actuando de manera ética y responsable en el desempeño de sus labores docentes.*

En particular estará en condiciones de:

- *Reflexionar en y sobre la efectividad de su práctica, para mejorarla y contribuir al desarrollo de su establecimiento educativo y del currículo*
- *Abordar dilemas éticos de su profesión*
- *Participar en proyectos de mejoramiento educativo y en el desarrollo de innovaciones* (Universidad de Santiago de Chile, 2018)

f) **Universidad Austral de Chile:** Pedagogía en Matemáticas

Perfil de Egreso

Los profesores de Matemática de la Sede Puerto Montt de la Universidad Austral de Chile poseen una formación disciplinar y una elevada preocupación por la problemática de la difusión de los conocimientos matemáticos en la sociedad, en particular, la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en ámbitos escolares. Todo ello los capacita para emprender un

proyecto como el de la creación de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, enfocada hacia la formación de profesores para la Enseñanza Media. Para tratar académicamente esta problemática, además de la formación matemática, el Plan de Estudios que se propone incluye materias del área didáctico-pedagógica, así como también, una importante formación en Educación Matemática. A la vez, plantea una temprana y progresiva inserción de los estudiantes en establecimientos educacionales del sistema nacional, que facilita una vinculación efectiva entre los aportes teóricos y las prácticas docentes en las salas de clases.

La carrera tiene una duración de cinco años y su Plan de Estudios deja patente una sólida formación general, disciplinar, vinculante/profesional y optativa, que garantiza que el futuro Profesor de Matemáticas, no sólo estará apto científicamente, para dirigir un proceso de aprendizaje efectivo en sus educandos, sino también, para enfrentar con éxito los cambios curriculares que el desarrollo de la pedagogía, las propias Matemáticas y la tecnología, con certeza presentarán en el futuro.

En consecuencia, en el perfil de egreso de este profesional de la Educación se destaca, entre las competencias fundamentales, la de conocer y comprender con profundidad los contenidos de Matemática propuestos en su formación, su evaluación histórica, su estructura conceptual y metodológica, así como sus características epistemológicas, de tal modo que puedan establecer las relaciones que existen entre las diferentes áreas de las Matemáticas y entre ésta y otras áreas del conocimiento científico, así como los fundamentos, estructura conceptual y metodológica, de las teorías psicológicas y del aprendizaje y su aplicación al campo educativo, con el fin de atender a las características sociales, culturales y psicológicas de sus estudiantes.

Consciente de la globalidad de los macroprocesos, el profesor de Matemáticas comprende y utiliza el idioma inglés de forma instrumental, maneja las TIC's y las técnicas computacionales, estando capacitado para aprender y actualizarse de manera permanente y de contextualizar su accionar en conformidad a los requerimientos del campo laboral actual y de las organizaciones educativas propias del nivel de la Enseñanza Media. Profesionalmente, el Profesor de Matemáticas desarrolla competencias específicas orientadas a facilitar el proceso educativo integral de sus estudiantes, fortaleciendo sus capacidades cognitivas y socioafectivas, a través de la mediación de experiencias vinculadas a las Matemáticas, el desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento lógico y la comprensión de su entorno, permitiendo en sus educandos aprendizajes oportunos y pertinentes a sus características, necesidades e intereses. Además, el Profesor de Matemáticas concibe las Matemáticas como una disciplina histórica, activa, de multifacéticas aplicaciones y posibilidades de desarrollo del espíritu creativo, crítico y lúdico de los estudiantes de la Enseñanza Media e integra los conocimientos matemáticos no sólo al interior de su ciencia, sino también, junto a los conocimientos educativos, con los de otras disciplinas complementarias y con las nuevas tecnologías.

Como especialista, demuestra dominio de los conceptos y estructuras básicas de las Matemáticas, demostrando su capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas, con una identificación clara de hipótesis y conclusiones. Además, formula problemas y modelos básicos en lenguaje matemático, a partir de situaciones reales, utilizando las herramientas computacionales de cálculo numérico y simbólico, para plantear y resolver dichos problemas.

El Profesor de Matemáticas es un profesional que manifiesta una constante disposición para enfrentar nuevos problemas en distintas áreas, demostrando su capacidad para trabajar con datos experimentales y contribuir a su análisis. Se caracteriza por ser agente social de cambio que actúa con autonomía, responsabilidad y compromiso ciudadano, creativo, reflexivo y crítico respecto de su práctica, capaz de tomar decisiones responsables y asertivas, generando y asumiendo propuestas de cambio con liderazgo pedagógico en beneficio de la comunidad.

Este profesional de la Educación es capaz de elaborar, poner en práctica y evaluar, proyectos de enseñanza de la Matemática, de manera crítica, creativa y responsable, en todas las fases del proceso de intervención pedagógica relacionadas con la planificación, el desarrollo, la evaluación y los ajustes correspondientes en la práctica docente. También se caracteriza por asumir una actitud de permanente búsqueda del conocimiento, con una mirada crítica de la ciencia y su quehacer, que lo lleva a ser un profesional eficiente y comprometido en los procesos de enseñanza propios de su competencia. Además, es un profesional con capacidad de comunicación y adecuadas relaciones interpersonales que facilitan el trabajo en equipo, asumiendo actitudes de colaboración profesional en la identificación, planteamiento y resolución de problemas. De igual modo, actúa con discernimiento ético y respetuoso de la naturaleza humana, orientado por los valores que la Universidad Austral de Chile establece como "Sellos" institucionales para la formación de sus profesionales y que le permiten una mediación para el desarrollo de sus educandos.

El Profesor de Matemáticas será un profesional centrado en la adquisición de capacidades y en el desarrollo de competencias profesionales de un egresado de Pedagogía de la Universidad Austral de Chile como son:

- *Enseñar a aprender, trabajar en equipo y aportar valor agregado al trabajo educativo en aspectos cognitivos, afectivos y físicos de sus estudiantes.*
- *Generar nuevo conocimiento, asumiendo los desafíos presentes en las políticas públicas y el currículo escolar, para promover el mejoramiento de la calidad y equidad de la educación.*
- *Comprender y mediar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, con métodos adecuados de enseñanza, habilidades esenciales para la docencia y*

procedimientos aptos para una evaluación formativa permanente en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Media.

- *Incorporar los avances tecnológicos en su práctica docente de forma crítica.*
- *Poseer sentido ciudadano, conducta ética y solidaria, abierto a los retos sociales y culturales del actual mundo globalizado.*
- *Escuchar y comprender el mundo cultural de los estudiantes y actuar como activador del valor funcional que desempeña el aprendizaje de la cultura en el marco de la vida cotidiana.*
- *Actuar como transmisor de la tradición cultural en su entorno inmediato, pero a la vez, generador de transformaciones y promotor de alternativas diferenciadas, haciendo de la experiencia educativa una experiencia individual y socializante* (Universidad Austral de Chile, s.f.).

g) **Universidad Católica del Norte:** Pedagogía en Matemática en Educación Media

Descripción General

El Profesor de Matemática en Educación Media de la UCN es el profesional encargado de diseñar, desarrollar y evaluar estrategias de aprendizaje para ser implementadas en la Educación Secundaria, respondiendo a los requerimientos educativos desde una mirada inclusiva y democrática, aportando al desarrollo integral de sus estudiantes.

Su rol profesional de agente de cambio que integra conocimientos inter disciplinarios, le permite adaptarse al medio y a la realidad educativa, asumiendo la docencia en establecimientos científico-humanistas y/o técnicos profesionales. Su formación también le prepara para desempeñarse en investigación, continuar estudios de postgrado e integrar equipos interdisciplinarios.

La Universidad Católica del Norte fomenta la innovación en la formación pedagógica con el propósito de aplicar dinámicas efectivas en la práctica de la disciplina. Para ello, su cuerpo docente está en constante actualización gracias a un modelo de Educación Continua. La carrera cumple con los estándares para la formación inicial de los Profesores de Educación Media (Universidad Católica del Norte, 2018).

h) **Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación:** Licenciatura en Educación en Matemática y Pedagogía en Matemática (Plan con menciones)

Perfil profesional:

La Formación Inicial del Licenciado en Educación en Matemática y Profesor de Matemática y sus menciones en la UMCE, se orienta a obtener un profesional especializado en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Dicho proceso propende al desarrollo de competencias que articulan la interrelación de las dimensiones teóricas y prácticas, tanto de las disciplinas específicas como de las Ciencias de la Educación, en una consistente vinculación con la Naturaleza de la Matemática y sustentadas en el desarrollo de competencias para indagar y aprender continuamente. Esta formación responde a los requerimientos del Sistema Nacional de Educación, se alinea con las características del contexto sociocultural y natural del país y con las actuales propuestas de la Educación Matemática (La U Pedagógica de Chile. UMCE, 2018).

i) **Universidad de Tarapacá:** Pedagogía en Matemática

Perfil Profesional

Como profesional puede desempeñarse en el Sistema Educacional del País, tanto a nivel de Enseñanza Media como de Educación Superior, con el fin de satisfacer las necesidades generadas por el proceso de enseñanza-aprendizaje y por la gestión e investigación propias de las áreas de su especialidad. Además, podrá ejercer su profesión como profesional independiente o continuar sus estudios a nivel de postgrado.

Campo Laboral

El egresado posee conocimientos de Matemática y Ciencias de la Educación, que lo facultan para ejercer la función docente en forma efectiva, aplicando sus conocimientos creativa y científicamente, con criterio reflexivo, con el fin de lograr mayores capacidades para aprender a aprender, comunicarse y adaptarse a los cambios, incorporando los avances tecnológicos e informáticos al proceso educativo. Los egresados evidenciarán competencias en las dimensiones del saber, saber ser, saber hacer y saber convivir (Universidad de Tarapacá. Universidad del Estado, 2018).

j) **Universidad Arturo Prat:** Pedagogía en Matemática y Física

¿Dónde Trabajaré?

Te desempeñarás en el amplio ambiente de la educación nacional, donde podrás interactuar con profesionales de otras áreas y entregar un valioso aporte al interior de equipos multidisciplinarios, por ejemplo, diseñando material didáctico, confeccionando apuntes e investigando nuevos métodos de enseñanza, ya sea en entidades estatales, municipales y/o privadas (Universidad Arturo Prat, s.f.).

k) **Universidad de Antofagasta:** Pedagogía en Matemática

Perfil de egreso

El Profesor de Matemática es un profesional capacitado para desarrollar y potenciar las habilidades y capacidades matemáticas de los educandos, la valoración del pensamiento matemático como la generalización y el modelamiento, mediante lenguaje técnico y preciso, claro y orientador.

El profesor de Matemática está capacitado para diseñar y aplicar actividades de aprendizaje y procedimientos de evaluación, generar un ambiente propicio para el aprendizaje, reflexionar sobre su práctica pedagógica y para trabajar, colaborativamente, con apoderados, pares y otros profesionales hacia el logro de los aprendizajes.

El Licenciado en Educación, está habilitado para contextualizar social y culturalmente las políticas educativas. Analizar críticamente sus prácticas pedagógicas y emprender proyectos de investigación sobre temas propios del ámbito educativo, con la finalidad de continuar y profundizar su formación en educación.

En suma, un profesional con capacidades matemáticas suficientes y necesarias para ser un buen diseñador, gestionador y evaluador de actividades de aprendizaje de la Matemática, investigador de sus propios procesos de desempeño, utilizando sus capacidades de comunicación y de trabajo en equipo para contribuir al desarrollo sustentable, ejerciendo preferentemente en contextos de diversidad y multiculturalidad (Universidad de Antofagasta, 2015).

l) **Universidad de la Serena:** Pedagogía en Matemática y Computación

Descripción Profesional:

Es profesor de Matemáticas y Computación es un profesional con sólidos conocimientos articulados conceptuales, procedimentales y actitudinales, de Matemática, Computación y Pedagogía, que posee principios ético-valóricos y una formación personal que le permita relacionarse con su entorno social y cultural en forma autónoma y crítica. Estos principios y conocimientos le permiten desempeñarse en el sistema educativo nacional a nivel de Enseñanza Media, para favorecer la construcción de las competencias matemáticas y computacionales de los educandos y contribuir a su desarrollo integral como personas (Universidad de la Serena. Tu Universidad Estatal en la Región de Coquimbo, 2018).

m) **Universidad de Playa Ancha:** Pedagogía en Matemática

Perfil asociado a la formación disciplinar de la profesión.

Utiliza procedimientos lógico-matemáticos para comunicar, conceptualizar, desarrollar algoritmos, distinguir e inferir ideas, factores o consecuencias de casos o situaciones reales en el campo de la geometría euclidiana plana, el álgebra (clásica y lineal), el cálculo en una variable, los sistemas numéricos referenciales, la teoría de los números, la estadística descriptiva y la probabilidad, incorporando el manejo de software matemático. Además, diseña programas computacionales e integra recursos virtuales para la promoción del aprendizaje (Universidad de Playa Ancha, 2018).

n) **Universidad del Bío Bío:** Pedagogía en Educación Matemática

PERFIL DEL EGRESADO

Con una capacidad de abordar el trabajo didáctico que solicita la puesta en acción de situaciones para el aprendizaje y la evaluación de las competencias, que propone más bien una nueva pista de respuesta a la pregunta del objetivo de la enseñanza de la matemática que hay que enseñar (Universidad del Bío Bío, 2018).

o) **Universidad de la Frontera:** Pedagogía en Matemática

Perfil del Egresado

El Profesor(a) de Matemática formado(a) en la Universidad de La Frontera, es un(a) profesional de la educación que interpreta crítica y reflexivamente el conocimiento y la cultura en el desarrollo de su función docente. Cuenta con capacidades para desempeñarse en la gestión integral de la docencia, considerando los fundamentos de la educación, y en el proceso de enseñanza-

aprendizaje de la matemática y la estadística, que le permiten participar activa y creativamente en los desafíos presentes en su contexto socioeducativo local, regional y nacional.

Su formación básica y especializada en educación considera el saber de diversos paradigmas educativos, teorías del aprendizaje, características del contexto educativo, formación ciudadana, elementos que contribuyen a la reflexión de su práctica profesional. La formación disciplinar considera enfoques teóricos de didáctica de la matemática, conocimientos en números, álgebra, cálculo, geometría, estadística y probabilidades, para el desarrollo de habilidades matemáticas, tales como, modelación, resolución de problemas, utilización de lenguaje simbólico, análisis, organización, representación e interpretación de datos. En el ámbito pedagógico integra estos conocimientos en la gestión de aula y en su participación en la comunidad educativa, facilitando el mejoramiento de los aprendizajes y desempeños sociales, culturales e interculturales de la diversidad de sus estudiantes.

Actúa éticamente con responsabilidad y compromiso profesional y social, enfatizando habilidades de comunicación, trabajo en equipo, liderazgo, uso de las tecnologías de la información, y la actualización permanente, atributos que le permiten desempeñarse con autonomía y ampliar sus condiciones de empleabilidad en variados escenarios.

El Profesor(a) de Matemática ejerce su profesión en diversos niveles y establecimientos educacionales, en instituciones públicas y privadas, y además puede desempeñar el ejercicio libre de la profesión (Admisión Universidad de la Frontera, 2018).

p) **Universidad de los Lagos:** Pedagogía en Educación Media en Matemática y Computación

Perfil Profesional

Un profesor calificado para ejercer en la educación media, con actitudes, habilidades y conocimientos en matemática y en computación e informática educativa. Con formación enfocada al desarrollo de valores, integrando contenidos matemáticos, informáticos y pedagógicos en contextos de la vida cotidiana.

Perfil de Egreso (Licenciado en Educación de la Universidad de Los Lagos)

Un graduado con actitudes, habilidades y conocimientos de la estructura conceptual y epistemológica de las ciencias de la educación y de las situaciones educativas que le permitan integrar equipos de investigación y generar conocimientos asociados al mejoramiento de su propio desempeño, de la unidad educativa a la que pertenece y de los contextos próximos (Admisión ULAGOS, 2018).

q) **Universidad de Magallanes:** Pedagogía en Matemática para Enseñanza Media

PERFIL DEL EGRESADO

El Profesor/a de Matemática, Licenciado/a en Educación, es poseedor de las claves teóricas y prácticas de la didáctica y el currículo del área de Matemática. Es capaz de llevar a cabo los procesos sistemáticos de enseñanza y aprendizaje, en ambientes virtuales y no virtuales, lo que incluye, diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación de dichos procesos. Además, coordina y/o participa en actividades educativas complementarias con alumnos, directivos, profesores y apoderados que tienen lugar en la enseñanza. Actúa en consideración de las políticas y normativas vigentes, de acuerdo con el nivel de educación atendido, en pleno conocimiento del destinatario de su acción pedagógica y del contexto en que se desempeña, maximizando el uso de recursos disponibles del entorno que caracteriza la cultura regional. Muestra también, la capacidad de actualización permanente, de autoperfeccionamiento en lo pedagógico y en su especialidad, estando en condición de acceder a programas de postgrado y cursos de post-título y profundización profesional (Universidad de Magallanes, 2018).

r) **Universidad de Talca:** Pedagogía en Matemática

El profesor(a) de EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICAS formado en la Institución será un profesional que habrá desarrollado exitosamente competencias disciplinares, profesionales y fundamentales en un nivel avanzado, lo que le posibilitará desempeñarse en instituciones educativas públicas y privadas a nivel nacional. En consecuencia, el profesional titulado en nuestra universidad estará habilitado(a) para:

- *Formación fundamental*

Comunicar discursos en forma oral y escrita, basándose en los recursos lingüísticos académicos para desempeñarse en situaciones del ámbito profesional. (AVANZADO)

Integrar equipos de trabajo desarrollando habilidades sociales y de autogestión, para potenciar la capacidad de crear valor desde su profesión. (INTERMEDIO)

Actuar con sentido ético y responsabilidad social en el ejercicio profesional con criterios ciudadanos para el desarrollo sustentable del entorno. (INTERMEDIO)

- *Formación Básica*

FORMACIÓN GENERAL -DOMINIO: Orientación para el desarrollo integral de sus estudiantes

- *Promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en sus estudiantes desde sus dimensiones histórica, epistemológica y bajo el paradigma de una construcción social del conocimiento. (INTERMEDIO)*
- *Integrar las tecnologías de información y comunicación en la gestión de los conocimientos científicos involucrados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. (INTERMEDIO)*
- *Comunicarse a un nivel de usuario independiente B1 del Marco Común Europeo de Referencia para las Lenguas, en forma oral y escrita en inglés para desempeñarse en situaciones cotidianas y en un contexto relacionado al ámbito técnico de las matemáticas, teniendo una base sólida para el desarrollo de las competencias comunicativas en el idioma inglés respectivo a lo largo de su vida. (AVANZADO)*
- *Comunicar en inglés los conceptos de la disciplina necesarios para enseñar en el idioma a los educandos. (AVANZADO)*

- *Formación disciplinar*

FORMACIÓN EN LA ESPECIALIDAD - DOMINIO: Enseñanza de la disciplina

- *Demostrar manejo de la disciplina Matemática para Enseñanza Media en los ámbitos de Sistemas Numéricos y Álgebra; Cálculo; Estructuras Algebraicas; Geometría; Datos y Azar (COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDARES DE MATEMÁTICAS 1- 21) (AVANZADO)*
- *Guiar el aprendizaje de los estudiantes bajo su responsabilidad en los ámbitos de la ciencia Matemática referidos a Sistemas Numéricos y Álgebra; Cálculo; Estructuras Algebraicas; Geometría; Datos y Azar (COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDARES DE MATEMÁTICAS 1- 21). (AVANZADO)*

FORMACIÓN PROFESIONAL -DOMINIO: Enseñanza y evaluación de aprendizajes

- *Reconocer cómo aprenden los estudiantes de Educación Media que están bajo su responsabilidad. (COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDAR PEDAGÓGICO 1). (AVANZADO)*
- *Aplicar conocimientos pedagógicos en el diseño, planificación, implementación y evaluación de estrategias de enseñanza y de aprendizajes*

(COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDARES PEDAGÓGICOS 2-3-4). (AVANZADO).

- *Gestionar la formación integral de sus estudiantes creando ambientes de aprendizajes presenciales y virtuales apropiados y pertinentes a diferentes necesidades educativas. (COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDARES PEDAGÓGICOS 5-7-8). (AVANZADO)*
- *Evaluar sistemáticamente los aprendizajes que van logrando sus estudiantes, utilizando los resultados obtenidos para la retroalimentación continua de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. (COMPETENCIA ASOCIADA A ESTANDAR PEDAGÓGICO 6). (AVANZADO)*

▪ *FORMACIÓN PRÁCTICA- DOMINIO: Enseñanza contextualizada*

- *Desempeñarse adecuadamente en contextos educativos diferentes, promoviendo de manera permanente el desarrollo integral de los estudiantes. (INTERMEDIO).*
- *Actuar con responsabilidad y ética profesional, demostrando conciencia social de solidaridad y justicia, respetando la diversidad sociocultural, el medio ambiente y la biodiversidad. (INTERMEDIO).*
- *Analizar crítica y sistemáticamente su actuar profesional para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes (ASOCIADO A ESTANDAR PEDAGÓGICO 10). (AVANZADO*) (Universidad de Talca, 2017)

s) **Universidad Católica del Maule:** Pedagogía en Matemática y Computación

Descripción de la carrera

La carrera de Pedagogía en Matemática y Computación se inicia el año 2004, con el propósito fundamental de formar profesores de matemática para la enseñanza media, que integren las nuevas Tecnologías de Información en los procesos educativos.

El proceso formativo se desarrolla desde tres ejes fundamentales:

El primero de ellos es la formación pedagógica, que aporta los elementos que permitirán a los profesores en formación, la posibilidad de actuar como mediadores en el logro de aprendizajes de sus futuros estudiantes.

En segundo lugar, tenemos el desarrollo del conocimiento disciplinar y didáctico específico, que constituye la base de la formación inicial de un profesor de matemática. Además, su formación en computación le permite el manejo de plataformas para la elaboración, transformación y uso creativo de software con propósitos pedagógicos.

Por último, está la formación personal, ética y valórica, que aporta a la formación integral de los alumnos, produciendo el diálogo entre fe y razón.

Complementa esta formación, la visión integradora de la matemática con las otras ciencias y la formación general requerida para un profesional de la educación (Universidad Católica del Maule, 2018).

t) Universidad Católica de la Santísima Concepción: Pedagogía en Educación Media en Matemática

DESCRIPCIÓN DE LA CARRERA

El itinerario formativo de la carrera, a través de un currículum basado en resultados de aprendizajes y competencias, forma a un profesor de Educación Media en Matemática en conformidad al marco curricular nacional, sin obviar la necesaria formación en investigación e innovación, de acuerdo a las necesidades y contextos en que se desenvolverá laboralmente. Por ello, resulta fundamental educar hacia la necesaria disposición a la profundización académica, el perfeccionamiento y el trabajo personal orientados al aprendizaje y autoaprendizaje, imprescindible para cualquier profesional de la educación (UCSC Facultad de Educación, 2018).

u) **Universidad Católica de Temuco:** Pedagogía Media en Matemática

Perfil de la Carrera

Esta carrera forma profesores de matemática comprometidos con la formación integral de sus estudiantes, con un sólido conocimiento disciplinario y de su enseñanza, que le permite facilitar en ellos el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático, favorecer la construcción de conocimientos y el logro de aprendizajes significativos y profundos a través de la elaboración y el desarrollo de propuestas innovadoras en el aula y en la unidad educativa.

Competencias del Egresado

Es un profesional con competencias disciplinarias, pedagógicas, didácticas y tecnológicas que promueve el aprendizaje matemático en sus alumnos; con sentido ético, crítico y reflexivo, con

competencias comunicativas y sociales que favorecen en sus educandos la valoración y el respeto de la diversidad (Universidad Católica de Temuco, Copyrights © 2013, 2016).

v) ***Universidad de O'Higgins:*** *Pedagogía en Matemática*

Perfil de Egreso

Los profesores y profesoras egresados(as) de Pedagogía en Matemática para enseñanza media son profesionales con sólidas competencias matemáticas, didácticas y pedagógicas, que reflexionan críticamente sobre los saberes obtenidos. Consideran la diversidad inherente de sus estudiantes. A partir de un profundo manejo de la matemática son capaces de generar oportunidades de aprendizaje para todos sus estudiantes. Son capaces de desarrollar diversas estrategias de enseñanza y evaluación, y ajustarlas creativa y permanentemente (Universidad de O'Higgins, 2017).

Para realizar un análisis de los perfiles y descripciones de los profesionales egresados de las carreras de pedagogía de las universidades chilenas, utilizaremos el programa ATLAS.TI, que nos ayudará a tener una visión más global.

De este análisis, obtenemos que, en los perfiles profesionales, se menciona la comunicación como:

- En la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, como **competencia específica disciplinar**
- En la Universidad de Santiago de Chile, como parte del dominio de **Experticia disciplinaria**
- En la Universidad de Tarapacá, como una **"capacidad"** en el ejercicio de su profesión docente.
- En la Universidad Austral de Chile, como **capacidad** que le ayuda al profesor a desenvolverse como profesional
- En la Universidad de Antofagasta, como **capacidad** para contribuir al desarrollo sustentable de los establecimientos educacionales
- En la Universidad de Playa Ancha, como **competencia** para la enseñanza de la matemática
- En la Universidad de la Frontera, como una **habilidad** para el ejercicio de su profesión
- En la Universidad de Talca, como una **habilidad** adquirida en su formación básica y fundamental.
- En la Universidad Católica de Temuco, como **competencia comunicativa**

Lo anterior, evidencia que no hay consenso en el papel que juega la comunicación, y en específico la competencia comunicativa del profesor de matemática en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje. Esto, justificado en el hecho que se declara la comunicación como *capacidad, competencia o habilidad*.

4.2 Mallas curriculares de Pedagogía en Matemática

Al hacer una inspección por las mallas curriculares disponibles en los sitios web de las universidades pertenecientes al Consejo de Rectores de Chile, podemos decir que:

- En 11 de los 19 programas de formación de profesores de matemática, se incluyen asignaturas relacionadas con la comunicación
- En 10 de los 11 programas, las asignaturas referentes a la comunicación están distribuidas en el primer año de formación. Solo en uno de ellos forma parte del segundo y tercer año de formación del profesor.
- En 3 de los 11 programas de formación, los cursos de comunicación se relacionan con la enseñanza de la disciplina.

Sin embargo, no tenemos acceso libre a los programas de dichos cursos (sus objetivos, propósitos, temas abordados y habilidades a desarrollar), por lo que no podemos establecer una relación directa de las habilidades, capacidades y herramientas comunicativas que ellas entregan a los futuros profesores y lo que se declara en los perfiles de egreso de dichas carreras.

Capítulo 5: Encuesta a jefes de carrera

A continuación, presentamos las respuestas de los directores y/o jefes de carrera para los programas de formación de profesores.

La encuesta que se titula "*Encuesta sobre Desarrollo de habilidades comunicativas para enseñar matemática en la Formación de Profesores de Educación Matemática*", fue realizada de forma online y mediante la plataforma de Google Forms.

Las respuestas a las preguntas del cuestionario fueron ordenadas de acuerdo con el orden temporal de recepción de sus respectivas respuestas.

5.1 Análisis de las respuestas de los jefes de Carrera

A continuación, se presentan las respuestas a cada una de las preguntas enviadas por los jefes de Carrera del programa de Pedagogía en Matemática de la institución que le corresponde.

i. Dada su experiencia, ¿Qué importancia tiene el desarrollo de habilidades comunicativas en la formación profesores de matemática? Argumente su respuesta y describa cuáles habilidades considera que el profesor de matemática debe desarrollar en el aspecto comunicativo.

Jefe de Carrera A	El desarrollo de las habilidades comunicativas en lengua materna es fundamental en un profesor. En particular en el profesor de matemática, además debe desarrollarse el lenguaje matemático (lenguaje universal). Este desarrollo es necesario para su formación de futuro profesional, su relación con otros profesionales y para propender al desarrollo de estas habilidades en sus estudiantes. Las habilidades comunicativas que debe desarrollar el profesor de matemática son: el lenguaje oral (como lo es utilizar un lenguaje adecuado, directo, modulación, inflexiones de voz); lenguaje escrito (redacción, ortografía, claridad en escritura de letras, palabras y números); el escuchar (empatía, uso de lenguaje no verbal, como lo es el mirar a la persona).

Jefe de Carrera B	Es muy importante ya que los profesores deben propiciar en los estudiantes un interés permanente por el desarrollo de sus capacidades matemáticas, respetando la diversidad. Las habilidades que debe desarrollar son la expresión oral y escrita, la empatía y la tolerancia que ayudan a una buena comunicación
Jefe de Carrera C	Debiese ser muy importante, ya que es una de las competencias básicas que fomenta nuestra Universidad. Los programas de formación docente consideran al menos una asignatura. En el caso de nuestra carrera, esta competencia, además de la asignatura, está diseminada en el resto de las asignaturas que forman el plan de estudio.
Jefe de Carrera D	El estudiante no puede construir representaciones deseadas si no hay bidireccionalidad en la comunicación
Jefe de Carrera E	Muy importante porque debe enseñar a jóvenes y mostrarles lo entretenido e interesante que es la matemática, y la utilidad que tiene.
Jefe de Carrera F	Es importante, no solo para el profesor de Matemática. La entrega de la disciplina debe ser clara y que llegue a los alumnos, por lo tanto, se espera que el profesor tenga habilidades de comunicación.
Jefe de Carrera G	Son fundamentales ya que el profesor es un mediador entre el conocimiento matemático y sus estudiantes. Sus habilidades comunicativas deben estar relacionadas con el compartir significados para lo que debe tener, entre otras, habilidades para seleccionar y construir mensajes matemáticos con sentido para los estudiantes; re significar y aplicar distintos registros de la matemática en forma directa o a través de diferentes recursos de

	aprendizajes, aplicar estrategias comunicativas persuasivas que afecten positivamente la motivación de logros de los estudiantes para abordar la complejidad matemática y la confianza de ellos mismos para aprender matemática y para generar climas sociales positivo de aprendizajes que favorecen el crecimiento personal con integración social.
Jefe de Carrera H	Para cualquier profesor es de suma importancia, para uno de matemática más aun cuando tiene que usar lenguaje común para expresar conceptos de lenguaje matemático. Manejo de vocabulario, expresión escrita y expresión oral fluida

Todos los jefes de carrera coinciden que el desarrollo de habilidades comunicativas en los profesores de matemática es muy importante, pues mediante el lenguaje (matemático y materno) los profesores pueden comunicar la disciplina a sus alumnos, mejorar el clima de aula, incentivar el interés por la disciplina y les permite, además, a los profesores desarrollarse profesionalmente.

ii. En el proceso formativo de profesores de matemática de su institución, ¿se abordan las habilidades comunicativas?

Todos los jefes de Carrera responden que **si** se abordan las habilidades comunicativas en los planes de formación que dirigen.

iii. De acuerdo con el plan de estudio que Ud. dirige, ¿qué asignaturas desarrollan habilidades para comunicar la matemática? Argumente su respuesta.

Jefe de Carrera A	Creo que todas las asignaturas contribuyen al logro de estas habilidades, teniendo mayor énfasis en las asignaturas Metodología de la Enseñanza de la Matemática, Orientación Educacional y en las Prácticas Docentes.

	En la asignatura de Metodología de la Enseñanza de la Matemática, se aborda poniendo especial cuidado en la transmisión de la enseñanza que involucra todas las habilidades descritas en la pregunta 1. Esto se hace mediante evaluación de clases simuladas, exposiciones y trabajos escritos. En Orientación Educacional, como curso final del Área de Formación Pedagógica, estas habilidades se afianzan con fundamentos teóricos para desarrollar labores de jefatura de curso y trabajo dirigido al desarrollo de los Objetivos Fundamentales Transversales establecidos por el MINEDUC. En cada una de las Prácticas Docentes, el futuro profesor debe relacionarse con integrantes de una comunidad educativa (paradocentes, docentes, directivos, estudiantes) utilizando un lenguaje adecuado y claro, acorde a las distintas experiencias directas e indirectas relacionadas con los distintos objetivos que se persiguen en cada práctica. Específicamente en la Práctica Profesional, el futuro profesor debe dar cuenta de todas estas habilidades. En cada asignatura, el profesor que está a cargo de dictarla contribuye al desarrollo de las habilidades comunicativas mediante su propia labor docente. Existen algunas asignaturas que incluyen contenidos matemáticos cercanos a los de la Enseñanza Media. En éstas, además, se realizan actividades de trabajo colaborativo o disertaciones, las cuales complementan y potencian el desarrollo en esta línea en una forma temprana. Existen asignaturas electivas específicas en este tema, las cuales están dirigidas para estudiantes de pedagogía
Jefe de Carrera B	Comunicación Efectiva, Las tres Didácticas, Las Prácticas Pedagógicas.
Jefe de Carrera C	La asignatura Competencias Comunicativas en específico, y en todas las del área pedagógica-profesional. No obstante, a lo anterior, también en las asignaturas de Didáctica Específica y Talleres del área de práctica

Jefe de Carrera D	Taller de Comunicación, y Lenguaje Matemático lo hacen de manera explícita, y todas las otras lo hacen de manera implícita.
Jefe de Carrera E	Los cursos con conocimiento pedagógico del contenido y las didácticas y las prácticas, donde se trabaja cómo enseñar la matemática y donde además se aprende a investigar en problemas de la matemática
Jefe de Carrera F	En algunas asignaturas se hacen disertaciones, como ser en las didácticas, en las prácticas y en alguna otra dependiendo de los programas
Jefe de Carrera G	Aunque esta habilidad deberías ser desarrollada transversalmente en el plan de estudios hay varias de ellas que contribuyen en forma especial desde el primer semestre. A modo ilustrativo, en el curso de introducción de la Pedagogía en Matemática y computación se abordan varios aspectos específicos y se consideran obstáculos personales y ambientales de los estudiantes aun cuando en varias de ellas, de las diferentes componentes del plan de estudios, se usan códigos elaborados le proporcionan a los estudiantes experiencias que fortalecen su formas de comunicación hay en varias en educación matemática que proporcionan en forma vicaria o experiencial habilidades comunicativas verbales, no verbal y escrita.
Jefe de Carrera H	Como generales teoría de la comunicación y habilidades de comunicación, como específica los talleres pedagógicos y talleres curriculares por eje de la matemática. En cada asignatura de la especialidad se les exige exponer y explicar conceptos

Con respecto a las asignaturas de los planes de formación de profesores de matemáticas, los jefes de carrera afirman que las *habilidades para comunicar la matemática* se desarrollan transversalmente a lo largo de la carrera. Sin embargo, también mencionan que estas habilidades se desarrollan actualmente en cursos tales como:

- Metodología de la Enseñanza de la Matemática
- Orientación Educacional
- Prácticas Docentes
- Comunicación efectiva
- Didáctica
- Competencias Comunicativas (Estrategias de comunicación)
- Taller de comunicación
- Lenguaje matemático
- Cursos de conocimiento pedagógico
- Introducción a la pedagogía en matemática y computación
- Teoría de la comunicación
- Habilidades de comunicación

iv. En la eventualidad de un rediseño curricular, ¿consideraría al menos una asignatura que desarrolle habilidades comunicativas en los estudiantes de su carrera? Argumente su respuesta.

Jefe de Carrera A	Sí. En la propuesta de perfil para el egresado de pedagogía de nuestra institución (las carreras se encuentran en proceso de renovación curricular), se han incluido capacidades en esta dirección, como lo son: comunicación oral y escrita de manera efectiva, coherente y correcta en diversos contextos profesionales; capacidad de comprensión lectora en inglés. Dada esta propuesta, la malla curricular renovada debería dar cuenta de estas intenciones.
Jefe de Carrera B	Hay ya una asignatura que es Comunicación Efectiva, lo importante son las reuniones periódicas con el cuerpo docente

	para tener criterios comunes respecto del desarrollo de estas habilidades.
Jefe de Carrera C	En el plan antiguo, como en el nuevo plan, producto de la Renovación Curricular, se consideran varias asignaturas que tributan a las competencias comunicativas, tal como lo expresé anteriormente.
Jefe de Carrera D	Antes lo señalé: ¡es esencial!
Jefe de Carrera E	No considero que se necesite algo adicional a lo que ya tenemos
Jefe de Carrera F	Estamos en rediseño, pero es común para todas las pedagogías y no se ha tocado el tema.
Jefe de Carrera G	Más que una asignatura fijaría hitos de control durante el desarrollo del plan de estudio que es monitoreado y mejorado permanentemente.
Jefe de Carrera H	Ya las tenemos, la competencia de comunicación es una de las competencias de nuestro plan de estudios

Con respecto a esta pregunta, los jefes de carrera hacen referencia a las habilidades comunicativas o a la competencia de la comunicación como eje transversal de sus programas de estudio. En la eventualidad de un rediseño, lo someterían a evaluación y/o discusión, pero, en definitiva, no consideran que sea necesario integrar una asignatura que desarrolle estas habilidades (pues ya hay asignaturas que las desarrollan o se desarrollan transversalmente).

Cabe mencionar, que parece interesante que se proponga *hitos de control*, a lo largo de la formación del profesional, pues daría cuenta de una evolución en el desarrollo de estas habilidades por parte de los futuros profesores.

En resumen, la encuesta a los jefes de Carrera deja en evidencia que la preocupación por la competencia de la comunicación de la matemática queda en un plano transversal y que no necesita un carácter de urgencia.

Capítulo 6: Encuesta a profesores en ejercicio de la profesión

A continuación, presentamos las respuestas a la encuesta "*Cuestionario de percepción sobre habilidades comunicativas para enseñar matemática*" que se realizó a 23 profesores en ejercicio de distintas regiones del país.

La encuesta se realizó de manera online y la participación de los profesores fue completamente voluntaria.

Las respuestas a las preguntas del cuestionario fueron ordenadas de acuerdo al orden temporal de recepción de sus respectivas respuestas.

Previamente, se muestran los gráficos que resumen información referente a su casa de estudios, años de ejercicio de la profesión docente, región donde trabaja, género y dependencia del establecimiento en el cual desempeña su labor.

6.1 Gráficas

Han respondido la encuesta un total de 23 profesores de los cuales:

Figura 3: Distribución por género de profesores encuestados

Los profesores encuestados provienen de 13 universidades distintas:

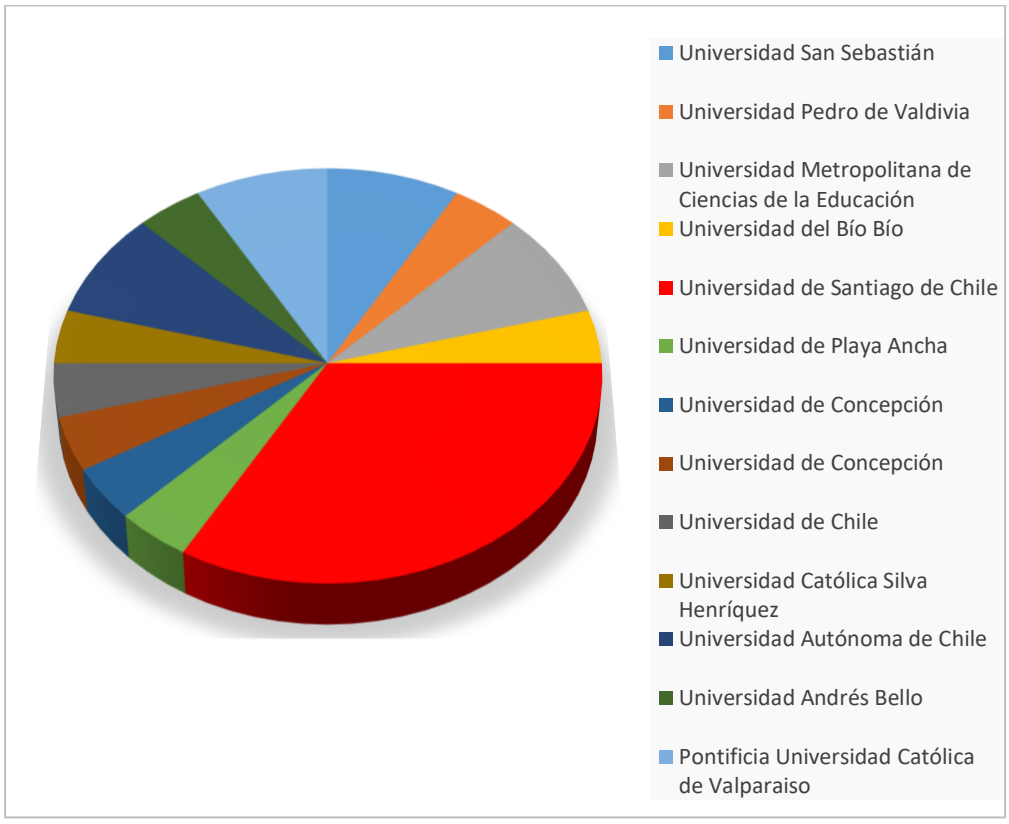


Figura 4: Universidad de obtención de Título profesional

Se obtuvieron respuestas de profesores que desempeñan su labor en 6 regiones distintas:

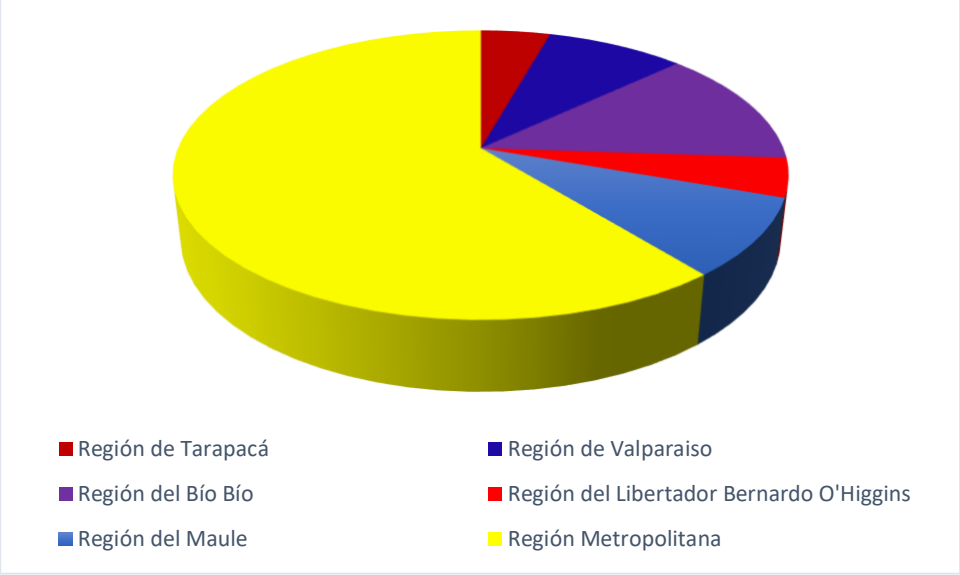


Figura 5: Región donde trabaja

En el gráfico de a continuación, se muestra la dependencia del establecimiento donde trabaja:

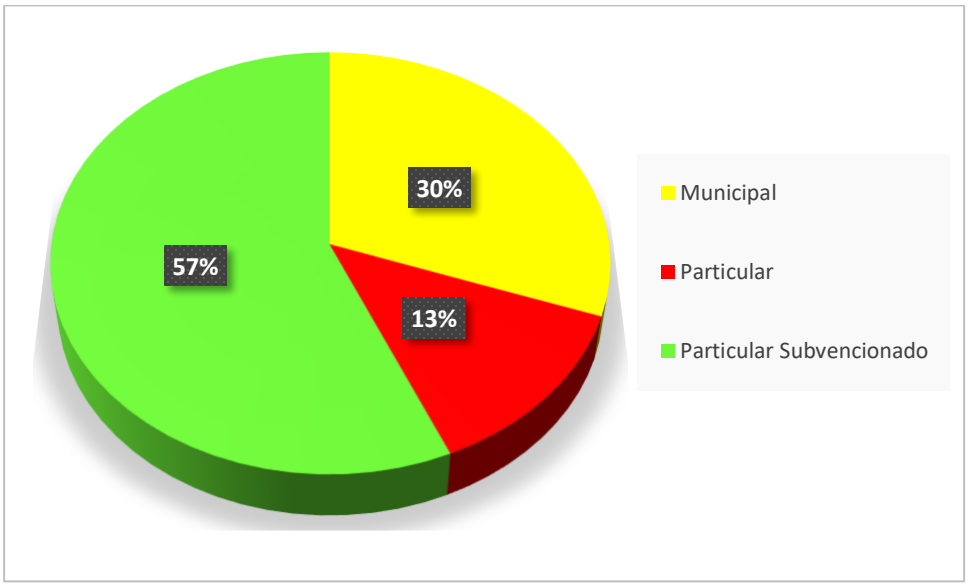


Figura 6: Dependencia del establecimiento donde trabaja

Los años de experiencia en sistema escolar, varían desde 1 año a 30 años.

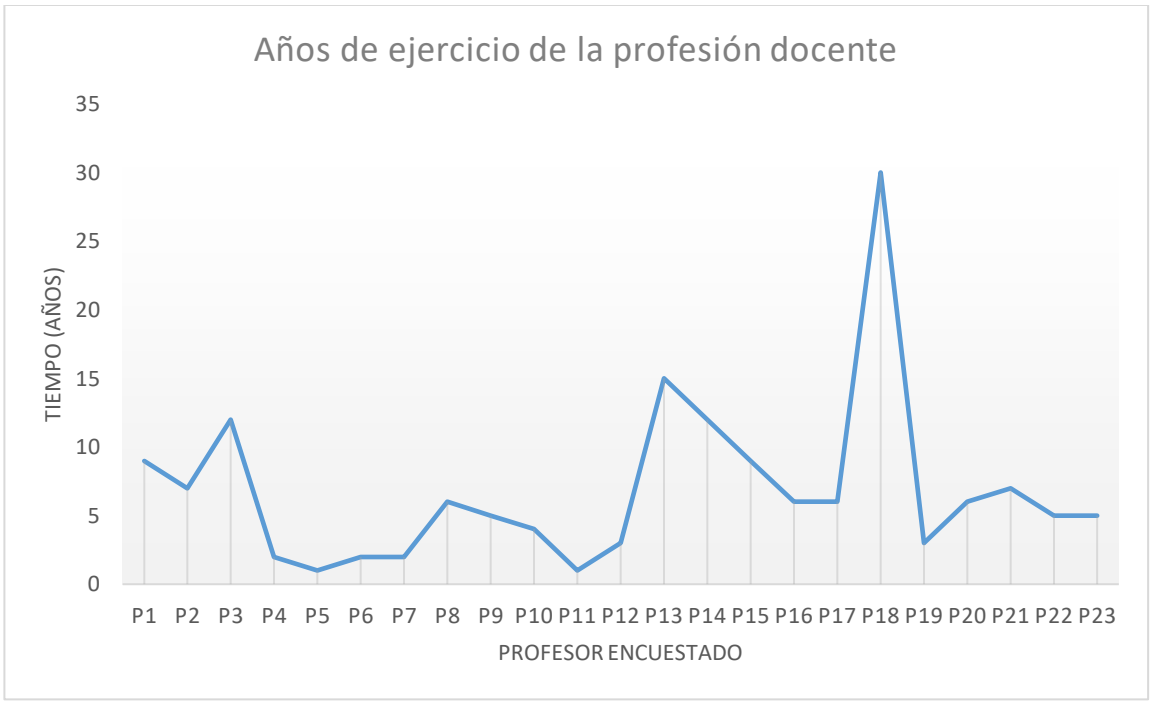


Figura 7: Años de ejercicio de la profesión docente

6.2 Análisis de las respuestas de los profesores

A continuación, se presentan las respuestas a cada una de las preguntas enviadas por los profesores.

1. ¿Piensa UD. que en sus clases de matemática comunica claramente lo que desea que sus estudiantes aprendan? ¿Por qué?[3]

Con respecto a esta primera pregunta, podemos afirmar que:

- 14 de los 23 profesores comenzaron su respuesta con las frases: “Si, ya que…” “Sí, porque…” “Sí, dado que…” “Sí, pues…”, entre otras.

  Cabe mencionar que en cada una de estas respuestas por parte de los profesores encuestados, se hace enfasis en que, lo que se quiere comunicar se enfoca en lo *planificado, el ambiente de aula, el objetivo de la clase, las actividades y/o ejercicios, el lenguaje, el contenido, las habilidades de los alumnos, la heterogeneidad*; estableciendo un proceso más unidirecional en lo que pretenden enseñar. Sin embargo, se destaca la respuesta del Profesor 23

  > *Sí, porque cotidianamente me esfuerzo en enlazar la habilidad a trabajar con el objetivo de la clase. Conversamos sobre lo que ellos comprenden de lo planteado, les comento lo que espero que aprendan y enlazamos lo que saben del tema, lo que imaginan del tema y lo que creen que harán en las actividades para generar expectativas y caminos a seguir. Con esto me queda claro su panorama respecto a lo que les propongo en la sesión.*

  En la respuesta de este profesor, él considera la comucación como un proceso más que unidireccional, utilizando cada uno de los elementos de la comunicación. En otras palabras, el profesor entiende que comunicar lo que quiere enseñar en la clase de matemática, viene dado por un proceso dinámico en la que él y sus alumnos intercambian roles, establecen un lenguaje propio y representaciones comunes.

- 6 de los 23 profesores utilizaron la palabra “veces”, con el objeto de indicar que en algunas de sus clases no comunica claramente lo que desea que sus alumnos aprendan, ya sean por factores de clima de aula, referentes al contenido matemático, falta de herramientas teóricas, entre otras. Por ejemplo,

  > *Profesor 3: A veces. El clima de aula es heterogéneo, hay factores que inciden en el aprendizaje esperado de los alumnos en un contendido determinado. Se deben al*

[3] Cada una de las repuesta de los profesores se encuentran en los anexos de esta tesis.

horario, el contenido, el hábito de estudio y la disposición de los estudiantes dentro de la clase. Por mencionar algunos.

Profesor 13: Algunas veces, cuando se trabaja la matemática en su propio mundo, sin ir y volver a la realidad, a mis estudiantes no les queda tan claro

- En 8 de las 23 respuestas, los profesores utilizaron la palabra" no". Solo en una de ellas, el profesor utiliza esta palabra para indicar que **no** comunica lo que sus alumnos deben aprender, haciendo referencia "*al sesgo entre el lenguaje matemático, el del estudiante y el que pretendo adaptar en clases para lograr una conexión*" (Profesor 20).
- En 5 de las 23 respuestas, los profesores hacen referencia al "objetivo".
- En 5 de las 23 respuestas, los profesores hacen referencia al "contenido".

2. Mencione algunos aspectos de su formación como profesor de matemática (en pregrado) que apuntaron al desarrollo de sus habilidades comunicativas para su quehacer pedagógico en matemática.[4]

Dentro de los aspectos que los profesores mencionan, respecto del desarrollo de sus habilidades para comunicar la matemática, podemos observar que:

- 5 de los 23 profesores hacen referencia a las prácticas profesionales como asignatura para el desarrollo de habilidades comunicativas
- En 2 de las 23 respuestas se hace referencia a la "didácticas o didáctica"
- En 2 de las 23 respuestas, los profesores consideran que ninguna asignatura desarrolló las habilidades consultadas.
- En general, las respuestas de los profesores no apuntan a asignaturas en específico o en común, sino que asignaturas de impostación y cuidado de la voz, simulaciones y micro-clases y en cómo los profesores que los formaron comunicaban la matemática.

En resumen, para la mayoría de los profesores encuestados, el aspecto más importante para desarrollar las habilidades comunicativas necesarias para la enseñanaza de la matemática, es su experiencia como profesor (prácticas profesionales) o en situaciones en las que se les pone en juego su habilidad para explicar algún contenido matemático (microclases, congresos de profesores, simulaciones de clases, uso de herramientas tecnológicas).

[4] Cada una de las respuestas de los profesores se encuentran en los anexos de esta tesis.

3. ¿Qué asignaturas de su formación como profesor de matemática, considera que desarrollaron en usted habilidades para comunicar la matemática?[5]

Las asignaturas a las que los profesores hacen referencia como desarrolladores de sus habilidades para comunicar la matemática, son entre otras:

- Didáctica y didáctica de las matemáticas
- Metodología y metodología de la enseñanza
- Asignaturas de matemática (Análisis, Álgebra, Geometría, Estadística y Probabilidad)
- Talleres de educación matemática
- Prácticas profesionales
- Impostación de la voz
- En dos respuestas, los profesores consideraron que se desarrolló la habilidad transversalmente en todas las asignaturas de la malla.
- Y en 5 de las respuestas, los profesores consideraron que ninguna de las asignaturas de su malla desarrolló en ellos habilidades para comunicar la matemática.

En síntesis, los profesores manifiestan creencias de lo que es comunicar la matemática basados principalmente en el diseño de la enseñanza, analizando la comprensión del contenido mediante el dialogo con sus alumnos (pregunta generalizada – respuesta generalizada), y evaluando la comprensión del objeto matemático mediante el uso de instrumentos estandarizados como lo son las pruebas.

Al ser consultados por los elementos teóricos y de formación, respecto de sus competencias para comunicar la matemática en la sala de clases, en primera instancia, los profesores hacen referencia a creencias de lo que es comunicar la matemática, haciendo alusión a prácticas profesionales, cursos de didáctica, cursos de impostación de la voz o simplemente que no existen esos elementos teóricos porque no fueron desarrollados en su formación profesional.

Finalmente, al ser consultados por asignaturas de su plan de formación inicial que desarrollaron en ellos habilidades comunicativas, podemos inferir que los docentes en ejercicio de la profesión piensan que estas habilidades fueron desarrolladas de forma transversal (ya sea por asignaturas

[5] Cada una de las respuestas de los profesores se encuentran en los anexos de esta tesis.

propias de la disciplina de la matemática o por asignaturas de pedagogía y/o didáctica), o no fueron desarrolladas, sino que corresponden a habilidades propias.

Capítulo 7: Episodios

Los Episodios que en este capítulo se analizan, corresponden a partes (lapsos de 15 a 20 minutos de clase en los que es posible detectar una continua interacción entre el profesor y sus estudiantes) de una clase grabada a profesores chilenos que se desempeñan en aula hace 4 o 5 años. El registro audiovisual, nos permitirá analizar las interacciones entre el profesor y sus alumnos manteniendo la naturalidad de su trabajo, facilitando y enriqueciendo el analisis a posteriori (Baer & Schnettler, 2009).

Dentro de las condiciones necesarias para el registro audiovisual consideradas para el estudio, tenemos que:

- La cámara se ubica en el fondo de la sala, con el objetivo de centrar nuestra atención en el profesor y las herramientas que utiliza para comunicarse con sus estudiantes.
- La cámara se ubica en el fondo de la sala, con el objetivo de invadir lo mínimo posible el espacio físico de los estudiantes.
- La cámara se ubica en el fondo de la sala, con el objetivo de no desviar la atención de los estudiantes de lo que explica y enseña el profesor.
- La ubicación espacial de los estudiantes es la que utilizan a diario.
- El profesor que realiza la grabación no interviene en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- El profesor que realiza la grabación manipula la cámara para dejar en evidencia los registros que el profesor objetivo deje en pizarra, así como los recursos y herramientas que utiliza para la enseñanza del contenido matemático.

Dentro de las consideraciones para la elección de los profesores que se filman, tenemos que:

- Caso de Gonzalo.
    - Es un profesor que manifiesta interés por la investigación en términos teóricos y por la investigación en educación (se encuentra estudiando en un programa de magíster).
    - Es un profesor que tiene 3 años de experiencia docente en aula (a la fecha del registro audiovisual).
    - Considera la comunicación como un eje central en desarrollo de su labor docente.
    - Es un profesor titulado de una de las universidades pertenecientes al Consejo de Rectores de Chile (CRUCH).

- Caso de Pedro.
    - Es un profesor que manifiesta interés en la investigación en desarrollo.
    - Es un profesor que tiene 5 años de experiencia docente en aula (a la fecha del registro audiovisual).
    - Desempeña su labor docente en una institución de educación escolar de características socioculturales (dependencia del establecimiento, índices de vulnerabilidad) similares a las de Gonzalo.
    - Es un profesor titulado de una de las casas de estudio pertenecientes al CRUCH.

Para cada uno de los episodios de clase, se presenta, en primera instancia, un analisis en base a una descripción de las fases de desarrollo de la enseñanza y las Actividades Típicas de Aula propuesto por Martinic y Rojas (2015), observables en cada episodio.El propósito de este análisis es identificar los tiempos que utiliza el profesor en el diseño de la enseñanza y para la enseñanza de la matemática, aplicando sus metodologías y habilidades para comunicar.

Con el objetivo de caracterizar la competencia comunicativa matemática en el aula, nos interesa identificar:

- La capacidad de utilizar y comunicar la matemática del docente en estudio en sus distintas representaciones, considerando los conceptos previos y proporcionando variedad en la justificación y argumentación en la resolución de los problemas matemáticos de la clase (faceta epistémica (Pino Fan, Assis, & Castro, 2015)).
- La capacidad de prever las respuestas y posibles dificultades que presenten sus estudiantes en la comprensión del concepto, objeto y/o problema matemático estudiado en la clase (faceta cognitiva (Pino Fan, Assis, & Castro, 2015))

Es por ello que, también se propone un análisis didáctico de las practicas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos propuesto por Font (et. al 2010); esto con el objetivo de describir y caracterizar la secuencia de proposiciones, diálogos y herramientas comunicativas que posee el profesor de matemática en estudio y que utiliza para la enseñanza de la matemática.

7.1 Episodio 1 (Gonzalo). (02.12.2016)

A continuación, presentamos la transcripción de un episodio de clase correspondiente a los 15 minutos iniciales de una clase grabada durante la mañana del día viernes 02 de diciembre de 2016 a un primero medio de niñas del colegio de la comuna de Recoleta, Santiago de Chile, y en el que se abordan los contenidos de *permutación y variación* a partir de los conceptos de *diagrama de árbol* y *principio multiplicativo.*

La problemática que plantea el profesor en este episodio tiene relación con encontrar las diferencias, en cuanto a la cantidad de posibles combinaciones, que existen entre ordenar 5 libros y elegir 5 libros de un grupo de 8.

El principio multiplicativo y el diagrama de árbol corresponden a dos técnicas de conteo que permiten determinar el número de resultados posibles de un experimento aleatorio. El diagrama de árbol enlista todas las posibles combinaciones del experimento aleatorio y el principio multiplicativo calcula la cantidad numérica de combinaciones (Johnson & Kuby, 1999).

Una permutación es un arreglo en un orden particular, de los objetos que forman un conjunto. Por ejemplo, considere las diferentes formas en que pueden situarse las letras *a, b y c.* para la primera posición puede elegir a cualquiera de las tres letras; para la segunda se puede escoger a cualquiera de los dos restantes y para la tercera puede seleccionarse la letra que no se utilizó. Así, existen $3\times 2\times 1=6$ maneras en las que pueden arreglarse las tres letras (Canavos, 1996).

En general, el número de permutaciones de ***n*** objetos de un total de ***n*** objetos diferentes es:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)=n!$$

Ahora, si queremos ordenar ***m*** objetos diferentes de un total de ***n***, con $m<n$, el número de permutaciones es (Canavos, 1996):

$$V_m^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$V_m^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!}$$

$$V_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Este tipo de permutaciones es lo que se denomina *variación sin repetición,* en el marco curricular chileno.

En primer lugar, se muestra la transcripción del episodio de clase identificando las fases de desarrollo de clase propuesto por Martinic y Rojas (2015).

En la transcripción, denominamos al docente como Profesor y a las alumnas como Alumna 1, Alumna 2, Alumna 3 y así sucesivamente en el orden de participación y/o intervención durante el episodio de clase.

7.1.1 Análisis de las fases del Episodio 1. PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO y CIERRE PEDAGÓGICO.

La Tabla 1 muestra la transcripción del Episodio 1 e incluye el análisis de las líneas que evidencian las fases de PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO y CIERRE PEDAGÓGICO presentes en éste.

N° de línea	**Línea**	**Notas o comentarios de investigadores.**	**Fases del episodio**
1	Profesor: Ya, vamos arriba. Ya "chicas". Ya pues, póngase de pie. Ya Alumna1.	El profesor con gestos y comentarios dirigidos insta a las alumnas a ponerse de pie hasta que lo logra. Además, entre las alumnas se animan a pararse con frases como: Alumna 2 ¡párate! Oye, ya po' (sic)	En estas líneas podemos identificar una fase de PRE-INICIO (Martinic & Rojas, 2015), pues el profesor realiza acciones previas (tales como pedir silencio, saludar, pedir que tomen asiento) al inicio del contenido a tratar durante el episodio.
2	Profesor: Buenos días señoritas.		
3	Alumnas: Buenos días profesor		
4	Profesor: tomen asiento	Se escuchan risas luego se la instrucción. Al parecer, pues no están	

		acostumbradas a saludar de pie al profesor.	
5	Alumna 2: profe (sic), va a revisar la tarea de ayer.		
6	Profesor: si		
7	Alumna 3: Caaallate (sic).		
8	Alumna 2: oh rayos, no la hice.		
9	Alumna 2: no, no la revise.	El profesor al escuchar esto de la alumna se ríe y continúa escribiendo en la pizarra.	
10	Profesor: Yap (sic). Eeh (sic) primero, de ayer, de ayer y la clase del martes, ¿Qué, qué aprendimos? Ósea nada		En estas líneas podemos observar que el profesor busca introducir los contenidos a desarrollar durante la clase. Para aquello el profesor utiliza preguntas respecto de conceptos abordados durante clases anteriores (conceptos tales como el principio multiplicativo, diagrama de árbol, combinaciones posibles, probabilidad, cardinalidad, ordenar, entre otros). Se observa también, la intencionalidad y fijación de los conceptos claves para el desarrollo de los conceptos nuevos a
11	Alumnas: Nada		
12	Profesor: Nada, lo mismo		
13	Alumna 4: Yo no aprendí nada, porque no alcance a terminar nada		
14	Profesor: hey, shhhhhh		
15	Alumna 5: Probabilidades		
16	Profesor: Probabilidad, ¿Qué cosa?		
17	Alumna 6: ¿Ayer?		
18	Profesor: ¿Qué cosa de probabilidad?		
19	Alumnas: Hicimos el diagrama de árbol. Diagrama de árbol.	.	
20	Profesor: Diagrama de árbol. Diagrama de árbol	El profesor indica este concepto con el dedo pulgar de su mano derecha, esperando algunos segundos para otros	

		conceptos y luego continúa con otra pregunta.	tratar durante la clase (como lo son el diagrama de árbol y principio multiplicativo). Estas acciones de dialogo entre el profesor y las alumnas representan una introducción al tema de la clase considerándose como FASE de INICIO (Martinic & Rojas, 2015)
21	Profesor: ¿Qué desprendió del diagrama de árbol?		
22	Alumnas: ¿Cómo? ¿Qué?		
23	Profesor: ¿Qué hacía usted o qué logra al, aaaaaaal (sic), aal (sic) hacer un diagrama de árbol? Alumna 7, shhhh, Alumna 7.		
24	Alumna 5: Cardinalidad	El profesor no se percata de esta respuesta, esperando por la respuesta de la alumna 7	
25	Alumna 7: Ordenar		
26	Profesor: Ordenar, ¿Qué cosa?	El profesor indica con su pulgar hacia arriba	
27	Alumna 7: Los datos		
28	Profesor: Los datos que tengamos. Alumna 5		
29	Alumna 5: Saber cuántas, cuantas posibles combinaciones hay		
30	Profesor: Cuántas posibles combinaciones hay. Perfecto.		
31	Profesor: Pregunta, para determinar solo la cantidad de combinaciones posibles, ¿usted tenía una forma estratégica de hacerlo?		
32	Alumnas: ¿Cómo? ¿Qué?		
33	Profesor: Usted, para determinar el total de combinaciones, ¿Aplicaba alguna estrategia o siempre		

	Aplicaba el diagrama de árbol?	
34	Alumnas: noooo (sic)	En este instante se genera ruido y no se entiende lo que dicen las alumnas.
35	Profesor: ya pues, Levante la mano para que nos escuchemos. A ver Alumna 2	
36	Alumna 2: que era multiplicar, si por ejemplo si te daban el 6, multiplicabas el 6 por un… 6 por 5, 6 por 4, 6 por 3, 6 por 2, 6 por 1	
37	Profesor: Yaah (sic)	Le responde a la Alumna 10
38	Profesor: Ya, Alumna 8 ¿Qué iba a decir?	
39	Alumna 8: Lo mismo que Alumna 2	
40	Profesor: Lo mismo, ¿exactamente lo mismo?	
41	Alumna 8: Si, hacíamos eso de que buscábamos multiplicar los números que aparecían	
42	Profesor: Pero ¿Por qué?	
43	Alumna 8: la Alumna 2 (dice el nombre de su compañera de clase) lo dijo.	
44	Profesor: Ahora, ¿Por qué hacíamos eso? Alumna 9	
45	Alumna 9: no	
46	Profesor: No, jeje. ¿Por qué hacíamos eso?	
47	Alumna 5: Por el principio multiplicativo	

48	Profesor: Principio multiplicativo, perfecto. Perfecto		
49	Profesor: Mire, eeeh (sic). Pregunta, dos preguntas. Anote		A parir de la línea 49 podemos identificar la fase de DESARROLLO (Martinic & Rojas, 2015) del episodio de clase. El profesor comienza esta fase con un problema de combinatoria en el cual utiliza preguntas abiertas como estrategia principal para abordar el nuevo concepto a partir del diagrama de árbol y el principio multiplicativo.
50	Profesor: Anote, ¿Será lo mismo… será lo mismo… será lo mismo… Seleccionar 5 libros de un grupo, seleccionar 5… libros de un grupo de 8… Será lo mismo	El profesor repite tres veces el inicio de la pregunta esperando a que las alumnas se alisten a anotar y guardar silencio bajando cada vez el tono de su voz.	
51	Alumna 5: ¿Seleccionar 5 libros de un grupo de ocho?		
52	Profesor: de 8	El profesor asiente con la cabeza	
53	Alumna 5: 5 libros de un grupo de 8		
54	Profesor: seleccionar 5 libros de un grupo de 8 para leerlos… en verano?		
55	Profesor: ¿Será lo mismo seleccionar 5 libros de un grupo de 8 para leerlos en verano, QUÉ… que seleccionar 5 libros… que seleccionar 5 libros… que seleccionar 5 libros… Y ¿ DETERMINAR, y determinar… el orden en que se quieren leer? Y ¿determinar el orden en que se quieren leer?		

56	Profesor: Entonces, ahí usted tiene dos propuestas, que tiene que analizar.	
57	Profesor: ¿Será lo mismo de escoger 5 libros de un grupo de 8?... ¿5 libros de un grupo de 8? O, tengo 5 libros y ordenarlos según, segúuun (sic) como yo los quiera leer.	
58	Profesor: ¿Será lo mismo hacer eso?	
59	Alumna 5: Nooo (sic)	
60	Profesor: ¿Por qué no?	
61	Alumna 5: Porque el primero está más desordenado. Puede ir cualquiera, el segundo no	
62	Profesor: Primero más desordenado. Ósea, usted tiene lo siguiente, eeeeh. (sic)	
63	Profesor: 5 de 8	Además, lo escribe en la pizarra.
64	Profesor: Ya, ese 5 de 8, ¿eso estamos escogiendo cierto?	
65	Profesor: Ya ¿cómo lo representaría usted? ¿Qué haría usted de, por qué me dice que es más desordenado menos desordenado? Usted utilizó la palabra desordenado.	
66	Profesor: ya, en uno tengo 5 de 8 que debo escoger y en el otro tengo que	

	ordenar, ordenar eeeh (sic), 5
67	Profesor: Usted me dice, yo le estoy preguntando si esto es lo mismo o no es lo mismo
68	Alumna 7: Además que allí hay más po'(sic)
69	Profesor: Aquí hay más
70	Alumna 7: En la segunda no sabemos cuántos hay el total
71	Profesor: Solo le estoy preguntando si ¿hacer este proceso de escoger 5 de 8 libros y de cuantas formas lo puedo escoger? es lo mismo que ordenar 5 libros
72	Alumnas: Ayer po' (sic)
73	Profesor: Ayer se acuerda que hicimos el ejercicio de tres, de ordenar tres libros ¿cierto?
74	Alumna 5: No, eso no es lo mismo
75	Profesor: No es lo mismo
76	Alumna 5: No, porque en el primero tengo 8 posibilid...(sic) tengo más combinaciones.
77	Profesor: ¿Más combinaciones?
78	Alumna 5: Porque ya hay 8 libros. Y de esos uno puede elegir. Entonces puede ir cambiando de libro.

79	Alumnas: pero igual puede ordenarlos	
80	Profesor: Pero…	El profesor levanta su mano para hacer una intervención
81	Alumnas: no es lo mismo po' (sic), porque son 5 igual	Empiezan a hablar varias alumnas al mismo tiempo.
82	Profesor: Haber, levanten la mano para que nos escuchemos. Alumna 16	
83	Alumna 10: que, eeehm (sic) es cómo lo mismo porque eh en uno te dice la cantidad y cuántos libros tienen, pero en el otro no te dicen cuántos libros tienen	Hasta este momento las alumnas aún no tienen claridad de porque no es lo mismo, centrando su atención en la cantidad total de libros de cada situación, lo que les causa extrañeza pues en el primero lo dan y en el segundo supuestamente lo omiten.
84	Profesor: ¿Cómo, ¿cómo usted podría representar estas dos situaciones de alguna manera?	(Las Alumnas discuten y murmullan)
85	Profesor: ¿Cómo podría representar para ver si son más o menos combinaciones en una o más o menos en otra po'(sic)?	
86	Alumna 11: Probándolo con el diagrama	
87	Profesor: Probándolo con el diagrama. Ósea, a pesar de que no es la mejor forma porque igual la cantidad no es, no es poca, tratemos de hacerlo con el diagrama y	

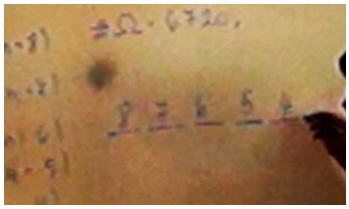
	tratemos de buscar alguna forma.	
88	Profesor: Primero, si yo necesito escoger, eh, 5 de 8 libros, ¿Cómo lo representaría en el diagrama?	
89	Alumna 11: Libro 1	
90	Profesor: Libro 1, libro 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8	El profesor va representando algebraicamente cada uno de los 8 libros, acotando que no es la forma más eficiente para determinar la cantidad de combinaciones. De cierta manera, establece el lenguaje matemático a utilizar o utilizado en sus explicaciones, y las alumnas al parecer ya se encuentran habituadas a esto, pues no cuestionan el porque de la representación algebraica.
91	Alumna 11: 5, 6, 7 y 8	Al mismo tiempo que el profesor escribe en la pizarra
92	Profesor: Ya, ¿usted de esos 8 libros, cuántos va a escoger?	
93	Alumnas: 5	
94	Profesor: 5, perfecto	
95	Profesor: Si yo escojo el libro 1, ¿cuántas posibilidades tengo para	

	escoger el próximo libro que me quiero leer?	
96	Alumnas: cuatro. Una. Siete.	
97	Profesor: yo de mis 8 libros, escojo el libro 1 ¿cierto? Después… ¿cuántas voy a tener?	
98	Alumnas: Siete	
99	Profesor: Ósea, aquí voy a tener siete opciones, del 1 hasta el 7.	
100	Profesor: Ya, escogí de esas 7 opciones. Ya escogí el libro 1, la opción 2 ¿y después?	
101	Profesor: ¿Cuántas opciones me van a quedar?	
102	Alumnas: seis, siete	
103	Profesor: Seis, ósea voy a tener seis opciones.	
104	Profesor: ¿Cuántos libros ya llevo escogido hasta ahora?	
105	Alumnas: dos	
106	Profesor: ¿Hasta ahora?	El profesor indica en la pizarra para hacer notar en las alumnas el error.
107	Alumnas: Dos, tres, uno	
108	Profesor: ¿Dos?	Las alumnas discuten respecto de la cantidad de libros que llevan escogidos
109	Alumnas: Siiii (sic). Dos. Dos po' (sic).	
110	Profesor: ¿usted tiene 8 libros por escoger, cierto?	
111	Alumnas: si	

112	Profesor: ¿cuántos quiere escoger?	
113	Alumnas: cinco	
114	Profesor: Perfecto, ya. De esta primera línea yo tengo que escoger 1. ¿Sí?	
115	Profesor: Y aquí sé que la cantidad de libros que tengo, eso es. Aquí en una segunda línea, ¿Cuántos libros puedo escoger?	
116	Alumnas: siete	Varias alumnas murmullan la respuesta
117	Profesor: Siete. Si escogí el libro 1, puedo escoger el libro dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho ¿sí?	
118	Profesor: ¿si escogí el libro 2, qué libros puedo escoger?	
119	Alumnas: El uno, el tres, el cuatro, el cinco, el seis, el siete y el ocho	
120	Profesor: perfecto, ¿si escogí el tres?	
121	Alumnas: el uno, el dos, el cuatro, el cinco, el seis, el siete y el ocho	
122	Profesor: Perfecto, ¿y si escogí el ocho?	
123	Alumnas: El uno, el dos, el tres, el cuatro, el cinco, el seis y el siete	

124	Profesor: Perfecto, usted tiene todas esas combinaciones aquí anotadas. Que vamos a hacer nosotros, no vamos a hacer todo el diagrama, sino que vamos a ir solo por una ramita. Si yo escojo el primer libro un libro, para la segunda parte, ¿voy a poder escoger?	
125	Alumnas: siete	
126	Profesor: Siete	El profesor asiente y confirma la respuesta
127	Profesor: para la tercera elección, ¿voy a poder escoger entre?	
128	Alumnas: Seis	
129	Profesor: Para la cuarta elección…	El profesor gesticula para obtener la respuesta por parte de las alumnas y lo logra
130	Alumnas: cinco	
131	Profesor: Cinco, y ¿para la quinta elección?	
132	Alumnas: cuatro	
133	Profesor: cuatro. Hasta ahí, si yo hago el diagrama… de árbol con todas esas combinaciones, yo acá po' (sic) tengo la obtención de todas las formas, de todas las formas de escoger 5 de 8 libros, ¿sí?	
134	Alumnas: siii (sic)	

135	Profesor: Perfecto. ¿Usted me hablo de un principio, de un comienzo, de que algo pasaba?, yo podía saber cuántas combinaciones totales tenía acá	
136	Alumna 7: Con lo de las multiplicaciones	
137	Profesor: con el principio multiplicativo. Perfecto Ósea, yo en la primera acción, ¿cuántos podía elegir?	
138	Alumnas: ocho	
139	Profesor: ¿En la segunda?	
140	Alumnas: siete	
141	Profesor: ¿después?	
142	Alumnas: seis	
143	Profesor: Seis	
144	Alumnas Cinco	
145	Profesor: después aquí podía escoger cinco. Y ¿después?	
146	Alumnas: cuatro	
147	Alumna 8: Ahora los multiplica. 8x7x6x5x4	
148	Profesor: Ya, y como usted bien dijo Alumna 10, sí yo quiero saber la cantidad de combinaciones totales, debería aplicar el principio multiplicativo. Y aquí ¿Cuántas combinaciones me van a dar totales? Ósea, la cardinalidad de mi espacio muestral ¿va a ser?	

149	Alumnas: 6720	
150	Profesor: 6720	
151	Alumna 8: pero usted quiere de cinco libros no de ocho. Tiene que elegir 5	
152	Profesor: Ah	
153	Alumna 8: Tiene que elegir 5	
154	Profesor: Yapo mira.	
155	Alumna 8: Tiene todas esas posibilidades	
156	Profesor: Aquí tengo los cinco libros. Uno, dos, tres, cuatro, cinco. Es lo que veíamos ayer. Mira, imagínate ya. Yo ordeno mis cinco libros, para la primera combinación, para el primer libro, ¿Cuántas posibilidades de libro tengo, puedo escoger?	Ante la duda de la Alumna 8, respecto de si se estan escogiendo los cinco libros, el profesor cambia de registro (del pictórico-algebraico a un método más numérico) para explicar que lo que se esta calculando es la cantidad formas de escoger los cinco de libros. Para aquello, ocupa "casillas" de posibilidades, en la que anota la cantidad correspondiente a cada acción y luego las multiplica (lo que se conoce como principio multiplicativo), como lo muestra la imagen a continuación. 
157	Alumna 8: los ocho	

158	Profesor: Ocho. ¿Para la segunda?		
159	Alumnas: siete		
160	Profesor: ¿Para la tercera?		
161	Alumnas: Seis. Cinco. Cuatro	Sucesivamente las alumnas van indicando las respuestas mientras el profesor completa en la pizarra.	
162	Profesor: y cuatro. Ahí escogí mis cinco libros. Y aquí, como usted ya conoce el principio multiplicativo, puede asegurar que hay 6720 combinaciones		
163	Alumnas: Eso no más. Fáacil (sic)		
164	Profesor: Si. Perfecto. Que es lo importante de esto, que usted tenga claro que si a mí me piden ¿Cuáles son esas combinaciones? Una forma, aunque sea tediosa podría ser esa, podría ser esa (el profesor apunta en la pizarra al diagrama de árbol). Y ahí, aquí, al final su espacio muestral ¿cuántos elementos va a tener entonces?		A partir de estas líneas podemos identificar un CIERRE PEDAGÓGICO (Martinic & Rojas, 2015) del episodio de clase, pues el profesor recapitula, sintetiza y evalúa mediante preguntas abiertas sobre los conceptos utilizados para resolver el ejercicio planteado.
165	Alumna 7: ¿Seis mil siete vente?		
166	Profesor: 6720. Eso es lo importante de la primera afirmación. Así usted resumió la primera afirmación. Ósea, escoger		

	5 de 8 libros ¿Voy a tener seis mil…?
167	Alumna 7: 6720
168	Profesor: 6720 formas de escoger. …escoger el 1, 2, 3, 4 y 5. O pueda escoger el, el 5, 4, el 7, el 8 y el 1. Todo eso. De esa forma son…6720. Ya, denle no más
169	Alumnas: ¿hay que copiarlo? Nooo (sic), míralo

Tabla 1: Transcripción del Episodio 1 y fases de la enseñanza

7.1.2 Unidades temáticas y actividades típicas de aula del Episodio 1 (Gonzalo)

Observar una clase de matemáticas reviste una dificultad mayor, que solamente identificar los conceptos matemáticos tratados durante la clase y/o la metodología utilizada por el profesor, el lenguaje oral o escrito, la elección del ejercicio para ejemplificar el modelo a tratar, el objetivo de aprendizaje propuesto, los años de ejercicio del profesor, etcétera. Esta dificultad se encuentra en la objetividad/subjetividad de la observación al registrar conductas.

En la transcripción del Episodio 1 podemos observar una clase animada principalmente por el profesor (debido, quizás, a la introducción de un concepto matemático nuevo para la clase), que mediante preguntas abiertas (para promover la reflexión personal de las alumnas y para evaluar la recepción de los contenidos y procedimientos desarrollados durante la clase) promueve la participación de sus alumnas en la clase. En este episodio predomina la explicación o exposición del profesor; el trabajo de las estudiantes es principalmente metacognitivo (de reflexión abierta y personal, su acción en la clase se limita a la mediación que propone el profesor mediante preguntas abiertas). No se identifican conductas y/o actividades de trabajo personal, grupal o de exposición de las estudiantes.

A continuación, presentamos una tabla, en la que analizamos las secuencias temáticas de la enseñanza observadas a partir del Episodio 1.

Secuencia temática de la enseñanza	Conducta observable en el episodio
Declarativa **(Explicación o exposición del profesor)**	Durante gran parte del episodio podemos observar ciertos indicadores en los que el profesor informa y evalúa la recepción de los contenidos curriculares tratados en la clase anterior y que serán utilizados como estrategia para resolver y desarrollar el ejercicio propuesto, además de transmitir la información de forma oral (en nuestro episodio, el problema que permitirá desarrollar los conceptos de permutación y variación). Ejemplo de aquello es observable en líneas tales como: ▪ Profesor: Yap (sic). Eeh (sic) primero, de ayer, de ayer y la clase del martes, ¿Qué, qué aprendimos? Ósea nada (Línea 10) ▪ Profesor: Probabilidad, ¿Qué cosa? (Línea 16) ▪ Profesor: Diagrama de árbol. ¿Qué desprendió del diagrama de árbol? (Línea 20 y 21) ▪ Profesor: Ordenar, ¿Qué cosa? (Línea 26) ▪ Profesor: Pregunta, para determinar solo la cantidad de combinaciones posibles, ¿usted tenía una forma estratégica de hacerlo? (Línea 31) ▪ Profesor: Primero más desordenado. Ósea, usted tiene lo siguiente, eeeeh (sic). (Línea 62) ▪ Profesor: ya, en uno tengo 5 de 8 que debo escoger y en el otro tengo que ordenar, ordenar eeeh (sic) 5 (Línea 66) ▪ Profesor: Ayer, se acuerda que hicimos el ejercicio de tres, de ordenar tres libros ¿cierto? (Línea 73) ▪ Profesor: Probándolo con el diagrama. Ósea, a pesar de que no es la mejor forma porque igual la cantidad no es, no es

	poca, tratemos de hacerlo con el diagrama y tratemos de buscar alguna forma. (Línea 87) ▪ Profesor: Perfecto, usted tiene todas esas combinaciones aquí anotadas. Que vamos a hacer nosotros, no vamos a hacer todo el diagrama, sino que vamos a ir solo por una ramita. (Línea 123) ▪ Profesor: cuatro. Hasta ahí, si yo hago el diagrama… de árbol con todas esas combinaciones, yo acá po' (sic) tengo la obtención de todas las formas, de todas las formas de escoger 5 de 8 libros, ¿sí? (Línea 133) ▪ Profesor: Ya, y como usted bien dijo Alumna 10, sí yo quiero saber la cantidad de combinaciones totales, debería aplicar el principio multiplicativo. (Línea 148) ▪ Profesor: Si. Perfecto. Que es lo importante de esto, que usted tenga claro que si a mí me piden ¿Cuáles son esas combinaciones? Una forma, aunque sea tediosa podría ser esa, podría ser esa (el profesor apunta en la pizarra al diagrama de árbol). Y ahí, aquí al final su espacio muestral (Línea 164)
Evaluación **(Procedimental 4)**	La principal estrategia utilizada por el profesor durante el desarrollo del Episodio 1 es la pregunta abierta, tanto para traer conceptos matemáticos vistos durante clases anteriores como para evaluar los conceptos y procedimientos tratados en el desarrollo de la clase. A continuación, se muestran algunas líneas que reflejan dicha actividad: ▪ Profesor: ¿Qué cosa de probabilidad? (Línea 16) ▪ Profesor: ¿Qué hacía usted o qué logra al, aaaaaaal (sic), aal (sic) hacer un diagrama de árbol? (Línea 23) ▪ Profesor: Ordenar, ¿Qué cosa? (Línea 26) ▪ Profesor: Usted, para determinar el total de combinaciones, ¿aplicaba alguna estrategia o siempre aplicaba el diagrama de árbol? (Línea 33)

	▪ Profesor: Ya, ¿usted de esos 8 libros, cuántos va a escoger? (Línea 92) ▪ Profesor: ¿Cuántos libros ya llevo escogido hasta ahora? (Línea 104) ▪ Profesor: ¿Hasta ahora? (Línea 106) ▪ Profesor: ¿Dos? (Línea 108) ▪ Profesor: ¿usted tiene 8 libros por escoger, cierto? (Línea 110) ▪ Profesor: ¿cuántos quiere escoger? (Línea 112) ▪ Profesor: ¿si escogí el libro 2, qué libros puedo escoger? (Línea 118)
Metacognitiva	La gran estrategia utilizada por el profesor en este episodio es la pregunta abierta a través del dialogo con las alumnas. Esto es observable en preguntas tales como: ▪ ¿exactamente lo mismo? (Línea 40) ▪ Pero ¿Por qué? (Línea 42) ▪ ¿Será lo mismo de escoger 5 libros de un grupo de 8?... ¿5 libros de un grupo de 8? O, ¿tengo 5 libros y ordenarlos según, segúuun (sic) como yo los quiera leer? (Línea 57) ▪ ¿Será lo mismo hacer eso? (Línea 58) ▪ ¿Por qué no? (Línea 60) ▪ ¿Cómo podría representar para ver si son más o menos combinaciones en una o más o menos en otra po'(sic)? (Línea 85) ▪ Si yo escojo el libro 1, ¿cuántas posibilidades tengo para escoger el próximo libro que me quiero leer? (Línea 95) ▪ ¿si escogí el libro 2, qué libros puedo escoger? (Línea 118)

	En cada una de estas líneas, podemos observar que la intención del profesor es promover la reflexión personal de las alumnas respecto de los conceptos matemáticos involucrados y que permiten explicar la solución al problema planteado inicialmente.
Organizativa **(Normalización)**	En las siguientes líneas podemos identificar ciertas normas que se instalan al principio del episodio, cuyo propósito es establecer condiciones para el desarrollo de la clase: ▪ Ya, vamos arriba. Ya "chicas". Ya pues, póngase de pie. (Línea 1) ▪ Buenos días señoritas. (Línea 2) ▪ tomen asiento (Línea 4) ▪ hey, shhhhhh (Línea 14) ▪ Alumna 7 shhhh (Línea 23) ▪ ya pues, Levante la mano para que nos escuchemos (Línea 35)
Revisión de tareas	Otra de las actividades de enseñanza que explicita el profesor durante el episodio es la revisión de conceptos matemáticos tratados durante clases anteriores a través de preguntas abiertas: ▪ Yap (sic). Eeh (sic) primero, de ayer, de ayer y la clase del martes, ¿Qué, ¿qué aprendimos? Ósea nada (Línea 10) ▪ ¿Qué cosa de probabilidad? (Línea 18) ▪ ¿Qué desprendió del diagrama de árbol? (Línea 21) ▪ ¿Por qué hacíamos eso? (Línea 46)

Tabla 2: Secuencias temáticas y actividades típicas de aula (Martinic & Rojas, 2015)

7.1.3 Análisis didáctico del Episodio 1

Para realizar un análisis didáctico del Episodio 1, utilizaremos el modelo de análisis didáctico en educación matemática propuesto por Font (et. al 2010), principalmente para describir la secuencia y la complejidad de las prácticas matemáticas que se dan en el Episodio 1. Es por ello que nuestro análisis considera los dos primeros niveles:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.

Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.

7.1.3.1 Identificación de las prácticas matemáticas

Para describir un proceso de instrucción o de enseñanza de la matemática, se hace necesario describir las secuencias de las prácticas matemáticas que se desarrollan en el aula y cuyo objetivo este orientado a generar en el estudiante un tipo de práctica operativa (aplicar un procedimiento matemático) y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) considerada por el profesor como matemática (Font, Planas, & Godino, 2010). De acuerdo con esto, consideramos la práctica matemática en el aula como cualquier acción o manifestación (de carácter oral o escrito) por parte de los sujetos que intervienen en el desarrollo de los conceptos matemáticos tratados en la clase para resolver la problemática planteada y la comunicación de su solución

La Tabla 3 recoge las prácticas matemáticas más relevantes que se observan en el Episodio 1:

Alumnas	▪ Tienen claridad de la unidad y/o eje de aprendizaje que se trató en clases anteriores ▪ Recuerdan conceptos previos (principio multiplicativo, diagrama de árbol). Tienen claridad respecto del proceso (… si, hacíamos eso de que buscábamos multiplicar los números que aparecían…), no así del concepto matemático. ▪ Entienden el enunciado del problema planteado por el profesor ▪ Manifiestan que existe una diferencia entre las dos tareas planteadas por el problema, pero no tienen claridad respecto de esa diferencia.

	▪ Siguen y están atentas a las preguntas planteadas por el profesor ▪ Siguen y entienden la estrategia planteada por el profesor
Profesor	▪ Considera el papel de los conceptos previos para el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos ▪ Considera el papel del contexto propuesto por instrumentos validados para la educación escolar ▪ Cuestiona la comprensión de los conceptos y procedimientos realizados por los alumnos para responder a las preguntas planteadas ▪ Valida las respuestas de las alumnas (…perfecto, ¿y si escogí el tres?)

Tabla 3: Prácticas matemáticas del Episodio 1

La principal práctica matemática que realizan las alumnas durante el desarrollo del episodio tiene relación con procesos metacognitivos, de relación entre conceptos, de identificación de procesos que permitan resolver una de las dos problemáticas de la situación planteada. Es importante resaltar el papel protagónico que tienen las alumnas a lo largo del episodio.

El profesor realiza mayoritariamente la práctica matemática del episodio 1, registrando en el pizarrón procedimientos y representaciones pictóricas que permiten resolver la problemática planteada, todas ellas de carácter matemático. Insta a las alumnas, mediante preguntas abiertas, a establecer relaciones entre conceptos e identificar procesos matemáticos. Además, el profesor valida constantemente las respuestas de sus alumnas generando un ambiente de confianza y participación.

7.1.3.2 Identificación de los objetos y procesos matemáticos del Episodio 1

7.1.3.2.1 Objetos Matemáticos

Ahora, para poder realizar una práctica matemática, los integrantes del episodio necesitan conocimientos básicos (objeto matemático) que permitan identificar, reconocer, aplicar, resolver, analizar e interpretar los resultados de manera satisfactoria. Font, Planas y Godino (2010) consideran que cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por alguno (o todos) de los siguientes objetos matemáticos:

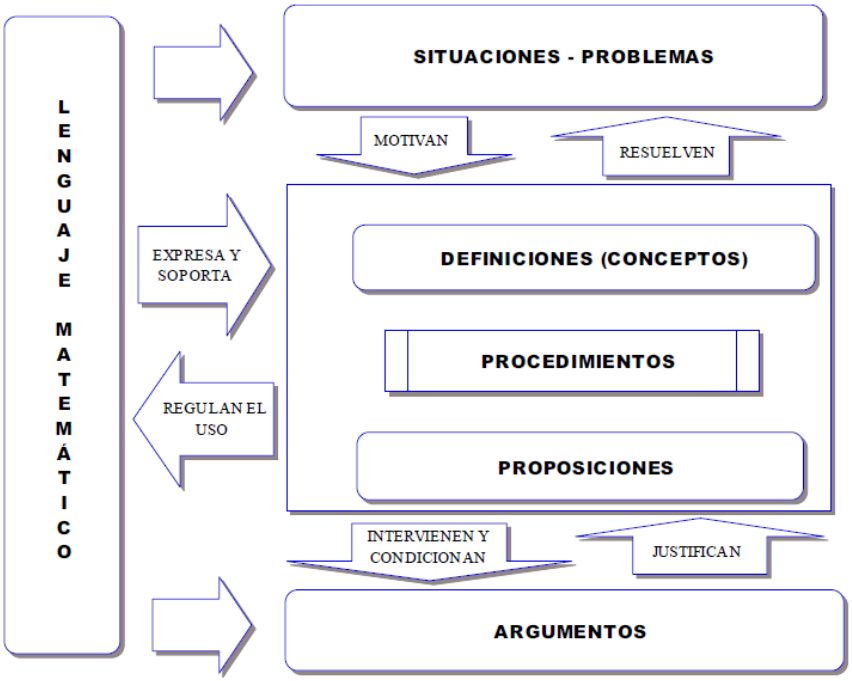


Figura 8: Configuración de objetos (Font, Planas, & Godino, 2010)

La Tabla 4 permite identificar los objetos matemáticos conglomerados en el Episodio 1:

Lenguaje	▪ ***Alumnas:*** (verbal) probabilidades, diagrama de árbol, cardinalidad, saber cuántas, cuantas combinaciones posibles hay, multiplicar, seis por cinco, seis por cuatro, seis por tres, seis por dos, seis por uno, números, principio multiplicativo, primero, segundo, desordenado, hay más, lo mismo, cambiando, ordenar, cantidad, probándolo, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, posibilidades, seis mil siete veinte ▪ ***Profesor***: (verbal) probabilidad, diagrama de árbol, ordenar, datos, cuántas, posibles, combinaciones, lo mismo, exactamente, principio multiplicativo, seleccionar, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, grupo, determinar, cinco de ocho, orden, primero, más, desordenado, escogiendo, representar, menos, probándolo, primera, segunda, tercera, cuarta, quinta, totales, cardinalidad, espacio muestral, seis mil siete veinte. (simbólico): diagrama de árbol, principio multiplicativo, 6720, libro 1, libro 2, libro 3, libro 4, libro 5, libro 6, libro 7, libro 8, 8x7x6x5x4
Conceptos	▪ ***Alumnas:*** principio multiplicativo, cardinalidad, diagrama de árbol, ordenado y desordenado, multiplicación ▪ Profesor: principio multiplicativo, diagrama de árbol, cardinalidad, combinación, espacio muestral, orden
Proposiciones	▪ ***Alumnas:*** saber cuántas posibles combinaciones hay. No porque el primero está más desordenado, puede ir cualquiera, en la segunda no. En la segunda no sabemos cuántos hay en total. No, eso no es lo mismo. No, porque en el primero tengo ocho posibilid… (sic) tengo más combinaciones. Eeehm (sic), es cómo lo mismo porque eh, en uno te dice la cantidad y cuántos libros tienen, pero

	en el otro no te dicen cuántos libros tienen. Ahora los multiplica: 8x7x6x5x4. ▪ ***Profesor:*** Probándolo con el diagrama, ósea, a pesar de que no es la forma porque igual la cantidad no es poca, tratemos de hacerlo con el diagrama y tratemos de buscar alguna forma. Yo podía saber cuántas combinaciones totales tenía acá. Hasta ahí, si yo hago el diagrama de árbol con todas esas combinaciones, yo acá po' tengo la obtención de todas las formas de escoger 5 de 8 libros. Ya, y como usted bien dijo (nombra a la alumna), si yo quiero saber la cantidad de combinaciones totales, debería aplicar el principio multiplicativo. Ahí escogí mis cinco libros, y aquí, como usted ya conoce el principio multiplicativo, puede asegurar que hay 6720 combinaciones.
Procedimientos	▪ ***Alumnas:*** ordenar, multiplicar. ▪ ***Profesor:*** representar, ordenar, multiplicar

Tabla 4: Objetos matemáticos del Episodio 1

7.1.3.2.2 Procesos matemáticos del Episodio 1

A partir de este análisis estructural de los objetos matemáticos observados en el Episodio 1, nos interesa analizar las interacciones que ocurren entre los objetos descritos anteriormente. Para llevar a cabo dicha tarea, basaremos nuestro análisis a partir del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático, que considera las dimensiones duales: personal/institucional, unitaria/sistémica, expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva; propuesto por Font, Godino y Contreras (2010).

En la Figura 8 se detallan dieciséis procesos considerados relevantes en la actividad matemática:

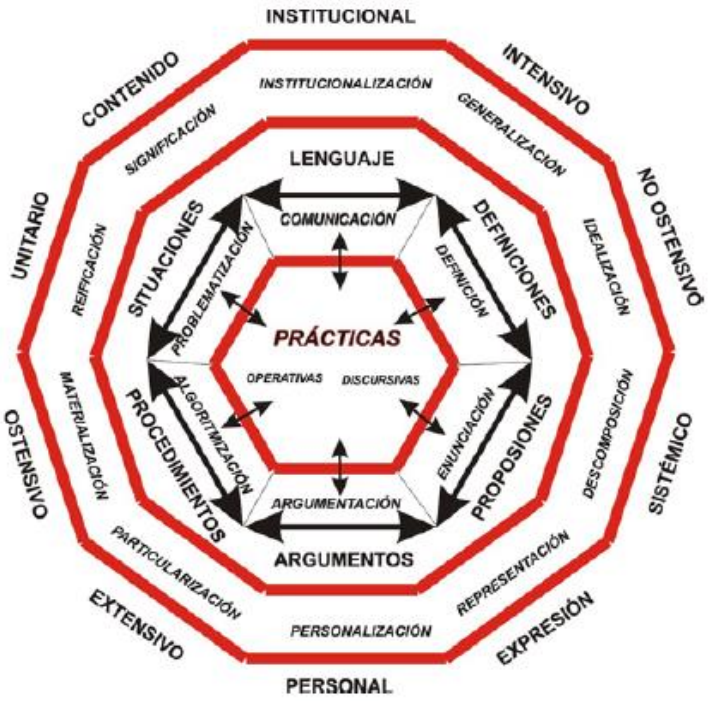


Figura 9: Representación ontosemiótica del conocimiento matemático. (Font, Planas, & Godino, 2010)

La Tabla 5 muestra los procesos matemáticos identificados en el Episodio 1:

Alumnas	▪ Proceso de *Idealización* [15, 19, 24, 27, 47, 59, 61, 68, 86, 89] para hacer referencia a conceptos previos propios del eje de aprendizaje. ▪ Proceso de *Enunciación y Comunicación* [61, 68, 70, 76, 86, 147] de proposiciones para dar respuesta a las preguntas abiertas

	planteadas por el profesor en busca de una solución al problema probabilístico planteado o para proponer soluciones a priori. ▪ Proceso de *Argumentación* [74, 76, 78, 81, 151, 155] para plantear justificaciones de sus creencias respecto de la respuesta a las preguntas planteadas por el profesor o para validar el procedimiento utilizado por el profesor en pizarra frente a sus pares.
Profesor	▪ Proceso de *Institucionalización* [16, 21, 31, 33, 40, 48] cuando utiliza preguntas abiertas para recordar conceptos vistos en las clases anteriores. ▪ Proceso de *Enunciación* [28, 30] cuando valida la información entregada por las alumnas. ▪ Proceso de *Generalización* [55, 56, 57] al proponer un caso particular para el desarrollo de los conceptos de Variación y Permutación. ▪ Proceso de *Materialización* [87, 88, 90, 95, 97, 99, 106, 115, 124, 137, 139, 141, 143, 145, 148] al utilizar distintas representaciones simbólicas (simbología para representar los libros y números) y pictóricas (diagrama de árbol) en pizarra para recoger las proposiciones de las alumnas y resolver la problemática propuesta en el pizarrón. ▪ Proceso de *Representación* [88, 90, 99, 110, 114, 124, 137] para escribir signos y símbolos matemáticos y diagramas para representar la situación problemática. ▪ Proceso de *Algoritmización* [87, 137, 164] al sugerir y representar en pizarra procedimientos pictóricos y algebraicos para el cálculo de la cardinalidad de un espacio muestral.

Tabla 5: Procesos matemáticos del Episodio 1

7.2 Episodio 2 (Gonzalo). (05.12.2016)

7.2.1 Análisis de las fases del Episodio 2: PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO.

El episodio de aula que analizaremos a continuación tiene lugar en una clase de matemática grabada un día lunes 05 de noviembre del año 2016, en un primero medio de niñas de un colegio ubicado en la comuna de Recoleta, Región Metropolitana de Santiago, Chile.

El episodio tiene una duración de 23 minutos y corresponden a los minutos iniciales de la totalidad de la clase.

Además, cabe señalar además que el Episodio 2 (ver transcripción del Episodio 2) corresponde a la clase inmediatamente después, cronológicamente hablando, del Episodio 1.

En la Tabla 6, se describen las fases observables del Episodio 2:

Fases del episodio	**Líneas**	**Conducta observable**
Pre - Inicio	Línea 1 a línea 10	El profesor comienza su clase utilizando preguntas abiertas respecto de contenidos y conceptos tratados en clases anteriores, indagando en las definiciones y en como las alumnas los entienden, con frases tales como: "*De la permutación, ¿Qué podría asegurar usted o qué lo que es? ¿Qué puede determinar que es permutación?"; "Ya, pero que sea distinto a la definición"; "todos los elementos. Ya pero, más preciso todavía, si yo creo que entre estos dos conceptos había una gran diferencia".*
Inicio	Línea 11 a línea 26	A partir de la línea 11, podemos observar que el profesor da inicio a la clase, focalizando el propósito del episodio (establecer la diferencia entre una permutación y una variación); pero sin dejar de lado los conceptos claves de la unidad en la cual está

		trabajando y en la que fundamenta su explicación y procesos de formalización del contenido. Esto se ve reflejado en expresiones como: *"Todo esto, todo esto tenía una base o tenía un enlace claro con algo que usted aprendió al principio de este capítulo. Que era, era un principio… (Línea 17)"; "¿Qué es lo que quería usted al realizar una variación? (Línea 19)"; "y ¿usted quería saber? (Línea 25)".*
Desarrollo	Línea 27 a línea 162	El profesor inicia la fase de desarrollo rememorando el problema de determinar la cantidad de combinaciones totales que existen al extraer bolitas numeradas de una urna. (*Usted tenía su urna, no es necesario que la dibuje, tenía la bolita 1, 2, 3, 4, 5 y ahora para ser distinto, 6. Línea 27)*
Cierre pedagógico	Línea 163 a línea 173	En estas líneas, es posible observar un cierre pedagógico del Episodio 2. Esto a partir de la pregunta planteada por la Alumna 11 (*Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor? Línea 163)*, lo que genera una reflexión por parte de sus compañeras *("que yo creo que como, más que fijarnos en la repetición del número mayor, sería la de veces que sacamos un objeto (Alumna 10)"; "o sea, si son otros los números, seguiría siendo seis, porque son seis bolas (Alumna 6)")*, (que tratan de aclarar la duda de su compañera desde su punto de vista) y que son validadas por el profesor mediante frases tales como *"Aaaah (sic), por ahí, por ahí lo podríamos empezar asegurar, por ahí sí, por ahí sí* (*Línea 166*)*".* Posteriormente, el profesor recapitula las ideas y proposiciones de las alumnas reafirmándolas con la siguiente frase "*Aah (sic), pero perfecto po' (sic) Alumna 6. Si da lo mismo, a*

	ti te da lo mismo si aquí tengo la bolita 25, tengo la bolita 2, tengo la bolita 4, 5, 18 y… 6 (Línea 168)"
Cierre	No es posible observar un cierre del episodio.

Tabla 6: Fases de la enseñanza del Episodio 2

7.2.2 Unidades temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 2

A partir de la identificación de las unidades temáticas y las Actividades Típicas de Aula (ATA), (Martinic & Rojas, 2015)) observables a lo largo del Episodio 2, podemos afirmar nuevamente, que el Episodio 2 es animado principalmente por el profesor.

La Tabla 7, recoge las conductas observables del episodio respecto de las unidades temáticas y las Actividades Típicas de Aula.

Secuencia temática de la enseñanza	**Conducta observable del Episodio 2**
Declarativa (explicación y/o exposición del profesor)	El profesor, como hablante principal (Martinic & Rojas, 2015), es el animador de la clase. Su voz predomina por sobre la de las alumnas y es quien dirige la clase mediante preguntas abiertas y dirigidas, que le permitan recordar, utilizar y aplicar conceptos tratados en clases anteriores. Esto, con el fin de desarrollar los nuevos conceptos propuestos para la clase. Además, evalúa constantemente la recepción de los contenidos a "formalizar" con el recurso de la pregunta abierta. Propone diagramas y esquemas (plasmados en pizarra) para la resolución de problemas similares a los abordados en la clase y palabras claves que les permitan a las estudiantes asociar la problemática con el concepto matemático apropiado (sea este el de permutación o el de variación). Cada una de estas conductas, se puede observar en líneas tales como:

	▪ El día viernes comenzamos esos dos conceptos nuevos, que era permutación y variación. (Línea 1) ▪ ¡Número de ordenamientos lineales posibles! Ya, pero que sea distinto a la definición. Alumna 2 (Línea 3) ▪ ¿Qué es lo que usted desea saber al aplicar una permutación o una variación? (Línea 9) ▪ Recuerde, que había permutación con reposición y sin reposición. ¿Sí? Todo esto, todo esto tenía una base o tenía un enlace claro con algo que usted aprendió al principio de este capítulo (Línea 17) ▪ Les vuelvo a repetir, esto, esto es la formalización de algo que usted puede hacer de manera intuitiva (Línea 27) ▪ Principio multiplicativo. Explícanos Alumna 6 (dice el nombre de la alumna) como lo harías con el principio multiplicativo (Línea 31) ▪ Perfecto. Y así sucesivamente puedo completar las siguientes extracciones (Línea 41) ▪ Si ahora, usted dice “no entiendo esa cuestión”. Ya, pero si entiendo cómo podría generar el diagrama de árbol, que no es lo recomendable en esta ocasión, usted diría: ya, para la primera extracción yo tengo seis posibilidades (Línea 47)
Exposición de los estudiantes (Procedimental 3)	Podemos identificar, de manera más recurrente que en el Episodio 1, una exposición de las alumnas de los conceptos tratados en la clase anterior. Esta exposición de contenidos se realiza mediante la estrategia de pregunta-respuesta empleada por el profesor a lo largo del episodio. Este último, es quién evalúa la comprensión de los conceptos e indaga en las respuestas entregadas por las estudiantes.

	Las siguientes líneas reflejan lo mencionado anteriormente: ▪ Número de ordenamientos lineales (Línea 2) ▪ de que en una se utilizaban todos los elementos y en otra solamente una parte (Línea 8) ▪ ¿Cuándo yo utilizo una permutación? (Línea 11) ▪ cuando quiero ordenar (Línea 12) ▪ ¿Cuándo quiero ordenar qué? (Línea 13) ▪ ¡todo! (Línea 14) ▪ ¿Cuál sería, cuál sería su procedimiento para poder decir, cuál es el orden de extracción de las seis bolitas? (Línea 29) ▪ con el principio multiplicativo (Línea 30) ▪ que cuantas posibilidades hay de sacar una bolita, hay 6x5x4x3x2x1 (Línea 32)
Evaluación (Procedimental 4)	La evaluación de la comprensión de los conceptos tratados en clases anteriores es realizada por el profesor mediante la pregunta abierta. La evaluación de los procedimientos explicados durante la clase se construye mediante la pregunta abierta y preguntas dirigidas a las alumnas 3, 4, 6, 7 y 10. A continuación, se muestran las líneas en las que dicha actividad es observable: ▪ ¿Qué es lo que usted desea saber al aplicar una permutación o una variación? (Línea 9) ▪ Da lo mismo sea cual sea, ¿qué es lo que está haciendo usted? Alumna 4 (Línea 9) ▪ ¿Cuándo yo utilizo una permutación? (Línea 11) ▪ ¿Qué es lo que quería usted al realizar una variación? (Línea 19) ▪ Ya, quería sacar dos de… en general ¿quería sacar dos de qué? Haber… (Línea 21) ▪ Cinco de ocho, ya haber (Línea 23) ▪ Principio multiplicativo. Explícanos Alumna 6 (Línea 31)

	▪ 6 bolitas. Te hago la siguiente pregunta Alumna 6 (dice su nombre) ¿tú aquí con ese 6, me estás diciendo que vas a sacar la bolita seis? (Línea 35) ▪ ¿Cuál es la bolita que puede venir a continuación? O sea, ¿Cuántas posibilidades tengo…? (Línea 39) ▪ Alumna 7 (dice su nombre) ¿sí? (Línea 49) ▪ ¿Cuántas posibilidades puede haber para la primera extracción? (Línea 66) ▪ de tres factorial. Pero ¿qué es lo que es ese *tres factorial* antes de queee (sic)? (Línea 86) ▪ Haber, Alumna 4 fuerte. (Línea 98) ▪ en la segunda, ¿qué posibilidades pueden salir? (Línea 117) ▪ Perfecto. En cambio, cuando es con reposición yo saco el cuatro, saco el cuatro, lo devuelvo, después ¿cuál, que posibilidades pueden salir? (Línea 119) ▪ Antes, mira, piénsalo antes Alumna 6. El mismo ejemplo, saqué el tres, lo devolví. ¿Qué números pueden salir ahora? (Línea 122) ▪ Haber Alumna 9, ¿Cómo lo harías? (Línea 134) ▪ ¿Cuántas combinaciones podría haber entonces? (Línea 141) ▪ y para la segunda, como la devolví, ¿cuántas posibilidades tengo? (Línea 152) ▪ Ahí está. Ya po' (sic), ¿cuántas bolitas tengo en la urna Alumna 6? (Línea 170) ▪ ya, ¿Cuántas posibilidades voy a poder extraer? (Línea 172)
Metacognitiva	A diferencia del Episodio 1, la reflexión personal sobre el contenido curricular y los procedimientos, se generan a partir de preguntas hechas por las alumnas y en las que el profesor valida y reafirma las proposiciones abiertas de las estudiantes. Esta conducta es observable en líneas tales como:

	▪ Alumna 11: Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor? (Línea 163) ▪ Alumna 10: que yo creo que como, más que fijarnos en la repetición del número mayor, sería la de veces que sacamos un objeto (Línea 165) ▪ Profesor: Aaaah (sic), por ahí, por ahí lo podríamos empezar asegurar, por ahí sí, por ahí sí. (Línea 166) ▪ Alumna 6: o sea, si son otros los números, seguiría siendo seis, porque son seis bolas (Línea 167) ▪ Profesor: Aah (sic), pero perfecto po' (sic) Alumna 6. Si da lo mismo, a ti te da lo mismo si aquí tengo la bolita 25, tengo la bolita 2, tengo la bolita 4, 5, 18 y… 6. (Línea 168) ▪ Alumnas: aaaah (sic) perfecto. (Línea 169)
Revisión de tareas	La revisión de tareas se realiza por parte del profesor a partir de la pregunta abierta y solo en forma oral. Esta acción es realizada para el recuerdo de conceptos previos y/o rememorar ejemplos revisados en clases anteriores. Las siguientes líneas muestran dicha actividad: ▪ Profesor: … ¿Qué podría asegurar usted o qué lo que es? ¿Qué puede determinar que es permutación? (Línea 1) ▪ Profesor: Ya, pero que sea distinto a la definición. Alumna 2, a ver (Línea 3) ▪ Profesor: … ¿Qué es lo que usted desea saber al aplicar una permutación o una variación?... (Línea 9) ▪ Profesor: ¿Cuándo yo utilizo una permutación? (Línea 11) ▪ Profesor: … Todo esto, todo esto tenía una base o tenía un enlace claro con algo que usted aprendió al principio de este capítulo. Que era, era un principio… (Línea 17)

	▪ Profesor: … La variación, la variación ¿de qué se componía? (Línea 19) ▪ Profesor: Ya, quería sacar dos de… en general ¿quería sacar dos de qué? (Línea 21)

Tabla 7: Secuencias temáticas de la enseñanza del Episodio 2

Dentro de las similitudes entre el Episodio 1 y el Episodio 2, es el profesor quien realiza la acción principal en el desarrollo de los contenidos y conceptos matemáticos. El docente es quien propone formas de resolver la problemática (diagramas de árbol, esquema de casillas para el principio multiplicativo, simbología para permutación y variación, factoriales y simplificación) propuesta y quien estimula, en primera instancia, la reflexión personal de las alumnas sobre los procesos y acciones que se explican de forma oral/gestual (discurso del profesor que incluyen recursos como la pregunta abierta y dirigida, gestos que simulan la acción que deberían realizar para determinar la cantidad de combinaciones de manera empírica) o gráfica.

Otro aspecto que podemos observar, en ambos episodios, es el dialogo y la atención que centra el docente en alumnas que faciliten el dialogo y el desarrollo de las ideas que él se ha propuesto a desarrollar para la clase. Les realiza preguntas para indagar en la comprensión de los conceptos y procedimientos explicados y utiliza la "contra pregunta" y/o dudas de estas alumnas para clarificar dudas que el resto de la clase podría tener.

Reflejo de lo anteriormente mencionado, se puede observar en líneas tales como:

> *Alumna 10: que, eeehm (sic) es cómo lo mismo porque eh en uno te dice la cantidad y cuántos libros tienen, pero en el otro no te dicen cuántos libros tienen. (Episodio 1 – Línea 83)*
>
> *Profesor: ¿Cómo, ¿cómo usted podría representar estas dos situaciones de alguna manera? (Episodio 1 – Línea 84)*
>
> *Alumna 11: Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor? (Episodio 2 – Línea 163)*
>
> *Profesor: Eso, eso no quiero que haga Alumna 11. (Episodio 2 – Fragmento de línea 164)*

7.2.3 Análisis didáctico del Episodio 2 (Gonzalo)

Al igual que en el Episodio 1, utilizaremos el modelo de análisis didáctico en educación matemática propuesto por Font (et. al 2010), principalmente para describir la secuencia y la complejidad de las prácticas matemáticas que se dan en el Episodio 2.

Por tanto, en esta sección identificaremos las prácticas matemáticas, entendidas como toda acción y/o expresión verbal o gráfica realizada por el profesor y/o las alumnas (actores pasivos y activos presentes en el Episodio 2) para resolver el problema matemático expuesto comunicando sus soluciones, proposiciones y procedimientos, con el propósito de cuestionar, validar, reafirmar o generalizar la resolución de los tipos de problemas abordados (Godino, Batanero, & Font, 2017).

Además, identificaremos los objetos (lenguaje propio de la asignatura, conceptos y definiciones, proposiciones y/o conjeturas y procedimientos algorítmicos y/o repetitivos) y procesos matemáticos (institucionalización, generalización, idealización, descomposición, representación, personalización particularización, materialización, reificación y significación) que derivan de las prácticas matemáticas realizadas por el docente y las estudiantes.

7.2.3.1 Prácticas matemáticas del Episodio 2

La Tabla 8, recoge las principales prácticas matemáticas observables del Episodio 2, tanto por parte de las alumnas como del profesor:

Alumnas	▪ Tienen claridad de la unidad y/o eje en el cual están trabajando. Esto es observable por los conceptos que utilizan para referirse a procesos y procedimientos; propios del eje Datos y Azar del Marco Curricular chileno. ▪ Recuerdan conceptos previos y ejemplos abordados en clases anteriores. ▪ Recuerdan procedimientos asociados a los conceptos de permutación y variación. ▪ Responden las preguntas abiertas y están atentas a la explicación del profesor ▪ Calculan mentalmente multiplicaciones

Profesor	▪ Indaga en conceptos previos mediante la pregunta abierta ▪ Valida respuestas y proposiciones de sus alumnas ▪ Cuestiona la comprensión de los conceptos de variación y permutación ▪ Ejemplifica y propone procedimientos de resolución ▪ Representa y formaliza en pizarra el concepto de variación. ▪ Insta la participación de las alumnas para mejorar la comunicación y comprensión de los conceptos y procedimientos ▪ Utiliza diversidad de registros en su explicación

Tabla 8: Prácticas matemáticas del Episodio 2

Al igual que en el Episodio 1, la principal práctica matemática de las alumnas en este episodio tiene relación con procesos metacognitivos que son dirigidos implícitamente por el profesor. También, es posible observar un papel protagónico de algunas alumnas, que facilitan y cuestionan su propia comprensión y la de sus compañeras. Todo aquello favorece en la toma de decisiones del profesor respecto de las preguntas y explicaciones que debe utilizar para el desarrollo del propósito u objetivo planteado para la clase.

Las prácticas matemáticas del profesor están principalmente orientadas a obtener información respecto de la comprensión de conceptos previos (considerados fundamentales para el desarrollo de los nuevos conceptos matemáticos de parte del docente) y de la comprensión de los procedimientos mediante la pregunta abierta y la ejemplificación. Durante el desarrollo del episodio, el docente cuestiona la recepción de su explicación utilizando ejemplos y más de una vía de representación del contenido matemático en pizarra y gestualmente.

7.2.3.2 Identificación de los objetos y procesos matemáticos del Episodio 2

7.2.3.2.1 Objetos matemáticos

Para que las alumnas y el profesor puedan llevar a cabo cada una de las prácticas matemáticas descritas, necesitan aludir a conocimientos propios del contenido matemático (manejo de definiciones, procedimientos algorítmicos, situaciones problemáticas) y el lenguaje institucional y natural que les permitan evaluar, analizar y sintetizar lo que se quiere comunicar.

Bajo este contexto, la Tabla 9 muestra los objetos matemáticos reunidos en el Episodio 2:

Lenguaje Matemático	▪ **Alumnas:**	o **De carácter verbal:** Lineales, ordenamiento, número, elementos, variación, combinaciones, grupo, cinco de ocho, principio multiplicativo, posibilidad, cinco, 120, 360, 720, permutación, diagrama de árbol, tres, seis, cuatro, seis factorial, tres factorial, seis menos tres factorial, seis por cinco por cuatro, se repite, volvía a entrar, multiplicarlo, seis elevado a cinco, con reposición, número mayor, repetición del número mayor, bolas.
	▪ **Profesor:**	o **De carácter verbal:** Permutación, variación, ordenamientos lineales posibles, elementos, datos, combinaciones posibles, ordenar, con reposición, sin reposición, principio multiplicativo, diagrama de árbol, cinco de ocho, urna, bolitas, cantidad de posibilidades, extracciones, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, número, por tres, por dos, setecientas veinte, multiplicar, escoger, factorial, conjunto, subconjunto, reponer, segunda, pueden salir.

	○ **De registro en pizarra:** Variación, casillas de registro de posibilidades, diagrama de árbol, urna con seis bolitas numeradas.
Situaciones - Problemas	▪ **Situación 1:** El profesor plantea la problemática de extraer bolitas que están numeradas del 1 al 6, con iguales características físicas, con el objetivo de determinar todas las combinaciones posibles al extraer las seis bolitas. (Líneas 27 y 29) ▪ **Situación 2:** Utilizando el mismo ejemplo, el docente propone la extracción de tres bolitas de la urna. (Línea 59) ▪ **Situación 3:** Extraer 4 cartas de un mazo de 52. (Línea 93) ▪ **Situación 4:** *Determinar la cantidad eeeeh (sic)… determinar las combinaciones totales al extraer dos bolitas con reposición* (Línea 110 – Se evidencia el registro en pizarra del problema). ▪ En la línea 114 de la transcripción del Episodio 2, el docente propone una variación del problema original pidiendo la extracción de cinco bolitas con reposición (Se evidencia el registro en pizarra del problema).
Conceptos	▪ ***Alumnas:*** Principio multiplicativo, diagrama de árbol, permutación, variación, factorial, con y sin reposición. ▪ ***Profesor:*** Principio multiplicativo, diagrama de árbol, permutación, variación con y sin reposición, factorial, combinaciones posibles, equiprobabilidad.
Proposiciones	▪ ***Alumnas:*** ○ Número de ordenamientos lineales

- de que en una se utilizaban todos los elementos y en otra solamente una parte
- cuantas posibles combinaciones hay
- cuando queden datos, por ejemplo, cuando hay cinco elementos y quería escoger dos
- que cuantas posibilidades hay de sacar una bolita, hay 6x5x4x3x2x1
- es la posibilidad de las bolitas que tengo para sacar
- haciendo el diagrama de árbol
- seis menos tres factorial
- variación porque… voy a sacar, querer la posibilidad de sacar esas 4 cartas y no las 54 cartas que hay en el mazo
- pero profesor no que ¿con reposición era que se podía se repetir?
- multiplicaría el seis por el cinco
- que yo creo que como más que fijarnos en la repetición del número mayor sería la de veces que sacamos un objeto, o sea si son otros los números seguiría siendo seis porque son seis bolas.

- ***Profesor:***
  - El viernes comenzamos esos dos conceptos nuevos, que era permutación y variación. De esos, de permutación y variación, solo el que se abordó la mayor parte de la clase fue permutación. De la permutación, ¿Qué podría asegurar usted o qué lo que es? ¿Qué puede determinar que es permutación?
  - Ya, pero, más preciso todavía, si yo creo que entre estos dos conceptos (apunta en el pizarrón los

conceptos de variación y permutación) había una gran diferencia. O sea, había una diferencia importante

- Primero, debe tener claro cuál es el foco de la permutación y la variación. ¿Qué es lo que usted desea saber al aplicar una permutación o una variación? Da lo mismo sea cual sea, ¿qué es lo que está haciendo usted?
- ¿Cuándo yo utilizo una permutación?
- Recuerde, que había permutación con reposición y sin reposición. ¿Sí? Todo esto, todo esto tenía una base o tenía un enlace claro con algo que usted aprendió al principio de este capítulo. Que era, era un principio…
- Ahora, si usted quieres saber todas las combinaciones posibles, que usted tiene al extraer 6 bolitas
- ¿tú aquí con ese 6, me estás diciendo que vas a sacar la bolita seis? ¿tú aquí con ese 6, me estás diciendo que vas a sacar la bolita seis?
- Ahí tienen. Cinco para cada una de ellas. Eso es lo que usted va generando. Siguiendo así, después, de esta ramita va a tener cuatro. Después va a tener tres y así con cada una de ellas.
- recuerde que cuando usted tiene 6! tiene 6x5x4x3x2x1
- Ahora, si aquí yo lo estoy enlazando con la variación, la variación, como usted bien dijo en un comienzo, era solo tomar una parte de esto. O sea, si ahora yo le pregunto ¿yo solo quiero saber cómo puedo extraer tres bolitas? Ahora, si aquí yo lo estoy enlazando con la variación, la variación, como usted bien dijo en un comienzo, era solo tomar una parte

de esto. O sea, si ahora yo le pregunto ¿yo solo quiero saber cómo puedo extraer tres bolitas?

- Alumna 6 (dice el nombre de la alumna), bórrese de su mente que hay que hacer. Usted hágalo, yo sé que usted lo puede hacer. Usted tiene lo siguiente, mira. Mira alumna 6. Piénsalo de la siguiente manera, ¿cuántas extracciones quieres hacer tú?
- Usted por favor, solo por tema de cálculo, no multiplique seis factorial, no multiplique tres factorial. Usted ya está un poquito, un paso más adelante y sabe que eso es 6x5x4x3x2x1 y abajo usted sabe que es 3x2x1 ¿cierto?...
- Usted ya sabe simplificar y ahí está. Si usted se da cuenta que en el proceso, ¿qué le queda al final?, 6x5x4; ¿qué teníamos en un principio sin hacer esto?
- 6x5x4, o sea, usted aquí tiene, de manera intuitiva sabía que el resultado tenía que ser eso. Aquí, la formalización que se llama Variación; esto6x5x4, o sea, usted aquí tiene, de manera intuitiva sabía que el resultado tenía que ser eso. Aquí, la formalización que se llama Variación; esto
- Mira, es tan simple como que aquí dijera, ya eeeh (sic), de un mazo de cartas, de un mazo de cartas, usted quiere extraer 4 cartas, ¿qué utilizarías tú, o qué orden…extraer 4 cartas al azar?, ¿qué utilizarías tú de manera intuitiva? ¿Una permutación o una variación?
- Esas mismas que tengo acá, siguiendo el mismo ejemplo de la urna. Cuando a usted le hablen que es con reposición, usted extrae… (Alumna 6 interviene diciendo *y devuelve*) y devuelve. Extrae, miro, anoto y devuelvo.

	○ Eso, eso no quiero que haga Alumna 11. Más que… sí, siempre se va a repetir el número mayor. Pero piénsalo un paso antes, un paso más adelante. Si yo, estoy contando la cantidad de posibilidades que tengo… o sea, si yo tengo seis posibilidades, saco una y devuelvo… y voy a volver a tener seis posibilidades (el profesor hace un gesto con el brazo para darle la palabra a la Alumna 10)
Procedimientos	▪ ***Alumnas:*** Multiplicar mentalmente, reconocer y/o diferenciar una permutación de una variación, extraer bolitas de una urna. ▪ ***Profesor:*** Dibujar el diagrama de árbol, dibujar las casillas para el principio multiplicativo, dibujar una urna con bolitas, representar algebraicamente la variación, utilizar el factorial, utilizar la simplificación.

Tabla 9: Objetos matemáticos del Episodio 2 (Gonzalo)

7.2.3.2.2 Procesos matemáticos

En la Tabla 10, identificamos los procesos matemáticos del Episodio 2.

Es posible observar que la trayectoria argumentativa y de institucionalización del concepto de "Variación con reposición y/o repetición" durante el episodio, se basa en la particularización de una problemática, dirigida por el profesor por medio de la *pregunta abierta* y la *pregunta dirigida*, utilizando registros pictóricos y simbólicos en pizarra.

Alumnas	▪ Procesos de *Personalización – Institucionalización* [2, 4, 8, 10, 12, 18, 28, 30, 60, 165]. Las alumnas hacen referencia a definiciones y conceptos y los adaptan a la situación problemática que resuelven, personalizando los conceptos de permutación y variación e institucionalizándolos para dar respuesta a las preguntas técnicas del profesor. ▪ Procesos de *Idealización - Materialización* [2, 10, 12, 18, 24, 26, 30, 42, 44, 46, 56, 60, 79, 83, 85, 87, 94, 99, 103, 105, 107] para hacer referencia a los conceptos de permutación, variación con y sin repetición, principio multiplicativo y diagrama de árbol principalmente. ▪ Procesos de *Representación – Significación* [8, 12, 16, 26, 32, 60, 87, 88, 107], haciendo referencia al contenido y la expresión matemática subyacente. ▪ Procesos de *Particularización – Generalización* [8, 20, 24, 30, 32, 56] al interactuar con el profesor, respondiendo a las preguntas abiertas con el caso particular de las bolitas en la urna, sin desligarlo del concepto de Permutación y Variación.
Profesor	▪ Proceso de *Institucionalización – Personalización* [1, 3, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 27, 33, 39] cuando utiliza preguntas abiertas para recordar conceptos vistos en las clases anteriores. ▪ Proceso de *Idealización – Materialización* [33, 39, 41, 80, 82, 86, 89, 162] al basar su explicación y construcción del objeto

	matemático de "*Variación con reposición"*, utilizando la problemática de la urna. ▪ Proceso de *Generalización – Particularización* [164, 166, 168] al aclarar la duda de las alumnas respecto de la pregunta de la Alumna 11 en la línea 163: *"Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor?"* ▪ Proceso de *Reificación – Descomposición* [80, 82, 84, 86, 89] al considerar la permutación como punto de partida para la construcción y explicación de la fórmula de una variación. ▪ Proceso de *Representación – Significación* [27, 33, 41, 47, 53, 57, 65, 71, 73, 80] para establecer la relación entre la expresión matemática (dibujo del diagrama de árbol, dibujo de la urna, las casillas de posibilidades que tradicionalmente se utiliza en las aulas por los profesores para el principio multiplicativo) y su significado de los objetos matemáticos tratados en la clase.

Tabla 10: Procesos matemáticos del Episodio 2 (Gonzalo)

7.3 Episodio 3 (Gonzalo). (05.12.2016)

El episodio que a continuación se analiza, corresponde a la etapa final de la clase del 05 de noviembre del 2016, con una duración de alrededor de 42 minutos.

7.3.1 Análisis de las fases del Episodio 3: PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO.

Siguiendo con la metodología adoptada para el análisis de los episodios, la Tabla 11 describe las fases del Episodio 3 mediante las conductas observables del profesor.

Fases del episodio	**Líneas**	**Conducta observable**
Pre - Inicio	Línea 1 a línea 13	Luego de lapso de aproximadamente 3 minutos (tiempo que determina el profesor para que las alumnas copien y/o tomen notas de lo escrito en la pizarra), el profesor pide silencio, da algunas instrucciones y se alista para comenzar un nuevo periodo de desarrollo de los contenidos y objetivos propuestos para la clase.
Inicio	Línea 14 a línea 36	A partir de la línea 14, podemos observar que el profesor da inicio al Episodio 3, focalizando el propósito del episodio, institucionalizando el concepto de *Variación con Repetición* por medio de una definición y caracterizando el tipo de ejercicios a desarrollar. Esto se ve reflejado en expresiones como: *"Ya. La permutación de r elementos. (Línea 14)"; "Variación, variación con reposición, coma. La permutación de r elementos de un conjunto. (Línea 21)"; "Ya. Entonces, miren, para que vaya trabajando en la parte de ejercicios. Abra el libro en la página 286, por favor. (Línea 32)".*

Desarrollo	Línea 37 a línea 256	El profesor inicia la fase de DESARROLLO de este episodio, solicitando la participación de las alumnas (les pide que lean el enunciado de los ejercicios de las páginas indicadas), centrando y haciendo énfasis en las características del problema que le permiten asociarlo a una permutación, variación o variación con repetición y/o reposición; sin dejar de lado la herramienta principal para la resolución de este tipo de problemas: El principio multiplicativo y el Diagrama de árbol. Muestra de aquello: *"Ya. Miren, eeeeeeh (sic). Léela Alumna 4. Shh (sic) (Línea 37)" "Usted, shhhhhh (sic). Mire, tiene el uno. En esta parte, en esta parte es fundamental que usted vaya… si no entiende el enunciado de inmediato y no lo puede asociar o con variación o con una permutación que usted entienda, usted lo puede construir a través o de diagrama de árbol o tratar de sacarlo por principio multiplicativo.* *Primero, ¿Qué tiene que hacer?* *Primero, ¿qué tiene acá? (Línea 41)" "Entonces, shhhh (sic). Entonces, lo importante de esta parte es que usted, más allá del cálculo, más allá del cómo se hace, usted vaya relacionándolo con alguno de estos dos conceptos, ya sea variación o permutación.* *En el siguiente ejercicio, dale Alumna 10 (Línea 95)"*
Cierre pedagógico	A partir de la Línea 257.	A partir de la de este instante, el profesor se dedica a recapitular los conceptos tratados en la clase, anuncia las tareas, responde dudas de manera individual y grupal y revisa el avance de dichas actividades mediante la utilización de un "timbre de trabajo en clases" (en mi experiencia, es un recurso bastante utilizado por los profesores, para motivar

	el desarrollo de los ejercicios en horas lectivas por parte de los estudiantes).
Cierre	El CIERRE del episodio ocurre al sonar el timbre.

Tabla 11: Fases del Episodio 3 (Gonzalo)

7.3.2 Unidades temáticas y actividades típicas de Aula del Episodio 3 (Gonzalo)

Nos interesa ahora, identificar las secuencias temáticas ((Martinic & Rojas, 2015)) utilizadas por el profesor durante el tercer episodio.

La Tabla 12, recoge estas unidades temáticas y actividades típicas observables por las alumnas y el profesor a lo largo del episodio.

Secuencia temática de la enseñanza	**Conducta observable del Episodio 3 (Gonzalo)**
Declarativa (explicación y/o exposición del profesor)	El profesor inicia el episodio dictando una definición para la Variación con Repetición y/o Reposición La explicación del profesor va dirigida al desarrollo de ejercicios que involucran permutaciones y variaciones, con y sin repetición, identificando, además, las características claves para asociar el enunciado de un problema con los conceptos tratados en la unidad y las formas de resolver cada problemática. Cada una de estas conductas, se puede observar en líneas tales como:

	▪ Variación, variación con reposición, coma. La permutación de r elementos de un conjunto. (Línea 21) ▪ La permutación de r elementos de un conjunto de n elementos, coma, coma. Con elementos que se pueden repetir (bis). Se conoce como variación con reposición. (bis) (Línea 24) ▪ Usted, shhhhhh (sic). Mire, tiene el uno. En esta parte, en esta parte es fundamental que usted vaya… si no entiende el enunciado de inmediato y no lo puede asociar o con variación o con una permutación que usted entienda, usted lo puede construir a través o de diagrama de árbol o tratar de sacarlo por principio multiplicativo. Primero, ¿Qué tiene que hacer? Primero, ¿qué tiene acá? (Línea 41) ▪ Entonces, shhhh (sic). Entonces, lo importante de esta parte es que usted, más allá del cálculo, más allá del cómo se hace, usted vaya relacionándolo con alguno de estos dos conceptos, ya sea variación o permutación. (Línea 95)
Trabajo privado (Procedimental 1)	A diferencia con los episodios anteriores, es posible observar un trabajo privado de las alumnas durante los minutos finales del episodio. Al ir finalizando la actividad, las alumnas se acercan al escritorio del profesor con el propósito de obtener un registro de trabajo en clases. Las siguientes líneas reflejan lo mencionado anteriormente: ▪ 12, ya están muy fáciles. Ya, estamos. Sigan, solo ustedes. (Línea 256) ▪ Ya, si no queda nada. Ítem 2. Ya, termine el ítem 2 y tiene el timbre de hoy día. (Línea 258)

Exposición de los estudiantes (Procedimental 3)	Durante este episodio, el profesor constantemente solicita la participación de las alumnas en la resolución de los ejercicios propuestos del texto de estudio, mediante la pregunta abierta y dirigida, y solicitando la lectura en voz alta por parte de las alumnas. La evaluación es mediante preguntas dirigidas con expresiones tales como: A continuación, se muestran las líneas en las que dicha actividad es observable: ▪ En un torneo de tenis se tienen cuatro equipos, A, B, C y D que se disputan el tercer y cuarto lugar. ¿De cuántas formas posibles estos equipos pueden quedar ubicados en la tabla de posiciones? (Línea 40) ▪ … ¿Qué tiene que hacer? Primero, ¿qué tiene acá? (Línea 41) ▪ ¿Cómo lo harías Alumna 6? (Línea 51) ▪ ¿Por qué? (Línea 59) ▪ O sea, esto se asocia más ¿a qué? (Línea 66) ▪ ¿o no? (Línea 78) ▪ ¿Sí? (Línea 91) ▪ ¿De cuántas maneras se pueden sentar tres niños en una fila con tres sillas? (Línea 96)
Evaluación (Procedimental 4)	La evaluación de los contenidos por parte del docente es mediante la utilización de un *"timbre"* de trabajo en clases. Esta es una estrategia utilizada por el profesor, como incentivo para el trabajo en clases y desarrollo de los ejercicios propuestos. Cabe mencionar que, durante este periodo de tiempo, el profesor atiende dudas de manera más personalizada (se acerca a las alumnas que lo requieren). Esta conducta es observable a partir de la línea 256 de la transcripción del Episodio 3 (Gonzalo).

Tabla 12: Unidades temáticas y actividades típicas de Aula del Episodio 3 (Gonzalo)

7.3.3 Análisis didáctico del Episodio 3 (Gonzalo)

Corresponde identificar las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos del episodio de acuerdo al modelo de análisis propuesto por Font (et. al 2010).

7.3.3.1 Identificación de las prácticas matemáticas del Episodio 3 (Gonzalo).

La Tabla 13 recoge las principales prácticas matemáticas del Episodio 3, entendidas como toda acción o manifestación (de carácter oral o escrito) por parte de las alumnas y el profesor utilizados para resolver las problemáticas propuestas.

Alumnas	▪ Identifican datos relevantes para la resolución de cada problema propuesto en la página 286 del texto de estudio. ▪ Responden asertivamente a las preguntas planteadas por el profesor. ▪ Asocian correctamente los conceptos de variación y permutación al ejercicio planteado. ▪ Argumentan sus respuestas (*"porque son dos lugares los que hay que ocupar" Línea 61*) ▪ Utilizan conceptos propios de la unidad y conocen su significado.
Profesor	▪ Considera el papel del diagrama de árbol y del principio multiplicativo en el desarrollo de los conceptos de permutación y variación (*"Usted, shhhhhh (sic). Mire, tiene el uno. En esta parte, en esta parte es fundamental que usted vaya… si no entiende el enunciado de inmediato y no lo puede asociar o con variación o con una permutación que usted entienda, usted lo puede construir a través o de*

	diagrama de árbol o tratar de sacarlo por principio multiplicativo." Línea 41) ▪ Considera el papel de los contextos propuestos por instrumentos validados para la educación escolar chilena ▪ Valida las respuestas de sus alumnas ▪ Recuerda las diferencias entre la permutación y la variación ▪ Valora las distintas formas de resolver un ejercicio matemático ▪ Aclara dudas de manera individual ▪ Considera tiempo de práctica personal por parte de las alumnas y evalúa la tarea asignada

Tabla 13: Prácticas matemáticas del Episodio 3 (Gonzalo)

Las prácticas matemáticas realizadas por las alumnas tienen relación con la resolución de los ejercicios propuestos en el texto de estudio. En una primera instancia respondiendo a las preguntas realizadas por el profesor y luego de manera individual y/o grupal. Mediante la interacción con el profesor y sus pares argumentan y validan sus respuestas.

Las prácticas matemáticas realizadas por el profesor tienen relación con el registro en pizarra de procedimientos y representaciones pictóricas que permiten resolver los ejercicios propuestos. Valora las distintas formas de resolver un problema. Insta la participación de las alumnas mediante preguntas abiertas y dirigidas.

7.3.3.2 Identificación de objetos y procesos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo)

Para la realización de la actividad matemática del Episodio 3, las alumnas y el profesor deben establecer relaciones entre los diferentes objetos matemáticos (Lenguaje matemático, las Situaciones – Problemas, Definiciones y conceptos, Procedimientos, Proposiciones, Argumentos) (Font, Planas, & Godino, 2010).

7.3.3.2.1 Objetos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo)

La Tabla 14 identifica los objetos matemáticos del Episodio 3

Lenguaje Matemático	▪ **Alumnas:**	
		○ **De carácter verbal:** 4 por 4, 4 por 3, 4 por 2, 4 por 1, variación, reposición, lugares, factorial, repetición, permutación, cantidad, multiplica, principio multiplicativo, opciones, diferentes.
	▪ **Profesor:**	
		○ **De carácter verbal:** Permutación, variación, variación con reposición, r elementos, conjuntos, n elementos, expresión, tercer lugar, cuarto lugar, calcular, diagrama de árbol, principio multiplicativo, 4 por 3, combinar, factorial, menos, cuantas maneras, ejercicio, n formas, ordenar, cuarenta sobre seis
		○ **De registro en pizarra:** Variación con reposición, conjunto de equipos, variación.

Situaciones Problemas	-	▪ **Situación 1:** En un torneo de tenis se tienen cuatro equipos, A, B, C y D que se disputan el tercer y cuarto lugar. ¿De cuántas formas posibles estos equipos pueden quedar ubicados en la tabla de posiciones? (Línea 40) ▪ **Situación 2:** ¿De cuántas maneras se pueden sentar tres niños en una fila con tres sillas? (Línea 96) ▪ **Situación 3:** Si usted supiera, quisiera saber las combinaciones que usted puede hacer para sacarse el Loto, ¿se acerca a una Variación o una permutación? (Línea 125) ▪ **Situación 4:** ¿Cuántas contraseñas de cuatro letras distintas se pueden diseñar con las letras de la palabra CLAVE? (Línea 143) ▪ **Situación 5:** Un analista informático va a conectar un servidor para la empresa en la cual trabaja. Tiene a su disposición tres tipos diferentes de procesadores, cuatro modelos de gabinete, memorias RAM de tres capacidades distintas y una tarjeta madre de dos modelos distintos. ¿Cuántas opciones tiene para conectar el servidor? (Línea 192) ▪ **Situación 6:** Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto? (Línea 229) ▪ **Situación 7:** Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De

	cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto? (Línea 231) ▪ **Situación 8:** De una ciudad "A" a otra ciudad "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 4, 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de "A" a "C"? (Línea 249)
Conceptos	▪ **Alumnas:** Principio multiplicativo, diagrama de árbol, permutación, variación, factorial, variación con y sin reposición. ▪ **Profesor:** Principio multiplicativo, diagrama de árbol, permutación, variación con y sin reposición, factorial, combinaciones posibles.
Proposiciones	▪ **Alumnas:** o Este si es con repetición (Línea 98) o … es como que un niño puede quedar en otra silla (Línea 112) o O sea, si es con orden es permutación y si es como más desordenado, una variación (Línea 114) o Variación entonces, es como un poco distinto (Línea 120) o La variación es como un juego… (Línea 122) o ¿Qué pasaría si son repetidas? (Línea 154) o Abajo, ¿se ponen los que sobran o los que se ocupan? (Línea 169) o Uno factorial vale uno no más (Línea 175)

- **Profesor:**
    - Usted, shhhhhh (sic). Mire, tiene el uno. En esta parte, en esta parte es fundamental que usted vaya… si no entiende el enunciado de inmediato y no lo puede asociar o con variación o con una permutación que usted entienda, usted lo puede construir a través o de diagrama de árbol o tratar de sacarlo por principio multiplicativo. (Línea 41)
    - A, B, C, D. ¿Qué otra cosa tiene? (Línea 45)
    - O sea, quiero ordenar el tercer y cuarto lugar. Ya, ¿cómo se pueden ordenar el tercer y cuarto lugar? (Línea 47)
    - ¿Cómo podrían calcularlo? (Línea 49)
    - A una variación po' (sic), ¿o no? O sea, si esto fuese una variación ¿cómo usted lo escribiría como variación? (Línea 68)
    - Una Variación. ¿Sería una variación con reposición o sin reposición? (Línea 70)
    - Entonces, shhhh (sic). Entonces, lo importante de esta parte es que usted, más allá del cálculo, más allá del cómo se hace, usted vaya relacionándolo con alguno de estos dos conceptos, ya sea variación o permutación. (Línea 95)
    - Le repito la pregunta, tres niños, tres sillas y yo quiero saber cómo sería. ¿Lo asocia más a una variación o una permutación? (Línea 105)
    - ¡Aaah (sic), perfecto po' (sic)! Perfecto, si yo, mira Alumna 11, si yo tengo una cantidad de elementos y quiero agrupar, y quiero ordenarlos a todos… permutación (Línea 111)
    - Si usted quiere ordenar, n elementos de n formas, Permutación (Línea 113)

	○ La misma cantidad de elementos que yo quiero ordenar y quiero ordenarlos todos, Permutación. Si yo quiero ordenar solo una parte de mi total de elementos, Variación (Línea 116) ○ Si usted supiera, quisiera saber las combinaciones que usted puede hacer para sacarse el Loto, ¿se acerca a una Variación o una permutación? (Línea 125)
Procedimientos	▪ **Alumnas:** Multiplicar mentalmente, clasificar un problema en variación o permutación, aplicar principio multiplicativo, aplicar la variación, aplicar la permutación. ▪ **Profesor:** Utilizar la variación, utilizar la permutación, aplicar la simplificación, usar el factorial.
Argumentos	El proceso de argumentación por parte de las alumnas y el profesor en el desarrollo del episodio viene dado y dirigido por el docente. Éste utiliza la pregunta dirigida y la pregunta abierta para la evaluación de la comprensión de los conceptos tratados en la clase. Ejemplo de aquello se refleja en las siguientes líneas: ○ ***Profesor:*** *¿Por qué? Shhhh (sic)… ¿por qué? No escucho mucho. (Línea 53)* ○ ***Alumna 6:*** *porque son cuatro equipos. (Línea 54)* ○ ***Profesor:*** *¿Por qué? (Línea 59)* ○ ***Alumna 7:*** *Porque son dos lugares los que hay que ocupar. (Línea 61)* ○ ***Profesor:*** *¿Por qué sería sin reposición? (Línea 72)* ○ ***Alumna 5:*** *Porque no se puede sacar dos veces el mismo lugar, los equipos. (Línea 73)* ○ ***Profesor:*** *Usted, con la palabra CLAVE. ¿Por qué me dijiste que es variación, Alumna 17? (Línea 147)* ○ ***Alumnas:*** *porque sobran letras. (Línea 148)*

	○ ***Profesor:*** *¿Podría ser? (Línea 244)* ○ ***Alumnas:*** *no, no, no porque falta el uno (risas) (Línea 245)*

Tabla 14: Objetos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo)

7.3.3.2.2 Procesos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo)

La actividad matemática del Episodio 3, está relacionada con la resolución de problemas propuestos en la página 286 del texto de estudio.

Los procesos identificados en el Episodio 3, se encuentran detallados en la Tabla 15.

Alumnas	▪ Procesos de *Personalización – Institucionalización* en la resolución de los problemas, al identificar y/o relacionar la variación y permutación a partir de los datos relevantes del ejercicio. ▪ Procesos de *Idealización - Materialización* para hacer referencia a los conceptos de permutación, variación con y sin repetición, principio multiplicativo y diagrama de árbol principalmente. ▪ Procesos de *Particularización – Generalización* [8, 20, 24, 30, 32, 56] al interactuar con el profesor, respondiendo a las preguntas abiertas con el caso particular de las bolitas en la urna, sin desligarlo del concepto de Permutación y Variación.
Profesor	▪ Proceso de *Institucionalización – Personalización* [1, 3, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 27, 33, 39] cuando utiliza preguntas abiertas para recordar conceptos vistos en las clases anteriores. ▪ Proceso de *Idealización – Materialización* [33, 39, 41, 80, 82, 86, 89, 162] al basar su explicación y construcción del objeto

	matemático de "*Variación con reposición"*, utilizando la problemática de la urna. ▪ Proceso de *Generalización – Particularización* [164, 166, 168] al aclarar la duda de las alumnas respecto de la pregunta de la Alumna 11 en la línea 163: *"Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor?"* ▪ Proceso de *Reificación – Descomposición* [80, 82, 84, 86, 89] al considerar la permutación como punto de partida para la construcción y explicación de la fórmula de una variación. ▪ Proceso de *Representación – Significación* [27, 33, 41, 47, 53, 57, 65, 71, 73, 80] para establecer la relación entre la expresión matemática (dibujo del diagrama de árbol, dibujo de la urna, las casillas de posibilidades que tradicionalmente se utiliza en las aulas por los profesores para el principio multiplicativo) y su significado de los objetos matemáticos tratados en la clase.

Tabla 15: Procesos matemáticos del Episodio 3 (Gonzalo)

7.4 Episodio 1 (Pedro)

El Episodio 1 (Pedro) que a continuación se analiza, fue grabado el 10 de agosto de 2017 en un colegio mixto de la ciudad de Melipilla, Provincia de Melipilla de la Región Metropolitana de Santiago, Chile. En este episodio se abordan los *Teoremas de Euclides* a partir del concepto de *Semejanza de Triángulos*.

Los *teoremas de Euclides*, en el marco curricular chileno se presentan de la siguiente manera:

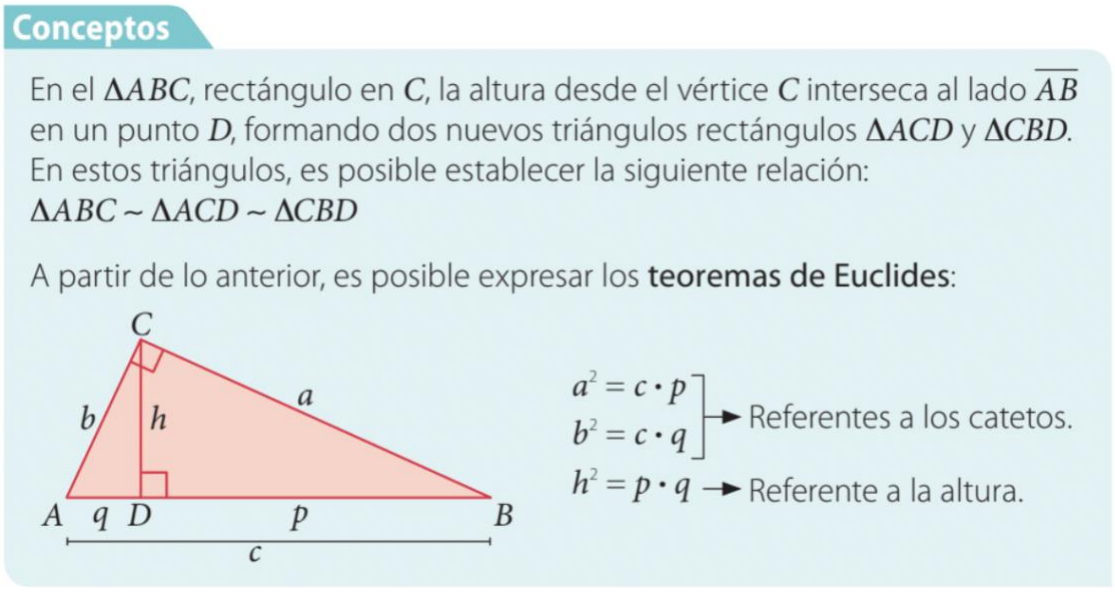


Figura 10: Teoremas de Euclides – Texto del estudiante Matemática I° Medio (Díaz, Rodríguez, & Fuentes, 2016, pág. 210)

Adicionalmente, el profesor establece la relación entre los catetos, la hipotenusa y la altura trazada desde el ángulo recto, por medio de la relación entre los teoremas referentes a los catetos (despejando las variables p y q) y el teorema referente a la altura (reemplazando los valores para p y q).

De $a^2 = p \cdot c$, se obtiene que $p = \frac{a^2}{c}$

De $b^2 = q \cdot c$, se obtiene que $q = \frac{b^2}{c}$

Reemplazando en $h^2 = p \cdot q$

Se obtiene que $h^2 = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c}$

Que es equivalente a escribir $h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}$

Y, por tanto, $h = \frac{a \cdot b}{c}$

A esta última relación, el profesor la denomina como *"cuarto teorema de Euclides (Línea 331 de la transcripción del Episodio 1 (Pedro))".*

7.4.1 Análisis de las fases del Episodio 1 (Pedro): PRE-INICIO, INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO

La Tabla 16 identifica las fases de Episodio 1 (Pedro) a partir de las conductas observables y marcadores discursivos del profesor.

Fases del episodio	**Líneas**	**Conducta observable**
Pre - Inicio	Línea 1 a línea 10	Los alumnos y el profesor se alistan para comenzar la clase. Esto es observable en líneas tales como: ▪ *Alumno 1: Profesor, ¿tiene un lápiz? (Línea 1)* ▪ *Alumnos: ¿Tiene dos? ¿Tres? (Línea 4)* ▪ *Pedro: Ya. Atención entonces. La clase anterior, estuvimos viendo un teorema. Ya, recordando: ¿cómo se llama el teorema que vimos la clase anterior? (Línea 10)*
Inicio	Línea 11 a línea 88	A partir de la línea 11, podemos observar que el profesor da inicio al Episodio 1, recordando conceptos previos, focalizando el propósito del

episodio, institucionalizando el concepto de *Semejanza de triángulos* (concepto utilizado para la construcción y demostración de los teoremas de Euclides) y aplicando el *Teorema de Tales*.

Algunos marcadores discursivos se observan en líneas tales como:

- ***Pedro:*** *El teorema de Tales, cierto. ¿En qué consistía el Teorema de Tales? ¿Alguien se acuerda? (Línea 12)*
- ***Pedro:*** *Vamos por parte. Primero. (Línea 13)*
- ***Alumno 2:*** *Teníamos un triángulo. (Línea 14)*

- ***Pedro:*** *Se formaban dos triángulos, cierto, y ¿esos triángulos, ¿cómo eran? (Línea 21)*
- ***Alumnos:*** *Proporcionales. Semejantes. (Línea 22)*

- ***Pedro:*** *Ya. Demostramos la clase anterior, que estos triángulos que estaban acá tenían tres ángulos congruentes, cierto. Por lo tanto, por criterio ángulo-ángulo-ángulo, los triángulos iban a ser semejantes. (Línea 26)*

- ***Pedro:*** *No. Eso fue lo que habíamos visto la clase anterior. Que otra información necesitamos para la clase de hoy día. ¿Conocen otro teorema más? (Línea 76)*
- ***Alumnos:*** *El teorema de Pitágoras (Línea 77)*

Desarrollo	Línea 89 a línea 336	El profesor inicia la fase de DESARROLLO escribiendo y dictando el título para la clase. A lo largo de esta fase, el profesor utiliza la pregunta abierta para interactuar con las alumnas y explicar la aparición de los Teoremas de Euclides referentes a los catetos y la altura, por medio del concepto de semejanza y el teorema de Tales. Algunos ejemplos de aquello se reflejan en líneas tales como: ▪ ***Pedro:*** *Tengo el triángulo rectángulo y le voy a hacer así. Por tanto, ¿qué letra correspondería aquí?* ▪ ***Pedro:*** *Ese ángulo de ahí vale ¿cuánto? (Línea 113)* ▪ ***Pedro:*** *El asunto es que, ¿cuántos triángulos ven ahí ustedes? (Línea 115)* ▪ ***Pedro:*** *¿Qué transformación isométrica tendría que hacer yo para mover esos triángulos de ahí? (Línea 118)* ▪ ***Pedro:*** *Que sabemos de ellos, ¿cuánto vale este ángulo que está acá? (Línea 121)* ▪ ***Pedro:*** *¿Qué lado tienen igual? (Línea 147)* ▪ ***Pedro:*** *por lo tanto, estos triángulos de acá ¿son semejantes? (Línea 160)* ▪ ***Pedro:*** *si, ¿por qué criterio? (Línea162)*
Cierre pedagógico	A partir de la Línea 337.	A partir de la *Línea 337* de la transcripción, el profesor va dando un cierre al episodio. Recapitula los teoremas de Euclides, aclara las dudas que les van surgiendo a los alumnos y da las instrucciones para finalizar el Episodio 1. Las siguientes líneas reflejan lo anteriormente mencionado:

	▪ ***Pedro:*** *La hipotenusa. Por lo tanto, (risas) tenemos, la altura… tenemos dos teoremas de la altura: altura es igual a la multiplicación de la proyección del A y el B. Y, la otra altura se puede encontrar sola por la multiplicación de los catetos dividida en la… hipotenusa. Copien eso y nos vamos a ir con los ejemplos con numeritos. (Línea 337)* ▪ ***Pedro:*** *4 al cuadrado es 16. Entonces yo digo, altura al cuadrado es igual a eso, ¿Qué número multiplicado por sí mismo me da eso? Eso que está aquí. Entonces, altura vale eso. Copien eso por favor, cópienlo todo y así empezamos con los ejercicios. (Línea 343)*

Tabla 16: Fases del Episodio 1 (Pedro)

7.4.2 Unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 1 (Pedro)

A partir de la transcripción de los primeros 37 minutos de video, de la clase dictada por el profesor el día jueves 10 de agosto de 2017, en la ciudad de Melipilla a un primero medio mixto de un colegio particular subvencionado, se analizan las secuencias temáticas desde de las conductas observables en el episodio.

La Tabla 17, registra las secuencias temáticas observables del Episodio 1 (Pedro).

Secuencia temática de la enseñanza	**Conducta observable del Episodio 1 (Pedro)**
Declarativa (explicación y/o exposición del profesor)	La exposición y/o explicación del profesor a lo largo del episodio, se va construyendo en la interacción con los alumnos mediante preguntas abiertas.

	La información se transmite de manera oral (sin utilizar el dictado, sino que haciendo alusión al concepto matemático de manera verbal), escrita (de registro y representación en pizarra) y kinestésicamente. El papel de los conocimientos previos es considerado una pieza fundamental por el profesor, pues le permite desarrollar y construir los conceptos matemáticos planificados.
Metacognitiva	A lo largo del episodio, el profesor estimula la reflexión por parte de los alumnos, ya sea para recordar conceptos previos, como también para la construcción de los teoremas de Euclides. Para realizarlo, utiliza preguntas abiertas tales como: ▪ ***Pedro:*** *¿Tienen los mismos lados? (Línea 28)* ▪ ***Pedro:*** *¿Está bien esa comparación? (Línea 56)* ▪ ***Pedro:*** *Trozo con lado. ¿Estaría bien? (Línea 60)* ▪ ***Pedro:*** *No. Por lo tanto… ¿haber? (Línea 62)* ▪ ***Pedro:*** *¿Por qué? (Línea 131)* ▪ ***Pedro:*** *¿Por qué son semejantes? (Línea 145)*
Revisión de tareas	El profesor realiza una revisión de los contenidos de semejanza y el teorema de Tales al inicio de la clase, con el objetivo de utilizarlos en la construcción de los nuevos contenidos.

Tabla 17: Secuencias temáticas y Actividades típicas de aula. Episodio 1 (Pedro)

Lo que destaca en este episodio es el dialogo que genera el profesor con los alumnos para la construcción de los contenidos y conceptos matemáticos, mediante la herramienta de pregunta-respuesta (utilizando para aquello, principalmente, la pregunta abierta y la contra-pregunta). Esto genera un buen clima de aprendizaje y ayuda en los procesos de metacognición de los alumnos.

Al igual que en los episodios de Gonzalo, el profesor destaca la importancia de los conocimientos previos para la construcción de nuevos conocimientos.

7.4.3 Análisis didáctico del Episodio 1 (Pedro).

A continuación, presentamos un análisis didáctico del Episodio 1 (Pedro), identificando las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos.

7.4.3.1 Identificación de las Prácticas matemáticas del Episodio 1 (Pedro)

La Tabla 18, recoge las principales prácticas matemáticas del episodio realizadas por los estudiantes y el profesor.

Estudiantes	▪ Recuerdan procedimientos y ejemplos o ***Alumno 2:*** *Teníamos un triángulo. (Línea 14)* o ***Alumno 2:*** *Se hacía una recta paralela (Línea 16)* o ***Alumno 2:*** *A laaaa (sic), a la base. (Línea 18)* ▪ Recuerdan conceptos y criterios de semejanza. o ***Pedro:*** *Eran semejantes, cierto. Y, ¿Por qué criterio eran semejantes estos triángulos? (Línea 23)* o ***Alumno 4:*** *Porque tenían los mismos ángulos (Línea 24)* ▪ Responden asertivamente a las preguntas que hace el profesor o ***Pedro:*** *si, ¿por qué criterio? (Línea 162)* o ***Alumnos:*** *ángulo-ángulo-ángulo. Ángulo-ángulo-lado. ángulo-ángulo (Línea 163)* ▪ Identifican las condiciones para aplicar el Teorema de Pitágoras. o ***Pedro:*** *El teorema de Pitágoras, cierto. ¿Qué decía el teorema de Pitágoras? O ¿Cuándo se podía aplicar? (Línea 80)* o ***Alumnos:*** *cuando tengo un triángulo rectángulo. La regla de 3, 4, 5 (Línea 81)*

	▪ Se cuestionan respecto de las relaciones de proporcionalidad que son adecuadas de realizar para obtener el teorema de Euclides. o ***Alumna 12:*** *Si no tuvieran letras en común, ¿no se podrían comparar? (Línea 224)*
Profesor	▪ Considera los conocimientos previos, como parte fundamental de la construcción de nuevos conocimientos y objetos matemáticos. ▪ Estimula la participación de los estudiantes mediante la pregunta-repuesta corta. o ***Pedro:*** *por lo tanto, estos triángulos de acá ¿son semejantes? (Línea 160)* o ***Alumnos:*** *sí. (Línea 161)* o ***Pedro:*** *si, ¿por qué criterio? (Línea 162)* o ***Alumnos:*** *ángulo-ángulo-ángulo. Ángulo-ángulo-lado. ángulo-ángulo (Línea 163)* ▪ Aclara dudas conceptuales o ***Alumno 8:*** *¿Cómo?* ***Alumno 9:*** *¿Cómo va a caer en 90 grados? (Línea 96)* o ***Pedro:*** *Que la altura cae siempre perpendicularmente, tiene que caer justo en 90 grados con respecto a la base, sí. Por ejemplo, yo tengo un triángulo así. ¿Sería altura eso? La altura de un triángulo tiene que caer perpendicularmente, estamos de acuerdo. Por lo tanto, acá ya tenemos un triángulo rectángulo, cierto. Que fue puesto de esta manera y trazo la altura hacia abajo, ok. (Línea 97)* ▪ Representa gráficamente los teoremas de Euclides ▪ Muestra nemotécnicas que facilitan el recuerdo de conceptos matemáticos tratados. o ***Pedro:*** *a P por Q. Entonces, mis alumnos decían antes esta nemotécnica: te voy a pegar… Charchazo. Entonces, H por H es P*

por Q, ya, y así se aprendían la fórmula de este ejercicio que está aquí. Obviamente, las letras después no tienen sentido. Si yo pongo un ejercicio así, rectángulo y usted quiere saber la altura y este vale tres y cuatro, ¿cuánto vale la altura? (Línea 208)

La siguiente imagen, ilustra la nemotécnica utilizada por el profesor para explicar el teorema de euclides relativo a la altura.

- Establece relaciones entre lo pictórico y lo simbólico.
    - ***Pedro:** a P por Q. Esa fórmula que está ahí. Esa fue la demostración. Es decir, cuando yo tenga ejercicios de este estilo, lo que yo debería hacer, es descomponer los triángulos, cierto, y hacer estas comparaciones, ¿qué son bastante complejas, cierto? Entonces, en vez de hacer todas estas comparaciones, me quedo con esta pura fórmula, que dice que: la altura al cuadrado es la multiplicación de las proyecciones de los catetos. Ok, después vamos a ver un ejemplo. Dígame. (Línea 204)*

Tabla 18: Practicas matemáticas del Episodio 1 (Pedro)

7.4.3.2 Identificación de los Objetos y Procesos matemáticos del Episodio 1 (Pedro)

Continuando con el análisis didáctico, se muestran los objetos y procesos matemáticos identificados del episodio.

7.4.3.2.1 Objetos matemáticos del Episodio 1 (Pedro)

La Tabla 19, agrupa los objetos matemáticos identificados en el transcurso del Episodio 1 (Pedro)

Lenguaje Matemático	▪ **Estudiantes:** o De carácter verbal: Teorema de Tales, triángulo, recta paralela, base, proporcional, semejantes, ángulos, mismos lados, lados proporcionales, trozo por trozo, AB (para nombrar los lados de un polígono), BD con DE, igual, teorema de Pitágoras, triangulo rectángulo, la regla de 3-4-5, cateto, hipotenusa, al cuadrado, cae perpendicularmente, 90 grados, de proyección, p prima, altura, dos, tres, traslación, alpha, beta, mitad, triángulo equilátero, isósceles, escaleno, ángulo-ángulo-ángulo, rotar, reflexión, medida, partirlo, tres por cuatro, Q por C, P es a C, división, pasa dividiendo. ▪ **Profesor:** o **De carácter verbal:** teorema, Teorema de Tales, triángulos, triángulos semejantes, demostrar, ángulos congruentes, lados proporcionales, recta paralela, comparaciones, segmentos, A (para denotar puntos), AB (para denotar segmentos y/o lados), teorema de Pitágoras, triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, altura, al cuadrado, teorema de

	Euclides, rotar, reflejar, trasladar, trazar, perpendicular, 90 grados, base, recta, segmento, proyección, “a” (para nombrar segmentos y/o lados), transformación isométrica, alpha, beta, equilátero, lado, criterio de semejanza, relación, multiplicando, p por q, elevado, comprobar, miden, fórmula, calcular, despejar, dividido, reemplazo, partido, raíz cuadrada. ○ **De registro en pizarra:** Teorema de tales, rectas paralelas, triángulos semejantes, teoremas de Euclides, triángulos rectángulos, p por q, vértices, lados.
Situaciones / Problemas	En el Episodio 1 (Pedro) es posible identificar dos situaciones problema. ▪ **Situación 1:** relativa a determinar y recordar conceptos previos de semejanza de triángulos por medio del teorema de Tales. Esta situación se da en las líneas 14 a la 88 de la transcripción del episodio. ▪ **Situación 2:** que tiene relación con la construcción de los teoremas de Euclides a partir de las relaciones de semejanza y proporcionalidad, que se producen al trazar la altura desde un el ángulo recto en un triángulo rectángulo. Esta problemática se da principalmente en la fase de DESARROLLO del episodio.
Conceptos	▪ **Estudiantes:** Semejanza, Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras. ▪ **Profesor:** Semejanza, Congruencia, Teorema de Pitágoras, Teorema de Euclides, rectas paralelas, criterios de

	semejanza de triángulos, teorema de Tales, transformaciones isométricas.
Proposiciones	Las proposiciones de los estudiantes en este episodio responden a la interacción con el profesor mediante la pregunta-respuesta. Ejemplo de aquello ▪ **Estudiantes:** o *Teníamos un triángulo. (Línea 14)* o *Se hacía una recta paralela (Línea 16)* o *Se convertía en un triángulo sobre otro proporcional (Línea 20)* o *Que los catetos al cuadrado van a dar lo mismo que la hipotenusa al cuadrado. (Línea 85)* o *Que cae perpendicularmente. (Línea 94)* o *p prima. (Línea 105)* o *En el triángulo equilátero. (Línea 140)* o *Isósceles. Escaleno. No sé. En ningún otro más (Línea 142)* o *Que todos miden lo mismo. Que están hechos del mismo. (Línea 144)* Las proposiciones del profesor son en relación de la construcción del conocimiento y el recuerdo de los conceptos previos. ▪ **Profesor:** o *La clase anterior, estuvimos viendo un teorema. (Línea 10)* o *Ya. Demostramos la clase anterior, que estos triángulos que estaban acá tenían tres ángulos congruentes, cierto. (Línea 26)* o *El teorema de Tales decía que, si yo tengo un triángulo cierto, y trazo una recta paralela se formaban dos triángulos semejantes cierto. (Línea 34)* o *Es decir, hasta el momento, en todos estos años que hemos estado estudiando hemos conocido dos teoremas. (Línea 86)*

	○ *Que la altura cae siempre perpendicularmente, tiene que caer justo en 90 grados con respecto a la base, sí. (Línea 97)* ○ *Si yo hago esto que está aquí abajo, si ustedes se dan cuenta, miren, esto sería como la sombra del cateto ¿Cierto? ¿Lo ven o no? (Línea 100)* ○ *esa sombra se va a llamar proyección del cateto que está aquí, como la sombra, ok. Y esa proyección va tener una letra llamada p, ok. Es solamente nomenclatura. (Línea 102)*
Procedimientos	▪ **Alumnas:** Recuerdo de conceptos previos, aplican teorema de Tales y criterios de semejanza de triángulos. ▪ **Profesor:** Demostración de teoremas de Euclides, Aplica criterios de semejanza de triángulos, traza perpendiculares y paralelas.

Tabla 19: Objetos matemáticos del Episodio 1 (Pedro)

7.4.3.2.2 Procesos matemáticos del Episodio 1 (Pedro)

La actividad matemática del Episodio 1 (Pedro), está relacionada con la construcción de los teoremas de Euclides a partir de los conceptos de *Semejanza de triángulos y sus criterios* y el *Teorema de Tales.*

Los procesos matemáticos identificados en este episodio se muestran en la Tabla 20.

Alumnas	▪ Procesos de *Personalización - Institucionalización* al recordar conceptos tratados en clases anteriores. ○ *Alumnos: que los catetos al cuadrado van a dar lo mismo que la hipotenusa al cuadrado (Línea 85)* ▪ Procesos de *Idealización - Materialización* para hacer referencia a los conceptos de semejanza, altura.

Profesor	▪ Proceso de *Institucionalización – Personalización* al construir los teoremas de Euclides a partir de una representación personal de un triángulo rectángulo e institucionalizar los objetos. ▪ Proceso de *Idealización – Materialización* al utilizar representaciones gráficas en representación de los objetos matemáticos de triángulo rectángulo, hipotenusa, catetos, proyecciones, ángulo recto, multiplicación, entre otros. ▪ Proceso de *Reificación – Descomposición* al considerar la semejanza de triángulos y el teorema de Tales como punto de partida para la construcción y explicación de los Teoremas de Euclides. ▪ Proceso de *Representación – Significación* para establecer la relación entre la expresión matemática (dibujo de un triángulo rectángulo, la altura desde el ángulo recto, los nombres de cada segmento) y el significado de los objetos matemáticos tratados en la clase. En la imagen se ilustra la forma como el profesor utiliza el recurso gráfico para representar lo que esta explicando.

Tabla 20: Procesos matemáticos del Episodio 1 (Pedro)

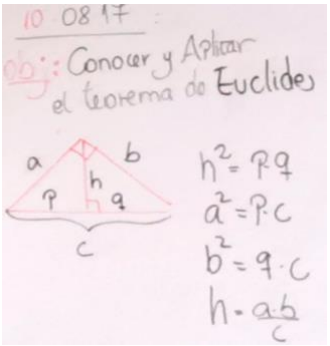
7.5 Episodio 2 (Pedro)

En el Episodio 2 (Pedro), se analizan los 30 minutos finales de la clase del 10 de agosto de 2017. En este episodio se focaliza el contenido y se resuelven tres ejercicios "tipo PSU[6]".

Corresponde analizar entonces, las fases del episodio, identificar las temáticas y actividades típicas de aula, las prácticas matemáticas y los objetos y procesos matemáticos.

7.5.1 Análisis de las fases del Episodio 2 (Pedro): INICIO, DESARROLLO Y CIERRE PEDAGÓGICO.

En la Tabla 21, se identifican las fases del Episodio 2 de Pedro.

Fases del episodio	Líneas	Conducta observable
Inicio	Línea 1 a línea 10	En estas líneas, se observa una introducción al tema (que corresponde en este caso, al resumen del concepto tratado en el Episodio 1 de Pedro), lo que nos indica que el profesor está examinando los conocimientos necesarios para resolver los problemas y ejercicios que tiene preparado. Todo aquello queda registrado e institucionalizado en pizarra, como se muestra en la siguiente imagen: 

[6] Siglas para *Prueba de Selección Universitaria* en el marco de la educación chilena.

Desarrollo	Línea 11 a línea 291	El profesor inicia la fase de DESARROLLO de este episodio, leyendo el primero de los tres problemas que tiene preparado. ○ *Entonces, leamos el siguiente problema: El triángulo ABC de la figura, es rectángulo en C. por lo tanto, ahí tenemos un triángulo rectángulo y se trazó la altura. Por lo tanto, eso quiere decir que estamos en la presencia del teorema de Euclides, cierto. ¿Cuánto vale CD? (Línea 11)* A lo largo de esta fase, el profesor motiva la participación activa de los estudiantes en la resolución de los ejercicios, con preguntas tales como: ○ *¿Cuántas fórmulas de ahí me sirven para calcular la altura? (Línea 13)* ○ *¿Solo una? (Línea 15)* ○ *¿los podría sacar? (Línea 21)* ○ *¿puedo sacar la hipotenusa yo también? (Línea 67)*
Cierre pedagógico	A partir de la Línea 292.	Es a partir de la línea 292, el profesor comienza a recapitular, resumir y evaluar lo aprendido durante la clase. Esto se manifiesta en frases como: ○ *Veamos lo siguiente, para terminar. (Línea 292)* ○ *Cuando yo tengo un triángulo rectángulo trazo la altura del triángulo rectángulo se forman ¿Qué se forman? (Línea 292)* ○ *Se descubrieron tres fórmulas de Euclides para resumir esta comparación. ¿Cuáles son ellas? (línea 296)* ○ *Ese es el teorema de Euclides y con eso terminamos la clase. (Línea 316).*

Tabla 21: Fases del Episodio 2 (Pedro)

7.5.2 Unidades temáticas y Actividades típicas de aula del Episodio 2 (Pedro).

A continuación, la Tabla 22, se agrupan las secuencias temáticas y actividades típicas que realizan los estudiantes y el profesor a lo largo del Episodio 2 (Pedro).

Secuencia temática de la enseñanza	**Conducta observable del Episodio 2 (Pedro)**
Declarativa (explicación y/o exposición del profesor)	La explicación del profesor va dirigida a la resolución de problemas y/o ejercicios tipo PSU, que involucra la aplicación de los teoremas de Euclides. La construcción de su discurso está basado en la interacción con los estudiantes utilizando como recurso *la pregunta abierta*. Esta herramienta de comunicación genera gran interés por la búsqueda de las soluciones y gran participación por parte de los estudiantes.
Exposición de los estudiantes (Procedimental 3)	La exposición de los contenidos por parte de los estudiantes es mediante el proceso de comunicación de *pregunta-respuesta*. ▪ ***Profesor:*** *Espera, espera, espera un poquito. Ya tenemos lo siguiente. Para sacar el área de un rectángulo. ¿Qué tenemos que tener Primero?* ▪ ***Alumnos:*** *La P y la Q. Lo de arriba* ▪ ***Profesor:*** *y "x" al cuadrado. Y este x al cuadrado de aquí ¿Quién es en realidad?* ▪ ***Alumnos:*** *es el h. El h* ▪ ***Profesor:*** *Seis, ¿Qué quiere decir eso?* ▪ ***Alumno 3:*** *que la altura es 71* ▪ ***Profesor:*** *Que la altura, ¿Cuánto vale la altura aquí?* ▪ ***Alumnos:*** *Seis*

Metacognitiva	En ciertos momentos del Episodio 2 de Pedro, los estudiantes se cuestionan respecto de los posibles caminos a seguir para resolver los ejercicios y de las variables involucradas en cada uno de los teoremas de Euclides. ▪ ***Alumno 6:*** *hay como dos fórmulas para encontrar la… (Línea 54)* ▪ ***Alumnos:*** *Sí. Sí, porque los catetos al cuadrado es la hipotenusa al cuadrado. (Línea 68)*

Tabla 22: Unidades Temáticas y Actividades Típicas de Aula del Episodio 2 (Pedro)

7.5.3 Análisis didáctico del Episodio 2 (Pedro)

Corresponde identificar las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos del episodio de acuerdo al modelo de análisis propuesto por Font (et. al 2010).

7.5.3.1 Identificación de las prácticas matemáticas del Episodio 2 (Pedro)

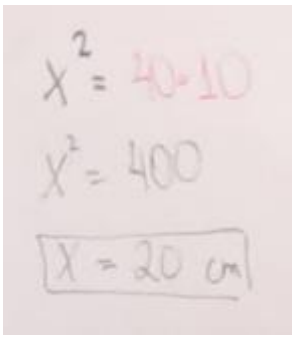
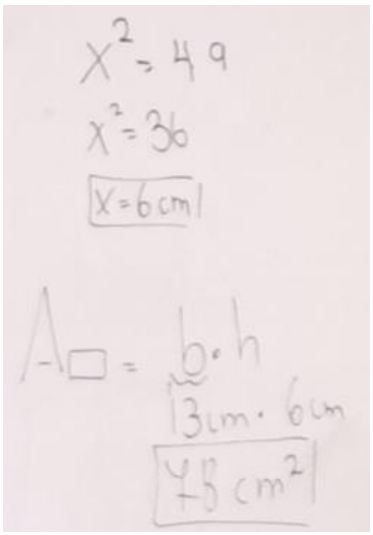
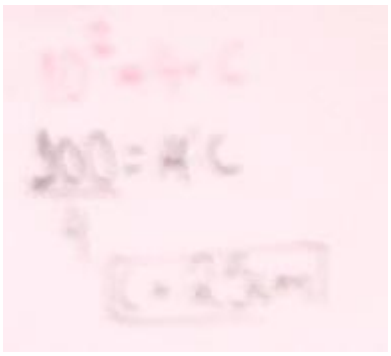
La Tabla 23, recoge las principales acciones matemáticas (de carácter oral, escritas o kinestésicas) realizadas por los estudiantes y el profesor durante el episodio, para resolver los ejercicios propuestos.

Alumnas	▪ Utilizan conceptos matemáticos para comunicar sus ideas. ▪ Reconocen los teoremas de Euclides a partir de la representación pictórica utilizada por el profesor. ▪ Calculan raíces cuadradas de forma mental y aproximaciones ▪ Identifican los datos del problema y lo relacionan con alguno de los teoremas de Euclides ▪ Hacen cálculos mentales ▪ Son conscientes de las unidades de medida.
Profesor	▪ Institucionaliza los teoremas de Euclides. ▪ Utiliza representaciones gráficas y kinestésicas. ▪ Cuestiona la comprensión de sus estudiantes, respecto de los problemas planteados ▪ Utiliza el leguaje matemático para comunicar sus ideas. ▪ Plantea ecuaciones y las resuelve en pizarra.

Tabla 23: Prácticas matemáticas del Episodio 2 (Pedro)

Las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, tienen relación con la resolución de ejercicios de respuesta cerrada (preguntas de selección única). Su actividad matemática está motivada principalmente por la interacción con el profesor (respondiendo a las preguntas que el docente plantea) y luego copiando de la pizarra los ejercicios y su solución.

La práctica matemática del profesor está dirigida a mostrar aplicaciones del teorema de Euclides. Para aquello, utiliza constantemente la pregunta abierta y va registrando en pizarra cada uno de los procedimientos.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3
		 Lo que se muestra en la imagen, $10^2 = 4 \cdot C$ $\frac{100}{4} = \cancel{4} \cdot C$ $C = 25\ cm$

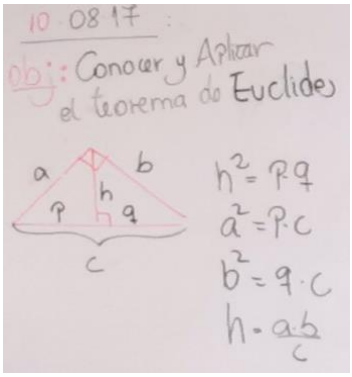
7.5.3.2 Identificación de los objetos y prácticas matemáticas del Episodio 2 (Pedro)

Para la realización de la actividad matemática del Episodio 3, las alumnas y el profesor deben establecer relaciones entre los diferentes objetos matemáticos (Lenguaje matemático, las Situaciones – Problemas, Definiciones y conceptos, Procedimientos, Proposiciones, Argumentos) (Font, Planas, & Godino, 2010) y los procesos de Institucionalización, Reificación, Materialización, Significación entre otros.

7.5.3.2.1 Objetos matemáticos del Episodio 2 (Pedro)

En la Tabla 24, se describen los objetos matemáticos identificados del episodio.

Lenguaje Matemático	▪ **Alumnas:** ○ ***De carácter verbal:*** H por H, H al cuadrado, catetos, dividido en la hipotenusa, la altura, una, dos, la última, la primera, P por Q, centímetros, simplificar, x por x es 400, fórmulas, la proyección, teorema de Pitágoras, triángulo, base, paralelas, centímetro cuadrados, rectángulo, semejantes. ▪ **Profesor:** ○ ***De carácter verbal:*** Teoremas de Euclides, relación de los triángulos, H al cuadrado, P por Q, fórmula, proyección por la hipotenusa, altura, multiplicando, catetos divididos en, el triángulo ABC de la figura, triángulo rectángulo, se trazó la altura, para calcular, una, dos, proyección de catetos, vale 50, la raíz de 400, la primera, x, número, 10 centímetros, simplificar, raíz cuadrada, teorema de Pitágoras, la base, base por la altura, el área del rectángulo,

		teorema de Tales, lados del rectángulo, centímetros cuadrados, perímetro del triángulo, suma del contorno de la figura, esa medida, multiplicado, exacta, con decimal, aproximar, 10 más 21, determinando. ○ ***De registro en pizarra:*** Teoremas de Euclides. La siguiente imagen, muestra el registro en pizarra de cada uno de los teoremas de Eclides desarrollados por el profesor. 
Situaciones Problemas	-	▪ **Situación 1:** El triángulo ABC de la figura, es rectángulo en C. por lo tanto, ahí tenemos un triángulo rectángulo y se trazó la altura. Por lo tanto, eso quiere decir que estamos en la presencia del teorema de Euclides, cierto. ¿Cuánto vale CD? (Línea 11) ▪ **Situación 2:** Observe el triángulo rectángulo ABE, inscrito en el rectángulo ABCD que muestra la figura ¿Calcule el área del rectángulo? (Línea 83) ▪ **Situación 3:** Se tiene un triángulo rectángulo en C. Hay está, rectángulo en C; cuya medida de su cateto mide 10 centímetros, aquí está ¿Cierto?, y la proyección sobre la hipotenusa, la proyección que tiene ese cateto vale cuatro centímetros. ¿Calcule el perímetro del triángulo? (Línea 147)
Conceptos		

	▪ **Alumnas:** triángulo, cateto, hipotenusa, altura, teorema de Pitágoras, teorema de Euclides, multiplicación, raíz cuadrada, proyección. ▪ **Profesor:** Teorema de Euclides, multiplicación, altura, base, cateto, hipotenusa, área, perímetro, raíz cuadrada, proyección, triángulo rectángulo.
Proposiciones	▪ **Alumnas:** o deberían poner también el 400, como para haber engañado. (Línea 44) o Profe, es que es como simplificar la altura (Línea 46) o hay como dos fórmulas para encontrar la… (Línea 54) o y esa, si me dan los catetos. (Línea 60) o Profe, y si a uno le dan los catetos y le piden sacar la altura. (Línea 64) o Sí, porque los catetos al cuadrado es la hipotenusa al cuadrado. (Línea 68) o Aaah (sic) profe ya se ya se. Usamos el triángulo P y Q po' (sic) (Línea 84) o Eso es como lo que hicieron el triángulo partido porque es la misma base entonces simbolizan lo mismo. (Línea 94) o Es que cuando vimos la primera parte que era sobre partir el triángulo porque está en partes… Vimos que la base dividida es lo mismo po' (sic). Era paralelas … (Línea 96) o x al cuadrado es igual al treinta y seis. (Línea 114) o pero, cuando no es triángulo no hay que dividirlo pa' (sic) que me dé el área. (Línea 138) o Hay ta (sic) la mano. Despejar la c. La c pasa a dividir. (Línea 172)

- No profe, profe no. Diez al cuadrado y veinte y uno al cuadrado, después le resta y a ver cuánto se le da. (Línea 202)
- la tres. Pero hagámosla con Pitágoras no más po' (sic). Más fácil. (Línea 209)
- Tiene que ser un 5 si o si (Línea 229)

- **Profesor:**
  - La hipotenusa vale 50. (Línea 19)
  - Los podría sacar mediante esa fórmula. (Línea 23)
  - x al cuadrado es igual a ¿cuánto? (Línea 35)
  - que número al cuadrado me da 400 (Línea 39)
  - Ahí tenemos una aplicación del teorema de Euclides. (Línea 43)
  - Una aplicación del teorema y así son los ejercicios. (Línea 53)
  - con el teorema de Pitágoras podríamos sacar la hipotenusa (Línea 71)
  - "x" no la conozco, es decir yo debo encontrar el valor de "x" para sacar el área del rectángulo. (Línea 93)
  - Es la altura del triángulo rectángulo. (Línea 111)
  - Entonces digo, X al cuadrado es altura al cuadrado (Línea 115)
  - El área del rectángulo seria base por altura. (línea 129)
  - El perímetro es la suma del contorno de la figura. (Línea 195)
  - aaah (sic) si, si y lo otro que podría ser válido también es poder haber sacado la altura pa (sic) cubrir eso ¿Cierto? (Línea 206)
  - 525, ya ahí entramos en una materia que nosotros vimos cuando éramos pequeñitos, decíamos. ¿Qué número multiplicado dos veces me da 525? (Línea 226)

Procedimientos

	▪ **Alumnas:** Multiplicar mentalmente, aplicar el teorema de Euclides, calcular raíces cuadradas, aproximar raíces cuadradas, identificar los elementos de triángulos rectángulos, calcular área y perímetro de figuras planas. ▪ **Profesor:** Aplicar los teoremas de Euclides, plantear ecuaciones, resolver ecuaciones, calcular raíces cuadradas, aproximar raíces cuadradas, institucionalizar los teoremas de Euclides, calcular áreas y perímetros.

Tabla 24: Objetos matemáticos del Episodio 2 (Pedro)

7.5.3.2.2 Procesos matemáticos del Episodio 2 (Pedro)

La Tabla 25, muestra los procesos matemáticos identificados en el Episodio 2 de Pedro, utilizadas por el profesor y los estudiantes para el desarrollo de la clase.

Alumnas	▪ Procesos de *Personalización – Institucionalización* al responder las preguntas del profesor al final del capítulo, respecto de los teoremas de Euclides, para la formalización de los teoremas de Euclides. ▪ Procesos de *Idealización - Materialización* al multiplicar mentalmente. ▪ Procesos de *Particularización – Generalización* al responder las preguntas del profesor respecto de los datos de cada problema, utilizando conceptos matemáticos e identificando el teorema de Euclides apropiado para el problema propuesto.
Profesor	▪ Proceso de *Institucionalización – Personalización* al formalizar los teoremas de Euclides.

- *Es igual a q por c. Que sería cateto al cuadrado es igual a la proyección del cateto por la hipotenusa y el último. Alumno 12, ya tuvo su opción. (Línea 306)*
- *quiere decir que la altura también se puede sacar determinado los catetos partidos en la hipotenusa. Ese es el teorema de Euclides y con eso terminamos la clase. (Línea 316)*

- Proceso de *Idealización – Materialización* al representar pictóricamente los teoremas de Euclides.
- Proceso de *Generalización – Particularización* al proponer problemas de aplicación de los teoremas de Euclides y generalizar métodos de resolución o dar tips para asociar los datos con el Teorema de Euclides apropiado.
- Proceso de *Representación – Significación* al indicar kinestésicamente la proyección de un cateto en la hipotenusa o al representar ángulos rectos y los elementos del triángulo rectángulo asociándolos con los conceptos adecuados.

  Con la siguiente imgen, se quiere ilustrar los movimeintos que acompañana la explicación del profesor.

Tabla 25: Procesos matemáticos del Episodio 2 (Pedro)

Capítulo 8: Discusión final, conclusiones, recomendaciones y aportes

A continuación, se presentan las principales conclusiones, recomendaciones y aportes de la investigación a la educación matemática y a la formación de profesores.

8.1 Discusión final

Al proponernos analizar las competencias comunicativas de los profesores de matemática en Chile, identificando elementos teóricos y prácticos, se analizaron los perfiles de egreso de las carreras de pedagogía.

En los perfiles de egreso de las carreras de Pedagogía en matemática, existe evidencia de que la comunicación es fundamental para el desarrollo profesional del docente que están formando. Sin embargo, no existe claridad respecto de cómo se debería considerar la competencia de la comunicación. Se hace referencia a la comunicación como **competencia disciplinar, dominio de experticia disciplinaria, capacidad, competencia y habilidad.**

El siguiente paso era inspeccionar las mallas curriculares de los programas de formación inicial de profesores de matemática, con el objeto de contrastar y/o establecer la relación que existe entre lo que se declara en el perfil de egreso y los cursos relativos a la comunicación.

Del analisis a las mallas curriculares de las carreras de Pedagogía, se observa que 11 de los 19 programas contienen cursos relacionados con la comunicación. Sin embargo, estos cursos se imparten en el primer año de formación y de forma general, con estudiantes que tienen pocas herramientas y/o nociones respecto de metodologías de enseñanza de la matemática. Otro aspecto interesante, es que, en solo 3 programas de formación inicial de profesores de matemática, los nombres de las asignaturas relacionadas con la comunicación, estas se involucran directamente con la enseñanza de la matemática.

También, era importante conocer la opinión y los argumentos de los jefes de carrera responsables de las carreras de pedagogía en matemática. De la encuesta realizada a los jefes de las carreras de pedagogía en matemática, todos coinciden que el desarrollo de habilidades comunicativas en los profesores de matemática es importante, pues mediante el lenguaje (matemático y materno) los profesores pueden comunicar la disciplina a sus alumnos, mejorar el clima de aula, incentivar el interés por la disciplina y les permite, además, a los profesores desarrollarse profesionalmente.

Sin embargo, se abordan de manera transversal y con poca conexión con la enseñanza de la disciplina.

En contraste con la encuesta a los jefes de carrera, en la encuesta sobre las percepciones que tienen los profesores en ejercicio, respecto de sus habilidades comunicativas, estos hacen referencias de lo que creen que es comunicar la matemática (explicar de manera sencilla, la teoría, dar definiciones, los cambios de registro, entre otros) y analizan los factores (un aula heterogénea, el contenido, la retroalimentación, el refuerzo, la planificación, entre otros) que influyen en ella.

Otro aspecto importante que manifiestan los profesores en ejercicio, al ser consultados por asignaturas de su plan de formación inicial que desarrollaron en ellos habilidades comunicativas, los docentes en ejercicio de la profesión piensan que estas habilidades fueron desarrolladas de forma transversal (ya sea por asignaturas propias de la disciplina de la matemática o por asignaturas de pedagogía y/o didáctica, pero no por asignaturas dedicadas a la comunicación) o no fueron desarrolladas (sino que corresponden a habilidades propias).

Para reconocer elementos prácticos que sirvan para caracterizar la competencia comunicativa en la formación de los futuros profesores de matemática, se llevó a cabo un estudio de los casos de Gonzalo y Pedro, obteniéndose que:

- ambos profesores utilizan la **pregunta abierta** como recurso comunicativo efectivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, ya sea para explicar y/o evaluar la comprensión de los contenidos matemáticos de la clase.
- con el objetivo de cambiar la dinámica de la clase y atendiendo a las consultas que manifiestan los estudiantes, el profesor Gonzalo, utiliza la **pregunta dirigida** para aclarar dudas generalizadas.
- ambos profesores utilizan diversidad de registros para representar, exponer y explicar el contenido matemático de la clase.
- ambos profesores manifiestan la misma estructura para la enseñanza del contenido matemático. Deducción de nuevos teoremas o tópicos matemáticos a partir de conceptos previos.
- ambos profesores institucionalizan el conocimiento matemático y utilizan su lenguaje para la transmisión de este.

8.2 Conclusiones

A partir de la discusión presentada en el apartado anterior, las principales conclusiones de esta investigación son:

- Los profesores de matemática en ejercicio de su profesión aplican estrategias de comunicación de la matemática desde su propia experiencia y/o de su propia percepción respecto de lo que es enseñar.
- Los programas de formación inicial de profesores de matemática de las universidades del CRUCH, contemplan en sus planes de formación la comunicación de la matemática, pero desde el punto de vista del diseño de la enseñanza.
- La **pregunta abierta** constituye el puente de comunicación entre las ideas que quiere comunicar el profesor y el aprendizaje de sus alumnos.
- La **pregunta dirigida** es utilizada para la aclaración de dudas generalizadas de los estudiantes y es utilizada como estrategia para establecer e institucionalizar el concepto tratado en la clase, en el lenguaje de los alumnos.
- Los profesores utilizan diversos registros de representación (esquemas, diagramas, símbolos propios de la disciplina) de los objetos matemáticos, utilizando como referente los textos proporcionados y validados por el ministerio de educación, para comunicar lo que desea que los alumnos aprendan.

En el siguiente diagrama, se pretende caracterizar la competencia comunicativa matemática, a través del proceso de comunicación evidenciado en el estudio de casos, junto a las principales estrategias utilizadas por Pedro y Gonzalo, y las evidencias recolectadas en el contexto chileno.

En el diagrama se distinguen 5 componentes:

- **la matemática:** que representa, además de la lengua materna, el lenguaje utilizado en la comunicación, es decir, el código.
- **el profesor:** que representa el emisor y receptor. Dotado de habilidades, destrezas, actitudes y experiencias de aula. Este construye su competencia comunicativa de la matemática por medio de la pregunta abierta y la pregunta dirigida, como herramientas que le permiten establecer la comunicación y el diálogo en las situaciones de aprendizaje que diseña.
- **los alumnos:** que representa el receptor y emisor. Agente en el que convergen todos los demás componentes de este diagrama. Es mediante, los recursos utilizados por el profesor, que él interactúa con la matemática, en el contexto curricular chileno y de manera directa, en las aulas.

- **el aula:** que representa el canal. Es en esta componente donde se lleva a cabo el proceso de comunicación entre el profesor y los alumnos. En el se establecen códigos propios y representaciones comunes respecto de los objetos matemáticos tratados, además de los procesos cognitivos y metacognitivos por parte de los alumnos.
- **el contexto curricular:** que respresenta el sistema lingüístico formal. Este sistema lingüístico esta normado y/o institucionalizado por el marco curricular chileno (que es donde se establecen los contenidos mínimos oblicatorios de la educación escolar propios de la disciplina), los planes y programas de formación inicial de profesores de matemática (sujetos a los estándares orientadores para las carreras de pedagogía en educación media de Chile) y , en esta investigación, el Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas (CRUCH), que representan las instituciones formadoras de profesores de matemática.

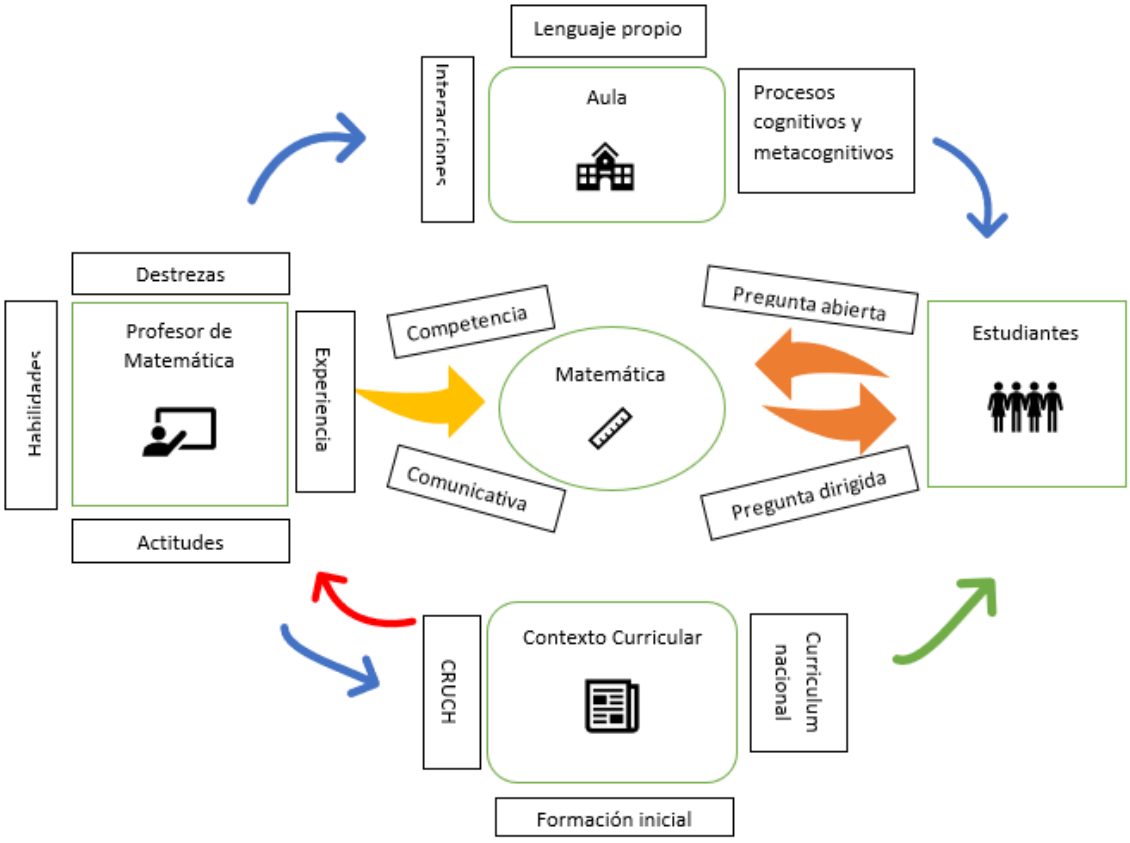


Figura 11: Modelo de comunicación de la matemática de profesores de Chile

8.3 Recomendaciones

Se recomienda a los futuros investigadores considerar las conclusiones obtenidas a partir del análisis de las tres aristas involucradas en esta investigación:

- Los perfiles profesionales y mallas curriculares: indagando en el programa específico de cada asignatura relacionada con la comunicación y contrastándola con la comunicación de la matemática. Se sugiere entrevistar a los alumnos respecto de este tema antes y después de haber cursado dichas asignaturas.
- Los jefes de carrera y profesores en ejercicio de la profesión, involucrándolos en la discusión respecto de las competencias que mejoran sus prácticas docentes e incentivan a los estudiantes a aprender.
- Los casos de Gonzalo y Pedro: como punto de partida para la caracterización de la competencia comunicativa de la matemática, indagando en otras habilidades del profesor no observadas en esta investigación.

8.4 Reflexiones finales

Esta investigación contribuye, en una primera instancia, a la investigación en la educación matemática, al hacer referencia a uno de los factores más trascendentales del desarrollo de las sociedades, la comunicación, y en particular la comunicación de la matemática.

De las habilidades, las capacidades y las competencias disciplinares (todas y cada una puesta en tela de juicio por los medios y la opinión pública) del profesor, depende la educación matemática de miles de estudiantes. Sin embargo, si un profesor no puede comunicarse con sus estudiantes, como esperamos que aprenda lo que queremos enseñarles, todo aquello que los profesores consideran importante de ser aprendido en el diseño de su enseñanza.

Dejamos abierta esta inquietud a los responsables de la formación de los futuros profesores de matemática, indicando que la competencia comunicativa de la matemática forme parte fundamental de sus programas de estudio y a lo largo de estas (haciendo referencia a la madurez profesional que va adquiriendo el futuro profesor).

Referencias

Aróstegui, I. G. (2008). *Competencias comunicativas del maestro en formación.* Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Rodríguez R., E. (2000). La comunicación en la formación de profesores. *pensamiento Educativo*, Vol. 27, pp 35 - 48.

MINEDUC. (2012). *Estándares orientadores para las carreras de pedagógia en educación media.* Santiago, Chile: LOM Ediciones Ltda.

Rodríguez R., E. (2000). La comunicación en la formación de profesores. *Pensamiento Educativo*, Vol. 27, pp. 35-48.

Vargas, C., & Giménez, J. (s.f.). Competencia comunicativa matemática y formación docente.

Vargas-Díaz, C. (2013). Evolución de la competencia comunicativa matemática en un contexto de master de formación de profesores de matemática. La evolución de Ester. *I CEMACYC*, 2 - 13.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista De Educación*, n° extraordinario, pág. 275-294.

Rajadell, N. P. (2001). Los procesos formativos en el aula: estrategias de enseñanaza-aprendizaje. En F. Sepulveda, & N. Rajadell, *Didáctica General para Psicopedagogos* (págs. pp. 465-525). Madrid: Eds. de la UNED.

Tejada, J. (2005). El trabajo por competencias en el prácticum: cómo organizarlo y como evaluarlo. *Revista electronica de investigación educativa*, 18.

Díaz, V., & Poblete, Á. (2003). Competencias profesionales del profesor de matemáticas. *Números*, pp. 4-13.

Johnson, R., & Kuby, P. (1999). *Estadística elemental. Lo esencial.* México: International Thomson Editores.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 89 - 105.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (10 de Junio de 2017). *Enfoque Ontosemótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Obtenido de

http://enfoqueontosemiotico.ugr.es: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/trabajossintesis.html

Universidad Austral de Chile. (s.f.). *Admisión UACh 2018*. Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Admisión UACh 2018 Web Site: http://www.uach.cl/admision/principal/puerto-montt/pedagogia-en-matematicas

Admisión ULAGOS. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de los Lagos Web Site: http://admision.ulagos.cl/#

Admisión Universidad de la Frontera. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de la Frontera Web Site: http://admision.ufro.cl/44-pedagogia-en-matematica

La U Pedagógica de Chile. UMCE. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Web Site: http://pregrado.umce.cl/index.php/fac-ciencias/matematica

UCSC Facultad de Educación. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de UCSC Web Site: http://educacion.ucsc.cl/carreras/pedagogia-en-educacion-media-en-matematica/

Universidad Católica de Temuco. Admisión 2018. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad Católica de Temuco: https://admision.uct.cl/ped-media-matematica/

Universidad Católica del Maule. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad Católica del Maule Web Site: http://portal.ucm.cl/carreras/pedagogia-matematica-computacion

Universidad Católica del Norte. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad Católoca del Norte Web Site: http://www.ucn.cl/carrera/pedagogia-en-matematica-en-educacion-media/?tipo=admision

Universidad de Antofagasta. (1 de Enero de 2015). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de Antofagasta Web Site: http://www.uantof.cl/carreras/detalle/PedagogíaenMatemática/29

Unidad de Admisión y Registro Académico Estudiantil, Universidad de Concepción. (s.f.). *Universidad de Concepción*. Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Universidad de Concepción Web Site: http://admision.udec.cl/?q=node/123

Universidad de la Serena. Tu Universidad Estatal en la Región de Coquimbo. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de la Serena Web Site: http://www.userena.cl/boton-carreras/item/pedagogia-en-matematica-y-computacion.html

Universidad de Magallanes. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de Magallanes Web Site: http://admision.umag.cl/wp_admision/?page_id=195

Universidad de Playa Ancha. (15 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de Playa Ancha Web Site: http://www.upla.cl/admision/carreras-profesionales/facultad-de-ciencias-naturales-y-exactas/pedagogia-en-matematica-valparaiso/

Universidad de Tarapacá. Universidad del Estado. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de Tarapacá Web Site: http://admision.uta.cl/pedagogia-en-matematica/admision/2016-03-07/163916.html

Universidad del Bío Bío. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad del Bío Bío Web Site: http://ubiobio.cl/admision/Todas_las_Carreras/26/Pedagogia_en_Educacion_Matematica/

Universidad de O'Higgins. (1 de Enero de 2017). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Universidad de O'Higgins Web Site: https://www.uoh.cl/admision#pedagogia-en-matematica

Pontificia Universidad Católica de Valparaiso. (1 de Enero de 2018). *Instituto de Matemáticas*. Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Instituto de Matemáticas PUCV Web Site: http://ima.ucv.cl/programas/pedagogia/

Universidad de Santiago de Chile. (1 de Enero de 2018). *Licenciatura en Educación Matemática y Computación*. Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Universidad de Santiago de Chile Web Site: http://www.lemc.usach.cl/index.php/perfil-de-egreso

Universidad de Talca. (1 de Enero de 2017). Recuperado el 15 de Marzo de 2018, de Escuela de Pedagogía en Matemáticas: http://www.pedagogiaenmatematicas.utalca.cl/

Universidad Católica de Temuco, Copyrights © 2013. (23 de Septiembre de 2016). *Universidad Católica de Temuco*. Obtenido de Universidad Católica de Temuco Web Site: http://admision.uct.cl/ped-media-matematica/

Pontificia Universidad Católica de Chile. (2015). Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Pontificia Universidad Católica de Chile Web Site: http://educacion.uc.cl/2015-01-08-21-56-30/pedagogia-media-en-matematicas

Universidad de Concepción. (1 de Enero de 2018). Recuperado el 18 de Marzo de 2018, de Universidad de Concepción Web Site: http://admision.udec.cl/?q=node/123

Universidad Arturo Prat. (s.f.). Recuperado el 18 de Marzo de 2018, de Universidad Arturo Prat Web SIte: http://www.unap.cl/admision/2018/matematica.html

Guerrero, S. (2013). *Teachers' Pedagogical Knowledge and the Teaching Profession.* Background Report and Project Objectives.

Eyzaguirre, S., & Ochoa, F. (2015). Fortalecimiento de la carrera docente. *Propuestas de Política Pública*, 2 - 38.

Pavié, A. (2011). Formación docente: hacia una definición del concepto de competencia profesional docente. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*(14 (1)), 67-80.

Baer, A., & Schnettler, B. (2009). Hacia una metodología cualitativa audiovisual. 149 - 173.

Pino Fan, L. R., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers´ Didactic-Mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*(11(6)), 1429-1456.

Hernández, C. A. (1996). Educación y comunicación: pedagogía y cambio cultural. Nómadas. *Nómadas (Col) (5)*. Recuperado el 16 de Octubre de 2018, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=105118998005

Guardia de Viggiano, N. V. (2009). *Lenguaje y Comunicación.* San José, Costa Rica: EDITORAMA, S.A.

Trujillo-Segoviano, J. (2014). El enfoque en competencias y la mejora de la educación. *Ra Ximhai, 10 (5)*, 307-322.

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill Interamericana.

The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* United States of America: Library of Congress Cataloguing-in-Publication.

Tobón, S. (2010). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica, 3a ed., Centro de Investigación en Formación y Evaluación CIFE.* Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

Canavos, G. C. (1996). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos.* México: McGRAW-HILL / Interamericana de México.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish Kom Projet.* Obtenido de http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf

SISIB. (1994 - 2017). *Universidad de Chile*. Recuperado el 26 de Noviembre de 2017, de Universidad de Chile Web Site: http://www.uchile.cl/carreras/4963/pedagogia-en-educacion-media-en-matematicas-y-fisica

Martinic, S., & Rojas, S. P. (2015). *Estudio de casos: Gestión del tiempo en aulas de clase en escuelas.* Santo Domingo: MINERD.

Roig, A. I., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativasde estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 533-543.

Jiménez Espinosa, A., Suárez Ávila, N. Y., & Galindo Mendoza, S. M. (2010). La comunicación: Eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 173 - 202.

Díaz, B. G., Rodríguez, L. M., & Fuentes, V. M. (2016). *Texto del estudiante Matemática 1º Medio.* Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones.

Anexos

Respuestas de los profesores al Cuestionario de percepción sobre habilidades comunicativas para enseñar matemática

1. ¿Piensa UD. que en sus clases de matemática comunica claramente lo que desea que sus estudiantes aprendan? ¿Por qué?

Profesor 1	¡Si! Pero falta tiempo para demostrar y mostrar de otras formas los contenidos
Profesor 2	Sí, ya que constantemente, en todos los momentos de la clase hago énfasis en el objetivo de la clase. Y cuando se logra, aún más explícitamente les menciono sus logros.
Profesor 3	A veces. El clima de aula es heterogéneo, hay factores que inciden en el aprendizaje esperado de los alumnos en un contendido determinado. Se deben al horario, el contenido, el hábito de estudio y la disposición de los estudiantes dentro de la clase. Por mencionar algunos.
Profesor 4	La mayoría de las veces, puesto que hay contenidos en los cuales los conceptos previos están débiles en los estudiantes, por lo que si no se realiza una retroalimentación o refuerzo del contenido anterior al que se tratará, no se lograrán los aprendizajes
Profesor 5	Sí, porque trato de explicar de la manera más sencilla y repetir una y otra vez, luego de decirlo verbalmente y escribir en la pizarra pregunto a todos los estudiantes que veo distraídos, así, ahora tienen "miedo" de no prestar atención.

Profesor 6	Sí, aunque a veces creo que me falta un poco la teoría o dar definiciones previas
Profesor 7	Sí, dado que realizo una planificación basada en las habilidades y competencias de mis estudiantes, además que los contenidos los relaciono directamente con su realidad sociocultural
Profesor 8	Sí, pues fomento la comprensión y análisis de las actividades
Profesor 9	Sí, porque al planificar la clase me dedico a plantear un objetivo claro, al inicio de la clase me dedico a explicar lo que se verá en la clase y lo que espero de ellos al finalizarla
Profesor 10	Pienso que comunico claramente cuando se realizan cambios en los registros al enseñar un concepto
Profesor 11	Sí, porque trato de entregar un sinónimo simple luego de alguna definición. Acostumbro preguntar si lograron entender el concepto clave de la clase
Profesor 12	La mayoría de las veces. Al ver a los alumnos se evidencia que un objetivo se ha logrado o no, ya sea en el resultado de las evaluaciones, en el nivel de dudas que tienen, etc.
Profesor 13	Algunas veces, cuando se trabaja la matemática en su propio mundo, sin ir y volver a la realidad, a mis estudiantes no les queda tan claro

Profesor 14	Sí. Al inicio de la clase explico el objetivo de ésta.
Profesor 15	Sí, pero no tanto como quisiera. Siempre estoy buscando una mejor forma de usar el lenguaje.
Profesor 16	Sí, aunque no todos logran captarlo. Me doy cuenta porque les hago una pregunta de razonamiento y una parte del curso la logra contestar
Profesor 17	En ocasiones no, debido a que a veces me cuesta formar y relacionar el conocimiento desde lo básico al conocimiento que están aprendiendo. Por otro lado, cuando no se logra la atención necesaria por parte de los estudiantes.
Profesor 18	Sí, ajusto los contenidos de acuerdo a la edad y comprensión de las alumnas, luego los ejemplifico y las alumnas desarrollan variados ejercicios.
Profesor 19	Sí. Planteo el objetivo y mantengo el foco en la meta que se quiere lograr
Profesor 20	No. Ya que existe un sesgo entre el lenguaje matemático, el del estudiante y el que pretendo adaptar en clases para lograr una conexión. Dicha distancia provoca en ciertos casos que los alumnos no comprendan lo comunicado en su totalidad o se generen confusiones conceptuales
Profesor 21	Sí, ya que los objetivos propuestos son realizados y planificados previamente

Profesor 22	Pienso que yo comunico lo que quiero que aprendan, pero como la gama de estudiantes es tan variada, comunicarlo claramente para todos no es completamente posible.
Profesor 23	Sí, porque cotidianamente me esfuerzo en enlazar la habilidad a trabajar con el objetivo de la clase. Conversamos sobre lo que ellos comprenden de lo planteado, les comento lo que espero que aprendan y enlazamos lo que saben del tema, lo que imaginan del tema y lo que creen que harán en las actividades para generar expectativas y caminos a seguir. Con esto me queda claro su panorama respecto a lo que les propongo en la sesión.

2. Mencione algunos aspectos de su formación como profesor de matemática (en pregrado) que apuntaron al desarrollo de sus habilidades comunicativas para su quehacer pedagógico en matemática.

Profesor 1	Teníamos un ramo llamado desarrollo personal y otro de manejo de la voz que ayudan a comunicarse con los alumnos
Profesor 2	Estudio de casos
Profesor 3	El desarrollo de la resolución de problemas y conocimiento de herramientas tecnológicas para su desarrollo en el aula.
Profesor 4	Lamentablemente, las prácticas profesionales estuvieron presentes en el último año solamente, por lo que una formación en la comunicación de la matemática fue escasa

Profesor 5	Realmente la malla era súper mala y los profesores (salvo excepciones) dejaban bastante que desear. Había un solo profesor, que era de aquellos que emanaba vocación, que nos sacaba a la pizarra a hacer ejercicios y siempre nos retaba por dar la espalda, no pararse bien, no hablar bien, no impostar la voz y por no explicar claramente las cosas. Él fue el único que se encargó de esos detalles. Además, en tercer año yo postulé a un proyecto (y lo gané) para implementar un taller de foniatría para mi carrera. Duró solo un semestre por la falta de interés, pero fue muy práctico, nos enseñaron postura, impostación, ejercicios vocales y la llamada higiene vocal (que no es lavarse los dientes sino cuidar la voz de distintas formas). Sin embargo, cursos como tal que enseñaran a exponer y explicar las cosas lo más claras posibles, no hubo.
Profesor 6	Se supone que varios, pero en la práctica no me han servido (solo me pasaban didáctica francesa)
Profesor 7	Las constantes prácticas que la universidad me proporciono creo que fueron el mayor aspecto para mi desarrollo. También considero importante la calidad de los docentes que nos enseñaban y sus estrategias y metodologías para que aprendiéramos el contenido y a su vez, pudiésemos posteriormente entregarlo
Profesor 8	Prácticas
Profesor 9	Creo que el ingreso temprano a realizar observaciones, intervenciones y prácticas en el sistema educativo me permitió el desarrollo de habilidades comunicativas
Profesor 10	El nivel de matemática que se trabajó en el pregrado ha sido un buen comienzo para poder entender algunas estructuras para luego realizar

	distintas transposiciones y así tener una mejor comunicación en la entrega de los nuevos conocimientos
Profesor 11	Las prácticas progresivas, cada semestre estuve en sala desarrollando distintas actividades tanto matemática, como computación y orientación. Lo que me familiarizó con el sistema
Profesor 12	La planificación de unidades temáticas, el diseño de clases y el realizar micro clases desarrollando algún contenido en específico
Profesor 13	Sólo lo teórico
Profesor 14	Los de formación personal; y los ramos pedagógicos: psicología del aprendizaje, etc.
Profesor 15	Ninguno
Profesor 16	Fue importante los ramos de análisis para demostrar los teoremas que ahora se ven en la clase
Profesor 17	Las demostraciones matemáticas
Profesor 18	Principalmente nuestra carrera apuntó a la formación en la asignatura específica de matemática, nos faltó mucho más práctica y formación educacional.
Profesor 19	Las asignaturas de Didáctica
Profesor 20	Se presentaron algunas instancias relacionadas con simulaciones de clases en las que el profesor retroalimentaba, entre otros aspectos, los comunicativos, enfocándose en el grado de formalidad del conocimiento matemático asociado a lo que se pretende comunicar

Profesor 21	Personalmente, realice un programa de acreditación para obtener la pedagogía, por lo cual lo más efectivo fue mis estudios de ingeniería, habilidades blandas
Profesor 22	En ninguna asignatura recibí aspectos que desarrollaran mis habilidades comunicativas.
Profesor 23	Creo que una buena experiencia fue participar de un Congreso de Profesores de Matemática. Me hizo enlazar muchos aprendizajes que adquirí de modos parcelados en las distintas asignaturas de la carrera, ayudándome a comprender y poder transmitir desde diferentes puntos mis conocimientos y experiencias en el área matemática.

3. ¿Qué asignaturas de su formación como profesor de matemática, considera que desarrollaron en usted habilidades para comunicar la matemática?

Profesor 1	Desarrollo personal, manejo de la voz, didáctica de la matemática
Profesor 2	Didáctica general y didáctica de las matemáticas
Profesor 3	Epistemología de las matemáticas, historia de las matemáticas, didáctica de las matemáticas.
Profesor 4	Didáctica de la Matemática
Profesor 5	Como dije, fue un único profesor, el cual me hizo Álgebra I y Geometría I. Pero, nuevamente, no hubo ramos como tal que me enseñaran esas cosas.

Profesor 6	Ninguna
Profesor 7	Taller de recursos pedagógicos, metodologías de la educación, los ramos de las prácticas.
Profesor 8	Sinceramente no lo tengo claro
Profesor 9	Creo que en la malla curricular de la carrera carecía de asignaturas para desarrollar habilidades en mí.
Profesor 10	Estadística y probabilidad
Profesor 11	En general creo que todas logran entregar la habilidad de mirar el contenido de forma independiente y relacionarlo ya sea de forma geométrica - contextualizado - algebraicas y de cálculo , esto me permite relacionar los conceptos con cosas cotidianas (a pesar de lo abstracto de la matemática , existe una forma de amplitud a la hora de analizar un concepto)
Profesor 12	Modelos curriculares, metodología de la enseñanza
Profesor 13	Ninguna
Profesor 14	Didáctica
Profesor 15	Ninguno
Profesor 16	Análisis, Álgebra, geometría, metodología de la enseñanza
Profesor 17	Las asignaturas de educación y talleres
Profesor 18	Metodología, pero lo más importante lo aprendí a través de la práctica y el tiempo.

Profesor 19	En su gran mayoría, todas las asignaturas de mi malla apuntaban hacía ese modelo. Donde más énfasis se le daba era en la asignatura de Didáctica
Profesor 20	Tanto las de matemática como de educación fueron importantes para formar dichas habilidades. Sin embargo, faltó un puente que permitiera distinguir la forma de transitar entre el lenguaje propio de la matemática y el que manejan los estudiantes
Profesor 21	Didáctica de las matemáticas
Profesor 22	Ninguna
Profesor 23	Para mí, fueron claves 3 ramos: Taller de Educación Matemática, donde el uso de software matemático me permitió crear imágenes de calidad para mis instrumentos, permitiendo que mis alumnos relacionen coherentemente lo verbal/abstracto con lo pictórico/gráfico. Y Metodología de la Enseñanza 1 y 2, los cuales aportaron a mi qué hacer pedagógico en cuanto a la planificación y manejo de los tiempos de las clases, me permitieron también visualizar mi personalidad como educadora, principalmente las micro clases, donde se ponía énfasis en la propuesta de exposición para la enseñanza de un contenido puntual, siendo clave la retroalimentación de los pares y de los profesores.

Transcripción del Episodio 2 de Gonzalo.

N° de líneas	Líneas	Notas o comentarios de investigadores.	Fases del Episodio
1	Profesor: El día viernes comenzamos esos dos conceptos nuevos, que era permutación y variación. De esos, de permutación y variación, solo el que se abordó la mayor parte de la clase fue permutación. De la permutación, ¿Qué podría asegurar usted o qué lo que es? ¿Qué puede determinar que es permutación?		Fase de PRE-INICIO (Martinic & Rojas, 2015): El profesor comienza su clase utilizando preguntas abiertas respecto de contenidos y conceptos tratados en clases anteriores, indagando en las definiciones y en como las alumnas los entienden.
2	Alumna 1: Número de ordenamientos lineales.		
3	Profesor: ¡Número de ordenamientos lineales posibles! Ya, pero que sea distinto a la definición. Alumna 2, a ver (dice el nombre de la alumna).		
4	Alumna 2: que es la variación deee (sic)…		
5	Profesor: Es la variación de…shhhh (sic)		

6	Alumna 3: Con todos los elementos	
7	Profesor: todos los elementos. Ya pero, más preciso todavía, si yo creo que entre estos dos conceptos (apunta en el pizarrón los conceptos de variación y permutación) había una gran diferencia. O sea, había una diferencia importante. A ver (gesticula para darle la palabra a la Alumna 3)	
8	Alumna 3: de que en una se utilizaban todos los elementos y en otra solamente una parte	
9	Profesor: ¡en una se utilizaban todos los datos y en una solo una parte! Primero, debe tener claro cuál es el foco de la permutación y la variación. ¿Qué es lo que usted desea saber al aplicar una permutación o una variación? Da lo mismo sea cual sea, ¿qué es lo que está haciendo usted? Alumna 4 (Gesticula para darle la palabra a la alumna diciendo su nombre)	

10	Alumna 4: es, eees (sic) cuantás posibleeees (sic)… combinaciones hay	Entre los murmullos iniciales de escucha “la cantidad de ordenamientos” por parte de una alumna, que no es escuchado por el profesor	
11	Profesor: Perfecto. Quiere saber la cantidad de combinaciones posibles. O sea, usted está ordenando. Eso es lo mismo. ¿Cuándo yo utilizo una permutación?		Fase de INICIO (Martinic & Rojas, 2015): A partir de la línea 11, podemos observar que el profesor da inicio a la clase, focalizando el propósito del episodio (establecer la diferencia entre una permutación y una variación); pero sin dejar de lado los conceptos claves de la unidad en la cual está trabajando y en la que fundamenta su explicación y procesos de formalización del contenido
12	Alumnas: cuando quiero ordenar		
13	Profesor: ¿Cuándo quiero ordenar qué?		
14	Alumnas: ¡todo!		
15	Profesor: todos los datos. Y cuando yo trato de utilizar una variación ¿es cuándo?		
16	Alumnas: cuando es un grupo. Cuando queden datos. Solo algunos		
17	Profesor: ¡Solo algunos datos!, perfecto. Recuerde, que había permutación con reposición y sin reposición. ¿Sí? Todo esto, todo esto tenía una base o tenía un enlace claro con algo que usted		

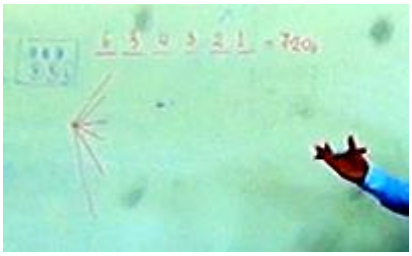
	aprendió al principio de este capítulo. Que era, era un principio…	
18	Alumna 4: aaaah (sic). El principio multiplicativo.	
19	Profesor: El principio multiplicativo. Y usted, shhh (sic) Usted de esta parte, usted de aquí estos dos conceptos los podía enlazar con el principio multiplicativo. Usted aquí, no pierda el foco, está aprendiendo una estrategia del porque ocurre o de como pasa con el diagrama de árbol, que usted va obtener los mismos resultados; o que hay una relación directa entre aplicar una permutación o variación con respecto al diagrama de árbol o el principio multiplicativo. Recuerde, ¿en qué quedamos? Variación. La variación, la variación ¿de qué se componía? Shhh (sic) ¿Qué es lo que quería usted al realizar una variación?... Que aplicaba o ¿porque usted aplicaba una variación	El profesor en variadas oportunidades se dirige a la pizarra indicando los conceptos y haciendo alusión a un diagrama de árbol de manera imaginaria.

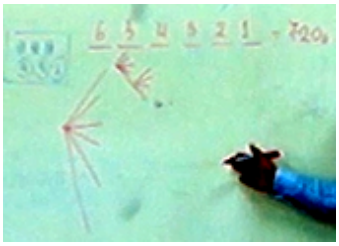
	y no una permutación?... ¿Por qué yo elegía aplicar una variación o que buscaba al aplicar una variación?		
20	Alumna 4: aahh (sic), cuando quería sacar dos de…	.	
21	Profesor: Ya, quería sacar dos de… en general ¿quería sacar dos de qué? Haber…		
22	Alumnas: dos de. Cinco de ocho	Alumna 4 levanta su mano para pedir la palabra	
23	Profesor: Cinco de ocho, ya haber	Le da la palabra a la Alumna 4	
24	Alumna 4: por ejemplo, cuando hay cinco elementos y quería escoger dos		
25	Profesor: y ¿usted quería saber?		
26	Alumna 4: cuantas posibilidades hay de escoger esos dos elementos		
27	Profesor: Perfecto, perfecto. Les vuelvo a repetir, esto, esto es la formalización de algo que usted puede hacer de manera intuitiva. O sea, usted va a decir “aaah (sic), pero eso yo lo puedo hacer de esta otra manera” y por lo general, enlaza con el diagrama de árbol y en lo inmediato el principio		Fase de DESARROLLO (Martinic & Rojas, 2015): El profesor inicia la fase de desarrollo rememorando el problema de determinar la cantidad de combinaciones

	multiplicativo. Creo que vimos un ejemplo de una urna con cinco bolitas. ¿Si? Usted tenía su urna, no es necesario que la dibuje, tenía la bolita 1, 2, 3, 4, 5 y ahora para ser distinto 6. Seis bolitas. Todas tienen la misma probabilidad de salir. Niña.		totales que existen al extraer bolitas numeradas de una urna.
28	Alumna 5: ¿El niño puede dar números decimales?	La alumna manifiesta evidencias de confusión respecto de que representa realmente el número de la bolita.	
29	Profesor: Es que le estamos poniendo número a las bolitas solamente. Solo le estamos poniendo número a las bolitas. Estamos diciendo que esa es la bolita 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Todas del mismo porte, como usted ve aquí en el dibujo (se escuchan algunas risas), todas del mismo peso y todas tienen la misma probabilidad de salir. Eso es lo primero. Ahora, si usted quieres saber todas las combinaciones posibles, que usted tiene al extraer 6 bolitas ¿Qué haría usted?... o sea, ¿Cuál sería, cuál sería su procedimiento para poder decir, cuál es el orden de extracción de las seis	El profesor, en este instante, aclara de manera implícita que el número de cada bolita es para diferenciarlas, pues todas tienen las mismas características físicas. 	

	bolitas? ¿Cómo lo haría usted?	
30	Alumna 6: con el principio multiplicativo	
31	Profesor: Principio multiplicativo. Explícanos Alumna 6 (dice el nombre de la alumna) como lo harías con el principio multiplicativo	
32	Alumna 6: que cuantas posibilidades hay de sacar una bolita, hay 6x5x4x3x2x1	
33	Profesor: Perfecto. Lo que nos dice la Alumna 6 (dice su nombre): si quiero hacer 6 extracciones, tengo 6 extracciones: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. Para la primera extracción ¿tengo?	El profesor escribe en pizarra las casillas de posibilidades para las seis extracciones y llena la primera casilla con un seis, que corresponde el número de posibilidades de la primera extracción.
34	Alumna 6: La posibilidad de sacar 6 bolitas	
35	Profesor: 6 bolitas. Te hago la siguiente pregunta Alumna 6 (dice su nombre) ¿tú aquí con ese 6, me estás diciendo que vas a sacar la bolita seis?	

36	Alumna 6: No.	Se escucha además el murmullo de las demás alumnas respondiendo negativamente también.
37	Profesor: No. Ese seis…	
38	Alumna 6: es la posibilidad de las bolitas que tengo para sacar.	
39	Profesor: Exacto. Estoy anotando la cantidad de posibilidades que tengo. Ahora, si ya saque una bolita, sea cual sea su número, ¿Cuál es la bolita que puede venir a continuación? O sea, ¿Cuántas posibilidades tengo…?	
40	Alumnas: ¡Cinco!	
41	Profesor: Perfecto. Y así sucesivamente puedo completar las siguientes extracciones. Perfecto. Por principio multiplicativo, shhh (sic), usted sabe que aquí tiene todas las combinaciones posibles. O sea, usted va a tener seis por cinco treinta, por cuatro…	El profesor completa en pizarra la acción. Se escucha el murmullo de una alumna preguntando "¿todos se multiplican?"
42	Alumnas: 120	
43	Profesor: 120. Por tres	
44	Alumnas: 360	

45	Profesor: por dos	
46	Alumnas: 720	
47	Profesor: 720 combinaciones posibles. Si ahora, usted dice “no entiendo esa cuestión”. Ya pero si entiendo cómo podría generar el diagrama de árbol, que no es lo recomendable en esta ocasión, usted diría: ya, para la primera extracción yo tengo seis posibilidades. Tres, cuatro, cinco, seis posibilidades ¿Sí?	El profesor dibuja en pizarra el diagrama de árbol que representa esta situación. 
48	Alumnas: si	
49	Profesor: Alumna 7 (dice su nombre) ¿sí?	
50	Alumna 7: si	
51	Profesor: Si. Seis posibilidades. Si ya tengo seis posibilidades para la primera extracción ¿Cuántas posibilidades tengo para la segunda?	
52	Alumnas: cinco	

53	Profesor: Ahí tienen. Cinco para cada una de ellas. Eso es lo que usted va generando. Siguiendo así, después, de esta ramita va a tener cuatro. Después va a tener tres y así con cada una de ellas. ¿A cuántas combinaciones totales usted va a llegar con su diagrama de árbol?	El profesor dibuja un esquema en el pizarrón y que representa el diagrama de árbol 
54	Alumnas: 720	
55	Profesor: 720 combinaciones. Eso es lo que está formalizando de alguna u otra manera. Ahora, eso que está aquí, de multiplicar 6x5x4x3x2x1 (Alumna 7 shhh), usted ¿aquí?	El profesor gesticula para que la Alumna 8 le responda.
56	Alumna 8: una permutación	
57	Profesor: tiene una permutación. Ese es el enlace que usted está haciendo, no está haciendo nada distinto. Entonces, hacerlo shhhh, hacerlo de manera intuitiva, hacerlo con el principio multiplicativo o hacerlo con el diagrama de árbol, o si usted se da cuenta y dice "aquí como tengo seis	El profesor transmite a sus alumnas que el principio multiplicativo es una estrategia intuitiva para determinar la cantidad de combinaciones posibles en este tipo de problemas, el de ordenar elementos. A diferencia de la permutación misma. No queda claro si el diagrama de árbol representa una estrategia intuitiva o un procedimiento formal para la resolución de

	elementos y me piden ordenar los 6, ¿es una permutación?"... ¡es lo mismo!. Y aquí, es lo mismo que me dice la Alumna 9 adelante (dice el nombre de la alumna). ¿Es lo mismo que tener 6! o no?	este tipo de problemas, aunque en la clase anterior, el profesor indica que el diagrama de árbol muestra cuales son las combinaciones. Escribe en el pizarrón $=6!$
58	Alumnas: siii (sic)	El profesor asiente con la cabeza validando la respuesta de las alumnas.
59	Profesor: recuerde que cuando usted tiene 6! tiene 6x5x4x3x2x1. Ahí llega a la permutación. Eso es una permutación. Ahora, si aquí yo lo estoy enlazando con la variación, la variación, como usted bien dijo en un comienzo, era solo tomar una parte de esto. O sea, si ahora yo le pregunto ¿yo solo quiero saber cómo puedo extraer tres bolitas?	El profesor gesticula moviendo los brazos que emulan la acción de extraer de una urna las bolitas.
60	Alumna 6: Haciendo el diagrama de árbol.	En esta proposición la Alumna 6 manifiesta inseguridad.
61	Profesor: Alumna 6 (dice el nombre de la alumna), bórrese de su mente que hay	El profesor manifiesta confianza en las capacidades cognitivas y resolución de

	que hacer. Usted hágalo, yo sé que usted lo puede hacer. Usted tiene lo siguiente, mira. Mira alumna 6. Piénsalo de la siguiente manera, ¿cuántas extracciones quieres hacer tú?	problemas en la Alumna 6 y para eliminar la inseguridad manifestada en la proposición de la Alumna 6, utiliza la motivación explicita y en voz alta.
62	Alumna 6: tres.	
63	Profesor: De las seis, yo quiero escoger tres ¿cierto? Ya, ¿cuántas extracciones voy hacer?	El profesor espera un gesto no verbal de la Alumna 6 para continuar diciendo: *"Ya, ¿Cuántas extracciones voy hacer?,* para luego hacer una pausa y esperar la respuesta.
64	Alumna 6: tres	
65	Profesor: tres. Uno. Dos. Tres	Representa en pizarra mediante líneas horizontales los espacios (donde colocará el número de posibilidades de extracción) que necesita para cada una de las extracciones. Luego de aquello, se produce una interrupción por el retiro de una alumna de la sala de clases. Cabe mencionar que el profesor, luego de esta interrupción, aún mantiene la atención de las alumnas en el problema que se está desarrollando en pizarra.
66	Profesor: De las seis bolitas que yo tengo, quiero hacer	

	tres extracciones. De esas seis bolitas, ¿Cuántas posibilidades pueden haber para la primera extracción?	
67	Alumnas: seis	
68	Profesor: ¿en la segunda extracción?	
69	Alumnas: cinco	
70	Profesor: y, ¿en la tercera extracción?	
71	Alumnas: cuatro	
72	Profesor: cuatro extracciones. Ahora, por principio multiplicativo, usted podría llegar que aquí tengo ¿Cuántas combinaciones posibles?	Una vez completado en pizarra cada uno de los espacios disponibles para las extracciones, la Alumna 6 se intenta adelantar a la pregunta del profesor diciendo *"por tres, por dos"*, hecho que no es percibido por el docente.
73	Alumnas: 120	El profesor valida la respuesta anotando la respuesta en la pizarra
71	Profesor: 120 combinaciones. Lo mismo. Si usted esto lo enlaza antes con el diagrama de árbol. Usted dice: ya, no se hacer esa cuestión (sic). Diagrama de árbol, seis combinaciones (dibuja un esquema en pizarra)… cinco, seis combinaciones. Después para, si ya escogí una, si ya	En la imagen, se muestra la representación gráfica del *Diagrama de árbol* para el primer objeto seleccionado.

	escogí esa, ¿Cuántas combinaciones, pueden haber para esa?	
72	Alumnas: cinco	
73	Profesor: y ¿para es…? ¿Para la que sigue?	En la imagen, se muestra el diagrama de árbol para una de las ramas. El profesor hace enfásis en que este método es poco eficiente a la hora de conocer la cantidad de combinaciones de un experimento con las caracteísticas descritas.
74	Alumnas: cuatro	
75	Alumna 6: Después tres	
76	Alumnas: noooo…. (sic)	
77	Profesor: ¿Por qué no sigo?	
78	Alumna 6: ah, no, no. Porque es hasta el 4	
79	Alumnas: porque son tres bolitas…	
80	Profesor: porque yo quiero hacer tres extracciones. Por eso no sigo. Entonces, ahora	Destacamos, que el docente utiliza constantemente el lenguaje corporal (brazos y

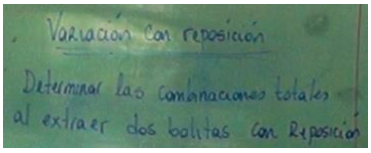
	se viene, se viene la parte cuando usted dice: “Ya. Si yo este enunciado lo entendí de otra manera, no necesito hacer este principio multiplicativo, ooo…(sic) no necesito hacerlo de esta manera; (shhh) sino que yo me doy cuenta… (El profesor hace una pausa para llamarle la atención a la alumna que debe salir de la clase)… sino que yo me doy cuenta que aquí en este, en este momento de que yo quiero extraer, saber cuántas combinaciones existen de extraer tres bolitas de esas seis que hay ahí, yo lo enlazo con una variación. Entonces, una variación de seis bolitas totales, ¿Cuántas quiero escoger?	manos) para gesticular y hacer mención a los conceptos, diagramas y esquemas algorítmicos plasmados en pizarra, con el fin de establecer las conexiones o una línea de proceder frente a una problemática como la que se plantea.
81	Alumnas: tres	
82	Profesor: Tres. De aquí, usted dice: “ah yapo (sic), pero yo quiero saber que esa variación, que esa variación, yo arriba tengo, la permutación de todas…	
83	Alumna 3: seis factorial	El profesor no escucha esta respuesta

84	Profesor:…dividido en la permutación ¿de lo qué?	Ahora el profesor hace una pausa esperando la respuesta de la Alumna 6
85	Alumna 6: tres factorial	
86	Profesor: de tres factorial. Pero, ¿qué es lo que es ese *tres factorial* antes de queee (sic)?	
87	Alumna 3: seis menos tres, factorial	
88	Alumna 6: seis menos tres, factorial	
89	Profesor: Seis menos tres, factorial. O sea, es la que a mí me sobra. Es la permutación que a mí me sobra. Ya, usted tiene ahí seis factorial dividido ¿en?... ¡tres factorial! Usted por favor, solo por tema de cálculo, no multiplique seis factorial, no multiplique tres factorial. Usted ya está un poquito, un paso más adelante y sabe que eso es 6x5x4x3x2x1 y abajo usted sabe que es 3x2x1 ¿cierto?... (El profesor hace una pausa corta esperando alguna afirmación por parte de las alumnas y continúa).	El profesor, en la medida que va enunciando conceptos matemáticos como (seis factorial, tres factorial, variación) los va representando en pizarra y dejando su registro.

	Usted ya sabe simplificar y ahí está. Si usted se da cuenta que en el proceso, ¿qué le queda al final?, 6x5x4; ¿qué teníamos en un principio sin hacer esto?	
90	Alumnas: 6x5x4. 120. 6x5x4	
91	Profesor: 6x5x4, o sea, usted aquí tiene, de manera intuitiva sabía que el resultado tenía que ser eso. Aquí, la formalización que se llama Variación; esto.	El profesor utiliza, como apoyo a lo que dice, lenguaje no verbal para indicar en pizarra cada una de sus proposiciones y conclusiones de manera de clarificar o señalar la relación entre el registro pictórico (diagrama de árbol), el registro algebraico (líneas utilizadas para la aplicación del principio multiplicativo) y la simbología utilizada para el concepto de Variación.
92	Alumna 6: En la prueba, ¿se van a … van a entrar de los dos?	
93	Profesor: yo… no me voy a dar cuenta. Yo a usted, por ejemplo, pregun (sic), pregunta, pregunta en la prueba Alumna 6. Mira. Es tan simple, shhh (sic). Mira, es tan simple como que aquí dijera, ya eeeh (sic), de un mazo de cartas, de un mazo	

	de cartas, usted quiere extraer 4 cartas, ¿qué utilizarías tú, o qué orden…extraer 4 cartas al azar?, ¿qué utilizarías tú de manera intuitiva? ¿Una permutación o una variación?	
94	Alumna 6: Variación.	
95	Profesor: ¿Por qué?	
96	Alumna 6: porque hay más cartas	
97	Alumna 11: porque sí po' (sic)	Las alumnas alrededor de la Alumna 6 comienzan a ayudarla indicándole sus argumentos
98	Profesor: Haber, Alumna 4 fuerte.	
99	Alumna 4: Variación porque… voy a sacar, querer la posibilidad de sacar esas 4 cartas y no las 54 cartas que hay en el mazo	
100	Profesor: Perfecto! Perfecto. Si usted shhh (sic), ahí va, ahí va la parte importante, si a usted le dicen, si usted quiere saber el ordenamiento de su total, de su total de opciones, todas las combinaciones, yo tengo una permutación. Si yo quiero saber un conjunto o un subconjunto de lo que yo	En estas líneas el profesor quiere dejar clara la diferencia entre una Permutación y una variación, utilizando un ejemplo que involucra la extracción de cuatro cartas de un mazo, todo esto de manera oral, gestual y simbólica.

	tengo, un grupo más pequeño de mi total, yo ahí aplico una variación.	
101	Alumna 6: Pero, o sea, para lo de las 4 cartas tengo que poner eh, la cantidad, la mayor después la que viene, y ¿después hasta el cuatro?	La alumna 6, gesticula haciendo alusión a las casillas para utilizar el principio multiplicativo
102	Profesor: perfecto. Siempre que usted le digan *sin reposición* o variación solita. Porque ahora, que pasa si usted tiene una variación, ¿variación con reposición? ¿Qué pasa si usted tiene eso? ¿Qué se imagina que es? Como muy bien dijo la Alumna 3 la clase anterior. ¿Qué es lo que era "con reposición"?	
103	Alumnas: que se repite	
104	Profesor. Más que *se repite.*	
105	Alumna 6: reponer	
106	Profesor: Reponer! O sea, en este mismo ejemplo de la urna, que sería el reponer. ¿Cómo, cómo sería eso?	
107	Alumna 3: que volvía a entrar, que volvía a entrar en la urna.	
108	Profesor: por ejemplo, solo, solo en una primera	El profesor escribe un ejemplo en pizarra

	instancia, yo quiero, primero, ya es una variación ¿cierto? Eeeeh (sic), ordenar. No, determinar…	
109	Alumna 3: pero profesor, no que ¿con reposición era que se podía se repetir?	
110	Profesor: Si. Eso. Sip (sic) Profesor: Ya, tiene lo siguiente, shhhh (sic) *Determinar la cantidad eeeeh (sic)… determinar las combinaciones totales al extraer dos bolitas con reposición.* Esas mismas que tengo acá, siguiendo el mismo ejemplo de la urna. Cuando a usted le hablen que es con reposición, usted extrae…(Alumna 6 interviene diciendo *y devuelve*) y devuelve. Extrae, miro, anoto y devuelvo.	El problema planteado por el profesor es escrito en lengua materna y en el pizarrón. 
111	Alumna 4: como lo de las bolas.	
112	Alumna 6: aaaah (sic), como lo que hicimos con lo de las bolas, lo volvíamos hacer.	
113	Profesor: exacto, si	La Alumna 4 levanta la mano para pedir la palabra
114	Alumna 4: eso que daba lo mismo que salga por	

	ejemplo ¿muchas veces la bolita tres y la cuatro?	
115	Profesor: es que a nosotros no nos interesa que bolita va a salir, no nos interesa cual va a salir. Nos interesa saber cuáles van a ser las combinaciones. Entonces si yo quiero saber, por ejemplo acá, shhhh (sic)… en esta variación, como es sin reposición; ya imaginemos, estamos jugando, saco el cuatro ¿cierto? Ya, ahí saqué una…	
116	Alumna 6: la anoto	
117	Profesor: en la segunda, ¿qué posibilidades pueden salir?	
118	Alumnas: uno, dos, tres, cinco, seis.	
119	Profesor: Perfecto. En cambio, cuando es con reposición yo saco el cuatro, saco el cuatro, lo devuelvo, después ¿cuál, que posibilidades pueden salir?	
120	Alumnas: pueden salir todas	
121	Alumna 6: Entonces, ¿Cómo lo hace pa' (sic) multiplicarlo?	

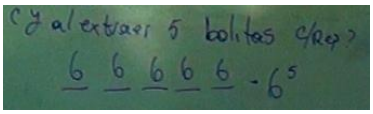
122	Profesor: Antes, mira, piénsalo antes Alumna 6. El mismo ejemplo, saqué el tres, lo devolví. ¿Qué números pueden salir ahora?	
123	Alumna 6: todos po' (sic)	
124	Profesor: ¿Cuáles?	
125	Alumna 6: el uno, el dos, el tres, el cuatro, el cinco y el seis.	
126	Profesor: Perfecto. Ahora, piénsalo así como lo estás pensando y trata de saber todas las combinaciones posibles. ¿Cuántas extracci (sic)?…. Primero, orientémonos. Si yo quiero escoger 2 de estas 6 ¿utilizaría una permutación o una variación?	
127	Alumnas: variación	
128	Profesor: quiero escoger dos de seis	Repite la pregunta como herramienta para que las alumnas que respondieron *permutación* o tengan dudas, reconsideren o se cuestionen sobre lo que respondieron.
129	Alumnas: variación	
130	Profesor: Variación. ¿Si o no?	La pregunta va dirigida a la Alumna 6. Se escuchan risas debido a lo cómico de la

	Variación, variación. Ya, variación. Tiene la variación. Ya, ¿Cómo lo harías si fuese sin reposición?	situación (gestos entre el profesor y la alumna).
131	Alumna 6: Lo tengo que multiplicar po'(sic)	
132	Profesor: ¿Cómo?	
133	Alumna 6: por ejemplo, si saco dos pondría cuat… (sic), ¿cuatro?, tres, dos, uno. Alumna 9: no po'	
134	Profesor: Haber Alumna 9, ¿Cómo lo harías?	
135	Alumna 9: multiplicaría el seis por el cinco.	
136	Profesor: usted quiere hacer dos extracciones y ¿eso sería?...Seis por cinco. Pero ahora, que saco ¿cómo es con reposición? ¿Cuántas posibilidades tengo para la primera extracción?	
137	Alumnas: seis	
138	Profesor: y ¿para la segunda?	
139	Alumnas: seis.	
140	Alumna 6: seis por seis	

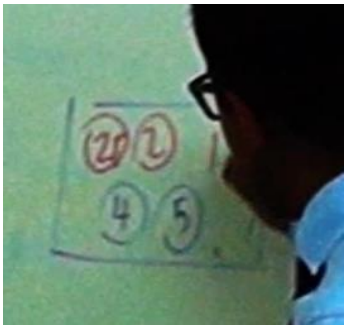
141	Profesor: ¿Cuántas combinaciones podrían haber entonces?	
142	Alumnas: treinta y seis	
143	Profesor: treinta y seis combinaciones.	En la imagen, se representa el principio multiplicativo y la forma como lo representa el profesor en la pizarra.
144	Profesor: Y si ahora, y si ahora yo les pido escoger eeeeh (sic)…cinco bolitas.	Luego de esta tarea, se escuchan proposiciones de las alumnas tales como: “seis por seis por seis….”, “cinco cinco”, “cinco por cinco”
145	Profesor: esa es extraer dos bolitas (indicando a la que ya estaba en la pizarra).	
146	Alumna 6: seis por seis por seis por seis por seis. Sería seis elevado a cinco	El profesor escribe en pizarra la siguiente pregunta: *¿Y al extraer 5?* a continuación de la respuesta de extraer dos bolitas con reposición.
147	Alumnas: Seis elevado a cinco	Entre las alumnas se van confirmando y/o validando lo que el profesor escribe en pizarra y/o las conclusiones a las que van llegando. Además se escuchan expresiones que

		indican que comprendieron lo explicado *"weeenaa (sic)"*
148	Profesor: ya, ¿quién no entiende algo?	
149	Alumna 10: que la representa.	Ante esta duda intervienen la Alumna 6 y el profesor al mismo tiempo. Luego de aquello el profesor toma el control de la situación y prosigue con la aclaración.
150	Profesor: Mira, mira tranquila, Alumna 6 (hace un gesto para que la alumna guarde silencio) Usted, usted tiene lo siguiente: quiere saber, shhhh (sic) quiere saber el número de combinaciones totales que tiene al extraer dos bolitas, ¿cierto?, con reposición. Estamos situados, en una variación cierto. Como yo quiero extraer dos de mi total que son seis, se acerca a una variación ¿Si? Ahora, si esto fuera una variación sin reposición, yo podría ver, guiarme por el principio multiplicativo y decir: "*Aaaah ya po' (sic), esto sería seis por cinco*" ¿cierto?, y ahí me da el	

	resultado que sería treinta. Luego, como ahora es con reposición, yo la extraigo, la repongo, la devuelvo, empiezo. Ya po' (sic) yo digo "para la primera extracción, ¿cuántas posibilidades tengo?"	
151	Alumna 10: seis	
152	Profesor: y para la segunda, como la devolví, ¿cuántas posibilidades tengo?	
153	Alumna 10: seis	Se escucha solo un murmullo, como un poco insegura.
154	Profesor: ¿Si o no? Profesor: Entonces mira, quiero saber las combinaciones totales, quiero saber las combinaciones totales al extraer cinco bolitas.	El profesor intenta hacer notar a la Alumna 10 que en la segunda extracción efectivamente hay seis posibilidades tratando de eliminar la inseguridad que está manifestando dicha alumna.
155	Alumna 4: con reposición	
156	Profesor: cinco bolitas, con reposición. Reposición o repetición.	
157	Alumna 6: entonces sería, seis por seis por seis por seis ¿por seis?	
158	Profesor: cinco extracciones. ¿Si o no? Seis extracciones (alguna alumna le corrige),	

	cinco extracciones. ¿Cuántas posibilidades tengo al sacar la primera?		
159	Alumnas: seis		
160	Profesor: como la miro, la devuelvo, ¿Cuántas bolitas me quedaron en la urna?		
161	Alumnas: seis		
162	Profesor: ¿cuántas posibilidades tengo para la segunda? Por lo tanto, shhh (sic)…	El profesor luego de escuchar la respuesta de sus alumnas, completa cada una de las casillas restantes en pizarra con un 6, como se muestra en la imagen de acontinuación. 	
163	Alumna 11: Profesor, ¿siempre se va a repetir el número mayor?	La alumna asocia el número de la bolita con la cantidad de bolitas en la urna, como el número que se va repetir en la multiplicación.	Fase de CIERE PEDAGÓGICO (Martinic & Rojas, 2015): En estas líneas, es posible observar un cierre pedagógico del Episodio 2. Esto a partir de la pregunta planteada por la Alumna 11, lo que genera una reflexión por parte de sus compañeras.
164	Profesor: Eso, eso no quiero que haga Alumna 11. Más que… si, siempre se va a repetir el número mayor. Pero piénsalo un paso antes, un paso más adelante. Si yo, estoy contando la cantidad de posibilidades que tengo… o sea, si yo tengo seis		

	posibilidades, saco una y devuelvo… y voy a volver a tener seis posibilidades (el profesor hace un gesto con el brazo para darle la palabra a la alumna 10)	
165	Alumna 10: que yo creo que como, más que fijarnos en la repetición del número mayor, sería la de veces que sacamos un objeto	
166	Profesor: Aaaah (sic), por ahí, por ahí lo podríamos empezar asegurar, por ahí si, por ahí sí.	Para aclarar la duda planteada por la Alumna 11, el profesor le cambia los números a las bolitas de la urna y valida las proposiciones de las demás alumnas de manera gestual y con proposiciones tales como: *por ahí si, por ahí lo podríamos empezar asegurar, ¡Si da lo mismo!.*
167	Alumna 6: o sea, si son otros los números, seguiría siendo seis, porque son seis bolas	
168	Profesor: Aah (sic), pero perfecto po' (sic) Alumna 6. Si da lo mismo, a ti te da lo mismo si aquí tengo la bolita 25, tengo la bolita 2, tengo la bolita 4, 5, 18 y… 6.	En esta parte del episodio, el profesor, explica y reafirma la proposición de la Alumna 6, y es que en la urna, la cantidad de bolitas no tiene relación con el número de la bolita, es por ello que cambia el número de las bolitas en la urna, tal como se quiere mostrar en la imagen. (número original en

		azul, número cambiado en rojo) 
169	Alumnas: aaaah (sic) perfecto.	
170	Profesor: ahí está. Profesor: Ya po', ¿cuántas bolitas tengo en la urna Alumna 6?	Hay un momento de risas y comentarios a lo que el profesor continúa diciendo y retomando el ejercicio de la urna.
171	Alumna 6: seis	
172	Profesor: ya, ¿Cuántas posibilidades voy a poder extraer?	
173	Alumnas: seis	

Transcripción del Episodio 3 de Gonzalo

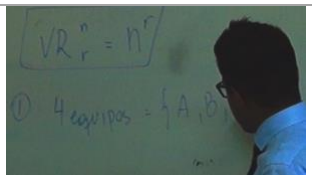
N° de línea	Línea	Notas o comentarios de los investigadores.	Fases del episodio
1	Profesor: Préstame el libro. Ya, Anote lo siguiente.	En este instante, el profesor le solicita el libro de matemática a una alumna que se encuentra en un banco de adelante, con el propósito de buscar el ejemplo adecuado y/o planificado para continuar desarrollando los contenidos matemáticos de la clase.	En estas líneas podemos identificar una fase de PRE-INICIO (Martinic & Rojas, 2015), pues el profesor les da tiempo a las alumnas para que copien de la pizarra, pide silencio, da algunas instrucciones de lo que deben copiar de la pizarra y se alista para dar la definición formal del concepto a tratar durante el episodio.
2	Alumnas: Profe, déjenos copiar. ¿Hay que anotarlo?	Se escuchan murmullos, mientras las alumnas se alistan para copiar lo de la pizarra (costado izquierdo de la pizarra).	
3	Profesor: Pero lo de ahí.	El profesor indica que lo que deben anotar es lo del costado izquierdo de la pizarra.	
4	Profesor: Ya. Shhhhh (sic). Eeeeeh (sic)		
5	Profesor: Anote. Shh, Shh, Shh. Ya, deja el espacio para después tirarnos con los ejercicios… deje el espacio.		
6	Profesor: No, va anotar la definición. *"la permutación"* Deje el espacio y anote la definición.		

7	Alumna 1: ¿De permutación?		
8	Profesor: Si		
9	Alumna 1: Ya la anotamos.		
10	Profesor: No, pero la de permutaci… (sic), o sea, variación con reposición.	Se escuchan reclamos de las alumnas (¡aaaah!, pucha) por el "error" cometido por el profesor. Digo esto, en el sentido de que una variación con reposición es una o se entiende como una permutación de elementos (en el sentido de que se ordenan objetos para obtener la cantidad de combinaciones posibles entre ellos)	
11	Alumna 2: ¿cuál era entonces?		
12	Profesor: Variación con reposición		
13	Alumnas: Es de permutación o variación.	Las Alumnas comentan en voz baja y manifiestan confusión.	
14	Profesor: Ya. La permutación de r elementos.		A partir de esta línea, es posible observar una fase de INICIO (Martinic & Rojas, 2015) del Episodio 3. Esto pues el profesor establece el objetivo de la clase mediante una nueva definición y estableciendo las páginas del texto que desarrollaran durante la clase.
15	Alumnas: ¿La qué?		
16	Profesor: La permutación de r elementos.		
17	Alumnas: ¿Eso también lo anotamos?		
18	Profesor: Es que, es distinto. Es que va a cambiar		
19	Alumnas: Dígalo de nuevo.		
20	Profesor: Es que va a cambiar, va a cambiar.	Algunas alumnas se "resisten" a escribir lo que el	

		profesor dicta, infiriendo que es la misma definición que ya habían anotado anteriormente	
21	Profesor: Variación, variación con reposición, coma. La permutación de r elementos de un conjunto.		
22	Alumnas: La permutación de r elementos.		
23	Profesor: de r elementos de un conjunto… de n elementos.		
24	Profesor: La permutación de r elementos de un conjunto de n elementos, coma, coma. Con elementos que se pueden repetir (bis). Se conoce como variación con reposición. (bis)		
25	Alumna 3: ¿cómo?		
26	Profesor: Se conoce como variación con reposición. Punto seguido (bis). El número de variaciones en este caso (bis).		
27	Alumnas: el número de variaciones en este caso		
28	Profesor: en este caso. Se encuentra dado (bis).		
29	Alumnas: se encuentra dado		
30	Profesor: Se encuentra dado, por la expresión (bis), expresión.	Mientras dicta, el profesor borra la pizarra y escribe la expresión algebraica para la variación con reposición	

	Ahí está, $VR_r^n = n^r$	validada por el texto de estudio del MINEDUC (Ministerio de Educación de Chile).	
31	Profesor: Entonces, una variación con reposición, o sea, con repetición, se encuentra dado por esa expresión.	En este instante, la clase es interrumpida por una alumna desde el exterior y de un curso inferior para comunicarle a una de las alumnas de primero medio que no se quedarán a la tutoría (una alumna de un nivel superior se hace cargo de ayudar a alumnas más pequeñas, en horarios en las materias en las que normalmente tienen resultados académicos mejores) programada para ese día.	
32	Profesor: Ya. Entonces, miren para que vaya trabajando en la parte de ejercicios. Abra el libro en la 286, por favor.		
33	Alumnas: ¿cuál?		
34	Profesor: la 286		
35	Alumnas: después va a decir 286, 287, 288. (Murmullos varios) ¿Cuál página?		
36	Profesor: La dos ochenta y seis		
37	Profesor: Ya. Miren, eeeeeeh (sic). Léela Alumna 4. Shh (sic)		Al igual que en los episodios anteriores, el profesor comienza la fase de DESARROLLO
38	Alumna 4: ¿La “A”?		

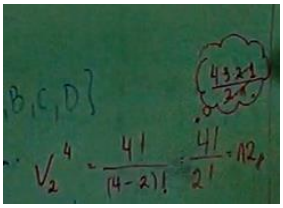
39	Profesor: Léela		(Martinic & Rojas, 2015) con un ejercicio introductorio para desarrollar el concepto de Variación con y sin reposición.
40	Alumna 4: “En un torneo de tenis se tienen cuatro equipos, A, B, C y D que se disputan el tercer y cuarto lugar. ¿De cuántas formas posibles estos equipos pueden quedar ubicados en la tabla de posiciones?” De cuatro formas.		
41	Profesor: Usted, shhhhhh (sic). Mire, tiene el uno. En esta parte, en esta parte es fundamental que usted vaya… si no entiende el enunciado de inmediato y no lo puede asociar o con variación o con una permutación que usted entienda, usted lo puede construir a través o de diagrama de árbol o tratar de sacarlo por principio multiplicativo. Primero, ¿Qué tiene que hacer? Primero, ¿qué tiene acá?		
42	Alumna 5: cuatro equipos		
43	Profesor: Tiene cuatro equipos. Cuatro equipos (bis)	El profesor deja registro de lo que dice a viva voz en pizarra estableciendo notación y simbología para la resolución de este tipo de problemas, como se muestra en la imagen.	

		
44	Alumnas: A, B, C, D	
45	Profesor: A, B, C, D. ¿Qué otra cosa tiene?	
46	Alumna 2: Que tienen 2 lugares	
47	Profesor: Usted quiere saber… el tercer y cuarto lugar. O sea, quiero ordenar el tercer y cuarto lugar. Ya, ¿cómo se pueden ordenar el tercer y cuarto lugar?	
48	Alumnas: El A con el B.	
49	Profesor: ¿Cómo podrían calcularlo?	El profesor se toma el tiempo esperando respuestas de sus alumnas, pero solo se oyen murmullos tales como “el A con el B”, “A, B, C, D”, “4 por 3”
50	Profesor: Como consejo, pueden utilizar el diagrama de árbol, si es que no se le… o lo pueden…(interviene una alumna en la fila de adelante, a lo que el profesor reacciona diciendo), ¿lo puede sacar así directamente? ¿Con lo que sabes? (indica o dirige la pregunta hacia la alumna de adelante).	El profesor continúa dando tiempo a sus alumnas para que se animen a responder reformulando la pregunta y redirigiendo dichas preguntas a otras alumnas.
51	Profesor: ¿Cómo lo harías Alumna 6?	

52	Alumna 6: ¡Yo! 4x4, 4x3, 4x2, 4x1	
53	Profesor: ¿Por qué? Shhhh (sic)… ¿por qué? No escucho mucho.	
54	Alumna 6: porque son cuatro equipos	
55	Profesor: Pero, y yo ¿qué quiero saber? (se escucha murmullos de las alumnas a lo cual el profesor redirige la pregunta) Ya, ¿qué quiero hacer? A ver, Alumna 7	
56	Alumnas: 4x3	
57	Profesor: ¿solo 4x3?	
58	Alumna 8: 4x4, 4x3	
59	Profesor: ¿Por qué?	Solo se escuchan murmullos.
60	Alumnas: Pero habla más fuerte	
61	Alumna 7: Porque son dos lugares los que hay que ocupar	
62	Profesor: ¿cuantos lugares hay que… cuántos equipos tiene usted?	
63	Alumnas: Cuatro	
64	Profesor: Usted, ¿qué quiere saber? ¿Cuántos lugares? ¿Los cuatro?	
65	Alumnas: ¡No! Dos	
66	Profesor: O sea, esto se asocia más ¿a qué?	
67	Alumnas: (entre murmullos se oye) a la variación, a una variación.	

68	Profesor: A una variación po' (sic), ¿o no? O sea, si esto fuese una variación ¿cómo usted lo escribiría como variación?	
69	Alumnas: V… A, B, C. A por B	
70	Profesor: Primero, ya es una variación. Una Variación. ¿Sería una variación con reposición o sin reposición?	
71	Alumnas: sin reposición. Sin…	
72	Profesor: ¿Por qué sería sin reposición? Puede existir, o no, ya díganlo ustedes. ¿Cómo se pueden ordenar esas cuestiones, los equipos?	Las alumnas discuten por qué sería sin reposición. El profesor intenta adelantarse a la respuesta, pero desiste y espera la respuesta de sus alumnas
73	Alumna 5: Porque no se puede sacar dos veces el mismo lugar, los equipos	
74	Profesor: Ah, perfecto. O sea, el equipo C no puede ser tercero y cuarto.	
75	Alumnas: no.	
76	Profesor: Por lo tanto descartamos que es variación con reposición. Ya, podría ser variación. Y se acercaría una variación. Entonces, y ¿Qué numeritos (sic) irían aquí?	
77	Alumnas: 4 y 3	
78	Profesor: 4 y 2 (V_2^4)	

	¿o no?	
79	Alumnas: si	
80	Profesor: ¿Por qué Alumna 5? La misma cara	
81	Alumna 5: Porque son 4 equipos y dos lugares.	
82	Profesor: Usted de cuatro equipos que tiene, ¿quiere ordenar?	
83	Alumnas: dos lugares	
84	Profesor: dos lugares, quiere saber cuántos se combinan para obtener dos lugares. O sea, podría ser, cuatro factorial dividido en…	
85	Alumnas: dos factorial	
86	Profesor: en cuatro menos dos factorial	En pizarra se observa la expresión $V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!}$
87	Profesor: Es que si se le olvida, después podría pensar que es ese dos y no es ese dos. Cuatro menos dos. Entonces, va ser 4 factorial, dividido en dos factorial, y ¿eso es?	Con la imagen siguiente, se pretende señalar que el profesor indica gestualmente lo que menciona a viva voz: *"podría pensar que es ese dos y no es ese dos"*
88	Alumnas: dos, ¿dos factorial?	
89	Profesor: doce ¿o no? Aquí usted está pensando porque es doce, 4x3x2x1,	En la imagen, se muestra como el profesor hace y muestra el calculo aritmético,

	dividido en 2x1, usted estaba pensando en eso. Eso tenía en su mente. ¿Será eso o no? Compruébelo.	utilizando el desarrollo de los factoriales y la simplificación. 	
90	Alumna 9: Si, eso es.		
91	Profesor: ¿Si?		
92	Alumna 9: Yo confío en usted, Ja!		
93	Alumnas: JA JA JA. (sic)		
94	Profesor: Como siempre.	En este instante se escuchan vivos y risas (uuuuh, aaaaah, jajaja).	
95	Profesor: Entonces, shhhh (sic). Entonces, lo importante de esta parte es que usted, más allá del cálculo, más allá del cómo se hace, usted vaya relacionándolo con alguno de estos dos conceptos, ya sea variación o permutación. En el siguiente ejercicio, dale Alumna 10.		
96	Alumna 10: ¿De cuántas maneras se pueden sentar tres niños en una fila con tres sillas?		
97	Profesor: Eso Alumna 9.		
98	Alumnas: Este si es con repetición		
99	Profesor: Shhh (sic). Usted, shhh (sic), usted tiene tres		

	niños y los quiere sentar en tres sillas. ¿o no? Ya. (se escuchan algunos murmullos, a lo que el profesor les reconviene de forma positiva y continúa con la clase) Ya, tiene tres niños que se quieren sentar en tres sillas. Ese concepto, usted lo asociaría más ¿a una variación o una permutación Alumna 9?	
100	Alumna 9: (La alumna le responde tratando de evitar la pregunta)	
101	Profesor: Usted, Alumna 9 Apellido. ¿A qué lo asociaría usted?	La compañera que se sienta delante de la Alumna 9 le sopla la respuesta (Permutación)
102	Alumna 9: Permutación (en voz baja)	
103	Profesor: ¿Por qué? Shhhhh (sic). ¿No? Le pedimos ayuda a la Alumna 11.	El profesor concede el tiempo suficiente para que la alumna responda. En ese tiempo, las alumnas que saben la respuesta comienzan a levantar la mano.
104	Alumna 11: No, profesor otra cosa. La Alumna 9 todavía necesita cierta información para …	
105	Profesor: Ya. Pero por eso, le pedimos ayuda a la Alumna 12 entonces. ¿Ya? Ya	

	Le repito la pregunta, tres niños, tres sillas y yo quiero saber cómo sería. ¿Lo asocia más a una variación o una permutación?	
106	Alumna 12: Permutación	Algunas alumnas también responden permutación
107	Profesor: Permutación, ¿Por qué Alumna 12?	
108	Alumna 12: Porque, como era todos los niños…	Se escucha de otra alumna: "porque sí". Luego de la respuesta de la Alumna 12 se escucha una expresión de comprensión (¡Aaaaaaaah!) por parte de la Alumna 11
109	Profesor: ¡Aaaaah!, que es esa ¡Aaaaah! Alumna 11. Ya, a ver, dale (chilenismo para indicarle a la alumna que continúe)	
110	Alumna 11: Ya, porque, yaaa (sic) porque se ocupan todo, no sobra ninguno.	
111	Profesor: ¡Aaah perfecto po' (sic)!. Perfecto, si yo, mira Alumna 11, si yo tengo una cantidad de elementos y quiero agrupar, y quiero ordenarlos a todos… permutación	En la imagen, el profesor utiliza lenguaje corporal para explicar lo que manifiesta en palabras.
112	Alumna 13: … es como que un niño puede quedar en otra silla	
113	Profesor: Más que un niño en otra silla. Más que un	

	niño en otra silla o bolitas solas. Si usted quiere ordenar, n elementos de n formas, Permutación.	
114	Alumna 13: O sea, si es en orden es permutación y si es como más desordenado, una variación.	
115	Alumnas: no, nooo (sic)	
116	Profesor: La misma cantidad de elementos que yo quiero ordenar y quiero ordenarlos todos, Permutación. Si yo quiero ordenar solo una parte de mi total de elementos, Variación	 En la imagen, el profesor utiliza el lenguaje corporal para indicar que se ocupa solo una parte de la totalidad de elementos de un conjunto al tener las manos más cerca una de la otra.
117	Alumnas: Variación.	Se da un lapso de tiempo en el que se genera un murmullos y el profesor aclara algunas dudas diciendo: “las dos son al azar”
118	Profesor: Shhh (sic). Alumna 11 si, si, Shhhh (sic)	La alumna 11 hace una afirmación que es validada por el profesor
119	Profesor: Exacto. Cuando yo quiero ordenar todos mis elementos, Permutación.	

	Si yo quiero ordenar solo un grupo de mis elementos, Variación. Alumna 9.	
120	Alumna 9: Variación entonces, es como un poco distinto.	
121	Profesor: ¿Ah?	
122	Alumna 9: La variación es como un juego… (no se alcanza a oír como completa la frase la alumna)	
123	Profesor: Variación, eh. Es por ejemplo, si usted… mire, piense en el juego del Loto, ¿Se asocia más a una variación o una permutación?	Es importante destacar en esta línea, el valor del concepto que enseña al vincularlo con los juegos de azar que ocurren en el contexto chileno.
124	Alumnas: Variación. A una variación.	
125	Profesor: Si usted supiera, quisiera saber las combinaciones que usted puede hacer para sacarse el Loto, ¿se acerca a una Variación o una permutación?	
126	Alumnas: Una variación	
127	Profesor: ¿Con cuántos números uno se gana el Loto?	
128	Alumnas: Con cinco. Siete. Tres. Seis	
129	Profesor: Con seis. Con seis. O sea, sería una Variación. Y ¿cuántos números hay en total?	
130	Alumnas: cuarenta.	

131	Profesor: Cuarenta. O sea, ¿Cómo serían las combinaciones totales del Loto?	
132	Alumnas: Cuarenta y uno (bis)	
133	Profesor: ¿Sería una variación de?	
134	Alumnas: son cuarenta	Se genera la duda de la cantidad total de números que se pueden escoger del juego de azar Loto.
135	Profesor: ¿Sería una variación de?... Cuarenta sobre seis	
136	Alumnas: son cuarenta. Son cuarenta y uno. Hay no sé. Tres por tres.	
137	Profesor: Ya. Da lo mismo	Aún sigue la discusión de las alumnas, a lo que el profesor da por terminado el ejemplo (con la frase “da lo mismo”) y decide continuar con la resolución de los ejercicios de la sección de resumen en la cual estaban trabajando.
138	Profesor: Ya, pero, shhhh (sic), pero, para allá vamos. Ahora sipo (sic). Ya, en que parte íbamos. Los niños y las sillas. Ya entonces, los niños y las sillas. Tengo tres niños que los quiero sentar en tres sillas. Permutación.	El profesor retoma el ejercicio B) que estaban resolviendo inicialmente. Es posible notar un cambio en la tonalidad de su voz y sus movimientos de brazos que transmiten (a mi juicio) a las alumnas el volver a concentrarse en la clase.

139	Alumna 9: ¿sería 3 por 2 por 1?	
140	Profesor: Permutación de tres. Si es permutación, eso es tres factorial, eso es 3x2x1 y eso es seis.	
141	Alumnas: Seis	
142	Profesor: Shhh (sic). Ya la c). Ya Alumna 15.	
143	Alumna 15: ¿Cuántas contraseñas de cuatro letras distintas se pueden diseñar con las letras de la palabra CLAVE?	
144	Profesor: Yapo (sic). Ahora, shhhh (sic). Ya, Alumna 16.	
145	Alumnas: Aaaah (sic). ¿Qué pasó? Profesor, esto es variación. Aaaah (sic), verdad.	
146	Profesor: Bien Alumna 17 (bis).	El profesor manifiesta entusiasmo por las conclusiones correctas de sus alumnas.
147	Profesor: Usted, con la palabra CLAVE. ¿Por qué me dijiste que es variación, Alumna 17?	
148	Alumnas: porque sobran letras	Entre las alumnas también responde la alumna 17.
149	Profesor: Ya, sobran letras. Y ¿Cuántas letras tiene la palabra “CLAVE”?	El profesor dirige las preguntas a la Alumna 17
150	Alumnas: cinco	
151	Profesor: Cinco. Primero, ojo. Vaya en esta parte.	

	¿Tiene letras que son repetidas?	
152	Alumnas: No.	
153	Profesor: No, no tiene letras que son repetidas. Son todas distintas. ¿Ah?	
154	Alumna 18: ¿Qué pasaría si son repetidas?	
155	Profesor: Cambiaría po' (sic).	A raíz de la pregunta de la Alumna 18 se generan una serie de hipótesis respecto de si sería con repetición o reposición.
156	Profesor: Podría ser o no. Pero después lo vemos.	
157	Alumnas: ¿Cómo voy a saber las que…	La Alumna manifiesta con esta pregunta una confusión entre los conceptos de espacio muestral y cardinalidad del espacio muestral (que es el objetivo de las técnicas de conteo)
158	Profesor: ¿Le están diciendo las cuatro letras o usted quiere saber la cantidad?	
159	Alumnas: Cantidad. La cantidad	
160	Profesor: Si usted quisiera saber las cuatro letras, mira, ¿Qué podrías hacer? Ahí tendrías que hacer el diagrama de árbol y poner: C, L A, V, E. Si sale la E, debería determinar los elementos de mi espacio	Para aclarar la duda de las alumnas el profesor muestra en pizarra mediante el diagrama de árbol como se generarían las contraseñas.

	muestral con el diagrama de árbol, por ejemplo. Después sería, si salió la C, puede salir la L, la A, la V, la E Después, si salió la L, puede ser la C, la A, la V, la E y así jugando con las combinaciones posibles. Si es que me pidieran la clave. Ya, entonces, shhh (sic) de acá Alumna 9; si me están pidiendo que con la palabra CLAVE, yo escoja, yo forme otra nueva contraseña de cuatro letras ¿a qué se acerca? ¿a una variación o a una permutación?	
161	Alumna 9: a una variación	
162	Profesor: ¿Por qué?	
163	Alumna 9: porque no se ocupan todas.	
164	Profesor: Porque no se ocupan todas. Y sería una variación ¿de qué?	
165	Alumna 9: Una variación de cinco uno	
166	Profesor: ¿Uno?	
167	Alumna 9: cuatro	
168	Profesor: de cinco sobre cuatro.	
169	Alumna 9: Abajo ¿se ponen los que sobran o los que se ocupan?	
170	Profesor: No, es cinco de cuatro. Si. Exacto.	

	Y, aquí sería, cinco factorial, ¿dividido en?	
171	Alumnas: uno, cinco menos cuatro.	
172	Profesor: en cinco menos cuatro factorial. Haber, cinco factorial ¿dividido en?	
173	Alumnas: uno factorial.	
174	Profesor: uno factorial.	
175	Alumna 18: Uno factorial vale uno no más.	
176	Profesor: Uno factorial vale uno. Ya po' (sic), cinco factorial es cinco por 4, veinte.	
177	Alumnas: veinte	
178	Profesor: ¿Por tres?	
179	Alumnas: sesenta	
180	Profesor: sesenta, y por dos ciento veinte	
181	Alumnas: ciento veinte.	
182	Profesor: ¿ciento veinte dividido en 1?	
183	Alumnas: ciento veinte.	
184	Profesor: Shhhh. Ahí está. Shhhh. ¿se va entendiendo más o menos cual es el proceso?	
185	Alumnas: Siiii (sic)	
186	Profesor: ¿Era tan difícil como usted lo veía?	
187	Alumnas: Profe (sic), Profe (sic). Siga con los ejercicios. Explíquelo de nuevo. Siga con los ejercicios	
188	Profesor: Ya, dale (sic), lee	

189	Profesor: ¿Qué quiere? ¿Qué se lo explique de nuevo?	
190	Alumna 18: No, pero otro.	
191	Profesor: ya, shhhhh (sic). Ya, mira. Deje a la Alumna 6 responder por favor, para que no se adelanten. Lea asistente por favor.	
192	Alumna 15: Un analista informático va a conectar un servidor para la empresa en la cual trabaja. Tiene a su disposición tres tipos diferentes de procesadores, cuatro modelos de gabinete, memorias RAM de tres capacidades distintas y una tarjeta madre de dos modelos distintos. ¿Cuántas opciones tiene para conectar el servidor?	
193	Alumnas: (risas). ¿Qué cosa? ¿Cuál era?	
194	Profesor: Ya, la Alumna 7 lo entendió porque siempre pone atención. Ya, un analista informático va a conectar un servidor para la empresa. Tiene a su disposición tres tipos diferentes de procesadores. O sea, tiene tres procesadores. Ya, qué más.	
195	Alumna 18: cuatro modelos de gabinete.	

196	Profesor: cuatro modelos ¿de qué?	
197	Alumna 18: ¡de gabinete!	
198	Profesor: Aaaah (sic). Modelos de gabinete, ya. ¿Qué más?	
199	Alumna 19: memorias RAM de tres capacidades distintas.	
200	Profesor: RAM. Tres RAM, ya.	
201	Alumna 18: distintas	
202	Profesor: Distintas, ya.	
203	Alumna 18: y dos tarjetas madres de dos modelos distintos.	
204	Profesor: o sea, tiene dos tarjetas madres.	
205	Alumna 18: si	
206	Alumnas: Se multiplica. ¿todo? Sipo (sic). Sipo (sic)	
207	Profesor: ¿si o no?	
208	Alumna 18: Si	
209	Profesor: Ya, ¿Qué paso Alumna 19? ¿Cómo lo haría usted?	
210	Alumna 19: multiplicando.	
211	Profesor: y ¿Por qué?	
212	Alumnas: por el principio multiplicativo.	
213	Profesor: por principio multiplicativo (en voz baja)	
214	Alumnas: Pero, ¿Qué sería? (risas) ¿sería variación o permutación? Profesor, ¿sería variación con reposición? ¿Qué sería?	

215	Profesor: ¿Ah?		
216	Alumnas: ¿Sería variación con reposición?		
217	Profesor: ¿Por qué?		
218	Alumna: A no, olvídelo. No importa		
219	Profesor: ¿Cómo lo haría usted Alumna 20 para que lo entiendan todos? Porque tu dijiste, es tres por cuatro por tres por dos.		
220	Alumna 20: yo lo hice con el árbol.		
221	Profesor: Con el árbol, ya. Explícanos con el árbol Alumna 20. Shhh. ¿Cómo sería?	El profesor hace una pausa esperando la explicación de su alumna	
Existe una pausa en la grabación y el Episodio 3 continúa con las siguientes líneas.			
222	Profesor: Por cada uno de esos tres procesadores ¿tengo?; cuatro modelos. Por cada uno de esos cuatro modelos tengo, tres RAM y por cada uno de esos tengo dos. Eso se acerca mucho a lo que usted muy bien conoce como bien dijo… Alumna 20, principio multiplicativo. (4x3x2x3 lo escribe en pizarra) Primera enseñanza de esto, no se tienen que guiar solo por lo que usted conoce, o sea, solo por lo que estamos viendo en lo inmediato, en	Es importante resaltar en esta línea la importancia que le da el profesor a las distintas formas de resolver con las que cuenta el alumno cuando se enfrenta a un problema que cumple con las características del contenido matemático que están desarrollando in situ, pero que no cumple con todas las condiciones para ser resuelto de dicha manera o para ser clasificado como “variación o permutación”.	

	esta parte su intuición, su exploración y distintas formas de resolver también influyen. O sea, si usted me está diciendo, ya, lo que hace la Alumna 9 siempre. Ahí yo no sé si es una permutación o variación, pero lo que hace siempre o trata de hacer; a yapo (sic) si tengo la urna con seis elementos y tengo que sacarlos sin reposición, empieza 6 por 5 por 4 por 3; pero, ¿sabe que es una variación o permutación?	
223	Alumnas: no	
224	Profesor: ahora, y esto nos da un total ¿dé?	
225	Alumnas: 72. 72 opciones para conectar el CPU.	
226	Profesor: opciones para conectar el CPU. Ya, mire. Dele (sic), dele. Asistente, ¿se cansó?	
227	Alumna 15: no	
228	Profesor: Ya, dele.	
229	Alumna 15: Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer	

	control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?		
230	Profesor: ya, yapo Alumna 8, que está atenta. Ya, léelo de nuevo. Shhhh.		
231	Alumna 8: Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?		
232	Profesor: Ya. ¿Cómo lo haría usted?		
233	Alumna 8: se multiplicaría, multiplicando.		
234	Profesor: ¿Qué cosa?		
235	Alumna 8: cuatro por tres…		
236	Profesor: ¿Por qué? Usted tiene primero shhh, primer control (bis), segundo control, tercer control. Ya, ¿Cuántas pruebas le hacen en el primer control?		
237	Alumnas: tres. Cuatro. Cuatro.		

238	Profesor: ¡cuatro! ¿Cuántas pruebas le hacen en el segundo control?	
239	Alumnas: tres.	
240	Profesor: Y ¿en el tercero?	
241	Alumnas: Dos	Algunas alumnas ya se habían adelantado a esta respuesta
242	Profesor: si usted lo escribe así “4x3x2” ¿podría ser Permutación?	
243	Alumnas: Si. Si. Si.	
244	Profesor: ¿Podría ser?	El profesor interactúa con el camarógrafo, considerándolo un alumno más de la clase. este emite su respuesta negativa gestualmente, con lo que las alumnas cambian su respuesta al repetir la pregunta el profesor
245	Alumnas: no, no, no porque falta el uno (risas)	
246	Profesor: Porque falta el uno, exactamente. Yapo (sic), aquí, pero si puede ser ¿un?	
247	Alumnas: variación	
248	Profesor: variación, o lo puede sacar por principio multiplicativo, como ya está ok. Y eso ¿sería? 24 pruebas. Por 24 pruebas pasa un producto para poder fiscalizado por calidad.	

	Ya, y el último. Asistente por favor	
249	Alumna 15: De una ciudad "A" a otra ciudad "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 4, 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de "A" a "C"?	
250	Profesor: de A a B, ¿cuántos caminos diferentes hay?	
251	Alumnas: cuatro	
252	Profesor: ya, y después ¿hay?	
253	Alumnas: tres.	
254	Profesor: tres caminos. Ya, ¿Cuántos caminos diferentes tiene entonces?	
255	Alumnas: 12	
256	Profesor: 12, ya están muy fáciles. Ya, estamos. Sigan, solo ustedes.	
257	Alumnas: Aaaaah (sic)	En este instante, el profesor decide dar a las alumnas para que practiquen de manera autónoma ejercicios relacionados con la permutación y variación, propuestos en el texto de estudio. Esta etapa de la clase, está relacionada con un CIERRE PEDAGÓGICO (Martinic & Rojas,
258	Profesor: Ya, si no queda nada. Ítem 2. Ya, termine el ítem 2 y tiene el timbre de hoy día.	

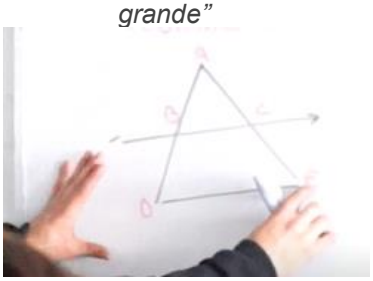
		2015) del episodio, pues es en donde anuncia las tareas que deben realizar las alumnas y avaluar lo que han aprendido de la unidad y posterior revisión por parte del profesor antes del toque de timbre.
El profesor da tiempo para que las alumnas desarrollen los ejercicios propuestos en su texto de estudio (ítem 2) llamándole la atención a aquellas alumnas que no quieren trabajan y se levantan de su lugar de trabajo. En esta instancia, las alumnas trabajan de manera libre (de manera individual y/o en parejas). **El profesor, responde dudas en general (escribiendo y recordando fórmulas en pizarra) y de manera individual (acercándose al lugar de trabajo de algunas alumnas).** **En la medida que van terminando sus ejercicios, las alumnas se acercan al escritorio del profesor para recibir el timbre de trabajo en clases.**		

Transcripción del Episodio 1 de Pedro.

N° de líneas	Líneas	Notas o comentarios de investigadores.	Fases del Episodio
1	Alumno 1: Profesor, ¿tiene un lápiz?		En estas líneas podemos identificar una fase de PRE-INICIO (Martinic & Rojas, 2015), pues el profesor y los alumnos se alistan y preparan para comenzar la clase, con lo útiles necesarios para el normal desarrollo de la clase.
2	Pedro: ¿Qué si tengo un lápiz?		
3	Alumno 1: Si		
4	Alumnos: ¿Tiene dos? ¿Tres?		
5	Pedro: Rosado, ¿te sirve?		
6	Alumno1: No po' (sic)		
7	Alumnos: ¡Uuuuh!		
8	Pedro: No tengo entonces.		
9	Alumno 1: Ya, entonces sí. La cuestión es que escriba.		
10	Pedro: Ya. Atención entonces. La clase anterior, estuvimos viendo un teorema. Ya, recordando: ¿cómo se llama el teorema que vimos la clase anterior?		A partir de esta línea, es posible observar una fase de INICIO (Martinic & Rojas, 2015) del Episodio 1 de Pedro. Esto pues, el profesor revisa conocimientos previos claves para el desarrollo del Teorema a estudiar en la clase, como los son el Teorema de Tales y el
11	Alumnos: Teorema de Tales		
12	Pedro: El teorema de Tales, cierto. ¿En qué consistía el Teorema de Tales? ¿Alguien se acuerda?	Los alumnos empiezan a opinar de manera instantánea y al mismo tiempo, con lo cual el profesor llama al orden reformulando la pregunta en otras más específicas.	
13	Pedro: Vamos por parte. Primero.		

14	Alumno 2: Teníamos un triángulo.	En este instante, el profesor dibuja en pizarra los objetos matemáticos que su alumno nombra.	Teorema de Pitágoras.
15	Pedro: Alumnos 2 dijo que teníamos un triángulo. ¿Qué más?		
16	Alumno 2: Se hacía una recta paralela		
17	Pedro: Paralela ¿a quién?		
18	Alumno 2: A laaaa (sic), a la base.		
19	Pedro: Ya, trazábamos una recta paralela a la base. Shh (sic), Alumno 3 por favor. Entonces, el tema, ¿qué pasaba? Cuando yo tengo un triángulo y corto con una recta paralela a cualquier base del triángulo. Ya, ¿qué pasaba con ellos?		
20	Alumno 4: Se convertía en un triángulo sobre otro proporcional		
21	Pedro: Se formaban dos triángulos cierto, y ¿esos triángulos, cómo eran?		
22	Alumnos: Proporcionales. Semejantes		
23	Pedro: Eran semejantes, cierto. Y, ¿Por qué criterio eran semejantes estos triángulos?		

24	Alumno 4: Porque tenían los mismos ángulos	
25	Alumnos: Por los ángulos. Ángulos	
26	Pedro: Ya. Demostramos la clase anterior, que estos triángulos que estaban acá tenían tres ángulos congruentes, cierto. Por lo tanto, por criterio ángulo-ángulo-ángulo, los triángulos iban a ser semejantes. Como los triángulos eran semejantes, podíamos concluir dos cosas. ¿Cuáles eran?	
27	Alumno 5: Eeeh (sic), los mismos lados	
28	Pedro: ¿Tienen los mismos lados?	
29	Alumnos: No. No, son proporcionales	
30	Pedro: Los ángulos congruentes…	
31	Alumno 5: Y lados proporcionales	
32	Alumnos: lados proporcionales	
33	Pedro: Y lados proporcionales. Eso era el Teorema de Tales. Por ejemplo, si yo tengo letras A, B, C, D y E	El profesor se dirige a la puerta de la sala para recibir el libro de clases y continúa con su ejemplo.
34	Pedro: Entonces, continuando con la información. El teorema de	El profesor constantemente utiliza el lenguaje kinestésico para conectar lo que

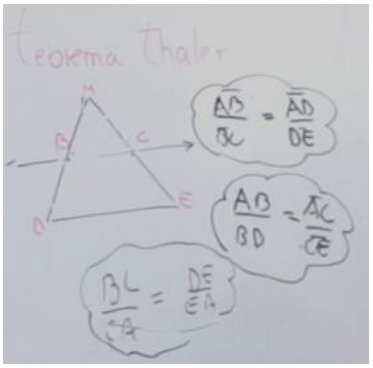
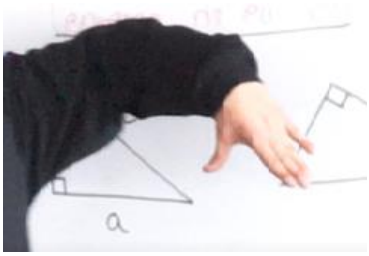
	Tales decía que si yo tengo un triángulo cierto, y trazo una recta paralela se formaban dos triángulos semejantes cierto. Entonces, los ejercicios de estos triángulos. Eeeh (sic), algunos separaban los triángulos para hacer las comparaciones y otros las podían hacer de esta manera acá, cierto. Pero, en realidad yo comparo el triángulo pequeño con el triángulo más grande	representa en pizarra en forma de diagrama y/o dibujo, con lo que habla. *"y trazo una recta paralela"* *"con el triángulo más grande"* 
35	Alumnos: El triángulo grande. El grande.	
36	Pedro: ¿Qué comparaciones podríamos hacer mirando el Teorema de Tales?	
37	Alumno 5: Trozo por trozo.	
38	Pedro: Ya, pero por ejemplo ¿cuál podría ser?	
39	Alumnos: AB. AB y… El otro lado.	
40	Pedro: Ya, haber sería, AB con…	
41	Alumno 5: con BC	
42	Pedro: Yaaa (sic). Miren lo que ésta haciendo el Alumno 5. Esta comparando AB con BC	
43	Alumnos: Como AD con DE. Es a AC.	Se escuchan múltiples respuestas, dentro de las

		cuales se establece una relación correcta. Cabe señalar que el profesor ha borrado del pizarrón una de las opciones para establecer las relaciones de proporcionalidad (la opción en donde separa los triángulos semejantes), lo que dificulta a algunos alumnos el poder establecer una de las relaciones solicitadas.
44	Pedro: AD es a DE.	
45	Alumnos: A, D, E	
46	Pedro: Esos segmentos son comparables. Por ejemplo, AB es a BC. Comparé los lados del triángulo pequeño y los debo comparar con los lados del triángulo grande que ¿serían? AD	
47	Alumnos: con DE	
48	Pedro: con DE. Ahí habría una comparación. Alguien me podría decir otra comparación más.	
49	Alumno 5: Sí, yo.	
50	Pedro: Haber, silencio	
51	Alumno 5: AB. Eeeeh, BC	
52	Pedro: AB y BC. Ya la hicimos esa.	
53	Alumno 5: Si, pero es que es distinta.	
54	Pedro: No, pero es que si AB con BC. Ya, haber ¿qué comparación quiere hacer usted?	

55	Alumno 5: BD con DE	
56	Pedro: ¿Está bien esa comparación?	
57	Alumnos: No.	
58	Pedro: Porque. Mire la comparación que está haciendo usted señor Alumno 5, tenemos lado con lado; y después ¿Qué tenemos por aquí?	
59	Alumnos: Trozo con lado.	
60	Pedro: Trozo con lado. ¿Estaría bien?	
61	Alumno 5: No	
62	Pedro: No. Por lo tanto… ¿haber?	
63	Alumno 6: AB	
64	Pedro: AB con...	
65	Alumno 6: con BD	
66	Pedro: AB con BD, ya…	
67	Alumno 6: y AC con CE	
68	Pedro: y AC con CE. Excelente, ahí tenemos otra comparación que sería AB con BD como AC con CE. Yo comparo un lado con un trozo proporcional con un lado con un trozo proporcional. Y ¿usted?, pero vamos con Alumno 2 que tenía la mano levantada. Alumno 2.	Se hace característico del profesor, como metodología de enseñanza, el ir resumiendo y reafirmando las conjeturas encontradas en cada lapso pertinente.
69	Alumno 2: BC con CA	
70	Pedro: BC con CA, ¡bien!	
71	Alumno 2: Es igual a DE con EA.	

72	Pedro: DE con EA. ¿Está bien la comparación que hizo el Alumno 2?	
73	Alumnos: Si	
74	Pedro: Está correcta. Veamos. Sería BC con CA, es decir, comparo base con lado y acá comparo también la base con el lado del triángulo grande. Eso era el Teorema de Tales, cierto. Que al cortar con una recta paralela se cumplía que los triángulos eran semejantes. ¿Alguna duda de ahí?	El profesor constantemente reafirma en pizarra las conjeturas de sus alumnos, utilizando la figura.
75	Alumnos: No	
76	Pedro: No. Eso fue lo que habíamos visto la clase anterior. Que otra información necesitamos para la clase de hoy día. ¿Conocen otro teorema más?	
77	Alumnos: El teorema de Pitágoras	
78	Pedro: El Teorema de ¿qué?	
79	Alumnos: Pitágoras	
80	Pedro: El teorema de Pitágoras, cierto. ¿Qué decía el teorema de Pitágoras? O ¿Cuándo se podía aplicar?	
81	Alumnos: cuando tengo un triángulo rectángulo. La regla de 3, 4, 5.	

82	Pedro: Ya, tengo un triángulo rectángulo cierto, ahí. ¿Cómo los lados que están aquí?	
83	Alumnos: a, b	
84	Pedro: Ya, los catetos a y b, e hipotenusa c. ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?	
85	Alumnos: que los catetos al cuadrado van a dar lo mismo que la hipotenusa al cuadrado	
86	Pedro: ya. Que los catetos al cuadrado, es decir, **a** al cuadrado más **b** al cuadrado es igual a **c** al cuadrado. Eso es el teorema de Pitágoras. Es decir, hasta el momento, en todos estos años que hemos estado estudiando hemos conocido dos teoremas. El teorema de Pitágoras, que tiene que ver con los triángulos rectángulos y tenemos también el teorema de Tales que lo estudiamos la clase anterior, cierto, que me permitía trazar una recta paralela a una base y se transformaban en dos triángulos semejantes. ¿Dudas de ahí?	En el mismo instante los alumnos recitan el teorema de Pitágoras tal cual como lo han aprendido.
87	Alumnos: No.	

88	Pedro: No. Copien eso y escriban como título cierto, “El teorema de Euclides”	Se produce una pausa mientras los alumnos copian de la pizarra lo escrito por el profesor.  Luego de un momento, el profesor apura a los alumnos para que copien rápidamente diciéndoles que borrara la pizarra en dos minutos.	
89	Pedro: Título, Teorema de Euclides. Tenemos un triángulo rectángulo ABC. Para que solo se pueda entender mejor de la forma que está en el data, yo voy a rotar un poco este triángulo, de tal manera que lo voy a poner de esta manera, así, ok. Entonces, acá va a quedar el ángulo rectángulo. Repito, miren. Tengo el triángulo rectángulo y le voy hacer así. Por tanto, ¿qué letra correspondería aquí?		A partir de esta línea podemos identificar una fase de DESARROLLO (Martinic & Rojas, 2015). El profesor focaliza el contenido a trabajar en la clase en el título que les pide a los alumnos que escriban en sus cuadernos.
90	Alumnos: a		
91	Pedro: letra a, solamente rote, no refleje. B y la hipotenusa ¿Sería?	Los alumnos en responden y el profesor reafirma en pizarra	

		ubicando donde corresponde cada lado
92	Alumnos: c	
93	Pedro: El teorema de Euclides dice lo siguiente: Yo voy a trazar la altura del triángulo rectángulo en c. es decir voy a trazar una altura hacia abajo que choque en c. ¿Qué característica cumple la altura en un triángulo?	En la imagen se muestra la forma como el profesor utiliza el recurso gráfico para representar lo que esta explicando.
94	Alumno 7: que cae perpendicularmente	
95	Pedro: que cae perpendicularmente cierto, en 90 grados. Es decir…	
96	Alumno 8: ¿Cómo? Alumno 9: ¿Cómo va a caer en 90 grados?	
97	Pedro: Que la altura cae siempre perpendicularmente, tiene que caer justo en 90 grados con respecto a la base, sí. Por ejemplo, yo tengo un triángulo así. ¿Sería altura eso? La altura de un triángulo tiene que caer perpendicularmente, estamos de acuerdo. Por lo tanto, acá ya tenemos un triángulo rectángulo, cierto. Que fue puesto de esta	Para aclarar el concepto de altura a los alumnos 8 y 9, el profesor utiliza un ejemplo gráfico en la pizarra y se apoya en las concepciones de altura de los demás alumnos de la clase.

	manera y trazo la altura hacia abajo, ok. ¿Qué se forma ahí? (Se produce una pausa en la que el profesor es solicitado en la puerta de la sala)	
98	Pedro: ya, entonces, sucede lo siguiente: trazo una recta, cierto, que es un segmento que cae perpendicularmente, formando ángulos rectos que se llama altura. Datos útiles, esto que está aquí, ¿cómo se llama?	
99	Alumnos: cateto	
100	Pedro: ¡Cateto! Cierto. Esto que está acá también va ser un cateto, cierto. Si yo hago esto que está aquí abajo, si ustedes se dan cuenta, miren, esto sería como la sombra del cateto. ¿Cierto? ¿Lo ven o no?	En la imagen, se observa al profesor señalando la "sombra del cateto"
101	Alumno 7: si	
102	Pedro: esa sombra se va a llamar proyección del cateto que está aquí, como la sombra, ok. Y esa proyección va tener una letra llamada p, ok. Es solamente nomenclatura.	
103	Alumno 7: de proyección	Se observa que el alumno rápidamente busca una explicación del porqué de la letra, asociándola con la

		primera letra de la palabra “proyección”.
104	Pedro: Bien (reconoce el ingenio del alumno). La otra, este cateto que está aquí, también tiene una proyección con respecto a la hipotenusa cierto, ¿esta se va a llamar?	
105	Alumno 7: p prima	
106	Pedro: jaja (sic). Ya le pusieron… ya en realidad puede ser cualquier letra en verdad, le vamos a poner q. y esto que está aquí, c obviamente, va a ser la suma ¿de quién?	
107	Alumnos: p más q	
108	Pedro: p+q cierto. Y esto, esto que está aquí va ser el segmento que ¿se llama?	
109	Alumnos: altura	
110	Pedro: Altura, y lo vamos a nombrar con la letra h de...	
111	Alumnos: Height.	
112	Pedro: Entonces, el teorema de Euclides surge de esto que está aquí. Tengo mis catetos, a y b, y me hipotenusa c. Del cateto a sale una proyección que se llama p y del cateto b sale una proyección que se llama q y la altura h. ¿estamos de acuerdo hasta ahí? Copien eso que está ahí, mientras por favor.	Se produce un intervalo de tiempo en el que los alumnos copian de la pizarra el contenido y los esquemas gráficos presentados por el profesor.

113	Pedro: Ya, empezamos. Lo único que cambió aquí fueron las letras. Recuerden que los catetos pueden ir en cualquier lado. Entonces acá, tenemos los catetos b y a, en el orden. Da lo mismo. Se entiende esa parte ¿no?. Vamos a trabajar con las letras que están aquí, ok. Tenemos los catetos a, b e hipotenusa c. Ese ángulo no se nota mucho que este en 90, pero es un tema de data yo creo, porque ahí se nota mejor, acá no se nota tanto. Pero ahí dice que es un ángulo de 90°. Ahora todos me siguen y póngame mucha atención. Si ustedes se dan cuenta, si yo trazo una altura en un triángulo rectángulo, que está aquí. Forma ángulos rectos, cierto. Aquí está. Proyección p, q, b, a. Este ángulo de acá vale alpha, cualquier letra ya. Este de acá le vamos a poner beta, ok. Ese ángulo de ahí vale ¿cuánto?
114	Alumno 7: 90 Alumna 10: Charlie. Alumnos: jajaja (sic)
115	Pedro: 90, cierto.

	Ya, el ángulo Charlie vale 90°. El asunto es que, ¿cuántos triángulos ven ahí ustedes?	
116	Alumnos: dos. Dos. Tres. Tres.	
117	Pedro: Aaaah! (sic). Que les dije yo. Hay tres triángulos, cierto.	Se produce un momento de distracción y distención, que evidencia una buena convivencia y buena comunicación en términos relacionales, entre el profesor y los alumnos.
118	Pedro: Ya. Por lo tanto tenemos entonces, un triángulo, otro triángulo y el triángulo original. Hay tres triángulos ahí, cierto. ¿Qué vamos hacer? Vamos a descomponer esos triángulos. ¿Qué transformación isométrica tendría que hacer yo para mover esos triángulos de ahí?	
119	Alumnos: traslación.	
120	Pedro: Traslación. Aplico una traslación, de esa manera.	Los alumnos al ver lo que ocurre en la proyección, los alumnos manifiestan su asombro con expresiones tales como: “aaaah, oooh”
121	Pedro: Shhhh (sic) De nuevo. Muevo los triángulos, los traslado de tal manera que ahí se ven mejor los tres triángulos.	

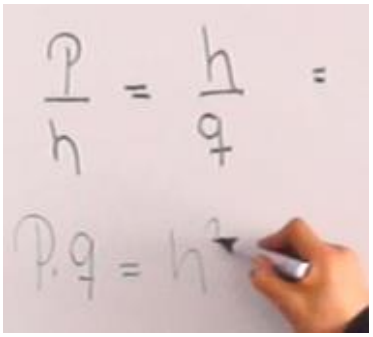
	Que sabemos de ellos, ¿cuánto vale este ángulo que está acá?	
122	Alumnos: Alpha.	
123	Pedro: Alpha, y este ángulo de aquí ¿vale?	
124	Alumnos: Beta.	
125	Pedro: Esto, después lo vamos a cambiar ok. Entonces, tenemos alpha, beta. Este ángulo de aquí ¿cuánto vale?	
126	Alumnos: 90	
127	Pedro: 90, y ese ángulo de ahí, ¿cuánto vale?	
128	Alumnos: 90	
129	Pedro: 90, cierto. ¿Qué podemos decir con respecto a estos tres triángulos que están aquí?	
130	Alumno 8: que la parte de arriba vale 45.	
131	Pedro: ¿Por qué?	
132	Alumno 8: porque es recto y se parte por la mitad.	
133	Pedro: ¿Está partido por la mitad?	
134	Alumno 2: No	
135	Pedro: ¿Dice que es bisectriz?	
136	Alumno 2: no.	
137	Pedro: No. Lo único que era una altura. La única característica de la altura…	
138	Alumnos: es que cae en 90°	
139	Pedro: claro, es que cortaba en 90°, cae perpendicular,	

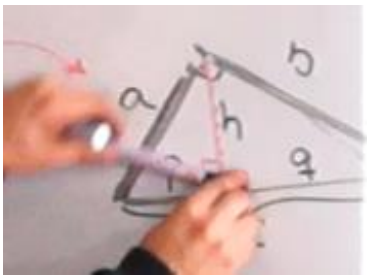
	nada más. ¿Cuándo una altura caía y formaba bisectriz también? ¿En qué triángulo?	
140	Alumnos: En el triángulo equilátero.	
141	Pedro: Equilátero, y, ¿algún otro más?	
142	Alumnos: Isósceles. Escaleno. No sé. En ningún otro más	
143	Pedro: Entonces, miremos los ángulos. Este ángulo de aquí vale alpha. Este ángulo de ahí vale beta. Ese ángulo de ahí vale 90, ese ángulo de ahí vale 90. ¿Qué podemos decir de estos triángulos?	
144	Alumnos: que todos miden lo mismo. Que están hechos del mismo.	
145	Pedro: El señor, el señor, me está diciendo que los triángulos son semejantes. ¿Por qué son semejantes?	
146	Alumno 1: Porque…eh, no. Porque tienen los mismos ángulos y un lado iguales.	
147	Pedro: ¿Qué lado tienen igual?	
148	Alumno 1: eeeeh (sic). No. Ese, ese	
149	Alumnos: La recta. El c.	
150	Pedro: debe ser ese lado que tengo ahí	
151	Alumnos: No. La altura	

152	Pedro: Ya. Ese con eso, y ¿qué ángulo tienen igual?	
153	Alumnos: el de 90°.	
154	Pedro: Ya, y ¿hay un criterio que tenga lado ángulo? Porque usted me dice: Ya, porque ahí un lado proporcional, porque es el mismo que es congruente, y un ángulo de 90°. ¿Podría decirme que esos triángulos son semejantes?	
155	Alumnos: No. No. No.	
156	Pedro: Más, más aún. Miren. ¿Cuántos ángulos tienen en común ellos dos?	
157	Alumnos: Dos. Uno.	
158	Pedro: Dos, ¿cuáles?	
159	Alumnos: El de 90 y el de arriba. El de 90. El de arriba. El alpha. Aaaah (sic), deberas (sic).	El profesor reafirma gestual y verbalmente las respuestas de sus alumnos.
160	Pedro: por lo tanto, estos triángulos de acá ¿son semejantes?	
161	Alumnos: sí.	
162	Pedro: si, ¿por qué criterio?	
163	Alumnos: ángulo-ángulo-ángulo. Ángulo-ángulo-lado. ángulo-ángulo	
164	Pedro: Ángulo-ángulo. Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes, el tercero altiro va ser congruente. Por lo tanto, estos triángulos son semejantes. Pregunta:	

	¿estos dos triángulos de acá tienen dos ángulos congruentes?
165	Alumnos: Si.
166	Pedro: ¿Cuáles?
167	Alumnos: el de noventa
168	Pedro: El de noventa y el…
169	Alumnos: y el beta.
170	Pedro: y el beta. Por lo tanto, teniendo dos ángulos congruentes, los triángulos inmediatamente son… semejantes. Entonces, estos dos triángulos que están aquí son semejantes con ese, ¿o no? sí. Si este vale alpha, ese ángulo 90, ¿cuánto vale ese ángulo que está aquí?
171	Alumnos: 45. No. C.
172	Pedro: No. Mire… Beta, ¿quién dijo beta?
173	Alumno 11: Yo.
174	Pedro: Si ustedes se dan cuenta, acá estos ángulos ya suman 180. ¿90 + Alpha + Beta, cuánto suman?
175	Alumno 11: 180.
176	Pedro: Si yo tengo alpha y bet (sic), Alpha y 90, ¿qué me falta ahí?
177	Alumnos: Beta.
178	Pedro: Beta. Y acá tengo, 90 más beta…
179	Alumnos: Alpha. Alpha. Alpha

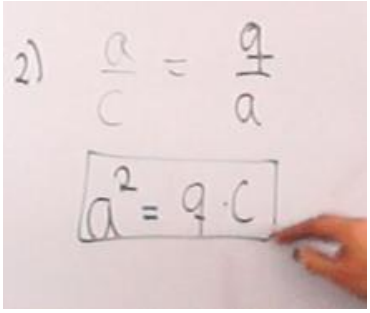
180	Pedro: y, ahí veo que los tres triángulos que están ahí tiene los tres ángulos congruentes. Por lo tanto, ¿cómo son?... Son semejantes. Pero no se ve tan claro así. ¿Qué tendría que hacer para que se vea…?	
181	Alumnos: rotarlos.	
182	Pedro: Ya. Roto los triángulos, cierto. De esta manera. Ya, roto los triángulos así y obviamente se mantienen los ángulos, ok, cuando los rotamos. Y ¿qué hacemos después para que queden de la misma forma?	
183	Alumnos: rotarlos de nuevo.	
184	Pedro: ¿los roto?	
185	Alumnos: O sea, no. Reflexión.	
186	Pedro: Los reflejo. Y ahí me doy cuenta que formé tres triángulos semejantes.	
187	Alumno 11: Pero profe, ¿Cómo yo voy a trasladar y rotar todo eso en la prueba?	
188	Pedro: Tranquilo, si en la prueba vamos a ver otras cosas. Mira. Entonces, sabíamos que este cateto que estaba aquí, ¿cuánto valía?	
189	Alumnos: B	

190	Pedro: B, el de acá ¿cuánto valía?	
191	Alumnos: A.	
192	Pedro: el de acá ¿valía?	
193	Alumnos: C.	
194	Pedro: Entonces, si supuestamente, los tres triángulos que están acá son semejantes, cierto, ¿qué podemos hacer con esos triángulos?	
195	Alumno 12: Compararlos.	
196	Pedro: Compararlos. Establecer relaciones en torno a ¿qué?	
197	Alumnos: A los lados	
198	Pedro: A sus lados. Podemos hacer una relación en torno a sus lados, cierto. ¿Qué relaciones podemos establecer para que se repita una letra por ejemplo? Ya, si ustedes se dan cuenta, podemos comparar este triángulo con este triángulo. Euclides dijo esto: si p es a h, entonces h es a q, cierto. ¿Qué pasaría aquí? ¿Qué pasa con esa q, que está haciendo?	El profesor compara los triángulos formados por la altura, estableciendo de esta manera el teorema de Euclides relativo a la altura ($h^2 = p \cdot q$) 
199	Alumnos: Pasa multiplicando.	
200	Pedro: Ya, pasa multiplicando. Entonces quedaría p por q, ¿es igual a?	

201	Alumnos: h cuadrado. H al cuadrado.	
202	Pedro: H al cuadrado. Entonces, esa de ahí es la primera fórmula que descubrió Euclides. Euclides dijo que: cuando yo quiero encontrar la altura de un triángulo eeeeh (sic)… que es rectángulo, cierto, yo la puedo encontrar mediante esa fórmula. H por H es igual a ¿qué?	
203	Alumno 8: H al cuadrado.	
204	Pedro: a P por Q. Esa fórmula que está ahí. Esa fue la demostración. Es decir, cuando yo tenga ejercicios de este estilo, lo que yo debería hacer, es descomponer los triángulos, cierto, y hacer estas comparaciones, ¿qué son bastante complejas, cierto? Entonces, en vez de hacer todas estas comparaciones, me quedo con esta pura fórmula, que dice que: la altura al cuadrado es la multiplicación de las proyecciones de los catetos. Ok, después vamos a ver un ejemplo. Dígame.	El profesor utiliza el plumón en el pizarrón como una nemotécnica para recordar la fórmula. 
205	Alumno 11: Entonces, lo que tengo que hacer, es pescar el triángulo, saber la medida	

	de C y después partirlo por la mitad	
206	Pedro: No, no es partirlo por la mitad. De ahí vamos a ver un ejemplo señor Alumno 11. Me dicen, ¿cuánto vale la altura de un triángulo? H por H, va ser igual a…	
207	Alumnos: P por Q.	
208	Pedro: a P por Q. Entonces, mis alumnos decían antes esta nemotécnica: te voy a pegar… Charchazo. Entonces, H por H es P por Q, ya, y así se aprendían la fórmula de este ejercicio que está aquí. Obviamente, las letras después no tienen sentido. Si yo pongo un ejercicio así, rectángulo y usted quiere saber la altura y este vale tres y cuatro, ¿cuánto vale la altura?	El profesor explica la nemotécnica a sus alumnos.
209	Alumnos: H por H, H al cuadrado. Es tres por cuatro.	
210	Pedro: H al cuadrado es igual a tres por cuatro.	Se generan una serie de preguntas respecto del teorema a lo que el profesor, focaliza la discusión al manejo de la fórmula más que en la resolución ejercicios, que afirma que desarrollarán más adelante. El profesor insiste en la nemotécnica, que permite

		recordar la fórmula más fácilmente.
211	Alumno 1: ¿Da lo mismo el lado?	
212	Pedro: Da lo mismo por donde empiece. Tranquilo, de ahí vamos a ver ejemplos. Esto que está aquí en la primera fórmula que encontró Euclides, ok. ¿Alguna duda de ahí? Copien por favor…no, no copien aun. Segunda comparación. Dos. Comparamos ahora el triángulo original con ¿quién?	
213	Alumno 8: Con el de ahí. Con el de ahí. Con el de ahí, el verdoso.	
214	Pedro: Jajajaja (sic) con el verdoso. ¿Qué lados podríamos comparar, para que haya letras iguales?	
215	Alumno 8: H con Q, con B con A.	
216	Pedro: Yo comparo H con A. Quedaría B con C. ¡queda alguna letra en común?	
217	Alumnos: No. A es a B, Como H es a Q.	
218	Pedro: Ya, A es a B como H es Q. ¿Queda alguna letra en común?	
219	Alumnos: No.	
220	Pedro: Ya, mire la comparación, A es a C como	

	Q es a A, ¿hay una letra en común?	
221	Alumnos: Si.	
222	Pedro: Entonces mire. A es C ¿cómo?	
223	Alumnos: Q es a A	
224	Alumna 12: Si no tuvieran letras en común, ¿no se podrían comparar?	
225	Pedro: Si se podrían comparar. En este caso, para Euclides, lo que quería era obtener obviamente solamente tres letras, para que quedara obviamente algo elevado a dos y haber encontrado algo. Por ejemplo, aquí vamos a ver lo que sucede. ¿Qué pasa con esa A?	
226	Alumnos: Queda al cuadrado.	
227	Pedro: ¿Qué pasa con esa C?	
228	Alumnos: C por Q.	En la imagen se muestra la formalización de uno de los teoremas de Euclides, a partir de la relación de semenjanza entre triángulos. 

229	Pedro: Aquí encontró otro teorema más, que dice eso. El teorema dice lo siguiente: que si yo tengo la proyección aquí, tendríamos aquí P y Q, altura. Tendría lo siguiente, Altura por altura va ser igual a Q por...	
230	Alumnos: Por P. por C.	
231	Pedro: Por C.	
232	Alumnos: ¿Por qué?	Esta confusión se genera a partir porque el profesor dice "Altura por altura va ser igual a" y los alumnos tienen en mente reciente el primer teorema presentado.
233	Pedro: porque acá dice por C. Alt… A al cuadrado es igual a…	
234	Alumnos: a Q por C	
235	Pedro: que quiere decir eso. Que el cateto al cuadrado, es decir, A por A va ser igual a Q, que es la proyección, ¿por quién?	
236	Alumnos: por C.	
237	Pedro: Por toda la hipotenusa	Es este instante se murmullos de comprensión por parte de algunos alumnos (aaah!)
238	Pedro: Entonces, A por A es igual a la proyección por toda la hipotenusa. Entonces, asumiendo eso, ¿Cómo quedaría al otro lado? B al cuadrado sería igual a ¿Cuánto?	

239	Alumnos: a P por C.	
240	Pedro: Comprobémoslo. La tercera comparación que hizo, comparamos ese con eso, comparamos ese con ese. ¿Qué comparamos ahora? (risas) ¿Qué comparación podríamos hacer?	
241	Alumnos: P es a C	
242	Pedro: Ya, B es a C, ¿cómo?	
243	Alumnos: P es a B. A es a Q.	
244	Pedro: P es a B. ¿Qué pasaría ahí? Esa B pasaría…	
245	Alumnos: al cuadrado.	
246	Pedro: Quedaría B al cuadrado, es igual a…	
247	Alumnos: C por P	
248	Pedro: P por C o C por P, ¿cierto? Entonces, ¿se cumple lo que habíamos visto?	
249	Alumnos: Si.	
250	Pedro: Que el cateto al cuadrado era igual a su proyección por la hipotenusa. ¿Alguna duda de ahí?	
251	Alumno 8: Entonces, haciendo eso podríamos sacar, como se llama, la división de los lados.	
252	Pedro: Claro. Podríamos sacar cuanto miden los lados. Lo vamos a ver después en los ejemplos, ok.	

	Eeeh (sic), entonces, que tenemos… La otra forma de comparar los triángulos. Atención, mire. Nosotros lo que hicimos en realidad fue demostrar que los triángulos eran semejantes mediante sus ángulos, ¿cierto? Pero mire, si yo borro todo y puedo hacer la siguiente comparación. Porque yo, les dije la clase anterior, de que nosotros podríamos separar las figuras y ahí podríamos compararlas. Pero, ¿Qué pasa si alguien quiere aplicar un teorema que nosotros conocemos? (La clase es interrumpida debido a que retiran a una alumna)	
253	Alumnos: Profe, ¿Cuándo va ser la prueba?	
254	Pedro: Mañana	
255	Pedro: Ya. Atención. Shhhh (sic), Por favor, atención acá. Si alguien no quería comparar los triángulos de una manera así, también, podría aplicar acá, los lados de los triángulos	
256	Alumnos: Nooo (sic).	
257	Pedro: no, pero por si acaso. ¿Qué teorema se puede aplicar ahí aparte?	
258	Alumnos: El teorema de Tales	

259	Pedro: El teorema de Tales, y podría haber comparado ahí todas las cosas y obtener todos los teoremas, ok. Por lo tanto, así se obtiene el teorema de Euclides.	
260	Alumno 13: ¿en qué consiste eso?	
261	Pedro: Es las mismas comparaciones que hicimos acá. Por ejemplo, no ve que nosotros hacíamos comparaciones en Tales, las comparaciones altiro aquí. Y los que no podían hacerlo altiro, separaban los triángulos. Los dejaban lejitos para hacerlo más fácil. Lo mismo sucede, comparamos ese es a ese como ese es a ese. Y vamos a encontrar los mismos…	
262	Alumno 7: Profe, ¿no sería otra forma de enseñar cómo sacar los lados?	
263	Pedro: Exacto. Estas fórmulas que están acá son para sacar catetos, porque el A y el B eran catetos ¿cierto?	
264	Alumnos: si	
265	Pedro: y para sacar también la altura, ok. Entonces, que vamos hacer. Vamos a… Entonces miren… ¿Cuál es el teorema de Euclides?	

	El teorema de Euclides, tiene que ver, cuando yo trazo la altura de un triángulo rectángulo se forman tres triángulos semejantes y lo acabamos de probar hace poquito, ¿cierto?	
266	Alumnos: sí	
267	Pedro: que esos tres triángulos compartían tres ángulos congruentes y por lo tanto ya eran semejantes. Entonces, se cumplían tres relaciones importantes. La primera, ¿cuál era?	
268	Alumnos: (risas)	
269	Alumno 7: H al cuadrado es igual a P por Q.	
270	Pedro: Exacto. H al cuadrado, la altura al cuadrado es igual a ¿qué?	
271	Alumnos: a P por Q.	
272	Pedro: a P por Q. esa en realidad, nosotros tendríamos que hacer la relación entre los triángulos para encontrar esto. Pero como ya está avanzado cierto, en más fácil utilizarlo de esta manera. Esa sería la primera fórmula, H por H es igual a P por Q, que es la relación que se establece al comparar triángulos.	
273	Alumno 8: A al cuadrado, es igual a P por C.	

274	Alumnos: B al cuadrado es igual a Q por C.	
275	Pedro: B al cuadrado es igual a la proyección, que sería Q, por la hipotenusa que sería C.	
276	Alumnos: A al cuadrado es igual a P por C.	
277	Pedro: A al cuadrado ¿es igual a?	
278	Alumnos: P por C.	
279	Pedro: a P por C. Ahí tenemos tres relaciones de Euclides, ok. Eso es lo que tendríamos que demostrar ahora, ok. Entonces, este es el teorema de Euclides, se saca al comparar los lados de los triángulos semejantes y salen estas tres fórmulas que vamos a utilizar ahora. Copien eso por favor.	
Mientras los alumnos copian el resumen del teorema de Euclides de la proyección, se generan preguntas adelantando el tipo de ejercicios que resolverán más adelante.		
280	Pedro: La altura al cuadrado se calcula, cierto, multiplicando la proyección de sus catetos, P por Q. que hizo Euclides, unió las tres fórmulas en una para sacar otra más.	
281	Alumnos: ¿qué? Aaah (sic) (risas)	
282	Pedro: Segunda.	El profesor le llama la atención a un alumno
283	Pedro: Ya, atención. Tenemos que la altura al	

	cuadrado es igual a P por Q. Por lo tanto, si yo me doy cuenta, P y Q lo podemos reemplazar como sistema de ecuaciones, método de sustitución, ya. Si yo quiero despejar cuánto vale P, ¿quién me molesta aquí?
284	Alumnos: La C.
285	Pedro: La C, ¿qué esta haciendo?
286	Alumnos: pasa dividiendo.
287	Pedro: Pasa dividiendo.
288	Alumnos: A al cuadrado dividido en C.
289	Pedro: Quedaría A al cuadrado dividido en C, ¿cuánto me va dar?
290	Alumnos: P
291	Pedro: Por lo tanto, reemplazo P aquí… Por lo tanto reemplazo el P que ¿Cuánto vale?
292	Alumnos: A al cuadrado dividido en C
293	Pedro: Q… ¿Cuánto vale? Para despejar el Q, ¿Qué está haciendo el C?
294	Alumnos: Va dividir.
295	Pedro: Va dividir. Y al otro lado quedaría, ¿Cuánto vale Q entonces?
296	Alumnos: B al cuadrado partido en C
297	Pedro: B al cuadrado dividido en C. Entonces

	quedaría. Reemplazo el Q y quedaría B al cuadrado dividido en C. Que obtengo ahí, que la altura al cuadrado es igual a…	
298	Alumno 14: Profe, ¿por qué pasa pa' (sic) ya si lo estaba haciendo acá?	
299	Alumnos: Profe, otra vez. Dele otra vez. Me perdí profe. Me perdí.	
300	Pedro: ya, todo de nuevo. Tenemos, la altura al cuadrado es igual a P por Q. Hasta ahí, ¿alguna duda?	
301	Alumnos: No. Sí. No	
302	Pedro: Es una fórmula de Euclides. Yo quiero saber cuánto vale P y Q.	
303	Alumno 15: Profe, el Alumno 8 si tiene dudas sobre la altura al cuadrado igual a P por Q.	
304	Pedro: Dígame, ¿qué pasó?	
305	Alumno 8: Profe, esa es la proyección de A y esa es la proyección de B ¿verdad?	
306	Pedro: Sí. Altura al cuadrado es igual a la multiplicación de la proyección del A por la proyección de B que sería Q. Por ejemplo, ¿qué es P?	
307	Alumno 8: El pedazo ahí (risas)	
308	Pedro: que sería la proyección de A ¿cierto?	

309	Alumno 8: si	
310	Pedro: y ¿qué es Q?	
311	Alumnos: La proyección de B	
312	Pedro: Entonces, la altura al cuadrado se saca multiplicando la proyección de los catetos de ahí, que serían P y Q. y esa fue la primera fórmula que encontró Euclides ¿Sí?	El Alumno 8 asiente con la cabeza en señal de asentimiento y comprensión de lo que le menciona el profesor
313	Pedro: Teniendo esa fórmula, yo quiero saber cuánto vale P y Q, esa es mi meta. ¿Cuánto vale P y Q? Tomo la segunda, ¿cuánto vale P? P es igual a quién	
314	Alumnos: a C, A cuadrado partido en C	
315	Pedro: y ¿cuánto vale Q?	
316	Alumnos: B al cuadrado…	
317	Pedro: B al cuadrado partido en ¿quién?	
318	Alumnos: en C.	
319	Pedro: en C. Entonces, tenemos que la altura al cuadrado va ser igual a P, que es A al cuadrado partido en C	
320	Alumnos: por B al cuadrado partido en C. Aaaah (sic)	
321	Pedro: ¿cierto? Si yo voy para otra cosa más. Yo encontré el valor de P y Q. Ya, hasta el momento	

	tenemos el teorema de la altura ¿cierto? Altura al cuadrado es igual a P por Q. Quiero saber cuánto vale P, ¿cuánto vale P?.... A al cuadrado partido en C. ¿Se entiende esa parte o no?	
322	Alumno 8: Sí.	
323	Pedro: Si, porque mira. Cuánto vale P, quién me molesta. El C	
324	Alumno 8: pasa dividiendo.	
325	Pedro: entonces, P es A al cuadrado partido en C. Y Q, ¿vale?	
326	Alumno 13: B al cuadrado partido en C.	
327	Pedro: Si P vale A al cuadrado partido en C, lo reemplazo, ¿Sí? Y Q lo reemplazo por el valor que encontré también. Que sigue, que arriba sería A al cuadrado por B al cuadrado, partido en ¿C por C?	
328	Alumna 13: C al cuadrado	
329	Pedro: C al cuadrado. Entonces mi pregunta es. ¿Qué número..? H al cuadrado vale esto, ¿cuánto vale H? ¿Cuánto tendría que valer para que me diera esto?	

330	Alumno 2: A por B dividido en C		
331	Pedro: A por B dividido en C. y ese es el cuarto teorema de Euclides, que dice que la altura se puede encontrar mucho más fácil multiplicando ¿Quiénes?		
332	Alumna 12: A y B, dividido en C		
333	Pedro: Los cate… ¿Quiénes son A y B?		
334	Alumnos: Los catetos.		
335	Pedro: Los catetos! Y C ¿es la?		
336	Alumnos: la hipotenusa. ¿Profe?		
337	Pedro: La hipotenusa. Por lo tanto, (risas) tenemos, la altura… tenemos dos teoremas de la altura: altura es igual a la multiplicación de la proyección del A y el B. Y, la otra altura se puede encontrar sola por la multiplicación de los catetos dividida en la… hipotenusa. Copien eso y nos vamos a ir con los ejemplos con numeritos.		En esta Línea, el profesor recapitula el último Teorema de Euclides (el que relaciona los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo). Es aquí donde se puede identificar un CIERRE PEDAGÓGICO (Martinic & Rojas, 2015) del Episodio 1 de Pedro, pues anuncia las próximas tareas a realizar.
338	Alumno 8: Profe, como ahí están al cuadrado, ¿usted los partió a la mitad?		
339	Pedro: No. Es como calcular la raíz cuadrada. Yo decía, por ejemplo si yo le digo esto señor: altura al cuadrado es		

	igual a 16, ¿Cuánto vale la altura?
340	Alumno 8: cuatro.
341	Pedro: ¿por qué?
342	Alumno 8: Ah, porque 4 al cuadrado es 16.
343	Pedro: 4 al cuadrado es 16. Entonces yo digo, altura al cuadrado es igual a eso, ¿Qué número multiplicado por sí mismo me da eso? Eso que está aquí. Entonces, altura vale eso. Copien eso por favor, cópienlo todo y así empezamos con los ejercicios.

Transcripción del Episodio 2 de Pedro

N° de líneas	Líneas	Notas o comentarios de los investigadores.	Fases del Episodio
1.	Profesor: Ya. Resumiendo, entonces, para ver, Alumno 1. Resumiendo, entonces, ¿cuál serían los teoremas de Euclides? Teniendo, sacando la relación de los triángulos tenemos aquí: H por H…		En estas líneas, se observa una introducción al tema (que corresponde en este caso, al resumen del concepto tratado en el Episodio 1 de Pedro), lo que nos indica que el profesor está examinando los conocimientos necesarios para resolver los problemas y ejercicios que tiene preparado. Esto corresponde a una FASE DE INICIO (Martinic & Rojas, 2015).
2.	Alumnos: H por H, H al cuadrado. Es igual a P por Q.		
3.	Profesor: H al cuadrado, es igual a P por Q, que es la multiplicación de los catetos ¿cierto? La otra fórmula es…		
4.	Alumnos: “A” al cuadrado es igual a P por C		
5.	Profesor: “A” al cuadrado es igual a P por C. Yo, yo les cambié las letras. Oye, Alumno 2. Yo les cambie las letras A y B, porque quiero decirles que dan lo mismo las letras, solamente la relación que	El profesor recalca que en los teoremas de Euclides relativos a los catetos “no importa el orden de las letras” sino “La relación que se establece4”	

	se establecen. Que cateto al cuadrado es igual a la proyección por la hipotenusa. La otra sería, B al cuadrado		
6.	Alumnos: por Q por C.		
7.	Profesor: Por Q por C. Y la última que acabamos de descubrir, es que la altura se saca con, multiplicando ¿quién?		
8.	Alumno 3: los catetos, dividido en la hipotenusa.		
9.	Profesor: Los catetos, divididos en…		
10.	Alumnos: la hipotenusa		
11.	Profesor: Entonces, leamos el siguiente problema: El triángulo ABC de la figura, es rectángulo en C. por lo tanto, ahí tenemos un triángulo rectángulo y se trazó la altura. Por lo tanto, eso quiere decir que estamos en la presencia del teorema de Euclides, cierto. ¿Cuánto vale CD?		A partir de esta línea es posible observar que se inicia la fase de DESARROLLO (Martinic & Rojas, 2015) del Episodio 2 de Pedro.
12.	Alumnos: la altura.		
13.	Profesor: CD sería la altura. Entonces, para saber cuánto vale la altura,		

	¿Cuántas fórmulas de ahí me sirven para calcular la altura?	
14.	Alumnos: Una.	
15.	Profesor: ¿Solo una?	
16.	Alumnos: No, dos. Dos.	
17.	Profesor: Dos. La primera y la última. Entonces, la primera es una relación entre la altura y la proyección de catetos. Y la segunda, la última es una relación entre los catetos y la hipotenusa. ¿Tengo cuánto vale la hipotenusa?	
18.	Alumnos: Eeeh (sic), sí. 50. 50.	
19.	Profesor: La hipotenusa vale 50. Pero ¿tengo los catetos?	
20.	Alumnos: No	
21.	Profesor: No, cierto. Pero, ¿los podría sacar?	Es posible observar que el profesor valida la variedad de caminos que se tienen para resolver un problema matemático y les muestra a los estudiantes el más directo.
22.	Alumnos: Si	
23.	Profesor: Sí. Los podría sacar mediante esa fórmula, jajaja (sic). Todo	

	es posible, usando esa fórmula. ¿Cuál es la más fácil de utilizar?	
24.	Alumnos: La última. La primera. La uno.	
25.	Profesor: La primera. Dice lo siguiente. ¿Ya la hizo ya?	
26.	Alumna 4: Si	
27.	Profesor: ¿Cuánto le dio?	
28.	Alumna 4: 400	
29.	Profesor: Ya, pero, ¿la raíz de 400?	
30.	Alumna 4: A, pero…	
31.	Profesor: A ya, espéreme. Está casi. Tenemos, altura al cuadrado es igual ¿a quién?	
32.	Alumnos: a P por Q.	
33.	Profesor: a P por Q. Entonces sería… acá sería x, la altura al cuadrado, o sea, x al cuadrado es igual a ¿quién? 40 por 10.	
34.	Alumnos: 400	

35.	Profesor: x al cuadrado es igual a ¿cuánto?	
36.	Alumnos: 400.	
37.	Profesor: 400. X al cuadrado es igual a 400 cierto, pero mi pregunta es cuánto vale x, la altura. ¿Cuánto vale la altura?	El profesor registra en pizarra la ecuación que se obtiene de aplicar el teorema de Euclides.
38.	Alumnos: 20	
39.	Profesor: que número al cuadrado me da 400	
40.	Alumnos: 20	
41.	Profesor: 20. 20 ¿Qué?	
42.	Alumnos: centímetros.	
43.	Profesor: 40 centímetros y 10 centímetros. Tenemos aquí que la letra correcta es, que no se ve aquí, es la B. Ahí tenemos una aplicación del teorema de Euclides.	

44.	Alumno 5: deberían poner también el 400, como para haber engañado.	
45.	Profesor: jajaja. Podría estar el 400 para confundirlos.	
46.	Alumna 3: Profe, es que es como simplificar la altura	
47.	Profesor: No, mire. Es que no es simplificar. La altura al cuadrado es igual a 400, entonces, ¿Cuánto vale la altura? ¿Qué número al cuadrado me da 400?	
48.	Alumnos: 20	
49.	Profesor: el 20. Es como la raíz cuadrada de 400.	
50.	Alumnos: x por x es 400	
51.	Profesor: Entonces, la respuesta correcta, ¿Cuánto vale CD?	
52.	Alumnos: 20	
53.	Profesor: 20 centímetros. Una aplicación del teorema y así son los ejercicios.	
54.	Alumno 6: hay como dos fórmulas para encontrar la…	

55.	Profesor: sipo, yo también la puedo encontrar con esta	
56.	Alumno 6: Ya, pero, ¿Cuál es la…	
57.	Profesor: pero me demoraría más.	
58.	Alumno 6: ¿Cuál recomendaría más? ¿la primera?	
59.	Profesor: Sipo (sic). Es que, haber. La primera fórmula relaciona la altura con sus proyecciones, y me dan sus proyecciones, por tanto, por eso utilizo la primera. Si me dan los catetos	Ante la pregunta del Alumno 6, el profesor argumenta su opción del teorema escogido, con respecto a los datos que le entrega el ejercicio. Este es un dato relevante para los estudiantes, pues les indica pautas para tomar la mejor decisión a la hora de resolver un problema de similares caracteristicas.
60.	Alumno 6: y esa, si me dan los catetos	
61.	Profesor: este A y B, si te dan la proyección y la hipotenusa.	
62.	Alumno 6: Aaaah (sic).	
63.	Profesor: Ya, de ahí vamos a ver ejemplos. No se preocupe. Copien ese ejercicio por favor.	

64.	Alumno 1: Profe, y si a uno le dan los catetos y le piden sacar la altura	
65.	Profesor: Aaah (sic) mire. Buena. Si alguien necesita sacar la altura y tengo los puros catetos, ¿Qué me faltaría sacar?	
66.	Alumnos: la proyección. La hipotenusa.	
67.	Profesor: La hipotenusa. Y ¿puedo sacar la hipotenusa yo también?	
68.	Alumnos: Sí. Sí, porque los catetos al cuadrado es la hipotenusa al cuadrado.	
69.	Profesor: Exacto, podría sacar, mediante…	
70.	Alumnos: teorema de Pitágoras.	
71.	Profesor: con el teorema de Pitágoras podríamos sacar la hipotenusa, ok. Copien eso por favor.	
72.	Alumnos: Facebook. Oooh jojo jajajajaajaj (sic)	
73.	Profesor: Oh. Casualidad que no están las amigas	
74.	Alumnos: ¿Que amigas? Ahora si podemos hablar	

75.	Profesor: No digan nada… ¿Por qué?	
76.	Alumnos: Profe x igual. 10, 40. Sus mejores amigos	
77.	Profesor: Siguiente	
78.	Alumnos: no, no, no. Los mejores, los mejores. Espere Profe.	
79.	Profesor: Los vamos a Siguiente. Shhhh (sic)	
80.	Alumnos: No, espere las alternativas profe. Pero profe no veo	
81.	Profesor: Shhh (sic)	
82.	Alumnos: Pero profe	
83.	Profesor: Segundo ejercicio, luego se dedican a conversar. Dice así: Observe el triángulo rectángulo ABE, miren ABE, triangulo rectángulo Inscrito en el rectángulo ABCD que muestra la figura ¿Calcule el área del rectángulo? ¿Cómo se calcula el área del rectángulo? Hay que ver, la verdad es la misma explicación, pero	

	yo los quiero ver cuánto piensan	
84.	Alumnos: Aaah (sic) profe ya se ya se Usamos el triángulo P y Q po' (sic)	
85.	Profesor: Espera, espera, espera un poquito Ya tenemos lo siguiente Para sacar el área de un rectángulo ¿Qué tenemos que tener Primero?	
86.	Alumnos: La P y la Q. Lo de arriba	
87.	Profesor: Bien Va ser	
88.	Alumnos: La altura	
89.	Profesor: Que me dicen a mi Base por la altura Pregunta ¿Cuánto vale la base?	
90.	Alumnos: Eh, 12. 13. cuatro, trece	
91.	Profesor: Trece ¿Y la altura?	
92.	Alumnos: Eeeeh (sic) "x"	

93.	Profesor: “x” no la conozco, es decir yo debo encontrar el valor de “x” para sacar el área del rectángulo Ahora si Dante Dígame	
94.	Alumno 7: Eso es como lo que hicieron el triángulo partido porque es la misma base entonces simbolizan lo mismo	
95.	Profesor: A ver no entiendo	
96.	Alumno 7: Es que cuando vimos la primera parte que era sobre partir el triángulo porque está en partes … Vimos que la base dividida es lo mismo po’ (sic) Era paralelas …	
97.	Profesor: A usted dice utilizar teoremas de Thales	
98.	Alumno 7: no, no eso que miden lo mismo po’	
99.	Profesor: A que lo de arriba mide lo mismo que lo de abajo. Si Si ustedes se dan cuenta yo trazo la altura del triángulo de aquí, puedo sacar cuánto vale esto de aquí	

	¿Cuánto vale eso?
100.	Alumnos: Cuatrooo (sic)
101.	Profesor: Cuatro centímetros
102.	Alumnos: Ocho
103.	Profesor: ¿Por qué ocho?
104.	Alumno 7: Cuatro po' (sic)
105.	Profesor: Ah, cuatro sí, Y este de aquí ¿Cuánto vale?
106.	Alumnos: Nueve
107.	Profesor: Nueve centímetros Mi pregunta es ya En realidad, estos datos que estaban acá arriba que pertenecían a los lados del rectángulo de arriba, en realidad eran las proyecciones de los catetos ¿Cierto? Que tomamos las proyecciones para acá arriba
108.	Alumnos: Eran p y q. Entonces x al cuadrado es igual cuatro por…
109.	Profesor: y "x" al cuadrado. Y este x al cuadrado de

	aquí ¿Quién es en realidad?	
110.	Alumnos: es el h. El h	
111.	Profesor: Es la altura del triángulo rectángulo. Entonces, mi pregunta aquí ¿Qué teorema puedo utilizar acá pa… (sic)?	
112.	Alumno 1: el Primero	
113.	Profesor: Utilizo nuevamente el primero, shhhh (sic). Que me dice a mí, obviamente, que lo relacionan, la altura con los catetos	
114.	Alumno 1: treinta y seis. x al cuadrado es igual al treinta y seis.	
115.	Profesor: Entonces digo, X al cuadrado es altura al cuadrado	
116.	Alumnos: es cuatro por nueve	
117.	Profesor: Cuatro por nueve ¿Cuánto es x al cuadrado? ¿Cuatro por nueve?	
118.	Alumnos: treinta y seis. x es igual a seis	
119.	Profesor: treinta y seis cierto.	

	Por lo tanto, el lado o perdón la altura es seis centímetros Repito: Altura al cuadrado es igual a p por q, en este caso la proyección de los catetos.	
120.	Alumno 2: Cuatro y nueve	
121.	Profesor: Cuatro por nueve, treinta y seis. Y ¿Qué número al cuadrado da treinta y seis?	
122.	Alumno 2: Seis	
123.	Profesor: Seis, ¿Qué quiere decir eso?	
124.	Alumno 3: que la altura es 71	
125.	Profesor: Que la altura, ¿Cuánto vale la altura aquí?	
126.	Alumnos: Seis	
127.	Profesor ¿Cuánto? Seis centímetros ¿Puedo sacar ahora el área del rectángulo?	
128.	Alumnos: Sí.	
129.	Profesor: El área del rectángulo seria base por altura.	

130.	Alumno 2: trece por seis	
131.	Profesor: La base 13 centímetros y la altura es 6 centímetros ¿Trece por seis?	
132.	Alumnos ochenta y nueve. Setenta y dos. Setenta y ocho	
133.	Profesor: seis por tres dieciocho, seis por una seis más una ¿Setenta y ocho?	
134.	Alumnos: centímetros cuadrados	
135.	Profesor: Centímetros cuadrado Hay tendríamos el área	
136.	Alumnos: ¿No hay que dividirlos?	
137.	Profesor: copien eso por favor. ¿Alguna duda?	
138.	Alumno 7: pero, cuando no es triángulo no hay que dividirlo pa' (sic) que me dé el área	
139.	Profesor: Triángulo y ¿Qué es?	
140.	Alumnos: Rectángulo.	

141.	Profesor: Es un rectángulo Entonces, si usted dice En un rectángulo me piden el área del rectángulo o del triangulo	
142.	Alumnos: Rectángulo po’	
143.	Profesor: Rectángulo ¿Cierto? Para sacarle el área del rectángulo es base por la altura ¿Cierto? Entonces en este caso la base es trece y la altura es seis y hay trece por seis daría setenta y ocho centímetros cuadrados ¿Dudas de ahí?	
144.	Alumnos: no tranquilo	
145.	Profesor: Copien eso por favor.	
146.	Alumnos: No borre eso	
147.	Profesor: Dice así. Ejercicio tres y ultimo así que recuerden vamos hacer tres Se tiene un triángulo rectángulo en C Hay esta rectángulo en C, cuya medida de su cateto mide 10 centímetros, aquí está ¿Cierto?, y la	

	proyección sobre la hipotenusa La proyección que tiene ese cateto vale cuatro centímetros. ¿Calcule el perímetro del triángulo? Para calcular la hipotenusa del triángulo…	
148.	Alumnos: hay podemos hacer el de allá po' (sic). Ah, yo se po' (sic)	
149.	Profesor: ya, que podemos hacer ¿Qué tenemos? Tenemos el valor de ¿Quién?	
150.	Alumnos: A. Del B. Del cateto	
151.	Profesor: ¿Y de?	
152.	Alumnos: P	
153.	Profesor: ¿qué valor puedo sacar de ahí?	
154.	Alumnos: el de B. Q, el de Q. A al cuadrado	
155.	Profesor: primera, segunda, tercera o cuarta	
156.	Alumnos: el del a cuadrado. La segunda. El tercero.	
157.	Profesor: Si yo utilizo la tercera formula, bueno en	

	realidad acá la del lado del b La proyección de ese cateto ¿Puedo sacar los datos con el valor de b?	
158.	Alumnos: No, sáquela. La segunda. Ah, es la a	
159.	Profesor: ¿Sacaría que formula? ¿La segunda? Porque la segunda relaciona este cateto con la proyección ¿O No? Y yo tengo ese cateto con esa proyección	
160.	Alumnos: Yapo pa' (sic) que quiere sacar esa si ya. Pero faltaría C po' (sic) profe	
161.	Profesor: por eso po' y el que quiero encontrar Porque sería ¿Cómo sería la formula acá? ¿A al cuadrado va a ser igual a qué?	
162.	Alumnos: p por c	
163.	Profesor: a p por c. Hago la relación en este triángulo ¿Cómo quedaría?	
164.	Alumnos: Cien. Diez	

165.	Profesor: ¿Diez a qué?	
166.	Alumnos: Al cuadrado	
167.	Profesor: Va a ser igual ¿A qué?	
168.	Alumno 5: A cuatro por c	
169.	Profesor: A cuatro por c, hay estaría la relación lista o ¿No? Entonces, si yo ya tengo lista esa relación	
170.	Alumnos: Y despejar la c	
171.	Profesor: Digo lo siguiente	
172.	Alumnos: Hay ta (sic) la mano. Despejar la c. La c pasa a dividir	
173.	Profesor: Diez por diez ¿Cuánto es?	
174.	Alumno 5: Cien	
175.	Profesor: Cien va a ser igual a cuatro por c	
176.	Alumnos: La c vale veinte y cinco	
177.	Profesor: Si la c entonces el cuatro ¿Qué pasa con él?	
178.	Alumnos: pasa dividiendo. Veinte y cinto	
179.	Profesor: c vale ¿Cuánto?	
180.	Alumnos: veinte y cinco	

181.	Profesor: Veinte y cinco centímetros Que obtuve hay ¿Qué c vale cuánto?	
182.	Alumnos: Veinte y cinco	
183.	Profesor: Mi pregunta es la siguiente. Eh…	
184.	Alumnos: veinte y uno (en coro)	
185.	Profesor: Jajaja todavía no hacia la pregunta, pero si mi hipotenusa vale veinte y cinco y la proyección vale cuatro	
186.	Alumnos: 21, 21, 21	
187.	Profesor: p vale veinte y un centímetro y mi pregunta es la siguiente ahora	
188.	Alumnos: ohe yapo (sic). 84	
189.	Profesor: tranquilos porque miren. Tranquilo shhhh (sic)	
190.	Alumnos: h al cuadrado es igual a b. 85. Shhh (sic), cállate	
191.	Profesor: me piden la altura	
192.	Alumnos: nooooo (sic)	
193.	Profesor: ¿Cuando?	

194.	Alumnos: no. Le piden el otro valor	
195.	Profesor: el objetivo de este ejercicio dice que quiere calcular el perímetro del triangulo El perímetro es la suma del contorno de la figura	
196.	Alumnos: aaah	
197.	Profesor: Entonces sería p más veinte y cinco. Me falta eso.	
198.	Alumnos: veinte y uno por veinte y cinco	
199.	Profesor: ¿Ya? ¿Cómo podemos sacar eso de ahí?	
200.	Alumnos: 21 por 25. Yo sé	
201.	Profesor: Me falta esa medida de ahí	
202.	Alumno 7: No profe, profe no Diez al cuadrado y veinte y uno al cuadrado, después le resta y a ver cuánto se le da	
203.	Profesor: A ver lo que quiere aplicar el señor Tamiz es el teorema de Pitágoras, que dice 21 al cuadrado más 10 al cuadrado más “a” al	

	cuadrado es igual. El único error que cometió fue que era veinte y cinco	
204.	Alumna 8: No po' (sic) mi hipotenusa si 25 es la c po' (sic).	
205.	Alumnos: Sipo (sic) si 25 es la c. Pero si es Pitágoras	
206.	Profesor: aaah (sic) si, si y lo otro que podría ser válido también es poder haber sacado la altura pa (sic) cubrir eso ¿Cierto? Y haber aplicado el teorema de Pitágoras y poder sacar la hipotenusa. Pero aprovechando que estamos viendo Euclides ¿Hay alguna otra forma de sacar la "a"?	
207.	Alumnos: si, si	
208.	Profesor: ¿Cuál? ¿Cuál fórmula? De nuevo.	
209.	Alumnos: la tres. Pero hagámosla con Pitágoras no más po' (sic). Más fácil	
210.	Profesor: La tercera dice que Ese al cuadrado es igual a q por c ¿Cierto? Entonces digo	

	Tranquilo	
211.	Alumnos: 21 por veinte…	
212.	Profesor: ¿Cómo quedaría la fórmula? ¿Cómo quedaría la fórmula aquí?	
213.	Alumnos: A al cuadrado	
214.	Profesor: “a” al cuadrado va hacer igual a que	
215.	Alumnos: a 21 por 25	
216.	Profesor: 21 por 25, tamos de acuerdo o ¿No? Es “b” al cuadrado allá pero que letra esta acá	
217.	Alumnos: La “a”	
218.	Profesor: La “a” ¿Cierto? Entonces quedaría ¿Cuántos es “a” al cuadrado es igual a 21 por 25? ¿Cuánto es 21 por 25?	
219.	Alumnos: Eh, es 5 por 1 cinco, es cinco por dos diez, 21 por 2	
220.	Profesor: 525, lo dijo el señor 525, comprobemos 21 por 25 5 por 1	
221.	Alumnos: Cinco	
222.	Profesor: Cinco por dos	

223.	Alumnos: Diez
224.	Profesor: 2 por 1, dos ¿Dos por dos?
225.	Alumnos: Cuatro
226.	Profesor: 525, ya ahí entramos en una materia que nosotros vimos cuando éramos pequeñitos, decíamos ¿Qué número multiplicado dos veces me da 525?
227.	Alumnos: Hay veo jajaja. Raíz
228.	Profesor: La raíz cuadrada de 525
229.	Alumnos: Tiene que ser un 5 si o si
230.	Profesor: exacto, nosotros vimos que el numero tiene que terminar en 5 si o si Puede ser 15, 25, 35, 45, 55
231.	Alumnos: 15, 25, 35, 45, 55 (lo dicen a la par con el profesor)
232.	Profesor: ¿Qué pasa si la raíz no es exacta? Por ejemplo 25 por 25 ¿Son?
233.	Alumnos: 625

234.	Profesor: 625 y 15 por 15 ¿Cuánto es?	
235.	Alumnos: 225. Oooh (sic) la media vola (sic)	
236.	Profesor: 225, por lo tanto ¿Existe una raíz exacta quizás?	
237.	Alumnos: Hay con decimal	
238.	Profesor: Con decimal, Por lo tanto, shuuuu (sic) Recordamos raíces cuadradas. Cuando nosotros vimos raíces cuadradas La raíz de 525 está cercana entre la raíz de 400 y ¿Quién?	
239.	Alumnos: y de 600. 500. Hey hermano pusiste caleta de materia. 900	
240.	Profesor: La raíz de 900 ¿Que sería? 30	
241.	Alumnos: Yo opino que nos tiene que dar las respuestas. Cállense	
242.	Alumno 7: Yo opino que lo hagamos como ellos dicen porque así nos ahorramos ese tema.	
243.	Profesor: es que lo que pasa	

244.	Alumnos: Por teorema de Pitágoras no más profe	
245.	Profesor: Por teorema de Pitágoras este lado cambia su medida	
246.	Alumno 7: no	
247.	Profesor: Entonces si yo lo hago por teorema de Pitágoras Voy a llegar a lo mismo a Raíz de 525, entonces	
248.	Alumno 6: Profe es 23,5 como dijo él	
249.	Profesor: veamos 23,5 es aproximado, 23,5 por 23,5 esto es para recordar materia que nosotros estamos viendo	
250.	Alumno 8: No, no da eso	
251.	Profesor: ¿No da? ¿Cuánto te dio?	
252.	Alumno 8: da 552,25	
253.	Profesor: ¿quinientos?	
254.	Alumnos: 22,5	
255.	Profesor: ya probemos con 22,5	
256.	Alumnos: 21. 21 no po’	
257.	Profesor: 5 por 5 veinticinco Cinco por diez	

258.	Alumno 8: Tampoco, le da 506,25	
259.	Profesor: Le da quinientas seis coma veinticinco Entonces 22 coma…	
260.	Alumnos: entonces es 22,7	
261.	Profesor: probemos, cuanto da 22,7 por 22,7 No si la está sacando ahí!	
262.	Alumno 8: 515	
263.	Profesor: estamos cerca	
264.	Alumno 8: ¿Entonces es coma 8?	
265.	Profesor: Ya 22,8	
266.	Alumnos: Coma 9, coma 9	
267.	Profesor: Noo así avanzamos mucho	
268.	Alumnos: Si po' (sic)	
269.	Alumno 8: 8 por 8 son 64	
270.	Profesor: ¿Cuánto da?	
271.	Alumno 8: 519	
272.	Alumnos: Profe 22,9 por 22,9	
273.	Profesor: 519 por lo tanto Da ¿519? Esta cercano lo vamos a aproximar a eso (shuuu) Usted está	

	solamente conociendo números racionales	
274.	Alumno 8: el 22,9 por 22,9 da 505, no, 524,41	
275.	Profesor: Ya entonces lo vamos a aproximar a 22,9 por lo tanto el lado “a” aproximadamente ¿Cuánto vale?	
276.	Alumnos: 23. 22,9	
277.	Profesor: 22,9 por lo tanto Ya, Shhh (sic) El perímetro ahora si por favor El perímetro es la suma de todo el contorno ¿Qué seria? (shhh)	
278.	Alumnos: Hay que sumar todo. Todo sumado.	
279.	Profesor: ¿10 más 21?	
280.	Alumnos: 31	
281.	Profesor: 31 más 22	
282.	Alumnos: 53	
283.	Profesor: 53,9 centímetros aproximadamente	
284.	Alumnos: es 25 ¿Qué está hablando?	
285.	Profesor: Seria, perdón si verdad ¿10 más 25?	

286.	Alumnos: 35		
287.	Profesor: ¿35 más 22?		
288.	Alumnos: 57,9		
289.	Profesor: 57,9 centímetros Ese seria		
290.	Alumnos: Ya ahora descansamos po' (sic) profe (sic)		
291.	Profesor: Copien eso por favor.		
292.	Profesor: Veamos lo siguiente, para terminar. Ya el objetivo de la clase de hoy día era "conocer y aplicar el teorema de Euclides". Por lo tanto, nosotros conocimos lo siguiente: Cuando yo tengo un triángulo, Atención todos (shhhh) Cuando yo tengo un triángulo rectángulo trazo la altura del triángulo rectángulo se forman ¿Qué se forman?		Es a partir de esta línea, en la que el profesor comienza a recapitular, resumir y evaluar lo aprendido durante la clase. Esto se manifiesta en frases como "*Vemos lo siguiente, para terminar*" y "*Ese es el teorema de Euclides y con eso terminamos la clase*", es posible observar la fase de CIERRE PEDAGÓGICO (Martinic & Rojas,
293.	Alumnos: Un triángulo		
294.	Profesor: se forman tres triángulos		
295.	Alumnos: Semejantes		
296.	Profesor: Semejantes (oye shhhh (sic)) por lo tanto se forman tres triángulos		

	semejantes, en la cual yo puedo establecer relaciones entre los lados de los triángulos que son las siguientes. Se descubrieron tres fórmulas de Euclides para resumir esta comparación. ¿Cuáles son ellas? Por parte. Alumno 9.		2015) del episodio.
297.	Alumno 9: h al cuadrado		
298.	Profesor: La altura al cuadrado es igual a		
299.	Alumno 9: p por q		
300.	Profesor: p por q Siguiente, Alumno 10		
301.	Alumno 10: “a” al cuadrado es igual		
302.	Profesor: “a” al cuadrado es igual a p por c Teniendo en cuenta (ya atención) teniendo en cuenta que es al cateto al cuadrado es igual a la proyección por su hipotenusa Alumna 11.		
303.	Alumna 11: “b” al cuadrado		
304.	Profesor: “b” al cuadrado		
305.	Alumna 11: Es igual a q por c		
306.	Profesor: Es igual a q por c		

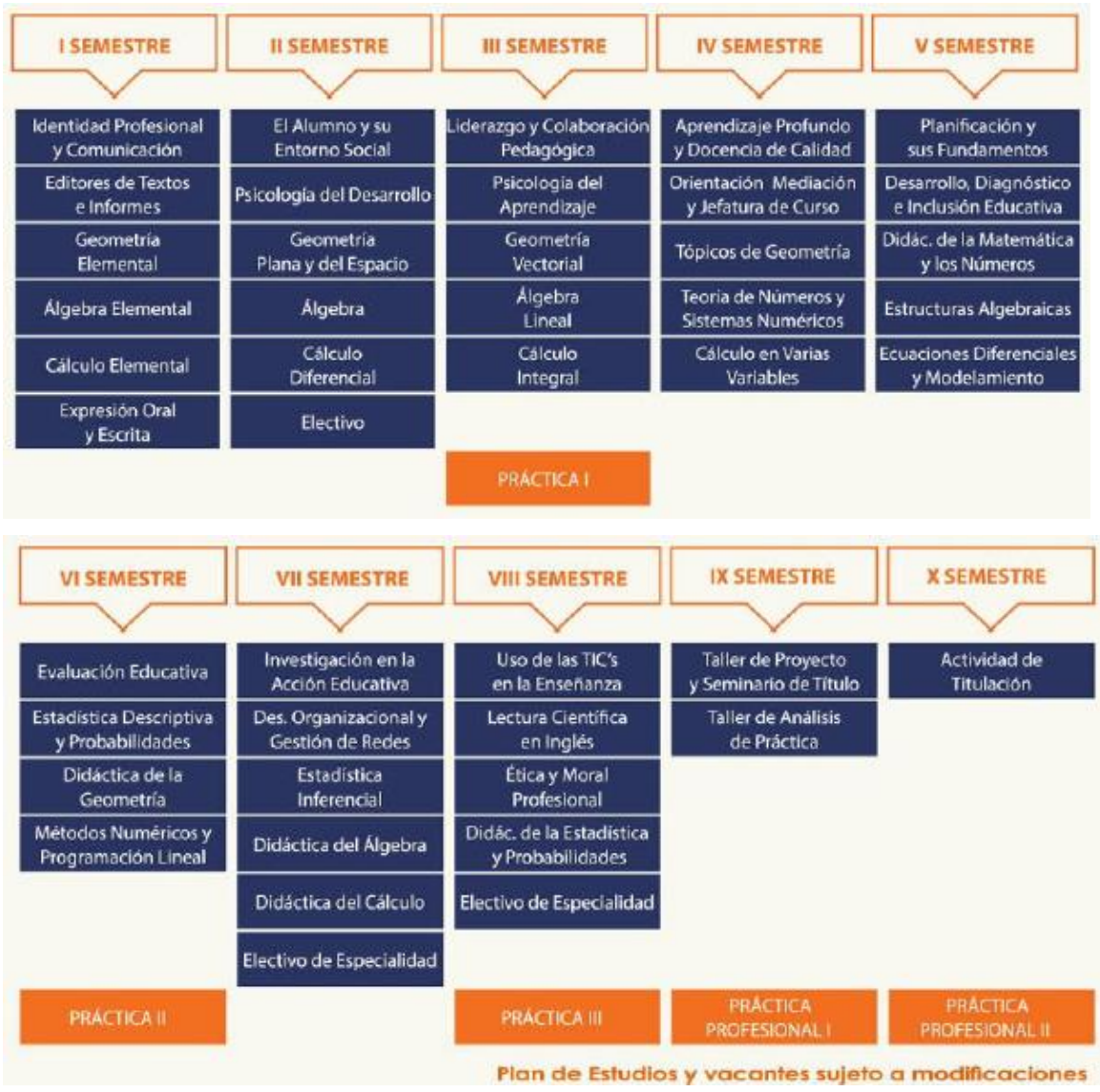
	Que sería cateto al cuadrado es igual a la proyección del cateto por la hipotenusa y el último. Alumno 12, ya tuvo su opción.	
307.	Alumno 12: aaah Profe y yo	
308.	Profesor: Alumno 13	
309.	Alumno 13: “h” es igual a	
310.	Profesor: La altura	
311.	Alumno 13: Si h es igual a	
312.	Profesor: es igual a que	
313.	Alumno 13: ab	
314.	Profesor: a por b	
315.	Alumno 13: dividido en c	
316.	Profesor: quiere decir que la altura también se puede sacar determinado los catetos partidos en la hipotenusa. Ese es el teorema de Euclides y con eso terminamos la clase.	
317.	Alumnos: Ah, wena (sic)	

Mallas de formación de profesores de las Universidades del CRUCH

- Universidad de Talca

Primer Año		Segundo Año		Tercer Año		Cuarto Año		Quinto Año
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Inglés A1 (3)	Inglés A2--I (3)	Inglés A2-II (3)	Inglés B1-I (3)	Inglés B1-II (3)	Inglés B1-III (3)	Inglés B2-I (3)	Inglés B2-II (3)	
Comunicación oral y escrita I (2)	Comunicación oral y escrita II (4)		Pre-práctica de integración I (6)	Diseño, administración y evaluación de currículo (4)	Pre-práctica de integración II (4)	Tecnologías de la información y comunicación en educación (3)	Pre-práctica de Integración III (4)	Práctica profesional (30)
Identidad profesional docente (3)		Autogestión del aprendizaje (3)	Trabajo en Equipo y Desarrollo Habilidades Social (3)	Evaluación del aprendizaje (4)	Didáctica general (4)	Gestión de organizaciones educativas (3)	Orientación (4)	Deporte (2)
	Psicología del niño y del adolescente (4)	Psicología del aprendizaje humano (4)		Comprensión de contextos educativos (3)	Comprensión de contextos culturales (3)	Dinámicas sociales promotoras de aprendizaje (4)	Ética del educador (2)	
Taller Didáctico de la matemática (2)		Aplicaciones informáticas para la enseñanza de las ciencias (3)	Metodología de la investigación (3)	Comprensión de contextos sociales (3)	Elaboración y gestión de proyectos (3)	Responsabilidad Social I (3)	Responsabilidad Social II (3)	
	Matemáticas Discretas (4)			Probabilidades (5)	Estadística matemática (5)	Didáctica de las matemáticas (4)	Trabajo de Investigación (9)	
Cálculo I (7)	Cálculo II (5)	Cálculo III (6)	Sistemas numéricos (6)		Seminario (3)	Análisis (5)		
Geometría I (7)	Geometría II (5)	Geometría III (5)	Ecuaciones diferenciales (5)	Geometría IV (4)				
Algebra I (6)	Algebra II (5)	Algebra Lineal (6)	Física General I (4)	Física General II (4)	Teoría elemental de números (5)	Algebra abstracta I (5)	Algebra abstracta II (5)	
30	30	30	30	30	30	30	30	32

- Universidad de Tarapacá



- Universidad de Santiago de Chile

1° Año		2° Año		3° Año		4° Año		5° año	
Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5	Semestre 6	Semestre 7	Semestre 8	Semestre 9	Semestre 10
Introducción a la Pedagogía en Matemática y Computación	Sociología y Antropología de la Educación	Psicología del Aprendizaje Matemático	Desarrollo Curricular Matemático	Didáctica del Álgebra y del Cálculo	Fundamentos de la Matemática I	Didáctica de la Geometría y la Estadística	Metodología de la Investigación en Educación Matemática	Gestión Escolar y Aprendizaje Matemático	Electivo
Álgebra I	Álgebra II	Álgebra III	Calculo III	Estadística	Geometría II	Fundamentos de la Matemática II	Aplicaciones Didácticas de la Computación	Seminario de Título I	Seminario de Título II
Matemática Básica	Cálculo I	Cálculo II	Probabilidades Estadísticas	Geometría I	Medición y Evaluación en Educación Matemática	Historia y Epistemología de la Matemática	Psicometría	Práctica IV	
Computación I	Computación II	Sistemas Operativos y Redes	Modelamiento de la Información y Desarrollo de Software	Fundamentos de la Educación Matemática	Computación Educativa	Fundamentos de la Computación	Taller II de Herramientas Didácticas de la Matemática		
Inglés I	Inglés II	Inglés III	Práctica I	Inglés IV	Práctica II	Taller I de Herramientas Didácticas de la Matemática	Práctica III		
			Taller de Inglés I		Taller de Inglés II				

- Universidad de Playa Ancha

PRIMER AÑO

PRIMER SEMESTRE

Desarrollo Psicológico del Estudiante en Contextos Educativos
Lenguaje Matemático
Álgebra Clásica
Taller de preparación para la práctica inicial
Modelo Cartesiano de la Geometría Euclideana
Software para el Aprendizaje de la Matemática
Habilidades Comunicativas para el Desarrollo del Aprendizaje y la Enseñanza I

SEGUNDO SEMESTRE

Fundamentación del Saber Pedagógico
Aprendizajes Societales de la Educación
Sistemas Numéricos Referenciales
Cálculo Diferencial en una Variable
Pasantía inicial
Estadística Descriptiva y el Azar
Conceptos de Computación bajo un Modelo Matemático
Habilidades Comunicativas para el desarrollo del Aprendizaje y la Enseñanza II

SEGUNDO AÑO

TERCER SEMESTRE

Orientación Educacional para el Desarrollo de la Persona
Álgebra Lineal
Cálculo Integral y Series en una Variable
Taller de preparación para la práctica intermedia
Modelo Sintético de Geometría Euclideana Plana
Taller de Sistemas Operativos y Redes
Empleo de TICs para la Vida Académica

CUARTO SEMESTRE

Políticas y Gestión en Sistemas educativos para el Logro de Aprendizajes
Matemática Discreta
Cálculo Vectorial
Práctica Intermedia Integradora
Modelo Sintético de Geometría Euclideana del Espacio
Lenguajes y Paradigmas de Programación
Empleo de TICs para la Vida Profesional

TERCER AÑO

QUINTO SEMESTRE

Curriculum Educacional
Álgebra Abstracta
Análisis Numérico
Taller de preparación para la práctica avanzada
Transformaciones Geométricas
Gestión de Entornos de Aprendizajes Virtuales
Segunda Lengua (Nivel Elemental)

SEXTO SEMESTRE

Evaluación Educacional de Aprendizajes
Estrategias Creativas de Enseñanza y Aprendizaje
Modelamiento con Matemática Discreta
Modelos de Evolución
Taller de estrategias de microintervención
Elementos de la Topología para la Geometría
Entornos de Aprendizajes Personalizados y Redes Sociales
Segunda Lengua (Nivel Básico)

CUARTO AÑO

SÉPTIMO SEMESTRE

Enfoques Pedagógicos sobre los Saberes Disciplinarios
Didáctica del Álgebra y los Números
Inferencia Estadística
Taller de práctica avanzada mediada
Modelos de Geometría No Euclideana
Las TICs en los Procesos Educativos y de Gestión
Segunda Lengua (Nivel Intermedio I)

OCTAVO SEMESTRE

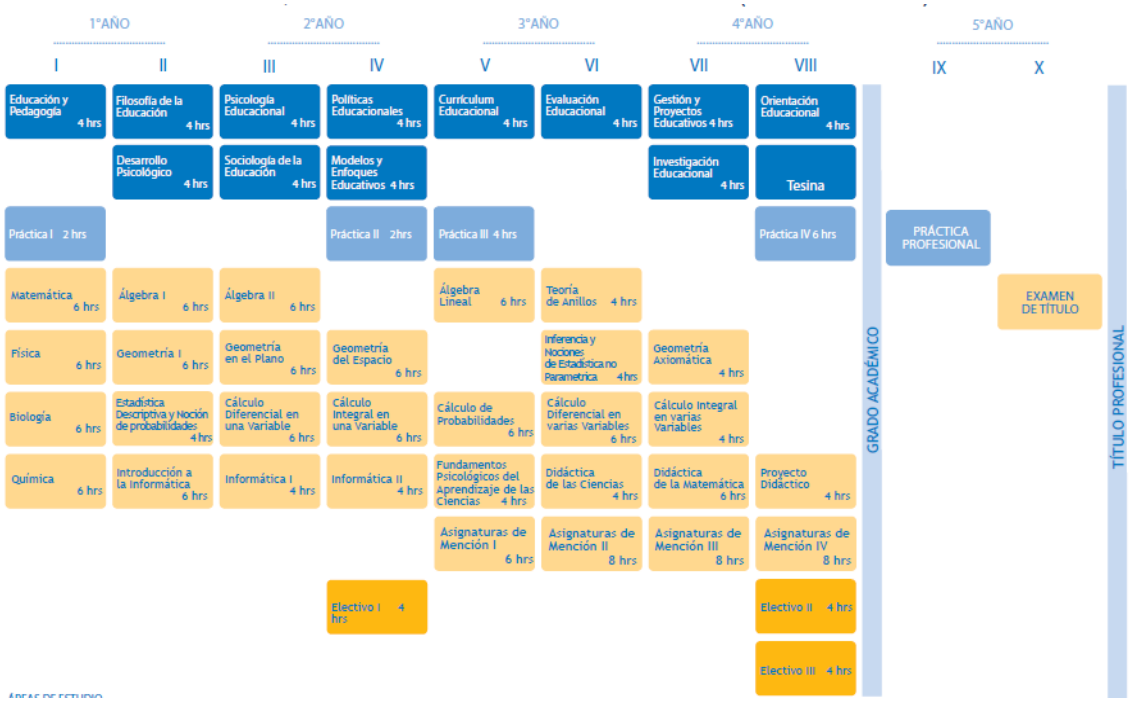
Investigación Educacional
Integración Sistémica de la Matemática en el Currículum Nacional
Didáctica del Azar y lo Determinístico
Taller de preparación para la práctica final
Didáctica de la Geometría
Proyecto Educativo TIC
Segunda Lengua (Nivel Intermedio II)

QUINTO AÑO

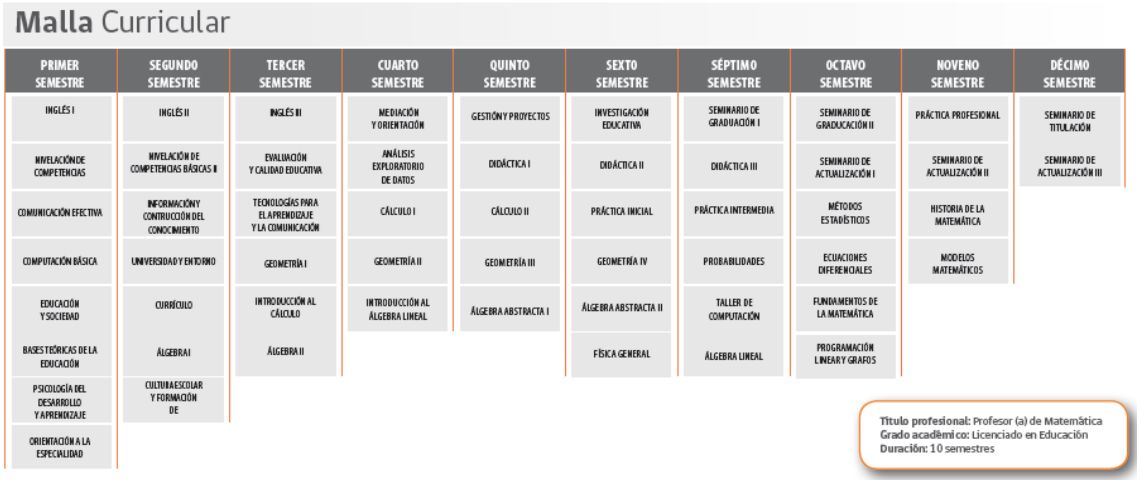
NOVENO SEMESTRE

Práctica Profesional
Trabajo de Síntesis Profesional
Sello Institucional

- Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación



- Universidad de Magallanes



- Universidad de la Serena

Asignaturas de la Carrera: PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

1 Semestre	2 Semestre	3 Semestre	4 Semestre	5 Semestre	6 Semestre	7 Semestre	8 Semestre	9 Semestre
Introducción a los Sistemas Numéricos	Relaciones y Funciones	Sucesiones, Polinomios y Matrices	Límites y Derivadas	Integrales y Cálculo Diferencial	Integrales Múltiples y Ecuaciones Diferenciales	Estadística y Probabilidades	Seminario de Licenciatura en Educación	Práctica Profesional
Introducción a la Computación	Trigonometría y Geometría Analítica	Geometría Euclidiana Plana	Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales	Sistema de Información	Geometría Euclidiana del Espacio	Matemática Aplicada	Proyecto de Educación Matemáticas	
Sociología Educacional	Lenguaje de Programación	Estructura de Datos y Algoritmos	Arquitectura de Computadores y Redes	Diseño Instruccional	Administración Educacional	Usos Didácticos de Software Matemático	Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas	
Desarrollo Profesional	Metodología del Diagnóstico Educacional	Psicología del Desarrollo y del Aprendizaje para Educadores	Psicología Educacional	Grupo, Anillo y Cuerpo	Informática Educativa	Metodología de la Investigación Educacional	Proyecto de Informática Educativa	
Enfoques y Estrategias para el Desarrollo del Trabajo Académico		Filosofía Educacional	Teoría Curricular	Teoría Evaluativa	Diseño de Situaciones Evaluativas	Aplicaciones del Álgebra Lineal	Orientación Educacional	
		Práctica de Observación	Construcción del Conocimiento en Educación	Práctica de Ayudantía				

- Universidad de los Lagos

SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5
Matemática Básica	Álgebra I	Álgebra II	Álgebra III	Cálculo II
Informática I	Geometría I	Geometría II	Cálculo I	Geometría III
Competencias Transversales I	Informática II	Computación I	Informática III	Computación II
Enfoques Socio-Antropológicos de la Educación	Competencias Transversales II	Políticas Educativas	Didáctica Informática I	Didáctica Informática II
Filosofía de la Educación	Currículum y Evaluación	Inglés II	Psicología del Aprendizaje	Estadística I
	Inglés I	Electivo I (Ed.)	Inglés III	Inglés IV

SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8	SEMESTRE 9	SEMESTRE 10
Cálculo III	Cálculo IV	Didáctica Matemática III	Electivo III (Mat.)	Práctica Profesional IV
Álgebra IV	Didáctica Matemática II	Práctica Profesional II	Electivo IV (Comp.)	Trabajo Final de Titulación
Didáctica Matemática I	Metodología de la Investigación	Seminario de Grado	Didáctica Matemática IV	
Estadística II	Práctica Profesional I		Práctica Profesional III	
Electivo II (Ed.)	Inglés VI			
Inglés V				

- Universidad de Concepción

- Universidad de la Santísima Concepción

SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5
Sociología Educacional	Psicología del Desarrollo	Psicología del Aprendizaje	Diseño Curricular	Fundamentos de la Evaluación Educacional
Introducción a la Pedagogía	Teorías Curriculares	Geometría del Espacio	Didáctica de la Geometría	Gestión Educacional
Fundamentos Filosóficos	Fundamentos Teológicos	Análisis Discreto	Azar y Probabilidades	Probabilidades y Estadística Inferencial
Aritmética	Geometría Plana	Práctica Pedagógica I	Álgebra Lineal	Didáctica del Álgebra
Introducción al Álgebra	Introducción a la Didáctica	Didáctica de la Aritmética	Análisis Continuo	Integrales y Aplicaciones
Comunicación Oral y Escrita	Introducción al Análisis	Inglés II	Inglés III	Práctica Pedagógica II
	Inglés I			Integración de Saberes

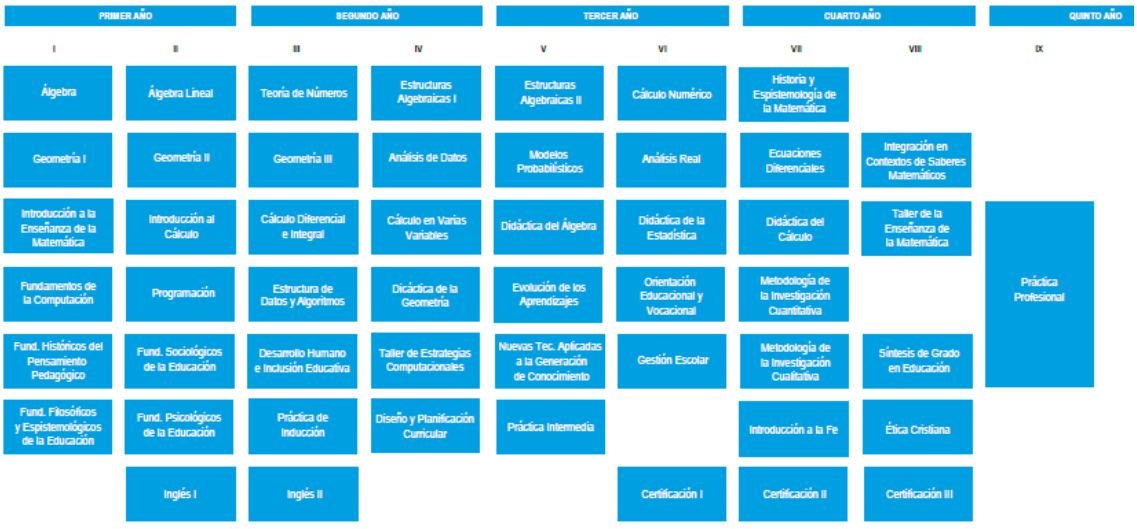
SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8	SEMESTRE 9
Orientación Educacional	Metodología de la Investigación Educacional	Seminario de Investigación	Práctica Profesional
Evaluación de los Aprendizajes	Ética Profesional	Métodos Numéricos	
Doctrina Social de la Iglesia	Modelos Matemáticos en Ciencias Sociales	Optativo de Profundización	
Didáctica de las Probabilidades y de la Estadística	Optativo de Profundización	Práctica Pedagógica IV	
Historia de la Matemática	Práctica Pedagógica III	Integración de Saberes	
Didáctica del Cálculo	Integración de Saberes		
Optativo de Profundización			

- Universidad Católica del Norte

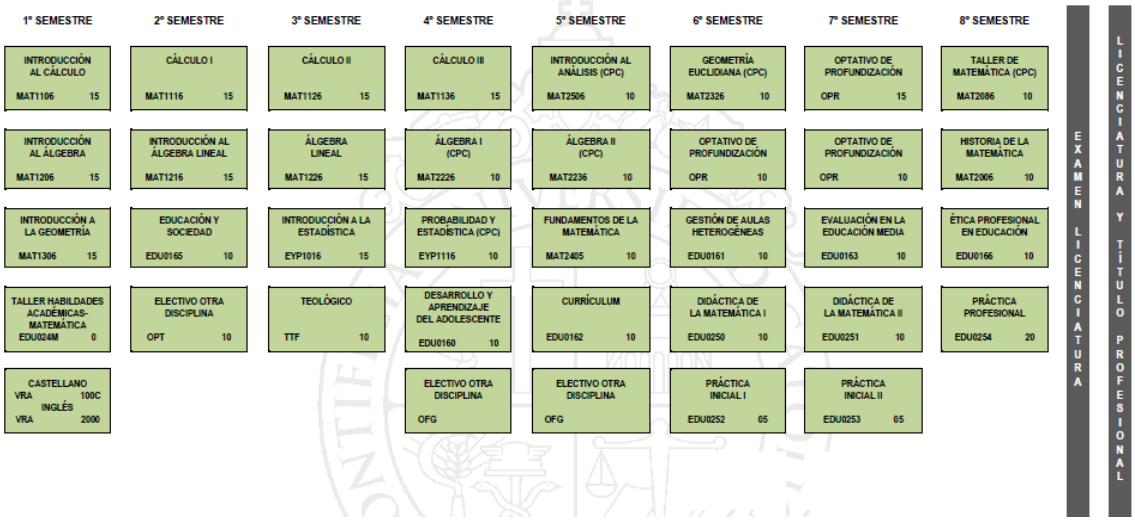
01 semestre	03 semestre	05 semestre	07 semestre	09 semestre
Cálculo Diferencial	Cálculo en Varias Variables	Programación	Análisis Real	Epistemología de la Matemática
Geometría Analítica y Trigonometría	Teoría de Números	Estadísticas y Probabilidades I	Orientación	Seminario de Investigación Pedagógica I
Álgebra	Teoría Curricular	Evaluación del Proceso Educativo	Diseño y Evaluación de Proyectos Pedagógicos y Didácticos	Ética y Moral Profesional
Demostraciones y Fundamentos	Psicología Educativa	Investigación Cuantitativa	Formación General Teológica	Integrador IV: Práctica Profesor Jefe y Profesor de Matemática Enseñanza Media
Comprensión del Fenómeno Educativo y Sociedad	Inglés I	Inglés III	Formación General Electiva I	Integrador V: Actividad de Titulación I
	Integrador I: Práctica de Observación	Integrador II: Práctica Colaboración en Aula Profesor de Matemática EM	Integrador III: Práctica Profesor de Matemática EM	

02 semestre	04 semestre	06 semestre	08 semestre	10 semestre
Cálculo Integral	Ecuaciones Diferenciales	Mecánica	Cálculo Numérico	Seminario de Investigación Pedagógica II
Álgebra Lineal	Estructuras Algebráicas	Estadísticas y Probabilidades II	Historia de la Matemática	
Geometría Euclidiana	Didáctica de la Geometría	Didáctica del Álgebra	Profesionalización y Calidad Docente	
Antropología Pedagógica	Planificación del Proceso Educativo	Vinculación con la Comunidad Educativa	Formación General Teológica	Integrador VI: Actividad de Titulación II
Psicología Evolutiva	Gestión de Aula	Investigación Cualitativa	Formación General Electiva II	
Formación General Teológica	Inglés II	Inglés IV		

- Universidad Católica del Maule

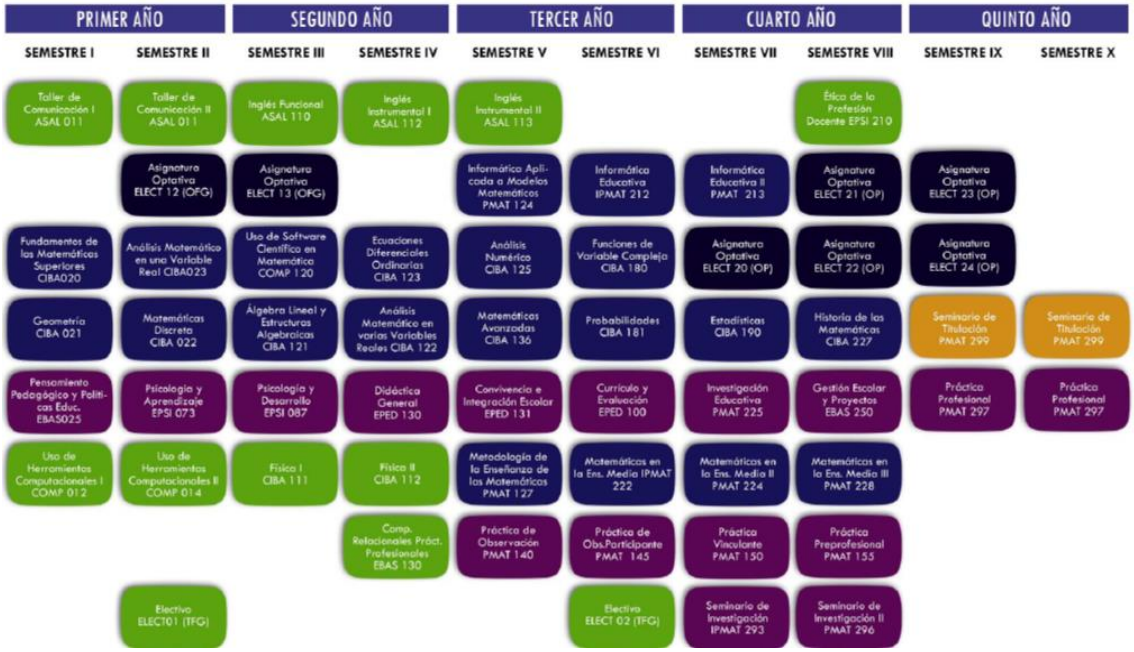


- Pontificia Universidad Católica de Chile



- Universidad del Bío Bío

- Universidad Austral de Chile



- Universidad de O'Higgins

10º	Electivo	4			Seminario de título II	6			Práctica Profesional II	20						
9º	Electivo	4			Seminario de título I	6			Práctica Profesional I	20						
8º	Interacciones efectivas para Enseñanza Matemática	3	Tecnologías educativas	3	Fundamentos y estructura de la Matemática	4	Enseñanza y aprendizaje de datos y azar	5	Autocuidado y bienestar profesional	4	Práctica III: introducción a la enseñanza	8	CFG	3		
7º	Sentido numérico	4	Modelamiento	5	Estudio de casos	5	Enseñanza y aprendizaje de geometría	5	Investigación y reflexión pedagógica II	4	Juventudes en sociedad	5	Inglés VI / CFG	3		
6º			Análisis III	4	Física	6	Enseñanza y aprendizaje de números y Álgebra	7	Investigación y reflexión pedagógica I	4	Práctica II: observación y acercamiento a los estudiantes	6	Inglés V / CFG	3		
5º	Diversidad e inclusión	5	Análisis II	4	Estimación y métodos numéricos	4	Probabilidades y estadística	5	Fundamentos del currículo de Matemática	4	Convivencia escolar	5	Inglés IV / CFG	3		
4º	Psicobiología del aprendizaje	5	Análisis I	4	Álgebra Lineal	4	Gestión y mejoramiento escolar	4	Evaluación y retroalimentación pedagógica	4	Práctica I: observación y acercamiento a la escuela	6	Inglés III / CFG	3		
3º	Teorías y prácticas para el aprendizaje	5	Geometría analítica	5	Algoritmos	4	Enseñanza y aprendizaje de la matemática	5	Probabilidades	5	Desarrollo de la matemática	3	Inglés II / CFG	3		
2º	Desarrollo juvenil	5	Sistemas numéricos	5	Geometría clásica	5	Álgebra elemental	4	Escritura académica	3	Historia y fundamentos de la educación en Chile	5	Inglés I / CFG	3		
1º			Números y operaciones	6	Geometría intuitiva	6	Variaciones, relaciones y funciones	5	Estadística	6	Introducción a la profesión docente	4	Curso de formación general (CFG)	3		

- Universidad de Chile

Primer Año

Asignaturas y Actividades Curriculares	Hrs.	Cred. Transf.	Sem.	Régimen
ALGEBRA Y GEOMETRIA I	7,5	10	I	Semestral
CALCULO I	7,5	10	I	Semestral
MECANICA I	7,5	8	I	Semestral
ALGEBRA Y GEOMETRIA II	7,5	9	II	Semestral
CALCULO II	7,5	9	II	Semestral
MECANICA II	7,5	8	II	Semestral
METODOS EXPERIMENTALES I	4,5	6	II	Semestral

Segundo Año

Asignaturas y Actividades Curriculares	Hrs.	Cred. Transf.	Sem.	Régimen
ALGEBRA LINEAL	7,5	10	III	Semestral
CALCULO EN VARIAS VARIABLES	7,5	8	III	Semestral
ELECTROMAGNETISMO	7,5	6	III	Semestral
METODOS EXPERIMENTALES II	4,5	6	III	Semestral
TOPICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES	6,0	5	IV	Semestral

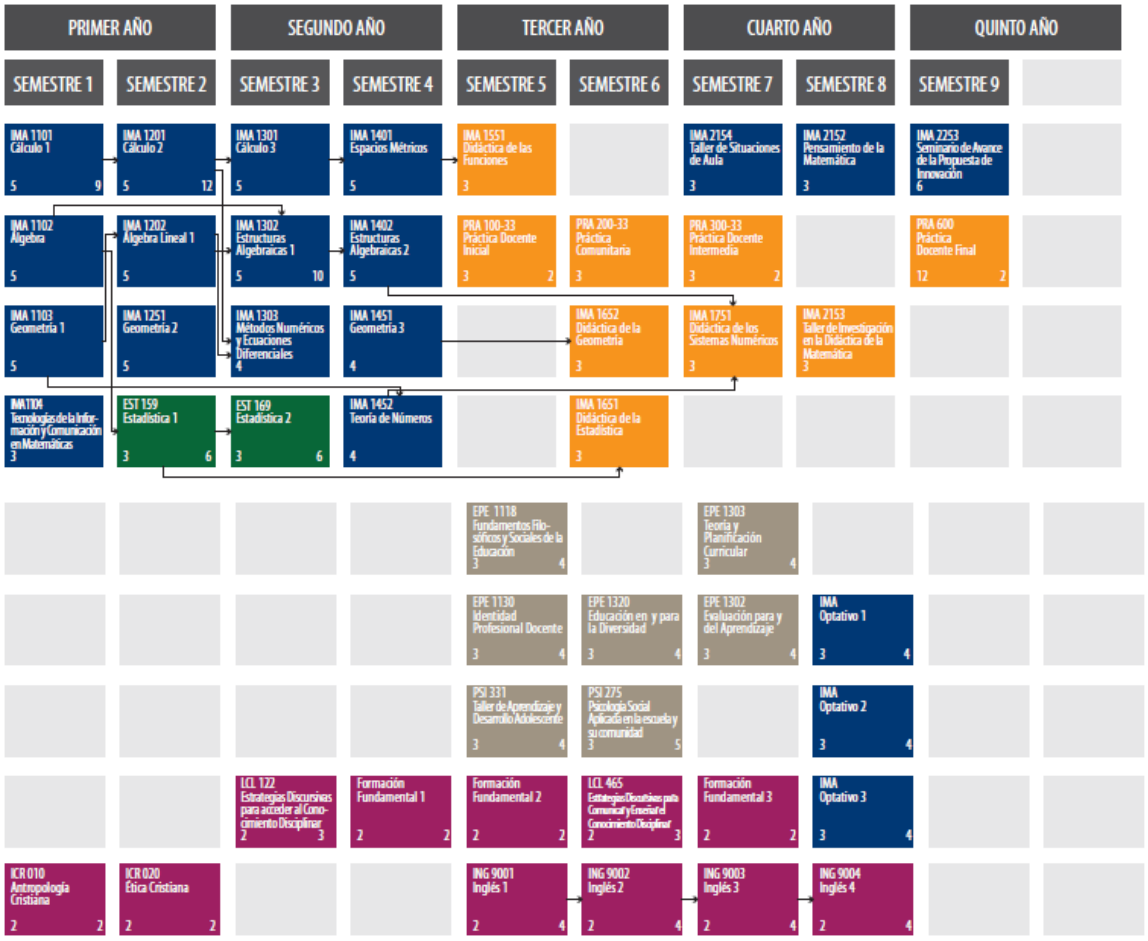
PROGRAMACION Y METODOS NUMERICOS	6,0	8	IV	Semestral
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	7,5	10	IV	Semestral
METODOS EXPERIMENTALES III	4,5	5	IV	Semestral
CURSO DE FORMACION GENERAL	3,0	2	IV	Semestral

Tercer Año

Asignaturas y Actividades Curriculares	Hrs.	Cred. Transf.	Sem.	Régimen
INGLES CIENTIFICO I	4,5	3	V	Semestral
OPTICA	4,5	8	V	Semestral
METODOS EXPERIMENTALES IV	6,0	6	V	Semestral
TEORIA DE NUMEROS	6,0	8	V	Semestral
ELECTIVO	4,5	5	V	Semestral
PROBALIDADES Y ESTADISTICA	6,0	8	VI	Semestral
INGLES CIENTIFICO II	4,5	3	VI	Semestral
TERMODINAMICA	6,0	6	VI	Semestral
HISTORIA DE LA CIENCIA	3,0	3	VI	Semestral
SISTEMAS NUMERICOS	4,5	8	VI	Semestral
CURSO FORMACION GENERAL	3,0	2	VI	Semestral

Cuarto Año

Asignaturas y Actividades Curriculares	Hrs.	Cred. Transf.	Sem.	Régimen
GEOMETRIA	6.0	8	VII	Semestral
FISICA MODERNA	7,5	8	VII	Semestral
BASES TEORICAS DE LA EDUCACION	3,0	4	VII	Semestral
APRENDIZAJE Y COGNICION I	3,0	4	VII	Semestral
PRINCIPIOS DE CURRICULO	1,5	2	VII	Semestral
DIDACTITA GENERAL Y EVALUACION	3,0	4	VII	Semestral
TALLER DE INVESTIGACIÓN PEDAGÓGICA Y PRÁCTICA PROFESIONAL I	12	15	VIII	Semestral
APRENDIZAJE Y COGNICION II	1,5	3	VIII	Semestral
SOCIOLOGIA DE LA EDUCACION	1,5	3	VIII	Semestral
EDUCACION Y REFORMA	1,5	3	VIII	Semestral
INVESTIGACION PEDAGOGICA	1,5	3	VIII	Semestral
ETICA	1,5	3	VIII	Semestral

Quinto Año
Segunda Etapa: Licenciatura en Educación y Título de Profesor en Ed. Media en Matemáticas y Física

- Pontificia Universidad Católica de Valparaíso