

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación



**Enseñanza de las Transformaciones Isométricas y Teselaciones en
aulas con Programa de Integración Escolar: experiencia desde el
Diseño Universal del Aprendizaje**

Autora: Ana Francisca Benítez Fajardo

**Profesores Guía:
Rafael Labarca Briones
Carlos Vanegas Ortega**

Tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática

Santiago - Chile

2024

RESUMEN

Este trabajo de investigación se enmarca en la educación matemática de estudiantes que cursan octavo año básico, en escuelas con programa de integración escolar (PIE), específicamente en el concepto de transformaciones isométricas y teselaciones pertenecientes al eje de Geometría.

El foco de la investigación es analizar la articulación existente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático, contemplando las adecuaciones curriculares vigentes y otorgar una secuencia de aprendizaje que propicie la diversificación de la enseñanza en aulas inclusivas.

Para ello, la pregunta de investigación es cómo la diversificación de la enseñanza en el aula de matemática con PIE favorece al aprendizaje de la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones.

Por lo anterior, el objetivo general es identificar las maneras como la diversificación de recursos de aprendizaje permite el logro de aprendizajes en los estudiantes pertenecientes a aulas inclusivas.

La metodología que se utilizó es Cualitativa de tipo Exploratorio/Descriptivo.

Se escogieron dos colegios de la comuna de Providencia, Región Metropolitana de Chile, los cuales cuentan con PIE.

Posterior a ello, se realizó una secuencia de enseñanza del objeto matemático de estudio en que priman los procesos de observación y experimentación, incentivando en los/las estudiantes la visualización y posterior modelación de conceptos matemáticos.

La secuencia de enseñanza incluye recursos de aprendizaje que propician la diversificación de la enseñanza. Como resultado, se obtiene que la utilización de diversas estrategias de enseñanza y recursos de aprendizaje permitieron la apropiación de los contenidos en todos los estudiantes que integran el aula, nivelando los saberes de los grupos de estudio y siendo la estrategia de trabajo en equipo junto con el uso de material concreto la que evidenció mejores resultados en los aprendizajes de los contenidos de la unidad.

Palabras claves: inclusión, diversificación de la enseñanza, Diseño Universal de Aprendizaje, Transformaciones Isométricas, Teselaciones.

Dedicada a mi hijo, Vicente, quien es mi inspiración

Agradecimientos

Quiero agradecer a Guillermo, mi compañero de vida, quien me ha motivado a seguir en el camino del estudio, creyendo en mí y apoyándome, aun cuando sentía que ya no podría con todo; y haciéndome ver y recordándome, en cada momento que lo necesité, mis capacidades y talentos, para así, retomar el rumbo, cuando sentía que el cansancio me superaba.

A mi hijo Vicente, quien me motiva a superarme cada día, y ha generado en mí el interés por mejorar mis conocimientos en muchos aspectos, uno de ellos, en mis prácticas pedagógicas, hacia la diversidad que se puede encontrar en un aula.

También quiero agradecer a mis padres por inculcar en mí el valor del estudio, esfuerzo y trabajo desde la niñez. También por su apoyo incondicional en todas las metas que me he fijado en la vida, en este caso, el seguir con mis estudios de posgrado, en el que, me han alentado a cumplirlo y no flaquear en el camino, pese a las adversidades que pudiesen haber surgido.

Por último, quiero agradecer a mis profesores Rafael Labarca y Carlos Vanegas, por todo el tiempo, esfuerzo y dedicación que han tenido conmigo, para poder lograr el término de este trabajo. Su apoyo, comprensión y palabras de aliento, cuando lo he necesitado, han sido indispensables para el logro de mis objetivos académicos. Ha sido un verdadero privilegio contar con su guía y ayuda.

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo I: Problema de Investigación	1
1.1 Diversificación de la enseñanza	1
1.2 Contexto del problema	2
1.3 Delimitación del problema	7
1.4 Preguntas de la investigación	9
1.5 Objetivos	9
1.6 Supuesto de Trabajo	10
Capítulo II: Marco Teórico	11
2.1 Estudio de los Objetos Matemáticos	11
2.2 Aspectos Históricos de la Geometría	11
2.3 Transformaciones Isométricas	12
2.4 Rotación y Composición de Rotaciones	13
2.5 Traslación	15
2.5.1 Traslación de Coordenadas	15
2.5.2 Composición de Traslaciones	16
2.5.3 Vectores	16
2.6 Simetría	18
2.6.1 Simetría respecto al origen	18
2.6.2 Simetría respecto a un punto cualquiera	19
2.7 Reflexión	19
2.7.1 Reflexión respecto al Eje X	20
2.7.2 Reflexión respecto Eje Y	20
2.7.3 Composición de Simetrías	21
2.7.4 Composición de Reflexiones	23
2.8 Teselación	24
2.8.1 Aspectos Históricos de las Teselaciones	24
2.8.2 Tipos de Teselaciones	27
2.9 Estrategias y Recursos para Diversificar la Enseñanza de la	33
Matemática	
2.10 Diseño Universal de Aprendizaje (D.U.A)	35
Capítulo III: Marco Metodológico	38
3.1 Introducción	38

3.2 Etapas de la Investigación	38
3.3 Participantes	41
3.4 Diseño Metodológico	42
3.4.1 Recursos para el aprendizaje	42
3.4.2 Diseño de la secuencia de enseñanza y descripción de las actividades	43
3.4.3 Incorporación del D.U.A.	68
3.4.4 Aplicación de la secuencia de enseñanza	70
3.5 Plan de análisis de datos	70
Capítulo IV: Análisis de Resultados	73
4.1 Hallazgos Sesión 1: Conceptos Básicos	73
4.2 Hallazgos Sesión 2: Traslación	79
4.3 Hallazgos Sesión 3: Rotación	86
4.4 Hallazgos Sesión 4: Reflexión	92
4.5 Hallazgos Sesión 5: Teselación	99
4.6 Síntesis de los análisis de las sesiones	105
4.7 Resultados de encuesta a estudiantes	105
4.8 Interpretación de resultados de encuesta a estudiantes	108
4.9 Resultados e interpretación de cuestionario a docente	110
Capítulo V: Conclusiones, Limitaciones y Recomendaciones	113
5.1 Conclusiones	113
5.2 Limitaciones y Recomendaciones	114
Bibliografía	116
Índice de figuras	118
Índice de tablas	119
Anexos	120

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Diversificación de la Enseñanza

Para el/la profesor/a de matemática, es importante manejar los procesos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de su disciplina, para todos los estudiantes que integren su aula. Actualmente con el Programa de Integración Escolar, impulsado por el Ministerio de Educación el año 2009, el docente se ve enfrentado a un aula con la diversidad propia de los estudiantes, pero a ello se suman las características específicas de los estudiantes con necesidades educativas especiales (N.E.E.), entendiéndolo como “aquel que precisa de ayudas y recursos adicionales, ya sea humanos, materiales o pedagógicos, para conducir su proceso de desarrollo y contribuir al logro de los fines de la educación”(Mineduc, 2009, p.8).

En el año 2015, se publicó el documento sobre la Diversidad de la Enseñanza, Decreto 83, en el cual se dan criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con necesidades educativas especiales de Educación Parvularia y Educación Básica (no existen aún para enseñanza media). En este documento se define que las necesidades educativas pueden ser de carácter permanente o transitoria, definiendo la primera de la siguiente forma: “son aquellas barreras para aprender y participar, diagnosticadas por profesionales competentes, que determinados estudiantes experimentan durante toda su escolaridad y que demandan al sistema educacional la provisión de apoyos y recursos adicionales o extraordinarios para asegurar su aprendizaje escolar. Por lo general, las N.E.E. de carácter permanente se presentan asociadas a discapacidad visual, auditiva, disfasia, trastorno autista, discapacidad intelectual y discapacidad múltiple” (Decreto N° 83/2015, Mineduc, 2015, p.16)

El enfoque denominado Diseño Universal del Aprendizaje (DUA) desarrollado por el Centro de Tecnología Especial Aplicada (CAST), parte de la premisa de que “la diversidad es la norma y pretende corregir la principal barrera para aprender y participar que enfrentan muchos estudiantes, como son los planes de estudio diseñados e implementados de manera uniforme, sin considerar las diferencias” (CAST, 2008).

Con respecto a lo expuesto, los documentos de Mineduc otorgan una guía para que las adecuaciones curriculares a estudiantes con N.E.E. alcancen estándares generales, pero no se refiere a cómo comunicar estos aprendizajes a grupos específicos, considerando las diferencias y características particulares, como también, qué herramientas se le otorga al profesorado para el éxito de la enseñanza para todos los estudiantes.

Por lo descrito anteriormente, es relevante estudiar la diversificación de la enseñanza matemática en aulas inclusivas, principalmente, los recursos de aprendizaje que se pueden implementar para mejorar la comunicación y comprensión de los contenidos en los estudiantes.

Además, es relevante investigar cómo las actividades diversificadas en el aula

regular con PIE, sustentadas en el D.U.A., contribuyen a la adquisición de conocimiento y pensamiento matemático para todos los estudiantes que conforman el aula. Para abordar esto, se busca generar en esta tesis, una secuencia de enseñanza a los estudiantes, enfocada al concepto de Transformaciones Isométricas y Teselaciones, que diversifique la enseñanza del contenido matemático a través del uso de distintos recursos de aprendizaje, priorizando para ello diversos tipos de representación de los objetos geométricos y formas de transmitir el contenido de parte del docente.

1.2 Contexto del problema

Para medir los aprendizajes de los/as estudiantes en Chile, se han implementado una serie de evaluaciones estandarizadas, como lo es el SIMCE. Al analizar los resultados de dicha evaluación, se ha reflejado que los/las estudiantes poseen grandes falencias en la asignatura de Matemática, es así como, por ejemplo en la última evaluación SIMCE del año 2022, la agencia de la educación indica que: “en cuarto básico se observa una baja significativa de 10 puntos en el promedio nacional, con respecto al 2018, y en segundo medio el puntaje promedio entre 2018 y 2022, desciende en 12 puntos” (Resultados Educativos Nacionales 2022, 2023, p.29).

Los resultados, son analizados bajo tres categorías que conforman los estándares de aprendizaje (Decreto Supremo N°158 Estándares para 8°Básico, 2022, p.8) cada una con su descripción:

- Insuficiente: Los estudiantes que se ubican en el nivel de aprendizaje insuficiente no logran los aprendizajes requeridos para alcanzar el nivel de aprendizaje elemental. En la prueba SIMCE, estos estudiantes muestran escasa evidencia de que comprenden los conceptos y procedimientos elementales de números, álgebra y funciones, geometría, y probabilidad y estadística propios del periodo evaluado; asimismo, demuestran un escaso dominio de las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar. Por lo general, solo logran aplicar algunos conocimientos y habilidades en situaciones directas y en problemas que se han practicado extensamente y que ofrecen algún tipo de mediación y apoyo.
- Elemental: Los estudiantes que alcanzan el nivel de aprendizaje elemental han adquirido de manera parcial los conocimientos y habilidades matemáticas definidas en las Bases Curriculares para el periodo evaluado. En la prueba SIMCE, estos estudiantes muestran que comprenden conceptos y procedimientos elementales de números, álgebra y funciones, geometría, y probabilidad y estadística propios del periodo evaluado. Asimismo, generalmente muestran que son capaces de aplicar dichos conocimientos y las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar en situaciones directas y en problemas rutinarios con enunciados breves en los que los datos, conceptos y operaciones a utilizar se desprenden de forma directa.

- **Adecuado:** Los estudiantes que alcanzan el nivel de aprendizaje adecuado han adquirido de manera satisfactoria los conocimientos y habilidades matemáticas definidas en las Bases Curriculares para el periodo evaluado. En la prueba SIMCE, estos estudiantes muestran que comprenden conceptos y procedimientos básicos de números, álgebra y funciones, geometría, y probabilidad y estadística propios del periodo. Asimismo, generalmente muestran que son capaces de aplicar dichos conocimientos y las habilidades matemáticas de resolver problemas, representar, modelar y argumentar en situaciones directas y en problemas rutinarios en los que se requiere seleccionar datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado.

Los resultados obtenidos en el último SIMCE (2022) de Matemática, han sido los más bajos de la última década, así lo podemos ver en la gráfica de la tendencia regional (R.M.)- nacional con respecto a los resultados obtenidos en Matemática por estudiantes de cuarto año básico (figura 1), comparado a años anteriores, junto con los estándares de aprendizaje:



Figura 1: Resultados Educativos 2022 Región Metropolitana, 2023, p.16

Como muestra la figura 2, esto se repite de forma más crítica en los resultados obtenidos por los estudiantes de segundo año medio, en donde se ve un mayor porcentaje de estudiantes (sobre el 50%) en un nivel insuficiente:

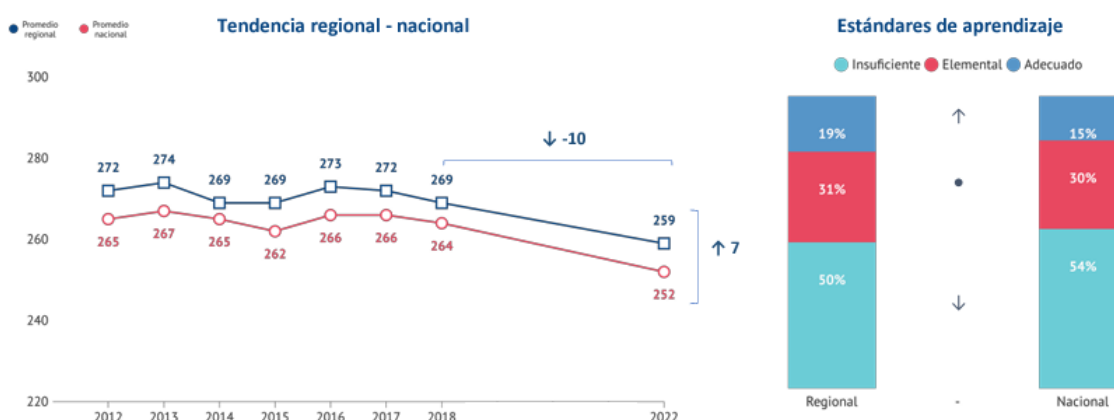


Figura 2: Resultados Educativos 2022 Región Metropolitana, 2023, p.19

Esto lleva a cuestionar qué es lo que impide que los estudiantes logren niveles adecuados en sus aprendizajes y cuáles pueden ser las barreras que propician que éstos resultados estén yendo a la baja. Cabe recordar que en ésta evaluación también son incluidos los estudiantes que participan en el PIE de los colegios.

Una de las barreras de aprendizaje estudiadas en el área Matemática es la uniformidad de la transmisión de los contenidos, en contraposición, a lo promovido actualmente con la diversificación de la enseñanza. Es así como en el área de la Geometría, por ejemplo, es común que, al hacer revisión de literatura, nos percatemos del uso de solo polígonos regulares para representar figuras, como expone Flores et al. (2015, p.263) “Los conceptos geométricos son introducidos mediante unas nociones básicas (definición del concepto) y algunas figuras que constituyen ejemplos prototípicos y que le sirven de apoyo. Ello puede provocar una comprensión parcial de los escolares de esos conceptos, asociada exclusivamente a las figuras que han visto con mayor frecuencia”

Siguiendo la misma línea, con respecto a la transmisión de contenidos geométricos, podemos encontrar, en un estudio de Araya y Ballesterro (2010, p.125) “La geometría se presenta a los/as estudiantes como un conjunto de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejado de su realidad y donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación, consecuentemente, la geometría se percibe como poco importante, ya que no es aplicable a la vida cotidiana, cuando la realidad es otra”

Con respecto a las dificultades señaladas anteriormente, y enfocado al objeto matemático de estudio que son las Transformaciones Isométricas y Teselaciones, en un estudio de Herrera, et al. (2010, p.423) “se busca, no solo resaltar la importancia del trabajo geométrico de forma innovadora dentro del aula si no propiciar espacios de aprendizaje donde el arte permita una sensibilización de tipo espacial en los estudiantes por medio de nociones trabajadas en las teselaciones como lo son los giros, las traslaciones de figuras bidimensionales y otras transformaciones geométricas de congruencia, donde las propiedades de las figuras no cambian”. Uribe et al. (2014, p.140) también se refiere al desarrollo de habilidades geométricas en el estudio de las teselaciones: “el propósito fundamental en el estudio de las teselaciones, en los niños, es desarrollar las habilidades del pensamiento espacial (coordinación visomotriz, coordinación figura fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, relaciones de percepción espacial, discriminación visual y memoria visual) y la construcción de conocimientos, nociones y conceptos geométricos euclidianos, como por ejemplo, línea, vértices, polígonos; topológicos, como región, interior, frontera; proyectivos e isometrías propias del plano euclidiano”.

Justamente, aquellas habilidades de pensamiento espacial, no se encuentran declaradas en el contenido de la unidad. Si analizamos lo curricular, de acuerdo al Programa de estudio de Matemática (2016), el concepto de Transformaciones Isométricas y composición de transformaciones isométricas es abordado en

octavo año básico, poniendo énfasis en la búsqueda de regularidades según los movimientos de figuras que se generen en el plano cartesiano. Los objetivos de aprendizaje son específicamente:

OA13 (Basal)	OA14: (Complementario)
Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: • Los vectores para la traslación. • Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. • Los puntos del plano para las rotaciones.	Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Tabla 1: OA13 y OA14 de la secuencia de enseñanza

Con respecto a las habilidades, el programa de estudio se enfoca en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras 2D y al análisis de regularidades que se dan en la composición de transformaciones isométricas.

Analizando el texto del estudiante vigente, podemos notar que los alumnos se ven enfrentados a una serie de actividades en las que se le sigue dando prioridad a lo aritmético y algebraico, en actividades repetitivas, lo que no desafía al estudiante a argumentar, a favorecer el razonamiento lógico, a relacionar el contenido con su vida diaria o a optimizar de manera concreta su percepción espacial.

Esto, refleja que, si bien el programa de estudio de octavo básico aborda el contenido de Transformaciones Isométricas y Traslaciones, *faltan actividades que diversifiquen la forma de tratar los contenidos* hacia aprendizajes más desafiantes y significativos para todos los estudiantes, incluyendo a los de comunidades específicas, y haciendo que argumenten sobre las soluciones dadas, relacionándolo más a su vida cotidiana, sus intereses y a su entorno.

Por lo que se presenta la necesidad de diversificar las estrategias de enseñanza y los recursos de aprendizaje dados a los estudiantes, sobre todo, para no generar barreras de aprendizajes hacia estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad y evitar así también, la deserción de los estudiantes en el sistema.

Es así como es necesario analizar la presencia de discapacidad en población escolar. En el III Estudio Nacional de la Discapacidad (2022), se llegó a que, en niños y adolescentes de 2 a 17 años de edad, la prevalencia de discapacidad alcanza el 14.7%, lo que corresponde a 587.709 personas. La figura 3 muestra el porcentaje en éste rango etario según el grado de discapacidad:

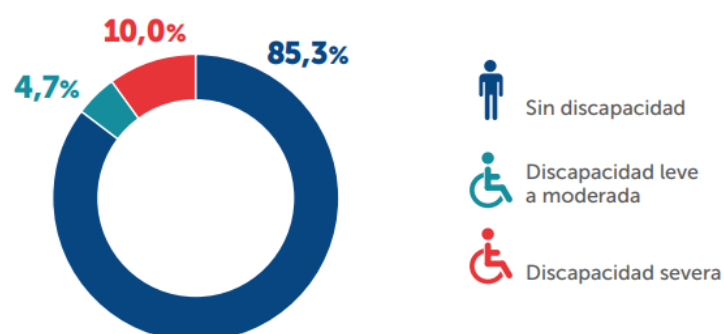


Figura 3: III Estudio Nacional de la Discapacidad 2022 en Chile, SENADIS, p.45

En cuanto a la asistencia a centros educacionales, del total de niños y adolescentes con discapacidad entre 2 a 17 años de edad en Chile, el 96.7% asiste a un establecimiento educacional. La tasa neta de asistencia según el nivel educacional en aquel rango etario de personas con y sin discapacidad se muestra en la figura 4.



Figura 4: III Estudio Nacional de la Discapacidad 2022 en Chile, SENADIS, p.64

Se observa que en todos los niveles de escolaridad los estudiantes con discapacidad poseen una tasa neta de asistencia menor a sus pares sin discapacidad, siendo la educación parvularia la que presenta un menor porcentaje de escolaridad en niños en situación de discapacidad, comparado con sus pares sin discapacidad, lo que se nivela un poco en la educación básica, pero vuelve a decaer en la educación media, en que el 81,2% de los adolescentes en situación de discapacidad asisten a centros educativos.

La iniciativa de incluir el Programa de Integración Escolar en colegios que reciben subvención del estado, ha aportado en que más estudiantes con discapacidad, se inserten en el aula regular, evitando en algunos casos la deserción escolar, pero, a la vez se ha evidenciado la falta de recursos materiales y humanos para hacer frente a un programa en continua expansión, en donde se debe atender a estudiantes con NEE muy diversas.

También existe una falta de orientaciones didácticas, para trabajar la matemática en aulas inclusivas, que aporten a atender las distintas formas de comprender los contenidos, no solo de estudiantes con o sin discapacidad, sino también de toda la diversidad de estudiantes presentes en el aula.

1.3 Delimitación del Problema

Históricamente, en la práctica pedagógica, el docente se ha visto enfrentado a la diversidad de estudiantes que integran el aula, lo que va ligado a la busca de estrategias de enseñanza que atiendan a esas diversidades, relacionadas con los saberes de sus estudiantes, necesidades educativas especiales, contexto cultural y social en que se desenvuelve la comunidad educativa.

Junto a esto, el enfoque educativo ha evolucionado, desde una enseñanza tradicional, en la que estudiantes con necesidades educativas especiales, en la mayoría de las ocasiones, eran excluidos del sistema o presentaban un nivel bajo de escolaridad; al surgimiento de escuelas especiales en donde se reconoce el derecho de todas las personas a recibir educación. Luego, al surgir la necesidad de unificar los procesos formativos, se originó un plan para escuelas, que busca la integración escolar, en donde se incorpora a estudiantes con necesidades educativas especiales a las escuelas regulares, para mejorar el acceso de todos a la educación, y, por consiguiente, a los conocimientos y habilidades declaradas en el currículo nacional.

Actualmente el enfoque está orientado hacia una escuela inclusiva, que busca que todos los alumnos formen parte de un mismo sistema educativo, no solo atendiendo a necesidades permanentes o transitorias que puedan tener los estudiantes con discapacidad, sino que, también atendiendo a los diferentes entornos sociales, intereses, ritmos y estilos de aprendizaje que puedan tener los estudiantes que conforman la comunidad.

El Ministerio de Educación de Chile define la educación inclusiva como “un camino formativo sustentado en el reconocimiento de la igualdad de todas las personas, en dignidad y en derechos, en el respeto a las diferencias y la valoración de cada integrante de una comunidad educativa, poniendo énfasis en aquellos estudiantes que enfrentan mayores barreras para la participación y los aprendizajes durante su trayectoria educativa” (Marco General de Educación Inclusiva, 2023, p.21).

La transición hacia una educación inclusiva no es un proceso sencillo, ya que implica el abandono de prácticas pedagógicas que eran validadas en el sistema tradicional, y el paso a la adquisición de nuevas estrategias de enseñanza que promuevan la diversidad en el aprendizaje de los contenidos vigentes. De aquí se desprende que, una de las dificultades asociadas a la creación de la escuela inclusiva es la formación docente, pues, para llevar a cabo una clase que atienda a la diversidad de todos los estudiantes se requiere de conocimientos adicionales y cambios en las prácticas instauradas.

En éste sentido, Jordan et al. (2009, p.535) exponen que frecuentemente se argumenta que la falta de conocimiento por parte de los profesores de aula, atribuida a la falta de formación, es una de las principales barreras para la inclusión. Sin embargo, los intentos de identificar la naturaleza real de los conocimientos necesarios para que el profesor lleve a cabo su práctica educativa inclusiva suelen ser escasos.

Es así, como en la práctica, podemos ver que la formación del docente de matemática carece, o se incluyen de manera escasa, planes relativos a la instrucción de la disciplina en aulas inclusivas, que orienten hacia los conocimientos necesarios que se requieren para enseñar a estudiantes con necesidades educativas permanentes (mayormente asociadas a una discapacidad sensorial) o transitorias; además de la diversidad que puede existir en estudiantes que no estén incluidos en estos dos grupos, pero que pueden también requerir apoyos adicionales para lograr los aprendizajes. Por lo que existe una brecha entre los planes formativos y las expectativas del rol del docente de matemática de aulas con programas de integración escolar.

Otro factor relevante en la dinámica del aula matemática en colegios con PIE, es la labor de los profesionales de educación diferencial, que apoyan el trabajo del docente de matemática en el aula, a través de trabajo colaborativo. Pero este apoyo se ve limitado por la falta de preparación en el área matemática en su formación docente.

Esto se contrapone con los planes y programas vigentes, que exigen que el docente de matemática utilice estrategias diversificadas en el aula, que promuevan la inclusión y que éstas sean abordadas desde un trabajo colaborativo con el docente diferencial del nivel; pero no se otorgan las herramientas necesarias para hacerlo desde la base de los planes de formación docente. De aquí podemos distinguir la necesidad de establecer elementos en común en la matemática educativa y en la educación especial, que otorguen un marco de referencia para avanzar en prácticas inclusivas en el aula.

Por todo lo expuesto anteriormente, el docente de matemática se ve desafiado a desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje que sean efectivas en el aula inclusiva; para ello, las estrategias deben estar estructuradas con actividades en las que se haga uso de diversos materiales y recursos didácticos, entendiendo éstos como todos los recursos que puede usar el docente como soporte y apoyo a la comprensión de los contenidos. Es así como “los recursos para el aprendizaje cumplen una función mediadora entre la intencionalidad educativa y el proceso de aprendizaje, entre el educador y el educando.” (Parcerisa, 2007, p. 5)

Los materiales y recursos didácticos entonces, proporcionan una herramienta de apoyo para el aprendizaje matemático de los estudiantes. El tipo de recurso y la forma de uso, será lo que el docente deberá definir de acuerdo a las necesidades detectadas en cada contexto educativo.

1.4 Preguntas de la Investigación

La pregunta que se espera responder con la investigación es:

¿Cómo la diversificación de los recursos de aprendizaje en el aula de matemática con PIE logra favorecer la comprensión de los contenidos de la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones de todos los estudiantes?

Las preguntas secundarias de la investigación son:

¿Cuál(es) recurso(s) de enseñanza genera(n) un mayor nivel de logro en los aprendizajes de la unidad en estudiantes del PIE?

¿Cuál(es) recurso(s) de enseñanza genera(n) un mayor nivel de logro en los aprendizajes de la unidad en estudiantes que no pertenecen al PIE?

¿Cuál es la apreciación que los estudiantes de aula regular con PIE otorgan al uso de diversos recursos de aprendizaje en la enseñanza de la unidad?

1.5 Objetivos

El objetivo general del trabajo de investigación es: Identificar recursos de aprendizaje y estrategias de enseñanza, que favorezcan los aprendizajes en la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones, de todos los estudiantes de octavo básico en los colegios de estudio, los cuales están adscritos al Programa de Integración Escolar.

Los objetivos específicos que se han propuesto abordar son:

- Determinar los tipos de recursos que favorecen los aprendizajes de los estudiantes de octavo básico del PIE en los colegios de estudio.
- Determinar los tipos de recursos que favorecen los aprendizajes de los estudiantes de octavo básico que no pertenecen al PIE en los colegios de estudio.
- Diseñar una secuencia de enseñanza en el contenido de Transformaciones Isométricas y Teselaciones de octavo año básico, que contribuya a adquirir aprendizajes en los contenidos de la unidad en los colegios de estudio que poseen Programa de Integración Escolar.
- Caracterizar diferencias en los niveles de logro de los aprendizajes en la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones en los colegios de estudio que poseen Programa de Integración Escolar de acuerdo a las características de los estudiantes pertenecientes a cada establecimiento.

1.6 Supuesto de Trabajo

El supuesto del trabajo de investigación es:

La diversificación de recursos de aprendizaje, en la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones, favorece la comprensión de los contenidos en los estudiantes de octavo básico, en los colegios de estudio adscritos al PIE, lo que permite la inclusión y el aprendizaje colaborativo en todos los integrantes de la clase, nivelando los saberes matemáticos.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

2.1 Estudio de los Objetos Matemáticos

Para definir los objetos matemáticos presentes en el estudio, se analizó la unidad de Geometría de octavo básico, específicamente, los objetivos de aprendizaje 13 y 14 del programa de estudio vigente. Con ello, la investigación contempla los objetos matemáticos de: Traslación, Rotación, Reflexión y Teselación.

Además, para abordar de manera completa la unidad, también se deben tener en consideración conceptos asociados a los objetos de estudio nombrados anteriormente, como lo son los de plano cartesiano, punto, vector, polígono, recta, entre otros.

En los puntos siguientes, se detallará cada objeto matemático de estudio con sus propiedades, comenzando por aspectos teóricos de la unidad.

2.2 Aspectos Históricos de la Geometría

La palabra Geometría proviene del griego *geo* “tierra” y *metrein* “medir”, y podemos entenderla como “medida de la tierra”. Las evidencias encontradas en diversos documentos históricos (tablillas de Susa, papito de Ahmes, papiro Rhind) indican que los primeros geómetras se interesaban en problemas prácticos como: la medida del tamaño de los campos, trazar ángulos en la construcción de templos y monumentos, o medir los terrenos para volver a determinar sus límites (luego de las periódicas inundaciones del río Nilo, en el caso de los egipcios). Este tipo de problemas dieron origen, aunque de una manera netamente práctica, a los primordios de la geometría en el antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia (posiblemente alrededor del 2000 a.C.).

Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debía ser construida utilizando *solo una regla de borde recto y un compás*. Para esto, los griegos se basaron en los conocimientos de las civilizaciones egipcia y mesopotámica. La Escuela Griega dio un importante paso en la abstracción al considerar los objetos como entes ideales; por ejemplo, un cuadrado cualquiera, en lugar de un terreno cuadrado, un círculo en lugar del ojo de un pozo. Tres famosos problemas de construcciones geométricas, que datan de la época griega, se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron solucionarlos: la duplicación del cubo (que consiste en construir un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado), la cuadratura del círculo (que consiste en construir un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado en un número finito de pasos) y la trisección del ángulo (que consiste en construir un ángulo cuya medida sea un tercio de la medida de un ángulo dado). Mucho tiempo después se probó que ninguna de estas construcciones es posible con regla y compás.

Euclides (aproximadamente 323 a.c. -283 a.c.) propone, en sus *Elementos*, un sistema de estudio en el que, a partir de cinco postulados y las definiciones necesarias, construye la geometría conocida hasta ese momento: a partir de los *Elementos* surgió la Geometría Euclidiana que perduró como única verdad geométrica hasta el siglo XVIII (hasta que aparecieron los trabajos pioneros de Saccheri y Lambert cuyos resultados, básicamente la modificación del quinto

postulado, fueron establecidos a firme en el siglo XIX por Gauss, Bolyai y Lovachetvski).

Por otro lado, la aparición de la geometría analítica es, sin duda, un hito que marca la geometría en la Edad Moderna. Descartes (1596 – 1650) propone un nuevo método de resolver problemas geométricos introduciendo un sistema de coordenadas, también llamado sistema cartesiano, lo cual permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$. Donde f representa una función. También, por esa época, Pierre de Fermat (1601 - 1665) introdujo el concepto de lugar geométrico. Actualmente se le atribuye a Descartes y Fermat, la creación de la geometría analítica. Precisamente, el presente estudio, se enmarca dentro de este tipo de geometría, en donde, se analizarán las coordenadas de los objetos matemáticos.

2.3 Transformaciones Isométricas

Un concepto importante en la Geometría Euclidiana es el de Congruencia. Dos figuras geométricas son congruentes si se puede superponer una figura sobre la otra por medio de ciertas acciones o transformaciones que se denominan Transformaciones Isométricas.

Una forma de estudiar, matemáticamente, una situación o un objeto es a través de la modelación. Y, para modelar, uno de los elementos principales son las igualdades y desigualdades que, en muchos casos, se reduce al estudio de ciertas funciones. La geometría euclidiana trabaja, entre otras, con una clase de funciones, definidas del plano (o espacio) en sí mismo y que preservan distancias. Estas funciones se llaman isometrías o movimientos rígidos del plano (o del espacio). El término Isometría proviene del griego y significa igual medida (iso: misma, metría: medida).

Una transformación isométrica es una transformación del plano o del espacio que lleva una figura dada en otra similar y que mantiene la forma y tamaño original, y solo varía su posición. En este caso diremos que ambas figuras son congruentes.

Al aplicar una transformación isométrica a una figura, se obtiene otra figura congruente a la original, llamada imagen. Esto quiere decir que, si se aplica una transformación T sobre una figura, entonces para cada punto P de la figura existe una única imagen $P' = T(P)$. A su vez, para cada punto P' del plano (o del espacio) existe una única pre imagen P . Esto define una transformación, llamada la inversa de T , denotada T^{-1} , que cumple: $T(P) = P' \Leftrightarrow P = T^{-1}(P')$.

Una colineación, es una transformación f que lleva una línea recta l en una línea recta $f(l)$. O sea, f transforma rectas del plano (o del espacio) en rectas del plano (o del espacio).

Las transformaciones del plano que son isometrías (o colineaciones) forman un conjunto que, con la operación de composición de funciones, forman grupo. Por ello, recordaremos el concepto de grupo.

Llamaremos grupo a un par $(G, *)$ constituido por un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$, definida sobre él (esto es una función $*: G \times G \rightarrow G$) que verifica las siguientes propiedades:

- 0) La operación $*$ está bien definida en G , es decir $a*b \in G$, $\forall a, b \in G$.
- 1) La operación $*$ es asociativa, esto es: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b \in G$.
- 2) Existencia de elemento neutro, o sea, existe $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a \quad \forall a \in G$.

- 3) Existencia del elemento inverso para $*$, esto es: $\forall a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a*b = b*a = e$. Este elemento b se llama el inverso de a para la operación $*$ y se denota $b = a^{-1}$.

Si además cumple con la propiedad conmutativa (o sea: $a*b = b*a \quad \forall a, b \in G$) diremos que el grupo es conmutativo o abeliano.

La operación binaria de grupo para conjuntos de funciones es la composición de funciones, o sea, $(f \circ g)(P) = f(g(P))$. Esto es, si f y g son isometrías (o colineaciones) del plano (o del espacio), entonces la composición de f con g (denotada $f \circ g$) es la isometría (o colineación) que resulta de aplicar a un punto P del plano primero g y luego f . El elemento neutro, de la composición, es la transformación identidad definida por $I(P)=P$ para todo punto P . El inverso es la función inversa, f^{-1} , es también biyectiva y del mismo tipo y es definida por: $f^{-1}(P') = P$ si y solo si $P' = f(P)$. La función f toma un punto P y lo mueve a una nueva posición P' ; f^{-1} lleva al punto P' a P .

2.4 Rotación y Composición de Rotaciones

Una rotación de centro O y ángulo de rotación α es una transformación que asocia a un punto P otro punto P' , tal que la distancia entre O y P es igual a la distancia entre O y P' , y la medida del ángulo POP' es α .

Geométricamente:

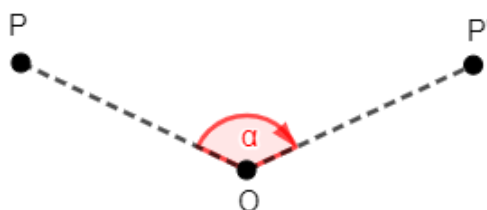


Figura 5: Rotación de un punto en un ángulo α en sentido negativo

En una rotación hay que considerar tres elementos: Amplitud (Medida del ángulo), Centro (Punto del Plano) y Sentido (Positivo (sentido contrario a las manecillas del reloj) o Negativo (en el mismo sentido de las manecillas del reloj)). Se acostumbra a decir que una rotación es en sentido horario si se hace en el mismo sentido que los minutos de un reloj y en sentido anti horario, si es en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. En la figura 3 la rotación se hace en el sentido horario y lleva el punto P en el punto P' .

Analíticamente:

Consideramos ahora un punto P del plano, con coordenadas cartesianas (x,y) . Esto es, el punto en $P(x, y)$. En coordenadas polares, las coordenadas del punto P se escriben como: $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, es la distancia del punto P al origen de coordenadas O (de coordenadas $(x, y) = (0,0)$) y θ es el ángulo que forma el segmento OP con el eje x , en el sentido anti horario. Si rotamos el punto $P(x, y)$ en un ángulo α , en sentido antihorario, su imagen $R_\alpha(P) = (x', y')$ tiene distancia al origen ρ y forma un ángulo $\theta' = \theta + \alpha$, con el eje x . Esto es, sus coordenadas polares son $x' = \rho \cos(\theta')$, $y' = \rho \sin(\theta')$, esto es:

$$\begin{aligned}
x' &= \rho \cos(\theta + \alpha) = \rho(\cos(\theta) \cos(\alpha) - \text{sen}(\theta) \text{sen}(\alpha)) \\
&= \rho \cos(\theta) \cos(\alpha) - \rho \text{sen}(\theta) \text{sen}(\alpha), y' = \rho \text{sen}(\theta + \alpha) \\
&= \rho(\text{sen}(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \text{sen}(\alpha)) \\
&= \rho \text{sen}(\theta) \cos(\alpha) + \rho \cos(\theta) \text{sen}(\alpha)
\end{aligned}$$

como: $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \text{sen}(\theta)$, entonces tenemos que:

$$R_\alpha(P) = R_\alpha(x, y) = P'(x', y') = (x \cos(\alpha) - y \text{sen}(\alpha), y \cos(\alpha) + x \text{sen}(\alpha)).$$

Que es la expresión de la rotación en un ángulo α , en sentido antihorario, aplicada a un punto P de coordenadas cartesianas (x, y).

Para obtener la inversa de R_α procedemos de la siguiente forma: Suponemos que tenemos un punto P' de coordenadas cartesianas (x', y') y queremos ver la expresión de $R_\alpha^{-1}(x', y') = P$ en este caso si las coordenadas cartesianas de P son (x, y) entonces P se ha obtenido de P' rotando el punto P' en un ángulo α en el sentido horario.

Por tanto, si las coordenadas polares de P' son $(x', y') = (\rho \cos(\theta'), \rho \text{sen}(\theta'))$ entonces las coordenadas polares de P deben ser:

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (\rho \cos(\theta' - \alpha), \rho \text{sen}(\theta' - \alpha)) \\
&= (\rho \cos(\theta') \cos(\alpha) + \rho \text{sen}(\theta') \text{sen}(\alpha), \rho \text{sen}(\theta') \cos(\alpha) \\
&\quad - \rho \cos(\theta') \text{sen}(\alpha)) = (x' \cos(\alpha) + y' \text{sen}(\alpha), y' \cos(\alpha) - x' \text{sen}(\alpha))
\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión de $R_\alpha^{-1}(x', y')$ es:

$$R_\alpha^{-1}(x', y') = (x' \cos(\alpha) + y' \text{sen}(\alpha), y' \cos(\alpha) - x' \text{sen}(\alpha)).$$

Composición de Rotaciones

Una composición de rotaciones es la aplicación sucesiva de dos o más rotaciones. Si a una figura se le aplica una rotación con centro O y ángulo α , en sentido anti horario, y luego a la imagen obtenida se le aplica otra rotación con el mismo centro y ángulo β , en sentido anti horario, entonces la imagen final se puede obtener aplicando, a la figura inicial, una rotación de centro O y ángulo $\alpha + \beta$, en sentido anti horario.

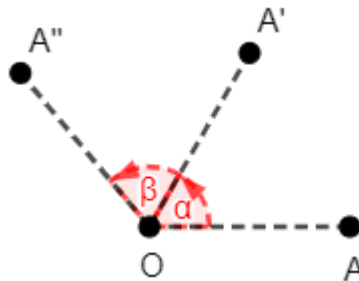


Figura 6: Composición de dos rotaciones en sentido anti horario

2.5 Traslación

Una traslación según un vector $\vec{v} = (a, b)$ es una transformación del plano que lleva cada punto P a un punto P' que se obtiene trasladando P en a unidades en el eje horizontal y b unidades en el eje vertical, del sistema cartesiano de coordenadas. Por ejemplo, si $P = (5, 3)$ y $\vec{v} = (-2, -1)$ entonces $P' = (5-2, 3-1) = (3, 2)$. Tenemos entonces que, conociendo las coordenadas de una figura y las coordenadas de un vector dado, podemos obtener las coordenadas de la figura trasladada.

Este movimiento lo representamos como $T_{\vec{v}}(x, y)$, que significa aplicar la traslación al punto (x, y) y las coordenadas de su imagen el plano:

$$T_{\vec{v}}(x, y) = (x', y'), \text{ donde } x' = x + a \text{ e } y' = y + b$$

Notamos que para cada par de puntos P y Q , en el plano, existe una única traslación $T_{\vec{v}}$ tal que $T_{\vec{v}}(P) = Q$. En efecto, para que así ocurra si $P = (P_x, P_y)$ y $Q = (Q_x, Q_y)$ entonces usando $\vec{v} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y)$ se cumple que $T_{\vec{v}}(P) = Q$.

Toda traslación es una colineación. Esto es, la imagen de una recta l es una recta $T_{\vec{v}}(l)$ paralela a l . Las rectas paralelas al vector $\vec{v}$ son llevadas en sí mismas por la traslación. En efecto, la recta l que pasa por el origen se puede escribir, en general, como $l = \{(x, y); y = \lambda x\}$, donde $\lambda \neq 0$. Si l y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, están en la misma dirección quiere decir que $v_2 = \lambda v_1$, por tanto $(x, y) \in l$ entonces: vale que $y = \lambda x$ y

$$T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b) = (x + v_1, \lambda x + v_2) = (x + v_1, \lambda x + \lambda v_1) = (x + v_1, \lambda(x + v_1)) = (x', y');$$

y el punto (x', y') pertenece a la recta del plano $l = \{(x', y'); y' = \lambda x'\}$, que es la recta original. De manera similar se prueba el resultado caso $l = \{(x, y); y = \lambda x + d\}$, usando que $v_2 = \lambda v_1$.

2.5.1 Traslación de coordenadas

Teorema: si se traslada el origen $O(0,0)$ de los ejes coordenados a un nuevo origen $O'(h, k)$ y si las coordenadas de cualquier punto P antes y después de la traslación son (x, y) y (x', y') respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son: $x' = x + h$ e $y' = y + k$.

Demostración: Sean x, y los ejes primitivos y x', y' los nuevos ejes, paralelos respectivamente a los primitivos. Sean (h, k) las coordenadas del nuevo origen de coordenadas. Desde el punto P trazamos perpendiculares a ambos sistemas de ejes y prolongamos los nuevos ejes hasta que corten a los originales.

Para determinar x' e y' en función de x, y, h y k observamos que, $x' = x + h$ y $y' = y + k$:

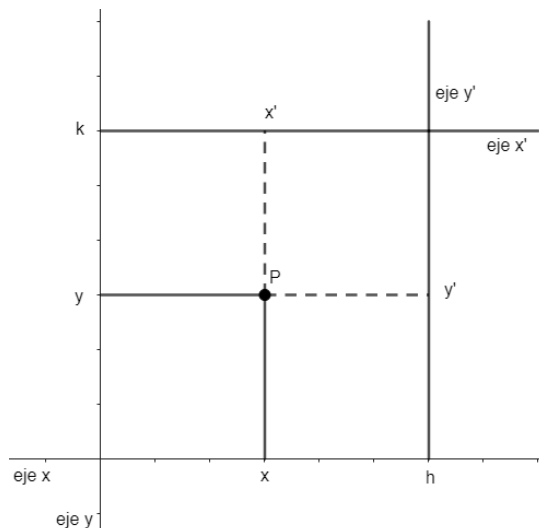


Figura 7: Demostración Traslación

2.5.2 Composición de Traslaciones

Se refiere a la aplicación sucesiva de dos o más traslaciones.

Si sobre una figura se aplica una traslación respecto al vector $\vec{v} = (x, y)$, y sobre la imagen se aplica otra traslación con respecto a un vector $\vec{u} = (a, b)$, el resultado es una traslación de la figura inicial con respecto a un vector $\vec{w} = (x + a, y + b)$

Además, hay que considerar que si aplicamos dos traslaciones, una después de la otra, el orden no importa y además es lo mismo que aplicar una sola traslación.

$$T(x, y) \text{ o } T(a, b) = T(x+a, y+b) = T(a, b) \text{ o } T(x, y)$$

Para poder estudiar el concepto de Traslación es necesario comprender qué es un vector y algunas de sus propiedades fundamentales.

2.5.3 Vectores

Un vector es un segmento con cierta longitud, al cual se le asignan ciertas características (Departamento de Investigaciones Educativas, 2008, p. 184 - 191):

- *Origen o punto de aplicación*: se refiere al punto exacto sobre el cual actúa el vector.
- *Dirección*: Está determinada por la recta que contiene al vector y todas sus paralelas.
- *Sentido*: Indica hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector. Se indica mediante una flecha en uno de sus extremos.

Componentes de un vector

Todo vector $\vec{v} = (x, y)$ centrado en el origen tiene dos componentes que son: una x y una y , que se llaman componentes cartesianas de un vector.

Magnitud

También llamado Módulo de un Vector, corresponde a su longitud, se indica escribiendo el nombre del vector entre líneas verticales ($\|\vec{v}\|$). Magnitud de un vector $\vec{v} = (x, y)$ está dado por la expresión:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vector Nulo: Corresponde a un vector cuyo Módulo es cero, se representa como $\vec{0}$

Adición de vectores

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores centrados en el origen y cuyos extremos son (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , respectivamente. Entonces, la suma de ambos vectores está dada por:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Propiedades de la Adición de Vectores

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

Regla del Paralelogramo

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores cualesquiera, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ corresponde al vector que forma la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son $\vec{a}$ y $\vec{b}$

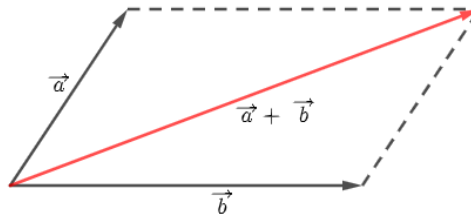


Figura 8: Regla del Paralelogramo

Forma analítica de un vector

Si el origen y el extremo de un vector $\vec{v}$, en el plano cartesiano corresponden a los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ respectivamente, entonces la forma analítica de ese vector está determinada por: $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

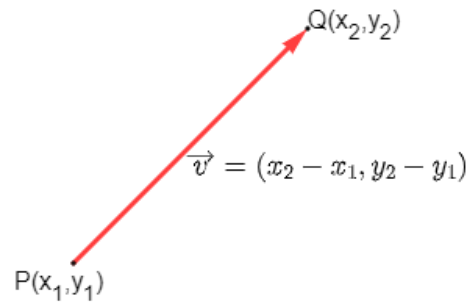


Figura 9: Forma analítica de un vector

2.6 Simetría

2.6.1 Simetría respecto al origen (0, 0)

Consiste en una rotación de 180° , girando sobre un punto fijo, el origen. Así, se tiene que un punto P cualquiera al ser rotado en 180° , respecto un punto fijo, se obtiene P' que es el punto simétrico de P . Si denotamos por $S(x, y)$ la simetría del punto (x, y) tenemos que: $S(x, y) = (-x, -y)$

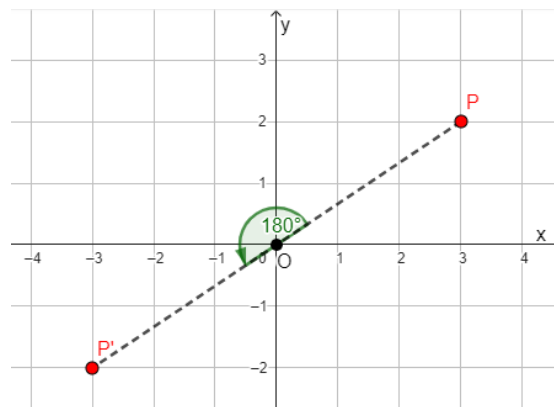


Figura 10. Simetría de un punto centrado en el origen (0, 0)

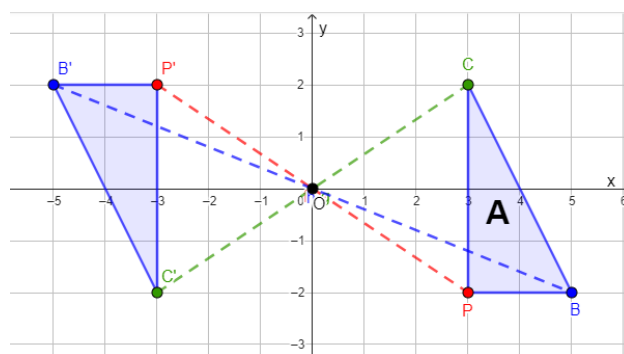


Figura 11. Simetría de un triángulo con punto fijo en el origen (0,0)

2.6.2 Simetría respecto a un punto cualquiera

Sea $A = (x, y)$ un punto cualquiera, para realizar una simetría fuera del origen, se debe utilizar la operación de conjugación, es decir llevar el punto A al origen por $T_{\overline{OA}}^{-1}$, luego aplicar la simetría y regresar nuevamente al punto A por $T_{\overline{OA}}$.

Es decir: $S_A = T_{\overline{OA}} \circ S \circ T_{\overline{OA}}^{-1}$

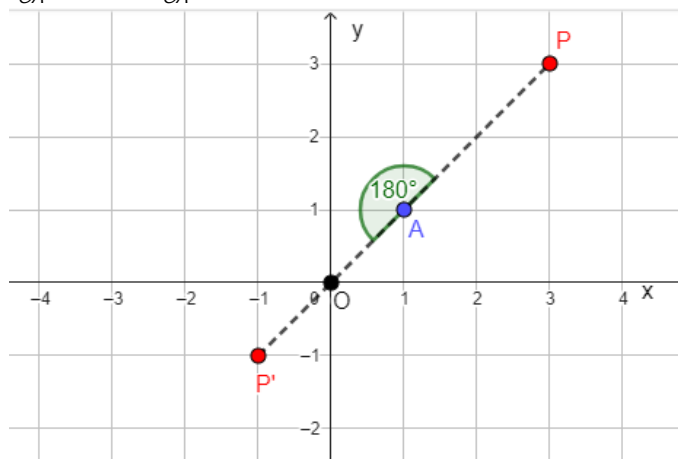


Figura 12. Simetría de un punto con centro A distinto de $(0, 0)$

En término de coordenadas si $A = (a, b)$ entonces:

$$S_A(x, y) = T_{\overline{OA}} \circ S \circ T_{\overline{OA}}^{-1}(x, y) = T_{\overline{OA}} \circ S(x - a, y - b) = T_{\overline{OA}}(a - x, b - y) = (2a - x, 2b - y).$$

Esto es: $S_A(x, y) = (2a - x, 2b - y)$

2.7 Reflexión

Sea l una recta y P un punto cualquiera fuera de la recta. Para reflejar el punto P respecto de la recta l procedemos de la siguiente forma: trazamos la recta L_P que pasa por P y es perpendicular a l . Luego, en la recta L_P ubicamos el punto P' que está al otro lado de P , respecto de l y que satisface que si $\{M\} = L_P \cap l$ entonces $|PM| = |P'M|$, definimos: $R_l(P) = P'$

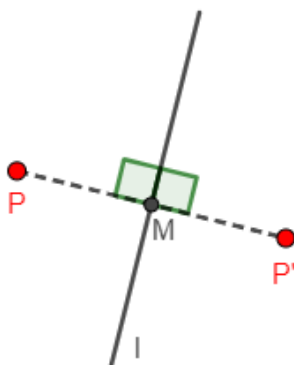


Figura 13. Reflexión respecto a una recta $R_l(P) = P'$

Por ejemplo: Si la recta l es el "eje x " y $P = (a, b)$ entonces: $R_{eje\ x}(a, b) = (a, -b)$.

También: Si la recta l es el “eje y ” y $P=(a, b)$ entonces: $R_{eje\ y}(a, b) = (-a, b)$

2.7.1 Reflexión con respecto al eje X

Una figura $A \subset \mathfrak{R}^2$ es refleja respecto al eje X, si siempre que un punto $P(x, y)$ pertenece a la figura, el punto $P'(x, -y)$ también pertenece a A .

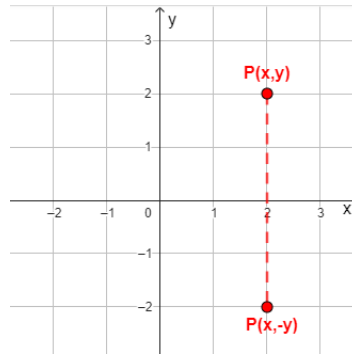


Figura 14. Reflexión de un punto respecto eje X

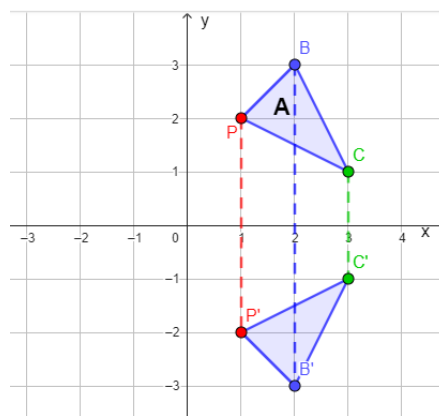


Figura 15. Reflexión de una figura respecto eje X

2.7.2 Reflexión con respecto al eje Y

Una figura $A \subset \mathfrak{R}^2$ es refleja respecto al eje Y, si siempre que un punto $P(x, y)$ pertenece a la figura, el punto $R_{eje\ y}(x, y) = (-x, y)$, que denotamos $P'(-x, y)$ también pertenece a A .

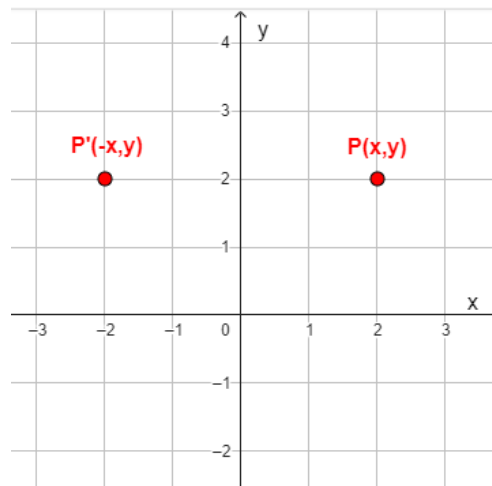


Figura 16. Reflexión de un punto respecto al eje Y

La Reflexión de la figura $A \subset \mathbb{R}^2$ respecto del eje y es la imagen $A' = R_{eje y}(A)$, como muestra la figura siguiente:

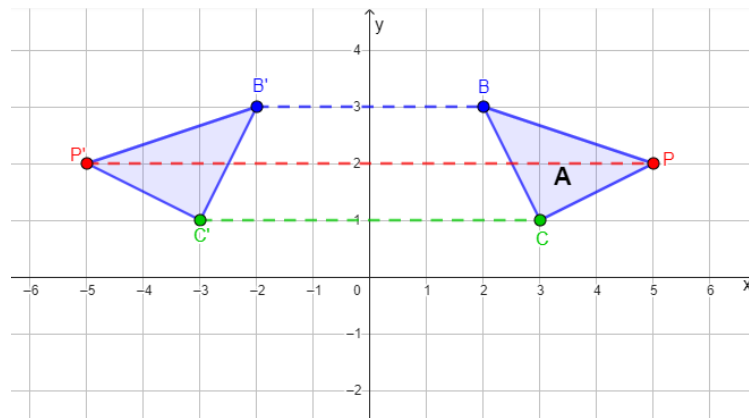


Figura 17. Reflexión de una figura respecto al Eje Y

2.7.3 Composición de Simetrías

a) La composición de dos simetrías centrales es una traslación.

Demostración: Consideramos una simetría central S_A con respecto a A, y otra simetría central $S_{A'}$ con respecto a A', para $A \neq A'$.

Sea P un punto del plano, tal que $P' = S_A(P)$ y $P'' = S_{A'}(P')$

Tenemos $P'' = S_{A'}(P') = S_{A'}(S_A(P)) = S_{A'} \circ S_A(P)$

La siguiente figura representa la situación:

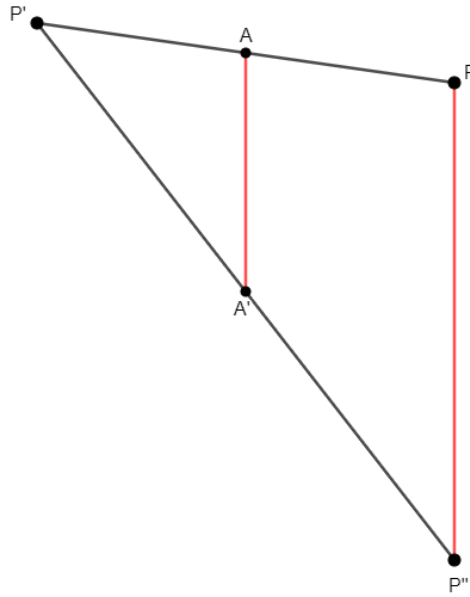


Figura 18. Composición de dos simetrías centrales

Sabemos que: $\overline{P'A} = \overline{AP}$ (1)

Y que: $\overline{P'A'} = \overline{A'P''}$ (2)

Trazamos los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{PP''}$

Por (1) y (2) concluimos que $\overline{AA'}$ es paralelo a $\overline{PP''}$ y por semejanza de triángulos que $\overline{PP''} = 2 \overline{AA'}$.

O sea, que si $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ entonces $\overrightarrow{PP''} = 2\vec{v}$ $\therefore$ si se considera P' como el origen y $\vec{v}_P$ el vector que representa a P y $\vec{v}_{P''}$ el vector que representa a P'', entonces:

$$\vec{v}_{P''} = \vec{v}_P + 2\vec{v} \Rightarrow S_{A'} \circ S_A(P) = \vec{v}_P + 2\vec{v} \text{ que es lo que afirmábamos.}$$

Observación: Ya que el vector $\overrightarrow{PP''}$ puede ser cualquiera, concluimos que la traslación se obtiene como composición de dos simetrías centrales.

b) La composición de una simetría central y una traslación es una simetría.

Demostración: Según lo anterior podemos descomponer la traslación como el producto de dos simetrías S_{r1} y S_{r2} cuya distancia es la mitad del vector $\vec{v}$ de traslación; $\Rightarrow S_{r3} \circ T = S_{r3} \circ S_{r2} \circ S_{r1} = S$

c) Una simetría es igual a su inversa $S_P = S_P^{-1}$

Demostración: Por ser la simetría central una biyección de E_2 en E_2 , es una transformación involutiva, por lo que se cumple que:

$$S_P \circ S_P = I$$

$$S_P = I \circ S_P^{-1}$$

$$S_P = S_P^{-1}$$

2.7.4 Composición de Reflexiones

La composición de dos reflexiones R_l y R_n es:

a) Una traslación si l y n son paralelas

Demostración: Sean l y n dos rectas paralelas y sea P un punto, al cual se aplica la reflexión R_l , formando su imagen P' , y luego a la imagen se le aplica la reflexión R_n formando P'' y sea $\vec{v}$ un vector $\perp$ a l y n con origen P y extremo P'' , se tiene que:

Si l y $\vec{v}$ se intersectan en un punto $O \Rightarrow \overline{PO} = \overline{OP'}$

Si $\vec{v}$ y n se intersectan en un punto $O' \Rightarrow \overline{P'O'} = \overline{O'P''}$

Además $\overline{OO'} = \overline{OP'} + \overline{P'O'}$

$$\Rightarrow \overline{PP''} = \overline{PO} + \overline{OO'} + \overline{O'P''} = \overline{OP'} + \overline{OP'} + \overline{P'O'} + \overline{P'O'}$$

$$\Rightarrow \overline{PP''} = 2\overline{OP'} + 2\overline{P'O'} = 2(\overline{OP'} + \overline{P'O'})$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = 2(\overline{OP'} + \overline{P'O'})$$

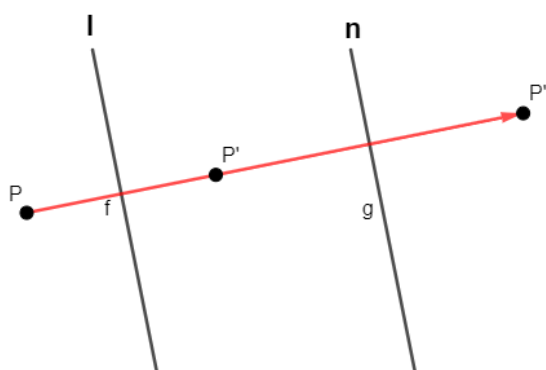


Figura 19. Composición de dos reflexiones en rectas paralelas

b) Una rotación si l intersecta a n

Demostración: Sea O la intersección de l y n

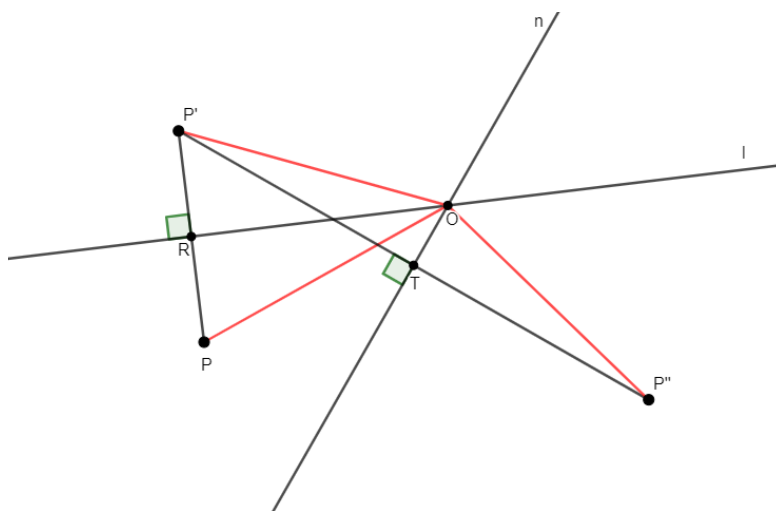


Figura 20. Composición de dos reflexiones en rectas secantes

Notamos que $\overline{P'O} = \overline{PO}$ y que $\overline{P'O} = \overline{OP''}$

La primera igualdad se obtiene de que $\triangle ORP'$ es congruente al $\triangle ORP$, y la segunda, de que $\triangle OTP'$ es congruente al $\triangle OTP''$

Esto quiere decir que P' , P Y P'' están en la circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$.

Notamos que el ángulo $P'OT$ es igual al ángulo $P''OT$ y que el ángulo $P'OR$ es igual al ángulo POR .

Sean $\beta = \angle POR; \alpha = \angle ROT \wedge \gamma = \angle P''OT$

Tenemos que: $\angle POT = \angle ROT - \angle POR = \alpha - \beta \wedge \gamma = \angle TOP' = \angle TOP + 2\beta$

Por lo tanto, $\angle POP'' = \angle POT + \angle TOP'' = \alpha - \beta + \alpha + \beta = 2\alpha$

Por lo tanto: $P'' = R_{2\alpha}(P)$ que es lo que habíamos afirmado.

2.8 Teselación

Uno de los conceptos matemáticos relevantes en el estudio de la unidad es el de Teselación, ésta palabra proviene del latín “tesella”, que expresa azulejo, y a su vez proviene del griego “tessares” que es equivalente a cuatro. Según Cuevas, A. (2016) una tesela es “el ‘patrón’ que se sigue al recubrir una superficie en la que se requiere evitar la superposición de figuras y asegurar que no se registran espacios en blanco en el recubrimiento”. Otra definición de teselación es la que otorga Rodríguez, M. (2010) como una “colección de regiones (compactos con interior no vacío) llamadas teselas tales que: dos teselas no tienen ningún punto interior en común, es decir, solo pueden compartir parte de su frontera; y la unión de las teselas cubre totalmente el plano.

Para abordar el concepto de Teselación, es pertinente identificar aspectos históricos y clasificar los tipos de teselación de acuerdo a la generación de un patrón.

2.8.1 Aspectos Histórico de las Teselaciones

Las composiciones de transformaciones isométricas se han aplicado en diversas culturas para, formar patrones repetitivos decorativos en pavimentos, muros de catedrales, palacios, entre otras, por medio de teselas o mosaicos, en donde, a partir de un patrón de teselación, se recubre el plano, sin dejar espacios ni sobre poner figuras.

Una de las obras arquitectónicas en la que se visualiza esto, es en el palacio de la Alhambra, España, construido en el siglo XIV de nuestra era, en el cual podemos encontrar una gran variedad de mosaicos decorativos conformados de pequeñas piezas de cerámica vidriada, agrupadas de formas diversas y mostrando una gran complejidad y prolijidad al momento de ensamblar. En este lugar, se han encontrado mosaicos en los que se ven representados los 17 tipos

de simetría cristalográfica en el plano (Figura 18) por lo que podemos notar el gran legado matemático y cultural de la arquitectura nazarí, al elaborar estas composiciones geométricas.

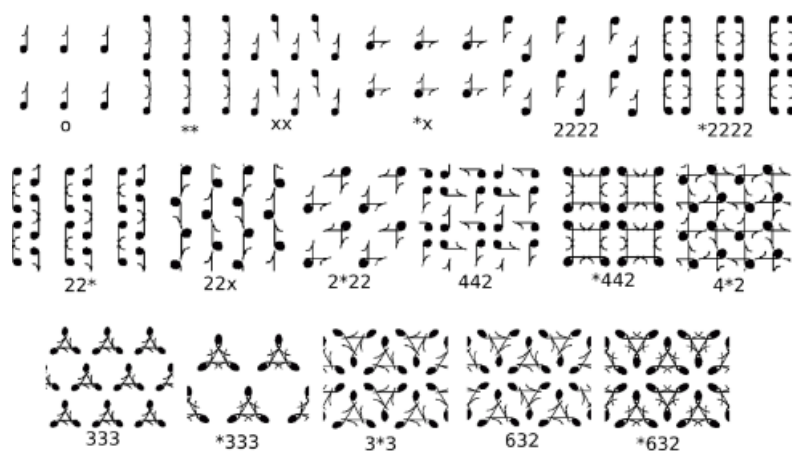


Figura 21: Los 17 tipos de simetría cristalográfica en el plano

El primer estudio sobre teselaciones lo realizó Johannes Kepler en su libro llamado *Harmonices Mundi*, en 1619. Allí Kepler trataba de explicar la armonía del universo y sus manifestaciones en términos físicos, musicales y geométricos; entendida ésta armonía como la perceptible a través del intelecto, asociada a orden geométrico y proporción. Para Kepler, las figuras más armónicas y perfectas eran los polígonos regulares, que, cuando se juntaban creaban congruencias, esto lo expresa como: “la congruencia es perfecta cuando los ángulos de las figuras que se juntan lo hacen de igual manera en todos los puntos de encuentro, por lo tanto, todos los puntos de encuentro son similares, y el patrón de éstos puntos puede continuarse indefinidamente”

Finalmente define la congruencia más perfecta como: ‘La congruencia es la más perfecta si, además, las figuras que se juntan en el plano son todas del mismo tipo’. (citado en Alatorre, 2018)

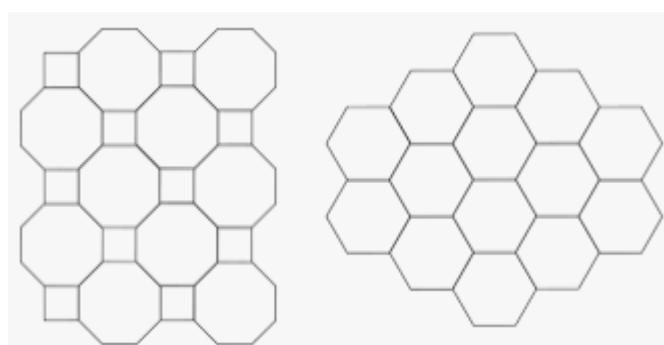


Figura 22: Ejemplo de congruencia perfecta y de congruencia más perfecta según definiciones de Kepler

Kepler clasificó las congruencias perfectas y congruencias más perfectas hasta con tres polígonos regulares y semirregulares, analizando caso a caso. De este análisis, logró hallar las siguientes posibles congruencias:

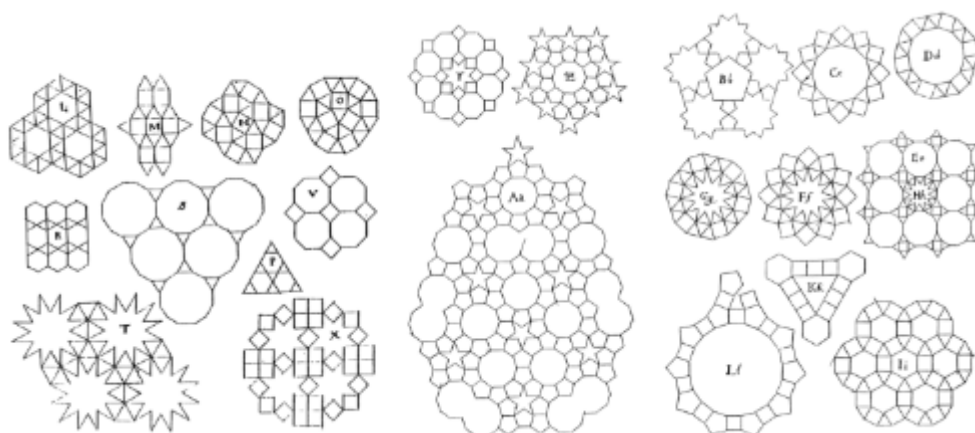


Figura 23: Imágenes de Harmonices Mundi

El razonamiento seguido por Kepler en la construcción de sus congruencias, es análogo al realizado para encontrar teselaciones regulares con polígonos regulares e iguales.

Continuando con el estudio y representación de las teselaciones, encontramos a Maurits Cornelis Escher (1898-1972), quien fue un arquitecto holandés conocido por sus grabados en madera, xilografías y litografías. Su obra puede ser calificada como arte matemático y se caracteriza por la división del plano. Su principal innovación es la deformación de una figura en otra, en un mismo cuadro. Estas deformaciones las realiza a través de aves, peces, seres humanos, reptiles donde, en la combinación total, no es fácil apreciar la figura y su fondo.

Luego de una visita al palacio de la Alhambra en 1922, empezó con la creación de teselados en el plano, para luego, perfeccionar su técnica en 1935 en una segunda visita a ese lugar, inspirado en los patrones matemáticos que componen sus muros y cielos. En palabras del propio Escher: (citado en Ernst, 2018, pág. 41)

“Los árabes alcanzaron una gran maestría en el arte de rellenar superficies con figuras que se repiten sin dejar un solo hueco libre. Así lo hicieron en la Alhambra, donde decoraron paredes y suelos con mayólicas multicolores. Es lástima que el Islam prohíba las imágenes. Por ello, en sus mosaicos se limitaron al empleo de formas geométricas abstractas. Ningún artista árabe se atrevió a usar figuras reconocibles, por ejemplo, pájaros, reptiles, hombres, como elementos decorativos (o quizás ni siquiera se les ocurrió idea semejante). El ceñirse a las formas geométricas me resulta tanto más inadmisible cuanto que la posibilidad de reconocer las figuras es para mí el motivo principal de mi permanente interés en la materia”

De estas palabras se puede desprender el interés que tenía Escher por innovar en sus obras, aplicando elementos de la naturaleza, con tal genialidad, que es difícil reconocer los patrones matemáticos en los cuales se sustentan sus litografías y obras.

Es así también como Escher, se beneficiaba de los conocimientos matemáticos de su época para mejorar sus obras y lograr incorporar nuevos elementos en ellas. Uno de los hitos importantes que marcó su obra fue cuando en 1954, en el congreso internacional de matemáticos de Amsterdam, Escher conoció al geómetra canadiense H. Coxeter, quien había ido a una de las conferencias a ver los grabados que producía, adquiriendo algunas de sus obras.

Un par de años después, Coxeter le escribió a Escher solicitando permiso para utilizar algunas de sus imágenes de mosaicos para su discurso presidencial ante la Royal Society de Canadá, a lo que Escher accedió. Cuando Escher miró el artículo de Coxeter, unos años después (probablemente a inicios de 1958) quedó fascinado por uno de los otros diagramas que incluía: una ilustración de un mosaico en lo que se llama geometría hiperbólica, lo que abrió una posibilidad completamente nueva para sus diseños. Es así como Escher comenzó a trabajar inmediatamente en esto e incorporó elementos de la geometría no euclidiana a sus obras, como lo es “Ángeles y demonios” (figura 21) en que utiliza la geometría hiperbólica para ilustrar en un disco, figuras que se deforman en el borde, encontrando con ello, una solución al problema de representar el infinito e una imagen infinita.



Figura 24: Obra “Ángeles y demonios” M.C.Escher

2.8.2 Tipos de Teselaciones

Para fines de este estudio, consideraremos la clasificación de teselaciones según los polígonos que la conforman como: teselaciones regulares, teselaciones semi regulares y teselaciones irregulares.

Teselaciones regulares

Son aquellas teselaciones formadas por un solo tipo de polígono regular. De ello, surge la interrogante sobre qué polígonos regulares cumplen la condición de cubrir el plano de forma completa y sin dejar espacios.

Con respecto a ello, (Solís, 2007) analiza esto de una forma más detallada expresando:

“Si se quiere teselar un plano con polígonos regulares, es decir, cubrirlo en su totalidad por polígonos regulares sin que existan solapamientos ni huecos, la

suma de los ángulos interiores de los polígonos que concurren en un mismo vértice del teselado, ha de ser igual a 360° .

Entonces, si consideramos que la medida del ángulo interior de un polígono regular, está dada por:

$$\alpha = \frac{180 \cdot (n - 2)}{n} \quad (\text{Ecuación 1})$$

Siendo n el número de lados del polígono regular y α su ángulo interior en grados.

Dado que el ángulo interior ha de ser divisor de 360° , para hallar su valor basta con realizar la siguiente operación:

$$\beta = \frac{360}{\alpha} \quad (\text{Ecuación 2})$$

Donde $\beta \in \mathbb{Z}$ y representa el número de polígonos regulares iguales que concurren en un mismo vértice del teselado.

De la ecuación 1 y 2 se desprende que:

$$\beta = \frac{360}{\frac{180 \cdot (n - 2)}{n}} = \frac{n \cdot 360}{180(n - 2)} = \frac{2n}{(n - 2)} \quad (\text{Ecuación 3})$$

Por lo que, buscamos los valores de n tales que $2n$ es múltiplo de $(n - 2)$. Para ello, la ecuación 3 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\beta = \frac{2 \cdot (n + 2 - 2)}{n - 2} = \frac{2(n - 2) + 4}{n - 2} = 2 + \frac{4}{(n - 2)} \quad (\text{Ecuación 4})$$

Por lo que, $\beta \in \mathbb{Z}$ si $\frac{4}{(n - 2)}$ es un número entero. Como los divisores enteros de 4 son ± 1 ; ± 2 y ± 4 , se tiene que:

$$n - 2 = \pm 1; \pm 2 \text{ o } \pm 4 \quad (\text{Ecuación 5})$$

Esto implica que, los posibles valores de n son: -2, 0, 1, 2, 3, 4 y 6. Pero, como un polígono debe tener al menos tres lados, se tiene que cumplir que $n \geq 3$, por lo que los únicos valores que puede tomar n son 3, 4 y 6.

Dado esto, los únicos polígonos regulares que pueden teselar el plano son los triángulos, los cuadrados y los hexágonos.

Por lo que, si consideramos un vértice P, de los polígonos regulares que teselan el plano, en él concurren un número entero de polígonos regulares sin que existan espacios sin cubrir (Figura 25)

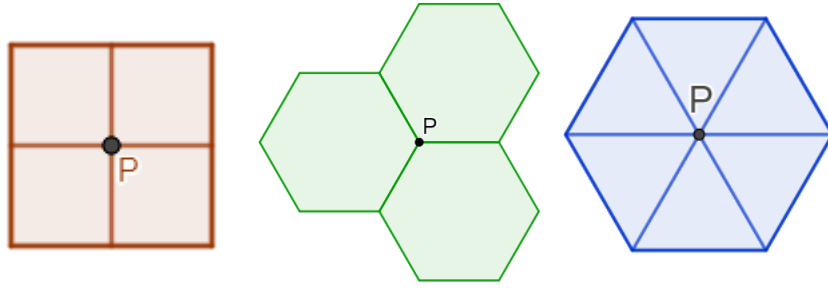


Figura 25: Representación de teselación del plano en un vértice de polígonos regulares

Teselaciones semi regulares

Son aquellas teselaciones formadas por una combinación de polígonos regulares. Para hallar las posibles combinaciones que permiten teselar el plano, podemos usar el razonamiento algebraico descrito en las teselaciones regulares.

Es así como Mora y Rodrigo (2007) lo expresan algebraicamente:

Si se parte de que el ángulo interior α de un polígono de n lados viene dado por:

$$\alpha = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (\text{Ecuación 6})$$

Cuando concurren tres polígonos en un vértice tendremos la ecuación:

$$180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 360^\circ \quad (\text{Ecuación 7})$$

Donde n_i representa el número de lados del polígono i -ésimo y debe cumplir que $n_i > 3$.

Al operar, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \quad (\text{Ecuación 8})$$

Operando de la misma manera para 4, 5 y 6 polígonos, se obtienen respectivamente, las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \quad (\text{Ecuación 9})$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} \quad (\text{Ecuación 10})$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2 \quad (\text{Ecuación 11})$$

A partir de las ecuaciones 8, 9, 10 y 11 anteriores, es posible construir la tabla que se muestra en la figura 26, donde los números de la tercera columna

representan los n_i .

Ecuación	Solución	Polígonos							
a	1	3	7	42					
	2	3	8	24					
	3	3	9	18					
	4	3	10	15					
	5	3	12	12			*		
	6	4	5	20					
	7	4	6	12			*		
	8	4	8	8			*		
	9	5	5	10					
	10	6	6	6			*	*	
b	11	3	3	4	12				
	11'	3	4	3	12				
	12	3	3	6	6				
	12'	3	6	3	6			*	
	13	3	4	4	6				
	13'	3	4	6	4			*	
	14	4	4	4	4			*	*
	15	3	3	3	3	6		*	
c	16	3	3	3	4	4		*	
	16'	3	3	4	3	4		*	
d	17	3	3	3	3	3	3	*	*

Tabla 2: Posibles combinaciones de polígonos para teselar el plano, Mora y Rodrigo, 2007, p.90.

En la tabla, las ecuaciones a, b, c y d corresponden a las ecuaciones 8, 9 10 y 11 expresadas anteriormente. Las soluciones 11, 12, 13 y 16 están designadas, además, con una comilla (') porque admiten dos posibles formas de disponer los polígonos alrededor del vértice. Teniendo en cuenta esta aclaración, las formas de combinar polígonos alrededor de un vértice se muestran en la Figura 26:

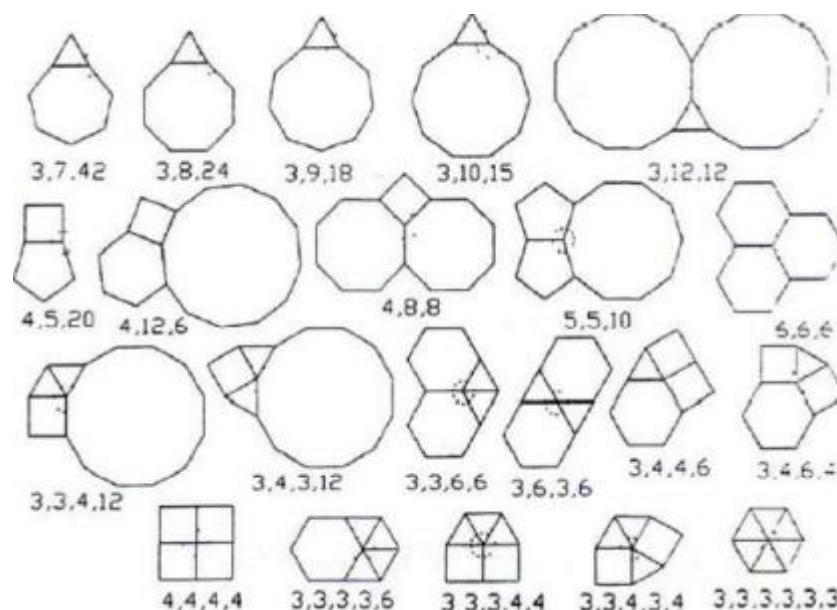


Figura 26: Formas de combinar polígonos para teselar el plano, Mora y Rodrigo, 2007, p.90.

Mora y Rodrigo (2007, p.91) analizan las distintas soluciones de la tabla 1, para extraer la siguiente información:

- Las soluciones 10, 14 y 17, (marcadas con **) corresponden a los mosaicos regulares obtenidos en la sección anterior.
- Las soluciones 5,7, 8, 12, 13',15,16 y 16' se pueden extender a todo el plano haciendo que los vértices del mosaico en cuestión sean iguales, por lo que dan lugar a mosaicos semirregulares.
- Las soluciones 1 a 4 presentan un inconveniente para el caso que nos ocupa de trabajar con polígonos regulares, pues contienen un triángulo y dos polígonos diferentes, A y B, con ángulos interiores distintos, a y b respectivamente, que generan en un tercer 23 polígono C dos ángulos interiores valores de $(300 - a)$ grados y $(300 - b)$ grados, rompiéndose así la regularidad del polígono C. Un razonamiento similar al anterior puede ser aplicado a la solución 9 con el pentágono en lugar del triángulo.
- Las soluciones 11, 11', 12' y 13 no se pueden extender a todo el plano, por lo que no permiten poder teselarlo.

Por lo anterior, se puede concluir que existen solo 8 configuraciones de polígonos regulares diferentes que permiten teselar el plano, los cuales, se presentan en la figura 27:

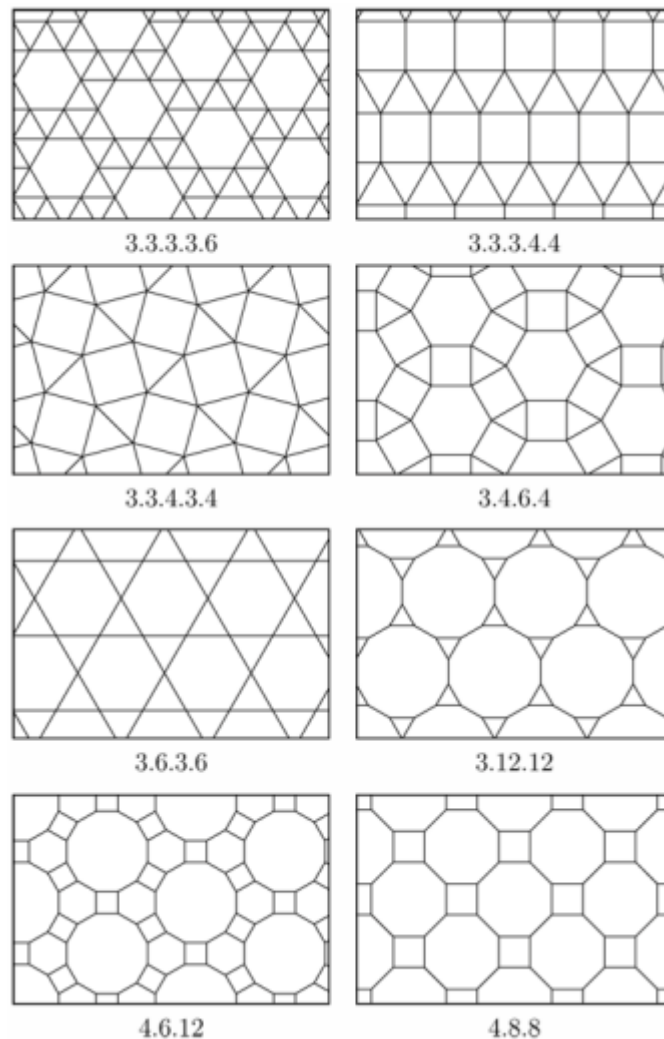


Figura 27: Los ocho mosaicos semi regulares hallados por Kepler. Recuperado de <https://urban-networks.blogspot.com/2016/07/cuando-las-paredes-hablan-epigrafias-y.html>

Teselaciones Irregulares

Son aquellas teselaciones que se conforman de polígonos regulares e irregulares. La distribución de los polígonos en los distintos vértices es cíclica; pueden darse 3, 4, 5 y más distribuciones que harán que la periodicidad sea más espaciada, requiriendo dibujar una gran porción de la tesela para poder ver un ciclo completo.

Las teselaciones irregulares se obtienen por medio de simetría respecto al punto medio de cada lado del polígono, así se pueden dar mediante triángulos, cuadriláteros (rectángulos, rombos, paralelogramos), pentágonos irregulares (se conocen 14 familias de pentágonos que teselan el plano) y hexágonos irregulares (3 hexágonos irregulares), algunas de estas formas, se muestran en la figura 28:

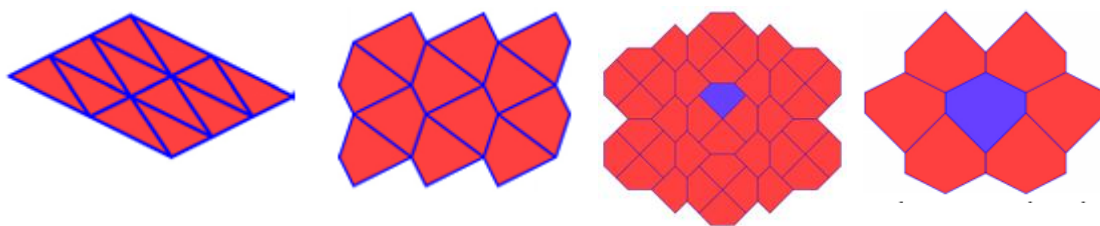


Figura 28: Tipos de teselados irregulares a partir de triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos irregulares.

2.9 Estrategias y Recursos para Diversificar la Enseñanza de la Matemática

Algunos de los recursos didácticos declarados como relevantes de uso por el Ministerio de Educación de Chile, de manera transversal en los programas de estudio de matemática es el de utilización de material concreto, recursos digitales y herramientas manipulativas, las cuales consisten en:

- **Material Concreto:** se refiere a “todo objeto manipulable que forma parte del propio contexto del estudiante y que permite modificar sus esquemas cognitivos, facilitando así, el proceso de enseñanza y aprendizaje” (Acosta, 2017, p.7).
- **Recursos Digitales:** son aquellos que permiten presentar, organizar y visualizar contenidos de manera digital. Por su impacto en los procesos de enseñanza-aprendizaje, autores como Dick y Carey (citados en García, 2001) identifican algunos elementos esenciales para el diseño y selección de materiales didácticos digitales: objetivos, contenidos y perfil de los estudiantes que conforman el aula.

En este estudio se detallarán algunas estrategias de enseñanza que pueden ser utilizadas con el fin de promover la atención a la diversidad y mejorar el aprendizaje de todos en el aula:

- a) El trabajo en equipo, pues, además de apoyar los aprendizajes de los contenidos matemáticos, mejora las relaciones interpersonales de los estudiantes, fomentando el trabajo colaborativo para llegar a una meta común, apoyándose en los procedimientos matemáticos y análisis más abstractos que se soliciten. El profesor, orienta el trabajo, definiendo la formación de los equipos en grupos reducidos de estudiantes para mejorar la organización y distribución de tareas entre ellos. Como lo afirma Jaramillo (2012, p.6) “El trabajo en equipo es el conjunto de personas asignadas o auto asignadas, de acuerdo a habilidades y competencias específicas, para cumplir una determinada meta bajo la conducción de un coordinador”.
- b) El aprendizaje entre pares o iguales como lo menciona Cardozo (2011, p.312) “Se basa en un modelo constructivista entre iguales que permite al estudiante coordinador asumir una función mediadora del aprendizaje y mejoren su rendimiento académico”. En esta estrategia de apoyo entre iguales, se facilita la comunicación entre los estudiantes clarificando dudas entre ellos, generando una interacción entre ellos, atendiendo con

esto a la inclusión y a la diversidad, y fomentando un rol mediador del docente.

- c) El juego heurístico, como lo mencionan Alsina y Planas (2008, p.85) es “un juego pedagógico que aumenta la interacción explícita y provoca un aprendizaje significativo, estimula la construcción de nuevos conocimientos y facilita el desarrollo de habilidades lógicas y operacionales”. El juego heurístico tiene la ventaja de que puede implementarse como trabajo individual, entre pares y en equipo, conforme a la/s habilidades que se deseen trabajar. Esta estrategia fomenta el razonamiento lógico y la aplicación de procesos para la resolución de problemas.
- d) Estrategias que promueven la participación, como lo es el debate dirigido, en donde el intercambio de ideas puede servir para determinar, por ejemplo, la pertinencia de una solución determinada, y así afianzar conceptos. También acá encontramos la lluvia de ideas, que permiten fomentar la creatividad, y en conjunto, llegar a un concepto. Otra estrategia es la de participación al azar (a través de los palitos preguntones, o una tómbola con sus nombres, por ejemplo) en la que se puede llegar a estudiantes que, en general, no participan en instancias voluntarias. Podemos notar entonces que, “es necesario que los alumnos se sientan competentes para aprender, comprendan los contenidos que se trabajan en clase, cuenten con un ambiente en el aula que estimule y motive sus participaciones” (Veliz y Pérez, 2004, citado por Suárez, 2018, p.83)
- e) Estrategias que involucran la etnomatemática, entendiendo ésta como el estudio de las relaciones entre matemáticas y cultura (Bishop, 2009). Es así como en el aula matemática, se pueden incluir conocimientos propios de culturas precolombinas, como procedimientos de cálculo, técnicas de conteo, representaciones simbólicas, que ayudan a visualizar y diversificar la forma en que se exponen los contenidos. Esto también se propone en el programa de estudio de octavo básico, en donde se menciona que se ha de “utilizar materiales, estrategias didácticas y actividades que se acomoden a las particularidades culturales y étnicas de los alumnos y a sus intereses. Es importante que toda alusión a la diversidad tenga un carácter positivo, que motive a los estudiantes a valorarla” (Programa de Estudio 8°Básico, 2016, p.19).

También, un elemento que permite diversificar la enseñanza de la matemática, a todos los estudiantes que integran el aula, es la forma de representación de los objetos matemáticos de estudio. En la secuencia de enseñanza propuesta en ésta investigación, se incluyen representaciones gráficas, simbólicas, tabulares y verbales de los conceptos basándose en la teoría de registro de representación semiótica de Duval (1993), en donde se expone que el uso en la enseñanza tradicional, de solo algunos cambios de representación, no son suficientes para que el estudiante adquiera un conocimiento significativo de los objetos matemáticos.

2.10 Diseño Universal de Aprendizaje (D.U.A)

El Diseño Universal (D.U.) es un concepto que surgió en el ámbito de la arquitectura en la década de 1970 en Estados Unidos. Ron Mace fue el fundador del Centro para el Diseño Universal (C.U.D.), quien lo implementó por primera vez, y quien lo definió como el diseño de productos y entornos que cualquier persona pueda utilizar, en la mayor medida posible, sin necesidad de una adaptación posterior destinada a un público específico (C.U.D., 1997). Este concepto recogía ideas del movimiento arquitectónico de la época, cuyo objetivo era el de diseñar y construir espacios pensados en atender desde un principio la variedad de necesidades de acceso, comunicación y uso de los potenciales usuarios.

Esta idea de atender a la diversidad en un único diseño, se masificó a otros ámbitos de la sociedad como la educación. Es así que, en 1990, nace el enfoque denominado Diseño Universal de Aprendizaje (D.U.A.) desarrollado por el Center for Applied Special Technology (Centro de Tecnología Especial Aplicada, C.A.S.T.) cuyos fundadores fueron David H. Rose (neuropsicólogo del desarrollo) y Anne Meyer (experta en educación, psicología clínica y diseño gráfico).

En sus inicios, la labor de este centro fue desarrollar tecnologías que apoyaran el aprendizaje de estudiantes con algún tipo de discapacidad, de modo que pudiesen acceder al mismo currículo que sus compañeros, pero en el transcurso del tiempo, fueron reconociendo que los recursos y materiales confeccionados también facilitaban el acceso de los aprendizajes de los demás estudiantes que integraban el aula.

Fue así como el equipo de investigación interdisciplinario del C.A.S.T. fue recogiendo las distintas experiencias de enseñanza, bajo el sustento de la neurociencia aplicada al aprendizaje, tecnología y medios digitales, para construir un marco de aplicación del D.U.A. en el aula, definiendo éste como “un enfoque basado en la investigación para el diseño del currículo – es decir, objetivos educativos, métodos, materiales y evaluación – que permite a todas las personas desarrollar conocimientos, habilidades y motivación e implicación con el aprendizaje” (Pastor et al, 2011, p.8).

Es así como el C.A.S.T. se ha mostrado crítico a los currículos que apuntan a una “mayoría” de los estudiantes, pero deja fuera de la adquisición de aprendizajes a otros, generando brechas de aprendizajes entre estudiantes de un mismo sistema educativo y barreras de acceso a los aprendizajes en algunos estudiantes, con respecto a ello afirman “El currículo que se crea siguiendo el marco del DUA es diseñado, desde el principio, para atender las necesidades de todos los estudiantes, haciendo que los cambios posteriores, así como el coste y tiempo vinculados a los mismos sean innecesarios. El marco del DUA estimula la creación de diseños flexibles desde el principio, que presenten opciones personalizables que permitan a todos los estudiantes progresar desde donde ellos están y no desde donde nosotros imaginamos que están” (CAST,2011, p.3).

Por lo que la propuesta del D.U.A. es otorgar mayor flexibilidad al currículo

escolar, aplicando diversas estrategias, materiales y recursos que faciliten el acceso de los aprendizajes a todos los estudiantes que conforman el sistema educativo. Con ello se logra, además, romper con la dicotomía instaurada en las aulas de alumnos con discapacidad y alumnos sin discapacidad; desplazando así el foco de la discapacidad, hacia el foco de los materiales y los medios en particular y al diseño curricular en general (Burgstahler, 2011). Es así que notamos que, es el currículo el que puede ser discapacitante para algunos estudiantes cuando su diseño no atiende a la diversidad y a la inclusión.

Cabe preguntarse entonces, cómo aplicar de manera efectiva el D.U.A. en el aula. Investigaciones realizadas por el C.A.S.T. revelaron dos evidencias fundamentales para el diseño del marco de aplicación del enfoque DUA. Por un lado, la diversidad que presentan los estudiantes en cuanto a estructura y configuración cerebral, que se traduce en una gran variabilidad respecto a la manera que tienen de acceder y procesar la información, al modo en que planifican, ejecutan y monitorizan diferentes tareas, y a la forma en que se motivan e implican en su propio aprendizaje. Por lo que, las diferencias existentes entre las redes cerebrales de reconocimiento, estratégicas y afectivas de los alumnos, derivan en diversas formas de aprender.

Por otro lado, el currículo debe estar diseñado universalmente, para que contemple la singularidad de cada alumno y haga posible el éxito educativo de todos. Para lograr esto es necesario la identificación de teorías y prácticas educativas que han demostrado su éxito para reducir barreras en la enseñanza. Así, el D.U.A. hace referencia a la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner y al constructivismo de Vygotsky, haciendo hincapié en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y en el concepto de andamiaje (Rose y Meyer, 2002).

A partir de lo expuesto anteriormente, C.A.S.T. desarrolló un marco de implementación del D.U.A. en el aula, el cual está estructurado bajo tres principios básicos, los cuales se corresponden a las tres redes cerebrales implicadas en el aprendizaje que son las redes de reconocimiento, redes estratégicas y redes afectivas, cada una con una función específica que se detalla en la figura 29.

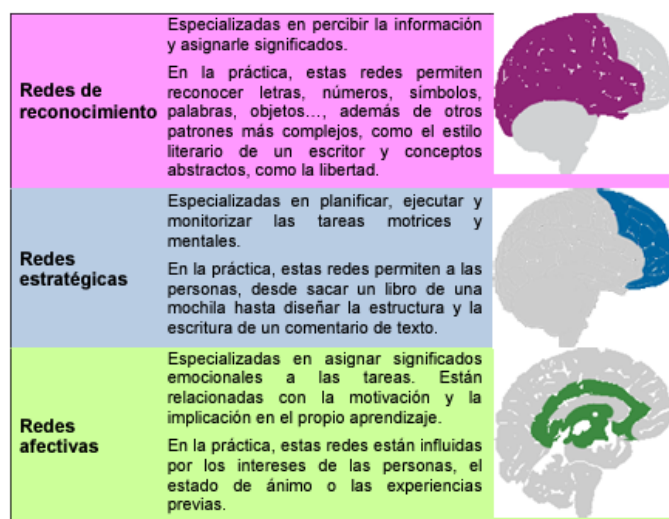


Figura 29: Redes cerebrales y aprendizaje. Elaborada por Pastor et al. (2014)

Los tres principios básicos son los siguientes:

- Principio I: proporcionar múltiples formas de representación de la información y los contenidos (el qué del aprendizaje), ya que los alumnos son distintos en la forma en que perciben y comprenden la información.
- Principio II. Proporcionar múltiples formas de expresión del aprendizaje (el cómo del aprendizaje), puesto que cada persona tiene sus propias habilidades estratégicas y organizativas para expresar lo que sabe.
- Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación (el porqué del aprendizaje), de forma que todos los alumnos puedan sentirse comprometidos y motivados en el proceso de aprendizaje.

Estos tres principios revelan la necesidad que los docentes ofrezcan al alumnado una variedad de opciones para acceder al aprendizaje. En particular, en el área matemática, el apartado anterior, expuso una serie de estrategias de enseñanza, recursos de aprendizaje y formas de representación de los objetos matemáticos que pueden ser de utilidad en el momento de implementar un contenido. Pero, aparte de aquello, también es relevante, el cómo el docente expresa los contenidos, desde las expresiones corporales que utiliza para captar la atención de los estudiantes, hasta el dar significado a lo que se enseña, mostrando que es aplicable a la cotidianeidad, para así mejorar la implicación del estudiante con su propio aprendizaje.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

Este estudio tiene, predominantemente, un enfoque Cualitativo pues “se estudiaron la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema” (Vera, 2008, p.1) y de carácter descriptivo, pues, busca recolectar información de acuerdo a los grupos de estudiantes participantes, para luego describir los hallazgos de lo investigado. También es exploratorio, puesto que, en Chile, actualmente son escasos los estudios sobre la incorporación del D.U.A. en aulas con PIE y, más aún en el objeto matemático de estudio que son las Transformaciones Isométricas y Teselaciones.

En la investigación, se busca describir fenómenos que ocurren en el aula tradicional con PIE con respecto a la enseñanza aprendizaje del concepto de Transformaciones Isométricas y Teselaciones de octavo año básico, a través de la aplicación de una secuencia de enseñanza que busca diversificar la transmisión de los contenidos a través de diferentes estrategias y recursos de aprendizaje. También, se contempla el análisis de resultados de los estudiantes según niveles de logro adquiridos en cada sesión, estos resultados se procesaron porcentualmente.

Se pretende analizar los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia de enseñanza, tanto en los resultados concernientes al material del estudiante, como en las apreciaciones de los estudiantes y docente en la encuesta final.

3.2 Etapas de la investigación

La metodología aplicada a la investigación es presentada a través de tres etapas:

- 1° Recopilación de información y Confección de la secuencia de enseñanza.
- 2° Aplicación de la secuencia de enseñanza.
- 3° Revisión e interpretación de los resultados.

A continuación, se detallan las etapas descritas anteriormente, junto con los objetivos y tareas asociadas:

Etapas	Objetivos	Tareas
Recopilación de información y Confección de la secuencia de enseñanza	• Revisión de literatura con respecto a los objetos matemáticos de estudio. • Revisión de literatura con respecto al D.U.A. • Revisión de documentos	• Análisis de los objetos matemáticos de estudio y sus propiedades. • Análisis de investigación del D.U.A. y sus

	ministeriales relacionados a la unidad y al Programa de Integración Escolar. • Confección de una secuencia de enseñanza en el contenido de Transformaciones Isométricas y Teselaciones de octavo básico, para el uso en aulas inclusivas. • Gestión de búsqueda y gestión de permisos de colegios participantes del estudio.	fundamentos teóricos. • Análisis de documentos y textos de estudio del MINEDUC. • Confección de la secuencia de enseñanza de cada clase, de manera que propicie la diversificación de la enseñanza. • Corrección de material a presentar en cada clase, bajo revisión de docente experto en matemática. • Creación de material definitivo a implementar. • Gestión de búsqueda de colegios que cumpliesen con las características de implementación de estudio. • Gestión de permisos éticos para participación de estudiantes.
Aplicación de la secuencia de enseñanza	• Aplicación de la secuencia de enseñanza en el contenido de Transformaciones Isométricas y Teselaciones de octavo básico.	• Aplicación del material del estudiante: Guía de Conceptos Básicos, Traslación, Rotación, Reflexión y Teselación; en dos colegios de

		aula regular con P.I.E.
Revisión e interpretación de los resultados	• Revisión del material aplicado a los estudiantes en ambos colegios de estudio. • Analizar los resultados de la secuencia de enseñanza a través de los datos obtenidos en el material aplicado en cada clase y en la encuesta realizada a los/as estudiantes y docente de matemática.	• Análisis de resultados obtenidos clase a clase en las guías de trabajo, aplicadas en ambos colegios. • Análisis de resultados de encuesta a estudiantes. • Análisis de resultados de encuesta a profesora de matemática. • Conclusiones finales para posibles nuevas intervenciones.

Tabla 3: Etapas de la Investigación. Elaboración propia.

El estudio surge de la necesidad de conocer estrategias de aprendizaje que sean aplicables en la clase de matemática y que cumplan con ser intencionadas y diseñadas con el fin de mejorar los aprendizajes de todos los estudiantes que conforman el aula.

Por ello, se fijó un objetivo principal el cual es identificar las estrategias y recursos de aprendizajes en aulas con PIE, favorecen el aprendizaje de los estudiantes en la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones. Con él surgen objetivos secundarios tendientes a hallar diferencias (si es que las hay) entre estudiantes del PIE y los que no pertenecen a él en cuanto a los niveles de logro alcanzados según los tipos de actividades programadas en el desarrollo de la unidad.

Para cumplir con el abordaje de los objetivos de estudio, se buscaron colegios que, en la actualidad, contaran con el P.I.E. y que tuvieran el nivel de octavo año básico. También se tomó en cuenta que fuesen colegios en los que la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones todavía no fuese abordada.

En cuanto al período del estudio, se contemplaron los siguientes tiempos para su ejecución, según las etapas descritas en el punto anterior:

Etapas	Tiempo estimado
Recopilación de información y Confección de la secuencia de enseñanza	Agosto- septiembre 2023
Aplicación de la secuencia de enseñanza	Octubre 2023
Revisión e interpretación de los resultados	Noviembre- diciembre 2023

Tabla 4: Tiempo estimado por etapa. Elaboración propia.

Para la aplicación de la secuencia de enseñanza se dispuso de material imprimible a los estudiantes, herramientas manipulativas (regla, compás, escuadra, transportador), material concreto (tijeras, pegamento, papel lustre, cartón piedra, lápices, goma, sacapuntas, lápices de colores) y recursos digitales (computador o notebook, proyector, software geogebra).

Del estudio se espera lograr una experiencia de aprendizaje que enriquezca los conocimientos de los estudiantes participantes, en cuanto a la adquisición de habilidades matemáticas bajo el sustento de la diversificación de la enseñanza a través de las diversas estrategias, recursos y representaciones llevadas a cabo en la aplicación de la unidad.

3.3 Participantes

Para la muestra del estudio, se seleccionaron dos colegios de la comuna de Providencia que cuentan con P.I.E. en el nivel de octavo básico. Algunas características de los participantes según el colegio de procedencia son:

Colegio1: colegio mixto, que cuenta con dos cursos por nivel, desde kínder a octavo básico. Los estudiantes de la muestra seleccionada en éste estudio, pertenecen a 8°A y 8°B 2023, que, en su conjunto, estaban conformados por 71 estudiantes, cuyas edades iban desde los 13 a los 15 años. Los estudiantes pertenecientes al PIE, son 14, de los cuales 6 estaban por Necesidades Educativas Permanentes (N.E.E.P.), de los cuales, 3 tenían Deficiencia Intelectual (D.I.) y 3 Trastorno del Espectro Autista (T.E.A.); los otros 8 estudiantes estaban por Necesidades Educativas Transitorias (N.E.E.T.).

Colegio2: colegio de mujeres, que cuenta con los niveles de octavo básico a cuarto año medio, teniendo solo un curso en octavo y seis cursos de primero a cuarto medio. Los estudiantes de la muestra seleccionada en éste estudio, pertenecen al 8°A 2023, que, en su conjunto, estaban conformados por 34 estudiantes, cuyas edades iban desde los 13 a los 15 años. Los estudiantes pertenecientes al PIE, son 5, de los cuales 1 estaba por Necesidades Educativas Permanentes (N.E.E.P.) y 4 estaban por Necesidades Educativas Transitorias (N.E.E.T.), entre los cuales una estudiante requería de silla de ruedas para desplazarse.

Cabe mencionar que, los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (N.E.E.) son beneficiarios de la subvención para la educación especial de acuerdo al decreto 170/2009, por lo que recibían apoyos dentro de la sala de clase de una profesora diferencial semanalmente, distribuidas en 4 horas en la asignatura de matemática y 4 horas en la asignatura de lengua y literatura.

Para fines de análisis de datos, los estudiantes han sido identificados según número, en el caso del Colegio1, de E1 a E71 y en el caso del Colegio 2, de E1 a E34.

3.4 Diseño Metodológico

En la presente sección se detallará la organización y los procedimientos realizados en el estudio, para dar respuesta a la problemática planteada y el cómo se prepararon, organizaron y aplicaron los instrumentos en la secuencia de enseñanza, con el fin de cumplir con la incorporación del D.U.A. en cada una de las sesiones.

3.4.1 Recursos para el aprendizaje

Los recursos para el aprendizaje que se contemplaron en la realización de la secuencia de enseñanza son el uso de material concreto y recursos digitales. Esto porque el uso de material concreto, es un recurso declarado en las orientaciones didácticas del Ministerio de Educación (2015), dentro de los objetivos de aprendizaje, y porque en la unidad se requiere que el estudiante maneje herramientas geométricas como lo es la regla, escuadra, compás y transportador. Además de ello, se usa material concreto manipulable como lo es el papel lustre, tijeras, pegamento, entre otros; ya que esto aporta a que el estudiante utilice sus sentidos en la construcción de representaciones y abstracciones del objeto matemático por medio de un objeto externo. Con respecto a esto, Piaget (1964) citado por Woolfolk (2006, p.41) menciona lo siguiente: “El conocimiento no es una copia de la realidad. Conocer un objeto, conocer un suceso, no implica sencillamente observarlo y hacer una copia mental de ellos. Conocer un objeto es actuar sobre él. Conocer es modificar, transformar y entender el proceso de esa transformación en un determinado objeto y como consecuencia entender la forma en cómo se construye ese objeto”.

También se hizo uso de recursos digitales, pues, se incluyen en las orientaciones didácticas del Ministerio de Educación (2015), por la forma en que permite mejorar la visualización de los contenidos. Algunos de los recursos digitales que se ocuparon son: un computador o notebook que prestó el colegio a cada estudiante, proyector para que la docente pueda mostrar a los estudiantes lo trabajado y software Geogebra. Algunas ventajas del software son identificados en un estudio de Auccahuallpa et al. (2018, p.273) de la siguiente manera: “los beneficios que promueve el uso de Geogebra son la comprensión creativa y dinámica de conceptos, el desarrollo del pensamiento crítico-analítico, del razonamiento lógico-matemático y del razonamiento numérico; la realización de demostraciones dinámicas; la verificación de conjeturas; el desarrollo de aprendizajes significativos; el despertar del interés

y la motivación en Matemática; el desarrollo de habilidades en el trabajo colaborativo y el de actitudes positivas hacia la Matemática”.

3.4.2 Diseño de la secuencia de enseñanza y descripción de las actividades

La secuencia de enseñanza está diseñada para ser aplicada en 5 sesiones, cada una de dos horas pedagógicas de duración. En la primera clase, se abarcan conceptos previos a la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones, como lo son el concepto de punto, recta, vector y polígono, necesarios para la comprensión de los contenidos de la unidad. También ésta sesión tiene como objetivo que los/as estudiantes exploren y se familiaricen en el uso del software Geogebra, con el cual, se trabajará en las siguientes sesiones.

En la segunda sesión, se abarcará el concepto de traslación y composición de traslaciones en el plano cartesiano. En la tercera sesión se contempla el concepto de rotación y composición de rotaciones en el plano cartesiano. En la cuarta sesión se contempla el concepto de simetría central y axial y la composición de simetrías dependiendo de las características de las rectas correspondientes. Por último, se contempla una quinta sesión que contempla la composición de transformaciones isométricas a través de teselaciones, para ello se hizo uso de algunos patrones de teselados de M. C. Escher.

En las primeras cuatro sesiones se contempla una guía de aprendizaje que contiene en una primera parte, el uso de material concreto para dar respuesta a las actividades. Luego, en la segunda parte, se incluye el uso de recursos virtuales (software Geogebra) para dar respuesta a las actividades que afianzan el concepto de la transformación isométrica correspondiente junto con la composición de ésta en el plano. Y la última actividad, que permite formalizar los conceptos a través de preguntas relativas a las regularidades encontradas en las tareas realizadas en la sesión y a la asociación de las actividades con el cotidiano de los estudiantes.

En la última sesión se contempla una guía de aprendizaje, donde en una primera parte se analizan diversos teselados realizados por M. C. Escher, en la que se espera, identifiquen las transformaciones isométricas realizadas en los diversos casos y el polígono base de cada patrón de teselación. En una segunda parte, se les solicita que realicen un teselado específico, en equipo, para luego replicarlo a través de material concreto.

En las primeras cuatro sesiones se debe hacer uso de la sala de computación, pues, algunas de las actividades requieren el uso de Geogebra. La última sesión se realizará en la sala de clases, para facilitar espacio de trabajo con material concreto.

Las preguntas de las sesiones apuntan a que el estudiante explore e indague, haciendo uso de los recursos brindados, para hallar la solución a los problemas y comunicar sus resultados. Cada guía va aumentando la complejidad de las preguntas conforme se avanza en ella. Las actividades están diseñadas,

además, de forma que contemplen algunas preguntas que sean cercanas al cotidiano de los/as estudiantes, de tal forma que puedan otorgarles un significado a los conceptos estudiados.

En cada sesión, se busca diversificar las estrategias de enseñanza, recurriendo a material concreto y a recursos virtuales, para propiciar que una mayor cantidad de estudiantes comprenda los conceptos.

En las primeras cuatro sesiones se les entrega material de forma individual, y en la última sesión, las actividades están orientadas al trabajo en equipo (idealmente un máximo de 4 integrantes).

Esta secuencia fue diseñada con base en el programa de estudios de Matemática de octavo básico, específicamente en la unidad 3, del eje de Geometría.

Los objetivos específicos que se abordan en la secuencia de enseñanza – aprendizaje son:

OA13: Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

- Los vectores para la traslación.
- Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión.
- Los puntos del plano para las rotaciones.

OA14: Componen rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Para poner en práctica la secuencia de enseñanza se contempla que los estudiantes posean los siguientes conocimientos previos: reconocer qué es un ángulo y sus características, reconocimiento del plano cartesiano y sus componentes, identificación y ubicación de puntos en el plano cartesiano, identificación y comprensión de los polígonos y sus componentes, como lo son los polígonos regulares e irregulares y sus características particulares.

Luego de cada sesión, se contempla una evaluación formativa individual del concepto tratado, que es revisada de manera conjunta con los alumnos a modo de ticket de salida.

A continuación, se muestra un diseño general de la planificación de las clases:

Unidad 3	Sub unidad: Transformaciones Isométricas y Teselaciones	Sesión	1
Objetivo General de la Subunidad		Resolver problemas que involucran movimientos de figuras en el plano cartesiano y la composición de movimientos.	

Aprendizaje Esperado		Identificar regularidades que se presentan al aplicar transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.		
Objetivo Específico de la sesión		Reconocer qué es un punto, segmento, recta, vector y polígono regular e irregular y representarlos en el plano cartesiano a través del software Geogebra.		
Contenidos				
Conceptuales		- Plano Cartesiano - Punto - Segmento - Vector - Polígono		
Actitudinales		- Presentan ideas y soluciones argumentando sus respuestas a los demás, con confianza de las propias capacidades.		
Momento de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención del docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	Anexo Guía n°1: “Explorando en Geogebra” Actividad 1: “Encontrando la figura”	Profesora dirige a los/as estudiantes a la sala de computación del establecimiento. Luego, enuncia verbalmente el trabajo que se realizará en la clase y evalúa a través de preguntas los conocimientos previos de los/as estudiantes. Profesora entrega la guía de trabajo individual. Luego explica que, en la clase, se trabajará en computador.	-Pizarra -Plumones -Guía impresa individual. Computador. -Software geogebra. -Proyector	25 min

		haciendo uso del software geogebra. Se describe qué es el software, cómo acceder a él y lo que nos permite realizar mostrando la barra de herramientas con cada una de las opciones. Se muestran las vistas disponibles en Geogebra clásico. En la primera actividad, se recuerda qué es un punto y la clasificación de los polígonos según la cantidad de sus lados.		
Desarrollo	Anexo Guía n°1: “Explorando en Geogebra” Actividad 2: “Vectores en Geogebra” Actividad 3: “Rectas en Geogebra”	En la segunda actividad profesora explica lo que es un vector y sus componentes principales: módulo, dirección y sentido. En la tercera actividad se recuerda qué es una recta, y qué significa que dos o más rectas sean paralelas, secantes y perpendiculares. Estudiantes realizan las actividades con	-Guía impresa individual. Computador. -Software geogebra. -Proyector	45 min

		guía y orientación de profesora.		
Cierre	Actividad de Cierre guía n°1. Anexo Evaluación Formativa: Conceptos Básicos.	Profesora va consultando a los/las estudiantes sobre los conceptos centrales de la clase. Luego, da las instrucciones para que respondan la actividad de cierre de la guía. Por último, se les entrega a los/las estudiantes la evaluación formativa n°1, en donde deben dar respuesta a tres preguntas que resumen lo visto en la clase.	-Guía impresa individual -Evaluación Formativa: Conceptos Básicos	20 min

Descripción de las actividades y orientaciones para el docente

Primera Sesión: Conceptos Básicos

Guía N°1: Conceptos Básicos

La guía tiene como objetivo que el/la estudiante logre: “Ubicar puntos, coordenadas de vértices de polígonos, polígonos, vectores y rectas utilizando herramientas virtuales, en particular, software Geogebra”

Antecedentes Curriculares asociados a la clase:

Objetivos de Aprendizaje:

Objetivo de Aprendizaje 12 (séptimo básico):

Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo:

- Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros.
- Puntos, como el punto medio de un segmento, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito.
- Triángulos y cuadriláteros congruentes.

Objetivo de Aprendizaje 14 (séptimo básico):

Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.

Indicadores de evaluación:

Construyen la recta perpendicular a un punto en una recta y reconocen que la recta perpendicular a un punto fuera de ella, tiene la distancia mínima entre el punto y la recta.

Aplican la construcción para resolver problemas de la vida diaria, mediante líneas perpendiculares, paralelas, bisectriz, triángulos y cuadriláteros.

Construyen segmentos y figuras en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, usando coordenadas enteras.

Dibujan figuras 2D a partir de los pares de coordenadas dadas, y leen y comunican las coordenadas de figuras 2D dadas en el sistema de coordenadas.

Conjeturan la forma y la ubicación de figuras 2D (rectángulo, cuadrado, paralelogramo y trapecio) a partir de los cuatro pares de coordenadas dadas, y las verifican pictóricamente.

Habilidades:

Identificar puntos y vértices de coordenadas de polígonos en el plano cartesiano.

Representar puntos, vectores, polígonos y rectas en el plano cartesiano, utilizando un procesador geométrico.

Tiempo: 2 horas pedagógicas.

Orientaciones al docente:

Para lograr los objetivos planteados, la guía se confeccionó de acuerdo a los momentos de la clase, cada uno de ellos, con una función específica:

Momento de Inicio: en esta sección de la guía, se comienza exponiendo qué es el software geogebra, con el cual se trabajarán en las clases siguientes. Con respecto a su acceso, se propone trabajar con geogebra clásico, desde un

computador que tenga internet. Luego se explica las formas de acceder al software, se ahonda en las opciones disponibles en la barra de herramientas, sobre todo, en las que serán más usadas en la secuencia de enseñanza.

Paralelamente a la explicación verbal de la profesora, los estudiantes pueden ir visualizando las distintas opciones en la guía y verificar con el computador cada una de las opciones desplegadas de la barra de herramientas.

Una vez realizado el primer acercamiento al software, se comienza con la actividad uno, donde los estudiantes deben ir ubicando los puntos que representan las coordenadas de los vértices de las figuras, para luego ir identificando qué tipo de polígono es el resultante, por último, el estudiante debe identificar la coordenada para formar un polígono determinado.

Momento de desarrollo: en esta sección de la guía, se ahonda en qué opciones de la barra de herramientas permiten trabajar con vectores y en los componentes de un vector: módulo (con cálculo correspondiente), dirección y sentido. Se muestra cómo formar un vector sabiendo las coordenadas de su origen y extremo, luego, se reconoce el módulo del vector extrayendo la distancia entre las coordenadas anteriores. Los/as estudiantes van siguiendo las instrucciones y van realizando los ejercicios propuestos.

En este momento, se sugiere que los/as estudiantes ya hayan trabajado con el concepto de vector, en clases anteriores, obteniendo el módulo con la fórmula de la raíz cuadrada correspondiente a sus coordenadas.

Luego, en la tercera actividad, se muestra cómo confeccionar una recta en geogebra, conociendo dos puntos que pertenecen a ella. Luego, se traza una recta paralela a ella usando un punto cualquiera fuera de la recta original; lo mismo se realiza para la recta perpendicular a la recta inicial. Por último, los/as estudiantes deben escribir dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta paralela y perpendicular respectivamente.

Aquí el docente podría ahondar en propiedades y relaciones relativas a las rectas, visualizándolas en geogebra o en la pizarra.

Momento de cierre: en esta sección se sintetiza verbalmente lo realizado en la clase y luego, se orienta a los estudiantes para que den respuesta a las preguntas finales, que tienen como objetivo que reconozcan los elementos geométricos que podemos representar en geogebra y en el cómo se presentan los vectores y rectas en nuestro cotidiano.

Luego, los estudiantes responden la evaluación formativa de la clase, en la que se presentan tres preguntas: la primera de representar puntos en un plano, la segunda de hallar el módulo de un vector y la tercera de reconocer si las rectas son secantes, paralelas o perpendiculares (caso particular de rectas secantes).

Unidad 3	Subunidad: Transformaciones Isométricas y Teselaciones	Sesión	2	
Objetivo General de la Subunidad		Resolver problemas que involucran movimientos de figuras en el plano cartesiano y la composición de movimientos.		
Aprendizaje Esperado		Identificar regularidades que se presentan al aplicar transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.		
Objetivo Específico de la sesión		Trasladar y componer traslaciones de figuras en el plano cartesiano e identificar regularidades correspondientes a dichos desplazamientos según los vectores dados.		
Contenidos				
Conceptuales		- Plano Cartesiano - Vector - Traslación - Composición de traslaciones		
Actitudinales		- Presentan ideas y soluciones argumentando sus respuestas a los demás, con confianza de las propias capacidades.		
Momento de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención del docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	Anexo Guía n°1: “Traslación en el Plano Cartesiano” Actividad 1: “Armando la chakana”	Profesora dirige a los/as estudiantes a la sala de computación del establecimiento. Luego, enuncia verbalmente el trabajo que se realizará en la clase y objetivos a cumplir. Luego, profesora entrega guía y explica el concepto de Traslación a través de un vector.	-Pizarra -Plumones -Guía impresa individual -Regla	25 min

		Luego se orienta a los/as estudiantes a realizar la actividad n°1: “armando la chakana”. Se van resolviendo las dudas.		
Desarrollo	Anexo Guía n°1: “Traslación en el Plano Cartesiano” Actividad 2: “Grafiquemos en Geogebra” Actividad 3: “Traslación más traslación”	Profesora solicita y orienta a que ingresen al software Geogebra de manera individual. Luego, se dan las instrucciones de la actividad 2 en que deben realizar determinados polígonos y ver regularidades en las coordenadas de los vértices homólogos, al aplicar un vector de traslación. Luego se dan las instrucciones y se orienta el trabajo de la actividad 3, en la que los/as estudiantes grafican un triángulo y realizan traslaciones sucesivas, para así, llegar a regularidades con respecto a la composición de traslaciones.	- Regla - Computador -Software geogebra -Proyector	45 min

Cierre	Actividad de Cierre guía n°2. Anexo Evaluación Formativa: Traslación	Profesora va consultando a los/las estudiantes sobre los conceptos centrales de la clase y los/as orienta a desarrollar la actividad de cierre presente en la guía. Por último, profesora entrega evaluación formativa n°2 de Traslación, en donde deben dar respuesta a dos preguntas.	-Guía impresa individual - Evaluación Formativa Traslación	20 min
--------	---	--	---	--------

Descripción de las actividades y orientaciones para el docente

Segunda Sesión: Traslación

Guía N°2: Traslación

La guía tiene como objetivo que el/la estudiante logre: “Realizar traslaciones y composición de traslaciones de figuras, de manera manual y con software geométrico, reconociendo las regularidades que se pueden presentar en este tipo de desplazamiento según los vectores dados”

Antecedentes Curriculares asociados a la clase:

Objetivos de Aprendizaje:

Objetivo de Aprendizaje 13:

Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

- Los vectores para la traslación.
- Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión.
- Los puntos del plano para las rotaciones.

Objetivo de Aprendizaje 14:

Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Indicadores de evaluación:

- Realizan traslaciones en el plano con vectores dados.
- Determinan el vector entre la imagen y la pre- imagen de 2 figuras 2D trasladadas y modelan la traslación y la combinación de traslaciones, por medio de vectores y la suma de ellos.
- Identifican rotaciones, reflexiones y traslaciones en situaciones cotidianas.
- Realizan diferentes combinaciones de traslaciones, reflexiones y rotaciones y reconocen las propiedades.
- Reconocen transformaciones isométricas dadas en el plano, identificando puntos importantes, como vector de traslación, centro de rotación, ángulo de rotación, eje o punto de reflexión.

Habilidades:

Representar traslaciones de figuras a través de desplazamientos verticales y horizontales.

Representar traslaciones y composición de traslaciones de figuras en el plano cartesiano a través de vectores dados.

Identificar regularidades que se presentan en la composición de traslaciones.

Resolver problemas que involucran traslaciones en el plano cartesiano.

Tiempo: 2 horas pedagógicas.

Orientaciones al docente:

Para lograr los objetivos planteados, la guía se confeccionó de acuerdo a los momentos de la clase, cada uno de ellos, con una función específica:

Momento de Inicio: en esta sección de la guía, se comienza con una reseña sobre qué es la traslación y qué es un vector de traslación. Luego, en la actividad 1, se realiza una breve descripción del símbolo “chakana” en la cultura aimara, para luego, realizar movimientos de polígonos para formar (como si fuese un rompecabezas) la chakana completa. Para ello, los estudiantes deben identificar el movimiento horizontal (izquierda o derecha) y vertical (arriba o abajo), tomando cada cuadradito como una unidad, que realiza cada pieza, y así, formar el vector de traslación correspondiente.

Momento de desarrollo: en esta sección de la guía, los/as estudiantes realiza la actividad 2, donde se presenta la traslación de un triángulo según un vector dado, con el apoyo de la docente, haciendo uso de geogebra. Las preguntas

apuntan a que el estudiante identifique que las coordenadas de la imagen serán equivalentes a la suma entre las coordenadas iniciales de la figura y las coordenadas del vector de traslación. Por último, los estudiantes de manera manual, deben esbozar la imagen del cuadrado trasladado según el vector dado.

Luego, en la actividad 3, se realiza la composición de traslaciones, en la que primero, se muestra un triángulo trasladado según un vector, y luego, se le aplica otro vector. Las preguntas apuntan a que los/as estudiantes identifiquen que el resultado de una composición de traslaciones es una traslación, cuyo vector será la suma de los vectores aplicados anteriormente, independiente del orden en que se hayan realizado los desplazamientos y a formalizar dicha regularidad.

Momento de cierre: en esta sección se sintetiza verbalmente lo realizado en la clase y luego, se orienta a los estudiantes para que den respuesta a las preguntas finales, que tienen como objetivo que reconozcan la importancia del vector de traslación, reconozcan en qué consiste la composición de traslaciones e identifiquen las traslaciones en su cotidianeidad.

Por último, los/las estudiantes contestan la evaluación formativa, allí se plantean dos preguntas en donde primero, deben realizar la traslación del triángulo según un vector dado y en la segunda, deben identificar el vector de traslación que desplaza el segmento AB.

Unidad 3	Subunidad Transformaciones Isométricas y Teselaciones	Sesión	3
Objetivo General de la Subunidad		Resolver problemas que involucran movimientos de figuras en el plano cartesiano y la composición de movimientos.	
Aprendizaje Esperado		Identificar regularidades que se presentan al aplicar transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.	
Objetivo Específico de la sesión		Rotar y componer rotaciones de figuras en el plano cartesiano e identificar regularidades correspondientes a dichos desplazamientos según los ángulos dados.	
Contenidos			
Conceptuales		- Plano Cartesiano - Ángulo - Rotación - Centro de rotación - Ángulo de rotación - Composición de rotaciones	

Actitudinales		- Presentan ideas y soluciones argumentando sus respuestas a los demás, con confianza de las propias capacidades.		
Momento de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención del docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	Anexo Guía n°3: “Rotación en el Plano Cartesiano” Actividad 1: “Guñelve”	Profesora dirige a los/as estudiantes a la sala de computación del establecimiento. Luego, enuncia verbalmente el trabajo que se realizará en la clase y objetivos a cumplir. Posteriormente, profesora entrega guía y explica el concepto de Rotación a través de un ángulo de rotación (que se tomará en sentido antihorario). Luego se orienta a los/as estudiantes a realizar la actividad n°1: “guñelve”. Se van resolviendo las dudas.	-Pizarra -Plumones -Guía impresa individual - Transportador -Papel lustre -Regla - Tijeras -Pegamento	25 min
Desarrollo	Anexo Guía n°3: “Rotación en el Plano Cartesiano” Actividad 2: “Grafiquemo	Profesora entrega la guía de trabajo individual, va dirigiendo y monitoreando el trabajo de los/as estudiantes a	-Guía impresa individual -Computador -Software geogebra -Proyector	65 min

	s en Geogebra” Actividad 3: “Rotación más rotación”	través de las actividades. En la actividad 2, los/las estudiantes realizan un polígono y lo rotan, tomando como centro de rotación el origen del plano cartesiano. Luego, en la actividad 3, los/as estudiantes realizan composición de rotaciones con centro en el origen y se verifican regularidades.		
Cierre	Actividad de Cierre guía n°3. Anexo Evaluación Formativa: Rotación	Profesora va consultando a los/las estudiantes sobre los conceptos centrales de la clase y los/as orienta a desarrollar la actividad de cierre presente en la guía. Por último, profesora entrega evaluación formativa n°3 de Rotación, en donde deben dar respuesta a dos preguntas.	-Guía impresa individual - Evaluación Formativa Rotación	20 min

Descripción de las actividades y orientaciones para el docente

Tercera Sesión: Rotación

Guía N°3: Rotación

La guía tiene como objetivo que el/la estudiante logre: “Realizar rotaciones y composición de rotaciones de figuras, de manera manual y con software geométrico, reconociendo las regularidades que se pueden presentar en este tipo de desplazamiento según los ángulos de rotación dados”

Antecedentes Curriculares asociados a la clase:

Objetivos de Aprendizaje:

Objetivo de Aprendizaje 13:

Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

- Los vectores para la traslación.
- Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión.
- Los puntos del plano para las rotaciones.

Objetivo de Aprendizaje 14:

Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Indicadores de evaluación:

- Realizan traslaciones en el plano con vectores dados.
- Determinan el vector entre la imagen y la pre- imagen de 2 figuras 2D trasladadas y modelan la traslación y la combinación de traslaciones, por medio de vectores y la suma de ellos.
- Identifican rotaciones, reflexiones y traslaciones en situaciones cotidianas.
- Realizan diferentes combinaciones de traslaciones, reflexiones y rotaciones y reconocen las propiedades.
- Reconocen transformaciones isométricas dadas en el plano, identificando puntos importantes, como vector de traslación, centro de rotación, ángulo de rotación, eje o punto de reflexión.

Habilidades:

Representar rotaciones de figuras a través de desplazamientos según un centro y ángulo determinado.

Representar rotaciones y composición de rotaciones de figuras en el plano cartesiano a través de ángulos dados.

Identificar regularidades que se presentan en la composición de rotaciones.

Resolver problemas que involucran rotaciones en el plano cartesiano.

Tiempo: 2 horas pedagógicas.

Orientaciones al docente:

Para lograr los objetivos planteados, la guía se confeccionó de acuerdo a los momentos de la clase, cada uno de ellos, con una función específica:

Momento de Inicio: en esta sección de la guía, se comienza con una reseña sobre qué es la rotación y se da el lineamiento de que se trabajará el movimiento del ángulo en sentido anti horario. Luego, se presenta la actividad inicial en la que se muestra el símbolo del guñelwe y se explica su importancia en la cultura mapuche, luego se presenta una parte del guñelwe y se les solicita que lo completen con papel lustre, se les entregan todos los implementos necesarios. Por último, es revisado en conjunto, para llegar a que el centro de rotación correspondía al centro del guñelwe.

Momento de desarrollo: en esta sección de la guía, los/as estudiantes realiza la actividad 2, en que se presenta la rotación de un triángulo con ángulo de rotación de 90° , 180° , 270° y 360° . Las preguntas apuntan a que identifiquen regularidades con respecto a las coordenadas al realizar los movimientos de la figura.

Luego, en la actividad 3, se realiza la composición de rotaciones, en las que a un cuadrado, deben aplicarla doble rotación. Se espera que con las preguntas guiadas, logren encontrar que la composición de rotaciones con un mismo centro es equivalente a una rotación.

Momento de cierre: en esta sección se sintetiza verbalmente lo realizado en la clase y luego, se orienta a los estudiantes para que den respuesta a preguntas relacionadas con las rotaciones en su cotidianeidad.

Por último, los/las estudiantes contestan la evaluación formativa, allí se plantean dos preguntas en donde primero, deben realizar la rotación de un cuadrado en 90° y anotar sus coordenadas y en la segunda deben rotar un segmento en 180° y anotar sus coordenadas. Ambas preguntas las pueden realizar usando geogebra o herramientas manipulables.

Unidad 3	Subunidad Transformaciones Isométricas y Teselaciones	Sesión	4	
Objetivo General de la Subunidad		Resolver problemas que involucren movimientos de figuras en el plano cartesiano y la composición de movimientos.		
Aprendizaje Esperado		Identificar regularidades que se presentan al aplicar transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.		
Objetivo Específico de la sesión		Realizar reflexiones de figuras en el plano cartesiano con respecto al eje X y eje Y, componer reflexiones en rectas que sean paralelas y secantes, e identificar regularidades correspondientes a dichos desplazamientos según el orden en que se aplican.		
Contenidos				
Conceptuales		- Plano Cartesiano - Reflexión - Eje de reflexión - Composición de reflexiones		
Actitudinales		- Presentan ideas y soluciones argumentando sus respuestas a los demás, con confianza de las propias capacidades.		
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención del docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	Anexo Guía n°4: "Reflexión en el Plano Cartesiano" Actividad 1: "Lukutuel"	Profesora dirige a los/as estudiantes a la sala de computación del establecimiento. Luego, enuncia verbalmente el trabajo que se realizará en la clase y objetivos a cumplir. Posteriormente, profesora entrega guía y explica el concepto de	-Pizarra -Plumones -Guía impresa individual -Papel lustre -Tijeras -Pegamento	25 min

		Reflexión a través de un eje de simetría, que se muestra en ejemplos, de forma vertical y horizontal. Luego se orienta a los/as estudiantes a realizar la actividad n°1: "Lukutuel". Se van resolviendo las dudas. Posteriormente se solicita a los/as estudiantes realizar su propio símbolo con el papel lustre otorgado, determinando el eje de simetría.		
Desarrollo	Anexo Guía n°4: "Reflexión en el Plano Cartesiano" Actividad 2: "Grafiquemos en Geogebra" Actividad 3: "Reflexión más reflexión"	Profesora entrega la guía de trabajo individual, va dirigiendo y monitoreando el trabajo de los/as estudiantes a través de las actividades. En la actividad 2, los/las estudiantes realizan un triángulo, en el que se aplica una reflexión con eje de simetría en la abscisa y luego, con eje de simetría en la ordenada.	-Guía impresa individual - Computador -Software geogebra -Proyector	45 min

		Luego, en la actividad 3, los/as estudiantes realizan composición de reflexiones con respecto a ejes de simetría con rectas paralelas y secantes, luego identifican regularidades que se presentan en ambos tipos de composición.		
Cierre	Actividad de Cierre guía n°4. Anexo Evaluación Formativa: Reflexión	Profesora va consultando a los/as estudiantes sobre los conceptos centrales de la clase y los/as orienta a desarrollar la actividad de cierre presente en la guía. Por último, profesora entrega evaluación formativa n°4 de Reflexión, en donde deben dar respuesta a dos preguntas.	-Guía impresa individual - Evaluación Formativa Rotación	20 min

Descripción de las actividades y orientaciones para el docente

Cuarta Sesión: Reflexión

Guía N°4: Reflexión

La guía tiene como objetivo que el/la estudiante logre: “Realizar reflexiones y composición de reflexiones de figuras, de manera manual y con software

geométrico, reconociendo las regularidades que se pueden presentar en este tipo de desplazamiento según los ejes de simetría dados”

Antecedentes Curriculares asociados a la clase:

Objetivos de Aprendizaje:

Objetivo de Aprendizaje 13:

Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

- Los vectores para la traslación.
- Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión.
- Los puntos del plano para las rotaciones.

Objetivo de Aprendizaje 14:

Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Indicadores de evaluación:

- Realizan traslaciones en el plano con vectores dados.
- Determinan el vector entre la imagen y la pre- imagen de 2 figuras 2D trasladadas y modelan la traslación y la combinación de traslaciones, por medio de vectores y la suma de ellos.
- Identifican rotaciones, reflexiones y traslaciones en situaciones cotidianas.
- Realizan diferentes combinaciones de traslaciones, reflexiones y rotaciones y reconocen las propiedades.
- Reconocen transformaciones isométricas dadas en el plano, identificando puntos importantes, como vector de traslación, centro de rotación, ángulo de rotación, eje o punto de reflexión.

Habilidades:

Representar reflexiones de figuras a través de desplazamientos según un eje de simetría.

Representar reflexiones y composición de reflexiones de figuras en el plano cartesiano a través de rectas paralelas y secantes

Identificar regularidades que se presentan en la composición de reflexiones.

Resolver problemas que involucran reflexiones en el plano cartesiano.

Tiempo: 2 horas pedagógicas.

Orientaciones al docente:

Para lograr los objetivos planteados, la guía se confeccionó de acuerdo a los momentos de la clase, cada uno de ellos, con una función específica:

Momento de Inicio: en esta sección de la guía, se comienza con una reseña sobre qué es la reflexión y se muestran ejemplos de reflexión de figuras a través de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. Luego, los estudiantes dibujan su propio ejemplo de simetría con respecto a un eje. En la actividad uno se explica qué es el lukutuel y su significado en la cultura mapuche, y luego se realizan preguntas concernientes a su simetría. Por último, los estudiantes deben crear su propio símbolo simétrico, con uso de papel lustre, tijeras, pegamento, mondadientes, lo realizan a través de la técnica del doblar del papel.

Momento de desarrollo: en esta sección de la guía, los/as estudiantes realizan la actividad 2, en que se presenta la traslación de un triángulo con respecto al eje x y eje y, luego se realizan preguntas que buscan identificar regularidades con respecto a las coordenadas de éstos movimientos.

En la actividad 3 se realizan composición de reflexiones, comenzando con la de un punto, para llegar a la de figuras con respecto a rectas paralelas y secantes. Aquí, se espera que los estudiantes se percaten de que la composición de reflexiones en rectas paralelas es equivalente a una traslación, y que en rectas secantes es equivalente a una rotación, cuyo ángulo es el doble del ángulo entre las rectas involucradas en la reflexión.

Momento de cierre: en esta sección se sintetiza verbalmente lo realizado en la clase y luego, se orienta a los estudiantes para que den respuesta a preguntas relacionadas con las reflexiones en su cotidianeidad.

Por último, los/las estudiantes contestan la evaluación formativa, en donde se plantean dos preguntas que implica realizar reflexiones de un triángulo con respecto al eje x y al eje y.

Observación: Aunque la clase estaba planificada para ser realizada en dos horas pedagógicas, en la implementación se pudo completar en cuatro horas pedagógicas. Esto se debió a la extensión y complejidad que implica la composición de reflexiones en torno a rectas paralelas y secantes, lo que no es trivial para los estudiantes.

Unidad 3	Subunidad Transformaciones Isométricas y Teselaciones	Sesión	5	
Objetivo General de la Subunidad		Componer traslaciones, rotaciones y simetrías en el plano cartesiano y en el espacio, y aplicarlo en la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.		
Aprendizaje Esperado		Identificar regularidades que se presentan en la composición de transformaciones isométricas, asociadas al movimiento de teselas en el plano cartesiano y espacio.		
Objetivo Específico de la sesión		Crear un patrón de teselación y con él, cubrir el plano a través de la composición de transformaciones isométricas.		
Contenidos				
Conceptuales		- Plano Cartesiano. - Traslación. - Rotación. - Reflexión - Composición de transformaciones isométricas. - Teselación - Patrón de teselación.		
Actitudinales		- Presentan ideas y soluciones argumentando sus respuestas a los demás, con confianza de las propias capacidades. - Trabajan en equipo, de forma responsable y proactiva, considerando y respetando el aporte de otros, y manifestando disposición de entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.		
Momento de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención del docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	Anexo Guía n°5: “Teselaciones”	Profesora enuncia verbalmente el trabajo que se realizará en la clase y evalúa a	-Pizarra -Plumones - Guía Impresa individual	10 min

	Actividad 1: “Descubriendo los movimientos”	través de preguntas los conocimientos previos de los/as estudiantes con respecto a las transformaciones isométricas. Se expone la relevancia histórica de M.C. Escher con la creación de las teselaciones y se proyectan distintos teselados, creados en geogebra, en donde de un polígono base se realza el patrón de teselación. Luego, los estudiantes deben realizar la actividad 1, en donde deben identificar cuál/es transformaciones isométricas están involucradas en el teselado.		
Desarrollo	Anexo Guía n°4: “Teselaciones” Actividad 2: “Creando nuestra teselación”	Profesora, entrega guía de trabajo en equipos de máximo cuatro integrantes, sobre teselaciones. Se explica actividad 2 en la que los/as estudiantes	-Guía impresa individual - Regla -Papel lustre -Plancha de cartón -piedra de 30cmx30cm - Tijeras Pegamento	65 min

		deben construir una teselación en base a un patrón, en éste caso, realizan el patrón “barco”. Se va orientando a los/as estudiantes en la confección del teselado.		
Cierre	Actividad de Cierre guía n°5. Anexo Evaluación Formativa: Teselación	Los/as estudiantes exponen en equipo, las teselaciones realizadas. Luego realizan actividad de cierre de la clase, en donde, deben esbozar su propio patrón de teselación. Profesora va consultando a los/las estudiantes sobre los conceptos centrales de la clase enfocándose en dónde están presentes en su cotidianeidad. Por último, los/as estudiantes realizan la actividad formativa de cierre.	- Proyector - Evaluación formativa de Teselaciones	15 min

Descripción de las actividades y orientaciones para el docente

Guía N°5: Teselación

La guía tiene como objetivo que el/la estudiante logre: “Reconocer las teselaciones y confeccionar una teselación según un patrón dado”

Antecedentes Curriculares asociados a la clase:

Objetivos de Aprendizaje:

Objetivo de Aprendizaje 13:

Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

- Los vectores para la traslación.
- Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión.
- Los puntos del plano para las rotaciones.

Objetivo de Aprendizaje 14:

Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Indicadores de evaluación:

- Realizan traslaciones en el plano con vectores dados.
- Determinan el vector entre la imagen y la pre- imagen de 2 figuras 2D trasladadas y modelan la traslación y la combinación de traslaciones, por medio de vectores y la suma de ellos.
- Identifican rotaciones, reflexiones y traslaciones en situaciones cotidianas.
- Realizan diferentes combinaciones de traslaciones, reflexiones y rotaciones y reconocen las propiedades.
- Reconocen transformaciones isométricas dadas en el plano, identificando puntos importantes, como vector de traslación, centro de rotación, ángulo de rotación, eje o punto de reflexión.

Habilidades:

Reconocer qué es una teselación y cómo se forma a través de un polígono regular como base.

Confeccionar en equipo una teselación según un patrón dado.

Crear su propio patrón de teselación.

Reconocer las teselaciones de figuras en nuestra vida cotidiana.

Tiempo: 2 horas pedagógicas.

Orientaciones al docente:

Para lograr los objetivos planteados, la guía se confeccionó de acuerdo a los momentos de la clase, cada uno de ellos, con una función específica:

Momento de Inicio: en esta sección de la guía, se comienza con una reseña sobre M.C Escher, sus obras y su aporte a la Matemática. Luego se muestran algunas teselaciones de Escher en geogebra y cómo surgen a través del método de extracción y acomodo de sectores a través de un polígono base. En la primera actividad, deben reconocer cuál sería el polígono base de una teselación de Escher y reconocer las transformaciones isométricas involucradas para conformar la teselación.

Momento de desarrollo: en esta sección los estudiantes se agrupan en equipos de dos a cuatro personas, se les entrega el material para la confección del polígono barco. Los estudiantes realizan el teselado según el patrón base mostrado en la guía.

Momento de cierre: en esta sección los estudiantes exponen sus teselaciones a los demás compañeros y luego crean su propio patrón de teselación. Posteriormente contestan preguntas relativas a la presencia de las teselaciones en su cotidianeidad.

Por último, realizan la evaluación formativa que consiste en descubrir las transformaciones isométricas presentes en dos teselaciones de M.C.Escher.

Observación: Aunque la clase estaba planificada para ser realizada en dos horas pedagógicas, finalmente se pudo completar en cuatro horas pedagógicas. Esto se debió al proceso de crear el patrón, cortarlo y pegarlo. Lo que tomó más tiempo del proyectado.

3.4.3 Incorporación del D.U.A.

Teniendo en cuenta lo descrito en el marco metodológico del estudio, vemos la importancia que tiene el considerar el D.U.A. en aulas P.I.E. no sólo para atender las necesidades que pudiesen tener este grupo de alumnos, sino que para dar diversas opciones de aprendizaje a todos los estudiantes que componen el aula.

Por ello, en la secuencia de enseñanza se incorpora elementos del D.U.A. para mejorar el acceso al aprendizaje de aquellos estudiantes que integran el aula matemática. En particular, se contemplaron las siguientes acciones dentro de la planificación de las sesiones:

- En la actividad inicial de Traslación, Rotación y Reflexión se incorporaron elementos inspirados en la etnomatemática. En específico

simbología aimara y mapuche. Esto para rescatar elementos culturales de pueblos originarios, y que los estudiantes visualicen que muchas de las confecciones indígenas integran éstos movimientos de figuras en su elaboración.

- Modalidad de trabajo individual, entre pares y en equipo dentro de las actividades de las guías impresas. Esto, para que los estudiantes pudiesen trabajar de manera colaborativa con sus compañeros, mejorando también la interacción entre ellos.
- Diversas formas de representación de los contenidos. Es así, como, por ejemplo, en las sesiones de Transformaciones Isométricas, docente mostraba el objeto y junto a él, se iban desarrollando representaciones visuales, algebraicas, simbólicas y verbales.
- Distintos materiales y recursos de aprendizaje. En la sección de transformaciones Isométricas, las clases requirieron el uso de herramientas geométricas, por ejemplo, regla y compás para la construcción de la figura imagen, en que docente describía y mostraba en pizarra, pasos para realizarlo. También se utilizó Geogebra, proyectando los pasos para la confección de la figura imagen. Por lo que los estudiantes pudieron elegir cuál opción les acomodaba más para completar la actividad. En la guía uno, se estuvo más dirigido a recursos digitales, pues, el fin era que exploraran con el software Geogebra, y en Teselaciones, la actividad principal de confección de la teselación era con uso de material concreto.
- Diversas formas de expresión de docente, al tratar los contenidos, con ello se usó lo verbal, visual, gestual, desplazamiento dentro de la sala, para captar el interés de los estudiantes y orientar el trabajo de éstos.
- En la actividad de cierre, predomina el acercamiento de los contenidos hacia la cotidianidad de los estudiantes, para que así, ellos le diesen sentido a lo abordado y pudieran visualizar que, en nuestro entorno inmediato, las Transformaciones Isométricas y Teselaciones se encuentran presentes.
- En todas las sesiones se usa un lenguaje inclusivo hacia la diversidad plurigenérica que puede haber en un aula.

Con estas acciones, se pretende que la secuencia de enseñanza respete las distintas formas de aprender de los estudiantes, más allá de las adecuaciones curriculares que puedan tener algunos, sino que se incluya a todos los estudiantes del curso.

3.4.4 Aplicación de la secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza se aplicó en 14 horas pedagógicas, distribuidas de la siguiente manera:

Objeto Matemático de estudio	Tiempo
Conceptos básicos de geometría	2 horas
Traslación	2 horas
Rotación	2 horas
Reflexión	4 horas
Teselación	4 horas

Tabla 4: Tiempos de aplicación de la secuencia de enseñanza. Elaboración propia.

Cabe mencionar que en los dos últimos temas se tuvo que agregar más tiempo, debido a que la extensión del desarrollo de las actividades fue mayor que el previsto inicialmente.

A docente P.I.E. y de Matemática del Colegio2, se les expuso en qué consistía el proyecto, y en específico los pasos para la implementación de la secuencia, previo a la aplicación de ésta.

Con respecto a los materiales y recursos necesarios para la implementación de la secuencia, el Colegio1 y Colegio2, otorgaron el uso de la sala de computación en el primer caso, y en el segundo se otorgaron notebooks que se dejaban con anticipación en sala de clases, para el uso de software Geogebra. Con respecto al material concreto, la docente que efectúa diseño de secuencia, provee de las herramientas necesarias a los estudiantes.

La docente P.I.E acompañó a docente de Matemática en la realización de la secuencia en dos ocasiones (las correspondientes según decreto), en las que iba apoyando a los estudiantes incluidos en el programa que lo requiriesen.

3.5 Plan de análisis de datos

Contemplando las preguntas de estudio, los datos son analizados formando grupos de estudiantes, según su pertenencia o no al P.I.E. de sus respectivos colegios. Es así como se distinguirán 4 grupos de estudio:

- G1: estudiantes del Colegio1 que pertenecen al PIE.
- G2: estudiantes del Colegio1 que no pertenecen al PIE.
- G3: estudiantes del Colegio2 que pertenecen al PIE.
- G4: estudiantes del Colegio2 que no pertenecen al PIE.

Esto, para identificar si existen diferencias significativas en cuanto a los aprendizajes de estos grupos de estudiantes de acuerdo al recurso utilizado.

Para medir los aprendizajes de los estudiantes se realizó un análisis de los resultados en las guías impresas, fijando categorías de niveles de logro, según

el porcentaje de respuestas correctas obtenido por los estudiantes, como se muestra a continuación:

Porcentaje	Nivel de Logro
100% - 81%	Avanzado
80% - 61%	Adecuado
60% - 41%	Básico
40%-21%	Inicial
20%- 0%	Insatisfactorio

Tabla 6: Porcentaje según nivel de logro. Elaboración propia.

La descripción de cada categoría es la siguiente:

Avanzado: el estudiante logra dar respuestas correctas a la mayoría de las preguntas planteadas en la guía, utilizando los recursos de aprendizaje propuestos y argumentando de manera óptima sus soluciones, mostrando amplio conocimiento en el tema tratado.

Adecuado: el estudiante logra dar respuesta correcta a un alto porcentaje de preguntas planteadas en la guía, pero, no logra contestar y argumentar de manera adecuada todas las preguntas, mostrando un conocimiento suficiente del contenido tratado.

Básico: el estudiante logra respuestas correctas a algunas de las preguntas planteadas en la guía, pero muestra un conocimiento parcial del contenido tratado.

Inicial: el estudiante logra un bajo nivel de respuestas correctas a las preguntas planteadas en la guía, mostrando un conocimiento elemental del contenido tratado.

Insatisfactorio: el estudiante logra dar respuestas correctas a un muy bajo porcentaje de preguntas o no contesta, mostrando conocimientos insuficientes en el contenido tratado.

Cada guía con sus actividades fue revisada y luego se recopilaron los resultados en un procesador de datos, para visualizar de mejor manera los porcentajes de logro obtenidos.

Además, se contemplaron dos actividades claves de cada una de las sesiones, para analizar el desempeño de los estudiantes, con el fin de reconocer los niveles de logro alcanzados por todos los estudiantes y ejemplificar el tipo de respuesta dado por ellos.

También se analizaron los resultados de los estudiantes en la evaluación formativa correspondiente a cada sesión, la cual, constaba de dos preguntas del contenido tratado. Según las respuestas correctas se categorizó en No Logrado (N.L.), Medianamente Logrado (M.L.) y Logrado (L).

Éstas categorías, asociadas a los resultados de las evaluaciones formativas de cada sesión se detallan a continuación:

Logrado(L): los estudiantes contestan de forma correcta y completa, ambas preguntas de la evaluación formativa.

Medianamente Logrado(M.L.): los estudiantes contestan ambas preguntas, pero las respuestas son incompletas, o solo contesta una de ellas de forma correcta y completa.

No Logrado (N.L.): los estudiantes contestan ambas preguntas de manera incorrecta, o no contestan.

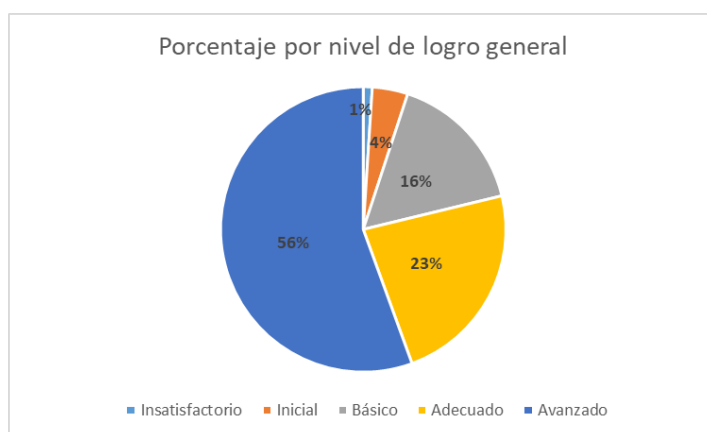
Por último, se contempló el análisis de una encuesta de carácter anónimo, efectuada a los estudiantes para recoger sus apreciaciones sobre la secuencia de enseñanza; y una encuesta a la docente de Matemática del Colegio2.

CAPÍTULO IV ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En éste capítulo se analizan los resultados de las respuestas de los estudiantes al material otorgado en cada sesión, tanto en la guía impresa como en la evaluación formativa. Los resultados se categorizaron de acuerdo a las respuestas correctas de acuerdo a la clasificación presente en la sección anterior. A continuación, se detallan los hallazgos de cada sesión.

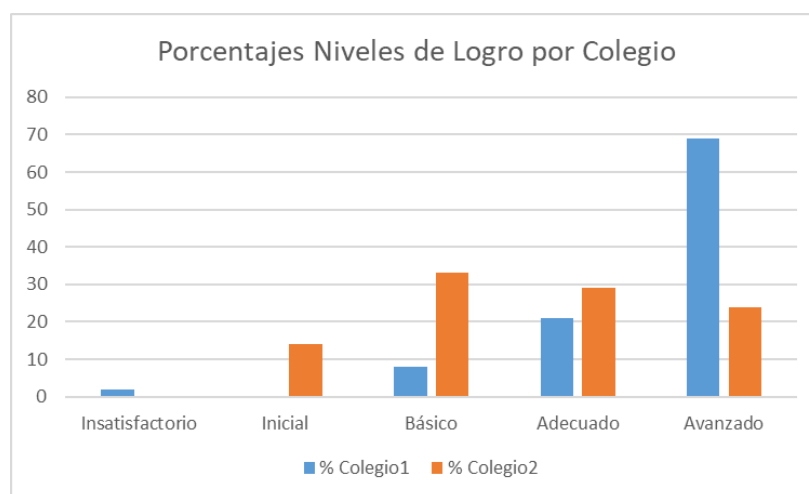
4.1 Hallazgos Sesión 1: Conceptos Básicos

En el material del estudiante, guía n°1: Conceptos Básicos, podemos ver el siguiente gráfico correspondiente a los resultados generales según las categorías descritas anteriormente:



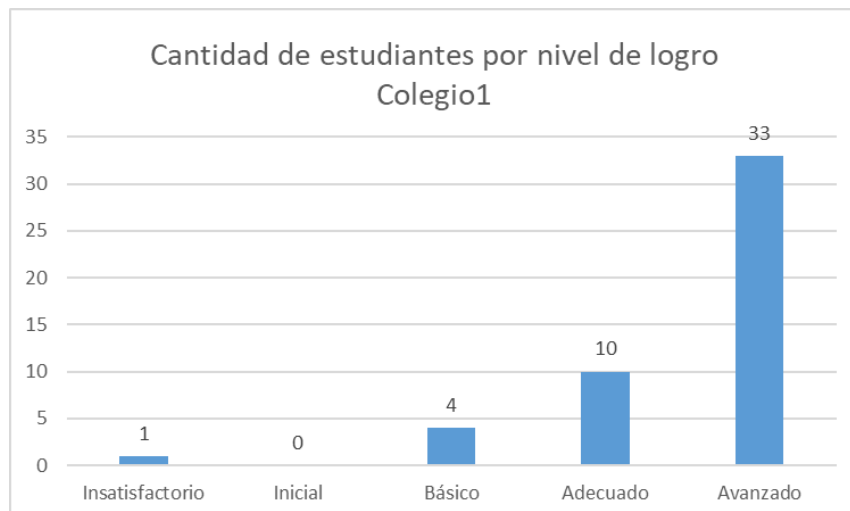
Por lo que podemos ver, aproximadamente el 80% de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Adecuado o Avanzado.

Si clasificamos los resultados según el colegio de aplicación del instrumento, podemos obtener los siguientes resultados de nivel de logro:

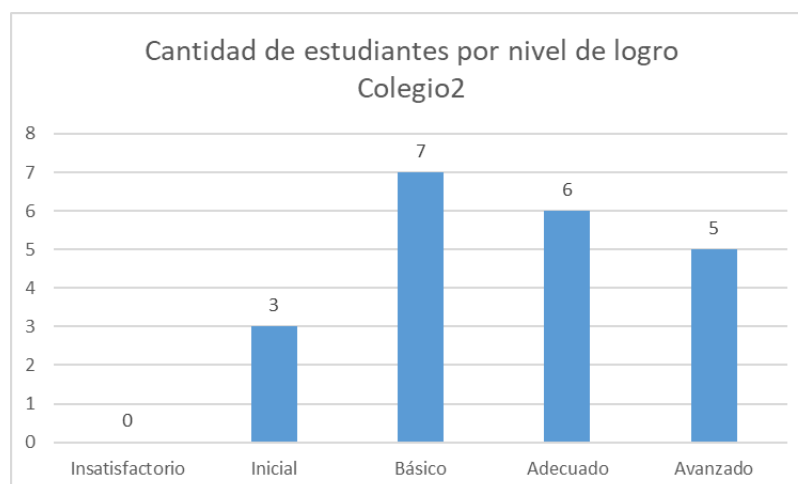


En el Colegio1 hubo una mayor cantidad de estudiantes se encuentra en un nivel avanzado, con un 69%. En el Colegio2 la mayor cantidad de estudiantes se encuentra en un nivel básico con un 33%, le sigue un 29% en nivel adecuado y 24% en avanzado.

Siguiendo con el análisis, la cantidad específica de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio1 fueron los siguientes:



La cantidad de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio2 fueron los siguientes:



Los niveles de logro de los estudiantes del Colegio1 van incrementando la cantidad de estudiantes hacia los logros de nivel superior, obteniendo Avanzado 33 estudiantes y 10 Adecuado. En cambio, en el Colegio2, la cantidad de estudiantes por nivel de logro está más disgregado, teniendo 7 estudiantes básico en el material propuesto, y a su vez 6 estudiantes con nivel adecuado y 5 avanzado, aun así, la mayoría de los estudiantes se encuentra en los tres niveles de logro superiores.

Si realizamos un análisis de éstos resultados según la pertenencia o no de los estudiantes al PIE, podemos categorizar a los estudiantes en cuatro grupos que se detallan a continuación y que serán también los contemplados en los análisis de las sesiones siguientes:

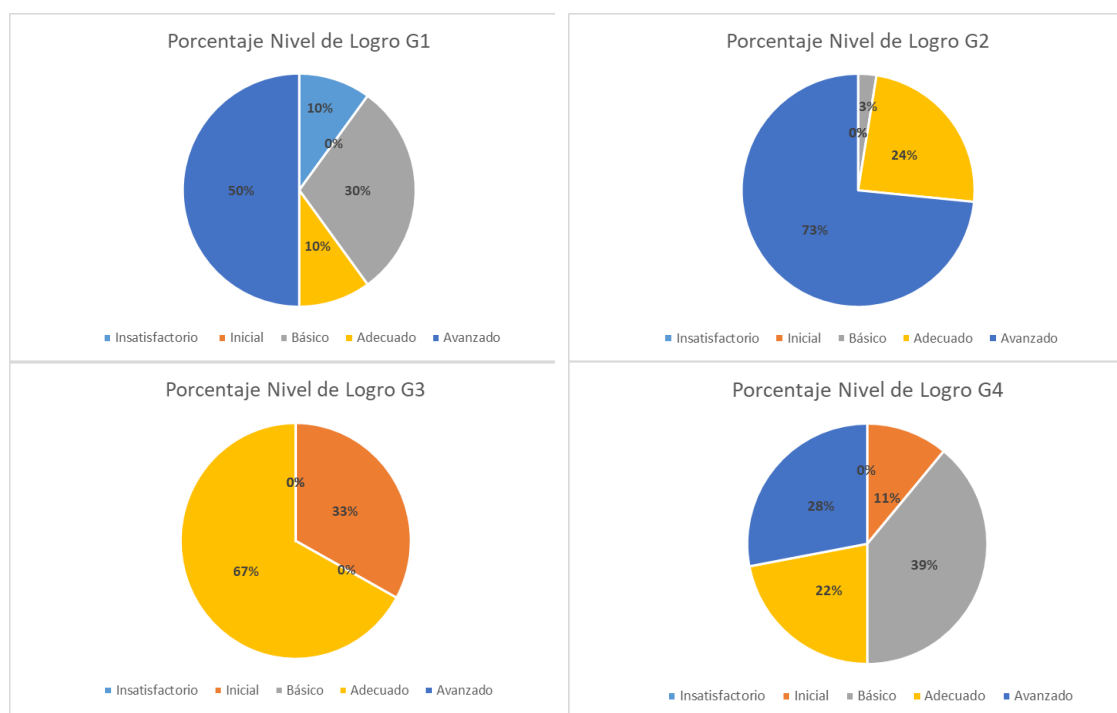
G1: estudiantes del Colegio1 que pertenecen al PIE.

G2: estudiantes del Colegio1 que no pertenecen al PIE.

G3: estudiantes del Colegio2 que pertenecen al PIE.

G4: estudiantes del Colegio2 que no pertenecen al PIE.

Los porcentajes de nivel de logro fueron los siguientes:



Analizando los gráficos anteriores, podemos ver que en el grupo G1, la mitad de los estudiantes está en un nivel de logro Avanzado, y un 10% en Adecuado, lo que muestra que hubo un buen desarrollo de las actividades propuestas, ya sea de manera manual o virtual.

Con respecto al grupo G2, el 97% de los estudiantes está en un nivel Avanzado o Adecuado, lo que muestra un excelente desempeño en las actividades propuestas.

En el grupo G3, el 67% de los estudiantes está en un nivel Adecuado y el 33% restante en insuficiente, esto puede deberse, a que ésta guía era un acercamiento al manejo de software geométrico y, en específico, a la confección de objetos geométricos, ya sea de manera manual o virtual.

En el grupo G4, el 50% de los estudiantes obtuvo un nivel Adecuado o Avanzado, el 39% obtuvo un nivel básico y el 11% inicial, por lo que los resultados fueron más diversos que en los grupos anteriores.

Por lo que los estudiantes pertenecientes al PIE del Colegio1, lograron niveles de logro superiores, obteniendo un 50% Avanzado, comparados con el grupo PIE del Colegio2, en donde ningún estudiante entró en dicho nivel. Esto se debe a que el recurso virtual utilizado, Geogebra, favoreció más a dicho grupo del Colegio1, y la estrategia de trabajo individual es algo a lo que también estaban más acostumbrados.

Con respecto a los estudiantes que no pertenecen al PIE, también se dio que los niveles de logro fueron superiores en el Colegio1, comparado con sus pares del Colegio2. Podemos notar, que en general, las estrategias y recursos utilizados en la sesión 1 favorecieron, en mayor medida, a los estudiantes del Colegio1. En el Colegio2, las unidades anteriores se habían realizado con clases expositivas, con poco uso de material concreto y sin uso de recursos virtuales, por lo que el cambio de estrategias pudo influir en las diferencias entre los colegios de estudio.

Con respecto al análisis a preguntas clave de la guía, podemos ver que en la actividad 3, ejercicio a), decía:

“En cada caso, a partir de los puntos dados, traza una recta. Posteriormente, realiza una recta paralela y una perpendicular a ella utilizando Geogebra. Luego, anota dos puntos cualquiera que pertenezcan a la recta paralela y dos que pertenezcan a la recta perpendicular de la recta inicialmente construida”

	Puntos de recta paralela	Puntos de recta perpendicular
a) A(2,5) y B(3,8)		

Se obtuvo un 90% de respuestas correctas de parte de los estudiantes (62 estudiantes contestaron correctamente). Este alto porcentaje de respuestas acertadas se puede deber a la explicación previa realizada por la docente, posterior a la creación de la recta $\overline{AB}$ en geogebra, en donde se expone que hay infinitas rectas que pueden ser creadas y que cumplen con ser paralelas a la recta $\overline{AB}$, y asimismo infinitas rectas que pueden ser perpendiculares. Para esto también, se les recuerda el concepto de pendiente de la recta visto con anterioridad y la conexión entre la pendiente de dos rectas para que exista perpendicularidad o paralelismo entre ellas. Dicha explicación se realiza de manera verbal, con representación en pizarra y además con uso de geogebra. A los estudiantes se les da un ejemplo de recta que es paralela y perpendicular a la recta $\overline{AB}$, en geogebra, pero ellos deben crear otra recta que sea paralela y otra perpendicular y ubicar en ellas dos puntos cualquiera, de la infinidad de puntos, que pueden pertenecer a ellas, esto lo pueden realizar a través del mismo software o de manera manual.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

Estudiante E61:

linea	Puntos de recta paralela	Puntos de recta perpendicular
a) A(2,5) y B(3,8)	(4,4) y (6,10)	(-2,4) y (-11,7)

Estudiante E62:

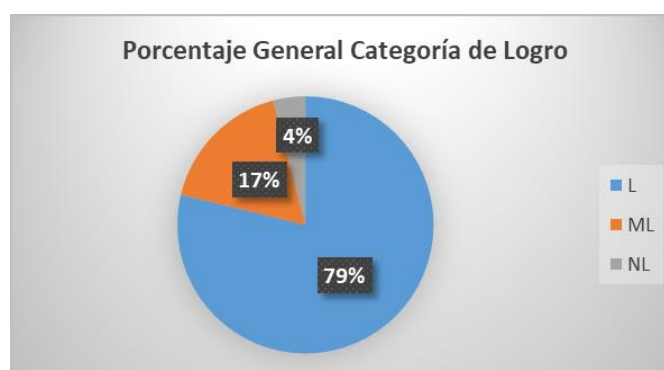
	Puntos de recta paralela	Puntos de recta perpendicular
a) A(2,5) y B(3,8)	c(-1,5) d(0,8)	e(3,2) f(0,3)

Estudiante E45:

	Puntos de recta paralela	Puntos de recta perpendicular
a) A(2,5) y B(3,8)	(-3.66, -2.98) (1.69, 13.08)	(-8.18, 5.39) (4.48, 1.17)

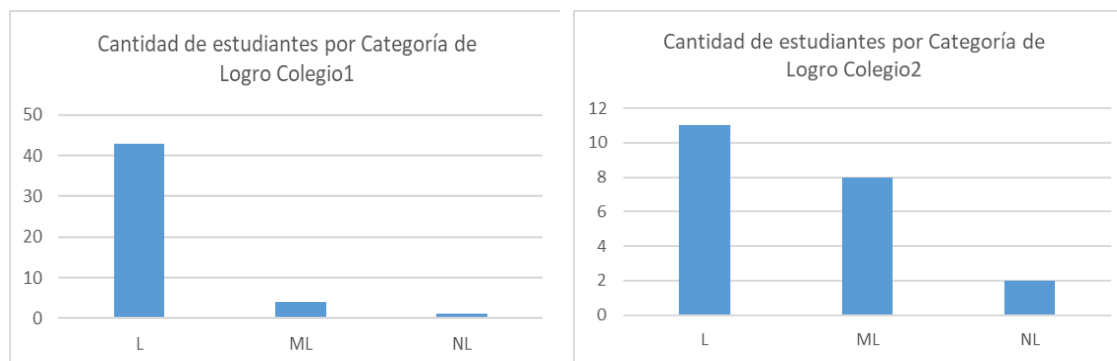
En los tres casos anteriores, los estudiantes dieron respuestas correctas con respecto a las coordenadas de los puntos, es más, podemos notar que las respuestas dadas pueden ser muy diversas, de acuerdo a la creación de cada estudiante de la recta paralela y perpendicular asociada a la recta $\overline{AB}$, inclusive en algunos casos, se pueden obtener coordenadas decimales.

Con respecto a los resultados de la evaluación formativa de la sesión, la cantidad de estudiantes que se encuentra en cada categoría, se muestra a continuación:



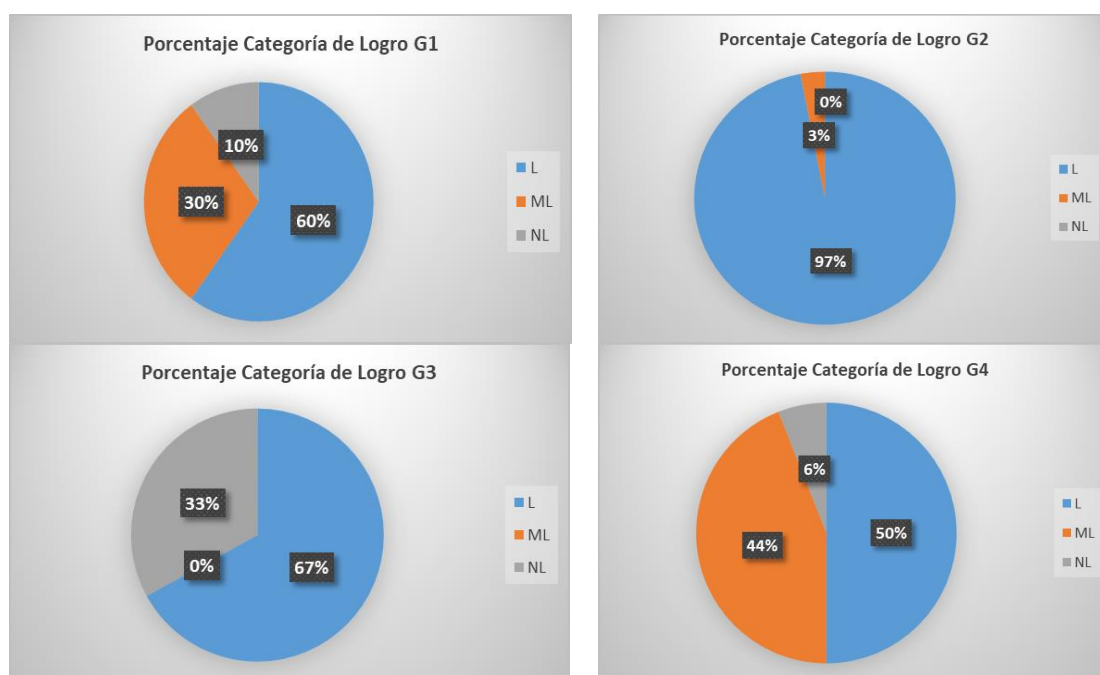
Por lo que la mayoría de los estudiantes obtuvo ambas respuestas correctas y completas o medianamente logradas, y solo un 4% no logró contestar correctamente o no contestó.

En cuanto a los resultados por colegio podemos ver lo siguiente:



Por lo que en el Colegio1 hubo una mayor cantidad de estudiantes con categoría L, versus el Colegio2 en donde los resultados estuvieron más distribuidos hacia la categoría L y ML.

En cuanto a la distribución de Categoría de Logro según los grupos de estudio podemos ver los siguientes porcentajes:



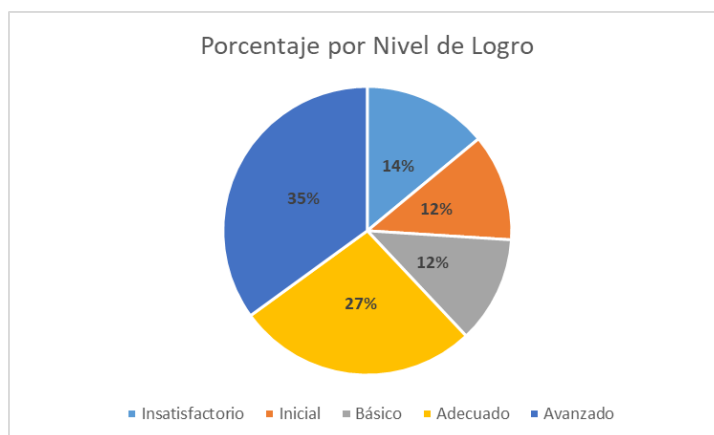
Por lo que en el grupo G1 y G3, se obtuvo aproximadamente que un 60% de los estudiantes contestó correctamente ambas preguntas, obteniendo un mayor porcentaje en la categoría ML el grupo G1.

Con respecto al grupo G2 y G4 existe una mayor diferencia con respecto a las categorías de logro, pues en el grupo G2, la mayoría de los estudiantes logra contestar correctamente ambas preguntas de la evaluación formativa y solo un 3% obtiene la categoría de Medianamente Logrado. En cambio, en G4 existe

un 50% de estudiantes en la categoría ML o NL, y el otro 50% obtiene L. Esto se puede deber, a lo expresado anteriormente con la guía impresa, que en general, los estudiantes del liceo 2 tenían un menor dominio de las habilidades que se trabajaron en esta primera sesión, que aborda contenidos previos, y que fue la primera clase de conocer y aplicar el software Geogebra para desarrollar sus actividades, a pesar de que la evaluación formativa no requería precisamente uso de software.

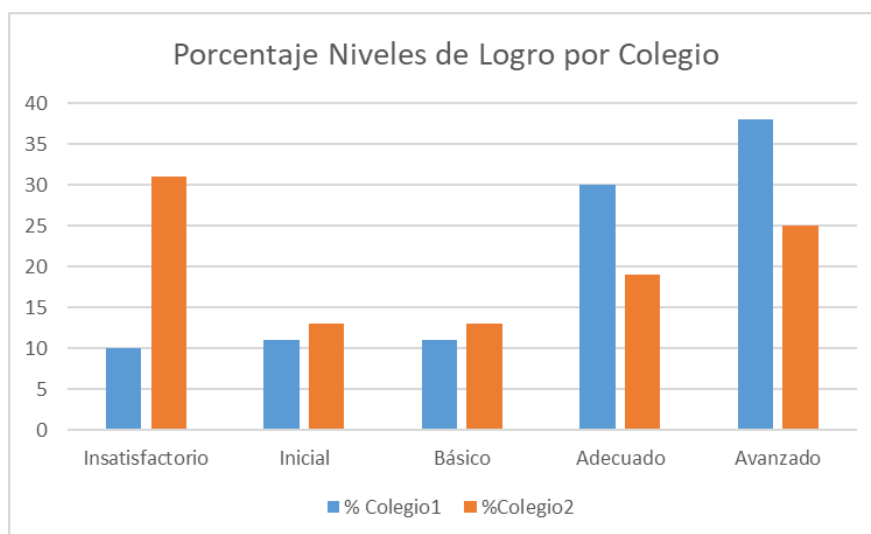
4.2 Hallazgos Sesión 2: Traslación

En el material del estudiante, guía n°2: Traslaciones en el Plano Cartesiano, podemos ver el siguiente gráfico correspondiente a los resultados generales según las categorías descritas anteriormente:



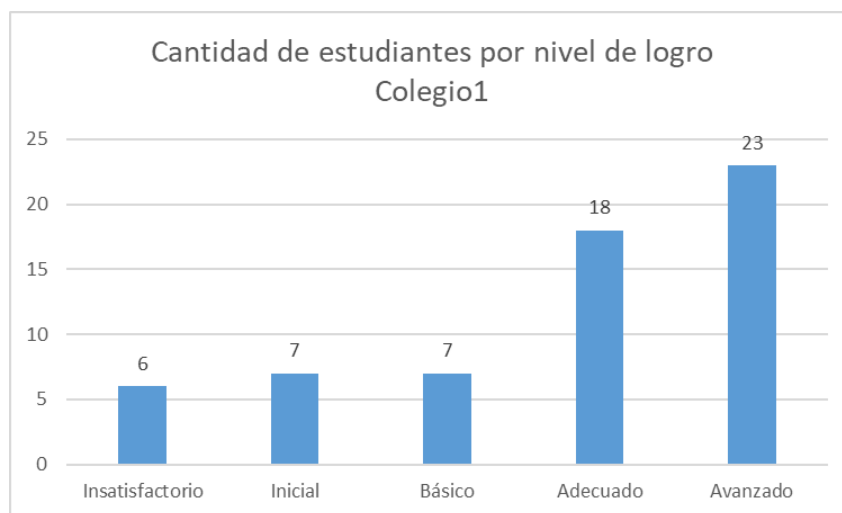
Podemos ver que sobre el 60% de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Adecuado o Avanzado.

Si clasificamos los resultados según el colegio de aplicación del instrumento, podemos obtener los siguientes resultados de nivel de logro:

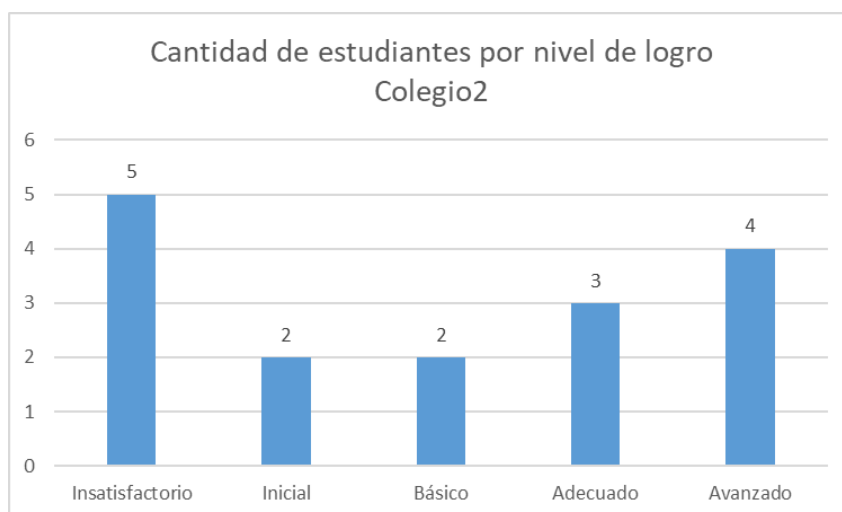


El Colegio1 obtuvo mejores niveles de logro que el Colegio2, en el cual, hay un 31% de estudiantes en un nivel insatisfactorio con respecto a las respuestas dadas en la guía. Una de las posibles causas de estos resultados puede deberse a que los/as estudiantes del Colegio1, frecuentaban el uso de software Geogebra y de material concreto desde séptimo básico en clases de Matemática; en cambio, en el Colegio2 los estudiantes acostumbraban a tener clases en que se ocupaba como recurso solo la pizarra y presentaciones en Power Point. Por lo que el cambio de recursos de aprendizaje, en esta guía en donde se implementa además del software material manipulable, pudo haber causado dificultades al realizar las actividades propuestas.

Siguiendo con el análisis, la cantidad específica de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio1 fueron los siguientes:



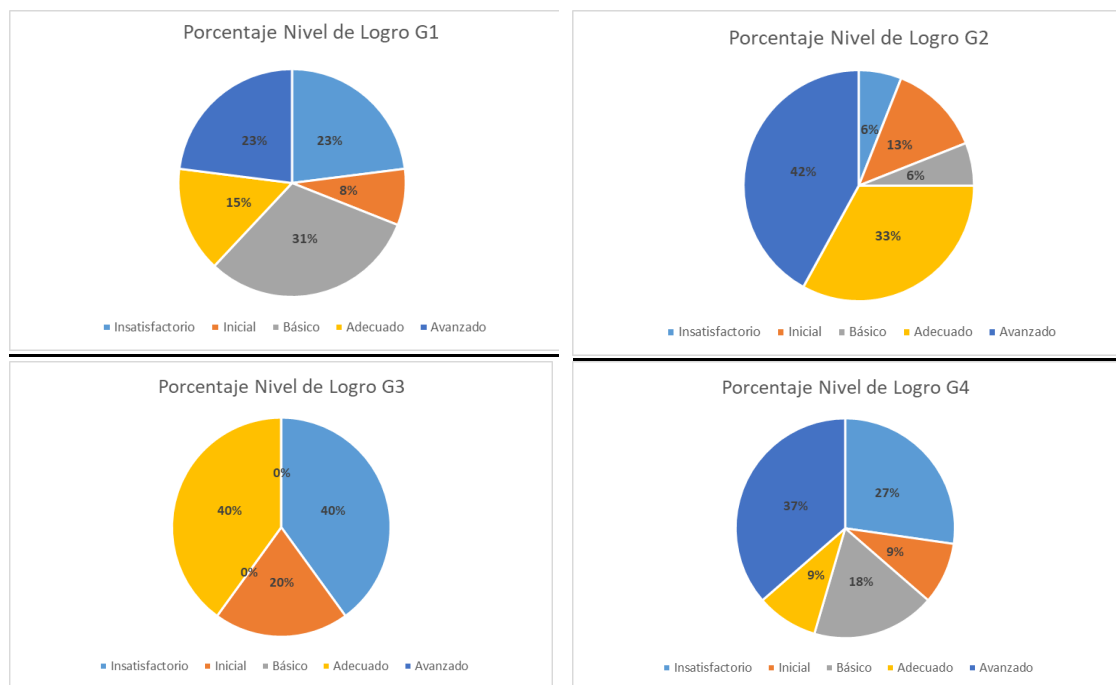
La cantidad de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio2 fueron los siguientes:



Por lo que podemos ver que, los niveles de logro de los estudiantes del Colegio1 se van incrementando hacia los logros de nivel superior, obteniendo Avanzado 23 estudiantes y 18 Adecuado. En cambio, en el Colegio2, la cantidad de estudiantes por nivel de logro está más disgregado, teniendo 5

estudiantes insatisfactorio en el material propuesto, y a su vez 4 estudiantes con nivel Avanzado.

Los porcentajes de niveles de logro según grupos de estudiantes fueron los siguientes:



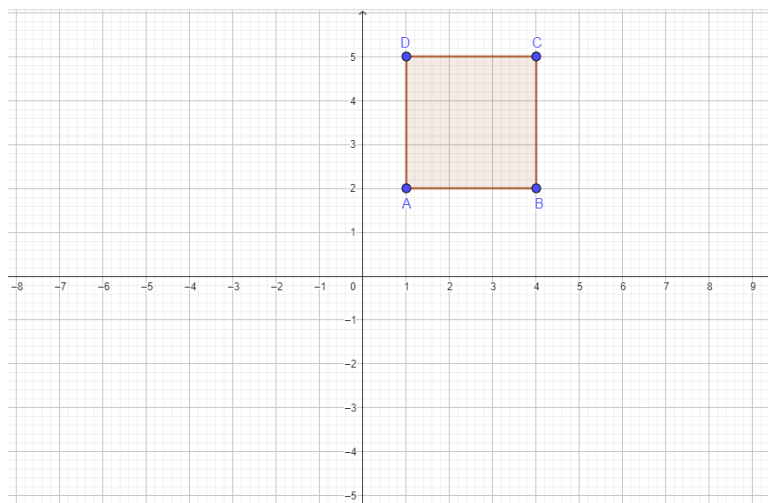
Podemos ver que el grupo G3 sigue la misma tendencia general de resultados con respecto a los porcentajes generales del Colegio2, pues, podemos identificar que un 40% de los estudiantes se encuentra en nivel insatisfactorio, un 40% adecuado, y un 20% en nivel inicial. Con respecto al grupo G1, cerca de un 70% de los estudiantes se encuentra dentro de los tres niveles de logro superiores, lo que sigue también la tendencia de resultados generales del Colegio1, en donde los tres niveles superiores alcanzan sobre el 70% de los estudiantes.

Con respecto a lo anterior, se puede ver que no hay diferencias significativas en cuanto a los niveles de logro alcanzados por los estudiantes, ya sean del PIE o no, todos están alcanzando aprendizajes similares a través de los recursos de enseñanza otorgados en el material de la guía de Traslación.

En cuanto a los resultados por Colegio, el Colegio 1 muestra niveles de logro superiores, obteniendo una mayor cantidad de estudiantes en nivel Avanzado; y los grupos G1 y G3 se muestran más descendidos que G2 y G4.

Con respecto al análisis de las preguntas clave de la guía, podemos ver la pregunta n°4 de la actividad 2, que decía:

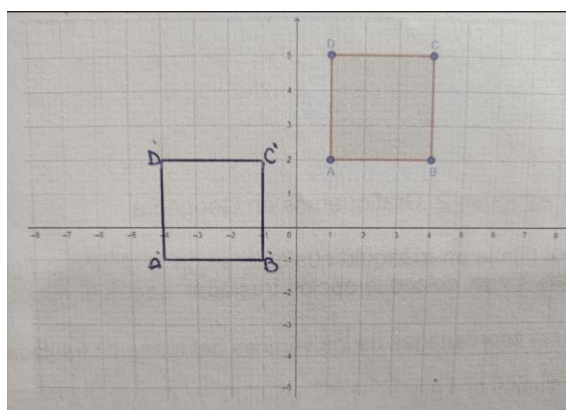
4) Según lo anterior, dibuja la Imagen del cuadrado, si es trasladado según el vector $\vec{v} = (-5, -3)$



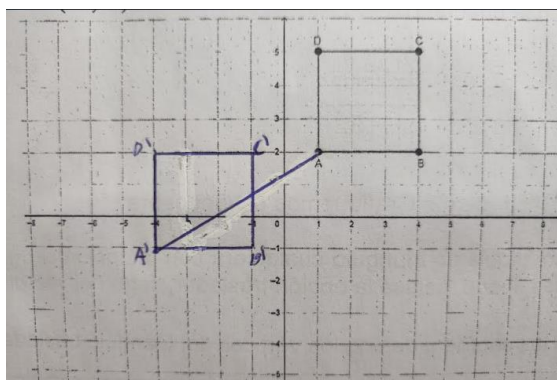
Se obtuvo un 74% de respuestas correctas de parte de los estudiantes (54 estudiantes). Este alto porcentaje de respuestas acertadas se puede deber al tránsito que existe en las preguntas anteriores, que conllevan a realizar la representación del cuadrado trasladado según el vector de manera correcta. También, recordar que ésta pregunta se dejó abierta para que los estudiantes la desarrollaran de la manera que más les acomodara. Fue así, como algunos utilizaron el software Geogebra, crearon el vector y realizaron la traslación, luego, esbozaron lo que aparecía en él en su guía; otros estudiantes utilizaron regla graduada, con la que se desplazaron 5 cuadritos a la izquierda y 3 hacia abajo hasta encontrar las coordenadas de los vértices homólogos del cuadrado.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

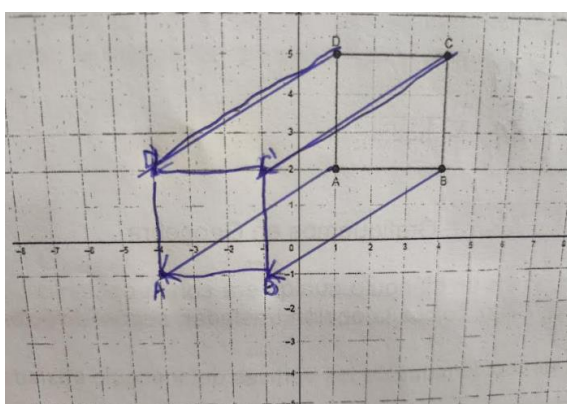
Respuesta estudiante E63:



Respuesta estudiante E61:



Respuesta estudiante E10:



Otra pregunta clave es la n°5 de la actividad 3, en donde, los estudiantes debían generalizar, las coordenadas obtenidas al realizar una composición de traslaciones:

- 1) Dado lo anterior, si tenemos un punto $P(x,y)$ y realizamos una traslación según un vector $\vec{v} = (a,b)$ seguida de otra traslación según un vector $\vec{u} = (c,d)$. ¿Cuáles serían, de forma general, las coordenadas del punto homólogo?(una vez aplicadas las dos traslaciones, primero por v y luego por u)

Se obtuvo un 71% de respuestas correctas de parte de los estudiantes (55 estudiantes). Este alto porcentaje de respuestas correctas, puede deberse al proceso que se realiza al ir visualizando en el software Geogebra, primero las coordenadas de los vértices de la primera traslación, con números concretos, luego se realiza la segunda traslación y también se solicitan las coordenadas de la figura resultante. Por lo que previamente, los estudiantes dan con la relación de suma entre los vectores que producen los desplazamientos, así, se facilita hallar la fórmula final con coordenadas generales. Además, esto, se venía trabajando también en la actividad 2, pregunta 3, en que ven la generalización, pero aplicando solo las coordenadas de un vector.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

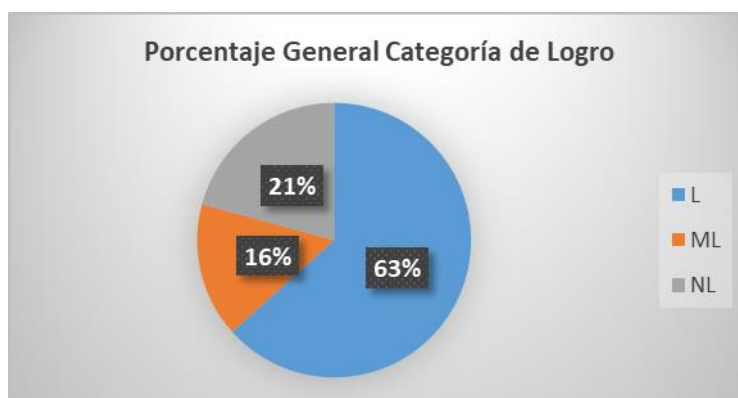
Respuesta estudiante E32:

$$\begin{aligned} P(x,y) + \vec{v}(a,b) &= P'(x+a, y+b) \\ P'(x+a, y+b) + \vec{v}(c,d) &= P''(x+a+c, y+b+d) \end{aligned}$$

Respuesta estudiante E63:

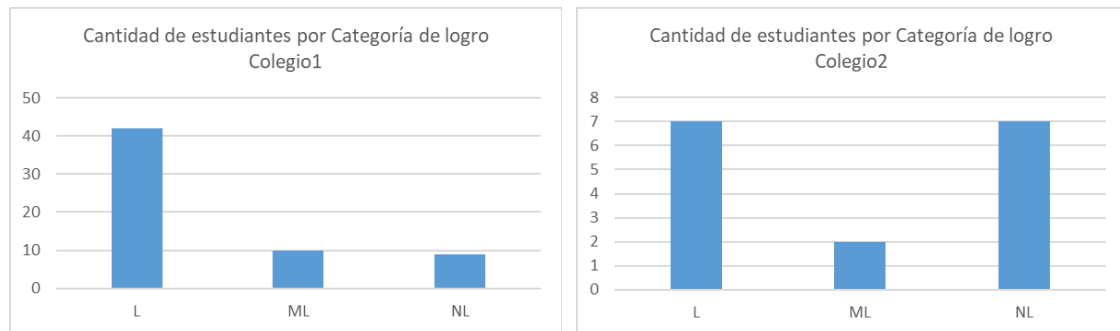
$$P(x,y) + \vec{v}(a,b) + \vec{v}(c,d) = P'(x+a+c, y+b+d)$$

Con respecto a los resultados de la evaluación formativa de la sesión, la cantidad de estudiantes que se encuentra en cada categoría, se muestra a continuación:



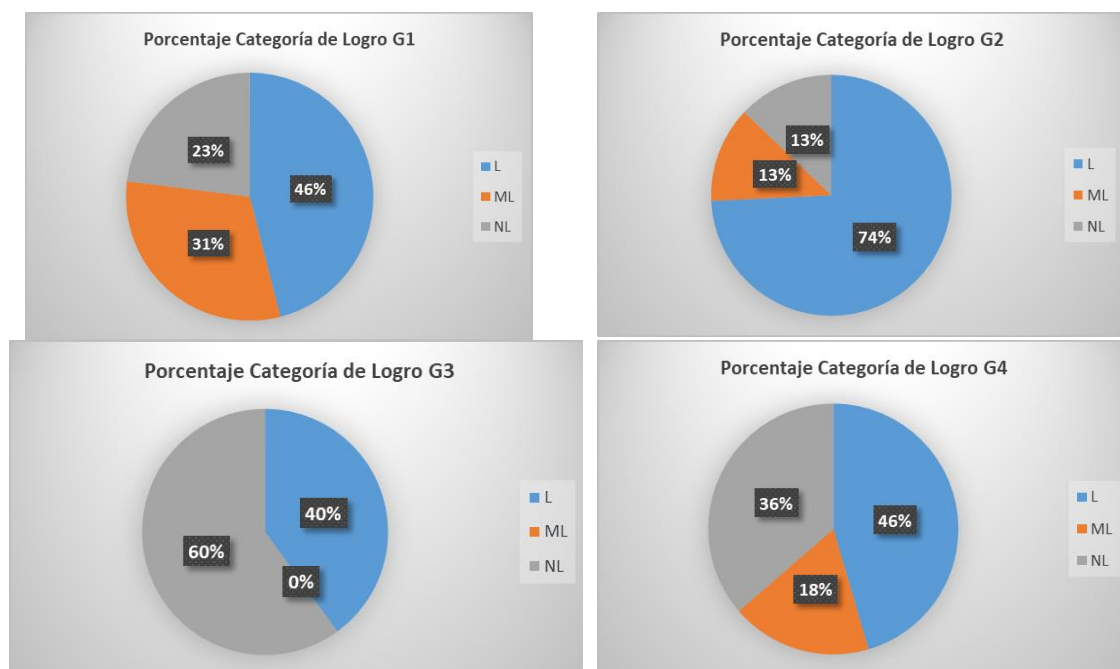
Por lo que, en conjunto, aproximadamente un 80% de los estudiantes obtuvo categoría L o ML, lo que implica que, en su mayoría, pudieron dar respuestas correctas a las preguntas planteadas en la sesión. El 20% restante obtuvo NL, en su mayoría por no dar respuesta a ninguna de las preguntas planteadas en la evaluación formativa.

En cuanto a los resultados por colegio podemos ver lo siguiente:



Por lo que en el Colegio1 hubo una mayor cantidad de estudiantes con categoría L, versus el Colegio2 en donde los resultados estuvieron más distribuidos hacia la categoría L y NL.

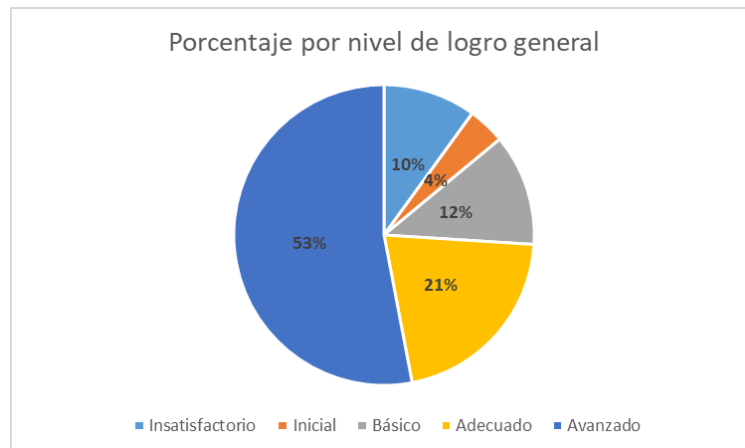
En cuanto a la distribución de Categoría de Logro según los grupos de estudio podemos ver los siguientes porcentajes:



Por lo que en el grupo G1 y G3, se obtuvo aproximadamente que un 40% de los estudiantes contestó correctamente ambas preguntas, obteniendo un mayor porcentaje en la categoría ML el grupo G1 con un 31% y en G3 un 60% de estudiantes en categoría NL debido a que no contestaron las preguntas. Con respecto al grupo G2 Y G4, el grupo G2 obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas con un 74%, y en categoría ML y NL se distribuye en partes iguales. En cambio, en el grupo G4 obtiene un 64% de estudiantes entre categoría L y ML, y la categoría NL es más baja con un 36%.

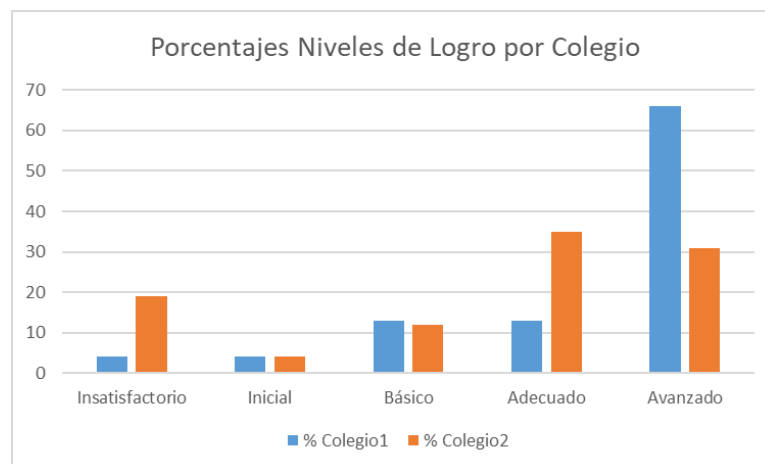
4.3 Hallazgos Sesión 3: Rotación

En la guía n°3: Rotaciones en el Plano Cartesiano, podemos ver el siguiente gráfico correspondiente a los resultados generales:



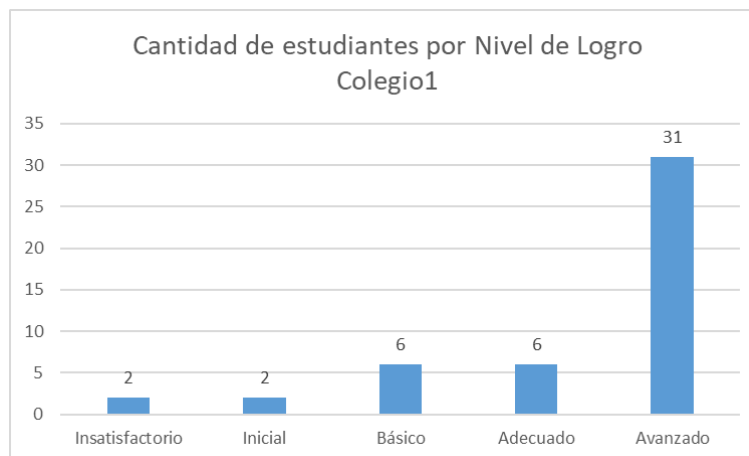
Podemos ver que sobre el 70% de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Adecuado o Avanzado.

Si clasificamos los resultados según el colegio de aplicación del instrumento, podemos obtener los siguientes resultados de nivel de logro:

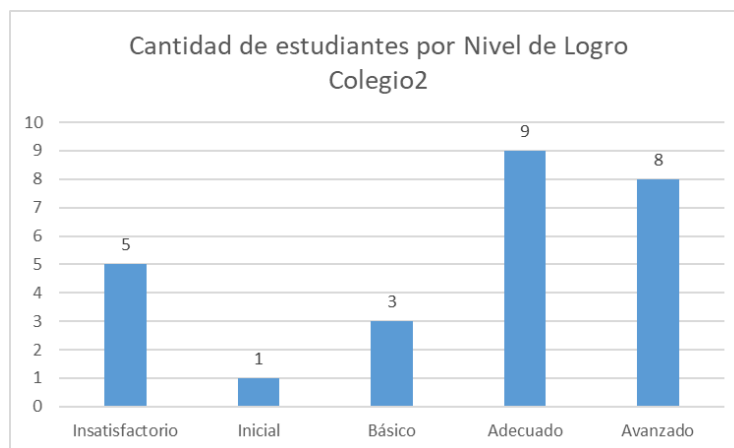


Por lo que podemos ver, el Colegio1 obtuvo altos niveles de logro, con un 92% de estudiantes entre los tres niveles más avanzados. En cuanto al colegio 2 el 78% de los estudiantes está en los tres niveles más avanzados, lo que muestra un amplio dominio de los conceptos tratados. Esto puede deberse a que varias de las actividades apuntan a lo cotidiano de los estudiantes, quienes ya manejan lo que es el giro de un objeto, por lo que, deducen con mayor facilidad la generalización del concepto.

Siguiendo con el análisis, la cantidad específica de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio1 fueron los siguientes:

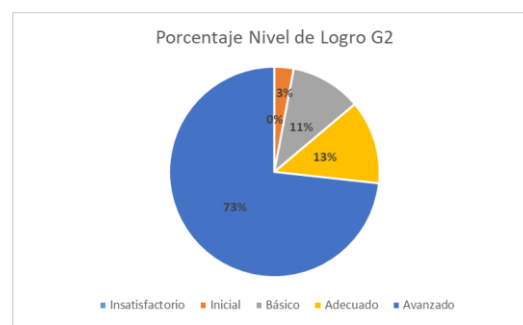
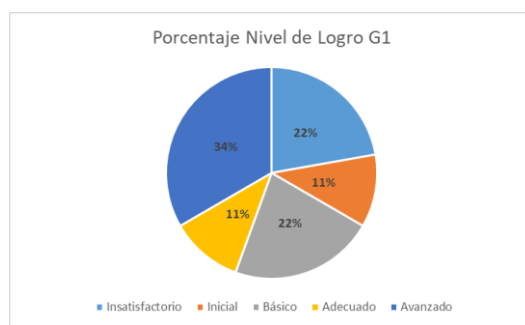


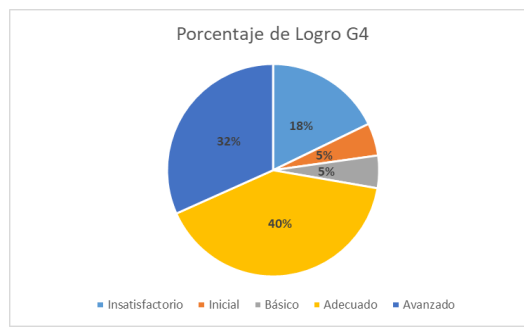
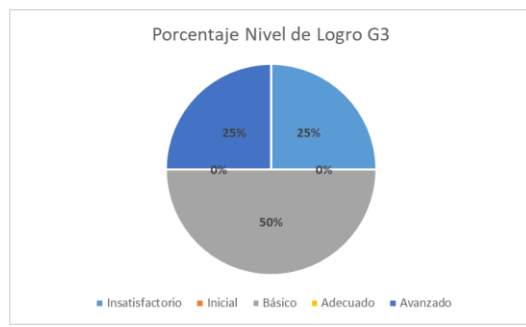
La cantidad de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio2 fueron los siguientes:



Por lo que podemos ver, los niveles de logro de los estudiantes del Colegio1, tienden hacia el nivel más avanzado, con sólo 4 estudiantes que se encuentran en un nivel insatisfactorio o inicial. En el Colegio 2, los resultados se encuentran más altos hacia los niveles adecuado y avanzado, sin embargo, 6 estudiantes se encuentran en un nivel insatisfactorio o inicial.

Si realizamos un análisis de éstos resultados según grupos de estudio, tenemos lo siguiente:





Podemos ver que entre el grupo G1 y G3 los resultados se muestran más disgregados, tendiendo a niveles de logro básicos. Con respecto al grupo G2 y G4 los resultados tienden a los niveles de logro avanzado y adecuado. Éstas diferencias se dieron, en parte, al momento de generalizar las coordenadas en rotaciones con ángulos representativos, en que los estudiantes del grupo G1 y G3 tuvieron mayor dificultad en preguntas de uso simbólico algebraico. En cambio, en la primera actividad el 94% de los estudiantes de los grupos mencionados, pudieron armar la figura haciendo uso de papel lustre y girándola en los mismos ángulos representativos, por lo que hubo un buen nivel de logro con el material manipulable.

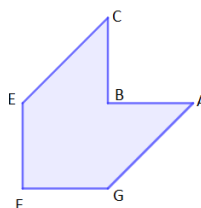
Por lo que, los estudiantes pertenecientes al PIE, mostraron dificultades en la realización de las actividades que requerían la generalización de los conceptos de manera algebraica, y la actividad que obtuvo mejor resultados fue en la que se hacía uso de material concreto.

Los estudiantes que no pertenecen al PIE, mostraron un desempeño más parejo en las actividades, siendo la de uso de material concreto la que también obtuvo mayor cantidad de respuestas correctas.

En cuanto a los resultados por Colegio, el Colegio 1 muestra niveles de logro superiores, y los grupos G1 y G3 se muestran más descendidos que G2 y G4.

Con respecto al análisis de las preguntas clave de la guía, podemos ver que la pregunta 1 y c) de la actividad 1, que decía:

“1. En la siguiente imagen, se muestra una parte del guñel, ¿cómo podrías formar la figura completa? Utiliza el papel lustre entregado”



c)¿Cuál fue el ángulo de rotación utilizado? Verifícalo con el transportador”.

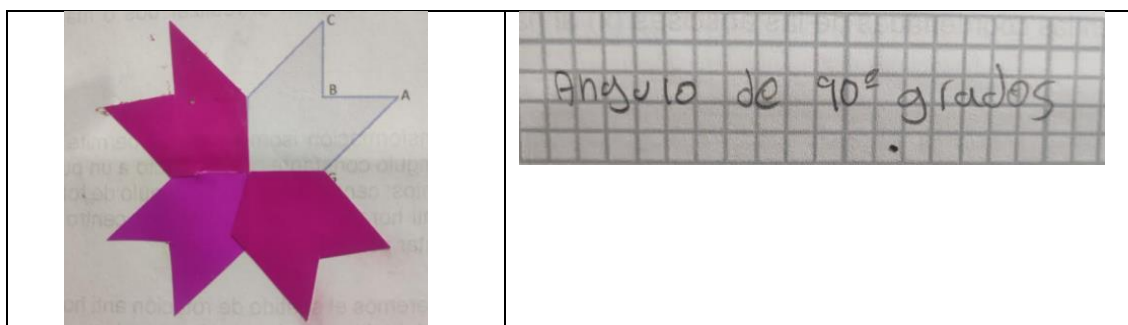
Esta pregunta obtuvo un 95% de respuestas correctas. Con respecto al grupo G1 y G3, se obtuvo un 94% de respuestas correctas, obteniendo el mayor porcentaje de logro en comparación con las demás de la guía y el grupo G2 y G4 un 96% de respuestas correctas.

Por lo que no existen diferencias en cuanto a porcentajes de respuestas correctas de estudiantes pertenecientes al PIE y los que no pertenecen al PIE, además, esta pregunta es la que obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas en la guía, por lo que fue favorecedor el uso de material concreto en todos los grupos de estudio.

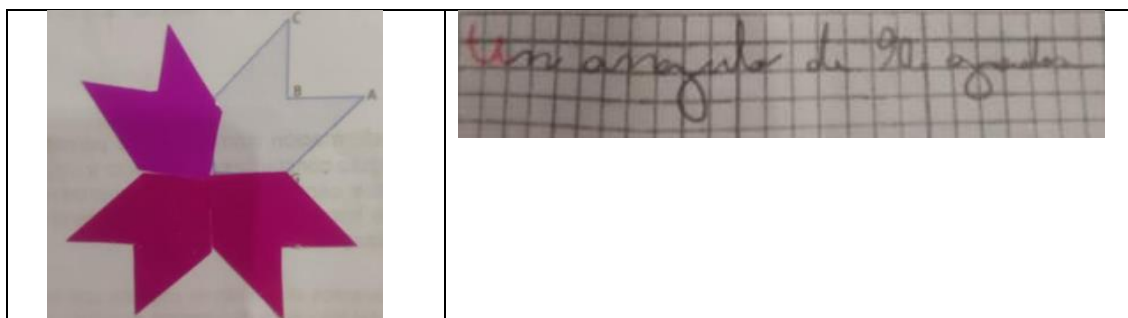
También, acotar que a cada estudiante se le entregó un transportador para que verificaran el ángulo de rotación utilizado para realizar la figura completa y se les instruyó en el uso del transportador, pues, algunos aludieron a que no lo habían ocupado en niveles anteriores. Otros, prescindieron del uso del transportador, al percatarse de la perpendicularidad en los vértices de las figura y las rotadas.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

Estudiante E73:



Estudiante E21:



Otra pregunta clave de la guía fue la presente en la actividad 2, ejercicio d) que decía:

“Generaliza, según lo observado en la figura respecto de las coordenadas, completando la siguiente tabla:

Observación: aquí se tiene un punto P del plano cartesiano de coordenadas $P(x,y)$ y se pide las coordenadas de los puntos $Q = \text{rotar a P en } 90^\circ$; $R = \text{rotar a P en } 180^\circ$, $S = \text{rotar a P en } 270^\circ$ y $T = \text{rotar a P en } 360^\circ$ ”

	Punto rotado			
Punto Inicial	Rot(O,90°)	Rot(O,180°)	Rot(O,270°)	Rot(O,360°)
P(x,y)	Q(,)	R(,)	S(,)	T(x,y)

Esta pregunta obtuvo un 78% de respuestas correctas. El grupo G2 y G4, obtuvo un 91% de respuestas correctas, en donde se realizaba de manera correcta la expresión algebraica asociada. El grupo G1 y G3, pertenecientes al PIE, fueron los que presentaron mayor dificultad en la generalización de las coordenadas según el ángulo de rotación, obteniendo un 62% de respuestas correctas. A todos los estudiantes se les orientó con respecto a la rotación de 90° con un ejemplo concreto y se llegó a lo general, luego ellos, debían asociar la forma en los demás ángulos. Algunos estudiantes escribieron las coordenadas concretas (con números específicos), sin llegar a lo general, aún así, la mayoría logró realizar el cambio de lo simbólico a lo algebraico.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron las siguientes:

Respuesta estudiante E51:

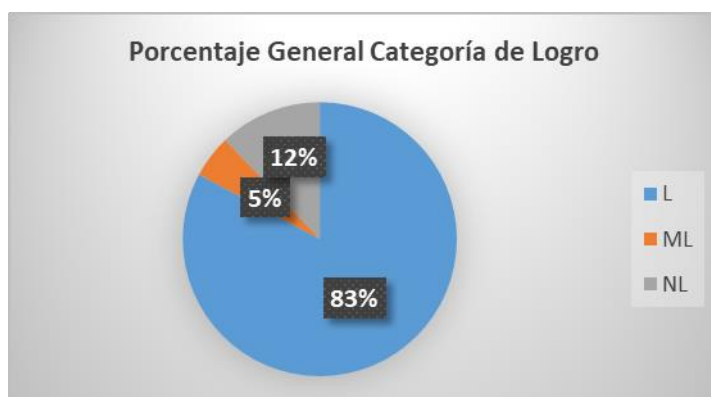
	Punto rotado			
Punto Inicial	Rot(O,90°)	Rot(O,180°)	Rot(O,270°)	Rot(O,360°)
P(x,y)	Q(-y, x)	R(-x, -y)	S(y, -x)	T(x,y)

Respuesta estudiante E27:

	Punto rotado			
Punto Inicial	Rot(O, 90°)	Rot(O, 180°)	Rot(O, 270°)	Rot(O, 360°)
P(x, y)	Q(-y, x)	R(-x, -y)	S(y, -x)	T(x, y)
P(8,5)	(5,8)	(-8,-5)	(5,-8)	(8,5)

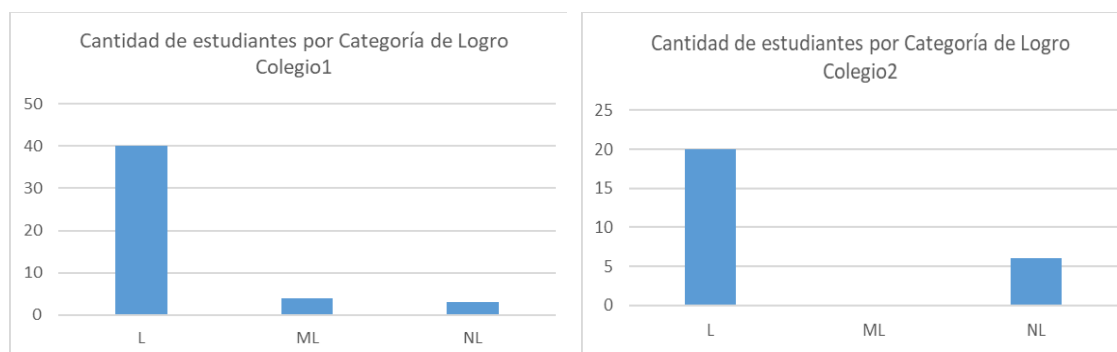
Según los resultados de las actividades, podemos ver que hay brechas en los resultados de los grupos de estudio pertenecientes al PIE y los que no pertenecen a él, con respecto a las actividades que tienden a la formalización algebraica de los conceptos, en donde los estudiantes PIE muestran dificultades. En cambio, las actividades que usan como recurso material concreto, beneficia los aprendizajes de los estudiantes PIE, y en general a todos los estudiantes en la sesión.

Con respecto a los resultados de la evaluación formativa de la sesión, la cantidad de estudiantes que se encuentra en cada categoría, se muestra a continuación:



Por lo que la mayoría de los estudiantes obtuvo ambas respuestas correctas y completas o medianamente logradas, y un 12% no logró contestar correctamente o no contestó las preguntas planteadas.

En cuanto a los resultados por colegio podemos ver lo siguiente:



Por lo que podemos ver que tanto en el Colegio1 como en el Colegio2, los estudiantes obtuvieron ambas respuestas correctas, obteniendo la categoría de logro L.

En cuanto a la distribución de Categoría de Logro según los grupos de estudio podemos ver los siguientes porcentajes:



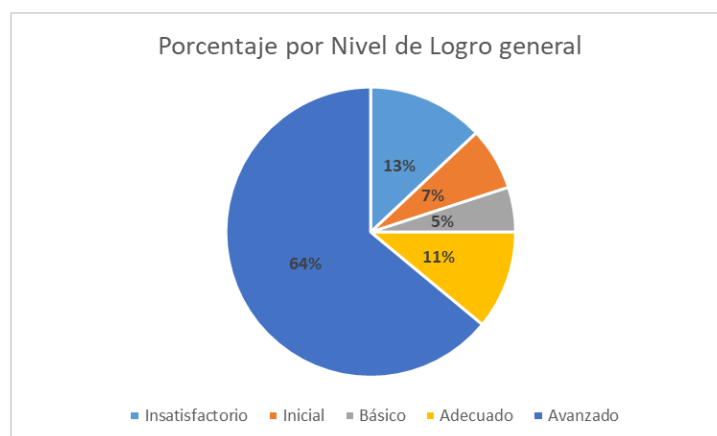


Por lo que en el grupo G1 y G3, se obtuvieron resultados parejos con respecto a la categoría NL, que es su mayoría, fue por que las preguntas no fueron contestadas. En cuanto a G1, obtuvo 78% entre L y ML y G3, un 75% solo en L.

Con respecto al grupo G2 Y G4 en ambos, la mayoría de los estudiantes está en categoría L, siendo mayor en G2, en donde un 94% de los estudiantes contesta ambas preguntas de manera correcta.

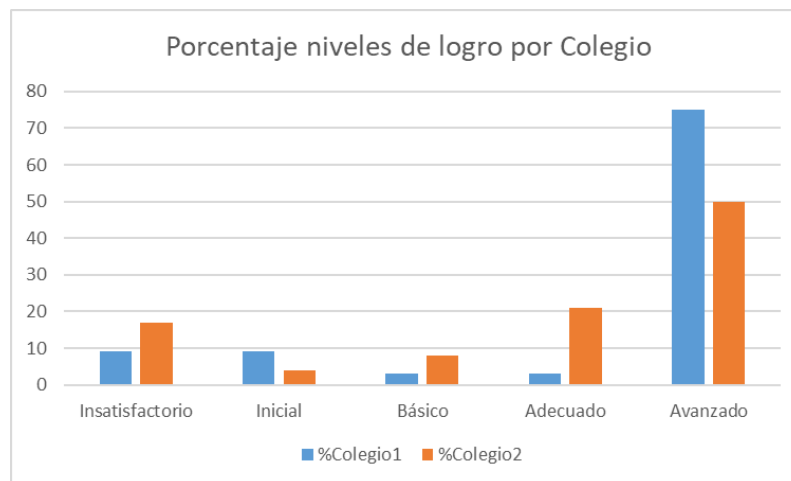
4.4 Hallazgos Sesión 4: Reflexión

En la guía n°4: Reflexión en el Plano Cartesiano, podemos ver el siguiente gráfico correspondiente a los resultados generales:



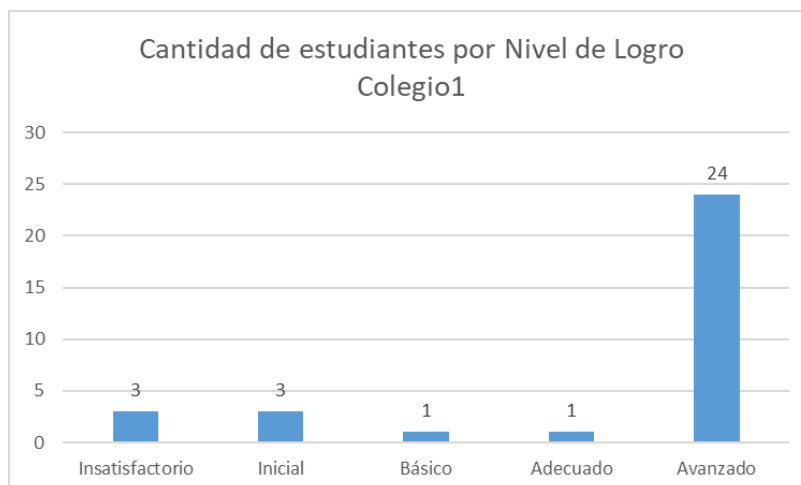
Podemos ver que sobre el 70% de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Adecuado o Avanzado.

Si clasificamos los resultados según el colegio de aplicación del instrumento, podemos obtener los siguientes resultados de nivel de logro:

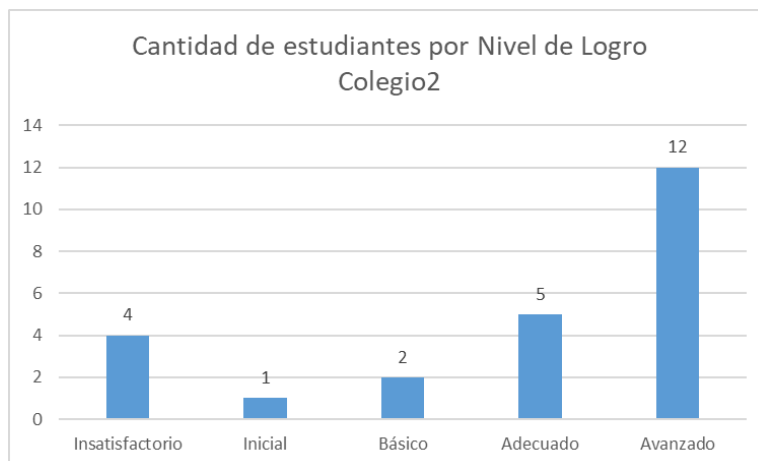


Tanto el Colegio 1 como el Colegio2 obtuvieron altos niveles de logro, en particular, analizando el nivel de logro Avanzado, el Colegio1 obtuvo sobre un 70% y el Colegio2 50%, siendo una de las sesiones con mayor nivel de logro. Una de las causas de estos resultados fue la estrategia de trabajo, la cual, contemplaba recursos virtuales y material concreto. Con ambos recursos, se había trabajado en clases anteriores, así que los estudiantes de ambos colegios manejaban las herramientas para realizar las actividades. También en las preguntas de cierre, se ocupó una lluvia de ideas para lograr la visualización la reflexión en su cotidianidad, lo que facilitó el intercambio de opiniones entre los estudiantes.

Siguiendo con el análisis, la cantidad específica de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio1 fueron los siguientes:

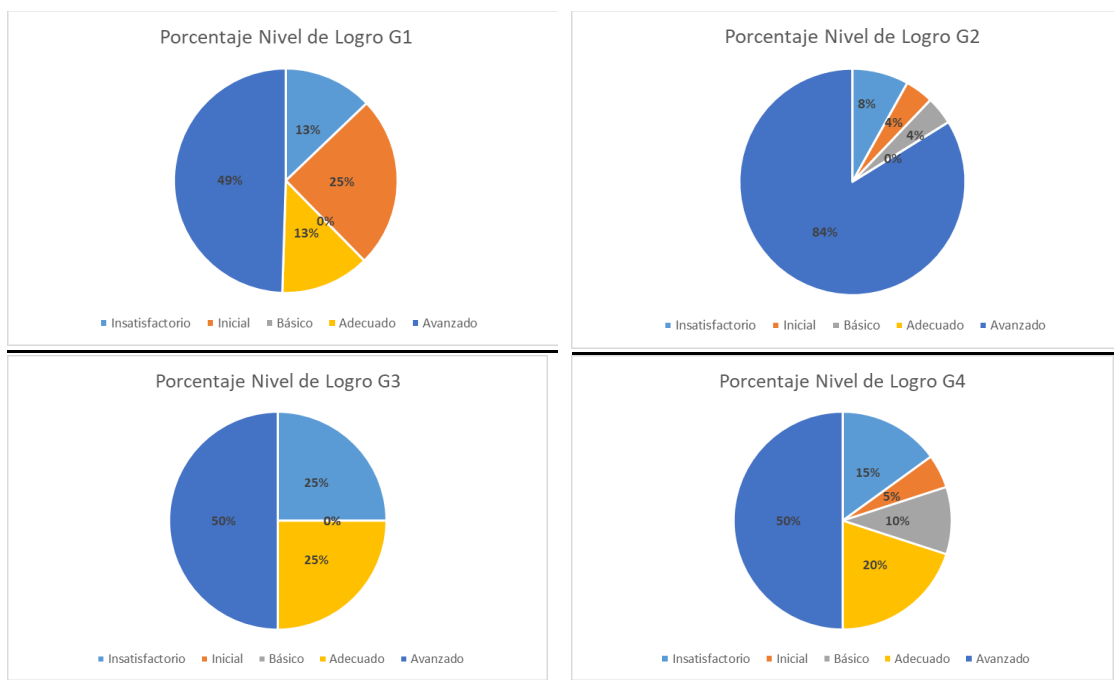


La cantidad de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio2 fueron los siguientes:



Por lo que podemos ver, hay una amplia cantidad de estudiantes en el nivel Avanzado en el Colegio1, en las otras cuatro categorías restantes hay tres o menos estudiantes. En el Colegio2, la mitad de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Avanzado, y la otra mitad se ubica entre las cuatro categorías restantes.

Los porcentajes de niveles de logro según los grupos de estudio fueron los siguientes:



El grupo G1 y G3 obtuvieron resultados similares en cuanto al nivel de logro Avanzado, obteniendo un mayor porcentaje de logro en preguntas cuya respuesta requería uso de material concreto. El grupo G2 es el que obtiene un mayor porcentaje de estudiantes en nivel de logro Avanzado y G4, obtuvo un 70% de estudiantes entre niveles de logro Adecuado y Avanzado. El establecimiento que obtuvo niveles de logro más altos fue el Colegio1.

También podemos ver que el grupo G3 sigue la misma tendencia general de resultados con respecto a los porcentajes de G4, o sea, los estudiantes que pertenecen al PIE y los que no pertenecen al PIE del Colegio2, muestran un desempeño similar en las actividades de la sesión.

Las preguntas en que los estudiantes del PIE obtuvieron mejores resultados son aquellas que apuntaban a realizar reflexiones con material manipulable, en particular, en la actividad 1 b) se obtuvo un 91% de respuestas correctas en dicho grupo; en contraparte, la actividad con menor cantidad de respuestas en correctas fue en el ítem III en donde se analizaba la reflexión de una figura con respecto a dos rectas secantes, con un 38% de respuestas correctas.

Al comparar los cuatro grupos de estudio, podemos ver que las estrategias utilizadas beneficiaron, en mayor medida, a los estudiantes del Colegio1 que no pertenecen al PIE, posiblemente, por la combinación de recursos manipulables y virtuales, y la diversificación en el tipo de recurso para dar respuesta a las actividades.

Por lo que los resultados positivos de ésta guía en los cuatro grupos, se puede deber a que los estudiantes ya se encuentran en la cuarta guía de trabajo, por lo que hay un mayor manejo de herramientas manipulativas y virtuales que en las clases anteriores.

Con respecto al análisis de las preguntas clave de la guía, podemos ver la actividad 1 a):

“En la siguiente imagen se muestra el lukutuel, ¿dónde crees que estaría el eje de simetría? Realiza la recta que lo representa utilizando regla.

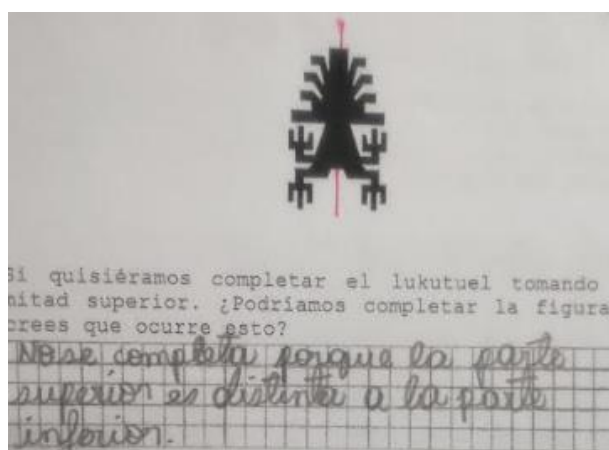


- a) Si quisiéramos completar el lukutuel tomando solo la mitad superior. ¿Podríamos completar la figura? ¿Porqué crees que ocurre esto?”

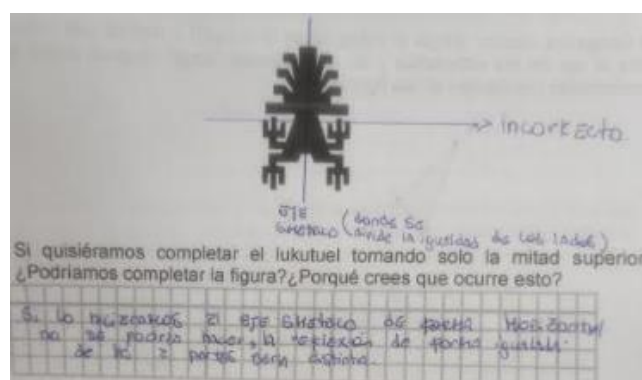
Esta pregunta obtuvo un 82% de respuestas correctas (46 estudiantes), lo que muestra que hubo una comprensión de parte de los cuatro grupos de estudio, de que el eje de simetría de la figura resulta ser vertical. También pudieron identificar el eje de simetría y esbozarlo de manera correcta.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

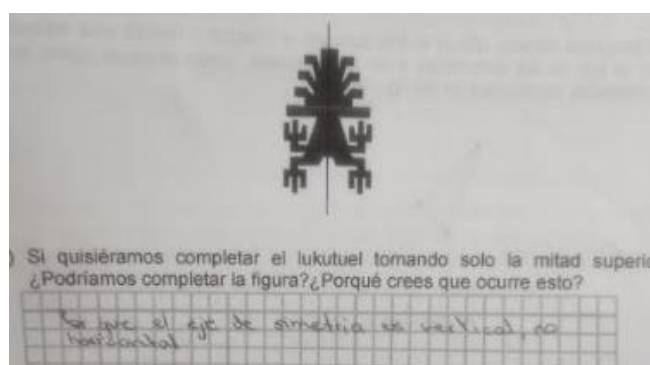
Respuesta estudiante E29:



Respuesta estudiante E50:



Respuesta estudiante E48:



En las respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta, se puede evidenciar, la experimentación que se realiza con material manipulable, probando con uso de la regla, si efectivamente el eje de simetría podría ser horizontal o, en algunos casos, verificando sus conjeturas, de que solo se puede trazar el eje de simetría de manera vertical.

También, una actividad clave es la b) del mismo ítem que decía:

“Con el papel lustre, crea tu propio símbolo en el que ocupes una reflexión con respecto a un eje de simetría. Para ello, puedes realizar los siguientes pasos:

- 1° Dobra el papel lustre formando con el doblez el eje de simetría.
- 2° Realiza tu figura, marcando los vértices de ella con un mondadientes.
- 3° Desdobla el papel lustre, ubica las marcas de los vértices y únelos siguiendo el mismo orden que en la figura inicial.
- 4° Recorta tu figura y pégala en el siguiente espacio”

Esta pregunta obtuvo un 91% de respuestas correctas, siendo la de mayor nivel de logro en la guía. Los estudiantes comprendieron que el doblez del papel lustre cumple el rol del eje de simetría de la figura creada con papel lustre y pudieron usar su creatividad para realizar su propio símbolo simétrico.

Algunas de las evidencias de los aprendizajes de los estudiantes se presentan en las siguientes imágenes:

Respuesta estudiante E54:



Respuesta estudiante E34:



Respuesta estudiante E31:

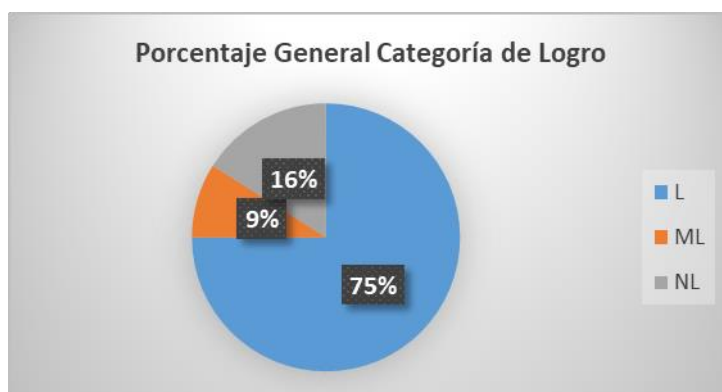


Respuesta estudiante E41:

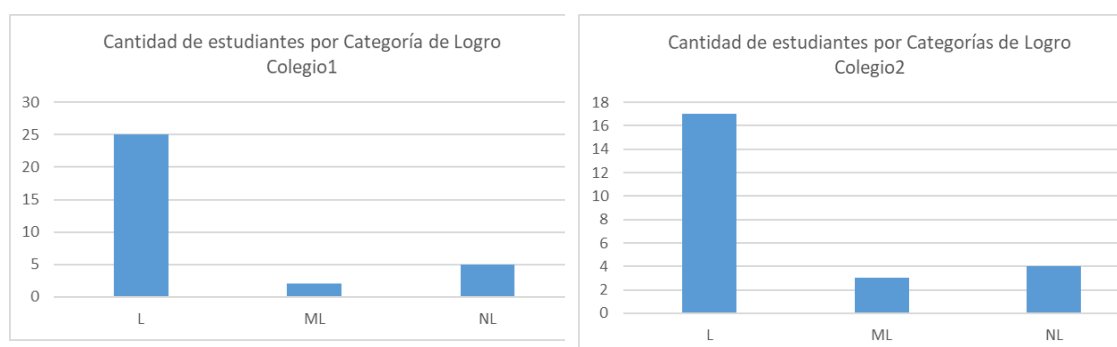


Como se expone en las respuestas de los estudiantes, en general, todos los alumnos reconocieron que el doblez del papel, representa el eje de simetría de la figura que se construirá y permite completar su símbolo, reflejando una figura con su imagen. Con ello, se percataron de la importancia que tiene el eje de simetría para la realización de la reflexión.

Con respecto a los resultados de la evaluación formativa de la sesión, la cantidad de estudiantes que se encuentra en cada categoría, se muestra a continuación:

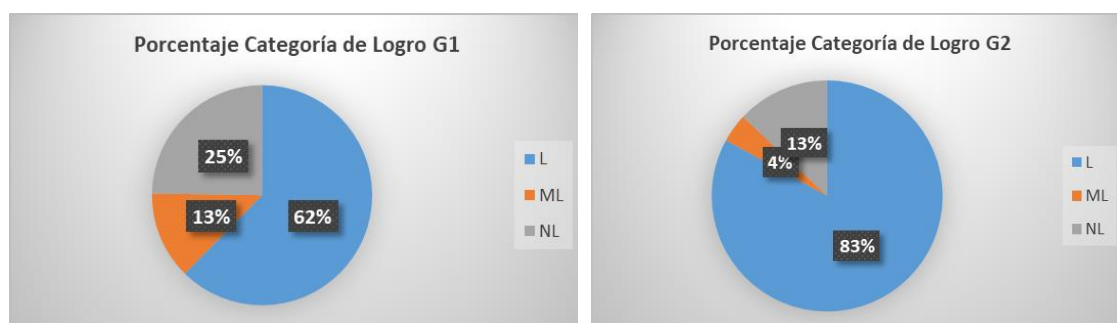


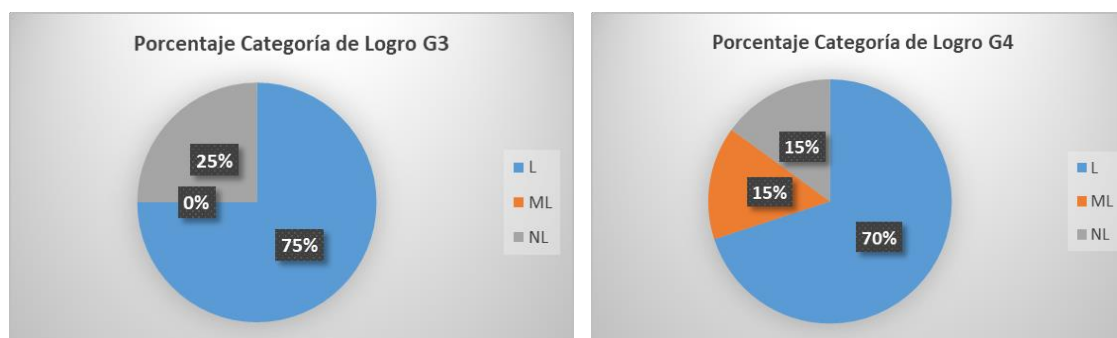
Por lo que la mayoría de los estudiantes obtuvo categoría L, o sea, ambas respuestas fueron correctas y el 25% se distribuye entre ML y NL. En cuanto a los resultados por colegio podemos ver lo siguiente:



Por lo que tanto el Colegio 1 como el Colegio 2, los estudiantes obtuvieron la categoría L, siendo una cantidad menor los que obtienen ML y NL.

En cuanto a la distribución de Categoría de Logro según los grupos de estudio podemos ver los siguientes porcentajes:



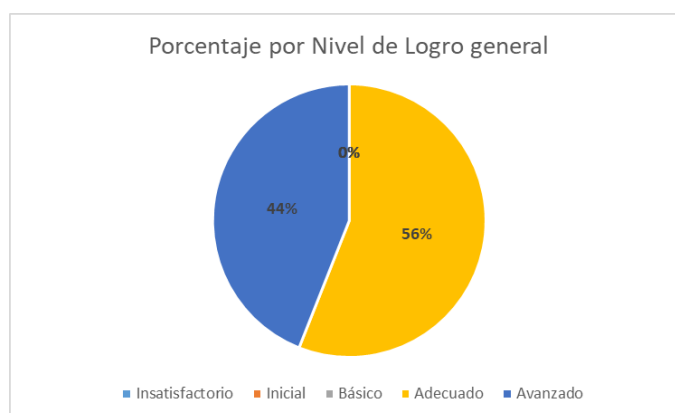


Por lo que en el grupo G1 y G3, se obtuvo en su mayoría, la categoría de Logro L, siendo en G3 el 75%, y en G1 el 75% entre L y ML. En ambos grupos, la categoría NL obtiene un 25% de los estudiantes.

Con respecto al grupo G2 Y G4, los resultados obtenidos son muy similares, obteniendo en su mayoría la categoría L, en G2, alcanza un 83% y en el G4 se obtiene un 85% entre la categoría L y ML, siendo solo el 15% aproximadamente, el porcentaje de estudiantes que poseen categoría NL.

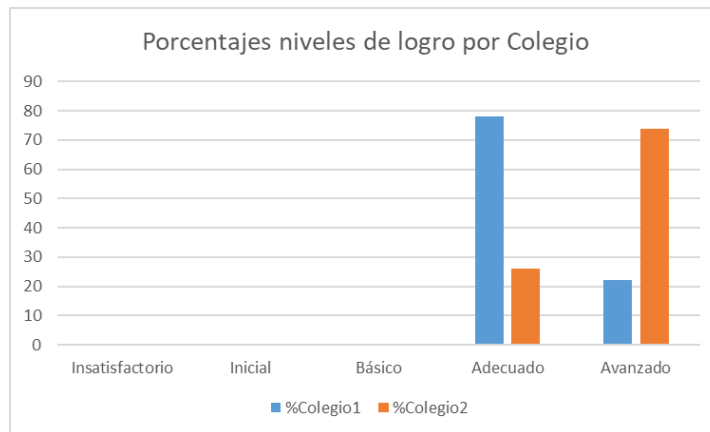
4.5 Hallazgos Sesión 5: Teselación

A partir de la guía n°5: Teselaciones, podemos sintetizar el siguiente gráfico correspondiente a los resultados generales según las categorías descritas anteriormente:



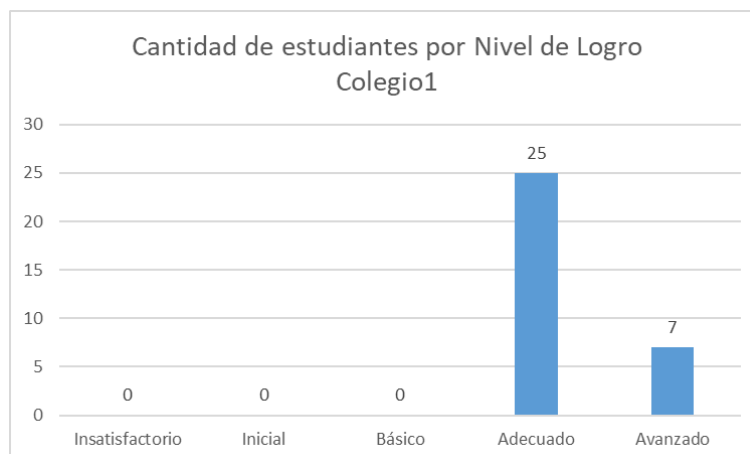
El 100% de los estudiantes obtuvo un nivel de logro Adecuado o Avanzado. Esto se puede deber a las características de la guía, cuyo centro, era el de realizar en equipo la teselación “barco” por medio de material concreto. Aquello facilitó el trabajo colaborativo entre estudiantes y la realización de manera óptima de las actividades; logrando ser la sesión con mejores resultados en la secuencia de enseñanza.

Si clasificamos los resultados según el colegio de aplicación del instrumento, podemos obtener los siguientes resultados de nivel de logro:

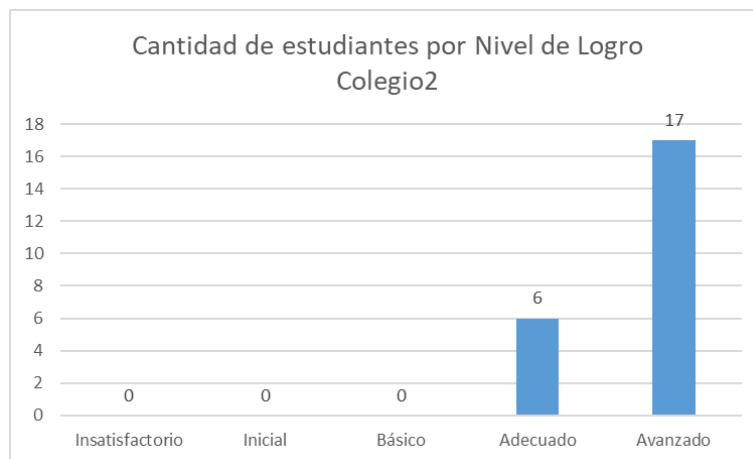


Por lo que podemos ver que el Colegio1 obtuvo un mayor porcentaje de estudiantes en el nivel de logro Adecuado, en cambio, el Colegio2 obtuvo un mayor porcentaje de logro en Avanzado. Esto, cambia la tendencia que se seguía en las otras sesiones en que el Colegio1 obtuvo mejores resultados. El alto porcentaje de nivel de logro del Colegio2 se debe a la estrategia y recursos utilizados en la sesión, en que el trabajo en equipo, y el uso de material concreto favorece los aprendizajes por las características de los estudiantes. En cambio, para el Colegio1, era más favorecedor el trabajo individual y lluvia de ideas.

Siguiendo con el análisis, la cantidad específica de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio1 fueron los siguientes:

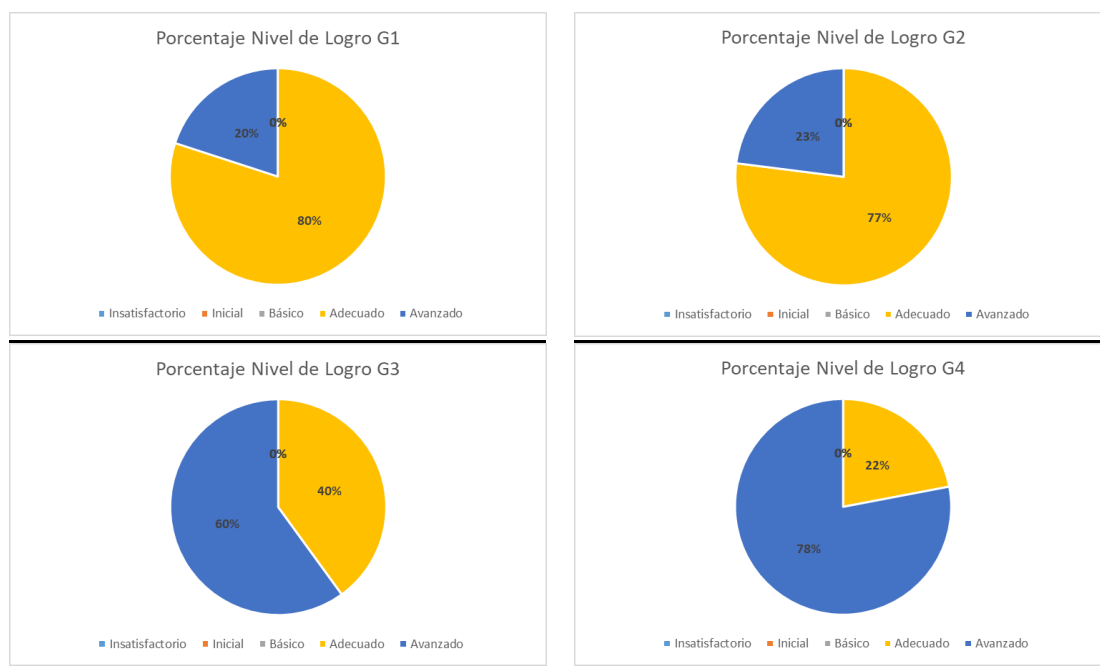


La cantidad de estudiantes que lograron cada nivel de logro en el Colegio2 fueron los siguientes:



Por lo que, en el Colegio2, el trabajo en equipo fue mejor logrado, en cuanto a la organización de los roles que los mismos estudiantes se adjudicaron para llevar a cabo la teselación, o sea, ya tenían una organización interna como curso que permitió el óptimo desarrollo de las actividades.

En cuanto a los grupos de estudio los niveles de logro fueron los siguientes:



Podemos ver que el grupo G1 y G2 que pertenecen al Colegio1, obtuvieron resultados similares de niveles de logro, o sea, el trabajo en equipo logró nivelar el desempeño de los estudiantes en las actividades propuestas. Del grupo G3 y G4, el grupo más favorecido con la estrategia de la clase fue el de los estudiantes sin PIE, que obtuvieron un mayor porcentaje en el nivel de logro Avanzado.

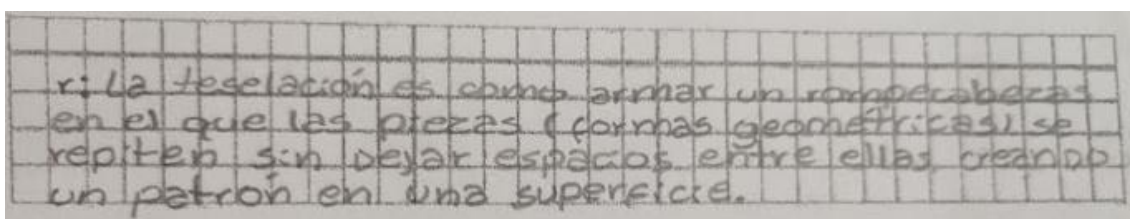
Con respecto al análisis de las preguntas clave otorgadas en la guía, podemos ver la primera pregunta de la actividad de cierre, que decía:

“¿Qué es una teselación?”

Se obtuvo un 82% de respuestas correctas de parte de los estudiantes (45 estudiantes). En ella, cada estudiante debía explicar con sus propias palabras lo que es una teselación, luego de haber trabajado en el teselado grupal. El porcentaje de respuesta correcta fue muy similar en todos los grupos de estudio.

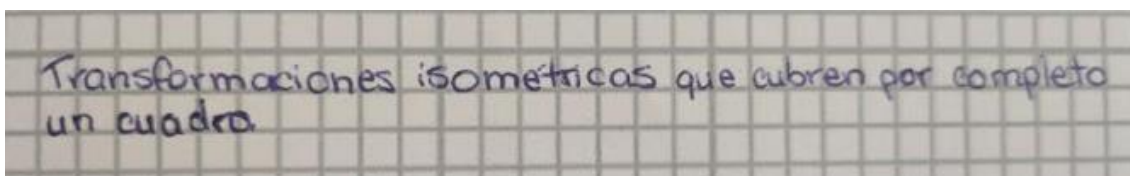
Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

Respuesta estudiante E7:



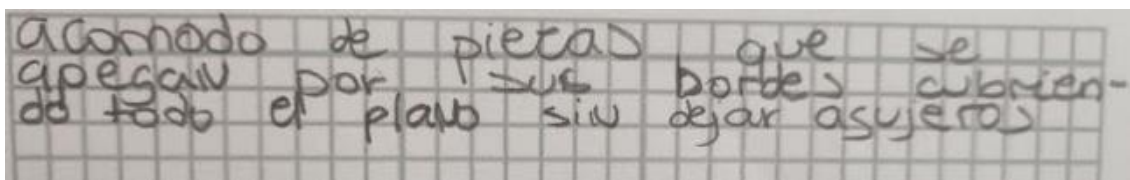
r: La teselación es como armar un rompecabezas en el que las piezas (formas geométricas) se repiten sin dejar espacios entre ellas, creando un patrón en una superficie.

Respuesta estudiante E53:



Transformaciones isométricas que cubren por completo un cuadro.

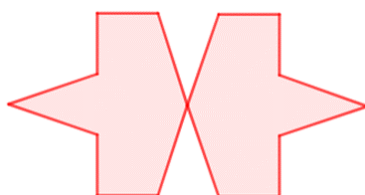
Respuesta estudiante E54:



Acomodo de piezas que se pegan por sus bordes cubriendo todo el plano sin dejar agujeros.

En esta pregunta se destaca la diversidad de respuestas dadas por los estudiantes, según el significado que le dan al concepto de teselación, ocupando, comparaciones, resaltando la importancia del cubrimiento del plano, entre otras, acercándose intuitivamente a una definición formal.

Otra actividad clave fue la de creación de la teselación en la que se trabajó por equipos de hasta 4 personas, aquí tenían que confeccionar la teselación “barco” cuyo patrón era:



En esta actividad un 98% de los estudiantes realizó de manera óptima el teselado en grupo, por lo que dentro de las actividades presentes en la sesión fue la de mayor nivel de logro.

Algunas de las teselaciones realizadas por los grupos de estudiantes fueron las siguientes:

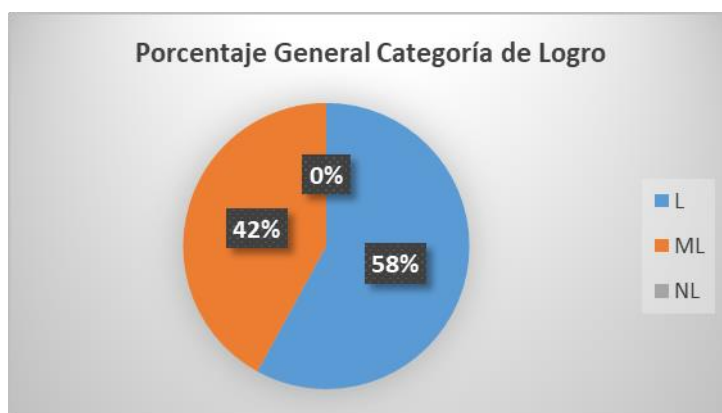
Teselación grupo 3:



Teselación grupo 8:

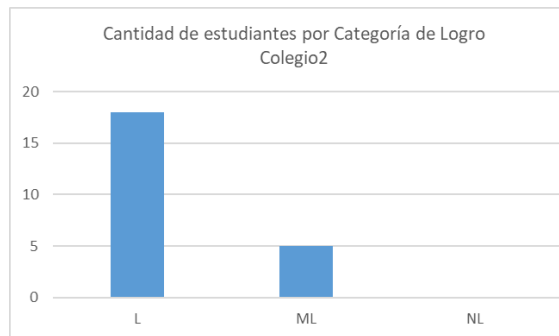
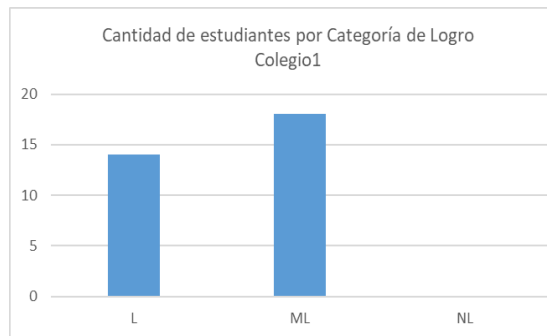


Con respecto a los resultados de la evaluación formativa de la sesión, la cantidad de estudiantes que se encuentra en cada categoría, se muestra a continuación:



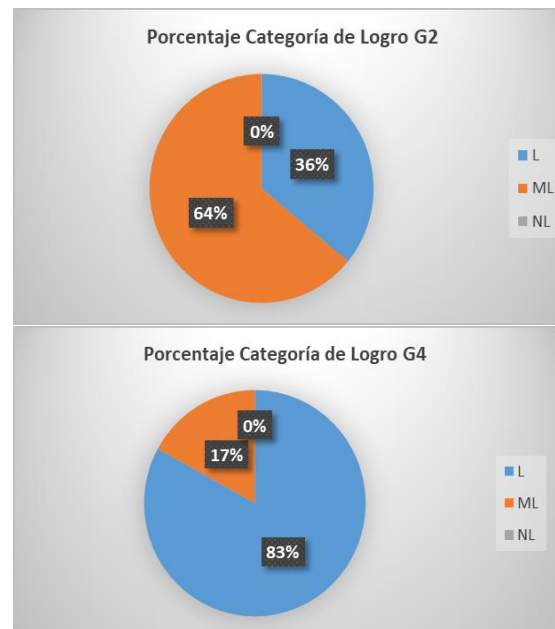
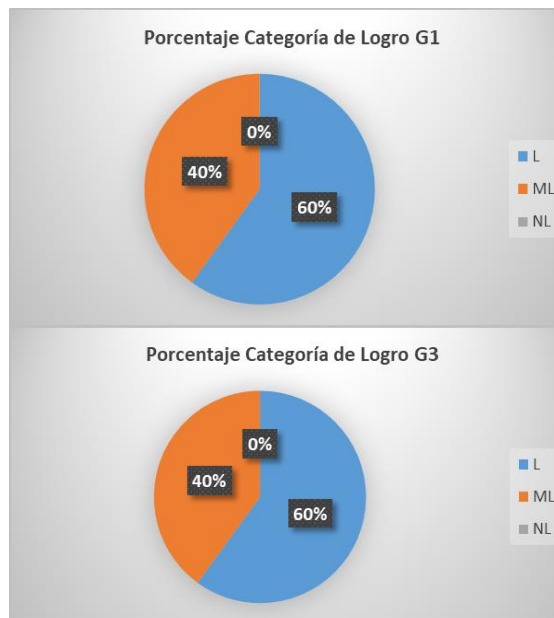
Por lo que podemos notar que, las categorías de logro son solo L y ML, con un mayor porcentaje en categoría L, y no hay estudiantes en categoría NL. Esto se puede deber porque a pesar de que contestaban en un documento individual, los estudiantes estaban agrupados, pues el trabajo central de la sesión era construir una teselación en equipo y esto propició que se contestara la evaluación formativa aunando los saberes de quienes conformaron el equipo.

En cuanto a los resultados por colegio podemos ver lo siguiente:



Por lo que en el Colegio1 hubo una mayor cantidad de estudiantes con categoría ML, con respecto al Colegio 2 en que la mayoría estuvo en L. Esto se puede deber a que, como se expresaba anteriormente, el Colegio2 tenía mucho mejor participación en la modalidad de trabajo en equipo.

En cuanto a la distribución de Categoría de Logro según los grupos de estudio podemos ver los siguientes porcentajes:



Por lo que en el grupo G1 y G3, se obtuvo el mismo porcentaje de categorías de logro, lo que permite reconocer que en ambos grupos el trabajo en equipo favorece el aprendizaje y desarrollo de las respuestas.

Con respecto al grupo G2 Y G4 existe una mayor diferencia con respecto a las categorías de logro, pues en el grupo G2 está en la categoría ML, y en G4 la mayoría de los estudiantes se encuentra en la categoría L.

Por lo que en general, podemos ver que, al comparar ambos colegios, el trabajo en equipo facilitó el aprendizaje de los contenidos de la sesión, siendo el Colegio2 el que posee una mayor capacidad de trabajo en equipo, lo que deriva en mayores logros de aprendizaje tanto en el material del estudiante como en la evaluación formativa.

4.6 Síntesis de los análisis de las sesiones

Los estudiantes del Colegio1 obtuvieron mejores resultados en la primera guía, la cual se enfocaba en el uso de recursos virtuales, esto en parte, por el trabajo previo que se realizó desde séptimo básico en la utilización del software Geogebra para representar objetos matemáticos.

Luego, mientras se avanzó en las sesiones de Traslación, Rotación y Reflexión, ambos colegios fueron adaptándose al trabajo haciendo uso de diversos recursos de aprendizaje, siendo el Colegio1 el que obtuvo mejores resultados en dichas sesiones.

En cuanto a la última sesión de la secuencia didáctica, ambos colegios obtuvieron altos niveles de logro, siendo superior el Colegio2, en donde había una mayor afinidad a la estrategia trabajo en equipo de parte de los estudiantes y de utilizar material concreto.

Tanto en el material del estudiante, como en las evaluaciones formativas el mejor desempeño de los estudiantes fue en la sesión de Teselaciones, en la que tuvieron que trabajar con material concreto y en equipo.

Con respecto a los estudiantes pertenecientes al PIE, las actividades que evidenciaron un mayor nivel de logro fueron aquellas que requerían el uso de recursos de material concreto, alcanzando desempeños similares a sus pares que no pertenecían al PIE. La estrategia de trabajo en equipo, fue la que más favoreció el aprendizaje de los estudiantes, al colaborar en la realización de las tareas planteadas, unificando saberes, más allá de la pertenencia o no al PIE. También se vieron favorecidos con la diversificación de estrategias y recursos de aprendizaje los estudiantes que no pertenecían al PIE, teniendo niveles de logro similares en actividades que requerían el uso de material concreto y del software Geogebra.

4.7 Resultados de la encuesta a estudiantes

La encuesta dirigida a los estudiantes fue contestada 27 del Colegio1 y 16 del Colegio2, lo que da un total de 43 respuestas.

En el primer ítem en que los estudiantes debían contestar qué tan de acuerdo estaban con afirmaciones sobre la secuencia de enseñanza, se obtuvieron los siguientes resultados de acuerdo a cada pregunta:

1° “Usé distintos recursos (manuales, digitales, material concreto) en el transcurso de las clases de Transformaciones Isométricas y Teselaciones” se obtuvo 26 Muy de Acuerdo, 14 De Acuerdo y 3 En Desacuerdo.

2° “El uso de recursos manuales (regla, transportador, tijeras, pegamento, papel lustre, entre otros) me permitió visualizar de mejor manera los contenidos” se obtuvo 24 Muy de acuerdo, 17 De acuerdo, 1 En Desacuerdo y 1 Muy en Desacuerdo.

3° “El uso del software Geogebra me permitió visualizar de mejor manera el contenido” se obtuvo 26 Muy de Acuerdo, 8 De Acuerdo, 7 En Desacuerdo y 2 Muy en Desacuerdo.

4° “Los recursos utilizados me facilitaron la comprensión de los contenidos” se obtuvo 23 Muy de Acuerdo, 13 De Acuerdo, 6 En Desacuerdo y 1 Muy en Desacuerdo

5° “Las preguntas realizadas fueron desafiantes y me permitieron explorar las soluciones de diversas maneras” se obtuvo 18 Muy De Acuerdo, 19 De Acuerdo, 3 En Desacuerdo y 3 Muy en Desacuerdo

6° “Las preguntas iban aumentando su nivel de complejidad mientras se avanzaba en la guía” se obtuvo 24 Muy De Acuerdo, 13 De Acuerdo, 5 De Acuerdo y 1 Muy en Desacuerdo.

7° “El nivel de dificultad de las actividades realizadas me pareció adecuado” se obtuvo 18 Muy de Acuerdo 19 De Acuerdo 5 En Desacuerdo y 1 Muy en Desacuerdo.

8° “La actividad inicial presente en las guías me permitió reconocer la presencia de transformaciones isométricas en símbolos de los pueblos originarios” se obtuvo 21 Muy De Acuerdo, 18 De Acuerdo y 4 En Desacuerdo.

9° “En el desarrollo de las guías logré generalizar propiedades que se daban en la composición de transformaciones isométricas” se obtuvo 21 Muy De Acuerdo, 15 De Acuerdo y 7 En Desacuerdo.

10° “La actividad de cierre presente en cada guía me permitió reconocer las transformaciones isométricas en mi cotidianeidad” se obtuvo 23 Muy De Acuerdo, 14 De Acuerdo, 4 En Desacuerdo y 2 Muy en Desacuerdo.

11° “La profesora fue guiando y monitoreando el desarrollo de las actividades de las guías” se obtuvo 28 Muy De Acuerdo, 11 De Acuerdo, 3 En Desacuerdo y 1 Muy En Desacuerdo.

12° “Mostré disposición para realizar las actividades propuestas en la guía” se obtuvo 22 Muy De Acuerdo, 16 De Acuerdo, 2 En Desacuerdo y 3 Muy En Desacuerdo.

Podemos notar que en general, los estudiantes reconocen que en las sesiones se implementaron diversos recursos de aprendizaje y que, tanto el uso de material concreto como recursos virtuales, aportaron en la comprensión de los contenidos a través de la visualización de los conceptos estudiados.

Otro aspecto relevante, es el nivel de dificultad otorgado a las preguntas, en que los estudiantes dan cuenta de tenían una dificultad adecuada, pero a la vez se iban complejizando, pero valorando el hecho de que pudieran explorar las soluciones de las actividades de diferentes maneras.

Con respecto a la actividad de inicio, los estudiantes dan cuenta del reconocimiento de las transformaciones isométricas en símbolos de los pueblos originarios, lo que es muy positivo dentro del material propuesto, pues, se esperaba precisamente lograr que apreciaran que las transformaciones isométricas están presentes en la cultura de los pueblos originarios, en la confección de textiles, edificaciones, entre otros.

Con respecto a la actividad de cierre, los estudiantes reconocen que las actividades aportaron en reconocer las transformaciones isométricas en su cotidianidad, reconociendo así, la importancia de lo geométrico y de los desplazamientos de figuras en nuestro entorno.

Por último, los estudiantes reconocen el rol de la profesora en esta secuencia de enseñanza, como una monitorea y guía a las actividades, y no solo como una transmisora del conocimiento, lo que es muy positivo, pues esto permite, que los recursos de aprendizaje adquieran un mayor protagonismo junto con el uso que den los estudiantes de éstos.

Finalmente, los estudiantes se perciben dispuestos a realizar las actividades propuestas, lo que les da la oportunidad de involucrarse con las actividades planteadas, a través de la elección propia de la forma de respuesta, y el reconocimiento de sus capacidades.

En el segundo ítem de la encuesta de estudiantes, debían dar respuesta completa a las siguientes preguntas:

- a) Con relación a las actividades desarrolladas, ¿qué recurso te gustó más y por qué?
- b) ¿Recomendarías este tipo de clases para el aprendizaje de Transformaciones Isométricas y Teselaciones? Justifica tu respuesta

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en la pregunta a) fueron las siguientes:

Trabajar en el programa de Geogebra, ya que este programa tenia mucha variedad de herramientas que permite poder aprender más y que sea divertido y diferente.

La de hacer una teselación, porque era más fácil entender

geogebra, ya que me facilito aprender

La Manualidad

Me gusto lo desafiante que eran las preguntas

Que podíamos hacer uso de la tecnologia y a mis perspectiva, fue entretenido y educativo.

Me gustaron mucho las guías, ya que ejemplificaban y detallaban correctamente los procesos específicos

Las respuestas dadas por los estudiantes, muestran que hubo un reconocimiento de que se trabajó con recursos virtuales y material concreto; y que cada uno de estos tiene características y elementos que les permitieron resolver las actividades planteadas. Con respecto al material concreto, la actividad que más les gustó fue la de la construcción de la teselación, y con respecto al software Geogebra, les gustó reconocer sus usos y herramientas, sobre todo en el Colegio2 en que no habían trabajado con software en unidades anteriores.

También, los estudiantes mencionan que el material impreso, les gustó por la forma de abordar los contenidos y por la secuencia de preguntas que les iban permitiendo desarrollar detalladamente los procesos.

Con respecto a las respuestas dadas por los estudiantes en la pregunta b) fueron:

Si porque con este tipo de clases uno puede entender mejor el tema

Si, ya que es mucho más divertido que el método tradicional o sea escribir, aser guías y estar siempre en el cuaderno, las actividades que sean diferentes son mucho mejores, permite que los estudiantes puedan divertirse y aprender de manera diferente.

Sí, ya que podría ser más divertido que hacer todo memorizando y escribiendo.

Si, porque es más fácil entender con actividades manuales

Si porque es mucho más practico o entretenido para poder entender sobre estos temas

Sí, ya que permite un aprendizaje basado en contenido didáctico, lo qué facilita el aprendizaje y la comprensión del contenido.

Si, ya que es un buen material que ayuda a comprender mejor la materia

Podemos notar el reconocimiento de los estudiantes a que los diversos recursos utilizados en la secuencia de enseñanza, les favorece en la comprensión de los contenidos tratados en la unidad. También, valoran el hecho de cambiar de la estrategia “tradicional” en la que prima la memorización de contenidos, a una más diversificada, en la que no se precisa el uso del cuaderno, sino que se da uso de otras herramientas que se adaptan y facilitan su aprendizaje.

4.8 Interpretación de resultados de encuesta a estudiantes

Según las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta, podemos inferir que la apreciación hacia las sesiones de la secuencia de enseñanza es, en general positiva, de valorización hacia las actividades diversificadas y reconocimiento de ésta diversificación, así lo refleja las respuestas dadas en la primera afirmación, donde el 93% de los estudiantes está Muy De Acuerdo o De Acuerdo con el uso de diferentes recursos de aprendizaje para la enseñanza de Transformaciones Isométricas y Teselaciones. Además, en las afirmaciones que indicaban si el uso del software Geogebra y de recursos manuales había favorecido la visualización de los contenidos, alrededor de un 84% respondió Muy De Acuerdo o De Acuerdo.

Lo mencionado anteriormente, coincide con las respuestas del ítem dos, donde los estudiantes expresan que valoran los recursos utilizados en las guías, facilitando su aprendizaje de la unidad con actividades que no requieren el uso solo de cuaderno y pizarra.

La afirmación que obtuvo un mayor porcentaje de respuestas en la opción Muy De Acuerdo fue la undécima, la cual, apunta al rol de la profesora en la implementación de la secuencia de enseñanza, al ir monitoreando y guiando el trabajo de todos los estudiantes, en donde los recursos de aprendizaje cobran importancia al otorgar diversas formas de responder a los estudiantes, y la docente guía el uso de dichos recursos, haciendo partícipes de la clase a todos los alumnos que la componen. La importancia de este rol mediador del docente en aulas inclusivas también se expresa en un estudio de Yépez (2018, p.62) “el docente como elemento mediador, tiene que poseer la capacidad de ofertar en los diversos escenarios educativos clases de amplia y segura competencia asumiendo, una cultura inclusiva que solidifique los conocimientos, además de tener en cuenta las adaptaciones y notificaciones curriculares, para que no exista limitaciones en la participación de los estudiantes”.

Esto también, se puso en práctica por la docente al ir representando y ejemplificando de diversas maneras las temáticas abordadas, usando expresiones visuales, verbales, kinestésicas, etc. para lograr la comprensión de acuerdo a las diversas formas de aprender de los estudiantes y así seguir los principios del DUA de atender a ellas, dando diversas opciones para concretar el logro de los aprendizajes.

4.9 Resultados e interpretación del cuestionario a docente

Al finalizar la secuencia de enseñanza, se aplicó una encuesta de opinión a la docente del Colegio2, para conocer su apreciación con respecto a las sesiones implementadas.

Las respuestas dadas, con relación a su opinión de la forma de tratar los contenidos de la unidad fueron las siguientes:

1) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Traslación?

Opino que el trabajo sistemático permite una comprensión clara de lo que es la traslación y como sumar traslaciones, sin embargo, en algunos momentos se pierde el dinamismo al responder preguntas similares una detrás de otra (preguntas cerradas). Los dibujos y la realización de líneas y movimientos sobre la guía en simultáneo con GeoGebra creo que genera que la actividad sea mas atractiva. Así mismo, contextualizar las figuras en la cultura mapuche enriquece mucho la clase. Opino que la clase por si sola permite aprender los contenidos de traslación.

2) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Rotación?

Trabajar con papel lustre y Geogebra en una misma clase resulta muy positivo puesto que incorpora visualización y manualidades. Encuentro que el ejercicio de rotar y luego observar los cambios en las coordenadas es clave en la clase, sin embargo, la modalidad en esa parte de la clase se vuelve poco dinámica (poco estímulo visual o manual).

3) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Reflexión?

Similar a las clases anteriores, opino que la actividad inicial con dibujos sobre la guía, utilización de figuras mapuches, papel lustre y luego con GeoGebra aporta dinamismo. Opino que es muy bueno comenzar con identificar y luego crear porque genera apropiación con los contenidos. Para esta clase opino que se aprovecha muy bien el recurso de GeoGebra para comprender los contenidos de reflexión en conjuntos con las preguntas y el paso a paso.

4) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Teselación?

Creo que se entiende muy bien como crear figuras que se puedan teselar y el contexto histórico y artístico enriquece mucho la clase. La actividad final aporta en aplicar la teselación mediante manualidades generando un aprendizaje mas significativo. Quizás se habría podido complementar la creación de la teselación con los movimientos vistos anteriormente.

Con respecto a las respuestas asociadas a la forma de tratar los contenidos, la docente expresa que las actividades propician el uso de diferentes recursos, prácticos, manuales y digitales. También que las actividades de inicio de las sesiones de transformaciones isométricas permiten una vinculación entre el contenido y la cultura mapuche y permiten la identificación del objeto matemático, para luego, generalizarlo a través de las actividades siguientes. También, percibe de manera positiva el uso de recursos manuales y de Geogebra en las actividades, logrando una progresión en las actividades, pero percibe que en ocasiones se pierde el dinamismo en la secuencia de preguntas de desarrollo.

La forma de tratar los contenidos en la sesión final, la ve muy positiva al usar predominantemente recursos manuales y al ligar el contenido con lo histórico.

Las respuestas dadas con relación al material utilizado fueron las siguientes:

5) ¿Considera que el material utilizado está de acuerdo con el currículo vigente?

Si, cumple con los Objetivos de Aprendizaje 13 y 14 de 8°Básico.

6) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las traslaciones?

Si, creo que la clase por si sola permite aprender los contenidos de traslación.

7) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las rotaciones?

Si, considero suficiente el material. Si tuviera que agregar algo sería un recordatorio o breve práctica previa del concepto de ángulo.

8) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las reflexiones?

Si, considero que es suficiente el material para el contenido de reflexiones.

9) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las teselaciones?

Si, considero que es suficiente y muy claro.

En las respuestas asociadas al material utilizado, en general, la profesora expresa que las actividades asociadas a cada sesión permiten abordar los conceptos de manera completa y clara. También que cumplen con los objetivos de aprendizaje OA13 y OA14 del programa de estudio de octavo básico y considera que el material es suficiente y claro para tratar los contenidos con los estudiantes.

Las respuestas dadas con relación a las actividades realizadas en las sesiones fueron:

10) ¿Las actividades se presentan en forma progresiva de acuerdo al tipo y complejidad del contenido?

Si, mantiene una estructura sistemática de paso a paso dejando los aspectos mas complejos al final.

11) ¿Las actividades propician la diversificación de recursos en la enseñanza y el aprendizaje?

Si, en cuento se utilizan recursos prácticos, material concreto y visualización digital.

12) ¿Qué posibles mejoras haría a la secuencia de enseñanza?

Cambiaría para cada caso la manera de plantear las preguntas en base al trabajo previo con el curso, de tal forma que la redacción y uso de conceptos sea muy clara.
También juntaría un par de preguntas para que al final sean menos preguntas, más abiertas y con el mismo contenido.

13) ¿Qué aspectos considera importantes de tener en cuenta al momento de implementar esta secuencia de enseñanza?

El estilo de clase al que está acostumbrado el curso y el manejo de aplicación GeoGebra.
De tal forma de adelantarse a la disposición que puedan tener las/os estudiantes a la clase.

Con respecto a las preguntas asociadas a la secuencia de actividades realizadas en cada sesión, la profesora reconoce que hay una estructura que favorece el aumento de complejidad de los contenidos mientras se avanza en el desarrollo de la guía. Con respecto a esto, sugiere que algunas preguntas se fusionen para que el número de preguntas sea menor y ligarlas más con el contenido abordado en la sesión anterior. Con respecto a ello, cabe señalar, que en cada sesión hubo un espacio para recordar y/o sintetizar lo realizado en la sesión anterior, pero ello se hizo de manera verbal y con uso de pizarra, previo al comienzo de cada guía.

Con relación a las consideraciones a tener en cuenta al momento de aplicar la secuencia de enseñanza, la profesora expresa el manejo de Geogebra de parte del curso. Precisamente, para abordar esto, se diseñó una sesión previa al concepto de Traslación, que abordara “conceptos básicos” como es la noción de punto, vector, recta, polígono, entre otros, con el uso del software Geogebra, pues, se reconoce que el manejo, aunque básico, del software es necesario para abordar de buena manera las sesiones de Traslación, Rotación y Reflexión, sobre todo, en aulas en donde prima la enseñanza tradicional con solo uso de pizarra y presentaciones.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Según los resultados obtenidos en los análisis del material del estudiante, la encuesta realizada a los alumnos y el cuestionario aplicado a la profesora de matemática, podemos inferir que hay una percepción positiva hacia la forma en que se desarrolló la secuencia de enseñanza de la unidad. En ambos estamentos se reconoció que se aplicaron diversos recursos de enseñanza y que éstos otorgaron diversas opciones a los estudiantes para comprender los contenidos

Con respecto a los recursos de aprendizaje, se puede concluir que, en general, tanto material concreto como recursos digitales, favorecieron los aprendizajes de los cuatro grupos de estudio, siendo en los grupos de estudiantes PIE mayor el porcentaje de nivel de logro de las actividades con material concreto, comparado con las actividades en que se hacía uso de software Geogebra. También, es relevante notar que la sesión que obtuvo mayores niveles de logro en los cuatro grupos de estudio, fue la de Teselación, donde la estrategia utilizada fue de trabajo en equipo y como recurso principal el uso de material concreto. Esto se evidencia en mayor grado en el Colegio2, en donde las características de los estudiantes, propiciaba el trabajo en equipo.

De lo anterior, se puede ver la importancia de identificar las características de los estudiantes al momento de planificar las sesiones en aulas inclusivas, pues, en ambos se registraron diferencias en los niveles de logro de acuerdo a los recursos de aprendizaje utilizados.

En el estudio, el recurso de enseñanza que favoreció un mayor nivel de logro en estudiantes del PIE, fue el de material concreto, en ambos colegios de estudio. Esto porque en los contenidos de la unidad el material utilizado, propiciaba la manipulación, experimentación y construcción de los objetos matemáticos de estudio, otorgando con ello, primero el acceso a los contenidos y luego, la posterior formalización de los conceptos.

Con respecto a los estudiantes que no pertenecían al PIE, los niveles de logro fueron similares, tanto en las actividades que requerían material concreto como las de software Geogebra, siendo el Colegio1, el que alcanza niveles de logro superiores en éste grupo, exceptuando la última sesión de teselación.

En la encuesta dirigida a los estudiantes se puede evidenciar, el reconocimiento y valoración de éstos hacia las estrategias y recursos utilizados en la secuencia de enseñanza, en que en general, los estudiantes perciben de manera positiva el tener distintas opciones de uso de recursos dentro de una misma sesión, y que la organización de las actividades, les permitió una mejor comprensión de los contenidos tratados en la unidad.

También valoraron de manera positiva el aprender a usar el software Geogebra, que les permitió visualizar de mejor manera los desplazamientos de las figuras y reconocer regularidades que se presentaban con estos movimientos. El uso de material concreto, también fue reconocido por los estudiantes como una herramienta que les aportó en la visualización, al manipular y construir las transformaciones isométricas.

Además, en la encuesta, los estudiantes valoraron que, en las actividades de inicio y cierre, se mostraran las transformaciones isométricas en la cotidianidad,

sumando a ello, la incorporación de simbología de pueblos originarios, en los que están presentes las transformaciones isométricas.

Con todo lo expuesto, podemos notar que efectivamente se cumple el supuesto del estudio que plantea que la diversificación de recursos de aprendizaje, en la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones, favorece la comprensión de los contenidos en estudiantes de aulas con PIE, lo que permite la inclusión y el aprendizaje colaborativo de todos los integrantes de la clase, nivelando los saberes matemáticos. Esto porque la secuencia de enseñanza no se plantea como una adecuación curricular para grupos determinados, sino que se amplía hacia todos los estudiantes que conforman el aula, bajo el sustento de la teoría involucrada en el DUA.

Según lo estudiado, al llevar a cabo una secuencia de aprendizaje inclusiva es importante el sustento de los fundamentos teóricos, para que así se logren realizar efectivamente actividades diversificadas y se permita incluir a todos los estudiantes de la clase. Pero también, el identificar las características de los estudiantes que conforman el curso, más allá de si son o no pertenecientes al PIE, para así, planificar las actividades tomando en cuenta sus fortalezas y también sus debilidades, para lograr potenciar los aprendizajes de todos.

Otro aspecto fundamental en aulas con PIE es la importancia del trabajo que se realiza con el docente diferencial, en donde, a través del trabajo colaborativo, se pueden aunar criterios y compartir saberes, de tal manera que se puedan realizar clases más inclusivas, que permitan a todos los estudiantes mayores oportunidades de aprender.

Hay mucho por avanzar e investigar sobre cómo propiciar un aula matemática inclusiva. Desde el Ministerio de Educación solo existen las orientaciones para la enseñanza parvularia y básica (Ministerio de Educación, 2015, Decreto 83), que presentan imprecisiones con respecto a las estrategias o recursos a aplicar en el aula. Además, no existe una profundización sobre el diseño y articulación en el proceso didáctico de la asignatura de matemática.

Por todo lo expuesto, se infiere que, en los colegios, aún se está en una etapa de integración escolar, y que faltan herramientas teóricas y técnicas para transitar hacia una escuela inclusiva.

5.2 Limitaciones y Recomendaciones

Como el estudio se enmarca en un contexto educativo específico, en una muestra de estudiantes pertenecientes a dos colegios que poseen P.I.E., no es posible generalizar los resultados hacia todos los demás colegios pertenecientes a la misma población de estudio.

Algunas recomendaciones derivadas del estudio, que pueden ser de utilidad para quien quiera replicar la secuencia en sus aulas o quiera realizar un estudio de aula matemática diversificada, serían las siguientes:

- Considerar un tiempo de aplicación pertinente a las actividades diversificadas, respetando los ritmos de cada estudiante.
- Monitorear en todo momento el trabajo de los estudiantes, detectando complicaciones que puedan tener en la ejecución de las actividades.

- Las formas de expresión son importantes, sobre todo en aulas inclusivas, por lo que el docente debe captar la atención a través de lo visual, kinestésico, verbal, entre otras.
- El trabajo colaborativo entre docente de matemática y diferencial es crucial para planificar actividades, estrategias y evaluaciones diversificadas. Es en esa instancia en que se pueden aunar criterios en beneficio de mejoras de aprendizaje de todos.
- El material concreto en el aula es relevante, sobre todo, como primer acercamiento al contenido matemático y en niveles de enseñanza básica, como se aplicó en este estudio.
- El uso de software geométrico es beneficioso, sobre todo, en la mejora de la visualización de los objetos geométricos, y propicia la formalización de los conceptos.
- Es necesario considerar las realidades y vivencias educativas de los establecimientos antes de aplicar una secuencia de enseñanza, para que realmente se ajuste a las necesidades de los estudiantes.
- Reconocer las características del grupo curso, permite planificar de forma más efectiva las estrategias a utilizar en las clases, por ejemplo, hay cursos que trabajan de mejor manera individualmente y hay otros a los que les favorece el trabajo en equipo.
- Reconocer los intereses de los estudiantes, para así acercar los contenidos a su cotidianeidad.
- Tener distintos tipos de representación de los objetos matemáticos, así facilitar la comprensión de los conceptos en todos los estudiantes.
- Dar explicaciones claras y concretas, de tal manera que los estudiantes capten de mejor manera los procedimientos matemáticos involucrados.
- El realizar una secuencia de enseñanza como la descrita en este estudio, requiere de conocimientos ligados a lo matemático, pero también al aula inclusiva. Esto conlleva a que la planificación de las actividades, sea desde un principio, integradora con distintas opciones de adquirir los conocimientos y de respuesta a los estudiantes, para así asegurar el acceso a los aprendizajes matemáticos de todos los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, S., Ojeda, P., Rojas, C., Alarcón, M. (2017). *Promover la importancia del uso de material concreto en primer ciclo básico*.
- Aké, L. P., López-Mojica, J. M., y Martínez-Hernández, C., (2015). Formación inicial del profesor de matemáticas en México: el análisis de un caso. *Revista Electrónica Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(1), 57-66.
- Alatorre, D. (2018). Sobre el problema del Einstein. *Motivos matemáticos*, 1. (2). Recuperado de: motivos.matem.unam.mx/vol1/num2/artest.html
- Alsina, A. & Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva*. Narcea.
- Araya, R. y Ballesteros, E., (2010) *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Dialnet.
- Auccahuallpa, R., Troya, R., Rodríguez, D., (2018) Beneficios del uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática.
- Becerra, J., Cárdenas, O., Uribe, S., (2014). *Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños*. Redalyc.
- Blanco, H; Parra, A., (2009). Entrevista al profesor Alan Bishop. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 2(1). 69-74.
- Cardozo, C. Tutoría entre pares como una estrategia pedagógica universitaria. *Educación y Educadores*, 14, (2), 2011, 309-325.
- CAST (Center for Applied Special Technology) (2011). *Universal Design for Learning guidelines version 2.0*. Wakefield, MA: Author. Traducción al español versión 2.0 (2013): Alba Pastor, C., Sánchez Hípola, P., Sánchez Serrano, J. M. y Zubillaga del Río, A. Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).
- Cuevas, A. (2016). Las matemáticas en las teselaciones regulares de Escher. 1-12.
- Efimov N., (1969). *Curso breve de Geometría Analítica*. Editorial Paz.
- Ernst, B., (2018). *El espejo mágico de M.C. Escher*. Taschen.
- Flores, P. y Rico, L., (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Ediciones Pirámide.
- Fuller G., (2001). *Geometría Analítica*. Grupo Patria Cultural.

- García, L., (2001). *La educación a distancia, de la teoría a la práctica*. Ariel.
- Jordan, A., Schwartz, E., y McGhie-Richmond, D., (2009). Preparing teachers for inclusive classrooms. *Teaching and teacher education*, 25(4), 535-542.
- Lehmann Ch., (2008). *Geometría Analítica*. Editorial Noriega.
- Ministerio de Educación, (2009). *Programa de Integración Escolar PIE. Manual de orientaciones y apoyo a la gestión escolar*. Editorial Maval.
- Ministerio de Educación, (2015). *Decreto 83. Aprueba criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con necesidades educativas especiales de educación parvularia y educación básica. División de Educación General*. Editorial Maval.
- Ministerio de Educación, (2019). *Texto del estudiante 8°Básico*. Santillana.
- Ministerio de Educación, (2022) *Decreto Supremo N°158 Estándares para 8°Básico*.
- Ministerio de Educación, (2023) *Resultados nacionales Agencia de la Educación 2022*.
- Mora, J., & Rodrigo, J. (2007). *Mosaicos I*. Proyecto Sur de Ediciones.
- Pastor, C., Sánchez, J., Zubilaga, A., (2014), *Diseño Universal para el aprendizaje (DUA). Pautas para su introducción en el currículo*.
- Rodríguez, M. (2010). *Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos*. Universidad Politécnica de Madrid.
- Rose, D.H. (2006). Universal Design for Learning in postsecondary education: reflections and principles and their application. *Journal of postsecondary education and disability*, 19 (2), 135-151.
- Solís, L. H. (2007). *Mosaicos*. UNAM.
- Suárez, M., (2018). *Estrategias pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas en Administración: Estudios y experiencias*. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado.
- Veliz, M., & Pérez, M., (2004). Las actitudes hacia la matemática y el rendimiento académico en alumnos de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 411-417.
- Woolfolk, A., (2006). *Psicología Educativa*. 9a ed. Pearson Education.

Índice de Figuras

Figura 1: Resultados Educativos 2022 Región Metropolitana, 2023, p.16	3
Figura 2: Resultados Educativos 2022 Región Metropolitana, 2023, p.19	3
Figura 3: III Estudio Nacional de la Discapacidad 2022 en Chile, SENADIS, p.45	6
Figura 4: III Estudio Nacional de la Discapacidad 2022 en Chile, SENADIS, p.64	6
Figura 5: Rotación de un punto en un ángulo α en sentido negativo	13
Figura 6: Composición de dos rotaciones en sentido anti horario	14
Figura 7: Demostración Traslación	16
Figura 8: Regla del Paralelogramo	17
Figura 9: Forma analítica de un vector	18
Figura 10: Simetría de un punto centrado en el origen (0, 0)	18
Figura 11: Simetría de un triángulo con punto fijo en el origen (0,0)	18
Figura 12: Simetría de un punto con centro A distinto de (0, 0)	19
Figura 13: Reflexión respecto a una recta $R_{\ell}(P)=P'$	19
Figura 14: Reflexión de un punto respecto eje X	20
Figura 15: Reflexión de una figura respecto eje X	20
Figura 16: Reflexión de un punto respecto al eje Y	21
Figura 17: Reflexión de una figura respecto al Eje Y	21
Figura 18: Composición de dos simetrías centrales	22
Figura 19: Composición de dos reflexiones en rectas paralelas	23
Figura 20: Composición de dos reflexiones en rectas secantes	23
Figura 21: Los 17 tipos de simetría cristalográfica en el plano	25
Figura 22: Ejemplo de congruencia perfecta y de congruencia más perfecta según definiciones de Kepler	25
Figura 23: Imágenes de Harmonices Mundi	26
Figura 24: Obra "Ángeles y demonios" M.C. Escher	27
Figura 25: Representación de teselación del plano en un vértice de polígonos regulares	29
Figura 26: Formas de combinar polígonos para teselar el plano, Mora y Rodrigo, 2007, p.90	31
Figura 27: Los ocho mosaicos semi regulares hallados por Kepler. Recuperado de https://urban-networks.blogspot.com/2016/07/cuando-las-paredes-hablan-epigrafias-y.html	32
Figura 28: Tipos de teselados irregulares a partir de triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos irregulares	33
Figura 29: Redes cerebrales y aprendizaje. Elaborada por Pastor et al. (2014)	36

Índice de Tablas

Tabla 1: Tabla 1: OA13 y OA14 de la secuencia de enseñanza	5
Tabla 2: Posibles combinaciones de polígonos para teselar el plano, Mora y Rodrigo, 2007, p.90.	30
Tabla 3: Etapas de la Investigación. Elaboración propia.	40
Tabla 4: Tiempo estimado por etapa. Elaboración propia.	41
Tabla 5: Tiempos de aplicación de la secuencia de enseñanza. Elaboración propia.	70
Tabla 6: Porcentaje según nivel de logro. Elaboración propia.	71

ANEXOS

MATERIAL DEL ESTUDIANTE

Guía N°1: Explorando Geogebra

Nombre: _____ Curso: _____

Conceptos Claves: plano cartesiano, puntos, coordenadas, polígono, vector, desplazamiento, trayectoria.

Recursos: software Geogebra.

Presentación:

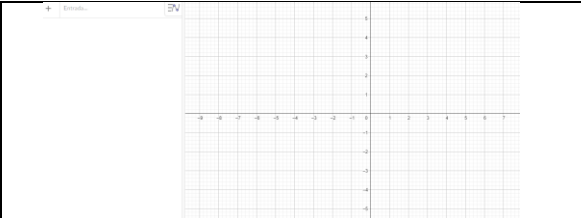
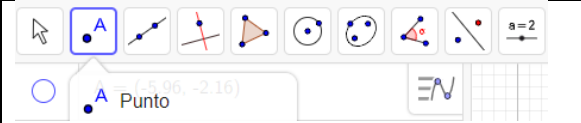
En la presente guía, crearemos puntos, polígonos y vectores utilizando el software Geogebra. Para ello, usaremos principalmente, la barra de herramientas del software que nos permite acceder a distintas opciones de creación de los objetos matemáticos.

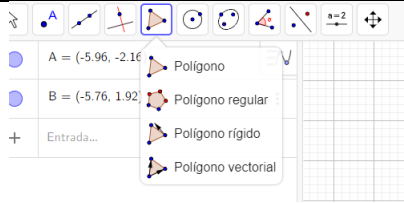
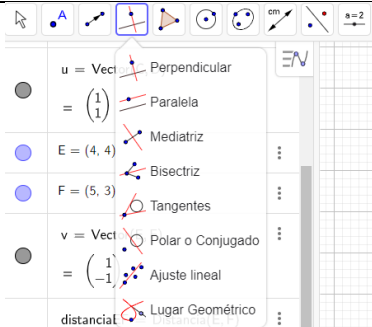
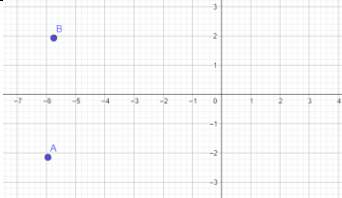
Reseña:

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación. Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el mouse o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible.

Actividad 1: Encontrando la figura

Indicaciones

Al abrir Geogebra Clásico en el computador, encontrarás que la vista gráfica ocupa casi toda la pantalla, allí puedes encontrar una representación del Plano Cartesiano	
En la parte superior izquierda de la pantalla encontrarás la barra de herramientas del software, allí puedes seleccionar, por ejemplo, la segunda opción punto, que se creará al hacer clickear en	

cualquier parte de tu vista geométrica.	
Para construir polígonos puedes ir a la quinta opción de la barra de herramientas y elegir, por ejemplo, la primera opción en donde se irán formando los lados del polígono de acuerdo a la selección de vértices consecutivos.	
Para construir rectas puedes ir a la tercera opción y construirla dados dos puntos de ella o a la cuarta opción de la barra de herramientas y seleccionar el tipo de recta que quieras construir.	
Recuerda que los puntos en el Plano Cartesiano están formados por dos coordenadas (x,y) y que se nombran con letras en mayúscula	

1) Usando Geogebra, identifica la figura que se forma al unir consecutivamente los siguientes puntos:

a) A(-7,2), B(-3,3), C(-4,-1)

Figura:

b) D(2,-6); E(-3,-6); F(-3,-1); G(2,-1)

Figura:

c) H(7,7); I(2,7); J(2,-3); K(7,-3)

Figura:

2) Si la figura ABCD es un cuadrado y tres de sus vértices son A(-7,2), B(-7,-2), C(-3,-2). ¿Cuál sería el vértice D? Representalo en Geogebra.

Respuesta:

Actividad 2: Vectores en Geogebra

Un vector representa desplazamientos en el plano cartesiano a través de tres componentes: módulo dirección y sentido.

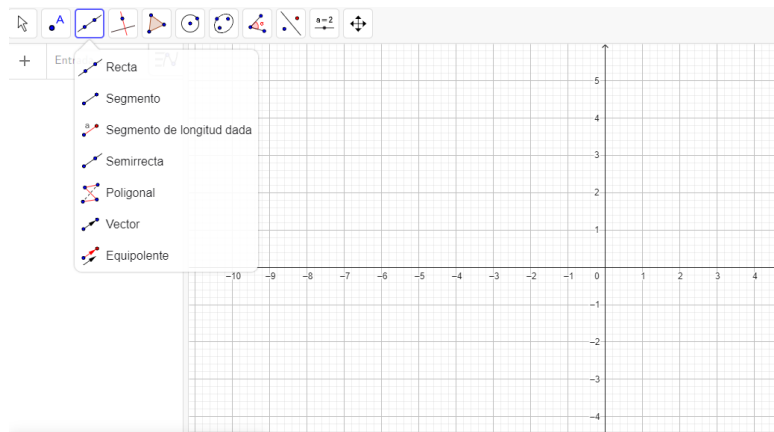
Módulo: es la longitud del vector. Si se conoce sus coordenadas se puede calcular de la siguiente manera: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dirección: está determinada por la recta que contiene al vector.

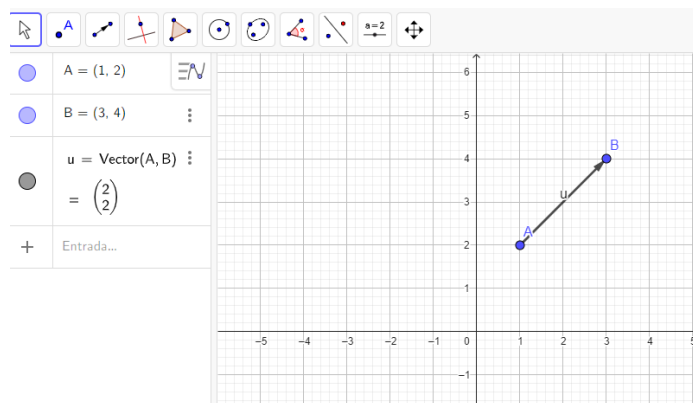
Sentido: indica hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector. Se indica mediante una flecha en uno de sus extremos.

Para graficar un vector en Geogebra, sabiendo su origen y extremo, debemos:

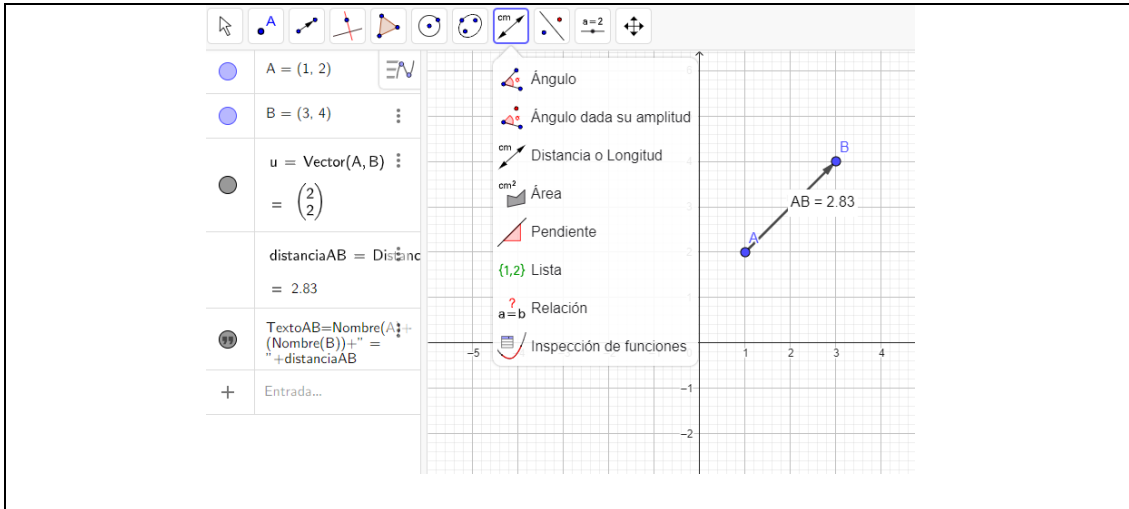
Seleccionar el tercer ícono de la barra de herramientas, opción vector:



Luego, ubicamos en el plano cartesiano, los puntos que representan el origen y el extremo del vector. Con ello, se generará automáticamente el vector, y en la vista algebraica tendremos especificadas sus coordenadas.



Por último, para obtener el módulo, podemos seleccionar el octavo ícono de la barra de herramientas, tercera opción que dice distancia y longitud y clickeamos el origen y el extremo del vector:



En cada caso, a partir de los puntos dados, grafica el vector utilizando Geogebra, determina sus coordenadas y calcula su módulo.

	Coordenadas	Módulo
a) A(0,0) y B(3,4)		
b) A(4,5) y B(8, 9)		
c) A(1,7) y B(-5,5)		

Actividad 3: Rectas en Geogebra

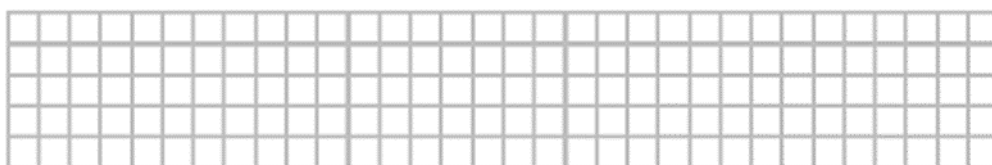
En cada caso, a partir de los puntos dados, traza una recta. Posteriormente, realiza una recta paralela y una perpendicular a ella utilizando Geogebra. Luego, anota dos puntos cualquiera que pertenezcan a la recta paralela y dos que pertenezcan a la recta perpendicular de la recta inicialmente construída.

	Puntos de recta paralela	Puntos de recta perpendicular
a) A(2,5) y B(3,8)		
b) A(5,-8) y B(6,-3)		

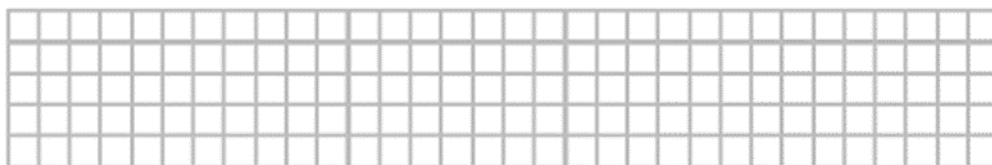
c) $A(1,4)$ y $B(5,3)$		

Actividad de Cierre

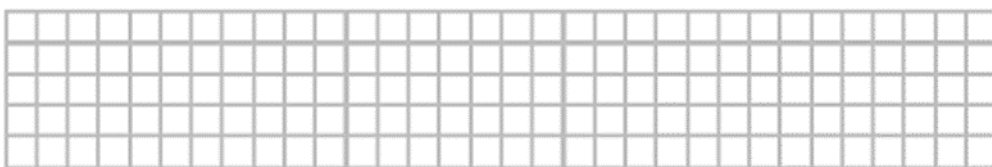
- Según lo visto en clase. ¿qué objetos geométricos se pueden representar usando el plano cartesiano? ¿crees que pueden haber más de los vistos hoy? Argumenta



- ¿En qué situaciones crees que utilizamos vectores en nuestra vida cotidiana?



- ¿De qué manera crees que están presentes las rectas en nuestra cotidianidad?



Guía N°2: Traslación en el Plano Cartesiano

Nombre: _____ Curso: _____

Conceptos Claves: plano cartesiano, vector, traslación, coordenadas, movimiento.

Recursos: regla graduada, software Geogebra.

Presentación:

Esta segunda guía trata sobre traslaciones, que es una transformación isométrica que desplaza todos los puntos de una figura en una misma dirección, sentido y longitud. Indagaremos cómo puedes realizar traslaciones en el plano cartesiano utilizando artefactos manuales y digitales, por medio de vectores. También, podrás realizar composición de traslaciones y verificar regularidades que se obtienen al realizar dos o más traslaciones de una figura. ¡Comencemos!

Reseña:

En éste tipo de transformación isométrica, se deben señalar las coordenadas del vector de traslación, $\vec{v}$, que se representan como un par ordenado de números $\vec{v} = (x, y)$; donde x representa el desplazamiento horizontal e y representa el desplazamiento vertical.

Actividad 1: Armandando la chakana

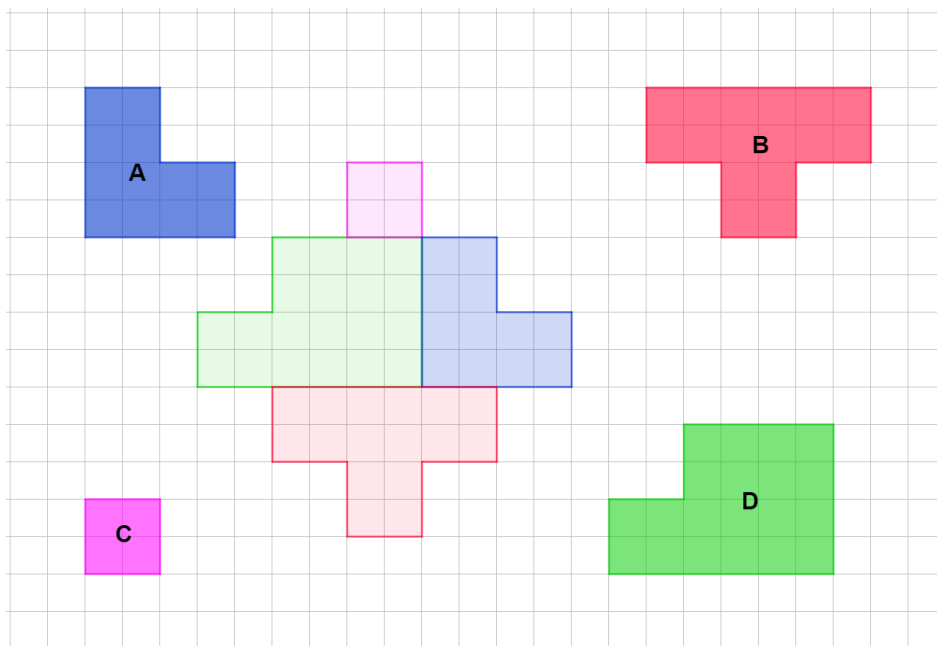
Introducción

En la cultura aymara, existen una serie de símbolos con un significado sagrado, entre ellos, podemos encontrar la chakana, cuya forma sugiere una pirámide con escaleras en los costados y centro circular, su sentido más elevado está en el de señalar la unión entre lo bajo y lo alto, la tierra y el sol, el ser humano y lo superior.



- 3) La siguiente imagen, muestra el contorno de la chakana, ¿cómo trasladarías cada polígono para completar la chakana? Con la regla, une un punto cualquiera de cada polígono con su homólogo de la chakana.

(Observación: la traslación de cada figura requiere un vector de traslación diferente).



- a) Desplazamiento de polígono A (desde su posición hasta el lugar que le corresponde en la chakana):

Horizontalmente:

Verticalmente:

Vector:

- b) Desplazamiento de polígono B (desde su posición hasta el lugar que le corresponde en la chakana):

Horizontalmente:

Verticalmente:

Vector:

- c) Desplazamiento de polígono C (desde su posición hasta el lugar que le corresponde en la chakana):

Horizontalmente:

Verticalmente:

Vector:

- d) Desplazamiento de polígono D (desde su posición hasta el lugar que le corresponde en la chakana):

Horizontalmente:

Verticalmente:

Vector:

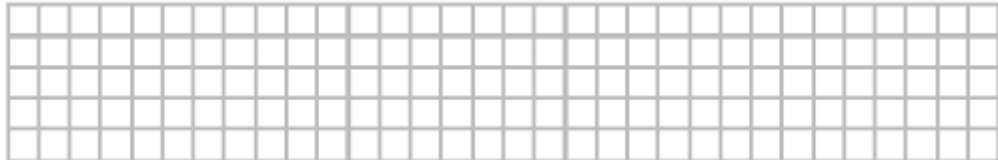
Actividad 2: Grafiquemos en Geogebra

En Geogebra clásico, dibuja un triángulo cualquiera con la opción polígono de la barra de herramientas, luego, coloca la opción trasladar, según el vector $\vec{v} = (3,4)$

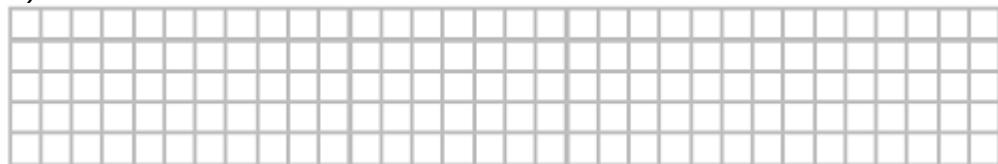
- 1) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo trasladado?

Vértices Triángulo ABC	Vértices Triángulo A'B'C'
A= (,)	A'= (,)
B= (,)	B'= (,)
C= (,)	C'= (,)

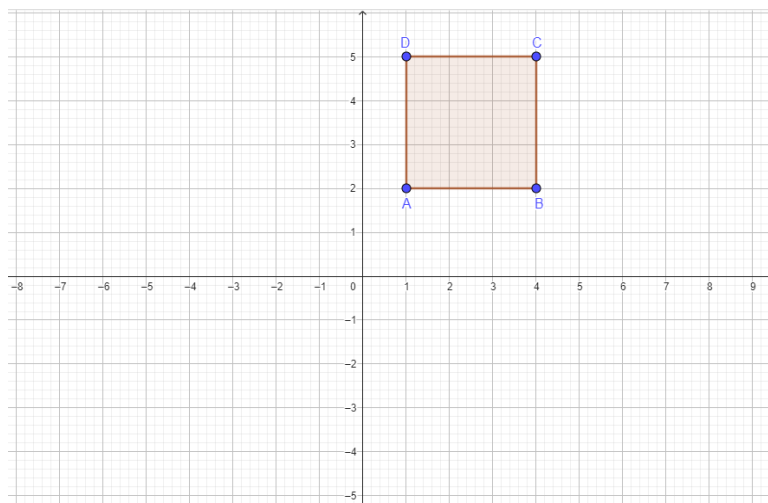
- 2) ¿Qué relación crees que tienen las coordenadas de los vértices originales, los vértices de la imagen y el vector de traslación?



- 3) De acuerdo a la respuesta de la pregunta anterior, si ahora a un punto cualquiera $P(x,y)$ se le aplica una traslación según un vector $\vec{v} = (a,b)$, ¿cómo quedarán expresadas las coordenadas del punto P' (Imagen de P)?

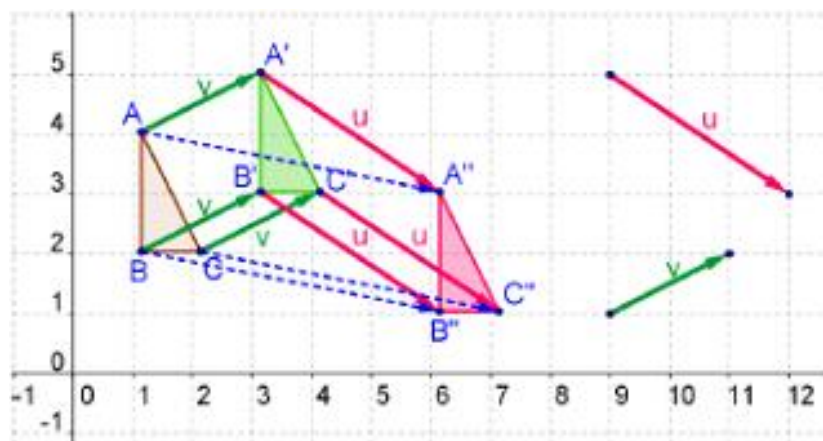


- 4) Según lo anterior, dibuja la Imagen del cuadrado, si es trasladado según el vector $\vec{v} = (-5,-3)$



Actividad 3: Traslación más traslación

En la siguiente figura, se aplicaron dos traslaciones al triángulo ABC, una seguida de la otra, trasladando primero según el vector v , y luego, según el vector u .



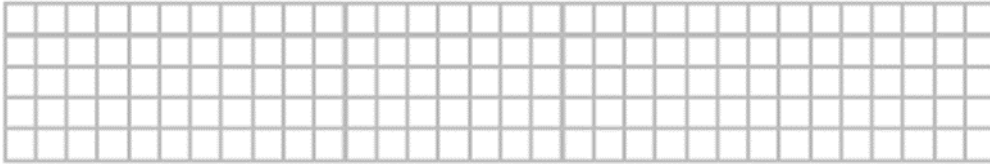
- 1) Escribe las coordenadas de los vectores u y v

$$u = (\quad , \quad) \qquad v = (\quad , \quad)$$

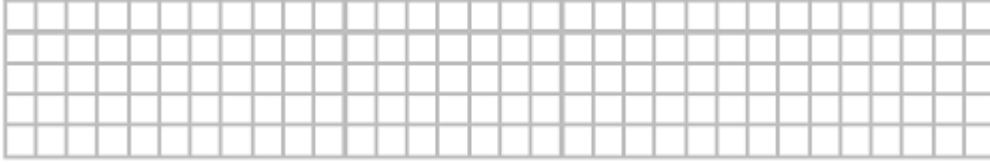
- 2) Escribe las coordenadas de cada uno de los triángulos:

$$\begin{array}{lll} A = (\quad , \quad) & A' = (\quad , \quad) & A'' = (\quad , \quad) \\ B = (\quad , \quad) & B' = (\quad , \quad) & B'' = (\quad , \quad) \\ C = (\quad , \quad) & C' = (\quad , \quad) & C'' = (\quad , \quad) \end{array}$$

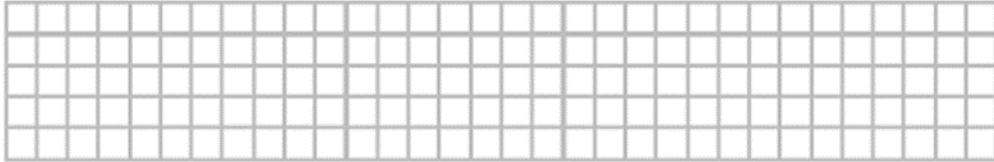
- 3) ¿Cuáles son las coordenadas del vector azul?(aparece en el dibujo con línea discontinua)



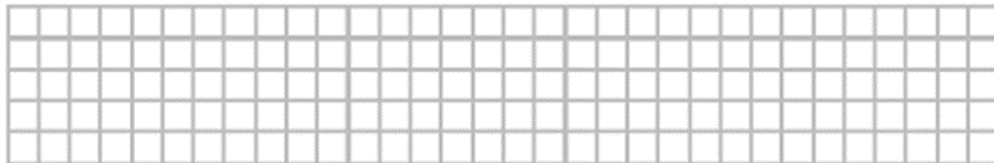
- 4) ¿Puedes inferir alguna relación entre el vector azul y los vectores v y u ?



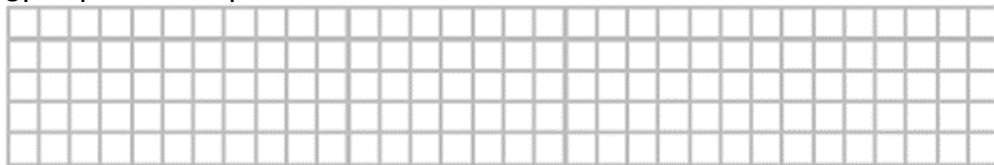
- 5) Dado lo anterior, si tenemos un punto $P(x,y)$ y realizamos una traslación según un vector $\vec{v} = (a,b)$ seguida de otra traslación según un vector $\vec{u} = (c,d)$. ¿Cuáles serían, de forma general, las coordenadas del punto homólogo?(una vez aplicadas las dos traslaciones, primero por v y luego por u)



- 6) Dibuja un cuadrado cualquiera en Geogebra y aplícale una traslación según el vector $\vec{v} = (4,5)$ y luego al cuadrado resultante, aplícale una traslación según el vector $\vec{u} = (-6,3)$. ¿Cuáles son las coordenadas, del cuadrado resultante?

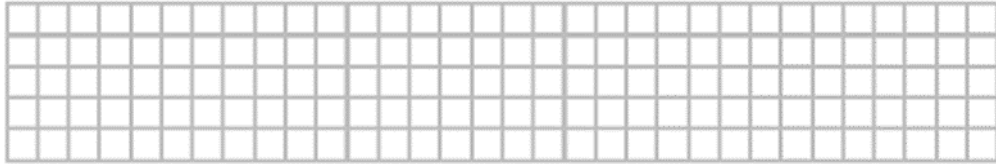


- 7) Si al mismo cuadrado del ejercicio anterior, le aplicarás primero una traslación según el vector $\vec{u} = (-6,3)$ y luego la traslación según el vector $\vec{v} = (4,5)$. ¿Cuáles serían las coordenadas del cuadrado resultante? ¿porqué crees que ocurrirá esto?

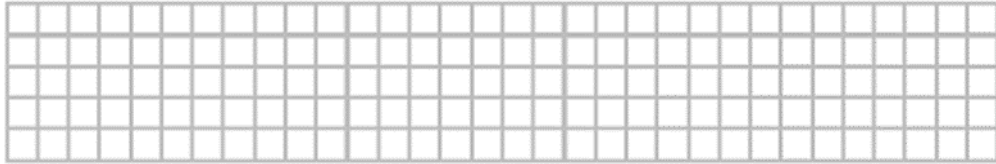


Actividad de Cierre

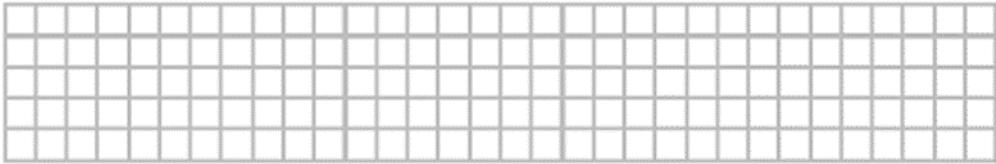
- ¿Qué es una traslación y cuál es la importancia del vector de traslación?



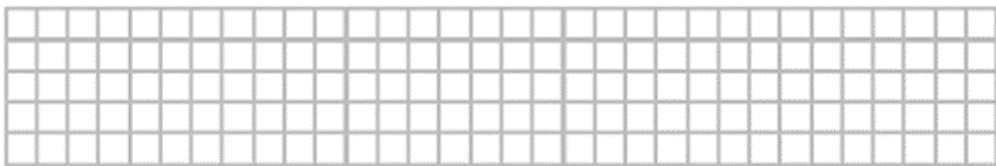
- ¿En qué consiste la composición de traslaciones?



- ¿El orden en que se aplican los vectores de traslación afecta a la posición de la figura resultante? Argumente su respuesta



- ¿En qué situaciones encuentras traslaciones de figuras u objetos en tu vida cotidiana?



Guía N°3: Rotación en el Plano Cartesiano

Nombre: _____ Curso: _____

Conceptos Claves: plano cartesiano, ángulo, rotación, centro de rotación, coordenadas, movimiento.

Recursos: regla graduada, transportador, software Geogebra, papel lustre.

Presentación:

La siguiente guía trata sobre una transformación isométrica en particular, que es la rotación. En ella veremos cómo puedes realizar rotaciones en el plano cartesiano utilizando artefactos manuales y digitales, por medio de un centro de rotación y un ángulo. También, podrás realizar composición de rotaciones y verificar regularidades que se obtienen al realizar dos o más rotaciones a una figura. ¡Comencemos!

Reseña:

Una rotación es una transformación isométrica que permite girar todos los puntos del plano en un ángulo constante con respecto a un punto fijo. En ella se distinguen tres elementos: centro de rotación, ángulo de rotación y sentido de rotación (horario y anti horario). Una rotación con centro P y ángulo de giro α se puede representar por $Rot_{(P,\alpha)}$.

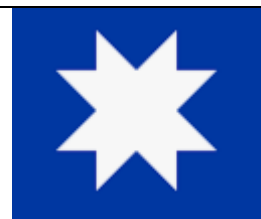
En la presente guía ocuparemos el sentido de rotación anti horario, o sea, en contra de las manecillas del reloj para denotar los ángulos:



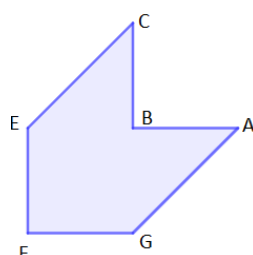
Actividad 1: Guñelve

Introducción:

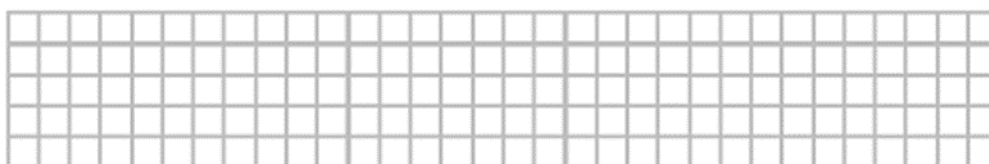
En la cultura mapuche, existen una serie de símbolos con un significado sagrado, entre ellos, está el guñelve, que puede ser descrito como una forma especial de octagrama o estrella de ocho puntas. La figura representa el lucero de la mañana o el planeta Venus.



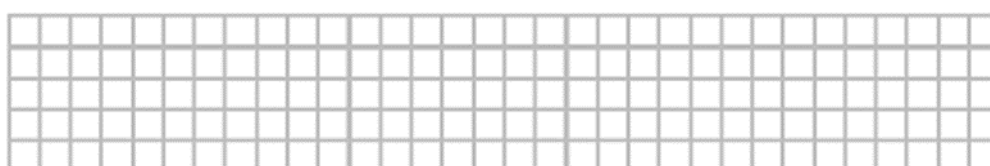
- 1) En la siguiente imagen, se muestra una parte del guñelve, ¿cómo podrías formar la figura completa? Utiliza el papel lustre entregado.



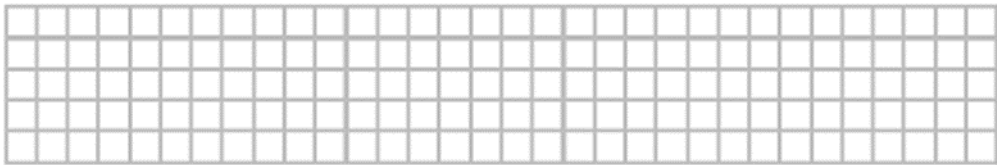
- a) ¿Qué desplazamiento ocupaste para obtener el guñelve completo?



- b) ¿Qué vértice ocupaste como centro de rotación? ¿Por qué?

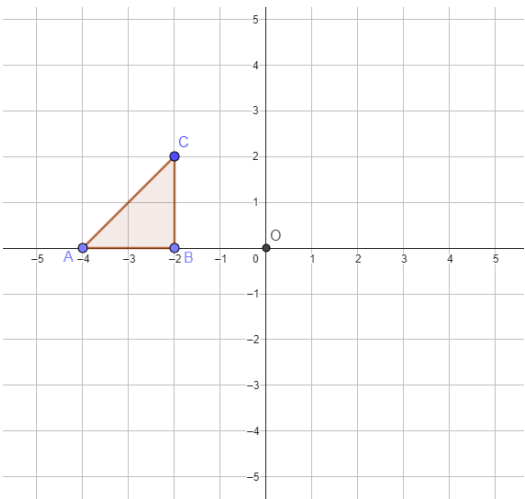


c) ¿Cuál fue el ángulo de rotación utilizado? Verifícalo con el transportador.



Actividad 2: Grafiquemos en Geogebra

En Geogebra clásico, dibuja el triángulo de la imagen y realiza una rotación en 90°, 180°, 270° y 360° con centro O (Origen del plano cartesiano)

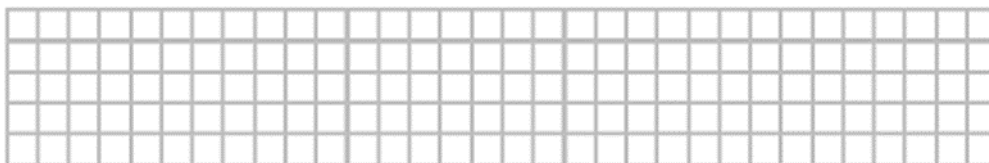


a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo rotado?

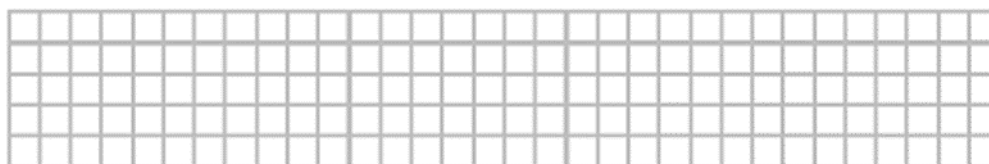
	Figura Inicial	Figura Rotada
$Rot_{(O,90^{\circ})}$	$A= (\quad , \quad)$ $B= (\quad , \quad)$ $C= (\quad , \quad)$	$A'= (\quad , \quad)$ $B'= (\quad , \quad)$ $C'= (\quad , \quad)$
$Rot_{(O,180^{\circ})}$	$A= (\quad , \quad)$ $B= (\quad , \quad)$ $C= (\quad , \quad)$	$A_1'= (\quad , \quad)$ $B_1'= (\quad , \quad)$ $C_1'= (\quad , \quad)$
$Rot_{(O,270^{\circ})}$	$A= (\quad , \quad)$ $B= (\quad , \quad)$ $C= (\quad , \quad)$	$A_2'= (\quad , \quad)$ $B_2'= (\quad , \quad)$ $C_2'= (\quad , \quad)$

$Rot_{(O,360^\circ)}$	$A = (\quad , \quad)$ $B = (\quad , \quad)$ $C = (\quad , \quad)$	$A_3' = (\quad , \quad)$ $B_3' = (\quad , \quad)$ $C_3' = (\quad , \quad)$
-----------------------	---	--

- b) ¿Qué cambios observas en las coordenadas de las abscisas (x) al hacer la rotación?



- c) ¿Qué cambios observas en las coordenadas de las ordenadas (y) al hacer la rotación?



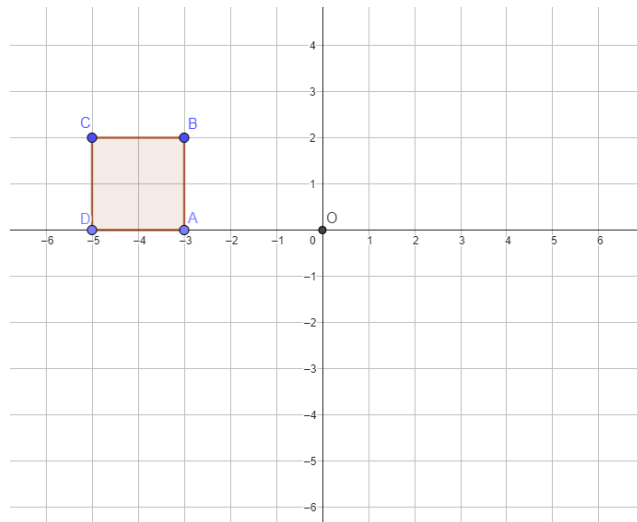
- d) Generaliza, según lo observado en la figura respecto de las coordenadas, completando la siguiente tabla:

Observación: aquí se tiene un punto P del plano cartesiano de coordenadas P(x,y) y se piden las coordenadas de los puntos Q= rotar a P en 90° ; R= rotar a P en 180° , S= rotar a P en 270° y T= rotar a P en 360°

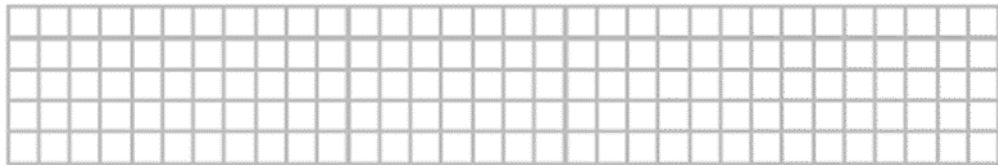
	Punto rotado			
Punto Inicial	Rot(O, 90°)	Rot(O, 180°)	Rot(O, 270°)	Rot(O, 360°)
P(x,y)	Q($\quad$, $\quad$)	R($\quad$, $\quad$)	S($\quad$, $\quad$)	T(x,y)

Actividad 3: Rotación más Rotación

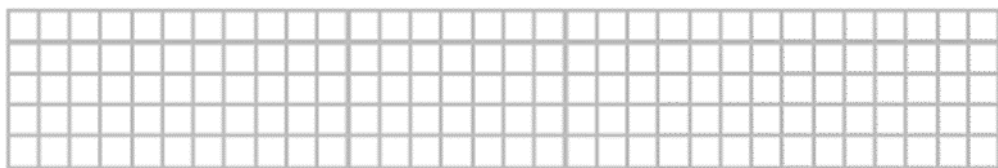
En Geogebra clásico, dibuja el cuadrado de la imagen, luego realiza una rotación en 180° con centro en el origen, y luego, a la figura resultante, aplícale una rotación en 90° con centro en el origen.



a) ¿Cuáles son las coordenadas de la figura rotada en 180° ?



b) ¿Cuáles son las coordenadas de la figura resultante, en el ejercicio anterior, al ser rotada en 90° ?



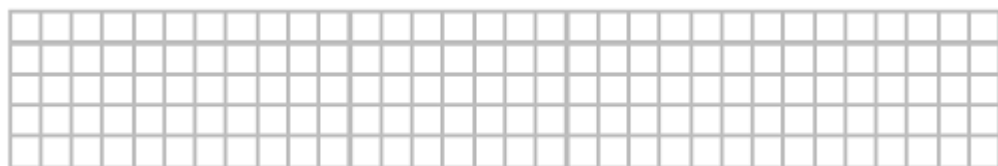
c) ¿Cuáles son las coordenadas de la figura final?

$A'' = (\quad , \quad)$ $B'' = (\quad , \quad)$ $C'' = (\quad , \quad)$ $D'' = (\quad , \quad)$

d) De acuerdo a la respuesta de la pregunta anterior, si ahora aplicas al cuadrado original una rotación en 270° con centro en el origen. ¿Cuáles son las coordenadas de la figura resultante?

$A' = (\quad , \quad)$ $B' = (\quad , \quad)$ $C' = (\quad , \quad)$ $D' = (\quad , \quad)$

e) ¿Cómo son las coordenadas obtenidas en las preguntas c y d? ¿A qué crees que se deba esto?

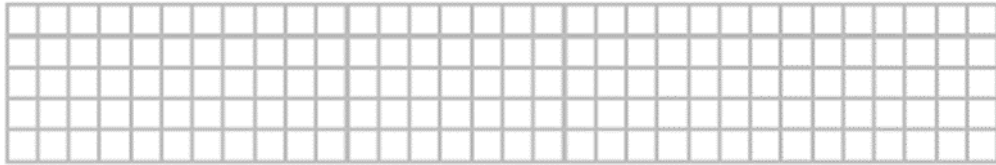


Actividad de Cierre

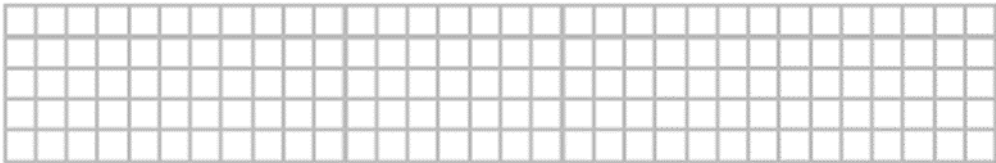
- ¿Qué es una rotación? ¿cuál es la función del ángulo y del centro de rotación?



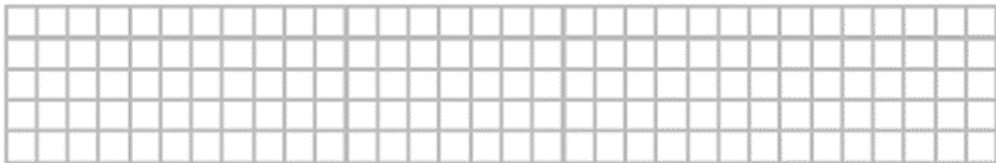
- ¿En qué consiste la composición de rotaciones?



- ¿Cómo podrías escribir de manera general el resultado de una composición de rotaciones que posean centro de rotación común?



- ¿En qué situaciones encuentras rotaciones de figuras u objetos en tu vida cotidiana?



Guía N°4: Reflexión en el Plano Cartesiano

Nombre: _____ Curso: _____

Conceptos Claves: plano cartesiano, eje de simetría, reflexión, coordenadas, movimiento.

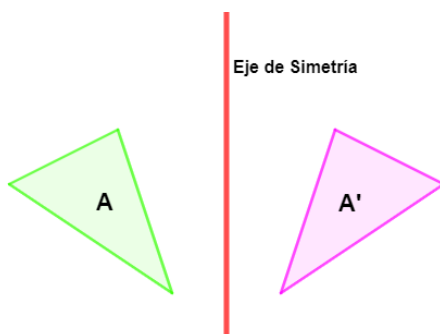
Recursos: regla, papel lustre, software Geogebra.

Presentación:

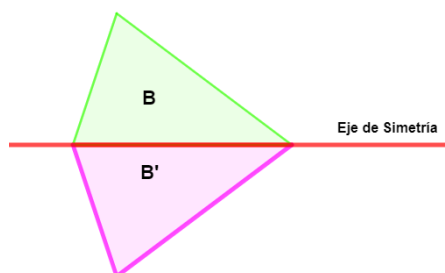
En esta guía trabajaremos con una transformación isométrica en particular, que es la reflexión. En particular, veremos cómo puedes realizar reflexiones en el plano cartesiano utilizando artefactos manuales y digitales, por medio de un eje de simetría. También, podrás realizar composición de reflexiones y verificar regularidades que se obtienen al realizar dos o más reflexiones a una figura. ¡Comencemos!

Reseña:

Una reflexión es una transformación isométrica que, al aplicarla en una figura inicial, la lleva en una segunda figura (la imagen bajo la reflexión), que se encuentra a la misma distancia que la figura inicial, de la recta respecto de la cual se reflejó la figura. La recta de reflexión se conoce como el eje de simetría de la reflexión. Por ejemplo:



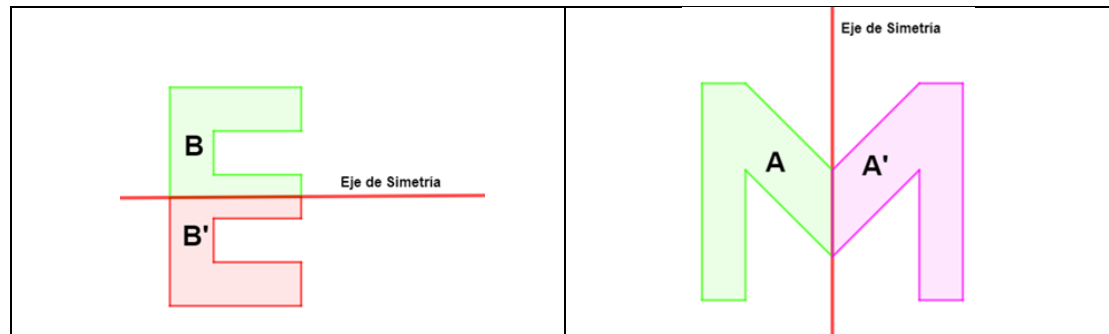
En la figura anterior, la figura inicial es A, y la imagen bajo la reflexión, respecto del eje de simetría, es A'. Veamos otro ejemplo:



En la figura anterior la figura inicial es B y la imagen bajo la reflexión, respecto del eje de simetría, B'.

Una figura tiene un eje de simetría cuando es posible trazar una recta que divida a dicha figura en dos partes idénticas (congruentes entre sí), pero con distinta orientación.

Por ejemplo:



Ahora, de usted un ejemplo de reflexión de figura con respecto a un eje, indique dónde colocaría el eje de simetría, y dibuje su respectiva imagen:



Actividad 1: Lukutuel

Introducción:

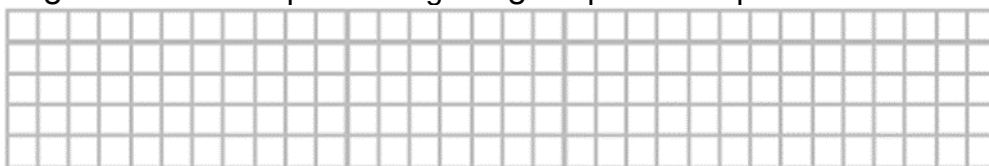
En la cultura mapuche, existen una serie de símbolos con un significado sagrado, entre ellos, está el lukutuel, que puede ser descrito como un símbolo antropomorfo, que aparece en los primeros textiles confeccionados y, según las creencias, se relaciona con el primer ser humano, que encarna un ser superior en la tierra, una especie de avatar.



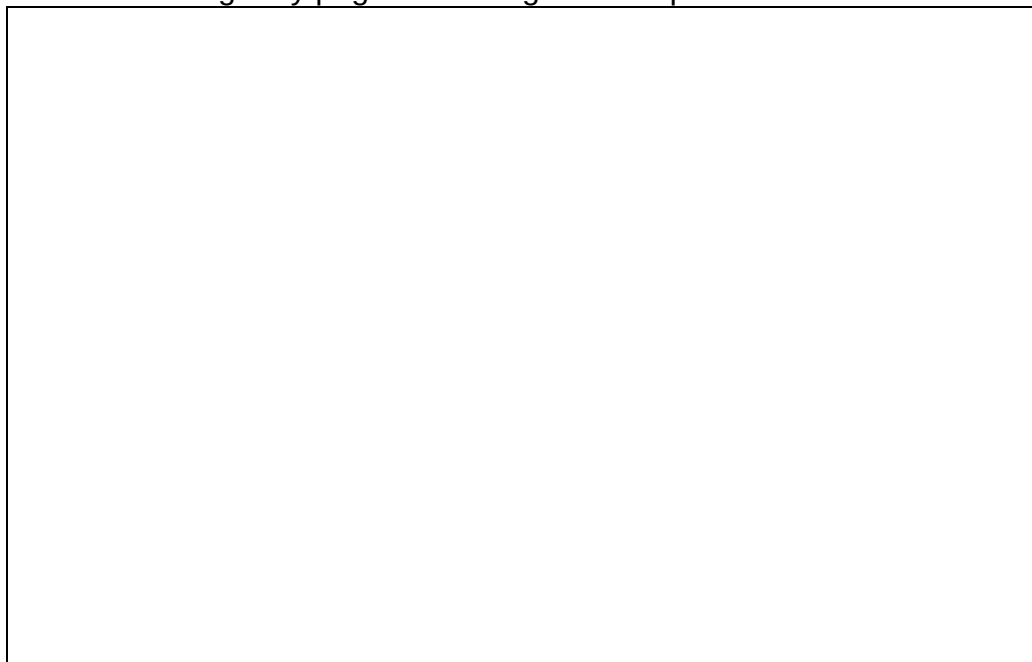
- 1) En la siguiente imagen se muestra el lukutuel, ¿dónde crees que estaría el eje de simetría? Realiza la recta que lo representa utilizando regla.



- a) Si quisiéramos completar el lukutuel tomando solo la mitad superior. ¿Podríamos completar la figura? ¿Porqué crees que ocurre esto?

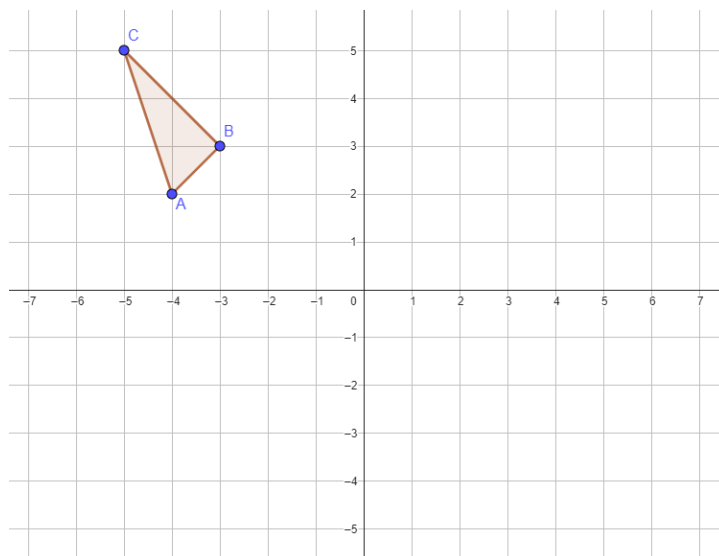


- b) Con el papel lustre, crea tu propio símbolo en el que ocupes una reflexión con respecto a un eje de simetría. Para ello, puedes realizar los siguientes pasos:
- 1° Dobra el papel lustre formando con el dobles el eje de simetría.
 - 2° Realiza tu figura, marcando los vértices de ella con un mondadientes.
 - 3° Desdobla el papel lustre, ubica las marcas de los vértices y únelos siguiendo el mismo orden que en la figura inicial.
 - 4° Recorta tu figura y pégala en el siguiente espacio.



Actividad 2: Grafiquemos en Geogebra

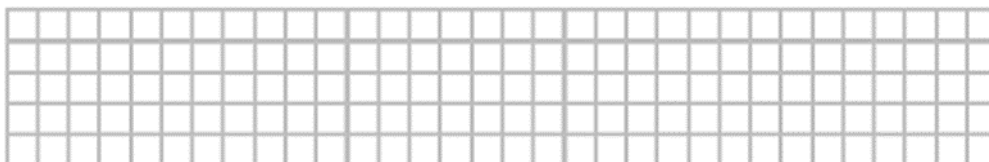
En Geogebra clásico, dibuja el triángulo de la imagen y realiza una reflexión en torno al eje de las ordenadas y de las abscisas, luego observa cómo son las coordenadas resultantes en las figuras:



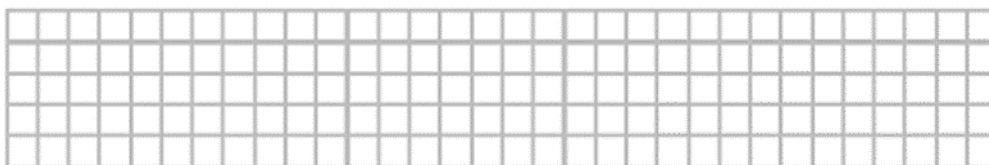
a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo reflejado?

Figura Inicial	Figura Reflejada eje X	Figura Reflejada eje Y
A= (,)	A'= (,)	A ₁ '= (,)
B= (,)	B'= (,)	B ₁ '= (,)
C= (,)	C'= (,)	C ₁ '= (,)

b) ¿Qué cambios existen en las coordenadas con respecto a las abscisas y ordenadas al hacer estas reflexiones?



c) ¿Qué relación existe entre la distancia de los vértices de la figura original y el eje X y la distancia entre los vértices homólogos? ¿Existe la misma relación entre las distancias de la figura original y la reflejada en torno al eje Y?



d) Generaliza lo encontrado en la figura al aplicar la reflexión en torno al eje X indicando las coordenadas del punto reflejado P'. Luego, como segundo ejercicio, aplicas al punto P(x,y) una reflexión respecto del eje y e indica las coordenadas del punto reflejado P''.

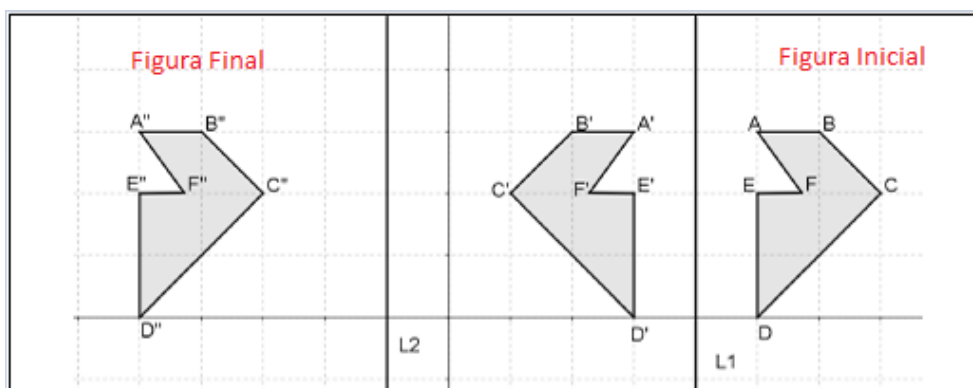
	Aplicación de reflexión
--	-------------------------

Punto Inicial	Eje X	Eje Y
$P(x,y)$	$P'(\quad , \quad)$	$P''(\quad , \quad)$

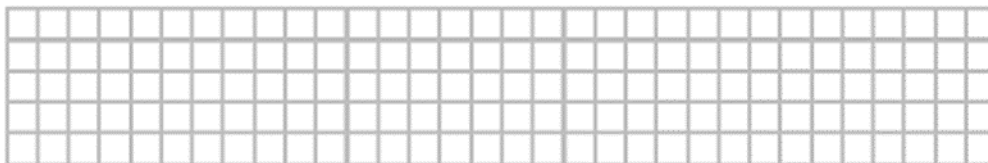
Actividad 3: Reflexión más reflexión

Reflexión de una figura dadas dos rectas paralelas

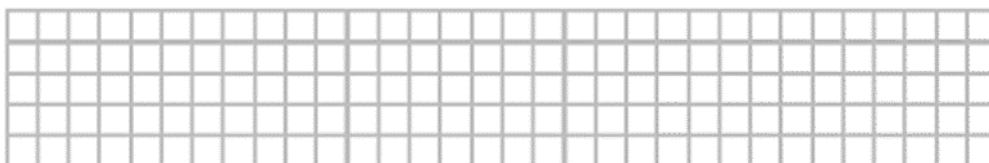
En Geogebra clásico, dibujaremos la figura de la imagen y la reflejaremos en torno a la recta L1 y después reflejaremos su imagen en torno a una recta paralela L2.



a) ¿Qué transformación llevaría a la figura inicial a la figura final?



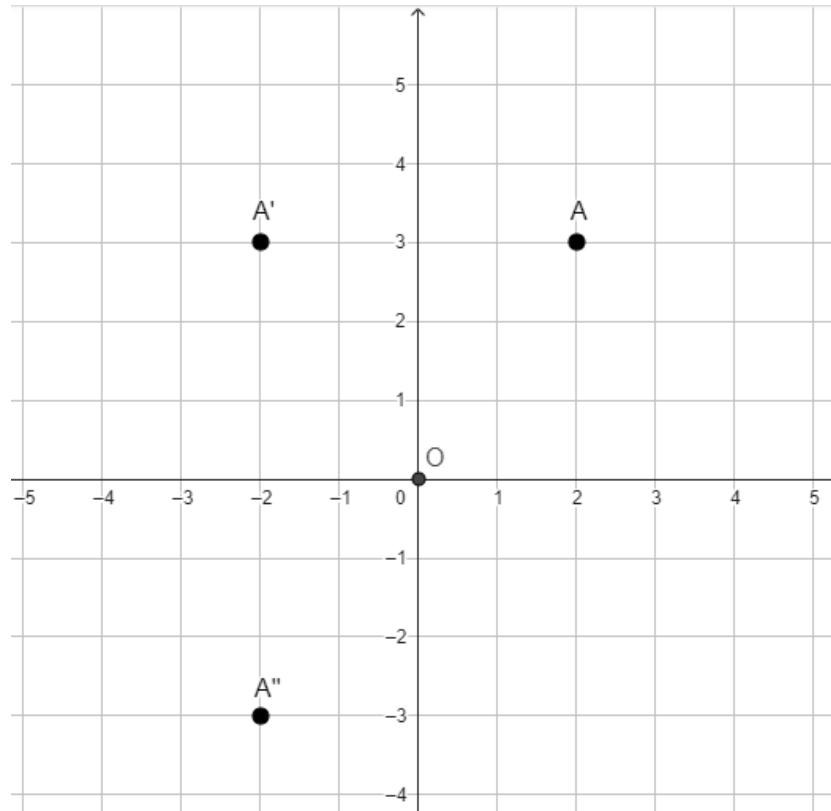
b) Si primero aplicamos, a la figura final, la reflexión respecto de la recta L2 y luego reflejamos su imagen, respecto de la recta L1, ¿obtenemos la misma imagen que la figura inicial? Argumenta.



Reflexión de una figura dadas dos rectas secantes(que se intersectan entre sí)

I) Reflexión de un punto:

El punto A de la figura (primer cuadrante) es reflejado con respecto al eje Y, formando el punto homólogo A' (segundo cuadrante). Luego, A' es reflejado con respecto al eje X, formando el punto A'' (tercer cuadrante), como muestra la imagen:

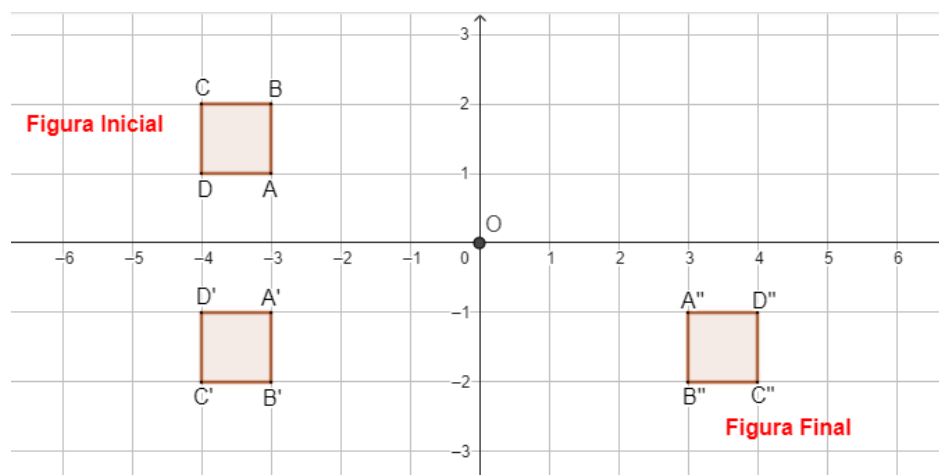


- [illegible]

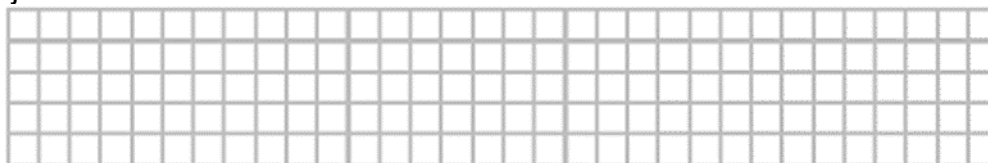
- [illegible]

142

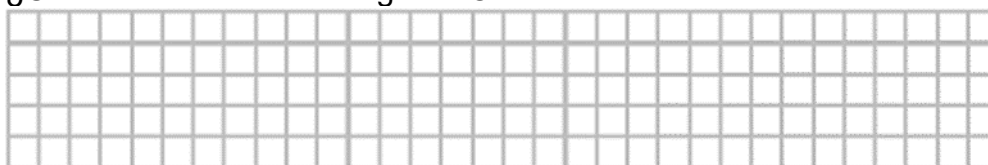
En Geogebra clásico, dibujaremos el cuadrado ABCD y lo reflejaremos con respecto a los ejes del plano cartesiano, que se intersectan en el Origen(O). El cuadrado ABCD, es reflejado con respecto al eje X, formando la imagen A'B'C'D'. Luego, éste último, es reflejado con respecto al eje Y, formando la imagen A''B''C''D'' como muestra la imagen:



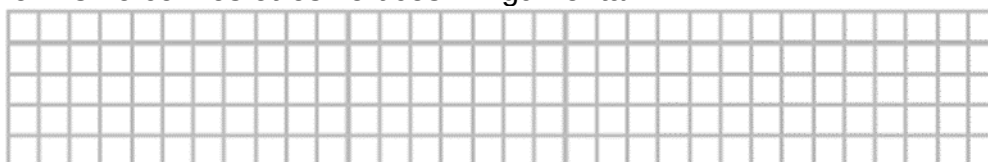
- a) ¿Cuál es la medida de los ángulos formado por la intersección de los ejes?



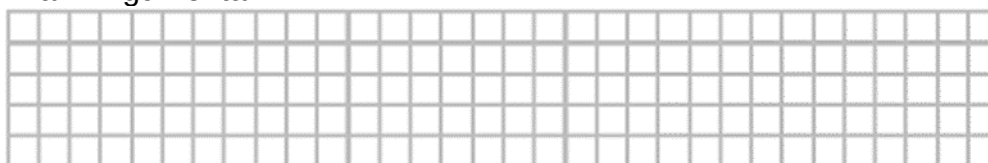
- b) ¿Cuál es la medida del ángulo BOB''?



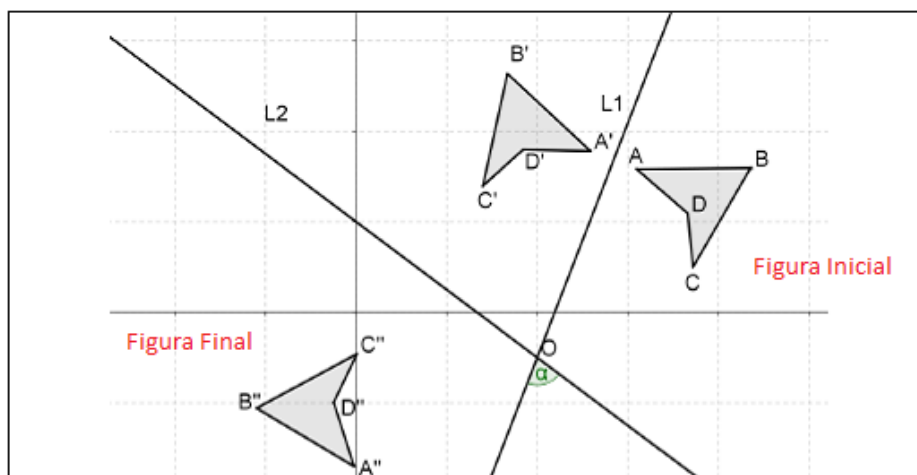
- c) ¿Qué relación tiene con los resultados obtenidos en a) y b)? ¿Pasará lo mismo con los otros vértices? Argumenta



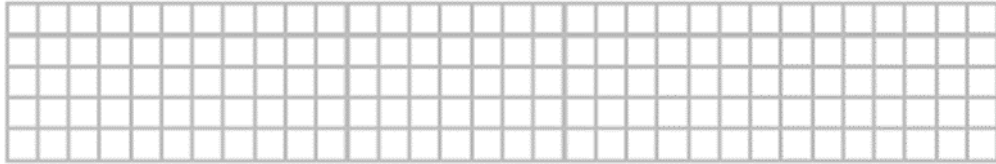
- d) ¿Qué transformación isométrica desplazaría la figura inicial en la figura final? Argumenta



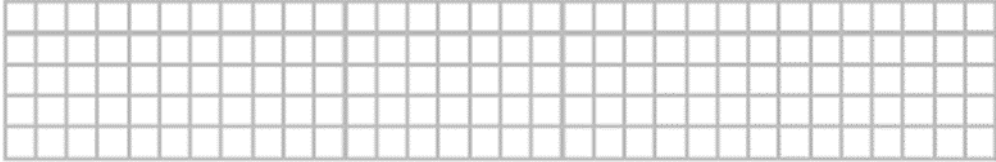
Vamos a reflejar una figura con respecto a una recta L_1 , y luego, reflejaremos la imagen en torno a otra recta L_2 secante a ella.

[illegible][illegible]

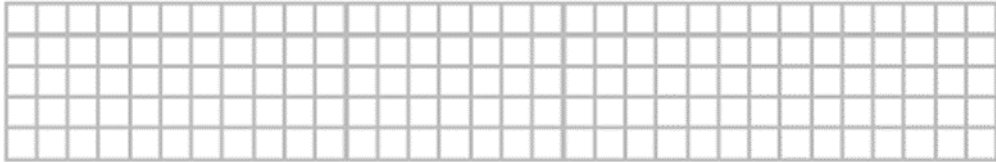
144



- ¿Cómo podrías describir de manera general el resultado de una composición de reflexiones con rectas paralelas y secantes?



- ¿En qué situaciones encuentras reflexiones de figuras u objetos en tu vida cotidiana?



Guía N°5: Teselaciones

Nombre: _____

Curso: _____

Conceptos Claves: plano cartesiano, traslación, simetría, reflexión, coordenadas, movimiento, teselación, patrón de teselación.

Recursos: regla, papel lustre, tijeras, pegamento, cartón piedra.

Presentación:

Esta guía trata sobre las teselaciones. Identificaremos patrones de teselación y cómo van cubriendo el plano a través de transformaciones isométricas de figuras, luego podrás crear tu propio patrón de teselación ¡Comencemos!

Maurits Cornelius Escher

Fue un arquitecto holandés conocido por sus grabados en madera, xilografías y litografías. Su obra puede ser calificada como arte matemático y se caracteriza por la división del plano. Su principal innovación es la deformación de una figura en otra, en un mismo cuadro. Estas deformaciones las realiza a través de aves, peces, seres humanos, reptiles donde, en la combinación total, no es fácil apreciar la figura y su fondo.



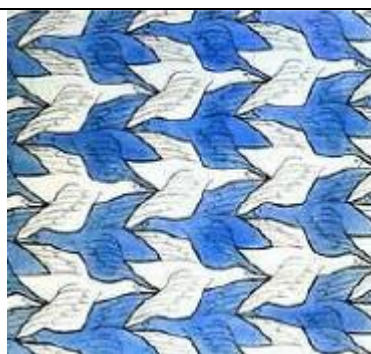
En la siguiente figura se puede apreciar lo señalado:



Actividad 1: Descubriendo los movimientos

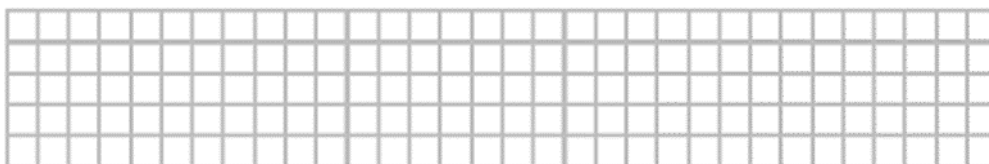
Introducción:

Las siguientes imágenes corresponden a algunas de las obras de M.C. Escher, en las que, a partir de una figura base, se realizan diversas transformaciones isométricas, creando una teselación, en la cual se cubre por completo el plano **sin dejar espacios ni sobreponer figuras**.



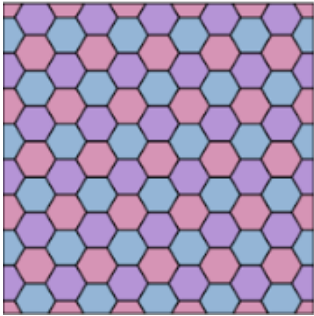
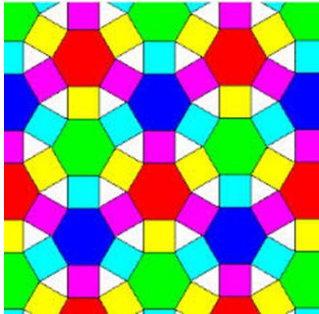
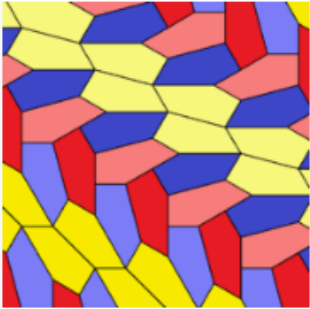
En estas imágenes se pueden ver jinetes en blanco y en negro que se superponen y van en direcciones opuestas (cuadro izquierdo) y aves de colores azul y blanco que se superponen y van en direcciones opuestas.

- 2) En la siguiente imagen se muestra una de las obras de M.C. Escher. Según lo visto en las sesiones anteriores, ¿qué transformaciones isométricas identificas?

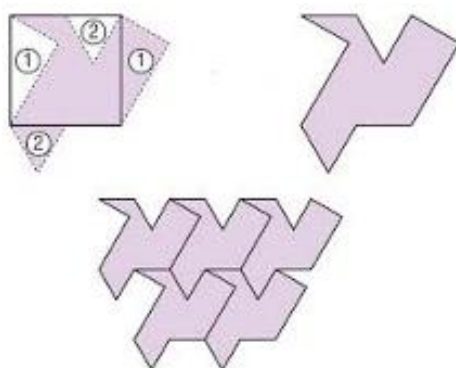


Actividad 2: Creando nuestra teselación

Las teselaciones poligonales se clasifican según el polígono base de teselación, así existen tres tipos principales de teselaciones:

Regulares	Semi - regulares	Irregulares
Está formada por polígonos regulares (cuadrado, hexágono, triángulo equilátero)	Está formada por dos o más polígonos regulares	Está formada por polígonos irregulares
		

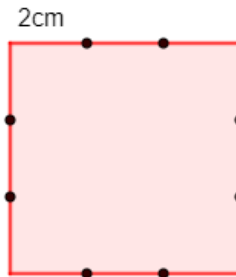
Para construir una teselación irregular, podemos partir de un polígono regular e ir “sacando sectores” del polígono, colocándolos en otra parte de él, como se muestra en la imagen:



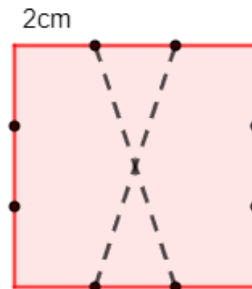
¡Construyámoslo!

Veamos los pasos para crear nuestra teselación “barco”

Paso 1: Usaremos como polígono base, un cuadrado de 6 cm de ancho y de largo. Luego dividiremos cada lado en tres partes iguales de 2 cm, para ello, ocupa la regla graduada. Marca con un punto las divisiones de cada lado.



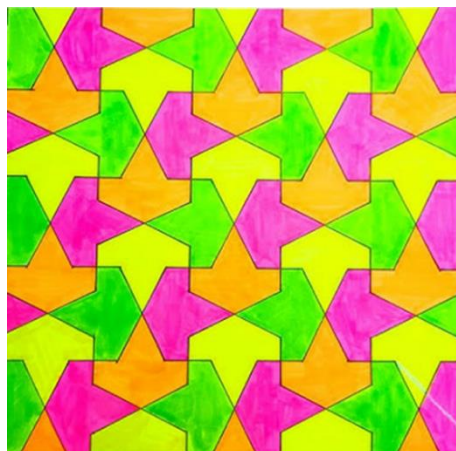
Paso 2: Trazaremos un segmento que vaya en el lado superior, desde el segundo punto al primero del lado basal y del segundo punto del lado basal al primero del lado superior, como se muestra en la imagen.



Paso 3: Cortamos los triángulos formados y los colocamos entre los puntos que están en los lados laterales del cuadrado, quedando una figura como la de la imagen.

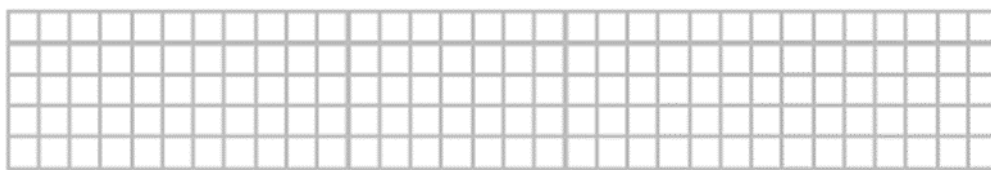


Paso 4: Ya tenemos nuestro patrón de teselación, ahora lo replicaremos marcando los bordes en el papel lustre, colocando en cada sector el color que queramos.



Actividad de Cierre

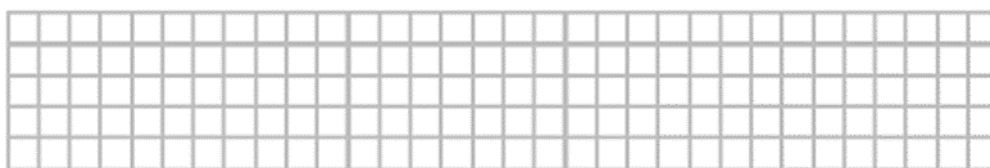
- ¿Qué es una teselación?



- Dibuja tu propio patrón de teselación.



- ¿En qué situaciones encuentras teselaciones en tu vida cotidiana?

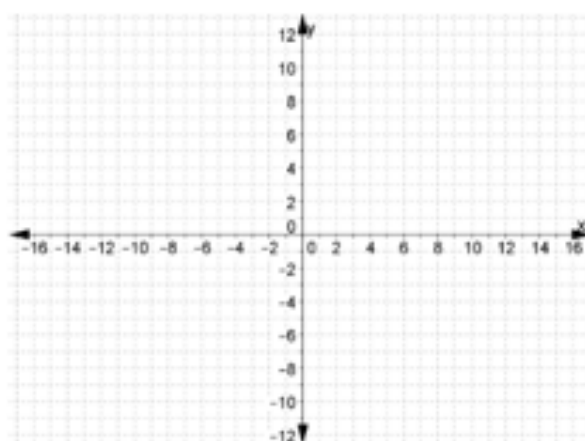


Evaluación Formativa: Conceptos Básicos

Nombre: _____ Curso: _____

Responde a las siguientes preguntas, en el espacio correspondiente

- 1) Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano:
 $A(2, 4)$; $B(-6, -10)$; $C(-12, 8)$; $D(8, -3)$; $E(14, 0)$; $F(0, -5)$



- 2) El modulo del vector $\vec{v} = (3, 4)$ sería:

$$\|\vec{v}\| =$$

- 3) En cada caso señalar si es una recta paralela, secante o perpendicular:

a)



b)



c)



d)



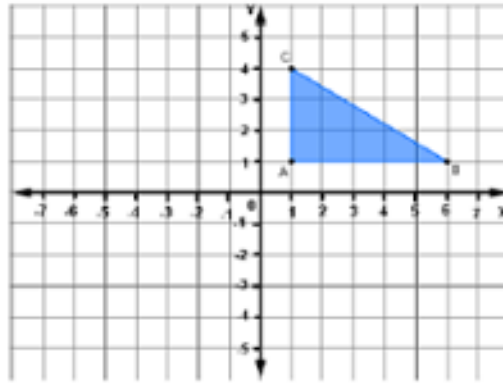
--	--	--	--

Evaluación Formativa: Traslación

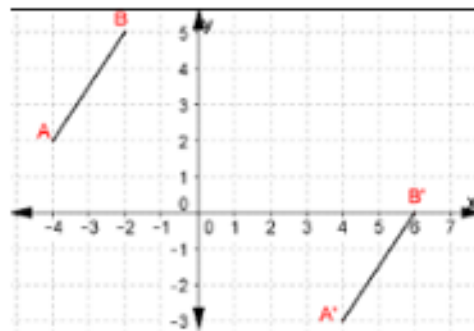
Nombre: _____ Curso: _____

Responde a las siguientes preguntas, en el espacio correspondiente

- 1) Dado el triángulo ABC de la figura, realiza una traslación de acuerdo al vector $\vec{n} = (-6, -4)$, escribe las coordenadas de la imagen.



- 2) Escribe el vector $\vec{v}$ que permite trasladar el segmento $\overline{AB}$ de la figura, al segmento $\overline{A'B'}$



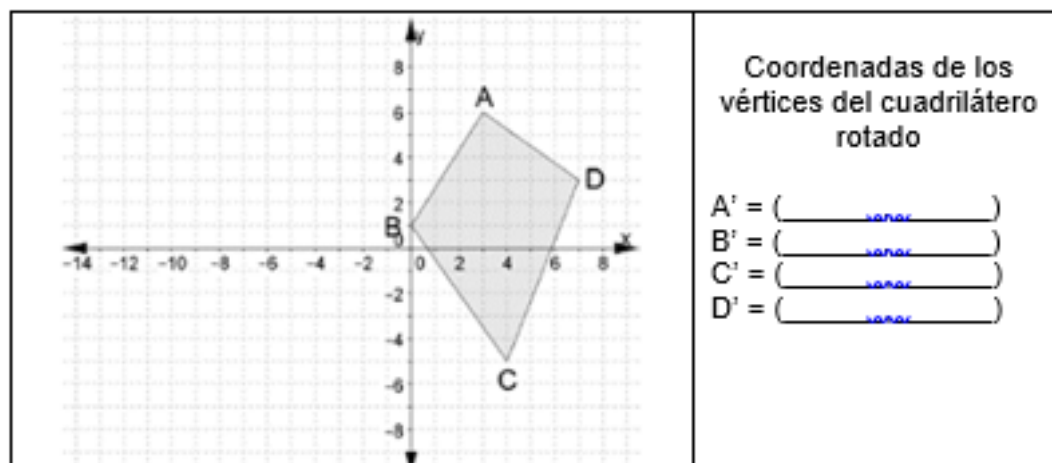
$$\vec{v} = (\quad , \quad)$$

Evaluación Formativa: Rotación

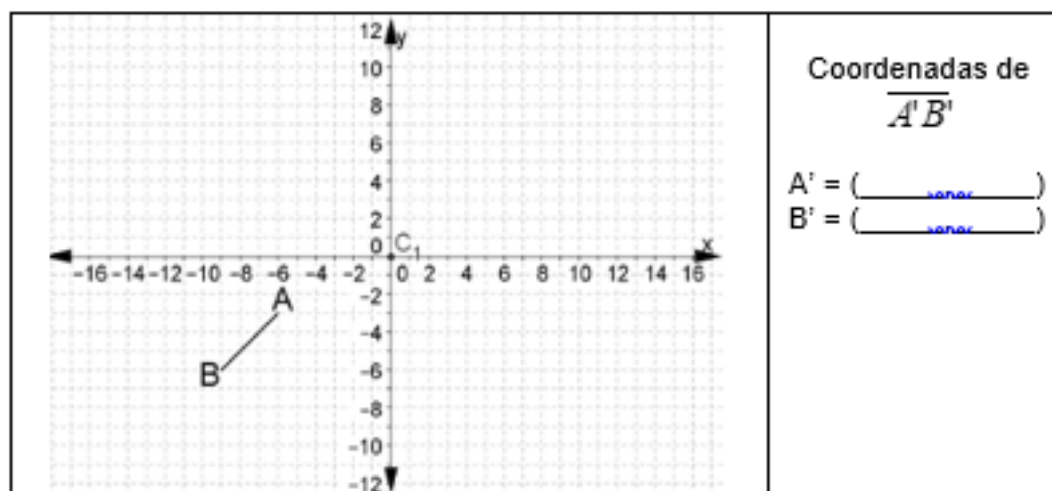
Nombre: _____ Curso: _____

Responde a las siguientes preguntas, en el espacio correspondiente

- 1) Rota el cuadrilátero de la figura en 90° en sentido anti horario, luego escribe las coordenadas de la imagen:



- 2) Rota el segmento $\overline{AB}$ en 180° en sentido anti horario, luego escribe las coordenadas de la imagen:



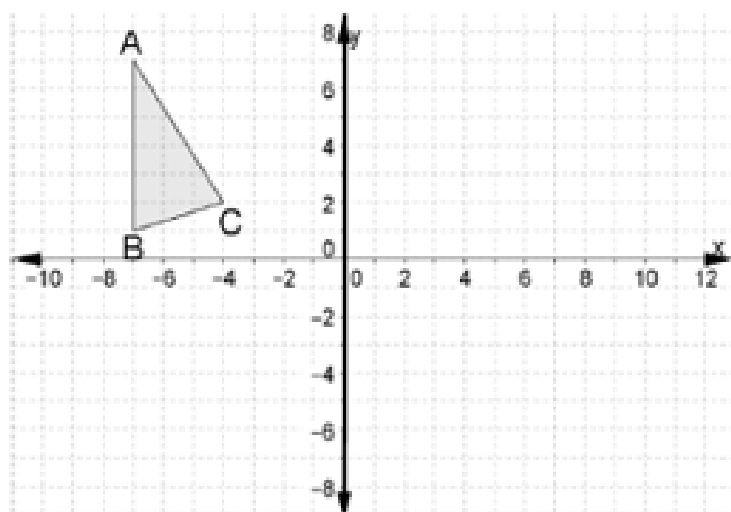
Evaluación Formativa: Reflexión

Nombre: _____ Curso: _____

Responde a las siguientes preguntas, en el espacio correspondiente

- 1) Refleja cada triángulo, según el eje indicado, luego escribe las coordenadas de la imagen:

a) con respecto al Eje y



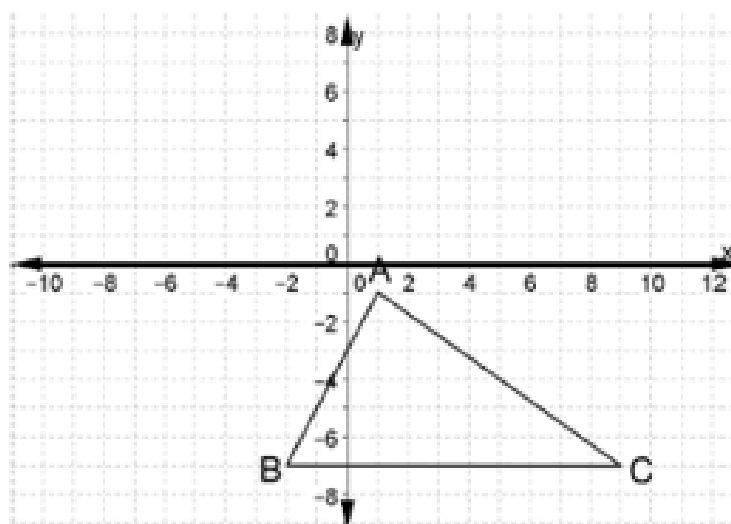
Coordenadas de los
vértices del triángulo
reflejado

A' = (____, ____)

B' = (____, ____)

C' = (____, ____)

b) Con respecto al Eje x



Coordenadas de los
vértices del triángulo
reflejado

A' = (____, ____)

B' = (____, ____)

C' = (____, ____)

Evaluación Formativa: Teselaciones

Nombre: _____ Curso: _____

Responde a las siguientes preguntas, en el espacio correspondiente

- 1) Las siguientes imágenes corresponden a obras de arte realizadas por M.C. Escher. Obsérvalas e indica qué transformaciones isométricas están presentes en cada una.





Encuesta a estudiantes

Esta encuesta busca indagar sobre tu experiencia frente a la secuencia de enseñanza de la unidad de Transformaciones Isométricas y Teselaciones. La encuesta es anónima, por lo que te invito a responder con mucha sinceridad.

** Indica que la pregunta es obligatoria*

1. ¿A qué colegio perteneces? *

Marca solo un óvalo.

☐ Colegio Mercedes Marín del Solar

☐ Liceo Tajamar de Providencia

2. Indica qué tan de acuerdo estás con las siguientes afirmaciones *

Marca solo un óvalo por fila.

	Muy de Acuerdo	De Acuerdo	En Desacuerdo	Muy en Desacuerdo
Usé distintos recursos (manuales, digitales, material concreto) en el transcurso de las clases de Transformaciones Isométricas y Teselaciones	☐	☐	☐	☐
El uso de recursos manuales (regla, transportador, tijeras, pegamento, papel lustre, entre otros) me permitió visualizar de mejor manera los contenidos	☐	☐	☐	☐

El uso del software Geogebra me permitió visualizar de mejor manera el contenido

☐☐☐☐

Los recursos utilizados me facilitaron la comprensión de los contenidos

☐☐☐☐

Las preguntas realizadas fueron desafiantes y me permitieron

☐☐☐☐

[com/forms/d/1kPkV8hrXQU58Ha315KFfoztEBq6HBmhYcAeUrhr3Lm4/edit](https://forms.gle/1kPkV8hrXQU58Ha315KFfoztEBq6HBmhYcAeUrhr3Lm4/edit)

Encuesta a estudiantes

explorar las soluciones de diversas maneras

Las preguntas
iban aumentando
su nivel de
dificultad
mientras se
avanzaba en la
guía

☐☐☐☐

El nivel de
dificultad de las
actividades
realizadas me
pareció adecuado

☐☐☐☐

La actividad
inicial presente en
las guías me
permitió
reconocer la
presencia de
transformaciones
isométricas en
símbolos de los
pueblos
originarios

☐☐☐☐

En el desarrollo
de las guías logré
generalizar
propiedades que
se daban en la
composición de
transformaciones
isométricas

☐☐☐☐

La actividad de
cierre presente en
cada guía me
permitió
reconocer las
transformaciones
isométricas en mi
cotidianidad

☐☐☐☐

3. ¿Qué recurso te gustó más y por qué en relación a las actividades desarrolladas? *

4. ¿Recomendarías este tipo de clases para el aprendizaje de Transformaciones Isométricas y Teselaciones? Justifica tu respuesta *

Encuesta a docente de Matemática Liceo Tajamar

Con respecto a la secuencia de enseñanza:

- 1) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Traslación?

- 2) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Rotación?

- 3) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Reflexión?

- 4) ¿Cuál es su opinión sobre la forma de tratar los contenidos de Teselación?

5) ¿Considera que el material utilizado está de acuerdo con el currículo vigente?

6) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las traslaciones?

7) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las rotaciones?

- 8) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las reflexiones?

- 9) ¿Considera suficiente el material presentado en la secuencia de enseñanza de las teselaciones?

- 10) ¿Las actividades se presentan en forma progresiva de acuerdo al tipo y complejidad del contenido?

11) ¿Las actividades propician la diversificación de recursos en la enseñanza y el aprendizaje?

12) ¿Qué posibles mejoras haría a la secuencia de enseñanza?

13) ¿Qué aspectos considera importantes de tener en cuenta al momento de implementar esta secuencia de enseñanza?