UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación

Enseñanza de la relación entre los volúmenes de cilindro y cono

Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional

Autora
Erika Camila Ávila Parada

Profesora Guía:

Daniela Soto Soto

Tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática

Santiago - Chile

2023

Resumen

El objetivo de este estudio consistió en evaluar los efectos que tiene el uso y manipulación de material concreto en el avance en los razonamientos geométricos en tres dimensiones en el marco del Modelo de Van Hiele. La Teoría de Cognición Incorporada sostiene que, el empleo de material concreto constituye el primer paso para la adquisición de conocimiento sobre el entorno, propiciando así el progreso en el razonamiento. En este contexto, se busca demostrar esta premisa a través del análisis del avance en los niveles de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele. En específico, se aplicó una secuencia didáctica en donde se priorizó el uso e interacción con material concreto en el aprendizaje. El diseño consistió en la experiencia de "llenado de recipiente" para el análisis de la relación entre los volúmenes de cono y cilindro. La intervención se aplicó en tres cursos del nivel de primero medio pertenecientes a un establecimiento municipal ubicado en la zona oriente de Santiago. La metodología fue de carácter cuantitativo exploratorio, con uso de Pre-Test y Post-Test. La relevancia de este estudio se puede desglosar en tres líneas: la primera se relaciona con su marco teórico dada la conversación existente entre el Modelo de Van Hiele y la Teoría de Cognición Incorporada. En segundo lugar, la propuesta apunta al uso de material concreto en la enseñanza de geometría en tres dimensiones en enseñanza media. Y, por último, el enfoque metodológico se basará en análisis cuantitativos a partir de estadística descriptiva e inferencial, lo cual no se ha llevado a cabo en estudios con respecto a la enseñanza de volumen de cuerpos redondos en investigaciones anteriores que se han realizado al respecto.

Palabras claves: Geometría tridimensional, Material concreto, Teoría de Cognición Incorporada, Modelo de Van Hiele

Dedicatoria

A ti Diego, esto lo íbamos a hacer juntos, pero te fuiste antes. Te he dedicado cada hora de ñoñerías en este proceso de dos años. Siento que me acompañaste en cada momento.

Agradecimientos

A mis papás, Erika Parada y Rubén Ávila, que me regalaron esta posibilidad con mucho esfuerzo, gracias por la perseverancia, dedicación y por sobre todo el amor en este trabajo que llevan haciendo conmigo desde hace 27 años. A mis hermanos Carla y Cristóbal, que en más de una ocasión tuvieron que ayudarme en este proceso.

A mi profesora guía, Daniela Soto, gracias por la paciencia y acompañamiento, pero por sobre todo por inspirarme y exigirme de tal manera de que siempre diera todo de mí.

A mis compañeros del Magister, muchas gracias por todo el apoyo, sin las risas y las rabias que pasamos juntos, hubiera sido imposible llegar hasta aquí.

A toda la comunidad educativa del Liceo Bicentenario Simón Bolívar, por permitirme aplicar mi investigación en su institución.

A mi familia, a mis amigos y a todos aquellos que me vieron y me apoyaron en silencio en este proceso, que no fue fácil, pero se pudo.

…

Tabla de contenidos

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

La matemática es una disciplina presente en muchos contextos de la sociedad y a nivel global en los currículums escolares. En este sentido, es de vital importancia que durante el periodo escolar cada estudiante pueda desarrollar y adquirir los conocimientos, habilidades y actitudes asociadas a esta disciplina. Si bien existen diversos obstáculos y desafíos en los procesos de aprendizaje de la matemática, resaltan los fenómenos y dificultades asociadas a la rama de la geometría, en particular, la geometría en tres dimensiones. La NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) enfatiza que "los estudiantes deben tener la capacidad de analizar las características y propiedades de las formas geométricas bidimensionales y tridimensionales" (NTCM, 2000, citado en Bhagat et al., 2021).

Por otra parte, en el "Programme for International Student Assessment" (en español, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), la OCDE destacó la presencia de significativas dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos, especialmente evidenciadas en el ámbito de la geometría. Según estos informes, la geometría se identificó como la disciplina con el rendimiento más bajo dentro del currículum matemático, y en particular, la subárea de geometría espacial mostró los más bajos desempeños.

En un estudio sobre las dificultades del aprendizaje en geometría de tres dimensiones, Gutiérrez (1996, citado en Bhagat et al., 2021) evidenció que los estudiantes no lograron establecer una conexión efectiva entre la representación bidimensional de un objeto geométrico y el objeto geométrico en la realidad, lo que podría explicarse debido a que se pierde información como caras ocultas del cuerpo.

Siguiendo esta misma línea, destaca la importancia de estudiar en profundidad los procesos de aprendizaje en el contexto de la geometría en tres dimensiones, en cuanto al desarrollo del razonamiento geométrico espacial. En particular este estudio se centró en la enseñanza y el aprendizaje de la relación entre volúmenes de cuerpos redondos.

Para delimitar esta problemática se utilizará gran parte de lo estudiado en la revisión de literatura, para luego contextualizar en el currículum nacional chileno.

En primer lugar, estudios han demostrado que se presenta una dependencia excesiva de procesos procedimentales memorizados y una carencia de actividades experimentales en el aula (Puig et al., 2021). En esta misma línea, para poder avanzar en niveles de razonamiento superiores, el estudiante debe tener la posibilidad de manipular, descomponer y analizar el objeto geométrico en cuestión (Pittalis y Christou, 2010; Ng, Shi y Ting, 2020).

En general, en cuanto a las mediciones que se pueden estudiar en un cuerpo geométrico, se entregan sus fórmulas sin explicaciones o análisis previos y además se insta al estudiante a que se los aprendan y los mecanicen realizando una seguidilla de actividades con ejercicios rutinarios sin contexto (Puig et al., 2021). Sin embargo, las actuales investigaciones se han enmarcado en teorías que modelan el desarrollo de razonamiento geométrico, como es el Modelo de Van Hiele, como un proceso de escalada, en donde el estudiante transita por distintos niveles, desde lo más básico como es la visualización, hasta las demostraciones formales y la aplicación de axiomas (Puig et al., 2021). Con base en esto, el aprendizaje memorístico y la resolución de ejercicios de manera algorítmica mantienen al estudiante en un razonamiento geométrico básico.

Se ha observado que, en general, en las clases tradicionales de geometría en tres dimensiones, las actividades se basan en análisis de ilustraciones en dos dimensiones, lo que no permite al estudiante transitar por varios tipos de representaciones del objeto geométrico (Pittalis y Christou, 2010; Alves et al., 2017; Ng, Shi y Ting, 2020). Entonces, toma relevancia el uso de representaciones de los objetos con sus respectivas dimensiones. Duval (1998), sugiere que el pensamiento geométrico implica procesos de visualización, construcción y razonamiento, señalando el papel fundamental de las representaciones visoespaciales de los objetos de estudio (citado en Pittalis y Christou, 2010). En este sentido, resulta imperativo evitar la restricción al empleo exclusivo de representaciones icónicas en dos dimensiones. Se subraya la importancia de facilitar un enfoque pedagógico que permita la manipulación y exploración directa a través de representaciones físicas en tres dimensiones, según señalan estudios como los de Pittalis y Christou (2010), Alves et al. (2017), y Ng, Shi y Ting (2020).

Por otra parte, el hecho de limitar el estudio al registro en dos dimensiones impide al estudiante poder interactuar y manipular los objetos geométricos y con base en eso, poder formular sus propias conclusiones respecto a sus características, propiedades y medidas. (Bhagat et al., 2021). En este sentido, varios autores han planteado como fundamento teórico la Teoría de Cognición Incorporada, que plantea en términos generales, el gran impacto que tiene la manipulación y la acción kinestésica en el aprendizaje de cierto contenido. Esta teoría sostiene que la cognición comprende información sensoriomotora (tocar, mover, interactuar), es decir, los gestos afectan en cómo se piensa y razona (Ng y Ye, 2022). En el contexto del aprendizaje de geometría en tres dimensiones, toma principal relevancia permitir al estudiante poder construir, manipular, mover y analizar el objeto geométrico de estudio, con fin de que sea él mismo, quien pueda inferir propiedades y características esenciales (Bhagat et al., 2021). "La capacidad de visualizar y razonar espacialmente requiere de fuertes percepciones sobre cómo se posicionan y transforman las formas en relación unas con otras. En otras palabras, las experiencias visuales y cinestésicas pueden ayudar al aprendizaje de la geometría en tres dimensiones" (Ng, Shi y Ting, 2020)

Con base en esto, se propone que tanto entornos digitales como táctiles pueden favorecer el aprendizaje de la geometría en tres dimensiones (Ng, Shi y Ting, 2020). Sin embargo, se ha comenzado a abusar del uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática. De hecho, se han presentado algunos estudios que cuestionan la efectividad del uso de herramientas digitales en el aula, argumentando que genera una motivación temporal en el estudiante para con su aprendizaje, pero que no implica diferencias en sus desempeños en evaluaciones posteriores (Bhagat et al., 2021). A pesar de que tiene innumerables ventajas a la hora de modelar situaciones y fenómenos matemáticos, su uso en la enseñanza de la geometría en tres dimensiones no permite al estudiante interactuar directamente con el objeto de estudio, y por lo tanto no representa una posible limitación (Fujita et al., 2017).

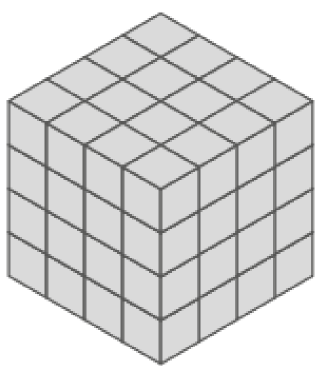
Contextualizando en el panorama nacional, el currículum nacional chileno propone el siguiente esquema para el estudio de los diferentes cuerpos geométricos y sus mediciones:

En primer lugar, se comienza trabajando con poliedros regulares, tales como cubos y paralelepípedos, con sus respectivas caracterizaciones (MINEDUC, 2012). Posteriormente, al definir el volumen como el espacio ocupado por el cuerpo geométrico, se procede a establecer su unidad de medida, utilizando el cubo de lado 1 como referencia (MINEDUC, 2012). En este contexto, se enfatiza que el volumen de los cuerpos geométricos se expresa en términos de unidades cúbicas, dando la impresión (aunque incorrecta) de que todos los cuerpos geométricos pueden construirse a partir de cubos.

Se extiende esta definición para poder calcular el volumen del paralelepípedo, como suma de unidades cúbicas, considerando que, al apilarlos de cierta manera, se construye un paralelepípedo (figura 1).

Figura 1

Ilustración construcción cubo



Fuente: Reyes et al., 2013, p. 216

A partir de ésta, se plantea que la fórmula para calcular el volumen de este cuerpo es el producto entre largo, ancho y altura, entendiéndose como la cantidad de unidades cúbicas que "caben" en el cuerpo (MINEDUC, 2012).

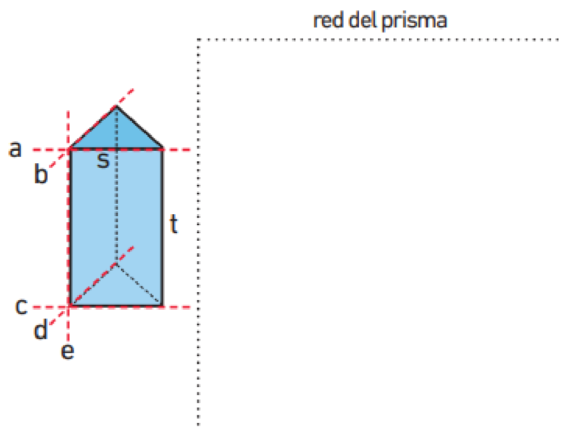
Como consecuencia de este planteamiento, se extiende la fórmula a otros poliedros y prismas en general. En definitiva, para calcular el volumen de prismas se aplica: $Area\ Basal \cdot Altura$. (MINEDUC, 2016). En muchos casos esta fórmula solo se entrega directamente, como una consecuencia directa del volumen de un prisma con base rectangular. Por ejemplo, como se puede observar en la figura 2, la primera actividad que propone el programa de estudio de octavo básico propone directamente calcular el volumen usando tal fórmula.

Figura 2

Sugerencia actividad para cálculo de volumen de prismas

En el recuadro se muestra el dibujo 3D de un prisma recto con la base de un triángulo equilátero.

- Denominan los pares de polígonos.
- Miden los lados y elaboran la red del prisma.
- Calculan la superficie y el volumen del prisma.



Fuente: MINEDUC,2016, p. 141

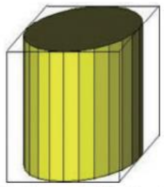
Esta actividad apunta a la aplicación directa de la fórmula, sin una justificación para su uso o un análisis previo de las características de la base. De hecho, este tipo de prismas no puede construirse apilando cubos, lo que contradice aún más la “justificación” que se da para su fórmula.

Luego de esto, se indica que el volumen de un cilindro cumple la misma característica, es decir su volumen puede calcularse como: $Área\ Basal \cdot Altura$ (MINEDUC, 2016).

Figura 3

Sugerencia actividad para cálculo de volumen de cilindro

El dibujo muestra un cilindro inscrito en un prisma de base cuadrada. La base tiene el lado *d* y el cilindro tiene la altura *h*. El cilindro inscrito toca las cuatro paredes del prisma.



(Fuente: www.de.wikipedia.org)

- Estiman el volumen del cilindro en comparación con el volumen del prisma circunscrito.
  Expresan el resultado en porcentaje.
- Calculan la razón entre el área de una circunferencia y el cuadrado circunscrito. Expresan la razón en porcentaje.
- Comparan los porcentajes y conjeturan sobre la fórmula del volumen de un cilindro con el diámetro *d* y la altura *h*.
- Transfieren el resultado a un cilindro que tiene el radio r y la altura *h*.

Fuente: MINEDUC, 2016, p.143

En la figura 3 se puede observar cómo la actividad apunta que el estudiante relacione el cálculo del volumen del prisma con el del volumen de un cilindro, de manera que infieran que se aplica el mismo razonamiento: $Área\ Basal \cdot Altura$ (MINEDUC, 2016).

Posteriormente, en primero medio se planta el estudio de área y volumen del cono. Para el estudio de su volumen, se comienza trabajando con pirámides de distintas bases y se presenta directamente el procedimiento para el cálculo de su volumen:

Figura 4

Volumen pirámide Texto estudio Primero Medio

- El volumen de una pirámide equivale a un tercio del volumen de un prisma de igual área basal e igual altura:

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} B \cdot h$$

(B: área de la base; h: altura).

Fuente: Setz y Muñoz, 2018, p.186

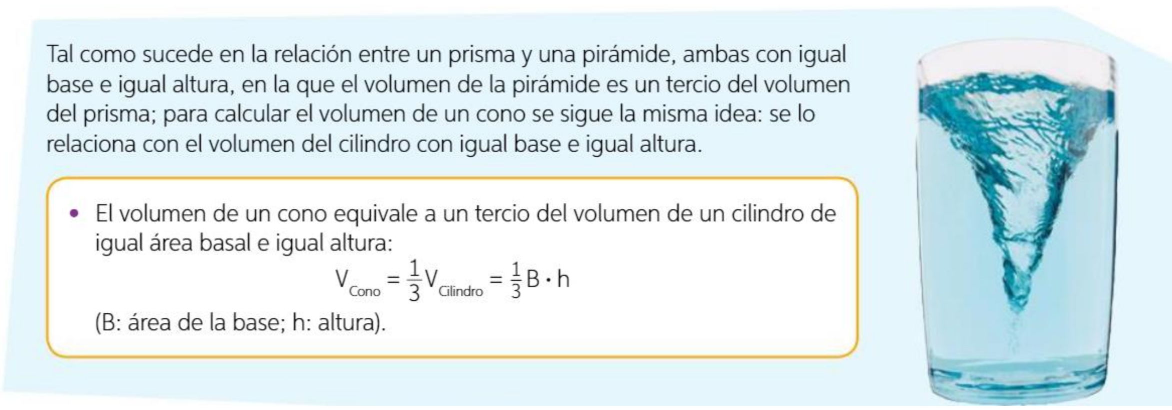
Tal como se puede observar en la figura 4, se indica que el volumen de la pirámide corresponde al tercio del volumen de un prisma con las mismas dimensiones (Setz y

Muñoz, 2018), pero sin justificación ni actividad complementaria que permita explicar esta relación.

Luego, en el mismo texto, también se entrega directamente la fórmula del volumen del cono (Setz y Muñoz, 2018)., como homologación de lo antes trabajado con pirámides, pero nuevamente sin justificación ni actividad que explique la relación de su volumen con el cilindro.

Figura 5

Volumen cono texto estudio Primero Medio



Tal como sucede en la relación entre un prisma y una pirámide, ambas con igual base e igual altura, en la que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma; para calcular el volumen de un cono se sigue la misma idea: se lo relaciona con el volumen del cilindro con igual base e igual altura.

- El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen de un cilindro de igual área basal e igual altura:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}V_{Cilindro} = \frac{1}{3}B \cdot h$$

(B: área de la base; h: altura).

Fuente: Setz y Muñoz, 2018, p.190

Como se puede apreciar en la Figura 5, la única explicación que presenta en cuanto a la relación entre el volumen del cono y cilindro es que pasa lo mismo que con pirámide y prisma. Sin embargo, estos cuerpos son muy distintos entre sí y tienen características que no pueden extrapolarse unas a otras. Se plantea entonces, la necesidad de trabajar la relación entre el volumen del cono y del cilindro desde una perspectiva más precisa y rigurosa dadas características propias de los cuerpos redondos, tal como se argumenta en los estudios de Puig et al. (2021) en cuanto a la falta de explicación y argumentación suficiente de las distintas fórmulas presentes en la geometría espacial.

Con base en esto, surge el primer obstáculo para la enseñanza de estos conceptos. Cuando se introduce el estudio y análisis de los cuerpos redondos, se aplican las mismas fórmulas que se infirieron para poliedros; las cuales fueron analizadas a través de las unidades de medidas dadas por el cubo.

Relacionándolo con los antecedentes presentados en la revisión de literatura (Fujita et al., 2017; Bhagat et al., 2021) se aplica la misma representación utilizada para el volumen de poliedros, en el análisis del volumen de otros tipos de cuerpos, lo que puede provocar dificultades, dado que tal representación no se condice con las características esenciales de cuerpos redondos y, por lo tanto, el tránsito en el razonamiento no es fluido ni coherente.

De hecho, en muchos textos de estudio, se entrega la fórmula del cálculo del volumen del cono, sin ninguna explicación previa, como se pudo observar con los ejemplos antes mencionados.

Por consiguiente, se establece el siguiente problema de investigación: El aprendizaje de la relación entre volúmenes de cono y cilindro no suele estar respaldado de manera rigurosa en los textos de estudio propuestos por el Ministerio de Educación o incluso por editoriales privadas, debido a que se presenta como una extrapolación de lo estudiado con poliedros, careciendo de una justificación más detallada. Además, este proceso se ve limitado debido a que los estudiantes no interactúan con representaciones físicas de los cuerpos geométricos, dependiendo de manera exclusiva de representaciones bidimensionales, que de por sí no proporcionan una base sólida para avanzar a razonamientos geométricos superiores. Por lo tanto, resulta esencial incorporar actividades que expliquen de manera práctica la relación entre los volúmenes y que permitan a los estudiantes manipular físicamente las representaciones tridimensionales de los cuerpos geométricos involucrados. La manipulación de objetos tridimensionales se revela como una herramienta fundamental para desarrollar el razonamiento geométrico espacial de manera más completa y efectiva.

A partir de estas consideraciones, se propone para la enseñanza de la relación entre volúmenes de cono y cilindro, la introducción de una actividad en donde los estudiantes construyan los cuerpos y analicen concretamente la relación entre sus capacidades. Esta actividad se denominará “Llenado de recipiente” la cual tiene como objetivo fomentar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes en cuanto a la comprensión de la relación entre los volúmenes de los cuerpos mencionados. A través de esta actividad, se busca proporcionar a los estudiantes una experiencia práctica y tangible que fortalezca su comprensión de conceptos geométricos fundamentales, y que les permita explorar de manera activa la conexión entre las formas y sus volúmenes en un contexto práctico y físico.

Dentro de los resultados esperados, se espera que los estudiantes avances de un nivel a otro, teniendo en cuenta una clase previa en donde se trabaje el contenido sobre el volumen del cono a partir de procesos algorítmicos y modelos bidimensionales.

A continuación, se procede a exponer el desarrollo de la investigación y su propuesta de innovación, iniciando con una detallada explicación de la problemática. En este contexto, se identifica la pregunta de investigación, se formulan las hipótesis pertinentes y se establecen los objetivos de la investigación. Además, se lleva a cabo una exhaustiva revisión de la literatura relacionada con la mencionada problemática, a fin de situar el estudio dentro del contexto teórico existente y abordar de manera integral los aspectos relevantes de la investigación.

Posteriormente, se desarrolla la explicación del marco teórico, el cual comienza con las definiciones y demostraciones matemáticas, las cuales explican desde el rigor matemático los fenómenos que luego serán estudiados desde el razonamiento de un estudiante. La fundamentación teórica que enmarca la investigación se basa en la conversación entre la Teoría de Cognición Incorporada, la cual defiende el uso de material concreto, y el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que establece que el razonamiento geométrico avanza por niveles de acuerdo con la complejidad del pensamiento geométrico.

El capítulo del marco metodológico detalla la estrategia y los procedimientos que se utilizarán para llevar a cabo la investigación. En cuanto al tipo de metodología la investigación es de carácter cuantitativo, mientras que su diseño es descriptivo. El análisis de datos consistió en dos estudios estadísticos, uno descriptivo y otro inferencial. Además, se explica en detalle el contexto de la investigación y los diseños de los instrumentos que se utilizarán en ella.

En el capítulo 4: Desarrollo de la investigación, se analizarán en primer lugar los aspectos contextuales que influyeron durante todo el proceso de investigación, como, por ejemplo, el hecho de que la propuesta fue aplicada por tres profesores. Posteriormente se presentarán los resultados obtenidos, realizando una comparación estadística descriptiva para luego realizar varias pruebas T-Student para medidas repetidas.

Finalmente, se abordarán las conclusiones de la investigación, donde se sintetizarán y analizarán los hallazgos obtenidos a lo largo del estudio.

Capítulo 1: Problemática

1.1. Propuesta

La fundamentación teórica de la propuesta se sustenta en una conversación entre dos modelos o teorías fundamentales acerca del aprendizaje, el Modelo de Van Hiele, con respecto al desarrollo del razonamiento geométrico y la Teoría de Cognición Incorporada, relacionada con el uso y manipulación de material concreto en el aula.

El modelo de Van Hiele, aterrizado en la geometría en tres dimensiones, describe cómo los estudiantes desarrollan su comprensión desde el reconocimiento visual básico hasta la capacidad de razonar rigurosamente sobre las propiedades y relaciones de cuerpos geométricos (Vargas y Gamboa, 2013). El progreso a través de estos niveles no es lineal y puede variar según cada estudiante. Además, para pasar de un nivel a otro, Van Hiele propone fases u orientaciones para el docente de manera de guiar al estudiante a razonamientos más avanzados (Vargas y Gamboa, 2013). En este sentido, las experiencias prácticas, manipulativas y visuales permiten desarrollar una mejor comprensión de los distintos fenómenos en geometría 3D.

La Teoría de Cognición Incorporada, por su parte, defiende el uso de material concreto para el aprendizaje visoespacial, planteando la importancia de que el estudiante tenga la posibilidad de interactuar con los objetos geométricos que debe estudiar.

Esta teoría plantea que, para el aprendizaje de geometría en tres dimensiones, es fundamental la manipulación de sólidos, que permite generar nociones de medición y estimación. Estas acciones le dan significado al concepto, y permiten que se rompa el cálculo algorítmico del volumen. (Freudenthal, 1983, como se citó en Astudillo, 2022).

Con base en esto, se propone aplicar una secuencia didáctica, basada en las fases del Modelo de Van Hiele, en donde el estudiante sea el protagonista de su aprendizaje: quién manipula los objetos y desarrolle sus conjeturas. Dicha secuencia tiene como objetivo principal que el estudiante infiera que la capacidad del cilindro es exactamente tres veces la capacidad del cono o, equivalentemente, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, con igual radio y altura. Para esto se trabajará con la actividad “Llenado de recipiente”, el cual consiste en que el estudiante construya un cono y un cilindro con iguales dimensiones y luego, usando algún material como arroz, se vaya llenando el cilindro con la medida de un cono.

Para efectos de la investigación se utilizará una metodología cuantitativa descriptiva, en donde se presentan elementos de un diseño cuasiexperimental. Esto, puesto que se trabajará con una muestra no aleatorizada y sin grupo de control (Hernández, 2014). La muestra mencionada consiste en tres cursos de primero medio de un colegio municipal de la comuna de Las Condes (alrededor de 74 estudiantes) en donde no es posible la aleatorización debido a los recursos y accesos de la investigadora.

Como punto de partida, los estudiantes trabajarán con una secuencia de clases del tipo “tradicional”, en donde se les entregará la fórmula de la relación entre volúmenes de cono y cilindro, sin explicación ni justificación, sólo como ejemplos de aplicación directa.

Luego de ello se aplicará una evaluación “Pre-test” en donde se evaluará su desempeño en cuanto a indicadores de logro y se categorizaron de acuerdo con los niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele.

Posteriormente se realizará la actividad de “Llenado de recipiente”, diseñada a partir de las 5 fases que plantea el Modelo de Van Hiele para avanzar a niveles superiores de razonamiento.

Finalmente se volverá a aplicar una evaluación “Post-test”, equivalente al “Pretest” y se contrastarán los desempeños en cuanto a los puntajes obtenidos de acuerdo con sus indicadores de logro y los niveles de razonamiento alcanzados.

Los indicadores de logro mencionados se construirán a partir del marco teórico dados por los niveles de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele.

1.2. Pregunta de investigación

¿Qué efectos tiene la aplicación de una actividad con uso y manipulación de material concreto para la enseñanza de la relación entre volúmenes de cono y cilindro, en el avance en los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primero medio de un colegio municipal en la zona oriente de Santiago?

1.3. Hipótesis

Los estudiantes avanzan en los Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele y evidencian mejores desempeños en evaluación escrita bajo el modelo, después de implementar una actividad con material concreto “llenado de recipiente”

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Evaluar los efectos que tiene el uso de material concreto en los desempeños de los estudiantes de primero medio de un colegio municipal de la zona oriente de Santiago, en cuanto a sus puntajes en evaluación escrita, con respecto a indicadores de logro diseñados a partir de los Niveles de Razonamiento Geométrico del Modelo de Van Hiele.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Reconocer niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primero medio en evaluación escrita “Pre-test”.
- Describir desempeños en evaluación Pre-test a partir de los puntajes obtenidos de acuerdo con indicadores de logro o grupo de ellos.
- Comparar niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primero medio en evaluación escrita “Post-test” después de realizada la experiencia de “llenado de recipiente”, con sus desempeños en evaluación “Pre-test”.
- Comparar desempeños a partir de puntajes obtenidos en Pre y Post Test, de acuerdo con indicadores de logro o grupo de ellos.

1.5. Antecedentes: Propuestas de enseñanza de geometría en tres dimensiones

En los últimos años ha quedado en evidencia que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en tres dimensiones se presenta una dependencia excesiva de procesos procedimentales memorizados y una carencia de actividades experimentales en el aula (Puig et al., 2021). También se ha demostrado una escasa profundización en el estudio del razonamiento espacial en el aula (Pittalis y Christou, 2010) y los tipos de dificultades que se pueden presentar a la hora de estudiar cuerpos geométricos, como es la resolución y modelación de problemas (Fujita et al., 2017; Bhagat et al., 2021).

Esto señala la importancia de integrar en las planificaciones de clases un entendimiento profundo sobre el razonamiento de los estudiantes, un aspecto que puede ser estructurado utilizando el Modelo de Niveles de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que propone que el razonamiento geométrico se desarrolla a modo de escala o niveles consecutivos y progresivos (Puig et al., 2021).

Por otra parte, también se ha demostrado que gran parte de la enseñanza de cuerpos geométricos y sus características están basadas en representaciones en dos dimensiones, lo que genera mayor carga cognitiva en el estudiante y, por lo tanto, mayor tendencia a cometer errores (Ibili et al., 2019; Bhagat et al., 2021; Alves et al., 2017).

Además, los estudios han demostrado la importancia que tienen las experiencias sensorio-motrices y las interacciones físicas en el aprendizaje de la geometría tridimensional (Ng y Ye, 2022; Bhagat et al., 2021; Ng, Shi y Ting 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Ibili et al., 2019). Respaldados por la Teoría de Cognición Incorporada, estos estudios plantean que las experiencias con material físico permiten que el estudiante se implique cognitivamente en su aprendizaje a partir de los gestos y sentidos, como el tacto y la vista (Ng y Ye, 2022; Bhagat et al., 2021; Ng, Shi y Ting 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Ibili et al., 2019).

La presencia de tecnología también es un punto importante para analizar, puesto que de los 10 textos que se analizarán, 8 presentan propuestas para la enseñanza de geometría tridimensional usando tecnología de realidad aumentada (Bhagat et al., 2021; Ng, Shi y Ting, 2020; Amir et al. 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Ibili et al., 2019; Alves et al., 2017), juegos digitales (Puig et al. 2021) o dispositivos de impresión en 3D (Ng y Ye, 2022; Ng, Shi y Ting, 2020). Sin embargo, ninguno de ellos ha evidenciado que fue el recurso el que logró la mejora en los desempeños de sus estudiantes, sino más bien han demostrado la importancia de que el estudiante interactúe de alguna manera con los objetos matemáticos de estudio (Bhagat et al., 2021).

1.5.1. Método de búsqueda y selección de la literatura

Para la búsqueda de literatura se seleccionaron dos bases de datos: Web of Science y Scopus, ambas validadas a nivel nacional e internacional, y consideradas como los repositorios más completos de literatura actual. Se utilizó la siguiente combinación de búsqueda: "Geometry learning" OR "geometry teaching" AND "3d" OR "three dimensional" AND "school" AND "mathematics education". A continuación, se presenta tabla (tabla 1) con las respectivas traducciones:

Tabla 1

Palabras claves de búsqueda

Ingles	Español
Geometry learning or geometry teaching	Aprendizaje de geometría o enseñanza de geometría
3D or thre dimensional	3 dimensiones
school	Escuela, colegio.
Mathematics Education	Educación Matemática

En el caso de la base de datos de Web of Science, con la cadena de búsqueda mencionada se encontraron 47 resultados. En estos resultados se aplicó un filtro con respecto al año de publicación, centrándose en los últimos 5 años, de manera de obtener las publicaciones más actuales. Así, finalmente, se obtuvieron 39 investigaciones. El proceso de inclusión y exclusión (tabla 2) de estos textos se basó en la lectura del título y el resumen de estos 39 textos a partir de los siguientes criterios:

Tabla 2

Criterios de inclusión y exclusión

Criterio	Se incluye	Se excluye

Contexto	Enseñanza de la matemática en la escuela	● Estudios que no se enfoquen en la enseñanza de la matemática en la escuela
Campo de interés	Estudios sobre la enseñanza de geometría en 3d	● Estudios sobre enseñanza de geometría en 2d ● Estudios sobre enseñanza de matemática, pero no de geometría
Sujetos de estudio	Estudiantes de primaria y secundaria	● Profesores ● Estudiantes de estudios superiores o bachillerato
Características de la publicación	Investigaciones completas con resultados y conclusiones	● Propuestas incompletas ● Diseños que no se han llevado a la práctica

Tras la aplicación de estos criterios, se seleccionaron 11 textos para una lectura completa.

En la base de datos de Scopus, usando la misma cadena de búsqueda se encontraron 430 resultados que fueron afinados a través de los siguientes filtros:

- Publicaciones realizadas en los últimos 5 años, para así obtener las más actuales.
- Sub-área: Matemática, con el propósito de excluir las publicaciones relacionadas con otras áreas.
- Estado de la investigación: Finalizada, con el objetivo de obtener publicaciones que tengan resultados y conclusiones.
- Palabra clave exacta: Educación, de modo de excluir publicaciones que profundicen solo en el área de la matemática, pero no en su enseñanza.

- Palabra clave exacta: Geometría, con la intención de excluir publicaciones relacionadas con otras ramas de la matemática.

Luego de la utilización de estos filtros se obtuvieron 39 textos, de los cuales se revisaron los títulos y los resúmenes, y se aplicaron los mismos criterios de inclusión y exclusión mencionados anteriormente. De esta manera, se obtuvieron otros 3 textos adicionales.

Tras una lectura profunda de cada texto, se descartaron 5 de ellos, debido principalmente a que:

- El enfoque del estudio no se centraba en el impacto de una propuesta innovadora sobre el aprendizaje de estudiantes en geometría 3D.
- Los sujetos de estudio no eran estudiantes.
- No se utilizaba geometría de cuerpos sólidos, sino más bien geometría analítica.

Se pensó en eliminar uno de los textos que trabajaba el impacto del uso de un *software* educativo, pero desde el campo de la informática. Sin embargo, se mantuvo, ya que plantea desafíos importantes a la hora de usar tecnología en educación en el área de la Matemática. Además, también se incorporó un estudio en el cual se diseña un marco de evaluación de habilidades espaciales y su relación con el aprendizaje en tres dimensiones (Fujita et al., 2017).

Para la elección del décimo artículo se revisaron las referencias de los 9 textos ya seleccionados. Específicamente, se revisaron tanto sus títulos como sus resúmenes, y a partir de ellos se seleccionó un último texto que, a pesar de que escapa de la temporalidad que se había dispuesto en un principio como filtro (artículos publicados en a lo más los últimos 5 años), resulta de interés debido a que también analiza la estructura del razonamiento en tres dimensiones y su relación con la habilidad espacial (Pittalis y Christou, 2010); lo que implicaría un robustecimiento de los argumentos que podrían construir la problemática de una futura investigación.

1.5.2. Resultados revisión de literatura

1.5.2.1. Aspectos generales

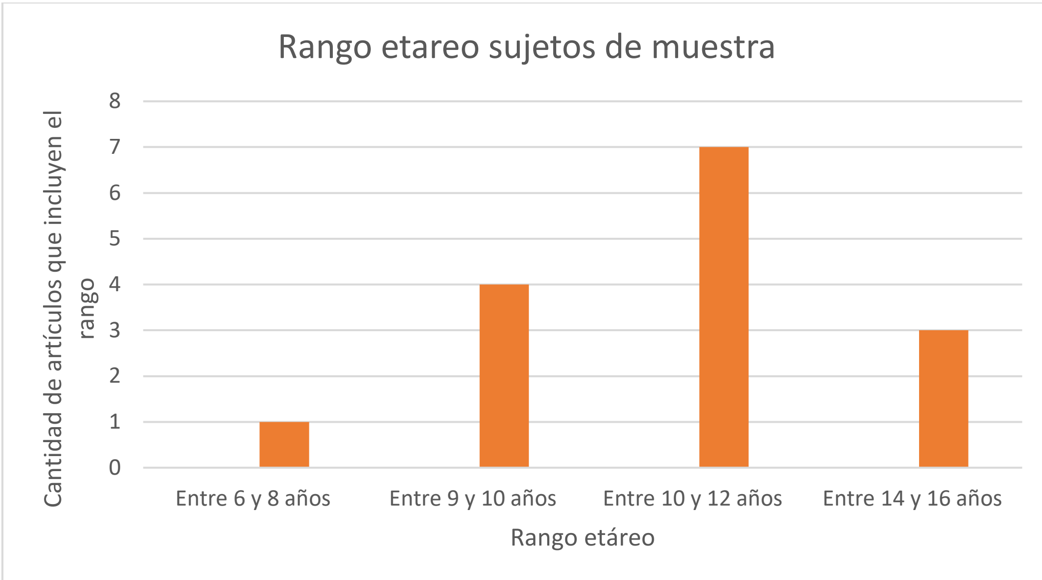
Como se mencionó anteriormente, uno de los filtros que se utilizó en la búsqueda y selección de los textos a analizar corresponde a la temporalidad. Salvo uno, toda la literatura investigada fue publicada entre 2017 y el presente año. En todos los textos se plantea la problemática del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional bajo distintas perspectivas, y, considerando que ya desde el 2010 se estaba estudiando la estructura del pensamiento 3D y su relación con las habilidades espaciales (Pittalis y Christou, 2010), se puede inferir que los problemas en su enseñanza siguen apareciendo, dado que constituye un tema relevante en la actualidad y ha estado presente desde hace al menos una década.

En esta misma línea, dicha problemática parece estar presente a lo largo del mundo, puesto que los 10 textos provienen de diferentes continentes y países que difieren mucho en cuanto a cultura educativa. A modo de ejemplo, se presentan 3 textos que estudian el impacto de la realidad aumentada y aplicaciones digitales en el aprendizaje de la geometría en tres dimensiones, pero uno en España (Puig et al., 2021), otro en Brasil (Alves, Colommo y de S. Borges, 2017) y otro en Hong Kong (Ng, Shi y Ting, 2020), tres países con culturas distintas respecto a ubicación, idioma, y modelos educativos.

Por otra parte, como se puede apreciar en el siguiente gráfico (figura 6), las investigaciones se han enfocado principalmente en estudiantes entre 9 y 16 años, con mayor predominancia de educación primaria o inicio de secundaria:

Figura 6

Rango etario sujetos de estudio



La geometría en tres dimensiones se estudia a lo largo de la mayoría de la educación formal en matemática. En particular en Chile, aparece como Objetivo de Aprendizaje (OA) desde primero básico (6 años):

"OA14: Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto." (MINEDUC, 2016).

Cabe destacar que en este primer objetivo se plantea el uso de material concreto para identificar figuras en tres dimensiones, elemento didáctico que progresivamente disminuye su predominio en la enseñanza a medida que se va complejizando el contenido, sobre todo en los últimos niveles de primaria y primeros de secundaria. Esto mismo se plantea como justificación de las investigaciones estudiadas, puesto que para poder introducir los conceptos de geometría en 3D es importante poder manipular los objetos y figuras que la componen (Fujita et al., 2017; Ibili et al. 2019; Ng, Shi y Ting, 2020; Bhagat et al., 2021) y, por lo tanto, este elemento no debe perderse a largo de la profundización de su enseñanza.

En cuanto a los objetivos de las investigaciones, dado que era uno de los criterios principales de selección, se presentan 8 propuestas para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría en tres dimensiones. En su mayoría, el Objetivo de Aprendizaje correspondía a reconocer e identificar características de cuerpos geométrico, en particular poliedros (Ng y Ye, 2022; Bhagat et al., 2021; Puig et al., 2021; Amir et al., 2020; Ng, Shi y Ting, 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Fujta et al, 2017), salvo en un caso en el cual se analizó también el cilindro (Ibili et al. 2019). En ninguna de las 8 propuestas se plantea el estudio de volumen de cuerpos redondos, así como la relación entre ellos.

1.5.2.2. Justificaciones teóricas

Dentro de las justificaciones teóricas que se plantean en las diferentes propuestas, se pone de manifiesto la necesidad de que el estudiante transite por varios tipos de representaciones, tanto visuales como manipulables, de los cuerpos geométricos que se estudien, para poder comprenderlos en profundidad (Pittalis y Christou, 2010; Alves et al.,2017; Ng, Shi y Ting, 2020). Dicha afirmación se fundamenta teóricamente en las nociones planteadas por Raymond Duval (1999; 2006) en cuanto al pensamiento geométrico. El modelo cognitivo de Duval (1998) sugiere que el pensamiento geométrico implica procesos de visualización, construcción y razonamiento, resultando muy importante el papel de la representación visual de un objeto o enunciado geométrico (Pittalis y Christou, 2010). Por otra parte, también se señala que una de las principales dificultades en el aprendizaje de la geometría 3D es que la representación de una figura 3D a través de un dibujo de dos dimensiones implica que el estudiante confíe excesivamente en los atributos que tal visualización presenta, lo que provoca errores frecuentes (Ng, Shi y Ting, 2020). Basado en lo señalado anteriormente, los autores antes mencionados recalcan la importancia de no utilizar solamente la representación en dos dimensiones de los cuerpos geométricos, sino que implementar las representaciones en tres dimensiones (Pittalis y Christou, 2010; Alves et al.,2017; Ng, Shi y Ting, 2020). Sin embargo, estos planteamientos se contradicen con las mismas propuestas de enseñanza, las cuales se basan en el uso de entornos digitales, en donde el estudiante no manipula directamente una representación real del objeto geométrico (Bhagat et al., 2021).

En esta misma línea, se presenta como marco teórico la Teoría de Cognición Incorporada que pone de manifiesto la importancia de “hacer para aprender”. Esta teoría sostiene que la cognición comprende información sensoriomotora basada en la forma en que se usa el cuerpo para tocar, mover e interactuar con el mundo, es decir, los gestos afectan en cómo se piensa y razona en términos visoespaciales (Ng y Ye, 2022). En este sentido, se plantea la importancia de que el estudiante pueda interactuar con visualizaciones de los objetos en tres dimensiones, de manera de manipularlos y analizar correctamente características y propiedades (Bhagat et al., 2021). En relación con lo anterior, se propone que tanto entornos digitales como táctiles pueden ayudar a fortalecer la capacidad de visualizar y aprender geometría (Ng, Shi y Ting, 2020). Queda a modo de interrogante de qué manera un entorno digital permite la interacción sensoriomotora del estudiante con respecto a los distintos objetos geométricos. ¿Es suficiente la realidad aumentada, versus la realidad en sí?

Por otra parte, también muchas investigaciones proponen el Modelo de Van Hiele como fundamento teórico para fundamentar las transiciones del razonamiento geométrico en 3D. Dicho modelo plantea como principio fundamental que el aprendizaje en geometría se logra transitando por ciertos niveles de pensamiento y conocimiento, desde lo más básico, que es la visualización, hasta los sistemas axiomáticos (Puig et al., 2021). Con base en esto, ser capaz de diferenciar y describir formas en función de su apariencia es el primer paso para desarrollar el pensamiento geométrico en 3D, pero para poder avanzar hacia los demás niveles es necesario que el estudiante pueda manipular, descomponer y analizar el objeto geométrico en cuestión (Ng, Shi y Ting, 2020). También este modelo es utilizado para el diseño de las propuestas de enseñanza (Pittalis y Christou, 2010; Puig et al. 2021), de manera de asegurarse el tránsito por los distintos niveles de razonamiento y poder lograr un aprendizaje efectivo.

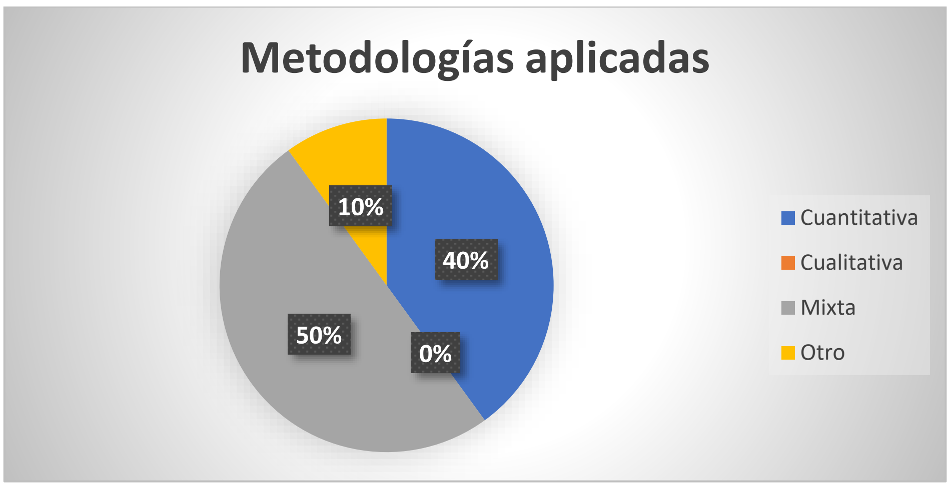
Por último, es importante resaltar los estudios que se han realizado sobre la relación existente entre el desarrollo de habilidades espaciales y el aprendizaje en tres dimensiones, es decir, cómo ayuda la “intuición espacial” al razonamiento geométrico (Fujita et al., 2017). Se entiende por habilidad espacial a una forma de actividad mental que permite a los individuos interactuar y manipular imágenes espaciales para resolver problemas prácticos y teóricos (Pittalis y Christou, 2010). Por otra parte, el razonamiento tridimensional se define como la capacidad de los individuos para realizar varias tareas que involucran conocimientos y habilidades relacionados con el análisis en 3D, para efectos de cálculo, armado de redes, descomposición de figuras, etc. (Pittalis y Christou, 2010). En este sentido, nuevamente se pone en evidencia la importancia que tiene la manipulación física de los objetos geométricos para las correctas interpretaciones de sus propiedades y características.

1.5.2.3. Metodologías utilizadas

A continuación, se presenta el gráfico que resume los tipos de metodologías aplicados en las investigaciones:

Figura 7

Tipos de metodologías aplicadas



Como se puede observar en la figura 7 existe una predominancia en la aplicación de metodologías mixtas que incorporan una parte cuantitativa y una parte cualitativa.

En cuanto al análisis cuantitativo, la mayoría de los estudios se basaron en el análisis de resultados de pruebas de rendimiento en geometría espacial antes y después de implementada la propuesta de enseñanza (Ng y Ye, 2022; Bhagat et al., 2021; Puig et al., 2021; Amir et al., 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Ibili et al., 2019; Alves et al., 2017; Fujita et al. 2017), usando grupos de control para comparar el impacto que generó dicha propuesta. Cabe mencionar un artículo en el cual se aplica una metodología cuasiexperimental en la que no se utiliza un grupo de control para comparar, debido a conflictos éticos de los autores con respecto a privar al estudiante de una posible manera de aprender más eficiente (Ng, Shi y Ting, 2020). Otro aspecto para rescatar en este estudio es que se realizó una prueba adicional de rendimiento transcurrido un periodo más extenso luego de aplicada la propuesta de enseñanza, para analizar la internalización de los conceptos aprendidos (Ng, Shi y Ting, 2020). Esta puede ser una buena manera de analizar el impacto de una propuesta sin involucrar un grupo de control que hipotéticamente saldría perjudicado.

En cuanto al análisis cualitativo que algunos de los estudios aplicaron, se trataba en general de entrevistas a profesores y estudiantes involucrados para analizar las percepciones de los participantes en la propuesta (Amir et al., 2020; Bhagat et al., 2021; Puig et al., 2021). En otras investigaciones, se realizaron estudios de casos utilizando videos y fotos de las clases (Ng y Ye, 2022), o testimonios de estudiantes en particular (Fujita et al., 2017). Es importante resaltar el aporte que significa este tipo de análisis en el impacto de la propuesta de enseñanza, debido a que parte importante de un aprendizaje significativo corresponde a la motivación del estudiante durante el proceso de aprendizaje.

1.5.2.4. Discusión: Uso de tecnología v/s uso de material concreto

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones que, en otros ambientes, como “lápiz y papel”, serían difíciles de obtener (Thamrongrat y Law, 2020). En este sentido, la cantidad de propuestas de enseñanza para la geometría tridimensional usando material didáctico digital ha ido en aumento. Como se mencionó anteriormente, 8 de los 10 textos estudiados en esta revisión bibliográfica plantean propuestas de enseñanza basadas en herramientas digitales, tanto de realidad aumentada, juegos multimedia, entre otros. La fundamentación del uso de estos materiales se basa principalmente en la interacción que tiene el estudiante con el objeto geométrico, quien puede manipularlo usando distintas herramientas, y así analizar en profundidad sus características (Thamrongrat y Law, 2020), lo que también genera mayor motivación en los estudiantes en cuanto al uso de tecnología y la innovación por sobre la enseñanza “tradicional” (Puig et al., 2021).

En cuanto a los resultados observados en estos estudios, en la mayoría de los casos, se logra el objetivo de la propuesta de enseñanza, es decir, los estudiantes que utilizaron las plataformas digitales lograron aprendizajes significativos en geometría en 3D. No obstante, al contrastar con los grupos de control, se observó una mejora en el rendimiento que fue similar o no mostró diferencias significativas (Bhagat et al., 2021; Amir et al., 2020; Ng, Shi y Ting, 2020; Ibili et al., 2019; Alves et al., 2017), e incluso presentan una dificultad extra al presentar otro tipo de representación “externa” a la cotidiana (Fujita et al. 2017). Queda como interrogante si estos leves aumentos en los rendimientos se deben a la tecnología en sí o a la motivación de los estudiantes por trabajar en un proceso fuera del “aula tradicional”.

Por otra parte, las intervenciones que incluyeron manipulación física de objetos, los cuales fueron lápices en 3D, presentaron mejores resultados que los que usaron solo ambientes digitales (Ng y Ye, 2022; Ng, Shi y Ting, 2020); lo que corrobora la importancia de la experiencia física y concreta en el aprendizaje de la geometría en tres dimensiones.

Asimismo, el uso de tecnología presenta otro tipo de limitaciones, por ejemplo, en cuanto al costo del uso de dispositivos digitales, como la realidad aumentada o electrónicos, con lápices de impresión 3d, lo que puede significar una dificultad para implementar este tipo de propuestas en contextos con niveles socioeconómicos medios y bajos (Thamrongrat y Law, 2020).

1.5.2.5. Conclusiones revisión de literatura

En el presente documento se realizó una revisión de literatura con objetivo de levantar información acerca de lo que se ha realizado hasta la fecha en la enseñanza de la geometría en tres dimensiones. En específico, se estudiaron propuestas de enseñanza de geometría en 3D en el aula escolar e investigaciones que pusieron en evidencia las relaciones entre las habilidades espaciales y el razonamiento geométrico en ella. También se contrastaron las justificaciones prácticas y teóricas en los que se basaron tales estudios, las propuestas de enseñanza y el tipo de metodologías aplicadas para validarlas.

Un aspecto que se evaluó en la presente revisión de literatura fue cómo se validaron las propuestas de enseñanza en los distintos estudios. En su mayoría, se aplicaron metodologías cuantitativas basadas en el análisis de resultados en pruebas de desempeño en habilidades geométricas en tres dimensiones, antes y después de aplicada la propuesta de enseñanza, en comparación con grupos de control. Solo en uno de estos casos se prefirió aplicar una tercera prueba “tardía” a los sujetos de estudio para analizar la internalización del aprendizaje, en vez del uso de grupo de control (Ng, Shi y Ting, 2020). Con respecto al análisis cualitativo, en general, se estudiaron las valoraciones de los estudiantes y profesores involucrados con respecto a la actividad, analizando variables como la motivación y la disposición al aprendizaje. Sin embargo, podría estar presente un sesgo con respecto a la motivación del estudiante ante lo “novedoso” de la tecnología utilizada, en desmedro del Objetivo de Aprendizaje real (Thamrongrat y Law, 2020).

En su gran mayoría, las propuestas de enseñanza se basaron en la importancia que tiene la interacción del estudiante con el objeto de estudio para un aprendizaje efectivo. En este sentido, la idea de “haciendo se aprende” adquiere mayor relevancia, puesto que considera al estudiante como actor principal en sus procesos de aprendizaje, quien manipula el objeto geométrico para estudiar sus características y propiedades. En el marco del razonamiento geométrico, importantes académicos como Raymond Duval (1999; 2006), han resaltado la importancia que tiene el tránsito por distintos tipos de representaciones para lograr un real aprendizaje, e incluso las dificultades que puede conllevar trabajar geometría de tres dimensiones solo con representaciones en dos dimensiones (papel y lápiz) (Pittalis y Christou, 2010; Alves et al.,2017; Ng, Shi y Ting, 2020). Por otra parte, este tránsito en el razonamiento geométrico puede modelarse a través de los niveles de Van Hiele, que plantean un proceso de visualización que va complejizándose a medida que se reconocen y se formalizan características y propiedades matemáticas referidas al objeto geométrico (Bhagat et al., 2021; Ng, Shi y Ting, 2020). Además, la interacción sensoriomotora es parte fundamental en estos procesos de razonamiento geométrico espacial: el estudiante debe manipular objetos geométricos para poder inferir correctamente características y propiedades (Bhagat et al., 2021). Los gestos físicos, la manipulación táctil, y la observación empírica afectan en cómo piensa y razona el estudiante (Ng y Ye, 2022).

Sin embargo, aun planteando la importancia de la interacción física para el desarrollo de habilidades espaciales y, por consiguiente, de razonamiento tridimensional, la mayoría de los estudios centraron sus propuestas en herramientas digitales, las cuales consiguen efectivamente una mayor interacción del estudiante con el objeto geométrico, pero no corresponden a una manipulación real de este. En efecto, en la mayoría de los casos no se logran resultados significativos que validen el uso de este tipo de herramientas para mejorar el aprendizaje en tres dimensiones. Aún más, solo en un estudio se logra una mejora significativa, pero se debe principalmente a que los estudiantes sí manipularon físicamente los objetos geométricos, gracias al uso de impresiones en 3D (Ng, Shi y Ting, 2020). Por otra parte, el acceso a este tipo de tecnología, como es la realidad aumentada o plataformas digitales, es limitado para cierta parte de contextos escolares con suficientes recursos para su implementación (Thamrongrat y Law, 2020), y queda a modo de interrogante cómo aprovechar las ventajas de la interacción sensoriomotoras en el aprendizaje de le geometría en tres dimensiones en contextos desfavorables.

Por último, se resalta la inexistencia de investigaciones o propuestas referidas en particular a la enseñanza del cálculo de volumen de cuerpos geométricos, menos aún de cuerpos redondos y sus relaciones, la cual fue la motivación inicial para realizar esta revisión de literatura. Sin embargo, el análisis más general de la enseñanza de la geometría en tres dimensiones permitió ampliar el panorama sobre el razonamiento espacial y cómo influye la interacción y manipulación del estudiante con los distintos objetos geométricos para un aprendizaje efectivo.

Capítulo 2: Marco Teórico

Como se puede apreciar en la figura 8, el diseño del marco teórico se basa en tres grandes temas. En primer lugar, en el marco del estudio del aprendizaje de geometría en tres dimensiones, se realizará una descripción detallada de los objetos geométricos que se trabajaron durante la investigación, es decir, cilindro y cono, además de la relación entre sus volúmenes. Dicha descripción cuenta con todos los aspectos matemáticos que definen ambos cuerpos geométricos y las demostraciones de la propiedad mencionada.

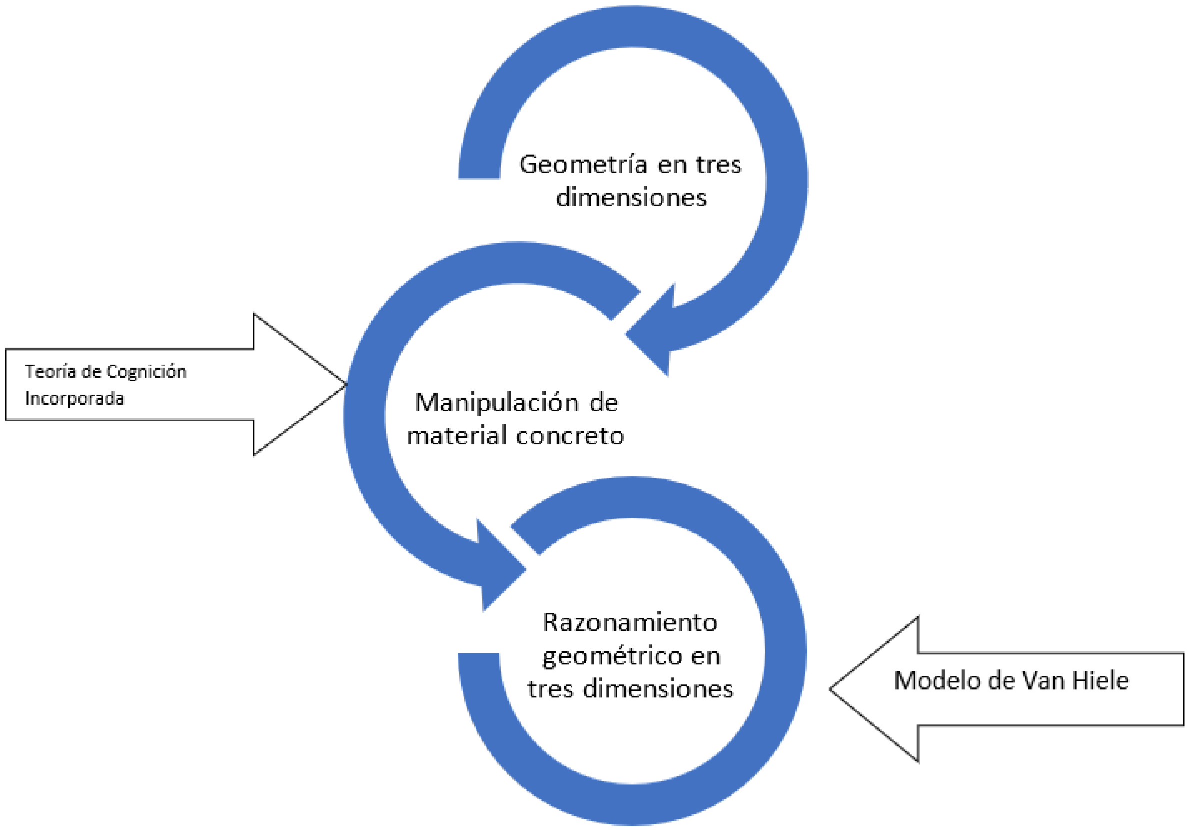
Posteriormente, se abordará en detalle la Teoría de Cognición Incorporada, la cual defiende el uso de material concreto y la manipulación física en entornos educativos (Nathan, 2014). En este contexto, este modelo teórico, permite justificar que, para que un estudiante pueda comprender y analizar en profundidad un objeto geométrico, es imprescindible que tenga la posibilidad de manipularlos físicamente.

Luego, tal como se plantea en el objetivo de esta investigación, es fundamental examinar el progreso en el razonamiento geométrico de los estudiantes, luego de la implementación de la intervención con material concreto. Para llevar a cabo esta evaluación, se recurrirá al Modelo de Van Hiele. Esto modelo plantea que el razonamiento geométrico avanza en niveles consecutivos (Puig et al., 2021), lo que permitirá poder realizar un estudio cuantitativo del avance del estudiante en cuanto a su aprendizaje en geometría de tres dimensiones.

Por último, se presentarán algunas investigaciones referentes a la enseñanza de volumen y los marcos teóricos que las sustentaron, algunos mencionados también en los antecedentes, de manera de contrastarlo con el que se propone en este escrito.

Figura 8

Esquema del marco teórico

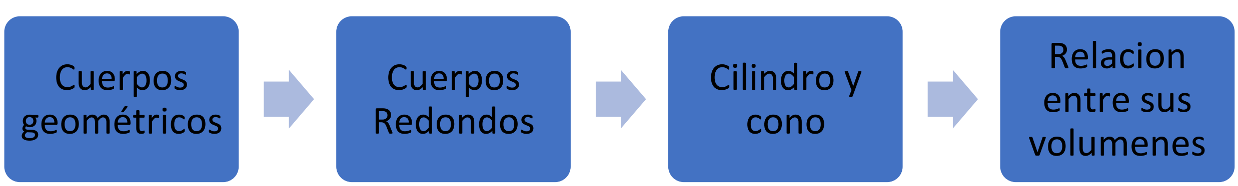


2.1. Geometría en tres dimensiones: Aspectos formales matemáticos

A continuación, se presentarán las definiciones formales con respecto a los objetos matemáticos que se encuentran en estudio, organizado desde lo más general a lo más particular, como se puede resumir en la figura 9:

Figura 9

Esquema aspectos formales matemáticos

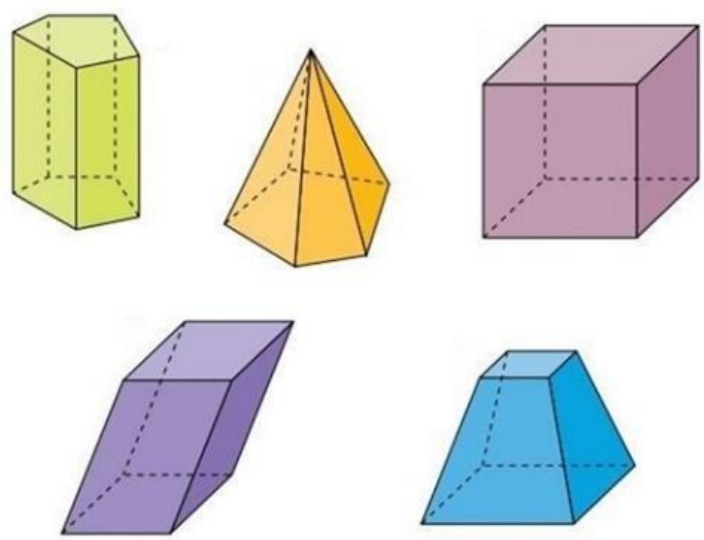


Definición 1: Se entenderá por figura de tres dimensiones o 3D como aquella que posee volumen en el espacio (Reyes et al., 2013). En este sentido, se dirá que un cuerpo sólido (o simplemente cuerpo), “es un conjunto de puntos en el espacio encerrado por una o más superficies” (Reyes et al. 2013). Dependiendo de las características de estas superficies se podrán encontrar distintos tipos de cuerpos geométricos:

Definición 2: Poliedros: Cuerpo delimitado por polígonos. Pueden clasificarse en prismas, cuando dos de sus caras son paralelas y las demás corresponden a paralelogramos laterales. Y pirámides, las cuales poseen un vértice que está contenido en todas las caras, excepto una que se llamará base (Reyes, 2013). En la figura 10 se pueden encontrar ejemplos de poliedros.

Figura 10

Poliedros

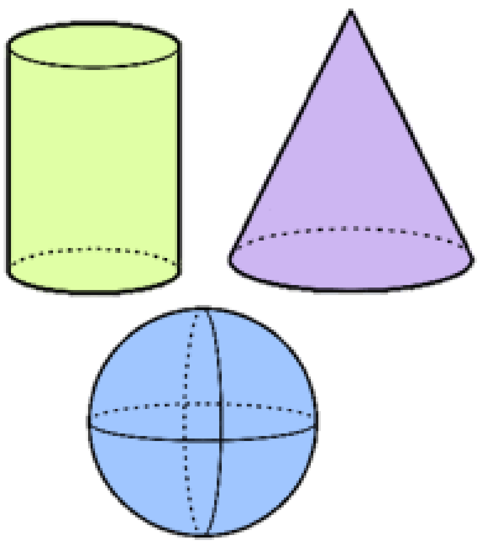


Fuente: https://sites.google.com/site/geometriaterceranodesecundaria/geometria/4-3-los-poliedros

Definición 3: Cuerpos redondos: Aquellas delimitadas por alguna superficie curva. Se puede encontrar al cilindro, delimitado por dos figuras planas congruentes paralelas y una superficie que une estas bases. Por otra parte, se encuentra el cono, delimitado por una figura plana y una superficie que une tal figura con un punto exterior (Reyes, 2013). También dentro de esta clasificación se encuentra la esfera, sin embargo, no se definirá formalmente debido a que este trabajo se centra en los dos primeros cuerpos previamente mencionados. A continuación, en la figura 11 se pueden encontrar los 3 cuerpos geométricos mencionados.

Figura 11

Cuerpos Redondos



Fuente: http://elbibliote.com/libro-pedia/manual_matematica/?tag=cuerpo

2.1.1. Cilindro y Cono

Definición 4: Un cilindro circular se define como un sólido delimitado por dos círculos congruentes en planos paralelos, llamados bases, de tal manera que una puede ser transformada en la otra mediante una traslación, y una superficie que está formada por la unión de todos los segmentos de recta que unen los puntos correspondientes de los bordes de las bases, que será denominada manto (Reyes, 2013). Esta última superficie es de carácter curvo.

Figura 12

Representación cilindros circulares

Fuente: Reyes et al., 2013, p. 208

Como se puede apreciar en la figura 12, dependiendo de la ubicación de las bases, se pueden clasificar en rectos (cuando las rectas que unen puntos correspondientes de las bases son perpendiculares con respecto a éstas) u oblicuos (cuando no) (Reyes, 2013).

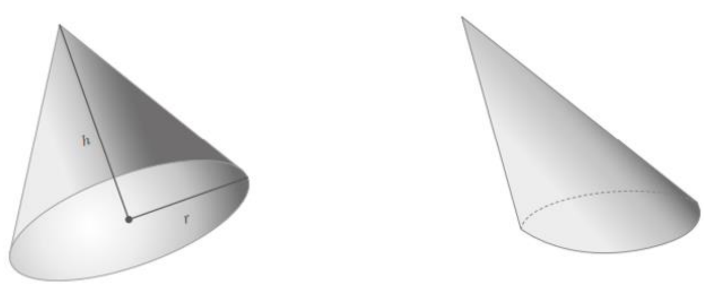
Dado un cilindro de base circular tal que su altura mide h unidades y el radio de su base mide r unidades, su volumen puede calcularse como:

$$Volumen_{cilindro} = r^2 \cdot \pi \cdot h \; unidades \; cúbicas$$

Definición 5: Un cono circular corresponde a un sólido delimitado por dos tipos de superficie, una plana circular, denominada base y otra, llamada manto, que está formada por la unión de los segmentos que unen todos los puntos del borde de la base con un punto fijo exterior, que toma el nombre de cúspide (Reyes, 2013).

Figura 13

Representación conos circulares



Fuente: Reyes et al., 2013, p. 210

Tal como se observa la figura 13, si la recta que pasa por cúspide y centro de la base es perpendicular al radio, el cono corresponderá a un cono circular recto, de lo contrario, es denominado oblicuo (Reyes, 2013).

Para calcular el volumen de un cono circular tal que su radio basal mide r unidades y su altura mide h unidades, se aplica la siguiente relación:

$$Volumen_{Cono} = \frac{r^2 \cdot h}{3} \; unidades \; cúbicas$$

Se puede apreciar que, el volumen del cono corresponde a un tercio del volumen de un cilindro (Reyes, 2013). A continuación, se presenta la demostración formal de las fórmulas de ambos volúmenes:

Según Stewart (2012) el volumen de un sólido se puede calcular de la siguiente manera:

Teorema 1*: Sea S un sólido que está entre* $x = a$ *y* $x = b$*. Si el área de la sección transversal de S en el plano* P_x*, a través de x y perpendicular al eje x, es* $A(x)$*, donde A es una función continua, entonces el volumen de S es:*

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

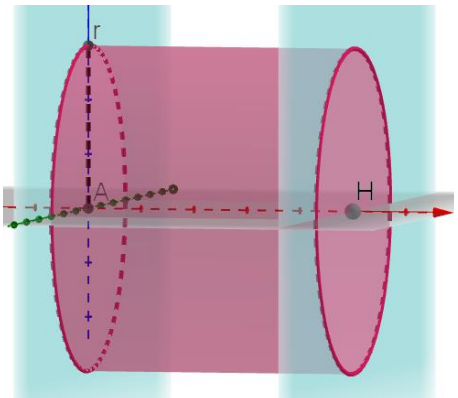
(Stewart, 2012, p. 431)

Aplicando tal afirmación, el volumen de un cilindro de radio r y altura H (figura 13), se puede obtener de la siguiente manera:

Sea S un sólido que esté entre x=0 y x=H, tal que su sección transversal en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x) = r^2\pi$, que al ser una función constante es continua. El sólido S se gráfica en la figura 14.

Figura 14

Cilindro recto circular en geogebra



Como el área de cualquier sección transversal paralela a las bases corresponde al área de un círculo de radio r (lo cual definimos como A(x)), entonces:

$$V_{Cilindro} = \int_0^H r^2 \cdot \pi dx = H \cdot r^2 \cdot \pi$$

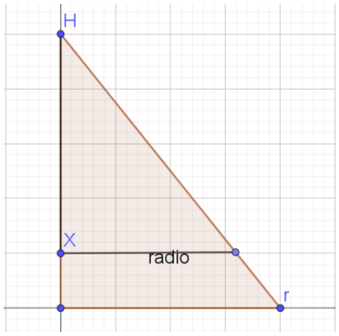
■

Para el caso del cono, se debe considerar que el área de una sección transversal va variando según su altura, por lo que se debe hacer otro procedimiento.

Sea C un cono de radio r y altura H, para encontrar el radio de cualquier sección transversal de C, con altura x, se puede aplicar el teorema de Thales. En la figura 15, se construyó un triángulo rectángulo de base r y altura H, en donde se traza una recta perpendicular a la base de medida x. Esto permitirá calcular el radio de la sección transversal de C.

Figura 15

Teorema de Thales para cálculo de radio de sección transversal



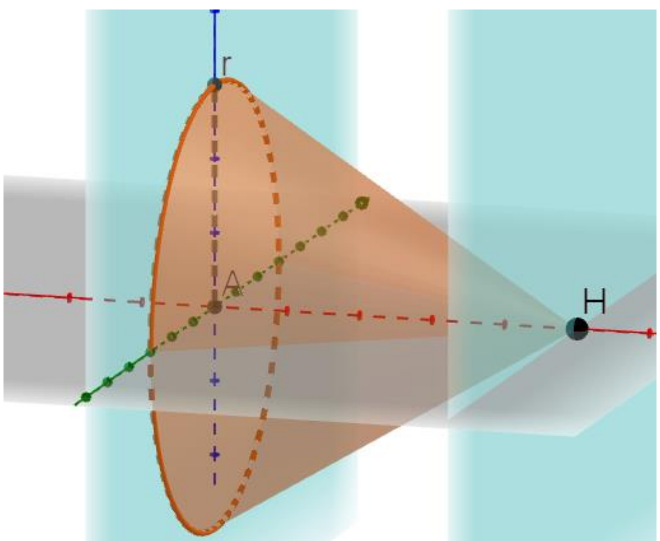
De figura 14 se deduce que:

$$radio = r \cdot \frac{(H - x)}{H}$$

Y, por lo tanto, aplicando el teorema 1, el volumen de un cono con radio r, altura H, limitado por los planos x=0 y x= H (figura 16), se calcula como:

Figura 16

Cono recto circular en geogebra



$$\int_0^H \left(r \cdot \frac{(H - x)}{H}\right)^2 \cdot \pi dx = \frac{r^2 \cdot h}{3} \cdot \pi$$

Lo que demuestra la relación existente entre el volumen de un cilindro y el de un cono con iguales dimensiones.

■

Sin embargo, es importante recordar que, en Chile, la noción de integral no se trabaja hasta los electivos de tercero y cuarto medio de matemática, mientras que volumen de cono se trabaja en primero medio. Con base en esto, se debe buscar otro tipo de estrategias para su enseñanza, considerando los conocimientos previos de los estudiantes, sus habilidades y niveles de razonamiento en cuanto a la geometría en tres dimensiones.

2.2. Teoría de Cognición Incorporada

La teoría de Cognición Incorporada se fundamenta principalmente en la premisa de que, para adquirir conocimiento y deducir relaciones de su entorno, el individuo primero se familiariza con él mediante la información sensorial recibida a través de los sentidos (Sanmartín, 2013).

La cognición incorporada, entonces, corresponde a la construcción del proceso de información, formación, generalización, aplicación y límites del conocimiento, basado en las conexiones de redes neuronales con el ambiente y entre sí mismas (Sanmartín, 2013). Todo el proceso de adquisición de nuevos conocimientos son producto de las interacciones entre las redes neuronales de los sentidos (Sanmartín, 2013). En otras palabras, la actividad sensoriomotora determina la actividad cognitiva (Shabalina, 2021). El sujeto interactúa con su espacio, percibe la tarea y aplica herramientas para poder resolverla (Shabalina,2021).

2.2.1. Aprendizaje Cognitivo Corporal

El término *embodied cognition* plantea que cuerpo y entorno están involucrados en los procesos cognitivos del sujeto (García, 2019). Esta perspectiva plantea un “todo integrado” en constante diálogo con el entorno que lo rodea. En esta misma línea, la corporalidad y el ambiente influyen directamente en la cognición, dejando de lado la idea de que ésta corresponde a un proceso computacional de adquisición de conocimiento (Shabalina, 2021), es decir, un proceso que ocurre principalmente en la mente.

Los gestos o sensaciones corporales afectan a los procesos cognitivos, en el sentido que influyen en la construcción de las representaciones mentales (García, 2019). En este sentido, el lenguaje natural cumple un rol significativo. El sujeto accede a conceptos abstractos, ligándolos a descripciones basadas en experiencias sensoriomotoras

(García, 2019). Un primer acercamiento al concepto abstracto se basa en la comunicación y explicación de este a partir de analogías o metáforas relacionadas con las percepciones físicas que tiene el sujeto. Es por esto que los momentos de discusión entre pares es fundamental para la construcción de los conceptos (García, 2019).

La cognición, entonces, supone un proceso inacabado de interacciones constantes con el entorno (García, 2019), como una interacción entre el sujeto corporal con el medio ambiente (Shabalina, 2021).

Como implicancia en educación, la experimentación y la manipulación corresponden a estructuras pedagógicas que propician el aprendizaje a través de cognición incorporada. El rol del profesor se pone en manifiesto a la hora de guiar los descubrimientos a los que puede llegar el estudiante a través de la experimentación y resolución de problemas (García, 2019).

2.2.2. Aplicación de la teoría de Cognición Incorporada en matemática

Por su propia naturaleza, el razonamiento matemático aborda fenómenos que surgen desde las concepciones mentales del sujeto, es decir, son simbólicas (Nathan, 2014). Sin embargo, para llegar a tales concepciones mentales, se presentan variedades de caminos de representación. Los usos de materiales y gestos concretos es un ejemplo de estos caminos. En estos casos, la influencia del cuerpo y los recursos del mismo toma gran relevancia en la construcción de las concepciones espaciales (Nathan, 2014).

En este sentido, el ser humano, como ser racional busca establecer relaciones de cuantía y de medición. Para poder abstraer estas concepciones se aplican metáforas conceptuales de percepciones, acciones y experiencias concretas (Nathan, 2014).

En el contexto del aprendizaje de volumen y las relaciones entre distintos cuerpos geométricos, la intervención en el aula con uso de material concreto posibilita que el estudiante establezca conexiones entre conceptos abstractos y nociones físicas preexistentes, como la capacidad, que refiere a la cantidad de contenido que puede abarcar un objeto (Nathan, 2014). La comprensión previa que existe sobre la noción de capacidad, que puede trabajarse a partir de intervenciones como la de “llenado de recipiente”, permite al estudiante realizar conexiones cognitivas que permitan de mejor manera la asimilación de conceptos abstractos como el cálculo de volumen.

En esta misma línea, en el caso de la inferencia de propiedades y el análisis del volumen de cilindro y cono, el estudiante tiene la posibilidad de realizar analogías desde los fenómenos físicos que observa y manipula, para luego desarrollar las deducciones formales matemáticas. En consecuencia, la enseñanza del volumen de cuerpos geométricos debe iniciar con la manipulación de material concreto, utilizando modelos reales y tangibles de los cuerpos geométricos bajo estudio. Este enfoque no solo facilita la comprensión conceptual, sino que también brinda a los estudiantes una base práctica para explorar y aplicar conceptos geométricos en situaciones del mundo real.

En este sentido, la intervención planteada en esta investigación, la cual se basa en la manipulación de material concreto, permitirá que el estudiante avance en sus razonamientos geométricos desde la base de la experimentación práctica. A esta intervención se le denominará “Llenado de recipiente”, en donde el estudiante construirá un cono y un cilindro con iguales dimensiones y analizará la capacidad de ambos.

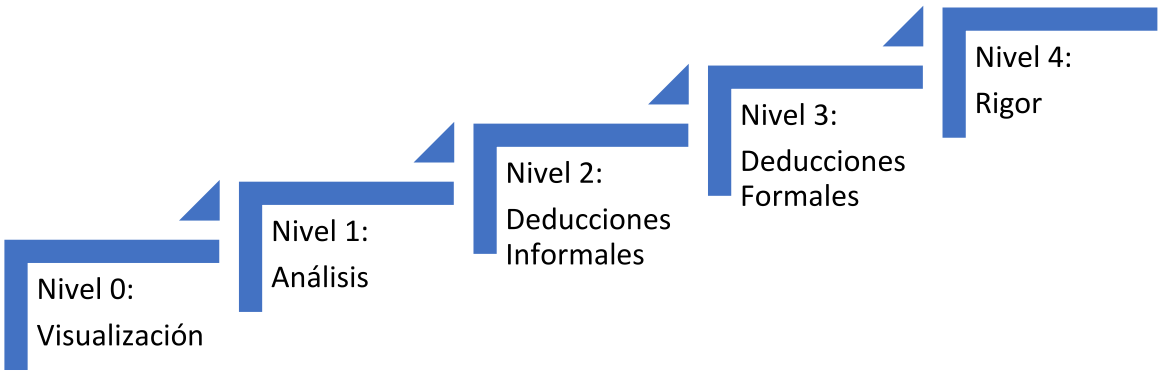
2.3. Modelo de Van Hiele

El Modelo de Van Hiele corresponde a una teoría educativa que plantea que el razonamiento geométrico avanza progresivamente a través de etapas o niveles (González, 2018). Se caracteriza por ser un modelo recursivo y continuo, en donde para alcanzar un nivel de razonamiento geométrico superior, es necesario pasar por uno inferior, a modo de escalera (González, 2018), como se resumen en la figura 17. En este sentido, solo cuando se alcanza cierto nivel se puede pasar al siguiente (Puig, 2021).

A continuación, se define cada uno de los niveles del Modelo de Van Hiele.

Figura 17

Niveles de razonamiento geométrico



Nivel 0: Visualización, donde los estudiantes perciben visualmente las formas geométricas e identifican figuras (Puig, 2021). En este nivel los estudiantes reconocen y describen las formas geométricas básicas y sus características visuales (Usiskin,2003).

Nivel 1: Análisis, donde los estudiantes perciben figuras geométricas como conjunto de propiedades y elementos matemáticos, pero sin establecer relaciones lógicas (Puig, 2021). Los estudiantes comienzan a analizar las propiedades y relaciones entre las figuras o cuerpos geométricos, identificando similitudes y diferencias entre ellas (Usiskin, 2003).

Nivel 2: Deducciones informales o de abstracción, donde se establecen relaciones de dependencia entre propiedades matemáticas (Puig,2021). Al pasar a este nivel, los estudiantes son capaces de justificar y demostrar proposiciones geométricas, utilizando propiedades y categorizaciones (Uniskin, 2003).

Nivel 3: Deducciones formales (Puig, 2021). En este nivel los estudiantes pueden justificar y demostrar proposiciones geométricas, utilizando teoremas y propiedades para resolver problemas más complejos (Uniskin, 2003).

Nivel 4: Rigor, en donde se razona a través de sistemas axiomáticos (Puig,2021). En este último nivel, los estudiantes son capaces de demostrar rigurosamente los resultados geométricos utilizando razonamiento formal y lógica matemática (Uniskin, 2003).

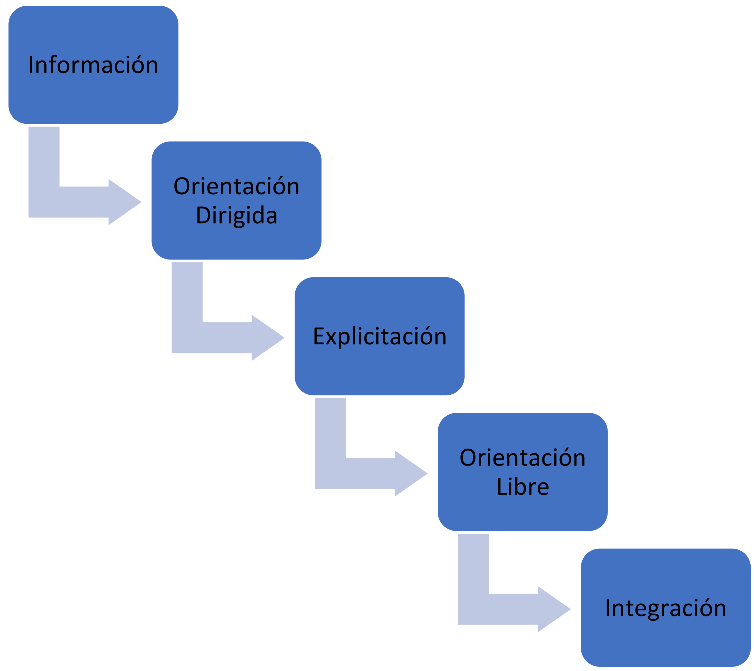
Si se revisan los primeros niveles, el modelo de Van Hiele se complementa con la Teoría de Cognición Incorporada, en el sentido de que en los niveles 0 y 1, sus definiciones se basan en las percepciones que tiene el estudiante en cuanto al objeto geométrico que esté estudiando: El estudiante percibe el objeto geométrico a través de los sentidos, identificando formas y describiendo cualidades (Nivel 0). Luego, el estudiante establece relaciones lógicas entre estas características (Nivel 1), lo que puede ser posible a través de la manipulación física del objeto. Finalmente, el hecho de seguir manipulando el objeto permite al estudiante poder establecer relaciones lógicas de dependencia o propiedades lo que lo situaría en el Nivel 2.

Además, estos niveles dependen del contenido que se está trabajando y del progreso que lleve en él (González, 2018). Por lo que un estudiante que alcanza un nivel alto de razonamiento en geometría en dos dimensiones no necesariamente alcanza ese mismo nivel en geometría de tres dimensiones. Esto último avala la importancia de que el estudiante trabaje con modelos en tres dimensiones de manera de avanzar en niveles de razonamiento referentes a éstos, y no a sus representaciones en dos dimensiones.

Por otra parte, también el modelo propone cinco fases de aprendizaje para guiar al docente en el diseño y organización de experiencias de aprendizaje para que el estudiante progrese de un nivel al siguiente (Vargas y Gamboa, 2013). Dichas fases no son exclusivas de cada nivel, sino que, en cada nivel el estudiante debe trabajarlas para alcanzar el nivel de razonamiento siguiente (Vargas y Gamboa, 2013). Como se resume en la figura 18, estas fases son:

Figura 18

Fases Modelo de Van Hiele



Fase 1: “Información”. En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo objeto de estudio (Vargas y Gamboa, 2013). El docente debe identificar los conocimientos previos que puedan manejar los estudiantes y su nivel de razonamiento en cuánto a éste (Vargas y Gamboa, 2013). Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio, el tipo de problema, los métodos y materiales, entre otros (Vargas y Gamboa, 2013).

Fase 2: “Orientación dirigida”. El papel del profesor es fundamental en esta fase, debido a que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013). En este sentido, se guía al estudiante con fin de que aprendan relaciones o componentes básicos de la red de conocimiento por formar (Vargas y Gamboa, 2013).

Fase 3: “Explicitación”. Los estudiantes formulan con sus propias palabras los resultados que han obtenido, intercambiando experiencias y discutiendo sobre ellas (Vargas y Gamboa, 2013). En esta fase, se formaliza el vocabulario técnico que corresponde al objeto de estudio (Vargas y Gamboa, 2013).

Fase 4: “Orientación libre”. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores (Vargas y Gamboa, 2013). Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos para resolver diferentes problemas y actividades más complejas. La intervención del docente es mínima, pues son los estudiantes los que deben encontrar la manera de resolver los problemas planteados, a partir de lo aprendido en las fases anteriores (Vargas y Gamboa, 2013).

Fase 5: “Integración”. Los estudiantes establecen una visión global de lo aprendido, integrando estos nuevos conocimientos con los que tenían anteriormente (Vargas y Gamboa, 2013). El profesor debe recapitular la información que se ha logrado adquirir, y las actividades que proponga deben apuntar a la organización de los aprendizajes ya adquiridos (Vargas y Gamboa, 2013).

2.4. Antecedentes investigaciones acerca de la enseñanza de volumen

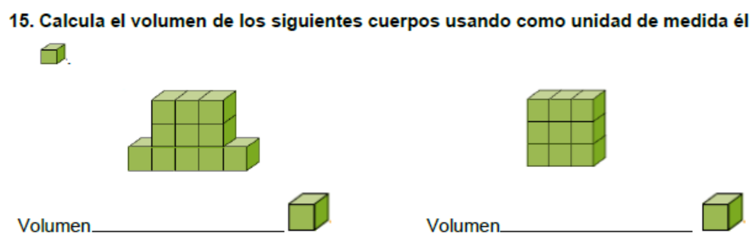
En este apartado se detallarán antecedentes de investigaciones que han aplicado las teorías antes mencionadas en propuestas para la enseñanza de volumen de cuerpos geométricos. Los siguientes artículos y tesis se ordenaron de manera cronológica. En algunos casos se utilizaron metodologías mixtas, pero se considerarán solo los análisis cuantitativos, dado el enfoque de esta investigación. También se consideraron tres artículos presentados en la revisión de bibliografía.

- Galindo y Purrán (2017) plantean que el mayor problema de los alumnos en el eje de geometría está relacionado a sus procesos de razonamientos. En este sentido, el modelo de Van Hiele ha favorecido ampliamente la enseñanza de la geometría, debido a su enfoque constructivista y la modelación de niveles por los que el razonamiento del estudiante transita (Galindo y Purrán, 2017). Dicho modelo abarca dos ámbitos: el descriptivo, referente a las formas de razonamiento del estudiante, y el instructivo, a través de los profesores para favorecer el desarrollo de razonamientos superiores a partir de actividades de acuerdo con las fases de este modelo (Galindo y Purrán, 2017). En su investigación, los autores buscaron comparar los niveles de razonamiento de Van Hiele antes y después de implementada una secuencia didáctica basada en las fases de dicho modelo, a partir de un análisis cuantitativo realizado a través de pruebas estandarizadas (pre-test y post-test).

El pre-test consistió en una evaluación diagnóstica de preguntas cerradas que abarcó contenidos de longitud, área y volumen, desde los conocimientos previos que debían manejar los estudiantes, como se puede observar en la figura 19 (Galindo y Purrán, 2017).

Figura 19

Pregunta PRE-TEST

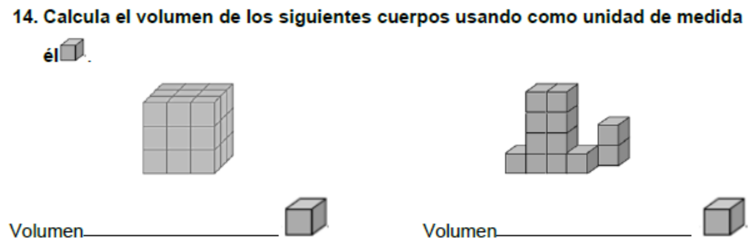


Fuente: Galindo y Purrán, 2017

Luego de ello, se implementaron una secuencia de actividades referidas a contenidos de medición de área y volumen de paralelepípedos, a partir de actividades diseñadas con base en las fases del Modelo de Van Hiele. Por ejemplo, usaron construcciones con legos para la medición de volumen de distintos cuerpos (Galindo y Purrán, 2017). Finalmente, se aplicó una evaluación final que abarcó los contenidos trabajados, similar a la evaluación diagnóstica, en el sentido de que también se trataba de preguntas cerradas y medía los mismos indicadores de logro, pero con ejercicios diferentes, como se presenta en la figura 20. Esto significa que utilizaron una metodología de pre y post test sobre una misma muestra de estudiantes.

Figura 20

Pregunta POST-TEST



Fuente: Galindo y Purrán, 2017

Para analizar sus datos trabajaron con estadísticas descriptivas, además de una prueba paramétrica de t-student con muestras repetidas (Galindo y Purrán, 2017).

A partir de dichos resultados comprobaron su hipótesis: “los estudiantes de cuarto año básico alcanzan un nivel de razonamiento correspondiente al nivel de análisis al implementar el modelo de Van Hiele en la enseñanza del eje de geometría y medición” (Galindo y Purrán, 2017):

“Se observa que hay diferencias altamente significativas al demostrar que comprenden el concepto de volumen de un cuerpo, al implementar el modelo de Van Hiele. Se presenta en el pre-test un porcentaje de 47% de respuestas correctas, y en el post-test se establece un 70% de respuestas correctas.” (Galindo y Parrín, 2017).

- En su artículo “An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students’ 3D geometry thinking skills”, Ibili, Cat, Resnyansky, Sahin y Billinghurst (2019), plantean que la enseñanza tradicional basada en dibujos bidimensionales no tiene tanto éxito cuando se enseñan objetos geométricos bidimensionales, afirmando que puede llevar a confusiones con respecto a los componentes (longitud, superficie, volumen) del cuerpo en estudio. Por esta razón, resaltan la importancia de que los estudiantes desarrollen sus habilidades espaciales, como son la visualización y la configuración espacial (Ibili et al, 2019). Además, se enfatiza la necesidad de que los estudiantes manipulen objetos en entornos físicos, mentales y/o computacionales (Ibili et al, 2019).

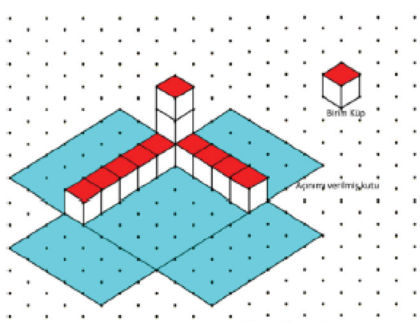
  Por otra parte, proponen que el uso de realidad aumentada favorece el desarrollo de dichas habilidades espaciales, y plantean como hipótesis que la enseñanza de geometría asistida por realidad aumentada mejora las habilidades relacionadas con el razonamiento en tres dimensiones en 460 estudiantes que se graduaron de octavo grado en 11 escuelas de Turquía (13-14 años) (Ibili et al, 2019). Para probar esto, desarrollan una prueba de habilidades de pensamiento 3D, basado en 6 dimensiones:

- Habilidad para reconocer y crear formas en 3D.
- Habilidad para dibujar y traducir representaciones de diferentes vistas de sólidos 3D.
- Habilidad para estructurar matrices 3D de cubos.
- Habilidad para determinar propiedades de formas geométricas 3D.
- Habilidad para calcular volumen y área de sólidos 3D.
- Habilidad para comparar características de las formas 3D.

Esta evaluación contaba con 31 preguntas de selección múltiple. A continuación, en la figura 21, se observa un ejemplo de pregunta, en donde se muestra una caja desarmada y sobre ella una construcción con cubos, se pregunta cuántos cubos más se necesitan para llenar la caja completa.

Figura 21

Pregunta evaluación de habilidades de pensamiento 3D: Nivel 2 de Van Hiele



Question 2: On the left side, a box with the shape of a rectangular prism is visible. The inside of the box will be filled with unit cubes until the inside of the box is completely filled. How many more cubes are needed to fill the box?

A) 90 B) 79 C) 78 D) 48

Fuente: Ibili et el, 2019

A partir de un análisis estadístico basado en coeficientes de regresión de los desempeños en esta prueba antes y después de implementadas las actividades con realidad aumentada, se comprobó la hipótesis planteada.

- Astudillo (2018) en su tesis de pregrado: “Aplicación de una Situación Didáctica para el Cálculo de Volumen, Construida en Base al Espacio de Trabajo Geométrico”, a través de una Ingeniería Didáctica, realiza una propuesta de intervención para la enseñanza de volumen en un curso de 8vo básico (13 años), usando como herramienta el software Geogebra. Su fundamento se basa en las dificultades en el aprendizaje de la geometría, debido principalmente al mal abordaje de los contenidos, falta de contexto o mala implementación (Astudillo, 2018). Además, argumenta que la geometría espacial tiene poca prioridad a la hora de la elección de los contenidos a enseñar en determinados niveles, prefiriendo la enseñanza de la geometría plana (Astudillo, 2018). Por otra parte, cuando se trabaja geometría de tres dimensiones, en general, los docentes tienden a utilizar representaciones en dos dimensiones, lo que produce dificultades en la visualización y posibles errores en la comprensión de los conceptos (Astudillo, 2018).

  Con base en esta problemática, el autor desarrolla una propuesta de situación didáctica respaldada por la Teoría de Espacio de Trabajo Geométrico de Kuzniak, la cual considera componentes de visualización y uso de instrumentos o herramientas (Astudillo, 2018).

  Enfocado en el Paradigma Geométrico Natural, caracterizado por la observación visual y utilización de herramientas geométricas, Astudillo (2018), desarrolla una serie de actividades en geogebra, usando lentes de visión 3D, con el propósito de que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización.

Figura 22

Actividad 5, Principio de Cavalieri

Problema 5: Cavalieri

En este problema se pide:

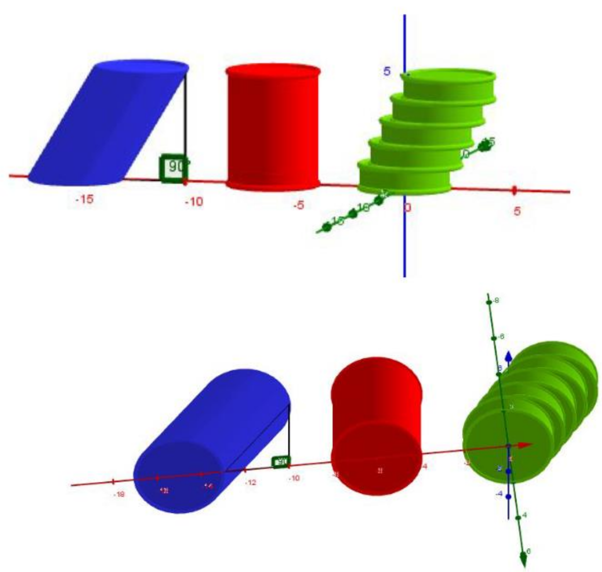
- ¿Cual de las tres figuras tiene mayor volumen? Responda sin realizar ningún cálculo?
- Calcule el volumen de cada una de las figuras.
- Explicite que tienen en común los tres cuerpos.
- En base a lo anterior ¿qué puede conjeturar respecto al volumen de los cilindros?

Fuente: Astudillo, 2018

Para resolver la actividad 5 detallada en la figura 22, el estudiante debe utilizar herramientas de geogebra, de manera de hacer aparecer los ejes de los 3 cilindros e ir rotando y moviendo los cuerpos de manera de visualizar sus características, como se puede observar en la figura 23 a continuación:

Figura 23

Actividad 5, Principio de Cavalieri



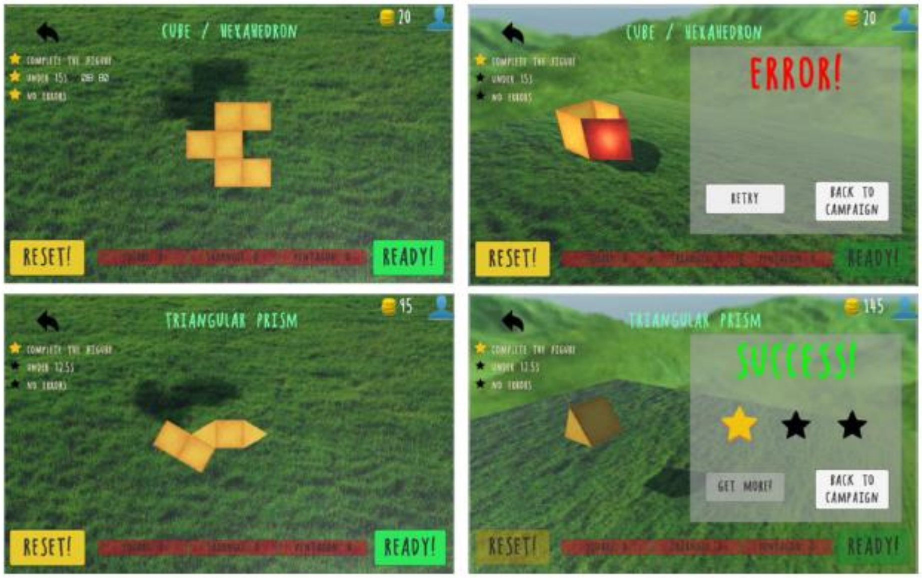
Fuente: Astudillo, 2018

Para analizar los efectos de la implementación de su propuesta, el autor realizó, como parte de una Ingeniería Didáctica, el análisis a posteriori de las actividades, a partir de las respuestas que presentaron los estudiantes de la muestra. Además, se realizó una confrontación de datos a partir de una escala de logros diseñada por el propio autor, identificando también factores internos y externos que pudieron haber afectado. Astudillo (2018) concluyó que existieron distintas dificultades tanto en el diseño de las actividades, como en las propias de los estudiantes involucrados. Sin embargo, resultó ser una propuesta enriquecedora para los estudiantes, debido a los contextos y la complejidad de las actividades, además del uso de una plataforma digital interactiva como geogebra. Las situaciones activaron la génesis del Espacio de Trabajo Geométrico (Astudillo, 2018).

- Con base en los beneficios de la gamificación en el aula (uso del juego digital en entornos de aprendizaje), Puig, Rodríguez, Baldeon y Muria, sostuvieron en su estudio" Children building and having fun while they learn geometry ", la importancia de la manipulación de objetos geométricos y del andamiaje en actividades de aprendizaje, en el desarrollo de razonamientos geométricos en estudiantes (Puig et al, 2021). Con base en el modelo de Van Hiele, desarrollaron una serie de actividades en un juego interactivo de computadora en donde los estudiantes fueron aprendiendo diferentes conceptos y propiedades de los cuerpos geométricos. El juego "LEGA" consistía en varias misiones diseñadas a partir desde el nivel más básico de Van Hiele de "visualización", hasta el nivel de "análisis", como se puede observar en la figura 24 (Puig et al, 2021).

Figura 24

Misión: Plegar red hasta formar cuerpo geométrico



Fuente: Puig et el, 2021

Para evaluar el diseño y la eficacia del juego, se utilizó una metodología mixta, sobre una muestra de 60 estudiantes de entre 10 y 13 años. La muestra se dividió en dos grupos, experimental y de control. Durante la primera fase de la investigación, los docentes explicaron conceptos geométricos a través de instrucciones directas y procedimientos algorítmicos. Después de eso, se midieron los aprendizajes de los estudiantes mediante una evaluación estandarizada de selección múltiple. En la segunda fase, los estudiantes del grupo experimental jugaron al juego, mientras que los del grupo de control practicaron ejercicios rutinarios en clase tradicional. En la tercera fase, ambos grupos completaron un cuestionario de percepción de la experiencia en términos de aprendizaje y diversión, y también realizaron una segunda prueba estandarizada de selección múltiple.

Los resultados estadísticos en la comparación en los desempeños en el pre-test y post-test, corroboraron la hipótesis de que las actividades gamificadas ayudaron a incrementar el rendimiento de los estudiantes del grupo experimental. Sin embargo, también se realizó un alcance ético con la propuesta, debido a que el grupo de control no tuvo oportunidad de mejorar sus desempeños a partir del juego.

- En 2021, Ng y Ye aplicaron la teoría de cognición incorporada en el análisis de los efectos del uso de tecnología de impresión 3D portátil en el aprendizaje de las propiedades de prismas y pirámides. La propuesta se aplicó 5 cursos de primaria de Hong Kong (de 11 a 12 años) y se utilizó una metodología mixta para el análisis de sus efectos. Los autores destacan la importancia del "hacer con las manos" en el proceso de aprendizaje espacial y que, desde una perspectiva de cognición incorporada, construir usando bolígrafos 3D desempeña un papel protagónico en los cambios cognitivos del estudiante, al permitirles una creación abierta y flexible, como se puede apreciar en la figura 25 (Ng y Ye, 2021).

Figura 25

Dos estudiantes construyendo un cubo con un bolígrafo 3D

Fuente: Ng y Ye, 2021

Para el análisis cuantitativo del impacto de la propuesta, se realizaron dos pruebas estandarizadas, antes y después de las intervenciones en el aula (Ng y Ye, 2021). Ambas pruebas tenían el mismo formato, número de preguntas y dificultad, aunque las preguntas diferían en algunos detalles como el número de lados de las bases. A continuación (figura 26) se puede observar una pregunta presente en ambas pruebas con ciertos cambios:

Figura 26

Ejemplo pregunta PRE-TEST y POST-TEST

Category	Sample question		Numb of iter
	Pretest	Posttest	
(1) Determining the total number of vertices, edges, or faces in a given prism or pyramid			
Vertices	How many vertices does a 7-gonal prism have? (Item 5)	How many vertices does an 11-gonal prism have? (Item 8)	5
Edges	How many edges does a 9-gonal pyramid have? (Item 7)	How many edges does a 6-gonal pyramid have? (Item 5)	5
Faces	How many faces does a 100-gonal *prism* have? (Item 9a)	How many faces does a 100-gonal *pyramid* have? (Item 9a)	5
(2) Identifying the shape of faces and determining the total number of faces			
Faces	In a 5-gonal *prism*, there are ____ triangular faces, _____ rectangular faces, and ____ pentagonal faces. (Item 10)	In a 5-gonal *pyramid*, there are ____ triangular faces, _____ rectangular faces, and ____ pentagonal faces. (Item 10)	2
(3) Working backward in naming the solid after being given the total number of vertices, edges, or faces on a prism or pyramid			
Vertices	A solid has 10 vertices. This solid could be a ____-gonal prism (Item 14a) or a ____ -gonal pyramid (Item 14b)	A solid has 14 vertices. This solid could be a ____-gonal prism (Item 15a) or a ____ -gonal pyramid (Item 15b)	4
Edges	A solid has 12 edges. This solid could be a ____-gonal prism (Item 16a) or a ____ -gonal pyramid (Item 16b)	A solid has 18 edges. This solid could be a ____-gonal prism (Item 16a) or a ____ -gonal pyramid (Item 16b)	4
Faces	A solid has 14 faces. This solid could be a ____-gonal prism (Item 13a) or a ____ -gonal pyramid (Item 13b)	A solid has 12 faces. This solid could be a ____-gonal prism (Item 13a) or a ____ -gonal pyramid (Item 13b)	4
Total	/	/	29

Fuente: Ng y Ye, 2021 (Traducido del chino al inglés)

Los resultados presentaron una mejoría no significativa en cuanto a los desempeños de los estudiantes en la prueba post-test en comparación con el pre-test. Los investigadores señalan que la falta de grupo de control no permitió analizar de manera contundente los efectos del uso del bolígrafo en comparación con una clase tradicional (Ng y Ye, 2021).

- Mondero (2022) en su investigación acerca de la enseñanza de concepto de masa, volumen y capacidad, plantea en su marco teórico para la enseñanza de la geometría, seis principios fundamentales basados en la Educación Matemática Realista de Freudenthal:

- Principio de Actividad: La matemática es una actividad humana, de búsqueda de soluciones a problemas (Mondero, 2022).
- Principio de Realidad: La mejor manera de hacer matemática es haciéndola en contextos reales (Mondero, 2022).
- Principio de reinvención guiada: En lugar de presentarles directamente los conceptos y procedimientos, se busca proporcionar a los estudiantes situaciones, ejemplos o problemas desafiantes que les permitan desarrollar sus propias ideas y soluciones (Mondero, 2022).

- Principio de Niveles: El estudiante comienza a analizar su propia actividad matemática (Mondero, 2022).
- Principio de Interacción: El aprendizaje de la matemática es una actividad social (Mondero, 2022).
- Principio de Interconexión: Debe haber una conexión o interrelación entre los conocimientos matemáticos adquiridos y los que ya se tenían (Mondero, 2022).

Con base en estos principios, la autora desarrolla una propuesta de intervención en el aula a un curso de sexto grado con 20 niños, en un colegio de la Comunidad de Castilla y León. Dicha intervención consistía en el uso de material manipulativo en el aprendizaje de medidas de área y volumen de cubos y paralelepípedos. A continuación, en la figura 27, se presenta un ejemplo de las actividades que se realizaron en la intervención:

Figura 27

Ejemplo actividad

Actividad 2: Los cubos de Margot

Se les explica a los discentes que Margot tiene que regar las plantas de su jardín, pero tiene demasiados tarros (con forma de cubo) de distintos tamaños. Todos los tarros están llenos de agua y las plantas necesitan todas ellas la misma cantidad, ya que, si no, se inundarán.

Por lo que, los niños a través de la exploración y la manipulación deben comprobar cuál de todos los tarros tiene más agua que el resto. Para ello cuentan con los siguientes materiales:

- 10 cubos llenos de agua (5 para cada equipo).
- Varios recipientes con los que pueden trasladar el agua: yogures vacíos, cucharas, jarras y cuencos.

De igual manera, darán solución a la actividad 1 y comprobarán si lo que habían escrito en el papel se ha cumplido.

Fuente: Mondero, 2022

Para evaluar la intervención, se realizó en primer lugar un análisis cualitativo a partir de una rúbrica que llenaron los docentes participantes con respecto a la actitud, implicación en la tarea, trabajo en equipo e interacción entre estudiantes. La segunda evaluación consistía en una autoevaluación del alumnado finalizada cada actividad.

Por último, también se incorporó una evaluación de la actividad misma por parte de los docentes, con objetivo de mejorar la propuesta para posibles implementaciones.

- En su tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática: “Resignificación del discurso matemático escolar docente: una mirada del cálculo de volumen desde la teoría socioespistemológica”, Jorge Astudillo (2022) plantea que existe un predominio de lo bidimensional, el uso de fórmulas algebraicas y el cálculo aritmético en el discurso matemático escolar relacionado a la enseñanza del cálculo de volumen. Explica también que los elementos que provocan que este discurso tenga dichas características se debe principalmente a la dificultad que tienen los estudiantes de desarrollar habilidades espaciales al momento de trabajar conceptos geométricos tridimensionales (Astudillo, 2022).

  Con base en esto, Astudillo plantea la aplicación de una situación de aprendizaje que aborde el cálculo de volumen de prismas y cilindros, que logre una resignificación del discurso escolar matemático de los docentes, logrando una sincronía entre aspectos tridimensionales y bidimensionales (Astudillo, 2022). Para fundamentar su propuesta, la investigación se enmarca en la teoría socioepistemológica, analizando en cómo se construye el conocimiento desde una perspectiva social (Astudillo, 2022).

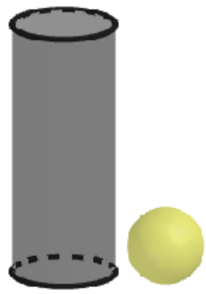
  La metodología utilizada fue de carácter cualitativo y tenía como objetivo describir los cambios en el discurso matemático escolar docente de profesores de un establecimiento educacional de la zona poniente de Santiago, antes y después de aplicada una intervención (Astudillo, 2022). Para analizar estas diferencias, se realizaron entrevistas y planificaciones de los docentes.

  La intervención consistía en una serie de actividades relacionadas con el cálculo de volumen de distintos cuerpos geométricos, que debían trabajar y resolver los docentes. A continuación, en la figura 28, se puede observar un ejemplo de actividad:

Figura 28

Ejemplo actividad con geogebra

Parte V. Bolas en un frasco.



Instrucciones.

Para realizar esta actividad ingrese al applet "bolas en un frasco. ggb" desde la aplicación GeoGebra para computador o internet. La regla principal es que solo se utilicen las herramientas que se encuentran en la pantalla, es decir, no se podrán agregar nuevos recursos ni modificar las dimensiones de los cuerpos.

Actividad.

Jaime compró bolas de tenis en la feria, las que venían en una bolsa de plástico. En su casa tiene un frasco y quiere guardarlas ahí. Si la bolsa traía 4 bolas ¿Cuántas le caben en el frasco?

Fuente: Astudillo, 2022

Los resultados de la investigación arrojaron que los docentes presentaron cambios en su discurso matemático escolar con respecto al cálculo de volumen, puesto que en su diálogo en las entrevistas y en sus planificaciones de clases se observa la incorporación de conexiones entre lo tridimensional y lo bidimensional, resaltando, por ejemplo, la importancia del uso de representaciones tridimensionales (Astudillo, 2022).

En el caso de este estudio, se pretende analizar el efecto que tiene el uso de material concreto sobre el avance de los estudiantes en cuanto a los niveles de Van Hiele. Para esto, los estudiantes tendrán en primera instancia una clase en donde se trabaje con el volumen del cono, pero a partir de representaciones bidimensionales y procesos algorítmicos, lo que, como se planteó anteriormente, no lleva a un entendimiento profundo (Puig et al., 2021), lo que llevaría a los estudiantes a alcanzar hasta el nivel 1 del Modelo de Van Hiele. Por otra parte, también se espera que, luego de la intervención con material concreto, los estudiantes avances al menos hasta los niveles 2 y 3 del Modelo de Van Hiele, al permitirles manipular y estudiar los cuerpos geométricos desde distintas perspectivas, lo que potenciaría sus habilidades visoespaciales (Ibili et al, 2019)

Capítulo 3: Marco Metodológico

3.1. Tipo de metodología

En la revisión de literatura, se presentó una predominancia de aplicación de metodologías mixtas, elección fundamentada principalmente a las características de una investigación educativa, que conlleva el estudio sujeto de muestra en un contexto social y cognitivo. (Amir et al., 2020; Bhagat et al., 2021; Puig et al., 2021). La combinación de enfoques cuantitativos y cualitativos proporciona una perspectiva más completa y rica, permitiendo abordar de manera integral la complejidad de los aspectos humanos y sociales en el contexto de la investigación. En cuanto al análisis cuantitativo, se basó principalmente en el estudio de resultados en pruebas de rendimiento en geometría espacial, antes y después de implementada una propuesta de enseñanza, a partir de estadísticas descriptivas y pruebas inferenciales (Ng y Ye, 2022; Bhagat et al., 2021; Puig et al., 2021; Amir et al., 2020; Thamrongrat y Law, 2020; Ibili et al., 2019; Alves et al., 2017; Fujita et al. 2017). Con base en este fundamento y en vista del tiempo y los recursos predispuestos para la investigación, se tomó la decisión de usar una metodología cuantitativa. Dado que, en general, los desempeños académicos se estudian a partir de los resultados en pruebas estandarizadas, se optó por analizar este tipo de resultados a partir del contraste entre resultados pruebas “Pre-test” y “Post-test” sobre una misma muestra de estudiantes, antes y después de la intervención con material concreto.

Como plantea Hernández (2014), una aproximación cuantitativa tiene como meta principal la formulación y demostración de teorías. En este caso, la hipótesis plantea que la actividad “llenado de recipiente”, como experiencia con uso de material concreto, permitirá a los estudiantes avanzar en los niveles de razonamiento, de acuerdo con el Modelo de Van Hiele, lo que también se evidenciará en sus desempeños en los puntajes obtenidos con respecto a los indicadores de logro diseñados a partir de tal modelo.

3.2. Alcance de la investigación

Los estudios descriptivos tienen como objetivo especificar propiedades, características, perfiles o fenómenos que se someten a un análisis riguroso (Hernández, 2014). En esta línea, la presente investigación tiene un alcance descriptivo exploratorio.

Como se planteó en el objetivo establecido, se pretende evaluar los efectos derivados de la aplicación de la actividad “llenado de recipiente”. Este análisis comparará el desempeño de los estudiantes en una prueba anterior (Pre-test) a la implementación de la actividad con material concretoy otra posterior (Post-test). Los rendimientos fueron evaluados según los puntajes obtenidos con relación con los indicadores de logro, los cuales fueron diseñados considerando las características de cada nivel del Modelo de Van Hiele. Para llevar a cabo este análisis se realizará un estudio estadístico descriptivo e inferencial.

La generalización en estudios descriptivos puede ser limitada en comparación con estudios experimentales más controlados. Esto se debe principalmente a que están diseñados para proporcionar una visión detallada de una situación específica o fenómeno sin manipulación experimental (Hernández, 2014). Sin embargo, sus resultados pueden dar cuenta de una visión aplicable y transferible a situaciones y contextos similares, dependiendo de la representativas de la muestra. Además, permiten una exploración en profundidad de un fenómeno o situación específica, lo cual es particularmente útil cuando se quiere comprender aspectos detallados antes de realizar investigaciones con entornos más controlados (Hernández, 2014).

Los desempeños en ambas evaluaciones se analizarán a partir de los puntajes obtenidos con respectos a los indicadores de logro, que fueron diseñados a partir de las características de cada nivel del Modelo de Van Hiele. Para ello se realizará un análisis estadístico descriptivo e inferencial sobre los puntajes obtenidos con respecto a cada indicador de logro y el nivel alcanzado de con acuerdo a ellos.

3.3. Análisis de Datos

Para la comparación de los resultados obtenidos en Pre y Post Test, en primer lugar, se llevarán a cabo análisis de los puntajes obtenidos mediante el uso de estadísticas descriptivas como los valores máximos, mínimos, el promedio y desviación estándar. También se estudiarán los porcentajes de logro con respecto al puntaje total con una exigencia del 60%, nivel de exigencia que se aplica generalmente en las evaluaciones en el sistema educativo chileno.

Esto permite analizar el impacto general que la implementación de la actividad tuvo en el aprendizaje de los estudiantes, de manera similar a lo analizado en el estudio realizado por Puig, Rodríguez, Baldeon y Muria (2021) a partir de tablas descriptivas como se muestra en la figura 29.

Figura 29

Tabla Resumen resultados Pre-test y Post-test: Niños construyendo y divirtiéndose mientras aprenden geometría.

TABLE 3 Data from control (did exercises) and experimental (played the game) groups

	Min	Max	Median	Average (SD)
Control group ($N = 22$)				
Initial exam	1.5	5.5	4	3.78 (1.0)
Final exam	1.5	5.5	3.5	3.5 (1.18)
Progress	−3.5	2.25	−0.25	−0.28 (1.37)
2D Progress	−2.25	2.5	0	0.01 (1.24)
3D Progress	−1.5	1	−0.25	−0.3 (0.73)
Experimental group ($N = 31$)				
Initial exam	2.25	7	4	4.23 (1.31)
Final exam	2.25	8	4.75	5.02 (1.39)
Progress	−1.75	2.63	0.5	0.79 (1.14)
2D Progress	−0.75	2.25	0.75	0.85 (0.72)
3D Progress	−2	2	0	−0.06 (0.88)

Fuente: Puig et al, 2021

Posteriormente, se realizará un análisis estadístico descriptivo específico de acuerdo con el puntaje de cada pregunta y su respectivo indicador de logro, los cuales se encuentran vinculados a un nivel del Modelo de Van Hiele, como lo realizaron Ng, Shi y Ting (2020), lo que se puede observar en la figura 30, a modo de ejemplo.

Figura 30

Tabla Estadísticas Descriptivas Pre-test, Post-test y Test-tardió: Explorando en estudiantes de primaria diferencias en su aprendizaje en dos entornos mejorados por la tecnología: geometría dinámica e impresión 3D

Table 3 Descriptive statistics and comparisons between the 3D Pen and DGE groups (by categories)

Category		Descriptive statistics[a]		Comparisons between the 3D pen and DGE groups[b]
		3D Pen group	DGE group	
		Score mean (SD)	Score mean (SD)	
Total	Score (item $N = 27$)			
	T0	.45 (.33)	.46 (.27)	$t(162) = -.130, p = .897 > .05$
	T1	.78 (.27)	.85 (.21)	$F(1, 162) = 2.694; p = .103 > .05$; partial $\eta^2 = .017$
	T2	.80 (.26)	.85 (.23)	$F(1, 156) = .337; p = .562 > .05$; partial $\eta^2 = .002$
Faces	Score (item $N = 9$)			
	T0	.56 (.39)	.75 (.30)	$t(162) = -3.324, p = .001 < .01$
	T1	.82 (.27)	.86 (.23)	$F(1, 162) = .513; p = .475 > .05$; partial $\eta^2 = .003$
	T2	.84 (.27)	.87 (.23)	$F(1, 156) = 1.860; p = .175 > .05$; partial $\eta^2 = .012$
Edges	Score (item $N = 9$)			
	T0	.42 (.39)	.27 (.35)	$t(162) = 2.459, p = .015 < .05$
	T1	.75 (.30)	.82 (.25)	$F(1, 162) = 3.734; p = .055$; partial $\eta^2 = .023$
	T2	.77 (.28)	.83 (.27)	$F(1, 156) = 3.523; p = .062 > .05$; partial $\eta^2 = .022$
Vertices	Score (item $N = 9$)			
	T0	.37 (.38)	.35 (.33)	$t(162) = .379, p = .705 > .05$
	T1	.78 (.28)	.86 (.22)	$F(1, 162) = 5.582; p = .019 < .05$; partial $\eta^2 = .034$
	T2	.79 (.30)	.84 (.24)	$F(1, 156) = 1.419; p = .235 > .05$; partial $\eta^2 = .009$
Simple	Score (item $N = 15$)			
	T0	.48 (.33)	.49 (.28)	$t(162) = -.198, p = .843 > .05$
	T1	.81 (.24)	.85 (.23)	$F(1, 162) = .597; p = .441 > .05$; partial $\eta^2 = .004$
	T2	.83 (.24)	.86 (.22)	$F(1, 156) = .352; p = .554 > .05$; partial $\eta^2 = .002$
Advanced	Score (item $N = 12$)			
	T0	.41 (.38)	.41 (.31)	$t(162) = -.036, p = .971 > .05$
	T1	.75 (.36)	.85 (.25)	$F(1, 162) = 4.632; p = .033 < .05$; partial $\eta^2 = .028$
	T2	.76 (.34)	.83 (.28)	$F(1, 162) = 1.321; p = .252 > .05$; partial $\eta^2 = .009$

[a]Mean score/item is presented in the table
[b]*T* tests were used in T0, and ANCOVA controlled by T0 scores were adopted in T1 and T2

Fuente: Ng, Shi y Ting, 2020

Estos datos estadísticos, además, serán graficados a través de histogramas, diagramas de caja y de torta, de manera de analizar la distribución de los puntajes, dispersión y movilización de datos, como lo realizaron en la investigación “Children building and having fun while they learn geometry. Computer applications in engineering education” (Puig et al, 2021), que se puede apreciar en la figura 31.

Figura 31

Diagrama de caja y bigotes Pre y Post test: Explorando en estudiantes de primaria diferencias en su aprendizaje en dos entornos mejorados por la tecnología: geometría dinámica e impresión 3D

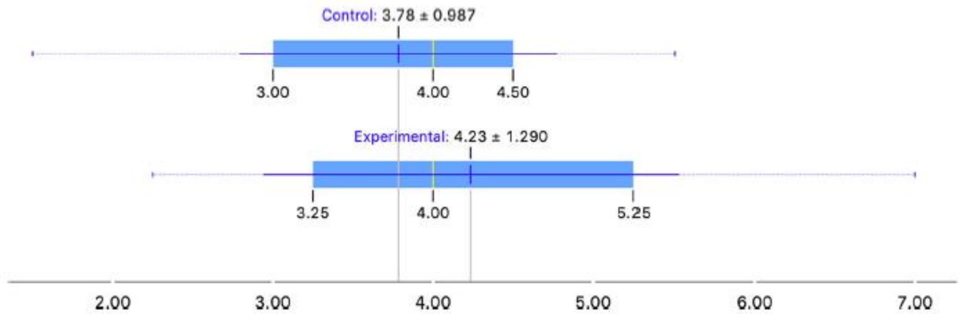


FIGURA 13Diagrama de caja del examen inicial (grupos de control y experimentales)

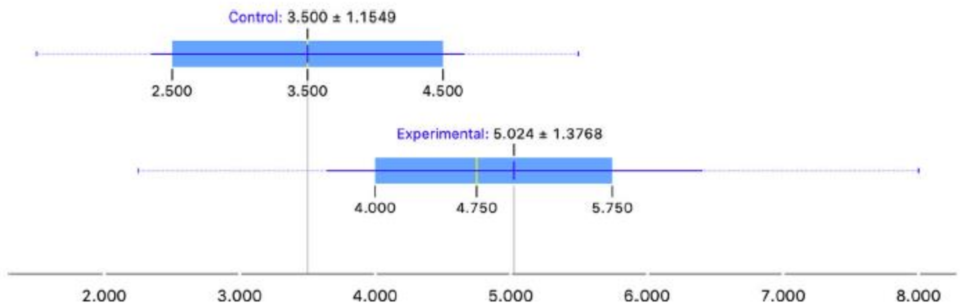


FIGURA 14 Diagrama de caja del examen final (grupos control y experimental)

Fuente: Ng, Shi y Ting, 2020

Con base en los puntajes obtenidos en cada pregunta o conjunto de preguntas, se definió un criterio mínimo del 60% del puntaje para considerarlo como logrado, asignando de acuerdo con esto, a cada estudiante su respectivo nivel de Van Hiele alcanzado. También, se compararán las proporciones de estudiantes en cada nivel y la movilización a niveles superiores luego de la implementación de la actividad, tomando como referencia el trabajo realizado por Van Putten, Howie y Stols (2010).

A continuación, se presentan las matrices que se usarán para ordenar y analizar los datos. También se presentan algunos datos hipotéticos de manera de ilustrar sus funciones.

- Comparación General

Figura 32

Estadísticos descriptivos para comparación general

Estadísticos Descriptivos	Pre-Test	Post-test	Media de diferencias
Puntaje Mínimo	0	1	0,572916667
Puntaje Máximo	28	28	
Puntaje Promedio	0,76041667	1,33333333	
Calificación Promedio	2,084375	2,13958333	
Mediana Puntaje	0	1	
Desviación Estándar	4,29625245	2,78214861	
Cantidad estudiantes aprobados	2	1	
%Aprobación			

Tal como se mencionó anteriormente, la primera etapa de análisis comparativo se realizará a través de estadísticas descriptivos como se muestra en la figura 32, sobre los resultados generales de los estudiantes, de manera de estudiar el impacto global que tuvo la intervención sobre los desempeños de los estudiantes.

- Comparación por preguntas

Figura 33

Comparación por preguntas

Preguntas	Ptje Mínimo	Ptje Mínimo	Ptje Máximo	Ptje Máximo	Promedio puntaje	Promedio puntaje	Desviación Estándar	Desviación Estándar	Porcentaje de Logro	Porcentaje de Logro	PRE-TEST
Preguntas 1 y 2	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0%	0%	POST-TEST
Preguntas 3 y 4 (a y b)	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0%	0%	
Preguntas 4 (c y d)	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0%	0%	
Pregunta 5	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0%	0%	

Como se puede apreciar en la figura 33, luego del análisis global se realizará una comparación detallada por preguntas, organizados de acuerdo con su respectivo nivel de Modelo de Van Hiele, usando estadísticos descriptivos y apoyándose en gráficos de distinto tipo, de manera de estudiar de qué manera influirá el uso de material concreto en cada uno de los indicadores, es decir, en cada uno de los niveles del Modelo de Van Hiele.

- Niveles de Van Hiele

Figura 34

Niveles de Van Hiele

Niveles de Van Hiele	Pre-test	Post-test	Diferencia
Nivel 1	0	0	0
Nivel 2	0	0	0
Nivel 3	0	0	0
Nivel 4	0	0	0
Nivel 5	3	1	2

También se cuantificarán a los estudiantes de acuerdo los niveles de Van Hiele alcanzados en cada prueba, comparando sus diferencias y analizando si habrá una movilización en cuanto al avance en los niveles, tal como se puede observar en la figura 34. Considerando los distintos profesores con los que se trabajará el conjunto de actividades que conforman la aplicación de la investigación, se estudiarán las diferencias por curso. Además, de manera de analizar perspectivas de género se estudiarán los cambios con respecto al género con el que se representan los estudiantes.

- Resultados detallados por indicador de logro Pre y Post Test

Figura 35

Resultados detallados

Código Estudiante	Item 1 y 2 (7,5 puntos)	Item 3 y 4 (a y b) (14 puntos)	Item 4 (c y d) (6 puntos)	Item 5 (8 puntos)	Ptje. total (35,5 ptos)	Calificación	Nivel de Van Hiele Alcanzado
1	3	10	5	6	24	4,6	Nivel 3
2		1			1	2,1	#N/D
3	7	3	5	7	25	4,8	Nivel 3
4	5				5	2,5	Nivel 0
5					0	2	#N/D

En la matriz que se presenta en la figura 35, se decidió ordenar los datos obtenidos en las dos pruebas realizadas, detallando los puntajes obtenidos por indicador de logro, que se encuentran relacionados directamente con un nivel de Van Hiele. En el caso de obtener el puntaje de aprobación del indicador (igual o superior al 60% del puntaje ideal), la celda se pinta de verde. De lo contario se marca con color rojo evidenciando que no se logró el indicador. Además, en la última columna se muestra el nivel de Van Hiele alcanzado según los resultados en la prueba.

Es importante destacar que según el marco teórico en el que se basa la investigación, un estudiante alcanza un nivel de Van Hiele, luego de haber alcanzado los inferiores (González, 2018). En este sentido, hipotéticamente, un estudiante podría no haber logrado el indicador de logro asociado a cierto nivel de Van Hiele, pero si el siguiente y por lo tanto quedar catalogado según ese último nivel, tal como se muestra con el estudiante 3 de la tabla. Esto podría explicarse por otras variables que hayan afectado al estudiante a la hora de realizar la prueba, pero al haber alcanzado el nivel superior y según lo planteado por el Modelo de Van Hiele, de todas maneras, quedará catalogado en su nivel correspondiente.

Para poder corroborar la hipótesis de la investigación, tal como lo realizaron los estudios en los antecedentes revisados (Puig et al, 2021; Ng, Shi y Ting, 2020; Van Putten, Howie y Stols, 2010), se realizarán una serie de test de hipótesis t-student para muestras pareadas, cálculos que se realizarán a través del software JAMOVI que también proporcionará algunos de los gráficos que se analizarán.

Un diseño de medidas repetidas es aquel en donde se registran dos o más medidas de la variable dependiente (en este caso, puntajes pre y post-test) para cada sujeto o unidad experimental (Núñez y Bono, 2020). Estas medidas se toman bajo la acción de cada una de las condiciones del tratamiento (Núñez y Bono, 2020), que en este caso consideró la manera de enseñar el contenido antes de cada evaluación.

En este sentido, la prueba T-student permitirá analizar si realmente existieron diferencias significativas entre estas medidas a partir de las condiciones de tratamiento. Para abordar esto se definen los siguientes valores:

$$M_1: Media\ Puntaje\ Pre - test$$

$$M_2: Media\ Puntaje\ Post - test$$

Para analizar la diferencia de las medidas se establecen dos hipótesis, según lo que se pretende lograr:

$$H_0: M_1 = M_2$$

$$H_1 = M_1 < M_2$$

El objetivo, entonces, consiste rechazar la hipótesis 0 lo que por consiguiente indica que la hipótesis 1 es correcta. De lo contrario, si no se rechaza la hipótesis 0 se concluye que no existen suficientes evidencias para validarla y por lo tanto no se puede tampoco validar la hipótesis 1 (Ruiz, 2004). En este caso la hipótesis 1 indica que los puntajes en el pre-test son menores que los puntajes en el post-test.

Para poder comprobar las hipótesis, el software arroja un valor p, que corresponde al nivel de significancia de la prueba, el cual es del 5%. Esto indica que en un 95% de los casos, los valores correspondientes cumplen la condición estudiada, o, en otras palabras, que el 95% de la muestra se encuentra dentro del intervalo de confianza en donde se cumple la condición (Saavedra, 2022). Por lo tanto:

$$Si\ p < 0{,}05 \rightarrow se\ rechaza\ H_o \rightarrow se\ acepta\ H_1$$

$$Si\ p > 0{,}05 \rightarrow no\ se\ rechaza\ H_0 \rightarrow no\ hay\ evidencia\ suficiente\ para\ concluir$$

Para analizar el progreso en cada nivel de Van Hiele, se realizará esta prueba por cada pregunta o conjunto de preguntas relacionadas con cada nivel, de manera de analizar el avance en los razonamientos, incluso si se mantuvo en el mismo nivel entre Pre-test y Post-test.

3.4. Sujetos de investigación

En una primera instancia se contará con 97 estudiantes de tres cursos (A, B y C) de primero medio, pertenecientes a un establecimiento educacional municipal de la comuna de Las Condes. Sin embargo, finalmente se trabajará con una muestra de 74 estudiantes debido a aspectos contextuales que se detallarán en el siguiente capítulo. Dicha muestra fue seleccionada debido a los recursos que se tuvieron para la investigación. Por otra parte, aun siendo un colegio con recursos municipales, no tienen acceso a tecnología avanzada como es la realidad aumentada o incluso internet en los teléfonos móviles de los estudiantes, por lo que se consideró que el experimento “llenado de recipiente” sería una estrategia beneficiosa para el aprendizaje de los estudiantes según su contexto.

Este tipo de muestra corresponde a una muestra no probabilística (Hernández,2014), debido a que su elección dependió del contexto de la investigación, es decir, es circunstancial y respondió a los recursos dispuestos para el estudio (Hernández,2014).

3.5. Protocolos de ética

Para salvaguardar los protocolos de ética de la Universidad de Santiago, se contó con los siguientes documentos:

- Autorización por parte de la directora del establecimiento para implementar propuesta (Anexo 7.1.)
- Cartas de consentimientos informados de los apoderados de los estudiantes involucrados en las secuencias de clases, para la participación de Pre-test y Post-test (Anexo 7.2).
- Cartas de asentimientos informados de los estudiantes que participarán en la investigación, para la participación de Pre-test y Post-test (Anexo 7.3).
- Carta de compromiso de confidencialidad de la investigadora (Anexo 7.4)

3.6. Diseño metodológico

El diseño de esta investigación tiene características cuasiexperimentales, debido a la imposibilidad de elegir la muestra de manera aleatoria dentro de los estudiantes del establecimiento elegido para el estudio. Los diseños cuasiexperimentales, son esquemas de investigación no aleatorios, es decir, no es posible establecer de forma exacta la equivalencia inicial de los grupos (Bono, 2012).

En cuanto a la recolección de datos, se realizarán dos evaluaciones, denominadas Pre-test y Post-test. La primera tiene como objetivo levantar información acerca de lo que los estudiantes han aprendido y razonado después de una clase teórica en donde solo se entregue la fórmula de los volúmenes de cono y cilindro, además de ejercicios de aplicación directa y algorítmica. La segunda se realizará luego de implementada la actividad con material concreto, denominada “llenado de recipiente”. De esta manera, se compararán los resultados en cuanto a puntajes totales, puntajes por indicadores y clasificación en niveles de Van Hiele. Ambas evaluaciones fueron revisadas y validadas por dos expertos (Anexo 7.8.), lo que permitió realizar modificaciones a las evaluaciones y la actividad:

- Marco Catalán

Licenciado en Ciencias con mención en Matemática de la Universidad de Chile, profesor de enseñanza media de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Master of Education de The University of Melbourne y candidato a Doctor en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona.

- Manuel González

  Jefe del Departamento de Matemática Liceo Bicentenario Simón Bolívar 2023.

  Profesor de matemática e informática educativa

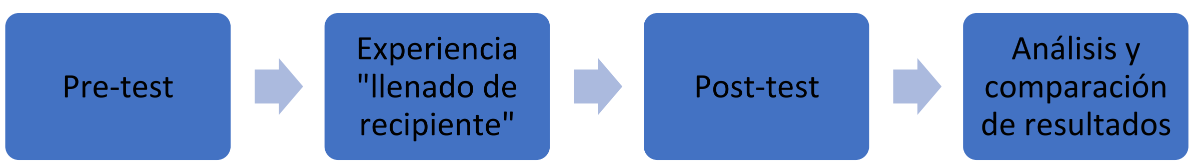
  Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

  14 años de experiencia en docencia.

A continuación, se presenta el esquema de metodológico (figura 36) de la investigación:

Figura 36

Esquema metodológico



El currículum nacional plantea para el curso de primero medio el siguiente objetivo de aprendizaje referido al volumen de cono:

“OA7: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono:

- Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie.
- Experimentando de manera concreta para encontrar la relación del volumen del cilindro y el cono.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria” (MINEDUC, 2016, p.69)”.

Para el MINEDUC (2016), los indicadores de evaluación detallan un desempeño observable (y, por lo tanto, evaluable) de la o el estudiante en relación en el Objetivo de

Aprendizaje. Son de carácter sugerido, por lo que pueden ser modificables (MINEDUC, 2016). Con respecto al OA7, se plantean los siguientes indicadores de evaluación:

a) “Estiman el volumen de un cono como tercera parte de un cilindro de la misma base y altura.
b) Experimental el volumen de un cono de manera concreta (agua, arena, recipientes, etc.).
c) Desarrollan la fórmula del volumen de un cono de la siguiente forma:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$$

d) Desarrollan modelos de conos en 3 dimensiones y los extienden en el plano en redes de conos y viceversa.
e) Desarrollan la fórmula del área de un cono identificándola con el área de su red.
f) Calculan el volumen y el área de la superficie de conos, explicando el rol que tiene cada uno de los términos de la fórmula.
g) Resuelven problemas geométricos y de la vida diaria que involucran volúmenes y áreas de superficies de conos” (MINEDUC, 2016, p.69)

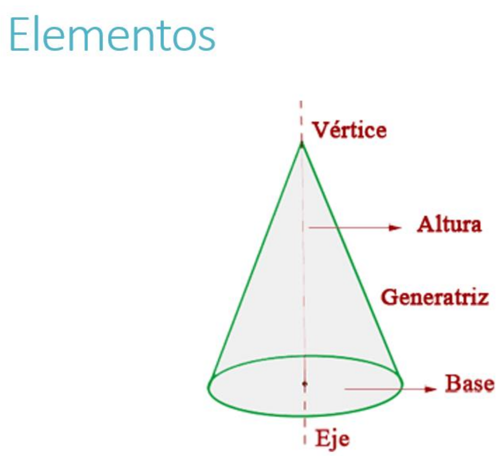
En este sentido, no se trabajará con el indicador de evaluación e), debido a que el objetivo de esta propuesta está ligado solo con el estudio del volumen del cono. Por otra parte, los indicadores de evaluación a), b), c) y d) se trabajarán directamente cuando se implemente la secuencia didáctica de “llenado de recipiente”, ya que se realizará una actividad con material concreto en donde se estudia la capacidad de un cono, con respecto a la de un cilindro, ambos cuerpos construidos por los mismos estudiantes. Por último, los indicadores de evaluación f) y g), fueron modificados y serán trabajados en el Pre-test y en el Post-test, con el objetivo de evaluar lo aprendido con respecto al volumen del cono a través de ejercicios de cálculo directo y problemas de diferente dificultad.

3.6.1. Previo a la implementación

Para trabajar con el contenido, se destinarán 3 horas pedagógicas, en donde los tres profesores de primero medio comenzarán la Unidad de Geometría con una activación de conocimientos previos, principalmente de identificación de diferencias entre cuerpos geométricos, cálculo de superficies y volúmenes de prismas y cilindros. En dichas clases se trabajará solo con representaciones bidimensionales, proyectadas por Power Point o dibujadas directamente (figura 37), en donde se identificarán los elementos de los cuerpos, y se trabajará con las fórmulas de volumen de cilindro y cono, entregadas directamente sin justificación. Se espera que en la evaluación posterior (Pre-test), la mayoría de los estudiantes alcancen los niveles 0 y 1, teniendo en cuenta el tipo de clases en donde trabajarán los estudiantes.

Figura 37

Diapositiva power point elementos cono



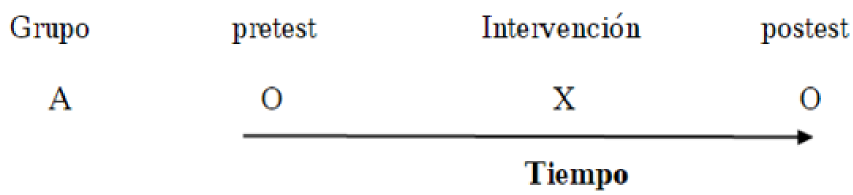
Otro aspecto importante para revisar como variable son las diferencias que se presenten en la enseñanza de este contenido por cada profesor, dadas sus características y estilos de enseñanza, además de criterios y tipos de ejercicios que se trabajarán. Dichas variables no pueden ser controladas y pueden afectar a los resultados del Pre-test

3.6.2. Diseño Pre-test y Post-test

En este tipo de diseño de investigación se utilizará un solo grupo de muestra al cual se le aplicará una evaluación antes de la intervención (Pre-test) y otra después (Post-test) (Santana, 2015). Ambos instrumentos son iguales y difieren solo en detalles, pero serán aplicados en momentos diferentes. Este tipo de diseño permite al investigador obtener una medida de cambio, salvaguardando aspectos éticos como la presencia de un grupo de control (Santana, 2015). En la figura 38, se presenta el esquema del diseño mencionado:

Figura 38

Esquema diseño PRE-TEST y POST-TEST



Fuente: Santana, 2015

El diseño de las evaluaciones se fundamentó principalmente en los postulados del Modelo de Van Hiele acerca de los niveles de razonamiento geométrico. Este enfoque se concretó en el contenido específico del volumen de cuerpos geométricos, particularmente de cono y cilindro, y se alineó con los indicadores de logro propuestos por el Ministerio de Educación Chilena. A partir de los primeros cuatro niveles de Van Hiele (visualización, análisis, deducciones informales y deducciones formales), y tomando como referencia los verbos propuestos por la Taxonomía de Bloom (1956), se diseñaron los siguientes indicadores de logro (Tabla 3):

Tabla 3

Indicadores de Logro según Modelo de Van Hiele

Indicador evaluación Currículum Nacional	Indicador de Logro	Nivel de Van Hiele asociado
-	I.L.1: Distinguen diferencias entre poliedros y cuerpos redondos.	Nivel 0 de Visualización, ya que se espera que el estudiante indique elementos distintivos entre poliedros y cuerpos redondos

-	I.L.2: Reconocen elementos de cilindro y cono.	Nivel 0 de Visualización, ya que se espera que el estudiante identifique elementos de cilindro y cono, tales como altura, radio, apotema, entre otros.
Indicador f): “Calculan el volumen y área de superficies de cono, explicando el rol que tiene cada uno de los términos de la fórmula” (MINEDUC, 2016, pg, 69)	I.L.3: Aplican la fórmula del volumen de un cono a partir de datos directos.	Nivel 1 de Análisis, en donde el estudiante es capaz de aplicar fórmulas directamente, teniendo los datos adecuados o buscando estrategias para obtenerlos.
Indicador f): “Calculan el volumen y área de superficies de cono, explicando el rol que tiene cada uno de los términos de la fórmula” (MINEDUC, 2016, pg, 69)	I.L.4: Calculan el volumen de un cono a partir de su relación con el volumen de un cilindro y de datos directos	Nivel 1 de Análisis debido a que el estudiante aplica la relación entre los volúmenes de cilindro y cono. Nivel 2 de Deducciones Informales, ya que el estudiante debe comprender las propiedades generales y aplicarlas en cuerpos.
Indicador g): Resuelven problemas geométricos y de	I.L.5: Calculan volumen de cuerpos compuestos.	Nivel 2 de Deducciones Informales, ya que el estudiante debe comprender las propiedades generales y aplicarlas en

la vida diaria que involucran volúmenes y áreas de superficies de conos” (MINEDUC, 2016, pg, 69)		cuerpos que se componen de otros conocidos.
Indicador g): Resuelven problemas geométricos y de la vida diaria que involucran volúmenes y áreas de superficies de conos” (MINEDUC, 2016, pg, 69)	I.L.6: Resuelven problemas de distintos contextos calculando volúmenes de cono y cilindro.	Nivel 3 de Deducciones Formales, ya que se espera que el estudiante sea capaz de justificar lógicamente el uso de la relación entre los volúmenes de cono y cilindro en problemas con un contexto determinado. También usar sus conocimientos y habilidades espaciales para formular estrategias de resolución.

De los resultados, se espera que los estudiantes alcancen en su mayoría el nivel 1 del Modelo de Van Hiele, teniendo en cuanta que se tenga una serie de clases previas en donde se trabajará el contenido de volumen del cono a partir de representaciones bidimensionales y procesos algorítmicos, lo que, como se planteó en el marco teórico, no lleva a un entendimiento profundo del contenido (Puig et al, 2021). Por otra parte, se espera que los estudiantes avancen hasta los niveles 2 y 3, luego de la intervención con material concreto, debido a que manipular los objetos y estudiarlos desde distintas perspectivas, profundizaría en sus habilidades visoespaciales (Ibili et al, 2019)

Las preguntas diseñadas para la evaluación fueron de respuesta abierta, con y sin desarrollo dependiendo de su complejidad y acorde al nivel de razonamiento del Modelo de Van Hiele al que apunta. A continuación, se presenta de manera detallada cada una de las preguntas, con sus respectivos indicadores de logro y su pauta de evaluación, para Pre-test y Post-test. En cuanto a la distribución de puntajes, las preguntas relacionadas con el Nivel 0 y el Nivel 1 del Modelo de Van Hiele son más extensas, por lo que tienen mayor puntaje.

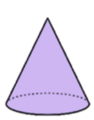
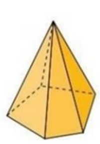
3.6.3. Pre-test

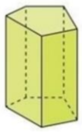
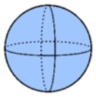
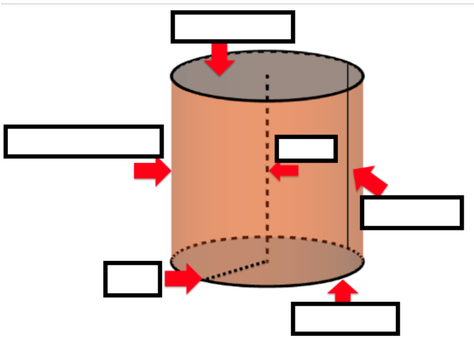
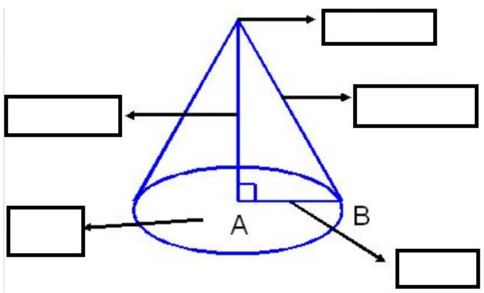
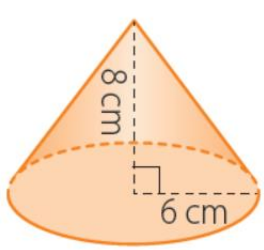
La tabla 4, a continuación, presenta las preguntas diseñadas para el Pre-test, luego de aplicar las sugerencias de los dos expertos validadores. Dichas preguntas fueron construidas de manera de evaluar qué Nivel de Van Hiele alcanzan los estudiantes y fueron elegidas de acuerdo con las características que plantea el modelo.

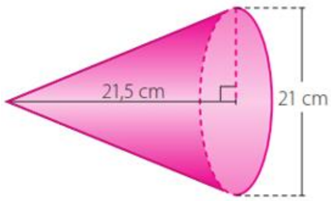
Luego en la tabla 5 se presenta la pauta de corrección que deberán usar los profesores que aplicaron la evaluación, además del Nivel de Van Hiele con el que se relaciona el logro de la pregunta de acuerdo con su puntaje. En el anexo 7.5 se puede encontrar la evaluación tal como se le presentará a los estudiantes, incluyendo los aspectos formales que requirió el establecimiento educacional en donde se aplicó.

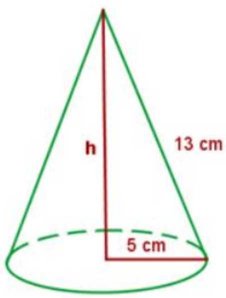
Tabla 4

Pre-test

Pregunta	Indicador de Logro
1. Clasifique los siguientes cuerpos geométricos en Poliedros o Cuerpos Redondos (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total): a)  ______________________________ b)  ______________________________	I.L.1

c)  ______________________________ d)  ______________________________	
2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos (0.5 puntos cada una, 5.5 puntos en total): a)  b) 	I.L.2
3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos en total): a) La altura de un cono es igual a 4 cm y el radio de su base es igual a 3 cm. b) 	I.L.3

<table>
<tr>
<td>


c)


d)
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
4. Calcule y responda (3 puntos cada una, 12 puntos en total):
a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 300 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono?
b) Observe los siguientes cuerpos:


Si el radio de ambos es igual y el volumen del cono es de 432 centímetros cúbicos, determine el volumen del cilindro.
c) Se tiene un tanque de destilación como el de la figura adjunta. Se vierte líquido con volumen equivalente al del cilindro superior. ¿Cuánto del cilindro se alcanza a llenar si el líquido cae hasta el cono?
</td>
<td>I.L. 4
(a y b)
I.L. 5
(c y d)</td>
</tr>
</table>

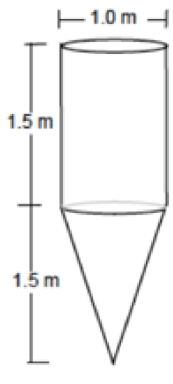
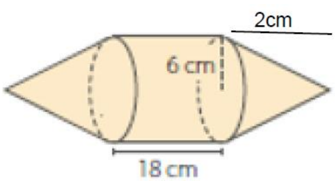
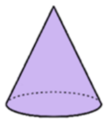
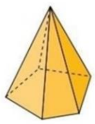
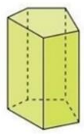
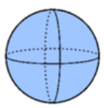
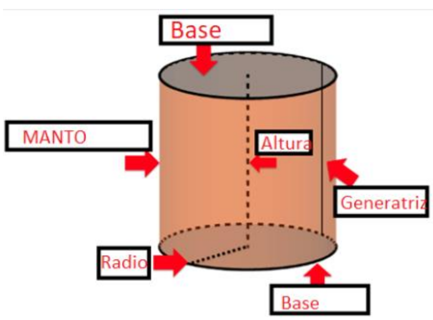
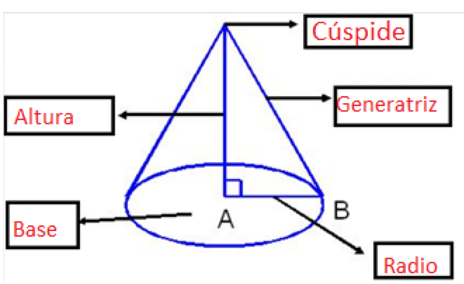
 d) Se unen dos conos a las bases de un cilindro, como se muestra en la siguiente figura. Determine su volumen.  	
5. Resuelva los siguientes problemas (4 puntos cada una, 8 puntos en total): a) Una clepsidra, o reloj de agua, puede armarse con un cono invertido que contenga agua y vaya goteando. Catalina quiere armar una tal que el cono tenga una capacidad máxima de 1800 centímetros cúbicos, y altura 50 de cm, ¿cuál debe ser el radio de su base? (Considere π=3) b) En un cilindro de un metro cúbico, introducimos un cono cuya base coincide con la del cuerpo anterior. Si llenamos de agua el espacio que queda libre en el cilindro, ¿qué volumen de agua necesitaríamos?	I.L.6

Tabla 5

Pauta de corrección Pre-test y Nivel de Van Hiele relacionado

Pregunta	Nivel de Van Hiele relacionado con respecto a puntaje

<table>
<tr>
<td>1. Clasifique los siguientes cuerpos geométricos en Poliedros o Cuerpos Redondos (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total):
a)  Cuerpo redondo
b)  Poliedro
c)  Poliedro
d)  Cuerpo Redondo</td>
<td rowspan="2">Los indicadores 1 y 2 se relacionan con el Nivel 0 del Modelo de Van Hiele, al ser preguntas en donde se espera que el estudiante sea capaz de reconocer y clasificar cuerpos geométricos a partir de sus características (Puig et al, 2021).
Para ser clasificados en este Nivel el estudiante puede obtener desde 0 puntos a 7,5 puntos en total entre las preguntas 1 y 2. Sin embargo, para ser consideradas como logradas, en el marco del Nivel 0, el estudiante debe haber obtenido al menos 4,5 puntos entre las dos preguntas, lo que corresponde al 60% de las respuestas correctas.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos:
a) 

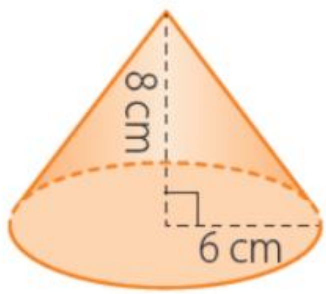
b) 
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos en total):</td>
<td>En este caso los indicadores 3 y 4 se</td>
</tr>
</table>

a) La altura de un cono es igual a 4 cm y el radio de su base es igual a 3 cm.

En este caso, se aplica fórmula directamente:

$$V = \frac{3^2 \cdot 4 \cdot \pi}{3} = 12\pi\ cm^3$$

b)

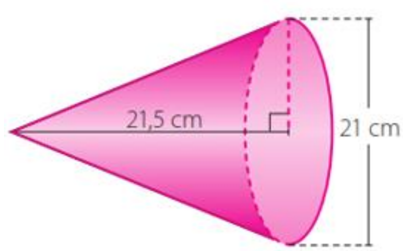


Usando la fórmula directamente:

$$V = \frac{r^2 \cdot h \cdot \pi}{3}$$

Entonces: $V = \frac{6^2 \cdot 8 \cdot \pi}{3} = \frac{288\pi}{3} = 96\pi\ cm^3$

c)



En este caso, lo primero es dividir el diámetro para obtener el radio.

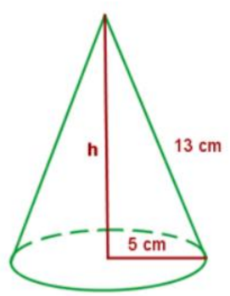
$$\frac{21}{2} = 11{,}5\ cm$$

Luego aplicamos fórmula directamente:

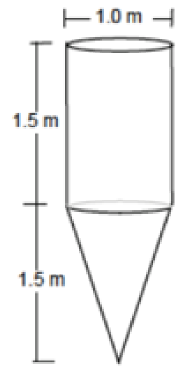
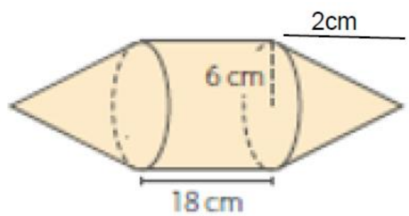
relacionan con el Nivel 1 del Modelo de Van Hiele, en el sentido de poder aplicar directamente propiedades de los cuerpos geométricos (Puig et al, 2021).

Es importante tener en cuenta que solo se consideran los ejercicios a y b de la pregunta 4, debido a que el nivel de dificultad de las preguntas posteriores se relaciona con el indicador de logro 5.

Para que el estudiante alcance a ser clasificado en el Nivel 1, debe alcanzar al menos 8,4 puntos entre las preguntas indicadas, que corresponde al 60% de 14 puntos (8 por la pregunta 3 y 6 por los dos ejercicios de la pregunta 4).

$$V = \frac{(11{,}5)^2 \cdot 21{,}5 \cdot \pi}{3} = 947{,}791\pi\ cm^2$$  d) Este ejercicio es el de mayor dificultad dado que se debe aplicar el Teorema de Pitágoras para poder obtener la altura: $$h^2 + 5^2 = 13^2$$ $$h^2 + 25 = 169$$ $$h^2 = 144$$ $$h = 12\ cm$$ Luego se aplica la fórmula directamente: $$V = \frac{5^2 \cdot 12 \cdot \pi}{3}$$ $$V = \frac{25 \cdot 12 \cdot \pi}{3} = 100\pi\ cm^3$$	
4. Calcule y responda (3 puntos cada uno, 12 en total) a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 300 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono? Como se tiene la relación que el volumen del cono es equivalente a la tercera parte del volumen de un cilindro	

con iguales dimensiones, se puede inferir directamente que el volumen del cono corresponde a $100\ cm^3$ b) Observe los siguientes cuerpos:  Si el radio de ambos es igual y el volumen del cono es de 432 centímetros cúbicos, determine el volumen del cilindro. En este caso, el análisis parte desde la relación entre el volumen del cono y cilindro con iguales dimensiones. En este sentido, si el volumen de un cono es un tercio que el de un cilindro con igual radio y altura, eso implica que el volumen del cilindro corresponde a tres veces el del cono. Luego: $V_{cilindro} = 3 \cdot 432 = 1296\ cm^3$	
c) Se tiene un tanque de destilación como el de la figura adjunta. Se vierte líquido con volumen equivalente al del cilindro superior. ¿Cuánto del cilindro se alcanza a llenar si el líquido cae hasta el cono? Notar que los ambos cuerpos tienen iguales dimensiones, por lo tanto, el volumen del cono corresponde a la tercera parte del volumen del cilindro. Esto quiere decir que el líquido llenaría por completo al cono, y	En cuanto a los ejercicios c y d de la pregunta 4 se relacionan con el Nivel 2 del Modelo de Van Hiele, debido a que además de aplicar propiedades, deben deducir algunas relaciones lógicas (Puig et al, 2021), al incorporar otros cuerpos al cálculo. Para que el estudiante sea catalogado en el nivel 2, debe al menos tener 3,6 puntos entre estas

 llegaría hasta las dos tercias partes del cilindro. d) Se unen dos conos a las bases de un cilindro, como se muestra en la siguiente figura. Determine su volumen.  Para resolver este ejercicio basta con encontrar el volumen del cilindro y sumar dos veces el volumen del cono adjuntado, el cual tiene misma base, pero altura de 2 cm. sus dos terceras partes de un cilindro con altura 2. Luego: $V = V_{cilindro} + \frac{V_{cono}}{3} + \frac{V_{cono}}{3}$ $V = 6^2 \cdot 18 \cdot \pi + \frac{6^2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + \frac{6^2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = 648\pi + 24\pi + 24\pi$ $= 696\pi\ cm^3$	dos preguntas, siendo el 60% de 6 puntos.
5. Resuelva los siguientes problemas: a) Una clepsidra, o reloj de agua, puede armarse con un cono invertido que contenga agua y vaya goteando. Catalina quiere armar una tal que el cono tenga una capacidad máxima de 1800 centímetros cúbicos, y altura 50 de cm, ¿cuál debe ser el radio de su base? (Considere π=3)	Con respecto a los problemas planteados en la pregunta 5, el estudiante en primer lugar debe ser capaz de visualizar objetos que probablemente no conozca o que no tiene a la mano, demostrando su capacidad de realizar

<table>
<tr>
<td>
Para resolver se debe trabajar con una ecuación usando la fórmula del volumen del cono, cuya incógnita corresponde al radio de la base del cono:

$$V = \frac{r^2 \cdot h \cdot \pi}{3}$$
$$1800 = \frac{r^2 \cdot 50 \cdot 3}{3}$$
$$36 = r^2$$
$$6 = r$$

Por lo tanto, el radio que necesita Catalina es de 6 cm.

b) En un cubo de un metro cúbico, introducimos un cono cuya base está marcada por la circunferencia inscrita a la base del cubo. Si llenamos de agua el espacio que queda libre en el cilindro, ¿qué volumen de agua necesitaríamos?

En primer lugar, se debe encontrar el radio del cono que es 0,5 metros.

Luego, se calcula primero volumen cubo: $1 \; metro \; cúbico$

Para luego calcular la del cono y aproximando $\pi \approx 3 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (0{,}5)^2 \cdot 3 = 0{,}25 \; metros \; cúbicos$

:

$$V_{espacio \; libre} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \; metros \; cúbicos.$$
</td>
<td>
deducciones formales a partir de procesos mentales (Puig et al., 2021).

Además, debe saber distinguir las relaciones que ya había establecido previamente, evitando por ejemplo conjeturar propiedades como alguna relación entre el volumen del cubo y del cono.

Por lo tanto, esta pregunta se relaciona con el Nivel 3 del Modelo de Van Hiele.

Para que el estudiante sea clasificado en el Nivel 3, debe al menos haber logrado los 4,8 puntos entre los dos ejercicios, lo que corresponde al 60% de los 8 puntos en total.
</td>
</tr>
</table>

3.4.2.1. *Análisis a Priori Pre-test*

El Pre-test se enmarca en el objetivo de aprendizaje 7 del Currículum Nacional Chileno para la asignatura de Matemática en primero medio:

"OA7: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono:

- Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie.
- Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria" (MINEDUC, 2016, p.69)

El contenido previo que deberían manejar los estudiantes al pasar desde octavo básico a primero medio se enmarca en el objetivo 11 del Currículum Nacional Chileno:

"OA 11: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:

- Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.
- Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas.
- Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria." (MINEDUC, 2016, p.57)

En particular, se espera que los estudiantes manejen la fórmula de volumen de prismas rectos y cilindros:

$$Volumen = Area_{Basal} \cdot Altura$$

Siguiendo en esta línea, es necesario que los estudiantes sepan cómo calcular áreas de distintos tipos de figuras, sobre todo en el caso del área de un círculo, conocido su radio. Es importante que estos contenidos se refuercen antes de aplicar la clase con el experimento.

Con respecto a cada indicador de logro a continuación se detallarán los desempeños esperados de acuerdo con el marco teórico

Indicador de Logro 1: Al ser una pregunta relacionada con el Nivel 1 de Van Hiele, se espera que los estudiantes sean capaces de diferencias poliedros y cuerpos redondos, a partir de la presencia o ausencia de ángulos poliedros, figuras geométricas como el círculo o polígonos, entre otros.

Indicador de Logro 2: En este caso, se espera que los estudiantes puedan reconocer los distintos elementos de cono y cilindro, identificando sus características en común y distintivas. Los posibles errores para observar corresponden a confusiones con respecto a elementos como la generatriz o el radio, dado que en la primera figura se presenta como perspectiva en tres dimensiones, mientras que en la segunda figura no se observa a simple vista dicha perspectiva.

Indicador de Logro 3: Este tipo de ejercicios son de aplicación directa, por lo que se enmarcan en el Nivel de Van Hiele 3. Además, su dificultad va aumentando progresivamente, partiendo con los dos primeros que se pueden calcular directamente. Luego los estudiantes deben buscar estrategias para obtener los datos y aplicar la fórmula del volumen.

Indicador de Logro 4: Este tipo de ejercicios apunta a aprovechar la relación entre los volúmenes de cono y cilindro, por lo que el razonamiento aplicado es superior a los ejercicios anteriores.

Indicador de Logro 5: Estos ejercicios, tienen la particularidad de que no hay una representación auxiliar para guiar al estudiante en los procedimientos. Esto implica una mayor habilidad espacial y de visualización de los objetos geométricos mencionados, justificando el uso de las fórmulas y procedimientos acordes al contexto, por lo que son propios del nivel 3 de Van Hiele.

3.6.4. Actividad con material concreto

Para el diseño de la actividad “llenado de recipiente”, se utilizó como marco referencial las fases propuestas por el Modelo de Van Hiele para avanzar de un nivel de razonamiento geométrico a otro superior. A continuación, en la tabla 6 se resumen las principales características de estas fases:

Tabla 6

Fases del aprendizaje propuestos por el modelo de Van Hiele

Fases	Características

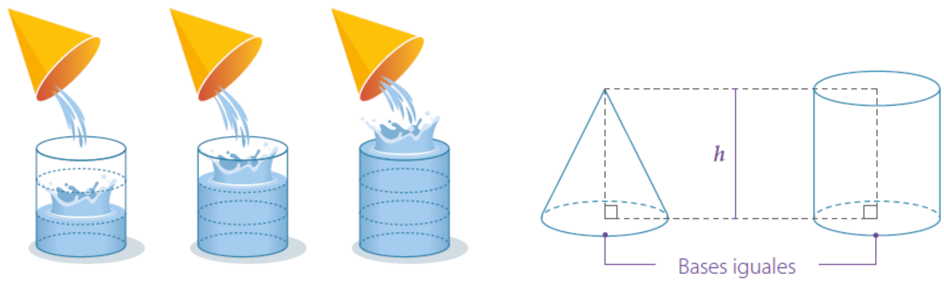
Fase 1: Información	Énfasis en la visualización y comparación de objetos, se plantean características de manera informal.
Fase 2: Orientación Dirigida	Se identifican características, reconociendo propiedades y se establecen relaciones.
Fase 3: Explicitación	Se socializan experiencias, se establecen regularidades.
Fase 4: Orientación Libre	Se aplican los conocimientos a nuevas situaciones, se complejizan los problemas.
Fase 5: Integración	Se plantea una visión global de lo aprendido. Se formalizan conceptos, definiciones, propiedades y relaciones.

Vargas G. y Gamboa, R. (2013).

Como se puede apreciar en la figura 39, la noción de capacidad se usa para ilustrar la relación entre los volúmenes de cono y cilindro, sin embargo, solo se presentan representaciones de dos dimensiones, es decir dibujos, pero no se propone realizar el experimento en sí. Según la Teoría de Cognición Incorporada, trabajar solo con representaciones en dos dimensiones no es suficiente para lograr un aprendizaje profundo del objeto, por lo que es de suma importancia que el estudiante tenga la oportunidad de manipularlos físicamente (Nathan, 2014).

Figura 39

Representación relación volúmenes entre cono y cilindro



Fuente: Fresno et al., 2022, p. 56

3.4.4.1. Diseño actividad

El diseño contará de tres momentos, distribuidos en una clase de 90 minutos, cuyo objetivo general corresponde a demostrar de manera empírica la relación existente entre el volumen de un cono y el volumen de un cilindro con iguales dimensiones. Es importante mencionar, tal como se explicó en el apartado de la problemática, que se eligió este contenido debido a la progresión de aprendizajes que se llevan a cabo hasta llegar al estudio de cuerpos redondos, en donde queda en evidencia que no se trabaja con relaciones acorde con las características de los cuerpos redondos, sino que solo se realiza una extrapolación de lo estudiado con poliedros. La construcción y uso de estos cuerpos permitirá al estudiante reconocer sus características específicas y evidencia a partir de una prueba empírica las relaciones de volumen que existen.

En este sentido se pretende que el estudiante logre demostrar que el volumen de un cono con cierto radio y altura se puede calcular como el tercio del volumen de un cilindro con las mismas dimensiones.

El objetivo particular de la clase se plantea como:

“Comprender la relación entre volumen de cilindro y cono a través de experimentación con material concreto”.

Los tres momentos atravesarán las 5 fases del modelo de Van Hiele, tal como se describen a continuación:

Momento 1: Construcción de cono y cilindro

Objetivo: Construir cono y cilindro con iguales dimensiones, usando cartulina, cinta adhesiva o pegamento y tijeras.

Los estudiantes se organizarán en grupos de 3 o 4 integrantes. Cada grupo debe traer cartulinas de colores, tijeras, regla y cinta adhesiva u otro material que permitirá pegar superficies. La instrucción consiste en construir un cono y un cilindro con iguales dimensiones, es decir, igual radio de base e igual altura. Sin embargo, no se darán las medidas respectivas para radio y altura.

El profesor o la profesora debe guiar a los estudiantes, modelando las construcciones a través de redes o recordando los elementos que caracterizan a ambos cuerpos geométricos.

En este momento de la clase, se trabajará con las Fases 1 y 2 del Modelo de Van Hiele, dado que el estudiante debe reconocer e identificar características del cono y cilindro, a partir de su construcción y la relación entre ambos para lograr iguales dimensiones (Aravena y Caamaño, 2013). Por una parte, se comienza por un proceso de reconocimiento de los cuerpos geométricos a partir de su construcción, analizando características desde la informalidad. Por otra parte, el profesor o profesora debe guiar este análisis realizando preguntas como:

"¿Cuáles son los elementos que identifican en ambos cuerpos geométricos?"

"¿De qué manera se aseguraron de que coincidan las dimensiones de los dos cuerpos construidos?"

"Si colocan el cono dentro del cilindro, ¿qué pueden observar con respecto al espacio ocupado y al espacio sin ocupar?"

"¿Se observa a simple vista una relación entre los volúmenes?"

Momento 2: Vaciado con arroz

Objetivo: Llenar cilindro construido, con arroz u otro material, usando la capacidad del cono como unidad de medida

Los estudiantes deben llenar el cono con arroz y luego verterlo en el cilindro, repitiendo el proceso hasta llenarlo completamente.

Durante este momento, se sigue trabajando con la Fase 2, guiando el experimento de manera de conjeturar acerca de la relación entre los volúmenes (Aravena y Caamaño, 2013), teniendo en cuenta lo trabajado durante las clases pasadas. Además, el grupo debe discutir acerca de estas conjeturas, sobre todo al presentarse ciertas variaciones con lo que se trabajó teóricamente por lo que también se comienza a desarrollar la Fase 3, de explicitación y socialización de los conocimientos (Aravena y Caamaño, 2013).

Momento 3: Discusión y plenario

Objetivo: Discutir y concluir la relación entre volumen de cono y cilindro con iguales dimensiones

En primer lugar, cada grupo debe mostrar sus cuerpos geométricos construidos a todo el curso, de manera de evidenciar las diferencias entre las construcciones. Luego de eso, se compartirán los resultados acerca de la cantidad de veces que tuvieron que repetir el proceso para llenar el cilindro y se discutirá con respecto a la relación entre la capacidad del cono y la capacidad del cilindro. Se espera que, dada la imposibilidad de la construcción precisa, se darán casos en donde no se corrobore que la capacidad del cilindro corresponde a la capacidad del cilindro. En este caso, el o la docente debe guiar la discusión de manera de analizar las variables que pudieron conllevar a estas diferencias.

Se prosigue con la Fase 3 del Modelo de Van Hiele, guiando este diálogo a nivel del curso completo. El o la docente deben realizar preguntas como:

- “¿Existen diferencias significativas si se cambian las dimensiones de cono y cilindro a la vez?, compare con otro grupo”
- “Si tuviese que expresar la relación entre los volúmenes como una operación matemática, ¿cuál elegirían?”.

Para enfrentar la Fase 4 del Modelo de Van Hiele, luego de este plenario, el o la profesora deben plantear un problema en donde se aplique esta relación, enfrentando a los estudiantes a una situación más compleja que solo el cálculo directo (Aravena y Caamaño, 2013). Por ejemplo:

"En un cilindro de volumen 1 metro cúbico, se introduce un cono cuya base está inscrita en la base del cubo y su altura coincide con la del cilindro. Se pretende llenar de agua el espacio que queda libro entre el cono y el cubo, ¿qué volumen de agua se necesitará?"

Para analizar el caso, el profesor debe dar alrededor de 10 minutos a los estudiantes para que desarrollen el ejercicio, permitiéndoles discutir y conjeturar con sus demás compañeros. Se espera que algunos estudiantes concluyan que consistía en 2/3 metro cúbico.

Finalmente, para cerrar con la Fase 5, es decir, de formalización (Aravena y Caamaño, 2013), el o la docente proseguirá a retomar la fórmula trabajada teóricamente las clases anteriores y la relacionará con las conclusiones que obtuvieron los estudiantes a partir de la actividad. En este sentido, se es espera que los estudiantes relacionen que el numerador en la fórmula, $r^2\pi h$, corresponde al volumen de un cilindro de radio r y altura h, por lo que al dividir por 3, se obtiene el tercio, el cual corresponde al volumen de un cono con iguales dimensiones.

En el anexo 7.6 se puede encontrar la guía de trabajo que se entregó a los estudiantes, siguiendo las formalidades que requería el establecimiento.

3.6.5. Post-test

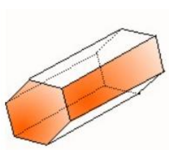
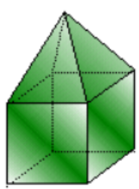
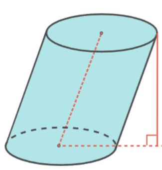
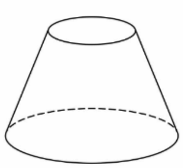
Para evaluar el impacto de la propuesta, se realizará una evaluación similar a la del Pre-test. De esta manera, se pretende determinar si al trabajar con material manipulativo, tal como lo establece la Teoría de Cognición Incorporada, los estudiantes transitan a razonamiento superiores, los cuales estarán delimitados por los niveles postulados por el Modelo de Van Hiele.

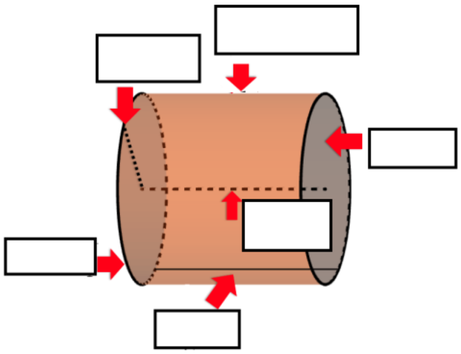
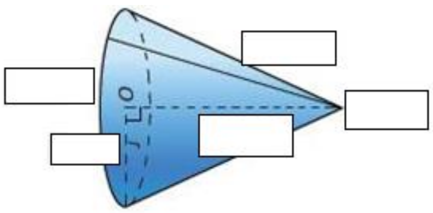
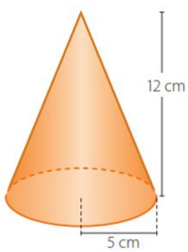
Por lo tanto, los indicadores de logro de esta evaluación fueron los mismos que los del Pre-test. Los tipos de pregunta son similares, cambiando ciertos detalles o valores numéricos, pero manteniendo los puntajes originales del Pre-test, de manera de poder contrastar las respuestas que tuvieron los estudiantes en ambas evaluaciones.

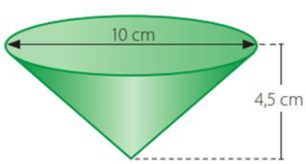
La tabla 7, a continuación, presenta las preguntas diseñadas para el Post-test, luego de aplicar las sugerencias de los dos expertos validadores. Luego en la tabla 8 se presenta la pauta de corrección que deberán usar los profesores que aplicarán la evaluación, además del Nivel de Van Hiele con el que se relaciona el logro de la pregunta de acuerdo con su puntaje y considerando los cambios realizados sobre la pregunta con respecto a la evaluación anterior. En el anexo 7.6 se puede encontrar la evaluación tal como se le presentará a los estudiantes, incluyendo los aspectos formales que requirió el establecimiento educacional en donde se aplicó la propuesta.

Tabla 7

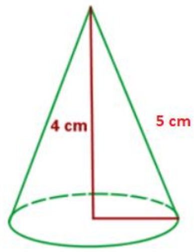
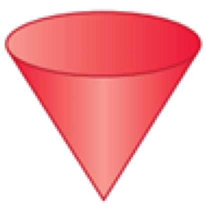
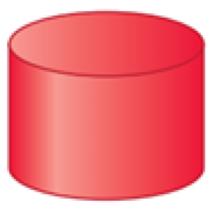
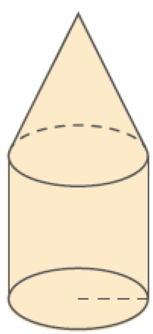
Post-test

Pregunta	Indicador de Logro
1. Clasifique los siguientes cuerpos geométricos en Poliedros o Cuerpos Redondos (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total) a)  ____________________ b)  ____________________ c)  ____________________ d)  ____________________	I.L.1

<table>
<tr>
<td>
2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos (0.5 puntos cada una, 5.5 puntos en total):
a) 
b) 
</td>
<td>I.L.2</td>
</tr>
<tr>
<td>
3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos en total):
a) La altura de un cono es igual a 6 cm y el diámetro de su base es igual a 2 cm.
b) 

c) 

</td>
<td>I.L.3</td>
</tr>
</table>

d) 	
4. Calcule y responda (3 puntos cada uno, 12 en total): a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 500 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono? b) Observe los siguientes cuerpos:   Si ambos cuerpos tienen iguales dimensiones y el volumen del cilindro es de 375 metros cúbicos, determine el volumen del cono. c) Un cono altura 15 cm y radio 6 cm se coloca sobre un cilindro de igual radio y altura, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen del cuerpo compuesto?  d) El triángulo de la figura se hace girar respecto al eje L en 360°. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se obtiene?	I.L. 4 (a y b) I.L. 5 (c y d)

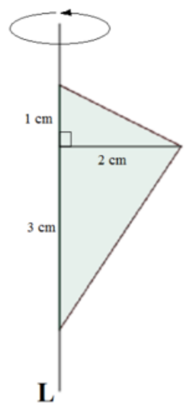
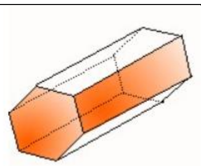
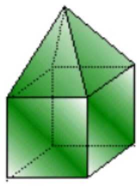
	
5. Resuelva los siguientes problemas: a) En un día caluroso, Joaquín compra un cono de helado de mora. Luego de un rato, se da cuenta que su helado se ha derretido y ha llenado el cono con $27\pi\ cm^3$ de líquido morado derretido. Si el radio de este cono es de 3 cm, determine su altura. b) Un puesto de papas fritas en la feria las vende en conos de papel. El radio de los conos es 2 pulgadas y su altura es 6 pulgadas. Es difícil llenar conos delgados con las papas largas, así que quieren usar nuevos conos con el mismo volumen que los actuales, pero con un radio más grande de 4 pulgadas. ¿Cuál será la altura de estos nuevos conos? ¿Serán eficientes estos conos? ¿Por qué?	I.L.6

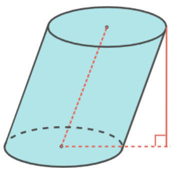
Tabla 8

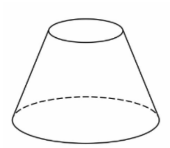
Pauta de corrección Post-test y Nivel de Van Hiele relacionado

Pregunta	Nivel de Van Hiele relacionado con respecto a puntaje
1. Clasifique los siguientes cuerpos geométricos en Poliedros o Cuerpos Redondos (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total):	Para ser clasificados en este Nivel el estudiante puede obtener desde 0

a)  Poliedro

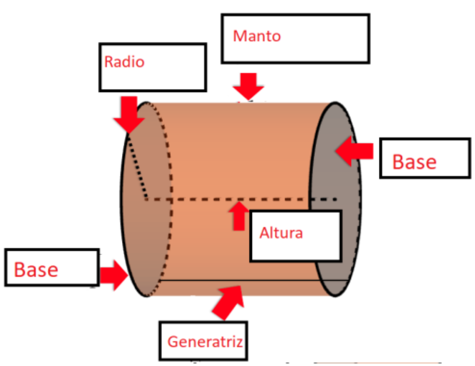
b)  Poliedro

c)  Cuerpo Redondo

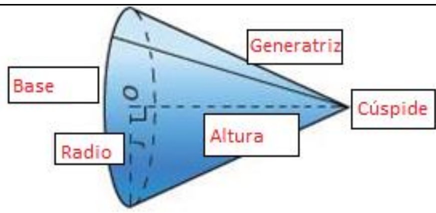
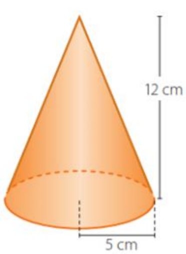
d)  Cuerpo Redondo

.

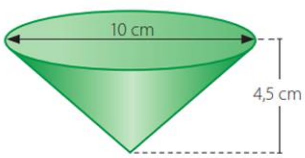
2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos (0.5 puntos cada una, 5.5 puntos en total):

a) 

puntos a 7,5 puntos en total entre las preguntas 1 y 2. Sin embargo, para ser consideradas como logradas, en el marco del Nivel 0, el estudiante debe haber obtenido al menos 4,5 puntos entre las dos preguntas, lo que corresponde al 60% de las respuestas correctas. El cambio realizado en la pregunta 1 consiste en la elección de cuerpos geométricos. De esta manera, el estudiante debe reconocer las características esenciales de poliedros y cuerpos redondos, pero en cuerpos poco conocidos. Los cuerpos en la pregunta 2 siguen siendo un cilindro y un cono, sin embargo, se rotaron. Esto le añade cierta dificultad a la hora de reconocer sus elementos, debido a que el estudiante se está más familiarizado a cierto tipo de representaciones de

b) 	figuras y cuerpos geométricos (Pittalis y Christou, 2010; Alves et al., 2017; Ng, Shi y Ting, 2020). Se espera que, el haber manipulado estos objetos geométricos de manera física, le permita identificar los elementos de ambos cuerpos geométricos
3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos en total: a) La altura de un cono es igual a 6 cm y el diámetro de su base es igual a 2 cm. En este tipo de ejercicios, basta con dividir el diámetro de la base por 2 para poder obtener el radio (1 cm). Luego se aplica fórmula: $V = \frac{1^2 \cdot 6 \cdot \pi}{3} = 2\pi\ cm^3$ b)  Este ejercicio tiene la particularidad de que la altura se presenta fuera del cono, lo que es menos usual en las representaciones de este cuerpo geométrico. Luego: $V = \frac{5^2 \cdot 12 \cdot \pi}{3} = 100\pi\ cm^3$	Es importante tener en cuenta que solo se consideran los ejercicios a y b de la pregunta 4, debido a que el nivel de dificultad de las preguntas posteriores se relaciona con el indicador de logro 5. Para que el estudiante alcance a ser clasificado en el Nivel 1, debe alcanzar al menos 8,4 puntos entre las preguntas indicadas, que corresponde al 60% de 14 puntos (8 por la pregunta 3 y 6 por los dos ejercicios de la pregunta 4).

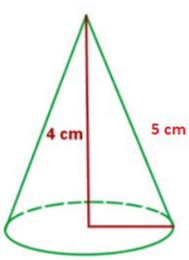
c)



Este caso es una combinación de los dos anteriores, por un lado, se debe obtener el radio, dividiendo el diámetro por 2; y por otro, reconocer la altura que se presenta fuera del cono. Luego:

$$V = \frac{5^2 \cdot 4{,}5 \cdot \pi}{3} = 37{,}5\pi\ cm^3$$

d)



En primer lugar, se debe encontrar el radio aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$4^2 + r^2 = 5^2$$

Por lo que el radio es 3 cm. Luego:

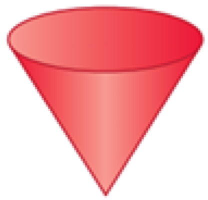
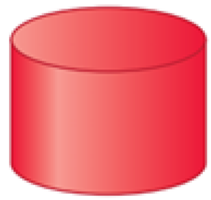
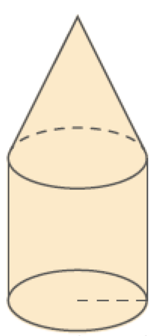
$$V = \frac{3^2 \cdot 4 \cdot \pi}{3} = 12\pi\ cm^3$$

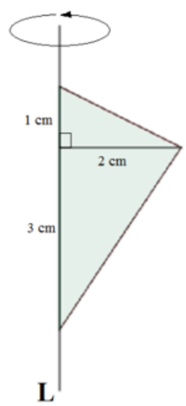
Este tipo de ejercicios son de aplicación directa, por lo que se enmarcan en el Nivel de Van Hiele 1. Además, representan mayor complejidad debido a que algunos de los datos no se dan directamente o no se presentan de la manera usual.

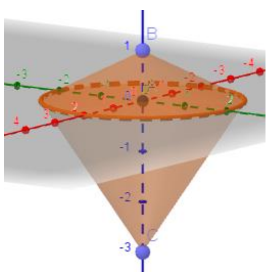
4. Calcule y responda (3 puntos cada uno, 12 en total)

a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 500 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono?

Simplemente se aplica la relación existente entre volúmenes de cono y cilindro con iguales dimensiones:

$V_{cono} = \frac{V_{cilindro}}{3} = \frac{500}{3} = 166{,}7\ cm^3\ aproximadamente$ b) Observe los siguientes cuerpos:   Si ambos cuerpos tienen iguales dimensiones y el volumen del cilindro es de 375 metros cúbicos, determine el volumen del cono. Este ejercicio es muy similar al del pre-test, salvo que su enunciado está redactado de manera distinta. Al usar la relación entre volúmenes de cono y cilindro se obtiene que: $V = \frac{375}{3} = 125\ m^3$	
c) Un cono altura 15 cm y radio 6 cm se coloca sobre un cilindro de igual radio y altura, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen del cuerpo compuesto?  Dado que las dimensiones son las mismas para el cilindro, se puede partir por determinar de su volumen y luego calcular su tercera parte para el volumen del cono. De esta manera: $V = 6^2 \cdot 15 \cdot \pi + \frac{6^2 \cdot 15 \cdot \pi}{3} = 540\pi + 180\pi = 720\pi\ cm^3$	Para que el estudiante sea catalogado en el nivel 2, debe al menos tener 3,6 puntos entre estas dos preguntas, siendo el 60% de 6 puntos. Se destaca la importancia de la habilidad espacial en este ejercicio, debido a que el estudiante debe poder visualizar el objeto geométrico, reconociendo sus elementos, a partir de una construcción mental. De esta manera, debe

<table>
<tr>
<td>
d) El triángulo de la figura se hace girar respecto al eje L en 360°. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se obtiene?


El cuerpo resultante está conformado por dos conos superpuestos de radio 2 cm, pero el superior tiene altura 1 cm y el inferior una altura de 3 cm, como se muestra en la siguiente figura:

Por lo tanto, se debe aplicar la fórmula de volumen del cono para cada uno de los conos y luego sumarlos:
$$V = \frac{2^2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + \frac{2^2 \cdot 3 \cdot \pi}{3} = \frac{16}{3}\pi\ cm^3$$
</td>
<td>aplicar lo aprendido sobre volumen del cono.</td>
</tr>
<tr>
<td>
5. Resuelva los siguientes problemas (4 puntos cada una, 8 puntos en total):
a) En un día caluroso, Joaquín compra un cono de helado de mora. Luego de un rato, se da cuenta que su helado se ha derretido y ha llenado el cono con $27\pi\ cm^3$ de líquido morado derretido. Si el radio de este cono es de 3 cm, determine su altura.
</td>
<td>Para que el estudiante sea clasificado en el Nivel 3, debe al menos haber logrado los 4,8 puntos entre los dos ejercicios, lo que corresponde al 60% de los 8 puntos en total.</td>
</tr>
</table>

Se tiene un cono con volumen $27\pi\ cm^3$, que corresponde a la capacidad mencionada en el problema. Además, se sabe que su radio es de 3 cm, por lo que se debe resolver la siguiente ecuación: $$V = \frac{r^2 \cdot h \cdot \pi}{3}$$ $$27\pi = \frac{3^2 \cdot h \cdot \pi}{3}$$ $$9\ cm = h$$ Por lo que la altura del cono de helado es de 9 centímetros. b) Un puesto de papas fritas en la feria las vende en conos de papel. El radio de los conos es 2 pulgadas y su altura es 6 pulgadas. Es difícil llenar conos delgados con las papas largas, así que quieren usar nuevos conos con el mismo volumen que los actuales, pero con un radio más grande de 4 pulgadas. ¿Cuál será la altura de estos nuevos conos? ¿Serán eficientes estos conos? ¿Por qué? En primer lugar, se debe calcular el volumen de los conos originales: $$V = \frac{2^2 \cdot 6 \cdot \pi}{3} = 8\pi\ pulgadas^3$$ Luego, se debe plantear una ecuación cuya incógnita sea la altura, pero conociendo el volumen (que debe mantenerse) y el radio: $$8\pi = \frac{4^2 \cdot h \cdot \pi}{3}$$ $$1.5\ cm = h$$ El estudiante deberá argumentar si son eficientes estos conos para vender las papas fritas o no, visualizando en cómo serían estos conos.	En ambos ejercicios se debe despejar una incógnita que no es el volumen en sí. La dificultad se encuentra en poder imaginarse y visualizar estos objetos geométricos, además de argumentar a partir de los datos obtenidos.

3.6.5.1. Análisis a Priori

Con respecto a la evaluación Post-test, se evaluarán los mismos indicadores de logro, por lo que las preguntas fueron diseñadas de manera que tuviesen la misma dificultad.

Dentro de los resultados esperados, al haber realizado la actividad con material concreto, además de las reflexiones posteriores que se pudieron dar durante la intervención, el estudiante debería haber presentado mejores resultados en cuanto a sus puntajes totales, en comparación con su desempeño en el Pre-test. Además, al diseñar la actividad considerando las fases del Modelo de Van Hiele, que se explicará a continuación, se proyectó que los estudiantes avanzaran de nivel entre Pre-test y Post-test o que al menos hayan logrado mejores desempeños, incluso manteniéndose en el nivel original.

Capítulo 4: Desarrollo de la investigación

4.1. Implementación intervención “Llenado de recipiente”

Como se puede observar en la figura 40, los estudiantes aplicaron varias estrategias para la construcción de cilindros y conos, solapando la cartulina o cortando círculos y armando ambos cuerpos. Esto da cuenta de cómo los estudiantes fueron analizando los elementos de ambos cuerpos. Un ejemplo concreto fue cuando un estudiante en el curso B indicó que el manto del cono correspondía a un sector circular, el cual obtuvo al cortar un círculo e ir doblándolo en torno al centro.

Figura 40

Construcción de cuerpos geométricos

Por otra parte, en cuanto a la motivación de los estudiantes con la actividad, se notó que lo que más generó entusiasmo fue el trabajo con las capacidades de ambos cuerpos, usando arroz. Los estudiantes conocían la fórmula del volumen del cono, pero al reconocer la relación con el volumen del cilindro a partir de una acción física pudieron dar justificación de lo aprendido teóricamente. Esto demuestra que la interacción con los cuerpos geométricos desarrolla razonamientos geométricos a partir de la inferencia (Shabalina, 2021).

La mayor dificultad observada durante esta intervención fue lograr que ambos cuerpos geométricos tuvieran las mismas dimensiones, en donde, los estudiantes debieron buscaron estrategias para resolver el problema, por ejemplo, midiendo las bases. Al finalizar el tiempo destinado para este momento de la actividad, todos los grupos lograron construir sus objetos geométricos.

Al realizar la discusión con respecto a los resultados de sus procesos experimentales y observar las diferencias entre los cuerpos que construyeron en cada grupo, la mayoría de los estudiantes concluyó que la relación entre sus volúmenes se mantiene, si es que ambos cuerpos tienen las mismas dimensiones, salvo pequeñas variaciones. Por otra parte, cuando se preguntó por la expresión matemática que modelara la relación entre los volúmenes, muchos estudiantes respondieron directamente la fórmula trabajada en clases anteriores, dado que se había trabajado algorítmicamente:

$$V_{cono} = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

Esto llevó a que el o la profesora guiara la conversación en un análisis para poder relacionar el numerador de la fórmula con el volumen del cilindro. Finalmente se llegó a la conclusión esperada: “El volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono”

Para finalizar el plenario se propuso el siguiente problema:

“En un cilindro de volumen 1 metro cúbico, se introduce un cono cuya base está inscrita en la base del cubo y su altura coincide con la del cilindro. Se pretende llenar de agua el espacio que queda libro entre el cono y el cubo, ¿qué volumen de agua se necesitará?”

En un principio, muchos estudiantes propusieron como respuesta que consistía en 1/3 metro cúbico, dada la conclusión obtenida. Sin embargo, al conversar con los demás compañeros se dieron cuenta que la pregunta apuntaba al espacio entre ambos cuerpos, por lo que lograron llegar a la respuesta correcta de 2/3 metros cúbicos.

4.1. Aspectos contextuales

Se entiende por investigación educativa como el proceso en donde un investigador se cuestiona un problema o situación del tipo educativo, lo analiza, formula propuestas y éstas son aplicadas en el aula (Muñoz y Garay, 2015). Sin embargo, en este proceso en donde el investigador plantea las propuestas y pretende aplicarlas, es muy posible que deba interactuar con la organización de los centros e instituciones educativas, en los procesos de convivencia, en la resolución de conflictos y en las relaciones que mantienen con los diversos agentes de la comunidad educativa (Muñoz y Garay, 2015), es por esto por lo que tiene un carácter social. Siguiendo esta misma línea, además de generar conocimiento, uno de los objetivos de la investigación educativa es mejorar la práctica docente, por lo que se necesitan profesores comprometidos con la propuesta y dispuestos a trabajar en equipo junto con el investigador (Muñoz y Garay, 2015).

Se trabajó con un equipo de tres profesores para la implementación de la propuesta de esta investigación. Cada uno hacía clases en un curso en específico (A, B y C). Para relatar los aspectos contextuales de cada profesor se les nombrará según el curso al que le hicieron clases, es decir, profesor A, profesora B y profesora C. Cabe destacar que la profesora B corresponde a la autora e investigadora del presente escrito.

Con respecto a los aspectos contextuales que se observaron durante el proceso completo, caben destacar al menos 3 cosas: el rendimiento de cada curso previo a la intervención, la presencia de actividades propias del establecimiento y los estilos de enseñanza adoptados por cada profesor.

En primer lugar, es importante destacar que desde 8vo básico, el curso C se destaca por su desempeño académico, tal como explicó la profesora C, desde marzo notó que habían internalizado los conocimientos previos de manera notable, comparado con lo que se notó en los cursos A y B en donde se tuvo que empezar con una Unidad 0 para recordar contenidos del año anterior. En esta misma línea, durante todo el año, la profesora C tuvo la oportunidad de avanzar más rápido con el contenido que los otros dos profesores, lo que le permitió innovar en sus estrategias de enseñanza e incluso adelantar contenido. En este sentido, para el análisis de datos es fundamental tener en cuenta la diferencia de rendimientos entre los cursos participantes.

Con respecto al contexto temporal (octubre 2023) de la implementación de la propuesta, el colegio se concentró en una actividad ABP (Aprendizaje Basada en Proyectos). Esto llevo a que se reagendara en varias ocasiones los tres partes de la intervención, incluso llevando a que se realizaran entre espacios de tiempo más prolongados. Dentro del diseño de la intervención completa, no se debían hacer clases entre los tres momentos, es decir, Pre-test, actividad con material concreto y Post-test. Sin embargo, debido a que cada uno requería una sesión de 90 minutos, en muchos casos se generaron clases intermedias de 45 minutos, en donde los docentes hicieron pequeñas retroalimentaciones del Pre-test o reflexiones en torno a la actividad con material concreto. Estas actividades podrían también afectar a las respuestas de los estudiantes en el Post-test. Tal como plantea Muñoz y Garay (2015), en la investigación educativa se debe interactuar directamente con la comunidad educativa, en particular en este caso se debieron tomar acuerdos entre los directivos y la investigadora, de manera de afectar lo menos posible a la investigación y, por otra parte, también se debió flexibilizar de acuerdo con los recursos de tiempo que se disponían en el momento de la aplicación de la intervención.

Por último, la colaboración entre docentes y la comunidad educativa es un proceso fundamental para el éxito de la investigación, dado que garantiza la comunicación y el trabajo en equipo y por lo tanto un desarrollo fluido de la propuesta (Muñoz y Garay, 2015). En general el diálogo que se mantenía entre los tres profesores se dio en torno a las planificaciones de cada unidad y compartir material. No obstante, cada profesor mantenía estilos muy distintos de enseñanza y tomaba decisiones de acuerdo con lo que cada uno estimaba conveniente dentro del contexto de su curso.

En este contexto, al presentar la propuesta de intervención en el aula, fue necesario establecer varios lineamientos con el objetivo de asegurar que cada clase se impartiera de manera consistente, siguiendo las etapas de la investigación, es decir, al menos una clase teórica previa al Pre-test en donde se trabajara solo con representaciones bidimensionales, tales como dibujos o proyecciones, y la aplicación directa de la fórmula del volumen del cono, la aplicación de la actividad de “llenado de recipiente” siguiendo las pautas establecidas en la misma guía que se les entregaba a los estudiantes y de acuerdo a las fases del Modelo de Van Hiele, y finalmente la aplicación del Post-test en la clase inmediatamente posterior a la intervención. Como plantean Muñoz y Garay (2015), en general cuando se trabaja con otros profesores en una investigación educativa, se presenta cierta resistencia a involucrarse en ellas, dado que demanda esfuerzos que no quieren asumir, las instituciones para las que trabajan no apoyan verdaderamente los procesos o tienen pocos conocimientos del marco teórico de la investigación. En este sentido, a pesar de buscar varias instancias para reunirse formalmente con los profesores para explicarles los procedimientos, fue difícil organizarse dado los recursos de tiempo y disposición. Se logró realizar una sola reunión informal en donde la investigadora les explicó a los profesores A y B, de manera muy resumida, cómo se debían llevar a cabo las 3 partes de la intervención, haciendo hincapié en no usar representaciones tridimensionales al principio o los pasos de la actividad de “llenado de recipiente”. A continuación, se describe cómo cada profesor trabajó con la intervención, junto con algunos diálogos que se presentaron.

- Los tres profesores comenzaron a trabajar la unidad a partir de los conocimientos previos que manejaban los estudiantes sobre cuerpos geométricos. En particular en los cursos A y B, no recordaban o indicaban que no habían trabajado nunca con volúmenes de prismas y cilindros, por lo que se decidió en conjunto comenzar trabajando con este último cuerpo, de manera de tener una base para poder proseguir con el cono. En los tres casos estas clases se trabajaron con representaciones en dos dimensiones y fórmulas directamente.
- La profesora C decidió llevar un modelo de cono construido con cartulina a la clase previa al Pre-test, aun cuando se había indicado que en esta clase no se trabajasen con representaciones de tres dimensiones. La profesora en este caso defendió su decisión en el sentido de que sería más fácil que los estudiantes identificaran sus elementos, sobre todo la diferencia entre altura y generatriz, sin embargo, esto implicaría que el curso C ya tendría herramientas de visualización (Nivel 0, Modelo de Van Hiele) antes del Pre-test.
- Por otra parte, el profesor A, utilizó el recurso de geogebra para mostrarles la construcción del cono como sólido de revolución. En este sentido, se les había indicado que solo usaran recursos como dibujos y representaciones en dos dimensiones, por lo que nuevamente se les posibilitó a los estudiantes desarrollar herramientas de visualización. El profesor A argumentó que los estudiantes de todas maneras no interactuaban con el objeto y por lo tanto entraba dentro de las indicaciones que se habían dado previamente.
- Se presentaron varias discrepancias en cuanto al formato y al tipo de preguntas que se diseñaron para las evaluaciones. En particular el profesor A cuestionó la presencia de las dos primeras preguntas, argumentando que no tenía sentido que los estudiantes supieran los nombres de los elementos de los dos cuerpos en estudio. Para conversar y dialogar sobre esta discrepancia, se pidió al jefe del departamento de matemática que actuara como mediador, el cual indicó que era de suma importancia que los estudiantes demostraran conocer los elementos de los cuerpos, debido a que es un primer acercamiento a su estudio y permite trabajar con el

lenguaje matemático correspondiente, lo que también se condice con el marco teórico en el cual se basó el diseño del instrumento.

- En lo que respecta a la implementación de la intervención, no se observaron diferencias significativas, excepto en el caso de la profesora C, quien optó por retomar el modelo que ella misma había desarrollado, brindando a los estudiantes una guía visual sobre la construcción adecuada de los cuerpos, lo que limitó a los estudiantes a desarrollar sus propias estrategias de construcción.
- Inicialmente, con el propósito de incrementar la motivación y disposición de los estudiantes frente a las evaluaciones, se les informó que estas contribuirían a una nota sumativa. No obstante, tras un consenso entre los tres profesores, se llegó a la conclusión de que esto podría resultar perjudicial para los estudiantes. Dada la persistencia de resultados considerablemente bajos, a pesar de una mejora en el Post-test, cada docente optó por incorporar estos resultados de manera de no perjudicar a los estudiantes, transformándolos en una evaluación acumulativa. Incluso el profesor A decidió realizar una tercera evaluación que se ajustara con su propia visión de aprendizaje de sus estudiantes.

Retomando lo planteado por Muñoz y Garay (2015), queda en evidencia que la investigación educativa, al ser un proceso principalmente social en donde se presenta una interacción entre muchos miembros de la comunidad educativa, puede presentar limitaciones, dado los caracteres únicos de los participantes en la propuesta.

4.2. Resultados Evaluaciones

Se trabajó con una muestra de 74 estudiantes entre 14 y 15 años de los tres primeros medios de un establecimiento municipal de la comuna de Las Condes. A pesar de que originalmente se trabajaría con 97 estudiantes, se tuvieron que descartar ciertos datos dado aspectos circunstanciales como fue que los estudiantes no participaran de las 3 instancias, presentaran problemas conductuales que se evidenciaran en dejar los instrumentos en blanco en un acto de rebeldía o no se firmaron los documentos de consentimiento y/o asentimiento.

El objetivo de la investigación consistió en evaluar los efectos en los desempeños de los estudiantes que tuvo la aplicación de una actividad con construcción y manipulación de material concreto sobre la relación entre volúmenes de cono y cilindro. Para esto se trabajó con dos evaluaciones, una antes de la intervención con material concreto (Pre-test) y otra después (Post-test). Ambas evaluaciones fueron construidas a partir de indicadores de logro, los cuales a su vez se basaron en el marco proporcionado por el MINEDUC y el Modelo de Van Hiele

A partir del diseño de estas evaluaciones por indicadores de logro, fue posible clasificar a los estudiantes en un nivel de Van Huele de acuerdo con los puntajes obtenidos en cada pregunta o conjunto de preguntas.

Para facilitar la lectura de los resultados, se proporciona la siguiente tabla (Tabla 9) a modo de resumen que incluye las preguntas de pre y post test asociadas a los indicadores de logro y, a su vez, vinculados con los niveles de Van Hiele. También se presenta el código utilizado en los softwares empleados para el análisis de datos, de acuerdo si corresponden a pre-test o post-test. Los puntajes se analizaron con respecto al nivel de Van Hiele asociado, por lo que en algunos casos se combinan o se separan preguntas.

Tabla 9

Relación entre nominaciones de datos

Código	Pregunta(s) de Pre y Post-test	Indicadores de Logro	Niveles de Van Hiele
P1_2_PRE P1_2_POST	Pregunta 1 (2 puntos en total)	I.L.1: Distingue diferencias entre poliedros y cuerpos redondos.	Nivel 0 Visualización
	Pregunta 2 (5,5 puntos en total)	I.L.2: Reconoce elementos de cilindro y cono	
P3_4_AB_PRE	Pregunta 3 (8 puntos)	I.L.3: Aplica fórmula del volumen del cono a partir de datos directos.	Nivel 1 Análisis

P3_4_AB_POST	Pregunta 4 (a y b) (6 puntos)	I.L.4: Calcula el volumen de un cono a partir de su relación con el volumen de un cilindro y datos directos.	
P4_CD_PRE P4_CD_POST	Pregunta 4 (c y d) (6 puntos)	I.L.5: Calcula volumen de cuerpos compuestos	Nivel 2 Deducciones Informales
P5_PRE P5_POST	Pregunta 5 (8 puntos)	I.L.6: Resuelve problemas de distintos contextos calculando volúmenes de cono y cilindro.	Nivel 3 Deducciones Formales

Además, se aplicó un criterio del 60% de exigencia tanto para los puntajes totales de las evaluaciones, como para cada conjunto de preguntas relacionadas con cada Nivel de Van Hiele, como se muestra en la tabla a continuación (Tabla 10). Esto se hizo con el fin de categorizarlos posteriormente.

Tabla 10 Puntajes de logro

Tabla 10

Puntajes de logro

	Puntaje mínimo de logro	Nivel de Van Hiele logrado
Puntaje total: 35,5 puntos	21, 3 puntos	
Preguntas 1 y 2: 7,5 puntos	Entre 0 a 7,5 puntos	Nivel 0
Preguntas 3 y 4 (a y b): 14 puntos	8,4 puntos	Nivel 1
Pregunta 4 (c y d): 6 puntos	3,6 puntos	Nivel 2
Pregunta 5: 8 puntos	4,8 puntos	Nivel 3

A continuación, se presentan los resultados de cada evaluación, presentando una comparación general, por indicadores de logro (preguntas) y niveles de Van Hiele alcanzados. Posteriormente se presentaran los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento de test de hipótesis t-student sobre el puntaje general y por niveles, de manera analizar la diferencia de desempeños incluso manteniéndose en un mismo nivel y completar un análisis cuantitativo completo.

4.2.1. Pre-test

4.2.1.1. Resultados generales

Tal como se puede observar en la figura 41, de los 74 estudiantes de la muestra, 22 lograron aprobar la evaluación Pre-test, es decir, alrededor de un 30%. El puntaje promedio fue de 13 puntos aproximadamente de 35,5, lo que evidencia el bajo desempeño de los estudiantes en la evaluación. Esto implica que, en su mayoría, los estudiantes no lograron desarrollar la prueba y no alcanzaron el porcentaje de logro suficiente para la aprobación.

Figura 41

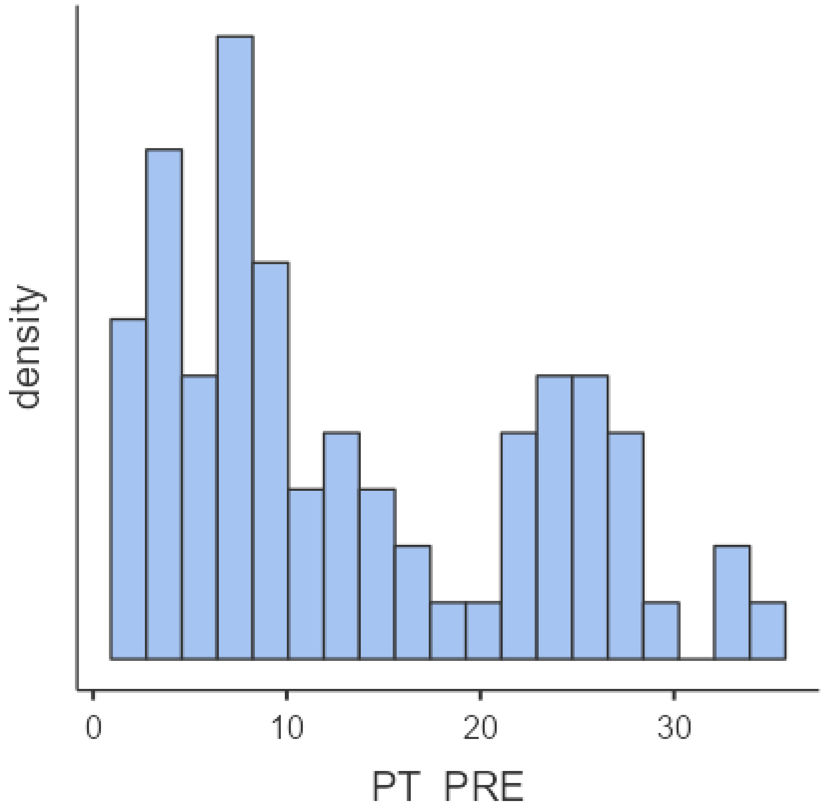
Resumen descriptivo resultados Pre-test

Estadísticos Descriptivos	Pre-Test
Puntaje Mínimo	1
Puntaje Máximo	34
Puntaje Promedio	13,39
Mediana Puntaje	10
Desviación Estándar Puntaje	9,41
Cantidad estudiantes aprobados	22
%Aprobación	30%

También se destaca que la desviación estándar de la evaluación de 9,41 puntos, lo que indica que se presentó una diferencia significativa entre los puntajes, lo que puede explicarse también, a partir de su rango (entre 1 y 34 puntos) y que puede evidenciarse a partir del siguiente gráfico (figura 42):

Figura 42

Histograma Puntajes Pre-test



Al observar el histograma presentado en la figura 42, se observa la gran dispersión de los puntajes de los estudiantes. Sin embargo, también se puede observar una concentración considerable entre los 1 y los 15 puntos, lo que también explica el bajo porcentaje de aprobación de la evaluación, que supera el primer cuartil, pero no alcanza el segundo.

4.2.1.2. Resultados por pregunta

En cuanto a los resultados por pregunta, se puede apreciar en la siguiente tabla (tabla 11) que las preguntas 1 y 2 obtuvieron el porcentaje de logro más alto, alcanzando el tercer cuartil (77%), lo que indica que previo a la intervención la mayoría de los estudiantes alcanzaron el Nivel 0 del Modelo de Van Hiele. No obstante, se observa una disminución considerable de porcentaje de logro en las preguntas 3 y 4 (a y b), descendiendo a un 36%, lo que indica que una menor cantidad alcanzan el Nivel 1 de Van Hiele. Luego el porcentaje vuelve a descender a un 12% en las preguntas 4 (c y d) y 5, evidenciando la cantidad reducida de estudiantes que alcanzaron a llegar a los niveles 2 y 3 del Modelo de Van Hiele.

Cabe destacar que en la muestra también se presentaron 8 estudiantes que no alcanzaron un puntaje mínimo de logro en ninguna de las preguntas o conjunto de ella, llegando a tener entre 1 y 2 puntos en total. Estos se añadieron al Nivel 0 del Nivel de Van Hiele, dado que el marco teórico indica que todo estudiante se ubica en tal nivel al inicio de su aprendizaje (Puig et al., 2021). Se debe tener en cuenta que estas clasificaciones se definieron a partir de un dato cuantitativo, cuando el Modelo de Van Hiele, por lo general se trabaja a nivel cualitativo, lo que implica que se deben hacer estos ajustes a la hora de estudiarlo desde este tipo de metodología.

Tabla 11

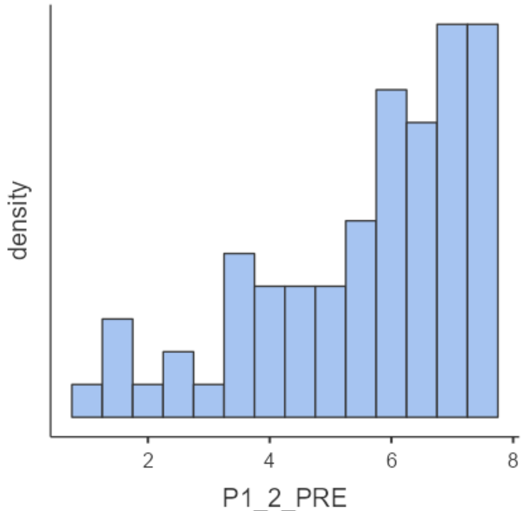
Estadísticas descriptivas por pregunta PRE-TEST

Preguntas	Ptje Mínimo	Ptje Máximo	Promedio puntaje	Desviación Estándar	Porcentaje de Logro
Preguntas 1 y 2	1	7,5	5,57	1,75	77%
Preguntas 3 y 4 (a y b)	0	14	5,35	5,06	36%
Preguntas 4 (c y d)	0	6	1,22	1,69	12%
Pregunta 5	0	8	1,24	2,36	12%

En cuanto a los resultados en detalle, como se puede apreciar en el histograma de la figura 43, se evidencia nuevamente la gran cantidad de estudiantes que presentaron puntajes considerablemente bajos en las preguntas 1 y 2, las cuales están relacionadas con el Nivel 0 del Modelo de Van Hiele (visualización), es decir, la capacidad de clasificar e identificar cuerpos geométricos. Sin embargo, también se puede observar que la mayoría de los estudiantes alcanzaron puntajes por sobre el mínimo de logro (4,5 puntos), lo que también se corrobora con el puntaje promedio de 5,6 puntos.

Figura 43

Histograma puntajes Preguntas 1 y 2 PRE-TEST

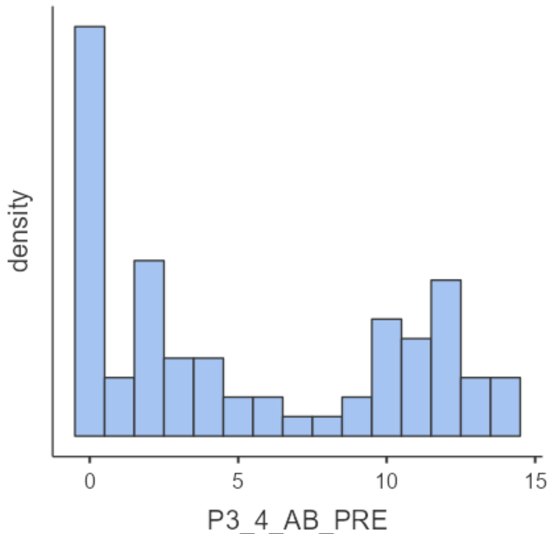


También al observar el histograma se observan notables diferencias de frecuencia entre los puntajes 1 y 6, lo que explica el valor de la desviación estándar de 1,75 puntos.

En relación con las preguntas 3 y 4 (a y b), asociadas al Nivel 1 del Modelo de Van Hiele (Análisis), en las cuales se esperaba que el estudiante aplicara directamente la fórmula del volumen del cono, se evidencia un bajo porcentaje de logro (36%). Además, se observa un puntaje promedio de 5,35 puntos, aproximadamente 3 puntos por debajo del puntaje mínimo. Esto indica que muchos estudiantes tienen dificultades para alcanzar este nivel de razonamiento. Este fenómeno también se refleja en la figura 43, donde se aprecia que la gran mayoría de los estudiantes obtuvieron entre 0 y 5 puntos en estas preguntas, concentrándose especialmente en torno a los 0 puntos.

Figura 44

Histograma puntajes Preguntas 3 y 4 (a y b)

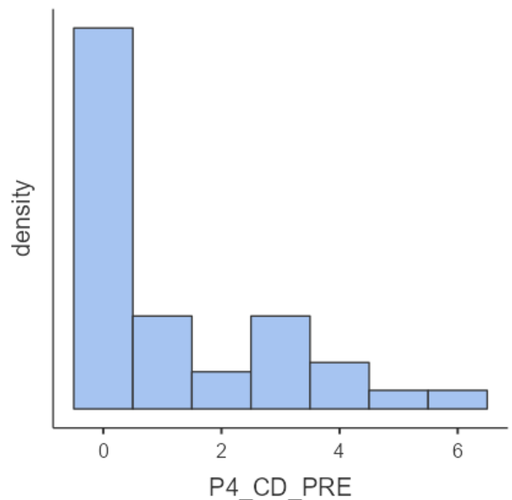


También, al observar el gráfico de la figura 44, se puede explicar el valor de la desviación estándar, dado que a pesar de que la mayor cantidad de estudiantes se concentran entre los 0 y 5 puntos, también se presentan estudiantes que alcanzan puntajes superiores, considerando que el rango de puntajes era entre 0 y 14 puntos.

Con respecto a la pregunta 4 (c y d), cuyo indicador de logro consistía en calcular volumen de cuerpos compuestos, se observa en la tabla 11 que solo el 12% de los estudiantes lograron el puntaje mínimo de logro, lo que indica que una menor cantidad de estudiantes alcanza el Nivel de razonamiento 2 del Modelo de Van Hiele (Deducciones Informales). Lo que también se evidencia con el promedio de puntajes de 1,22 puntos, considerablemente inferior a los 3,6 mínimos para alcanzar el indicador de logro. Al observar el histograma de la figura 45, también se puede observar la concentración de estudiantes que obtuvieron 0 puntos en las preguntas, lo que evidencia el desempeño general de la muestra.

Figura 45

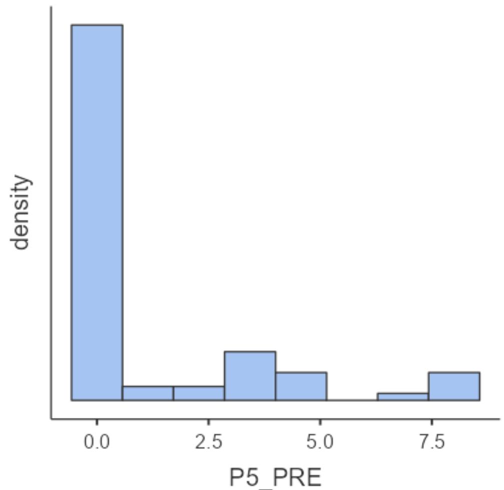
Histograma puntajes pregunta 4 (c y d)



Por último, se observa un fenómeno similar con respecto a los puntajes de la pregunta 5, en donde se debían aplicar los conocimientos sobre volúmenes de cono y cilindro para resolver problemas. Se presentó un promedio de 1,24 puntos, casi 4 puntos por debajo del puntaje mínimo de logro, lo que indica la baja cantidad de estudiantes que alcanzan el Nivel 3 de razonamiento del Modelo de Van Hiele (Deducciones Formales). En el histograma de la figura 46, queda en evidencia que la mayoría de los estudiantes obtuvieron 0 puntos en esta pregunta, siendo una cantidad considerablemente inferior a los que alcanzaron puntajes superiores, lo que también explica el valor de la desviación estándar de 2,36 puntos.

Figura 46

Histograma puntajes pregunta 5



4.2.1.3. Comparación por curso

A continuación, se presenta una comparación entre los cursos de la muestra, teniendo en consideración los aspectos contextuales explicados anteriormente.

Tabla 12

Descriptivas según curso PRE-TEST

Descriptivas

	CURSO	PT_PRE
N	A	23
	B	26
	C	25
Media	A	11.2
	B	11.8
	C	17.1
Mediana	A	9.00
	B	7.75
	C	21.5
Desviación estándar	A	8.87
	B	8.74
	C	9.78
Mínimo	A	1.00
	B	2.50
	C	1.50
Máximo	A	34.0
	B	32.5
	C	32.5

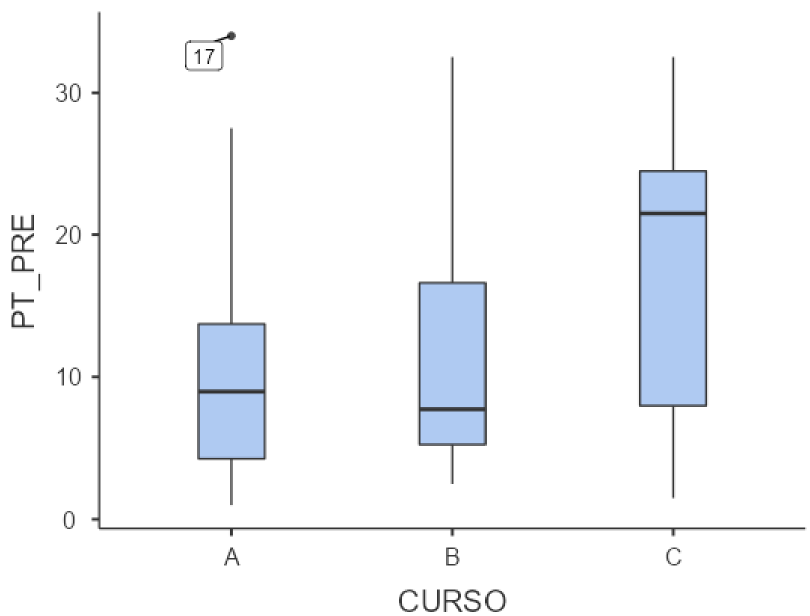
Como se puede observar en la tabla 12 de la muestra 23 estudiantes pertenecen al Primero Medio A (31%), 26 al Primero Medio B (35%) y 25 al Primero Medio C (33%), lo que indica que, con respecto al total de la muestra, los participantes se encuentran repartidos de manera relativamente equivalente.

Con respecto a la media del puntaje total, se puede apreciar que tanto los cursos A y B obtuvieron valores similares, a diferencia del curso C que alcanzo una media de 17 puntos, 6 puntos por sobre los otros dos cursos, lo que corrobora que este curso se encuentra más avanzado que los otros dos. Además, también presenta un valor de desviación estándar superior, 1 punto mayor que los cursos A y B. Aun así, ninguno de los cursos obtuvo una media igual o superior al puntaje mínimo definido para aprobar la evaluación, lo que evidencia el resultado general obtenido.

En cuanto la distribución de los puntajes en cada curso, que se puede observar en la figura 47, que el 50% central de puntajes del curso C obtuvo puntajes más altos que los cursos A y B, lo que explica también los valores de los estadísticos descriptivos mencionados anteriormente. En esta misma línea, los cursos B y C alcanzan puntajes máximos, pero presentan mayor asimetría en el cajón: en el curso B la mayoría de los estudiantes se concentran en puntajes menores a 10, mientras que en el curso C, se presenta mayor dispersión, además de una concentración mayor en puntajes altos. En cuanto al curso A, se observa que alcanzaron puntajes más altos, aunque la distribución de esos puntajes es más simétrica que en el caso de los otros dos cursos.

Figura 47

Diagrama de caja y bigotes puntajes obtenidos en Pre-test por curso



En relación con el rendimiento porcentual (tabla 13), al considerar el número de estudiantes por curso, se destaca que el curso C exhibió un desempeño superior en general. Este curso logró que más del 50% de los estudiantes alcanzaran la puntuación mínima requerida para aprobar la evaluación, en marcado contraste con los cursos A y B, los cuales no lograron superar el 20%. Al analizar detalladamente cada pregunta, la tendencia persiste; la mayoría de los estudiantes del curso C obtuvieron la puntuación mínima en las preguntas 1 y 2, aunque la disparidad con respecto a los otros dos cursos es más reducida. Al comparar los cursos A y B, se aprecian porcentajes cercanos, aunque el curso A supera al B en un 5%, indicando que una proporción comparable de estudiantes logró la puntuación mínima en ambos cursos. Esto implica que, en los tres cursos la mayoría de los estudiantes alcanzan el Nivel de Razonamiento 0 de Visualización del Modelo de Van Hiele, demostrando que son capaces de reconocer figuras y sus elementos (Puig, 2021). En la misma línea, también es notable que prácticamente todos los estudiantes del curso C logran alcanzar este nivel de razonamiento.

Con respecto las preguntas 3 y 4 (a y b), es evidente que en los tres cursos se registró un menor porcentaje de estudiantes que alcanzaron el puntaje mínimo necesario para cumplir con el indicador. Cabe destacar nuevamente que en el curso C, más de la mitad de los estudiantes lograron superar este puntaje, distando considerablemente de los cursos A y B. Lo que implica que en este curso se presenta una cantidad considerable de estudiantes que alcanzan el Nivel 1 de Análisis, donde ya son capaces de establecer relaciones, identificando elementos y aplicar propiedades (Puig, 2021). En contraste, en los cursos A y B, se observa una notable disminución en la cantidad de estudiantes que alcanzan el puntaje mínimo del indicador.

En cuanto a la pregunta 4 (c y d), la mayor diferencia se encuentra en el curso B, en donde solo el 4% de los estudiantes alcanzaron el puntaje mínimo del indicador lo que indica que muy pocos estudiantes alcanzan el Nivel 2 del Modelo de Van Hiele de Deducciones Informales, en donde deberían poder aplicar relaciones entre propiedades (Puig, 2021). Le sigue un 13% de estudiantes del curso A y 20% del curso B, que también corroboran que una menor cantidad de estudiantes alcanzan el Nivel 2.

Finalmente, con relación a la pregunta 5, se vuelve a destacar que el curso C exhibe un mayor número de estudiantes que logran el puntaje mínimo requerido para cumplir con el indicador, mostrando una considerable diferencia con los cursos A y B.

Tabla 13

Comparación porcentaje de logro por pregunta y curso

	P1_P2_PRE	P3_4_AB_ PRE	P4_CD_PRE	P_5_PRE	PT_PRE
A	74%	22%	13%	9%	17%
B	69%	31%	4%	8%	19%
C	88%	56%	20%	20%	52%
ABC	77%	36%	12%	12%	30%

4.2.1.4. Niveles de Van Hiele

Tabla 14

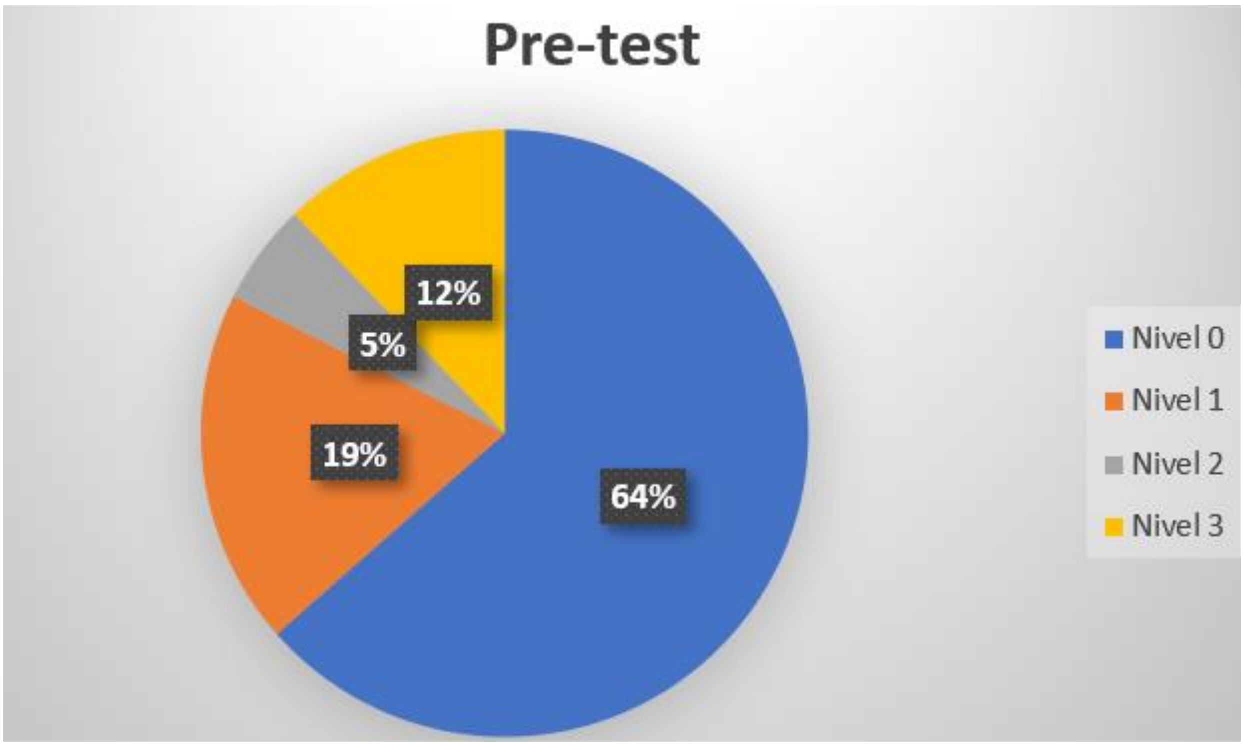
Niveles de Van Hiele Pre-test

Comparación general		
Niveles de Van Hiele	Pre-test	Porcentaje
Nivel 0	47	64%
Nivel 1	14	19%
Nivel 2	4	5%
Nivel 3	9	12%
Total	74	

Tal como se mencionó anteriormente, alrededor de un 20% de los estudiantes no lograron el puntaje mínimo asignado para las preguntas 1 y 2, por lo que, a pesar de no lograr los indicadores, por defecto quedaron clasificados en el Nivel 0. Esto implica, tal como se muestra en la tabla 14, que el 64% de los estudiantes de la muestra alcanzan un Nivel 0 de razonamiento, lo que implica que al menos la mitad de los estudiantes de la muestran tienen herramientas de visualización y comparación de cuerpos geométricos. Luego, el 19% de la muestra alcanza el Nivel 1 de Análisis, lo que implica que son capaces de realizar razonamientos simples aplicando las fórmulas de volumen de cono y cilindro. Por su parte, solo un 5% alcanza el Nivel 2 de Deducciones Informales, lo que implica que muy pocos estudiantes tienen habilidades de establecer relaciones y aplicar propiedades en cuanto al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos. Contradictorio a lo que se podría pensar, el 12% de los estudiantes alcanzaron el Nivel 3, lo que indica que existe mayor cantidad de estudiantes que tiene habilidades de deducciones formales, de los que no. Esta proporción se puede observar en la figura 48, donde queda en evidencia que los estudiantes clasificados en el nivel 0 superan el segundo cuartil, mientras que el 50% restante se reparte en los demás niveles.

Figura 48

Niveles de Van Hiele

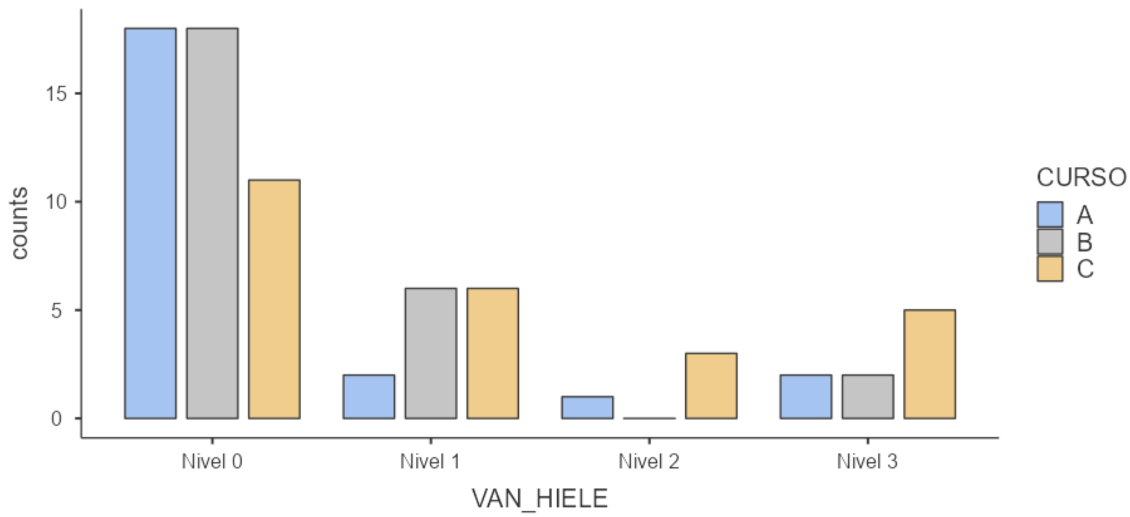


En cuanto al detalle por curso (figura 49), esta tendencia se mantiene. Sin embargo, se vuelven a observar las diferencias que se describieron cuando se analizaron los puntajes por pregunta. Es decir, en el caso del curso C se presenta mayor cantidad de estudiantes que alcanzan los niveles 2 y 3, mientras que en el caso de los cursos A y B, la mayor parte de los estudiantes se concentran en el nivel 0.

Figura 49

Niveles de Van Hiele por curso

VAN_HIELE



Con respecto a la diferencia por género, se consideraron 3 categorías: Femenino, Masculino y Otro. Como se puede observar en la tabla 15 también la mayoría de los estudiantes se categorizaron en el Nivel 0 con una diferencia porcentual despreciable entre Masculino y Femenino. Sin embargo, se presenta una mayor diferencia en la categoría del Nivel 1 y el Nivel 3, observándose que mayor proporción de estudiantes mujeres alcanzan el Nivel 1, pero mayor proporción de estudiantes varones alcanzan el Nivel 3. En cuanto a la clasificación “Otro”, al ser dos estudiantes se puede observar que uno de ellos alcanzó el Nivel 0, mientras que el otro alcanzó el Nivel 1.

Tabla 15

Niveles de Van hiele por género

Por género	Femenino		Masculino		Otro	
Niveles de Van Hiele	Pre-test	Porcentaje	Pre-test	Porcentaje	Pre-test	Porcentaje
No alcanza nivel 0	0	0%	0	0%	0	50%
Nivel 0	21	60%	25	68%	1	0%
Nivel 1	9	26%	4	11%	1	50%
Nivel 2	2	6%	2	5%	0	0%
Nivel 3	3	9%	6	16%	0	0%
Total	35		37			

4.2.2. Post-test

4.2.2.1. Resultados Generales

Tabla 16

Resumen descriptivo resultados Post-test

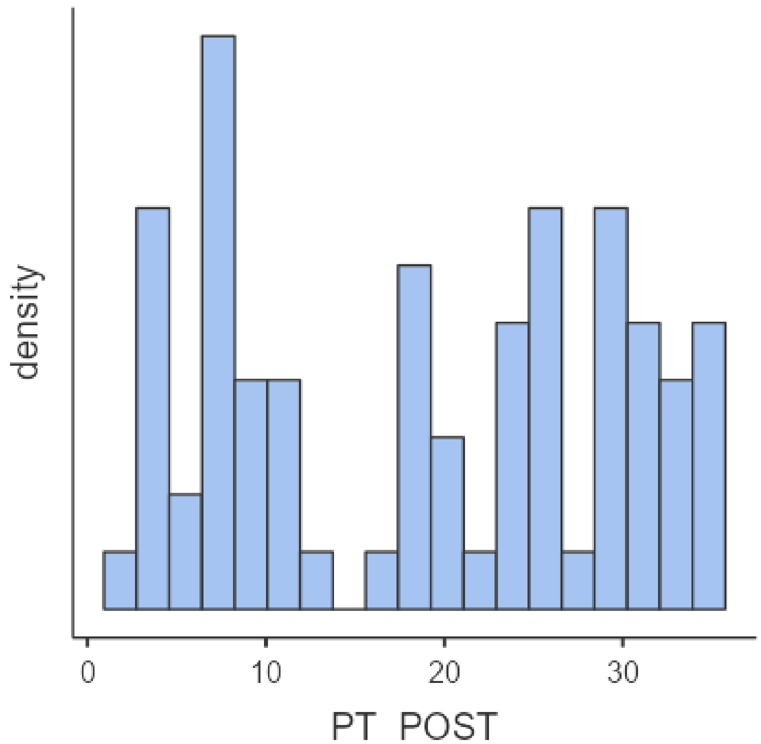
Estadísticos Descriptivos	Post-test
Puntaje Mínimo	2,50
Puntaje Máximo	35,50
Puntaje Promedio	19,01
Mediana Puntaje	19,75
Desviación Estándar Puntaje	10,76
Cantidad estudiantes aprobados	35,00
%Aprobación	47%

Como se puede observar en la tabla 16, la cantidad de estudiantes aprobados aumentó a 35, llegando al 47% de la muestra total. También se observa que se alcanzó el puntaje máximo y que la media subió a 19 puntos. La desviación estándar tuvo un cambio poco significativo entre las dos pruebas.

Figura 50

Histograma puntajes Post-test

PT_POST



La dispersión también se puede observar desde el histograma presentado en la figura 50. Por otra parte, a pesar de que hay una gran cantidad de estudiantes con puntajes bajo 10 puntos, se observa que también se presenta una mayor cantidad de estudiantes que superaron los 20 puntos, lo que corrobora el aumento de los estudiantes aprobados.

4.2.2.2. Resultados por pregunta

Con respecto a los resultados en detalle, se puede apreciar en la tabla 17, que el porcentaje de logro alcanzado por los estudiantes en las preguntas 1 y 2 aumentó al 91%, manteniéndose como los indicadores mejores logrados. Por su parte, en cuanto a las preguntas 3 y 4 (a y b), más de la mitad de los estudiantes alcanzaron el puntaje mínimo de logro. Con respecto a la pregunta 4 (c y d), el 36% de los estudiantes logró el indicador, mientras que el 26% alcanzó el puntaje mínimo de logro para la pregunta 5.

Tabla 17

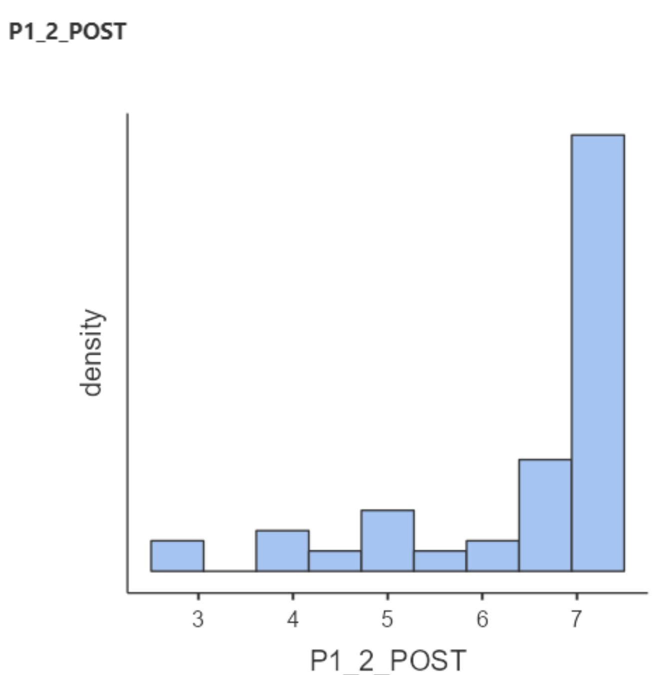
Descriptivas por pregunta

Preguntas	Ptje Mínimo	Ptje Máximo	Promedio puntaje	Desviación Estándar	Porcentaje de Logro
Preguntas 1 y 2	2,5	7,5	6,50	1,31	91%
Preguntas 3 y 4 (a y b)	0	14	7,61	5,55	53%
Preguntas 4 (c y d)	0	6	2,64	2,58	36%
Pregunta 5	0	8	2,27	2,82	26%

En relación con las preguntas 1 y 2, se puede confirmar mediante el histograma presentado en la Figura 51 que la mayoría de los estudiantes obtuvo el puntaje máximo de 7,5 puntos. En contraste, una cantidad mínima (9%) de estudiantes no logró superar los 5 puntos. En cuanto al puntaje promedio, se mantiene superior al puntaje mínimo de logro lo que también corrobora lo mencionado anteriormente. La presencia de estos puntajes inferiores con respecto a la gran cantidad que obtuvo el puntaje máximo explica el valor de la desviación estándar.

Figura 51

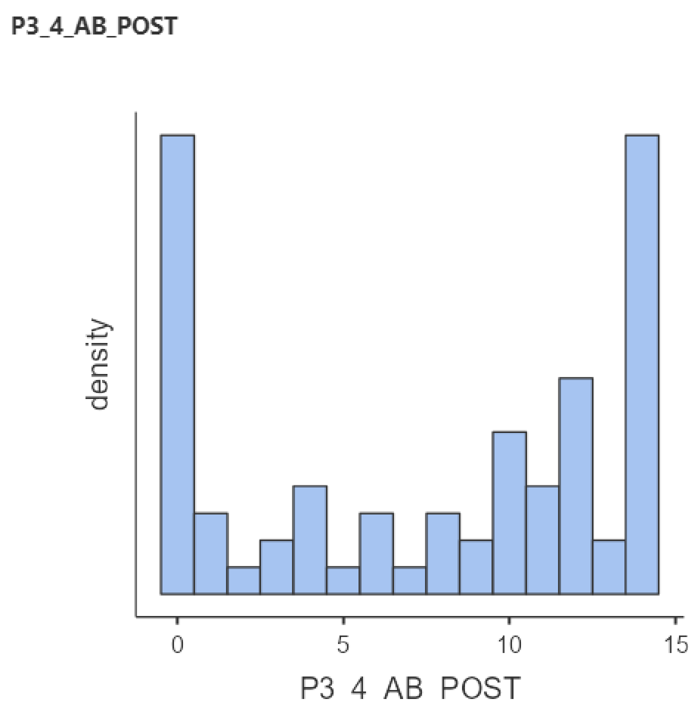
Histograma puntajes Preguntas 1 y 2 POST-TEST



En cuanto a las preguntas 3 y 4 (a y b), se puede observar del histograma de puntajes de la figura 52, que existe una cantidad similar de estudiantes que alcanzaron el puntaje máximo, como también estudiantes que no lograron desarrollar las preguntas (0 puntos), lo que explica el valor de la desviación estándar y su promedio (7,61 puntos), teniendo en consideración que el puntaje máximo era de 14 puntos. Dado que esta evaluación tuvo lugar después de la intervención con material concreto, es fundamental examinar las razones que expliquen los resultados observados. Esto implica analizar no solo la presencia de estudiantes que lograron alcanzar el nivel de razonamiento 1, sino también el por qué se presenta también una gran cantidad que no lo alcanzan.

Figura 52

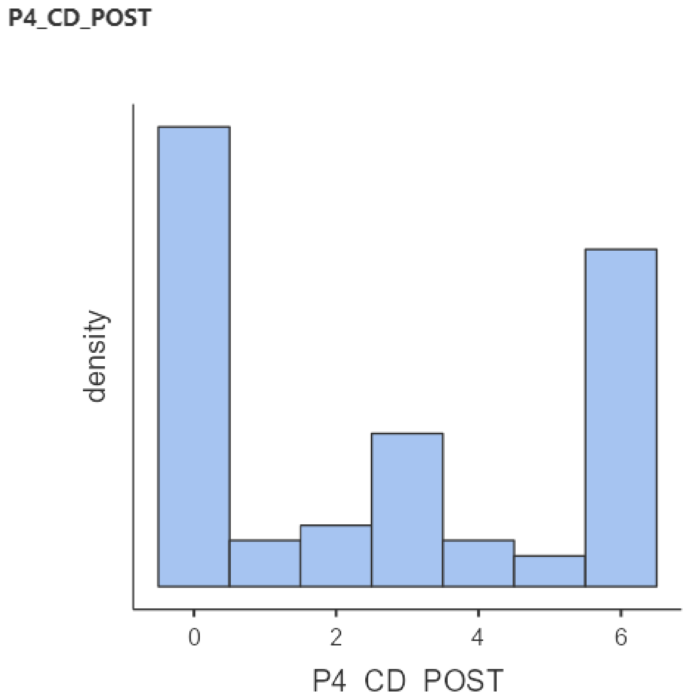
Histograma puntajes Pregunta 3 y 4 (a y b)



Con respecto a la pregunta 4 (c y d), se presentan resultados similares (figura 53), es decir, concentraciones similares de estudiantes que obtuvieron el puntaje mínimo y en el puntaje máximo, lo que también explica los valores de la desviación estándar y la media. Sin embargo, en este caso, se puede observar que la mayor parte de los estudiantes no alcanzaron el puntaje mínimo de logro del indicador (3,6 puntos).

Figura 53

Histograma puntajes pregunta 4 (c y d)

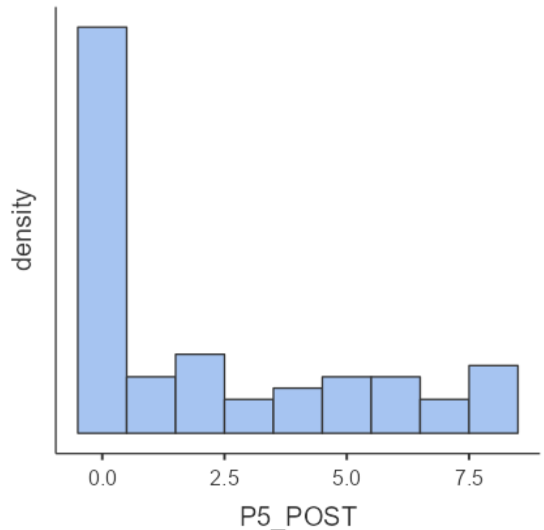


Finalmente, en la pregunta 5 (figura 54) se evidencia que la mayoría de los estudiantes no logró desarrollar correctamente los problemas propuestos. Sin embargo, también se presenta una distribución más homogénea entre los puntajes superiores a 0, presentando estudiantes que alcanzan el puntaje máximo de 8 puntos y una cantidad mayor que en el pre-test que logra el puntaje mínimo de logro (4,8 puntos).

Figura 54

Histograma puntajes Pregunta 5

P5_POST



4.2.2.3. Comparación por cursos

Como se explicó en los resultados del Pre-test, es de suma importancia realizar también una comparación entre los cursos, teniendo en consideración los aspectos contextuales mencionados.

Tabla 18

Descriptivas por curso

Descriptivas

	CURSO (2)	PT_POST
N	A	23
	B	26
	C	25
Media	A	18.5
	B	17.2
	C	21.4
Mediana	A	18.5
	B	18.5
	C	25.5
Desviación estándar	A	11.9
	B	9.06
	C	11.3
Mínimo	A	2.50
	B	4.00
	C	3.00
Máximo	A	35.5
	B	33.5
	C	35.5

Como se observa en la tabla 18, con respecto a la media de puntajes, se observa que tanto los cursos A y B obtuvieron valores similares pero inferiores (18,5 y 17,2 respectivamente) al puntaje mínimo para aprobar la evaluación (21,3 puntos) mientras que el curso C alcanzó los 21,4 puntos. Por su parte la mediana indica una distribución similar entre los puntajes obtenidos en los cursos A y B, mientras que se presenta una desviación positiva en el caso del curso C. Los valores de las desviaciones estándar están relativamente cerca, lo que indica que la dispersión de los datos fue similar entre los tres cursos. En ninguno de los tres cursos se presentaron estudiantes con el puntaje mínimo de 0 puntos, mientras que solo el curso B no alcanzó el puntaje máximo.

Con respecto a la distribución de los datos que se puede observar en la figura 55, se puede corroborar lo indicado sobre los valores de la mediana y la desviación estándar. Se observa que los puntajes del curso C superan al segundo cuartil, evidenciando mejores resultados que en los cursos A y B, mientras que presenta mayor dispersión en cuanto al 50% inferior. Por su parte, el curso A presenta un diagrama prácticamente simétrico, lo que indica una distribución equitativa de los puntajes. También se observa que el curso B presenta una caja más pequeña, lo que indica que el 50% de sus puntajes centrales se concentra entre valores más cercanos, mientras que en los cursos A y C el rango es mayor.

Figura 55

Diagrama de caja y bigotes obtenidos en Post-test por curso

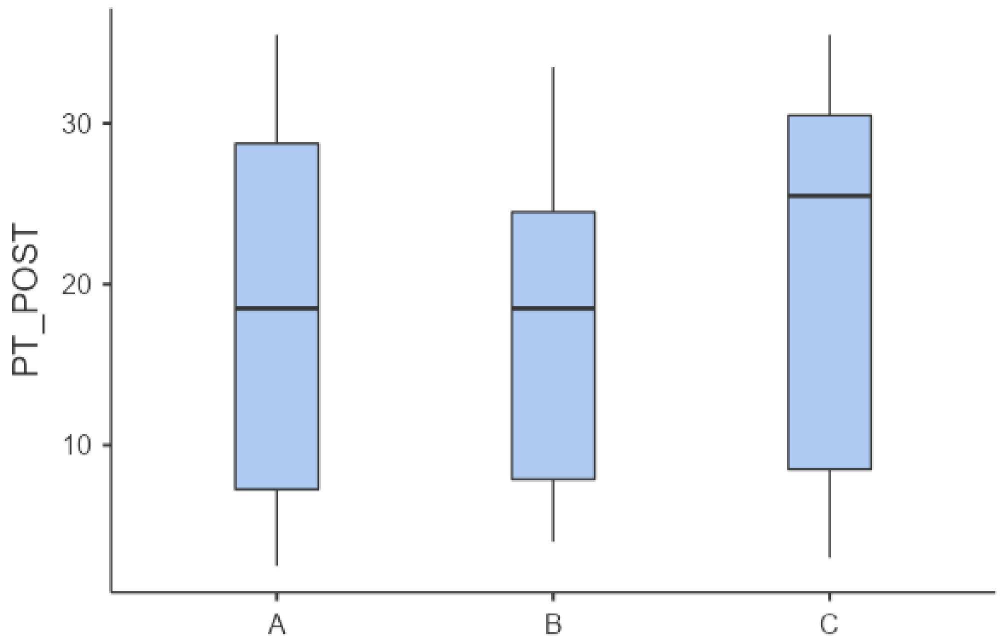


Tabla 19

Comparación porcentaje de logro por pregunta y curso

	P1_P2_POST	P3_4_AB_POST	P4_CD_POST	P_5_POST	PT_POST
A	87%	43%	43%	30%	48%
B	96%	58%	27%	8%	35%
C	88%	56%	40%	40%	60%
ABC	91%	53%	36%	26%	47%

En cuanto al rendimiento por pregunta, que se puede apreciar en la tabla 19, se vuelve a observar que el curso C presenta un rendimiento considerablemente superior a los cursos A y B, con un 60% de estudiantes que alcanzaron el puntaje mínimo de aprobación de la evaluación, mientras que el 48% de los estudiantes del curso A y el 35% de los estudiantes del curso B lograron tales puntajes.

Con respecto a las preguntas 1 y 2, se observa que en el curso B prácticamente en su gran mayoría alcanzaron el puntaje mínimo de logro, seguidos muy de cerca por los otros dos cursos, lo que corrobora que, en los tres cursos, la mayor parte de los estudiantes alcanza al menos el Nivel 0 del Modelo de Van Hiele.

Por su parte, más de la mitad de los estudiantes de los cursos B y C alcanzaron el puntaje mínimo de logro de las preguntas 3 y 4 (a y b), 56% y 58% respectivamente, mientras que el curso A alcanza un 43% lo que representa una diferencia poco significativa.

Con relación a las preguntas 4 (c y d), se destaca un rendimiento equiparable entre los cursos A y C, mientras que en el curso B apenas supera el 25% de estudiantes aprobados en dicho indicador. Esta disparidad se agudiza al examinar los resultados de la pregunta 5, donde el curso C exhibe la mayor proporción de estudiantes que alcanzan el puntaje mínimo (40%), seguido por el curso A con un 30%. No obstante, el curso B presenta únicamente un 8% de estudiantes que logran este puntaje.

4.2.2.4. Niveles de Van Hiele

Tabla 20

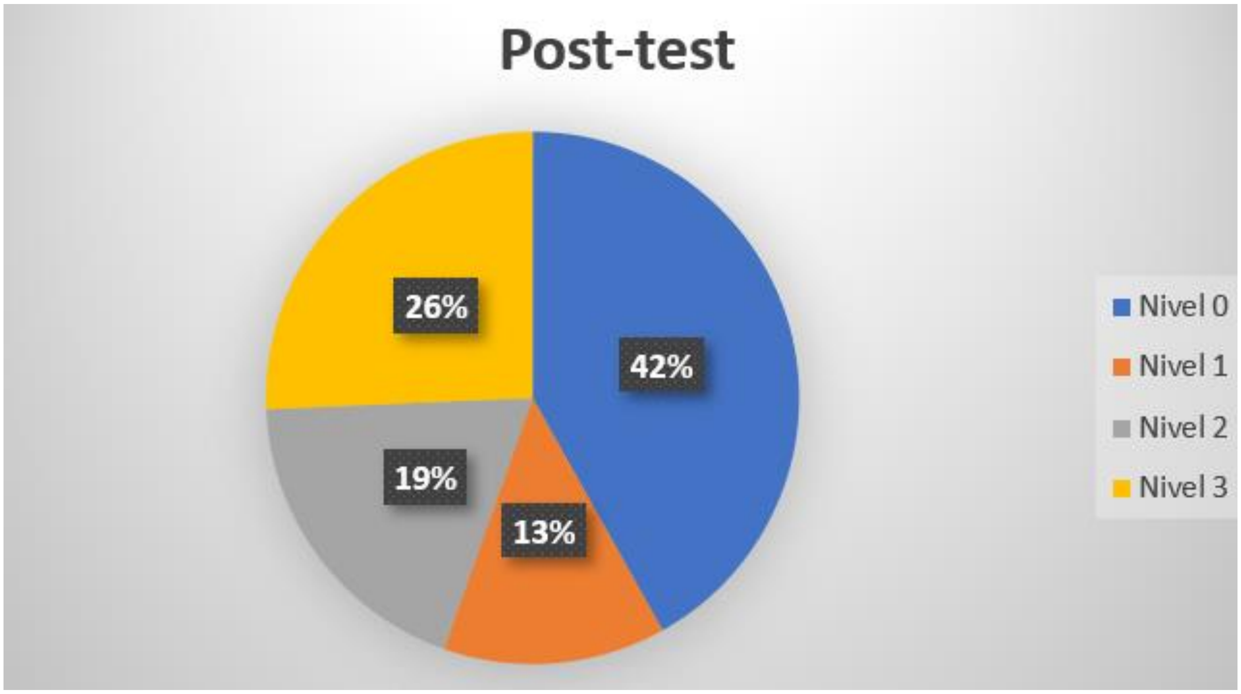
Niveles de Van Hiele Pos-test

Comparación general		
Niveles de Van Hiele	Post-test	Porcentaje
Nivel 0	31	42%
Nivel 1	10	14%
Nivel 2	14	19%
Nivel 3	19	26%
Total	74	

Como se puede observar en la tabla 20, la proporción de estudiantes en el nivel 0 disminuyó al 42%, de manera que aumentaron la cantidad de estudiantes que alcanzaron niveles superiores: 14% el Nivel 1, 19% el Nivel 2 y 26% el Nivel 3, como también se puede apreciar en la figura 56.

Figura 56

Niveles de Van Hiele Post-test

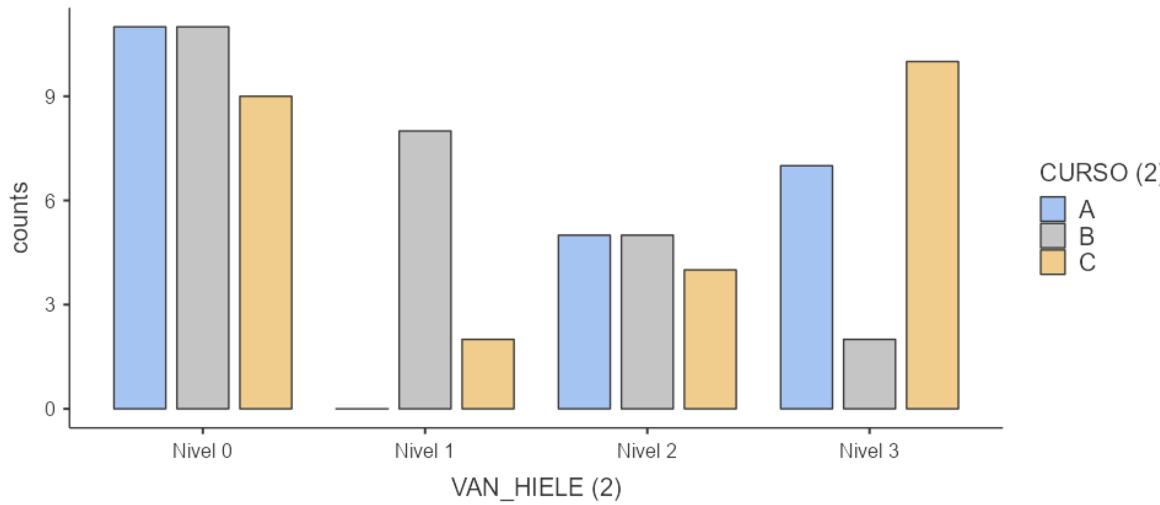


En cuanto al detalle por curso (figura 57), la tendencia se mantiene. Sin embargo, se puede observar que en el caso del curso B, presentan menos estudiantes en el Nivel 3 con respecto a los otros dos cursos. Por otra parte, se puede observar que una cantidad similar de estudiantes en los tres cursos alcanzó el Nivel 2.

Figura 57

Niveles de Van Hiele por curso Post-test

VAN_HIELE (2)



Por último, con respecto a las diferencias por género, se puede observar en la tabla 21 que, al igual que en las descripciones anteriores, la mayor cantidad de estudiantes se concentraron en el Nivel 0, aunque con una diferencia de 10% entre varones y mujeres. En cuanto al Nivel 1 y 3, se observa una diferencia despreciable de 5% entre varones y mujeres. Mientras que en el Nivel 2 se observa que una mayor proporción de mujeres lo alcanzaron en comparación con los varones. Finalmente, uno de los estudiantes dentro de la categoría “otro” se mantuvo en el nivel 0, mientras que el otro subió al nivel 3.

Tabla 21

Niveles de Van Hiele por género

Por género	Femenino		Masculino		Otro	
Niveles de Van Hiele	Post-test	Porcentaje	Post-test	Porcentaje	Post-test	Porcentaje
Nivel 0	12	34%	18	49%	1	50%
Nivel 1	4	11%	6	16%	0	
Nivel 2	11	31%	3	8%	0	
Nivel 3	8	23%	10	27%	1	50%
Total	35		37			

4.2.3. Comparación Pre-test y Post-test

4.2.3.1. General

Tabla 22

Comparación resultados generales

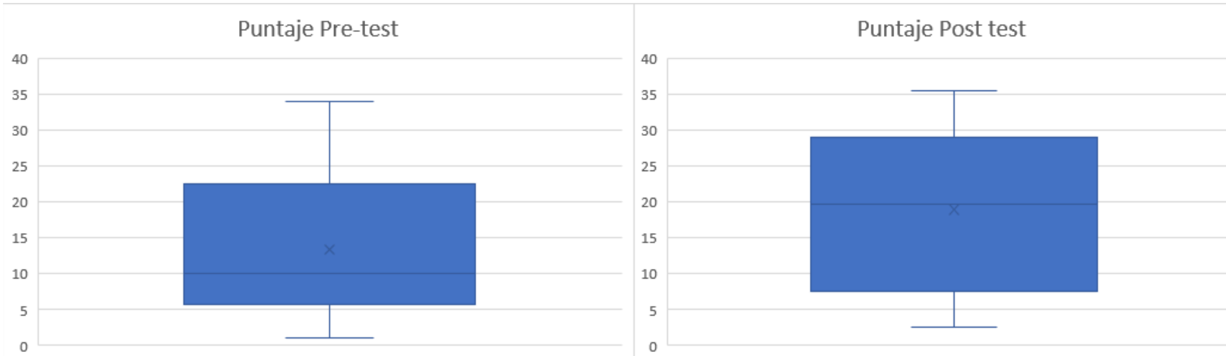
Estadísticos Descriptivos	Pre-Test	Post-test
Puntaje Mínimo	1	2,50
Puntaje Máximo	34	35,50
Puntaje Promedio	13,39	19,01
Mediana Puntaje	10	19,75
Desviación Estándar Puntaje	9,41	10,76
Cantidad estudiantes aprobados	22	35,00
%Aprobación	30%	47%

En aspectos generales, a partir de los datos que se presentan en la tabla 22, se observa un incremento en los desempeños en el Post-test con respecto al Pre-test. En cuanto al puntaje promedio este aumentó en 6 puntos, con una desviación estándar similar, pero alcanzando el puntaje ideal de 35,5 puntos. El porcentaje de aprobación también aumentó de un 30% a un 47%. Aunque sigue siendo un porcentaje de aprobación bajo, se puede observar un avance en cuanto a los desempeños.

Al observar el gráfico de caja y bigotes (figura 58), se puede apreciar que el 50% central de datos se movilizó positivamente, y también su rango aumentó, lo que también explica el ligero aumento de la desviación estándar. También se puede observar que la distribución de los puntajes se muestra más simétrico con respecto a la mediana, lo que se puede apreciar en las longitudes de los bigotes que indican la dispersión del primer y el cuarto cuartil.

Figura 58

Comparación con diagrama de caja y bigotes



4.2.3.2. Tránsito en Niveles de Van Hiele

Tabla 23

Comparación porcentaje de logro por pregunta

Preguntas	Porcentaje de Logro	Porcentaje de Logro	PRE-TEST
Preguntas 1 y 2	77%	91%	POST-TEST
Preguntas 3 y 4 (a y b)	36%	53%	
Preguntas 4 (c y d)	12%	36%	
Pregunta 5	12%	26%	

Al observar la tabla 23, se puede apreciar que se presentó un aumento considerable en la cantidad de estudiantes que lograron responder satisfactoriamente las 5 preguntas de la evaluación. En este sentido la diferencia más notoria se puede evidenciar en los desempeños en las preguntas 4(c y d) y 5 en donde se triplicó la proporción de estudiantes que lograron el puntaje mínimo respectivo.

En cuanto a los niveles de Van Hiele alcanzados, 35 estudiantes (47%) lograron subir de nivel, mientras que el otro 53% se mantuvo. Como se puede observar en la tabla 24 y la figura 59, se corrobora que una mayor proporción de estudiantes alcanzaron los niveles 1 y 2.

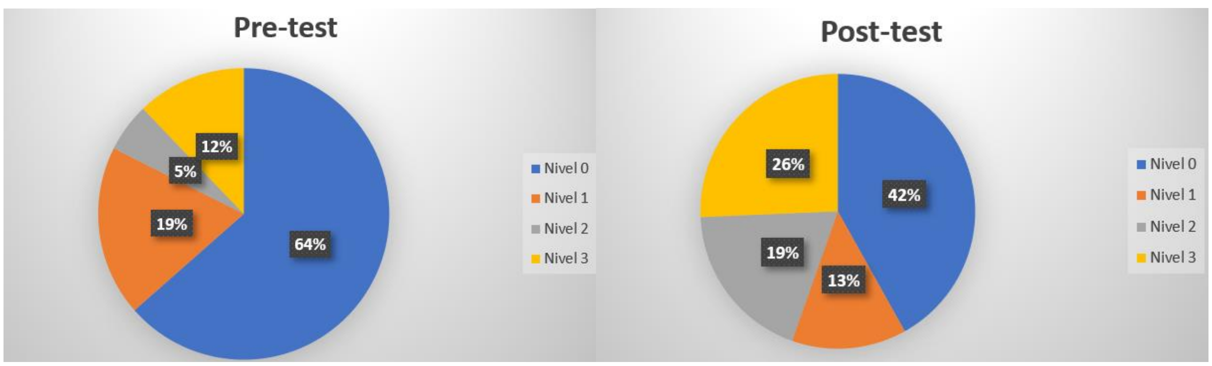
Tabla 24

Niveles de Van Hiele Pre y Post Test

Comparación general				
Niveles de Van Hiele	Pre-test	Porcentaje	Post-test	Porcentaje
Nivel 0	47	64%	31	42%
Nivel 1	14	19%	10	14%
Nivel 2	4	5%	14	19%
Nivel 3	9	12%	19	26%
Total	74		74	

Figura 59

Gráfico Niveles de Van Hiele Pre y Post Test



4.2.3.3. Prueba T-student para muestras pareadas

Para corroborar que efectivamente hubo un avance en los razonamientos geométricos de los estudiantes, aun manteniéndose en el mismo nivel se realizó un análisis inferencial sobre los puntajes obtenidos, en cuanto al total y en cuanto a cada nivel de Van Hiele. Este análisis inferencial se realizó a través de una prueba t-student de muestras pareadas a través del software estadístico JAMOVI. A continuación, se presentan los resultados.

- Prueba t-student sobre puntajes totales

Figura 60

Prueba t-student sobre puntajes totales

Prueba T para Muestras Apareadas

			estadístico	gl	p
PT_PRE	PT_POST	T de Student	−7.38	73.0	< .001

Nota. H_a $\mu_{\text{Medida 1 - Medida 2}} < 0$

Se define:

$$Hipotesis\ nula = h_0: Medida\ 1 = Medida\ 2$$

$$Hipotesis\ alternativa = h_1: Medida_1 < Medida\ 2$$

En donde Medida 1 son los puntajes totales del Pre-test, mientras que la Medida 2, son los puntajes Pos-test, los cuales se esperan que sean mayores, como se puede observar en la figura 60.

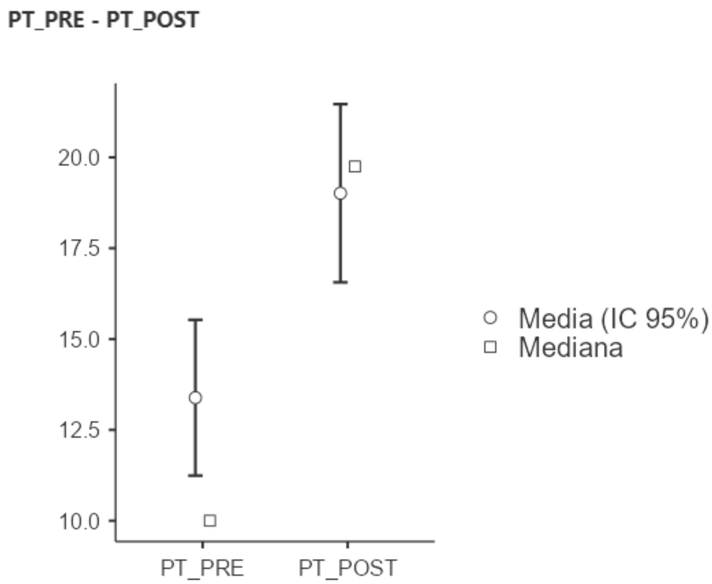
El estadístico muestra una diferencia de -7,38, lo que indica que una considerable diferencia entre las medias de los dos grupos, en relación con la variabilidad en cada uno (Ruiz, 2004). Como bien dice la nota, se consideró la diferencia entre la Medida 1 y la Medida 2, lo que explica el signo negativo del estadístico.

Por otra parte, se observa el valor gl, el cual indica los grados de libertad de la prueba, que depende de la cantidad de datos analizados (74-1)

La prueba se realizó con un intervalo de confianza del 95%, por lo que, para rechazar la hipótesis nula, el valor p debe ser menor a 0,05, valor que indica la significancia de la prueba. Finalmente, el valor p al ser menor del 0,01 indica que se rechaza la hipótesis 0 y por lo tanto se corrobora hipótesis 1, de lo que se infiere que la media de puntajes del Post-test fue significativamente mayor a la del Pre-test. Esto se puede apreciar en la figura 61, en donde se grafican los intervalos de confianza de ambas muestras. De dicha gráfica se observa que el intervalo del Post-test sobrepasa considerablemente el intervalo del Pre-test, lo que indica que existe mayor probabilidad de encontrar puntajes superiores en los resultados obtenidos en la prueba posterior a la intervención.

Figura 61

Gráfico prueba t-student sobre puntajes totales



- Prueba t-student sobre puntajes preguntas 1 y 2 (Nivel 0)

Figura 62

Prueba t-student sobre puntajes Nivel 0

Prueba T para Muestras Apareadas

			estadístico	gl	p
P1_2_PRE	P1_2_POST	T de Student	−4.69	73.0	< .001

Nota. H_a $\mu_{\text{Medida 1 - Medida 2}} < 0$

Se define:

$$h_0: Medida\ 1 = Medida\ 2$$

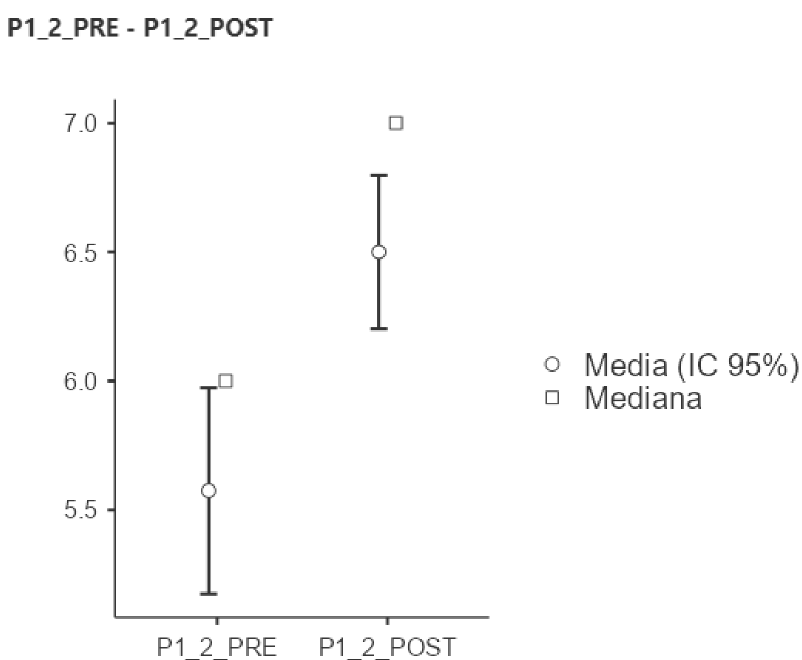
$$h_1: Medida_1 < Medida\ 2$$

En este caso, como se puede apreciar en la figura 62, la medida 1 corresponde a la media de puntajes en las preguntas 1 y 2 del Pre-test y la medida 2 la media de puntajes de las mismas preguntas, pero del Post-test, relacionadas con el Nivel 0 del modelo de Van Hiele.

Con relación a los resultados, se observa que el valor del estadístico es de -4,69, lo que indica que hubo una diferencia positiva entre M2 y M1. Por su parte, el valor p vuelve a ser menor a 0,01 lo que rechaza la hipótesis 0, y por lo tanto se corrobora la hipótesis 1, la cual infiere que la media de puntajes del Post-test supera la del Pre-test, en cuanto a las preguntas relacionadas con el Nivel 0 del Modelo de Van Hiele. Esto indica que aún, manteniéndose en el mismo nivel del modelo de Van Hiele, los estudiantes alcanzaron mejores desempeños, lo que a su vez implica que desarrollaron razonamiento geométrico más elevados, en cuanto a la clasificación de cuerpos geométricos y la identificación de sus elementos. Como se puede observar en la figura 63, el intervalo de confianza que representa los puntajes del Post-test, sobrepasa en su totalidad al intervalo correspondiente al Pre-test, lo que indica que es más probable encontrar puntajes superiores en las preguntas 1 y 2 de la evaluación posterior a la intervención.

Figura 63

Gráfico prueba t-student sobre puntajes Nivel 0



- Prueba t-student sobre puntajes preguntas 3 y 4 (a y b) (Nivel 1)

Figura 64

Prueba t-student sobre puntajes Nivel 1

Prueba T para Muestras Apareadas

			estadístico	gl	p
P3_4_AB_PRE	P3_4_AB_POST	T de Student	−5.53	73.0	< .001

Nota. H_a $\mu_{\text{Medida 1 - Medida 2}} < 0$

Se define:

$$h_0: Medida\ 1 = Medida\ 2$$

$$h_1: Medida_1 < Medida\ 2$$

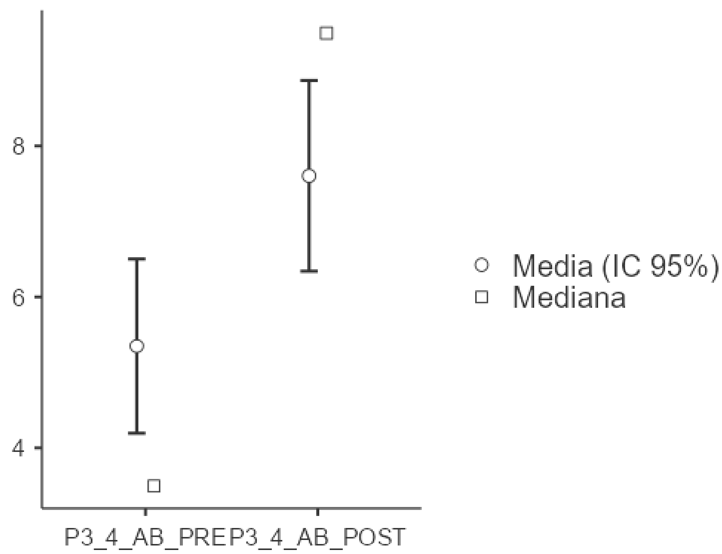
En donde Medida 1 corresponde a los puntajes obtenidos en las preguntas 3 y 4 (a y b) de la evaluación Pre-test, y Medida 2 a los puntajes obtenidos en las mismas preguntas, pero del Post-test.

Como se puede observar en la figura 64, nuevamente se observa que el valor estadístico vuelve a ser de una magnitud considerable, aunque ligeramente menor al de la prueba respetiva al Nivel 0. Por su parte el p-valor nuevamente es menor a 0,01, lo que indica que la hipótesis 0 se rechaza y por lo tanto existe una diferencia significativa entre Medida 1 y Medida 2, lo que indica que los estudiantes avanzaron en su razonamiento geométrico dentro del Nivel 1 del Modelo de Van Hiele. Esto quiere decir que los estudiantes, lograron aplicar de mejor manera las fórmulas de los volúmenes directamente y aplicaron nuevas estrategias de resolución. Esto también se puede observar en el gráfico (figura 65), aunque en este caso los intervalos coinciden en cierto rango.

Figura 65

Gráfico prueba t-student sobre puntajes Nivel 1

P3_4_AB_PRE - P3_4_AB_POST



- Prueba t-student sobre pregunta 4 (c y d) (Nivel 2)

Figura 66

Prueba t-student sobre puntajes Nivel 2

Prueba T para Muestras Apareadas

			estadístico	gl	p
P4_CD_PRE	P4_CD_POST	T de Student	−6.52	73.0	< .001

Nota. H_a $\mu_{\text{Medida 1 - Medida 2}} < 0$

Se define:

$$h_0: Medida\ 1 = Medida\ 2$$

$$h_1: Medida_1 < Medida\ 2$$

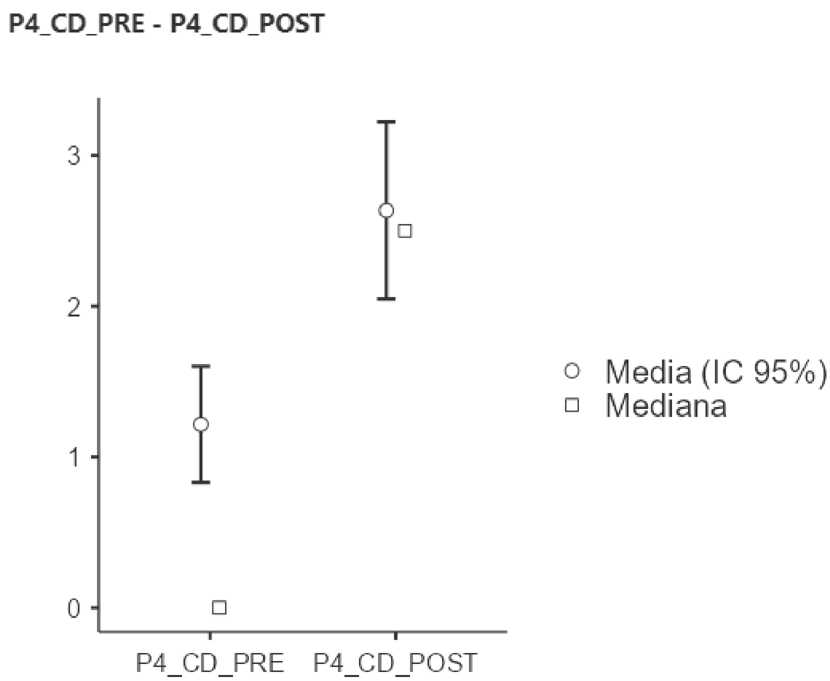
Siguiendo la misma línea de las anteriores pruebas, la Medida 1 corresponde a los puntajes obtenidos en el Pre-test y la Medida 2 en el Post-test, con respecto a las preguntas relacionadas con el Nivel 2 del Modelo de Van Hiele.

Se observa en la figura 66, que el estadístico vuelve a demostrar una diferencia considerable. El p valor nuevamente es menor que 0,01 lo que rechaza la hipótesis 0 y por lo tanto se corrobora la hipótesis 1. Esto indica que los desempeños de los estudiantes en las preguntas relacionadas con el Nivel 2 del Modelo de Van Hiele aumentaron luego de la intervención con el material concreto, lo que indica que fueron capaces de comprender las propiedades relacionadas con los volúmenes de cono y cilindro y aplicarlas en problemas en donde se compusieran estos cuerpos con otros ya conocidos.

Como se puede apreciar en la figura 67, este avance en el nivel 2 de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele es considerable, observando que el intervalo del Post-test supera al del Pre-test.

Figura 67

Gráfico prueba t-student sobre puntajes Nivel 2



- Prueba t-student sobre pregunta 5 (Nivel 3)

Figura 68

Prueba t-student sobre puntajes Nivel 3

Prueba T para Muestras Apareadas

			estadístico	gl	p
P5_PRE	P5_POST	T de Student	−3.40	73.0	< .001

Nota. H_a $\mu_{\text{Medida 1 - Medida 2}} < 0$

Se define:

$$h_0: Medida\ 1 = Medida\ 2$$

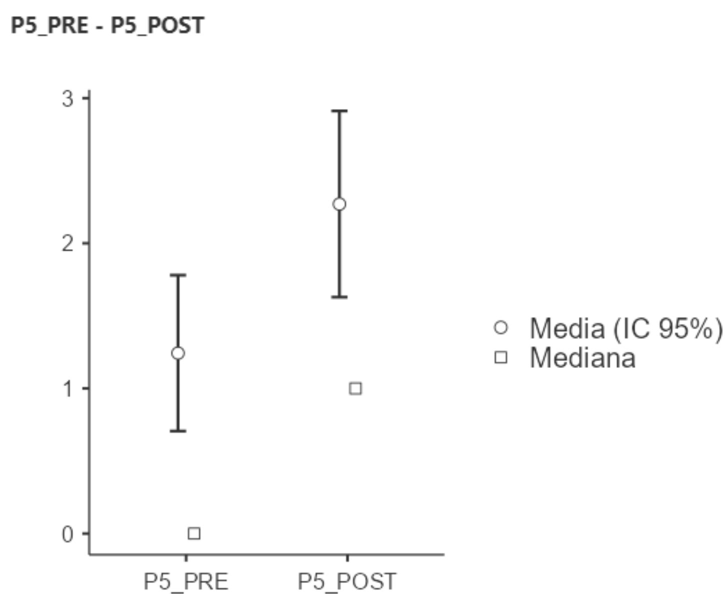
$$h_1: Medida_1 < Medida\ 2$$

En donde Medida 1 corresponde a las medias de puntajes del Pre-test y Medida 2 a las del Post-test en la pregunta 5 relacionada con el Nivel 3 del Modelo de Van Hiele.

Al observar el estadístico, en la figura 68, se puede apreciar que la diferencia es mucho menor a las de las pruebas anteriores, esto podría sugerir que los puntajes han experimentado un aumento, aunque no tan pronunciado como en los niveles observados anteriormente. Sin embargo, nuevamente el valor p es menor a 0,01, lo que indica que la hipótesis 0 se rechaza y, por lo tanto, se corrobora la hipótesis 1, es decir, los desempeños de los estudiantes en la pregunta 5 relacionada con el Nivel 3 del Modelo de Van Hiele aumentaron significativamente después de la intervención con material concreto. Esto indica que los estudiantes lograron mejorar en sus estrategias de resolución de problemas que involucren el cálculo de volúmenes de cono y cilindro, además de justificar lógicamente sus resultados. Los resultados de esta prueba también se pueden observar en la figura 69, en donde se puede apreciar el avance de los puntajes a partir de los intervalos de confianza.

Figura 69

Gráfico prueba t-student sobre puntajes Nivel 3



Conclusiones

Conclusiones

La investigación tuvo como objetivo evaluar los efectos en los desempeños de los estudiantes de primero medio de un colegio municipal de la zona oriente de Santiago, en cuanto a sus puntajes en evaluación escrita, con respecto a indicadores de logro diseñados a partir de los Niveles de Razonamiento Geométrico del Modelo de Van Hiele.

En particular, se realizaron dos pruebas para comparar los efectos que tuvo una intervención con material concreto denominada “llenado de recipiente”, en donde los estudiantes construyeron y analizaron la capacidad del cono con respecto a la del cilindro, estableciendo conexiones directas con sus respectivos volúmenes. Un de las pruebas fue realizada antes de la intervención, mientras que la segunda tuvo lugar posteriormente, permitiendo así la evaluación de los efectos generados por la implementación de la propuesta.

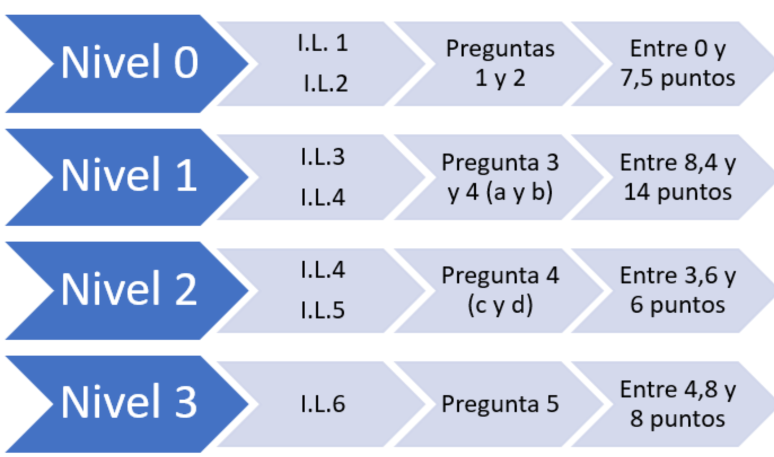
La Teoría de Cognición Incorporada sostiene que, con el fin de desarrollar razonamientos avanzados y lograr un aprendizaje profundo de un determinado objeto, es esencial que el estudiante cuente con acceso físico al mismo (Shabalina, 2021). El uso de material concreto permite que el estudiante realice conexiones, proporcionándole así las bases necesarias para profundizar en su estudio de manera más efectiva (Shabalina, 2021). En este sentido, la intervención con material concreto denominada “llenado de recipiente” tuvo como propósito darle la oportunidad al estudiante de manipular los objetos geométricos que debía estudiar, el cono y el cilindro, a partir de su representación real, en tres dimensiones. De esta manera, según el marco teórico, el estudiante avanzaría en su razonamiento visoespacial y tendría la posibilidad de desarrollar herramientas para profundizar en su estudio. La implementación de esta propuesta mostró cómo los estudiantes analizaron y reflexionaron en torno a la problemática de construir un cono y un cilindro de las mismas dimensiones y definieron distintas estrategias para poder llevar a cabo la actividad. De la misma manera, al interactuar con los objetos y evidenciar la relación entre sus volúmenes mediante la conexión con la noción física de capacidad, los estudiantes consolidaron sus conocimientos previos y otorgaron significado a lo aprendido con anterioridad. Este proceso les permitió aplicar los conceptos de manera más rápida y efectiva en situaciones posteriores.

Para poder analizar en profundidad cómo afectó la implementación de esta actividad sobre el razonamiento de los estudiantes, se trabajó con el marco teórico propuesto por el Modelo de Van Hiele. El Modelo de Van Hiele plantea que el razonamiento geométrico de un estudiante avanza progresivamente en niveles consecutivos, de manera recursiva y continua, desde inferencias básicas de visualización hasta demostraciones formales basadas en teorías axiomáticas (González, 2018). Además, el modelo ofrece un conjunto de estrategias para facilitar que el estudiante avance a un nivel superior, denominadas Fases del Modelo de Van Hiele (Vargas y Gamboa, 2013). La actividad “llenado de recipiente” fue diseñada a partir de las Fases del Modelo de Van Hiele, de tal forma de favorecer el avance de los estudiantes a niveles superiores.

Con el respaldo teórico proporcionado por los Niveles de Razonamiento Geométrico del Modelo de Van Hiele, se diseñaron dos evaluaciones. Un Pre-test aplicado luego de que los estudiantes hubieran aprendido las propiedades del cono y la fórmula de su volumen a partir de la aplicación directa y representaciones en dos dimensiones. Y un Post-test posterior a la aplicación de la intervención con material concreto. Para este diseño se construyeron 6 indicadores de logro, relacionados con los 4 primeros niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele. De esta manera, se logró relacionar los desempeños, referidos a los puntajes de los estudiantes en cada pregunta o conjunto de preguntas en las pruebas, con un nivel de razonamiento. Como se evidencia en la figura 70, el proceso inició con una caracterización teórica para cada nivel, seguido de la formulación de preguntas diseñadas para alinearse con dichas características y que fueran evaluables.

Figura 70

Niveles de Van Hiele y evaluaciones



La hipótesis de la intervención consistió en que, los estudiantes avanzan en los Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele y evidencian mejores desempeños en evaluación escrita bajo el modelo, después de implementar una actividad con material concreto “llenado de recipiente”. Es decir, la intervención con material concreto tendría un impacto positivo en los aprendizajes de los estudiantes, lo que se evidenciaría en la comparación de desempeños en evaluaciones realizadas antes y después de la actividad. Para corroborar la hipótesis, se llevaron a cabo dos tipos de análisis de los resultados presentados en el Pre-test y en el Post-test.

El objetivo de este estudio consistió en evaluar el impacto de la actividad sobre los razonamientos de los estudiantes. La condición de Pre y Post-test permitió controlar aspectos como los distintos niveles iniciales de cada curso, que se detalló en los aspectos contextuales y así obtener información objetiva acerca de los avances de cada curso.

Uno se centró en el progreso de los estudiantes a través de los niveles del Modelo de Van Hiele, mientras que el otro se enfocó en las diferencias presentadas en el rendimiento de los estudiantes, tanto en términos de puntajes generales como en relación con cada pregunta o conjunto de preguntas.

Después de implementada la actividad con material concreto “llenado de recipiente, los estudiantes presentaron un mejor desempeño en cuanto a sus puntajes en evaluación escrita, con respecto a indicadores de logro que fueron diseñados a partir de los Niveles de Razonamiento Geométrico del Modelo de Van Hiele.

Con respecto al progreso a través de los niveles de Van Hiele, antes de realizada la actividad con material concreto, los estudiantes se encontraban mayoritariamente (60%) en el Nivel 0, de visualización. Es decir, eran capaces de caracterizar y reconocer elementos del cono y del cilindro (Puig et al., 2021). Sin embargo, luego la proporción de los estudiantes en los niveles superiores descendía considerablemente, lo que indicaba que los estudiantes se mantenían en general en razonamientos geométricos básicos. Luego de la intervención se observó que la distribución de los estudiantes en cada nivel se modificó, transitando un gran porcentaje a niveles superiores, llegando el 25% al nivel

3. Esto indica que una cantidad considerable de estudiantes adquirió herramientas y desarrolló razonamientos geométricos superiores.

Sin embargo, una cantidad menor a la mitad de los estudiantes avanzaron de nivel, los cuales en su mayoría fueron desde el Nivel 0 al Nivel 1, lo que indica que, a pesar de presentarse un tránsito positivo entre Pre-test y Post-Test, se deben realizar análisis más profundos en cuanto a las diferencias entre avanzar del Nivel 0 al 1 o del Nivel 2 al 3.

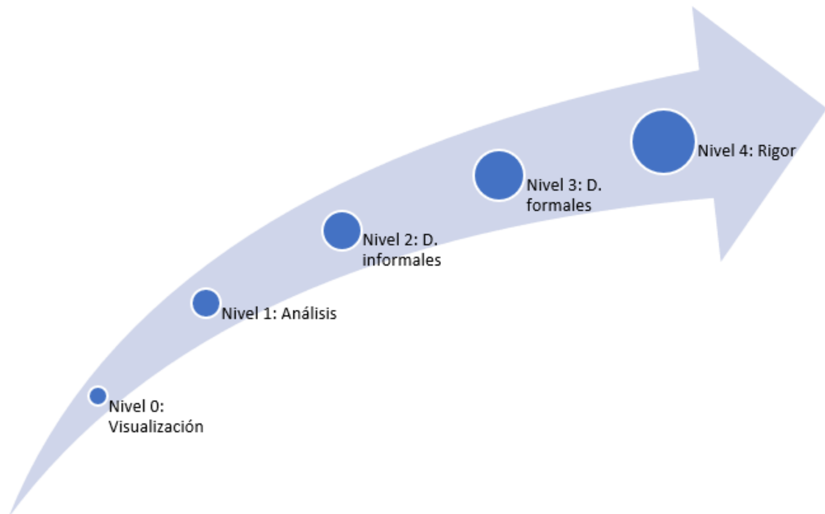
Asimismo, al llevar a cabo el análisis estadístico, se evidenció que, en relación con los puntajes generales, los estudiantes demostraron un mejor rendimiento en la prueba que siguió a la actividad "llenado de recipiente", aumentando su puntaje promedio en 6 puntos. A partir de dichos resultados, se decidió realizar un análisis estadístico inferencial de manera de estudiar en profundidad de qué manera afectó la intervención sobre los desempeños de los estudiantes, aun cuando la mayoría no haya avanzado de Nivel. Para esto se llevó a cabo una serie de test de hipótesis sobre la diferencia de puntajes generales y sobre la diferencia de puntajes sobre las preguntas relacionadas con cada nivel de Van Hiele.

Los resultados obtenidos demuestran que los desempeños de los estudiantes fueron significativamente superiores después de la actividad de “llenado de recipiente”, en cuanto al puntaje general, pero también en cuanto a los puntajes relacionados con cada nivel de Van Hiele. Este resultado podría interpretarse como un indicativo de que, aunque los estudiantes se mantengan en un nivel de Van Hiele, siguen progresando en su razonamiento geométrico de manera continua y no en escalada como se asumió al diseñar las evaluaciones.

Como conclusión, en lo que respecta al avance en los niveles del Modelo de Van Hiele, se confirma que una proporción considerable de estudiantes logró progresar a niveles superiores después de la intervención. Además, se evidenció una mejora significativa en el desempeño entre el Pre-test y el Post-test, corroborando así la hipótesis inicial. Es relevante destacar que esta investigación sugiere que, el tránsito por los niveles del Modelo de Van Hiele no sigue una estructura de escalera, como se pensó al diseñar las evaluaciones, ya que los estudiantes demostraron avanzar en sus razonamientos incluso al mantenerse en un nivel específico. Esto sugiere que dicho progreso se experimenta como un continuo, como se puede resumir en la figura 71.

Figura 71

Niveles de Van Hiele



Limitaciones e implicaciones

Con respecto a los aspectos contextuales de la investigación, es importante reconocer el impacto derivado de la implementación de la propuesta, la cual fue llevada a cabo por tres profesores con estilos de enseñanza. Esta diferencia de enfoques pedagógicos y las decisiones individuales que se tomaron al aplicar las diferentes etapas de la intervención complejizan el análisis objetivo del estudio. Por otra parte, los cursos presentaban distintos tipos de rendimiento antes de ser elegidos como muestra, lo que también generó disparidad en los resultados obtenidos, tanto en el Pre-test como en el Post-test. Este contexto diverso puede influir en la interpretación de los resultados y en la comprensión global de los efectos que tuvo la propuesta. En este sentido, aplicar esta intervención en otro espacio, considerando la participación de varios profesores podría requerir una capacitación para que los docentes comprendan y apliquen eficazmente los principios que se plantearon en el marco teórico en cuanto a la Teoría de Cognición Incorporada y el Modelo de Van Hiele.

Por otra parte, la cantidad de estudiantes de la muestra, que se redujo de 97 a 74 estudiantes debido a múltiples factores, lo que representa una limitación al comprometer la generalización de resultados. La inclusión de una muestra más amplia en futuras investigaciones fortalecería la validez de los hallazgos presentados.

También, queda abierta la posibilidad de volver a aplicar una tercera prueba “tardía”, como lo realizaron Ng, Shi y Ting (2020), de manera de analizar la sostenibilidad de los efectos a largo plazo. Sin embargo, este enfoque enfrentaría desafíos logísticos, de recursos y requeriría una colaboración más prolongada con la institución educativa.

El diseño de una evaluación cuantitativa basada en el modelo de Van Hiele que tiene un carácter cualitativo enfatiza la importancia de relacionar estrechamente los enfoques cualitativos y cuantitativos para obtener una comprensión integral del aprendizaje.

Otros cuestionamientos que surgen de esta investigación consisten en la exploración de su diseño metodológico. Por ejemplo, qué efectos tendría comenzar con la actividad de “llenado de recipiente” para la enseñanza de la relación de volúmenes de cono y cilindro, para luego trabajar de manera teórica con su fórmula. Queda la interrogante si los estudiantes alcanzarán niveles superiores inmediatamente al realizar la actividad para luego consolidarlos al trabajar posteriormente de manera más tradicional.

Considerar la implementación de entornos digitales podría abrir nuevas posibilidades, aprovechando las tecnologías educativas emergentes para enriquecer la experiencia de aprendizaje. Sin embargo, tal como se planteó en la problemática de la investigación es crucial corroborar que estos entornos digitales efectivamente generen impactos positivos en el aprendizaje de los estudiantes. Por lo tanto, en futuras investigaciones que involucren los efectos de entornos digitales, se verían beneficiadas por el empleo de la metodología desarrollada en este estudio, es decir, la alineación con un marco teórico como el Modelo de Van Hiele, pero también analizando los desempeños a través de enfoques estadísticos inferenciales. Esta aproximación metodológica podría proporcionar una base sólida para evaluar y validar la eficacia de los entornos digitales en el contexto educativo, tal como se corroboró el uso de material concreto, en defensa de la Teoría de Cognición Incorporada.

Referencias Bibliográficas

Alves B, Días D., de S. Borges S, Durelli V., Bressan P., Martins V., de Paiva Guimaraes M. (9 de julio- 14 de julio de 2017). *On Capitalizing on Augmented Reality to Impart Solid Geometry Concepts: An Experimental Study.* [Presentación de ponencias]. 11th International Conference on Universal Acces in Human-Computer Interaction, Vancouver, Canadá.

Amir M.F., Fediyanto N., Rudyanto H.E., Afifah D., Tortop H.S. (2020). Elementary students' perceptions of 3Dmetric: A cross-sectional study. *Heliyon. 6*(6). DOI10.1016/j.heliyon.2020.e04052

Astudillo, J., Soto, D., y Bobadilla, G. (2021). Aplicación de una situación didáctica para la enseñanza del cálculo de volumen, construida mediante la teoría espacio de trabajo geométrico. Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa, 18(3), 2-11.

Astudillo, J., Soto, D. (2022). Resignificación del discurso matemático escolar docente: una mirada del cálculo de volumen desde la teoría socioespistemológica. Tesis para optar al grado de Magister en Educación Matemática.

https://usach.primo.exlibrisgroup.com/discovery/fulldisplay?docid=alma992002940906116&context=L&vid=56USACH_INST:REPOSITORIO&lang=es&adaptor=Local%20Search%20Engine&query=any,contains,astudillo

Bhagat K.K., Yang F.Y., Cheng C.H., Zhang Y., Liou W.K (2021). Tracking the process and motivation of math learning with augmented reality. *ETRyD-EDUCATIONAL TECHNOLOGY RESEARCH AND DEVELOPMENT. 69*(6). 3153-3178. DOI10.1007/s11423-021-10066-9

Bono R. (2012*).* Diseños cuasi-experimentales y longitudinales. http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/30783?mode=full

Dagnino J. (2014) Inferencia Estadística: Test de Hipótesis. Rev Chil Anest 2014; 43: 125-128

Fujita T., Kondo Y., Kumakura H, Kunimune S. (2017) Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *Journal of Mathematicl Behavior. 46*(3). 96-111. 10.1016/j.jmathb.2017.03.003

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht, Netherlands: Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company. Boston.

Galindo, G., y Purrán, A. (2017). *Implementación del Modelo Van Hiele en la enseñanza del eje de geometría y medición en alumnos de cuarto año básico.* Seminario para optar al Grado de Licenciado en Educación y al Título profesional de Profesor de Educación General Básica con Especialización en Primer Ciclo, Concepción, Chile.

García, A. (2019). *Conceptualización del aprendizaje cognitivo-corporal: Bases de la cognición incorporada*. *INTELED*.

González J., Méndez C., Serrano P. y Tapia V. (2018). *Evidencias de razonamiento geométrico en estudiantes de primer año de enseñanza media en un colegio de la provincia de Concepción*: Seminario para optar al grado de licenciado en educación, Concepción, Chile. http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/3615

Hernández R. (2014). *Metodología de la investigación.* Sexta Edición. McGraw Hill Education

Ibili E., Cat M., Resnyansky D., Sahin S y Billinghurst M. (2019) An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3D geometry thinking skills. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. *51*(2). 224-246. DOI10.1080/0020739X.2019.1583382

MINEDUC (Julio de 2012). *Programa de Estudio Primero Básico*. Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

MINEDUC (2012). *Programa de Estudio Quinto Básico*. Santiago de Chile, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

MINEDUC (2012). *Programa de Estudio Sexto Básico*. Santiago de Chile, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

MINEDUC (2016). *Programa de Estudio Séptimo Básico*. Santiago de Chile, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

MINEDUC (2016). *Programa de Estudio Octavo Básico*. Santiago de Chile, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

MINEDUC (2016). *Programa de Estudio Primero Medio.* Santiago de Chile, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Programas/

Muñoz M. y Garay F. (2015) *La investigación como forma de desarrollo profesional docente:*

Retos y perspectivas. Estudios Pedagógicos XLI, Nº 2: 389-399.

Ng O.L., Ye H.Y. (2022) Mathematics learning as embodied making: primary students' investigation of 3D geometry with handheld 3D printing technology. *Asia Pacific Education Review. 23*(2). 311-323. DOI10.1007/s12564-022-09755-8

Ng O.L., Shi L.y Ting F. (2020) Exploring differences in primary students'geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: dynamic geometry and 3D printing. *International Journal of STEM Education. 7*(1). DOI10.1186/s40594-020-00244-1

Nuñez, M y Bono R. (2020). *Diseño de experimentación en psicología*. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/164539/1/Dise%C3%B1os%20de%20Investigacion_Diapositivas%2019-20_FINAL.pdf

Pittalis M. y Christou C. (2010) Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics. 75*(2). 191-212. DOI10.1007/s10649-010-9251-8

Puig A., Rodríguez I., Baldeón J. y Múria S. (2021) Children building and having fun while they learn geometry. *Computer applications in engineering education. 30*(3). 741-758. DOI10.1002/cae.22484

Rani.insc.(2022). Paralelepípedo[Figura]. PROPROF. https://www.proprofs.com/quiz-school/story.php?title=mjcwmtc4mavy2y

Reyes C., Disset L., Gormaz R., Ortiz A., Larraín M., Zanocco P. (2013) *Geometría: Para futuros profesores de educación básica.* Primera Edición. Proyecto FONDEF – CONICYT D09 I1023 (2011 – 2014).

Saavedra E. (2022) *Contenidos básicos de estadística y probabilidad* (3ra ed.) Universidad de Santiago de Chile.

Sanmartín, R. (2013). El método de la cognición incorporada. *Colección de Filosofía de la educación*. *1*(14). 70-125.

Santana, I. (2015). *Diseño Cuasi-experimental (pre test/post test) Aplicado a la Implementación de Tics en el Grado de Inglés Elemental:* Caso Universidad Tecnológica de Santiago Recinto Santo Domingo en el Cuatrimestre Mayo-Agosto 2015-2. Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Saucedo, G. (2009). *Hacia la construcción del concepto de volumen*. En Zapico, Irene; Tajeyan, Silvia (Eds.), ACTAS DE LA VII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (pp. 1-8). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Setz J., Muñoz V. (2018) *Libro de texto Matemática 1° Medio.* SM.

Shabalina A. (2021) Two Meanings of "Cognition" in the Theory of Embodied Cognition.*463.* 69-72. 10.17223/15617793/463/9

Stewart J. (2012) *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* 7ma Edición. Cengage Learning

Nathan, M (2014) Grounded Mathematical Reasoning en Shapiro Lawrence, *The Routledge Handbook of Embodied Cognition* (pp.171- 183).

Thamrongrat P., Law E. (2 de septiembre al 6 de septiembre de 2019) *Design and Evaluation of an Augmented Reality App for Learning Geometric Shapes in 3D.* [Presentación de ponencias]. International Conference on Human-Computer Interaction, United Kingdom

Usiskin, Z. (2003). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 269-282). National Council of Teachers of Mathematics.

Van Putten, S., Howie, S., & Stols, G. (2010). Making Euclidean geometry compulsory: Are we prepared? Perspectives in Education, 28(4), 22–31.

Vargas Vargas, G., y Gamboa Araya, R. (2013). The Van Hiele model and the teaching of the geometry. Uniciencia,27(1),74-94. Retrieved from https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944

Anexos

Carta de autorización de director de establecimiento

COMITÉ DE
ÉTICA INSTITUCIONAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

CARTA DE AUTORIZACIÓN DEL (LA) DIRECTOR(A) DEL ESTABLECIMIENTO DONDE SE DESARROLLARÁ LA INVESTIGACIÓN

Autorizo el desarrollo del proyecto de investigación titulado "Enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono: Valorando representaciones concretas como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional", dirigido por la investigador doña Erika Camila Ávila Parada, en este establecimiento.
Como directora estoy al tanto de la naturaleza y de los objetivos de esta investigación, en la cual se recopilará información a través de la revisión o desarrollo de los siguientes elementos:

- Evaluación Pre-test
- Evaluación Post-test
- Fotografías de las clases en donde se implementará la propuesta

Asimismo, la participación de los/as participantes o sujetos de investigación es LIBRE Y VOLUNTARIA e independiente de esta autorización.
También entiendo que la participación de las personas que pertenecen a la institución que dirijo (estudiantes, docentes) conlleva un manejo confidencial de la información recabada, sin que se identifique ni a las personas ni a las organizaciones en los documentos o publicaciones derivadas del estudio.
La información obtenida será utilizada solo con fines de esta investigación, estará bajo la custodia de la investigadora responsable por __2__ años y luego será destruida. No obstante, lo anterior,
__Sí__ (sí o no) acepto que se señale el nombre de la organización en los resultados de la investigación.
__Sí__ (sí o no) me interesa conocer los resultados de la investigación.
Consiento actuar como ministro de fe en la firma del consentimiento o en designar un delegado al efecto.

Entiendo que ante cualquier duda o consultas respecto de la investigación se puede contactar a la investigadora responsable Erika Camila Ávila Parada, número de teléfono 968368240 y ante algún reclamo referido a la vulneración de los derechos de los participantes, se puede dirigir al Dr. Jairo Vanegas López, presidente del Comité de Ética de la Universidad de Santiago de Chile. Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293. E.mail: comitedeetica@usach.cl

La presente Carta de Autorización se firma en tres ejemplares. Uno de los documentos queda en poder de la investigadora, otro en poder la directora y una última copia es remitida al Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

Para formalizar el permiso en este estudio, firmo a continuación
Atentamente,

LICEO BICENTENARIO SIMÓN BOLÍVAR * LAS CONDES * DIRECCIÓN

MARISOL BRAVO ACEVEDO
mbravo@conplascondes.cl 957087399
NOMBRE DEL DIRECTOR(A)
CORREO ELECTRÓNICO - TELÉFONO

FIRMA

Ciudad Santiago Día 18 del ~~mes de~~ Julio del año 2023

Carta consentimiento apoderado

Pretest

COMITÉ DE
ÉTICA
INSTITUCIONAL

USACH

CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES, MADRES Y/O TUTORES
Pre-test

I. Descripción de la Investigación

El propósito de la información que se presenta a continuación es ayudarle a tomar la decisión de que su hijo(a), pupila(o) participe o no en esta investigación.

Título de la Investigación: Enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono: Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional
Investigador(a) Responsable: Erika Camila Ávila Parada
Docente Guía de la investigación: Daniela Soto Soto
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Propósito de la Investigación:
Soy Erika Camila Ávila Parada estudiante de Magister en Educación Matemática. Estamos realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono y para ello queremos pedir la colaboración de su hijo o pupilo.

II. Mis Derechos de Participación

1. La **participación de mi hijo(a) o pupilo(a) es totalmente libre y voluntaria**, por lo que puedo negarme a que participe sin que esto implique ninguna desventaja o consecuencia. Entiendo que la **participación** de mi hijo(a) consistirá en realizar una prueba Pre-test sobre volúmenes de cono y cilindro, que se desarrollará en el Liceo Bicentenario Simón Bolívar ubicado en Tomas Moro 1651.

2. Mi hijo(a) o pupilo(a) posee el **derecho de retirarse** de la investigación en el momento que lo desee, sin expresión de causa y sin que el retiro implique sanciones, responsabilidades o consecuencias negativas.
   En caso que mi hijo(a) o pupilo(a) decida retirarse en cualquier etapa de la investigación, sus datos, respuestas y transcripciones serán eliminadas y no tendrán validez.

3. **Riesgos eventuales:** La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para su hijo(a) o pupilo(a).
   Esta investigación sí implica beneficios para los(as) participantes, en el sentido de que todo su desarrollo implica un aprendizaje en geometría de tres dimensiones.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

4. En caso de **Molestias** que se relacione con algún problema o complicación médica que creo que puede estar relacionada con la participación de mi hijo(a) o pupilo(a) en esta investigación, me comunicaré directamente con el(la) investigador(a) principal, el(la) cual procurará un tratamiento médico adecuado y sin costo.

5. No existe ningún tipo de **Costos** asociados a la investigación para mi hijo(a) o pupilo(a).

6. **Derecho al resguardo de la identidad de los(as) niños(as), de la información compartida y de sus datos personales.**

✓ **Anonimato de los(as) niños(as):** El(la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

✓ **Confidencialidad de los(as) niños(as):** Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

✓ **Derecho a la imagen de los(as) niños(as):** En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de la participación de su hijo(a) o pupilo(a) en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda. En el caso de consentirlo se asegurará el anonimato del o la estudiante tapando su rostro. Una vez terminada la investigación este registro será destruido.

7. **Custodio de los Datos:** El(la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

8. **Resultados de la investigación**:

_________ (Sí o No) deseo obtener una síntesis de los **resultados** de la investigación. Dichos resultados serán enviados a la **dirección electrónica** ______________________

He Leído (o se me ha leído) la información del documento de consentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente. No tengo ninguna duda sobre la participación de mi hijo(a) pupilo (a).

Consiento voluntariamente la participación de mi hijo(a) o pupilo (a). Por lo que sus derechos de participación en el estudio y la confidencialidad de su información están asegurados por el(la) **Investigador(a) Responsable** y por el **Comité de Ética Institucional** de la Universidad de Santiago de Chile.

III. Contactos

a. **Consultas al (la) Investigador(a):** En caso de tener alguna duda en relación al consentimiento, favor comuníquese con el (la) investigador(a) responsable, con copia a un(a) co-investigador(a) para agilizar el procedimiento.

b. **Reclamación:** En caso de estimar que sus derechos hayan sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puede contactarse con el Comité de Ética, el cual examina los proyectos de acuerdo a regulaciones nacionales e internacionales de carácter ético.

Investigador(a) Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Email: Teléfono:	**Dr. Jairo Vanegas López** Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293 Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

IV. Autorización

El presente Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del(la) investigador(a) y el otro en poder del(la) participante.

He leído este documento y he sido informado(a) del objetivo y características de este estudio. Para formalizar mi participación en este estudio, firmo voluntariamente, consintiendo la participación de mi hijo(a) o pupilo(a) en él, en conformidad con los siguientes términos:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA/ESTUDIO SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA/ESTUDIO SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______

ACEPTO QUE LA PARTICIPACIÓN DE MI HIJO(A) O PUPILO(A) SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______ DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI _______ NO _______	NO ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN DE MI HIJO(A) O PUPILO(A) SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______

ADULTO RESPONSABLE

FIRMA

Erika Camila Ávila Parada
INVESTIGADOR RESPONSABLE

FIRMA

Mauro Bravo Arevalo

DIRECTOR/A RESPONSABLE
ESTABLECIMIENTO

FIRMA

Santiago de Chile __________, ___ de __________ de _______

COMITÉ DE ÉTICA INSTITUCIONAL

USACH

CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES, MADRES Y/O TUTORES
Post-test

I. Descripción de la Investigación

El propósito de la información que se presenta a continuación es ayudarle a tomar la decisión de que su hijo(a), pupila(o) participe o no en esta investigación.

Título de la Investigación: Enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono: Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional
Investigador(a) Responsable: Erika Camila Ávila Parada
Docente Guía de la investigación: Daniela Soto Soto
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Propósito de la Investigación:
Soy Erika Camila Ávila Parada estudiante de Magister en Educación Matemática. Estamos realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono y para ello queremos pedir la colaboración de su hijo o pupilo.

II. Mis Derechos de Participación

1. La **participación de mi hijo(a) o pupilo(a) es totalmente libre y voluntaria**, por lo que puedo negarme a que participe sin que esto implique ninguna desventaja o consecuencia. Entiendo que la **participación** de mi hijo(a) consistirá en realizar una prueba Post-test sobre volúmenes de cono y cilindro, que se desarrollará en el Liceo Bicentenario Simón Bolívar ubicado en Tomas Moro 1651.

2. Mi hijo(a) o pupilo(a) posee el **derecho de retirarse** de la investigación en el momento que lo desee, sin expresión de causa y sin que el retiro implique sanciones, responsabilidades o consecuencias negativas.
   En caso que mi hijo(a) o pupilo(a) decida retirarse en cualquier etapa de la investigación, sus datos, respuestas y transcripciones serán eliminadas y no tendrán validez.

3. **Riesgos eventuales:** La metodología que se utilizará en la investigación no implica riesgos para su hijo(a) o pupilo(a).
   Esta investigación sí implica beneficios para los(as) participantes, en el sentido de que todo su desarrollo implica un aprendizaje en geometría de tres dimensiones.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

4. En caso de **Molestias** que se relacione con algún problema o complicación médica que creo que puede estar relacionada con la participación de mi hijo(a) o pupilo(a) en esta investigación, me comunicaré directamente con el(la) investigador(a) principal, el(la) cual procurará un tratamiento médico adecuado y sin costo.

5. No existe ningún tipo de **Costos** asociados a la investigación para mi hijo(a) o pupilo(a).

6. **Derecho al resguardo de la identidad de los(as) niños(as), de la información compartida y de sus datos personales.**

✓ **Anonimato de los(as) niños(as):** El(la) participante no será identificado en los resultados de la investigación ni en cualquier acción que derive de ella.

✓ **Confidencialidad de los(as) niños(as):** Al participar en esta investigación, todos los datos aportados o recabados serán confidenciales y deberán mantenerse en estricta reserva por parte de las personas vinculadas al estudio.

✓ **Derecho a la imagen de los(as) niños(as):** En el caso que el proyecto amerite el registro visual o audiovisual de la participación de su hijo(a) o pupilo(a) en él, tendrá derecho a consentir o disentir independiente y específicamente que esto suceda. En el caso de consentirlo se asegurará el anonimato del o la estudiante tapando su rostro. Una vez terminada la investigación este registro será destruido.

7. **Custodio de los Datos:** El(la) investigador(a) responsable guardará la información personal relacionada al estudio por 5 años una vez terminada la investigación. Posterior a este periodo se destruirá toda documentación física y/o digital que se relacione con su identidad.

8. **Resultados de la investigación**:

_________ (Sí o No) deseo obtener una síntesis de los **resultados** de la investigación. Dichos resultados serán enviados a la **dirección electrónica** ______________________

He Leído (o se me ha leído) la información del documento de consentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente. No tengo ninguna duda sobre la participación de mi hijo(a) pupilo (a).

Consiento voluntariamente la participación de mi hijo(a) o pupilo (a). Por lo que sus derechos de participación en el estudio y la confidencialidad de su información están asegurados por el(la) **Investigador(a) Responsable** y por el **Comité de Ética Institucional** de la Universidad de Santiago de Chile.

III. Contactos

a. **Consultas al (la) Investigador(a):** En caso de tener alguna duda en relación al consentimiento, favor comuníquese con el (la) investigador(a) responsable, con copia a un(a) co-investigador(a) para agilizar el procedimiento.

b. **Reclamación:** En caso de estimar que sus derechos hayan sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puede contactarse con el Comité de Ética, el cual examina los proyectos de acuerdo a regulaciones nacionales e internacionales de carácter ético.

Investigador(a) Responsable	**Datos Comité de Ética Institucional**
Nombre: Email: Teléfono:	**Dr. Jairo Vanegas López** Fono: (56-2) 27180294 / (56-2) 27180293 Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

IV. Autorización

El presente Consentimiento Informado se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del(la) investigador(a) y el otro en poder del(la) participante.

He leído este documento y he sido informado(a) del objetivo y características de este estudio. Para formalizar mi participación en este estudio, firmo voluntariamente, consintiendo la participación de mi hijo(a) o pupilo(a) en él, en conformidad con los siguientes términos:

ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA/ESTUDIO SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______	NO ACEPTO QUE ESTA ENTREVISTA/ESTUDIO SEA GRABADA EN FORMATO AUDIO _______

ACEPTO QUE LA PARTICIPACIÓN DE MI HIJO(A) O PUPILO(A) SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______ DESEO QUE LOS(AS) INVESTIGADORES(AS) ME ENVÍEN LOS RESULTADOS GENERALES DEL ESTUDIO: SI _______ NO _______	NO ACEPTO QUE MI PARTICIPACIÓN DE MI HIJO(A) O PUPILO(A) SEA REGISTRADA MENDIANTE FOTOGRAFÍAS O VIDEOS _______

ADULTO RESPONSABLE

FIRMA

Erika Camila Ávila Parada
INVESTIGADOR RESPONSABLE

FIRMA

Maruf Bravo Acevedo
DIRECTOR/A RESPONSABLE ESTABLECIMIENTO

FIRMA

Santiago de Chile __________, ___ de __________ de ______

Carta asentimiento estudiantes
Pre-test

COMITÉ DE
ÉTICA
INSTITUCIONAL

ASENTIMIENTO
Pre-test

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: Enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono: Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional
Investigadores(as): Erika Camila Ávila Parada
Institución Patrocinante: Universidad de Santiago de Chile

Soy Erika Camila Ávila Parada estudiante de Magister en Educación Matemática. Estamos realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en la realización de una prueba Pre-test para conocer sobre el aprendizaje de la relación entre volúmenes de cono y cilindro y que se desarrollará en el Liceo Bicentenario Simón Bolívar ubicado en Tomas Moro 1651. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Erika Camila Ávila Parada, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

☐ (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☐ Sí, quiero participar

Nombre: ____

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto Sí _______	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto** No _______

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Erika Camila Ávila Parada al mail emavila@uc.cl.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

COMITÉ DE ÉTICA

Investigador Responsable	Datos Comité de Ética Institucional
Nombre: Erika Camila Ávila Parada	Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Erika Camila Ávila Parada
INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

FIRMA

Manuel Bravo Acevedo

DIRECTOR/A RESPONSABLE
ESTABLECIMIENTO

FIRMA

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina N° 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

COMITÉ DE
ÉTICA

USACH

Ciudad, ______ de ______________ de ______

Post-test

COMITÉ DE
ÉTICA
INSTITUCIONAL

ASENTIMIENTO
Post-test

La siguiente información se presentará para poder ayudarte a tomar la decisión de participar o no en esta investigación.

Título de la Investigación: Enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono: Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional   **Docente Guía de la investigación: Daniela Soto Soto**   **Investigadores(as): Erika Camila Ávila Parada**   **Institución Patrocinante:** Universidad de Santiago de Chile

Soy Erika Camila Ávila Parada estudiante de Magister en Educación Matemática. Estamos realizando un estudio para conocer acerca de la enseñanza de la relación entre volúmenes de cilindro y cono y para ello queremos pedir tu colaboración.

Declaración del (la) menor participante:

Entiendo que mi participación en el estudio consistirá en la realización de una prueba Post-test para conocer sobre el aprendizaje de la relación entre volúmenes de cono y cilindro y que se desarrollará en el Liceo Bicentenario Simón Bolívar ubicado en Tomas Moro 1651. También entiendo que mis respuestas podrán ser grabadas en forma de audio con el fin de posteriormente transcribir la información.
En caso de que el proyecto requiera registro visual o audiovisual de mis respuestas, debo autorizar específicamente esto, solo si lo deseo.

Toda la información que entregue será confidencial. Esto quiere decir que tanto mis respuestas como mis datos personales solo serán conocidas por las personas que forman parte del equipo de este estudio y quedarán a cargo de uno(a) de los (las) investigadores(as), cuyo nombre es Erika Camila Ávila Parada, quien almacenará toda esta información en su computador personal, protegerá su uso y conservación y una vez finalizada la investigación eliminará todos mis datos.

Mi identidad también será confidencial, es decir, no se publicará mi nombre en el estudio, sino que será utilizado un código para ello.

Mi participación en el estudio es libre y voluntaria, es decir, aun cuando mis padres o cuidadores hayan dicho que puedo participar, si no quiero hacerlo puedo decir que no. Es mi decisión si participo o no.
Si en algún momento ya no quiero seguir participando o no quiero responder alguna pregunta, no habrá ningún problema y puedo retirarme del estudio sin tener consecuencias negativas para mí.

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

Se me ha informado que participar en esta investigación no implica ningún tipo de riesgo ni costo, así como tampoco beneficios para mí.

☐ (Sí/No) He Leído o se me ha leído la información del documento de Asentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente cada una de ellas. No tengo ninguna duda sobre mi participación.

Autorización:

Si aceptas participar, debes poner un ticket (✓) en el cuadrito de abajo que dice "Sí, quiero participar" y escribir tu nombre.

Si no quieres participar, no debes llenar el cuadrito, ni escribir tu nombre.

☐ Sí, quiero participar

Nombre: ______________________________________

A continuación, deberás marcar con una X el cuadrado que voluntariamente desees, respecto de si quieres que te graben o fotografíen durante tu participación en el proyecto:

Autorizo a que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto	**No autorizo que me registren mediante fotografía y/o video durante el proyecto**
Sí _______	No _______

Contactos

En caso de tener alguna duda puedes comunicarte con Erika Camila Ávila Parada al mail emavila@uc.cl.

En caso de estimar que tus derechos han sido vulnerados tanto durante como después de realizada la investigación, puedes contactarte con el Comité de Ética Institucional, que es la entidad que examina los proyectos y que te puede ayudar en la información y protección de tus derechos.

COMITÉ DE
ÉTICA

Investigador Responsable Nombre: Erika Camila Ávila Parada	Datos Comité de Ética Institucional Dr. Jairo Vanegas López Correo electrónico: comitedeetica@usach.cl

El presente Asentimiento se firma en dos ejemplares. Uno de los documentos queda en poder del (la) investigador(a) y el otro en poder del(a) participante.

Para formalizar mi participación en este estudio, firmo a continuación:

Erika Camila Ávila Parada
INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE

FIRMA

NOMBRE DEL(LA) PARTICIPANTE

FIRMA

DIRECTOR/A RESPONSABLE ESTABLECIMIENTO

Manuel Bravo Arévalo

FIRMA

Universidad de Santiago de Chile I Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Creación
Chacabuco N°675 I Santiago I Chile
Segundo piso I oficina Nº 200 I Teléfono: +56 2 27180293 - 294
www.cei.usach.cl I www.vriic.usach.cl

COMITÉ DE
ÉTICA

Ciudad, _______ de _______________ de ______

Compromiso investigador

USACH

Emitido por el Comité de Ética re-acreditado por 3 años según Resolución Exenta N° 011494/2020

COMITÉ DE ÉTICA INSTITUCIONAL

CARTA DE COMPROMISO DEL/A INVESTIGADOR/A

Yo Erika Camila Ávila Parada Investigador/a del proyecto de tesis " Enseñanza de la relación entre los volúmenes de cilindro y cono: Valorando el uso de material concreto como estrategia de enseñanza en geometría tridimensional "mediante la suscripción del presente documento me comprometo a:

1. Declarar mis potenciales conflictos de interés ante el comité de ética de investigación.
2. Comunicar los eventos adversos en la forma más rápida al comité.
3. Reportar por escrito al Comité cualquier desviación y/o modificación ya sea en el proyecto de investigación o en el proceso de consentimiento informado y suspender la ejecución del proyecto hasta la evaluación y pronunciamiento del Comité.
4. Elaborar informes de seguimiento y reportarlos al comité.
5. Elaborar el informe final al término del estudio y reportarlo al comité
6. Comunicar al Comité la suspensión del estudio en curso, enviando un informe con los resultados obtenidos, las razones de la suspensión y el programa de acción en relación con los sujetos participantes.
7. Garantizar que el procedimiento del consentimiento informado se lleve a cabo de tal forma que promueva la autonomía del sujeto, asegurándose que este logró entender la información respecto de la investigación, sus riesgos y probables beneficios.
8. Tomar a su cargo un número razonable de casos que no le impida asumir la responsabilidad del estudio en forma total.
9. Garantizar que los datos entregados sean íntegros y confiables, cumpliendo con el protocolo autorizado.
10. Custodiar los datos personales recopilados, resguardar la confidencialidad de los datos conocidos, mantener la más estricta reserva sobre el contenido de los datos como de los nombres de los participantes, ni ninguna otra información que permita individualizarlos, comprometiéndome a anonimizar esta información. Asimismo, me comprometo a eliminar estos datos una vez que concluya la investigación, pudiendo almacenarlos por un período máximo de 5 años. Finalmente, me comprometo a que en ningún caso las muestras y los datos recopilados serán utilizados para fines o proyectos diversos a los que fueron extraídos, sin previa autorización del Comité de Ética Institucional de la Universidad de Santiago.

Erika Camila Ávila Parada

FIRMA

Fecha: 14 de agosto del 2023

Página 1 de 1

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
Chacabuco N° 675 - Santiago – Chile
www.usach.cl

#SOMOSUSACH

Liceo Bicentenario Simón Bolívar
Departamento de Matemática
Coordinador Académico: Giovanni García
Profesores Camila Ávila – Theo Gómez – Paulina Vega

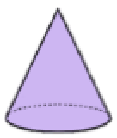
Control - Pretest
Cono
I° Medio

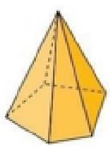
Nombre: ____ **Curso: Iº** ______

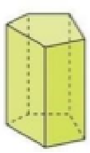
Objetivo:
- **Distinguir diferencias entre poliedros y cuerpos redondos.**
- **Reconocer elementos de cilindro y cono.**
- **Aplicar fórmula del volumen de un cono a partir de datos directos.**
- **Calcular el volumen de un cono a partir de su relación con el volumen de un cilindro a partir de datos directos.**
- **Calcular volumen de cuerpos compuestos.**
- **Calcular volumen de cono y cilindro en problemas de distintos contextos.**

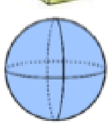
Instrucciones
- El control es individual. El tiempo disponible es de 90 minutos.
- Lee con atención cada pregunta antes de responder.
- Está prohibido el uso de calculadora o aparatos electrónicos durante el desarrollo de la evaluación.
- El desarrollo se hace en el control, no se permite sacar hojas de cuaderno u otros.
- Todo ejercicio sin desarrollo o justificación tiene valor 0 puntos.

1. Clasifique los siguientes cuerpos en Poliedros o Cuerpos Redondos. (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total)

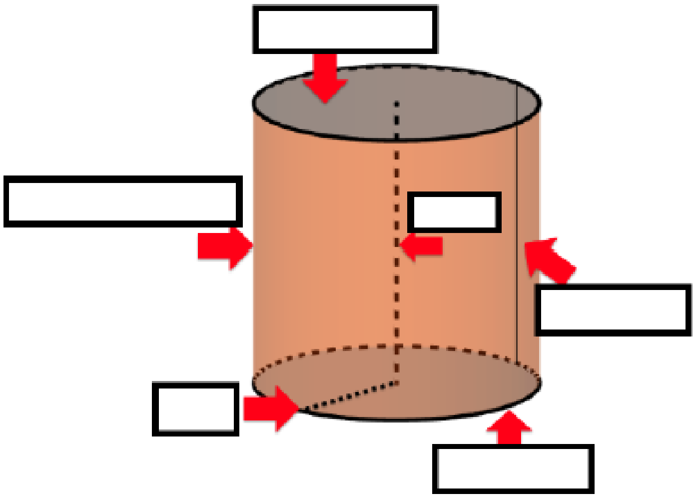
a)  ______________________________

b)  ______________________________

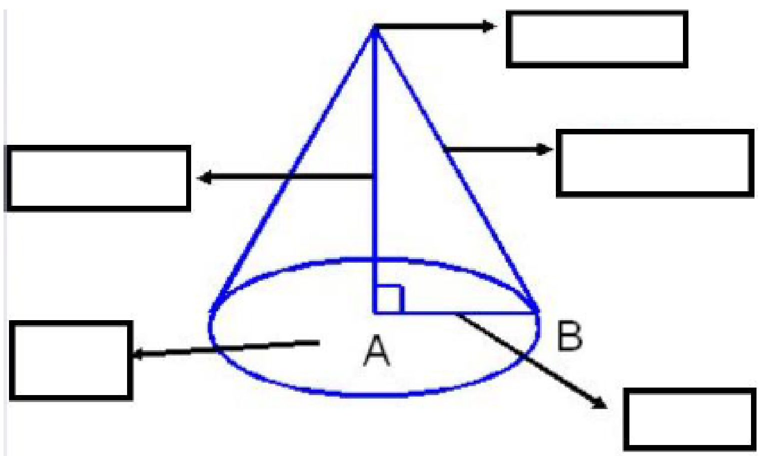
c)  ______________________________

d)  ______________________________

2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos. (0.5 puntos cada una, 5.5 puntos en total)



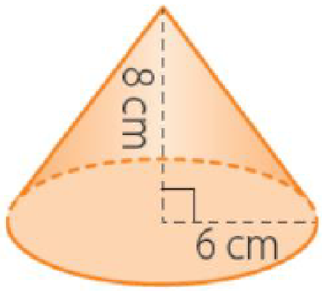
a)



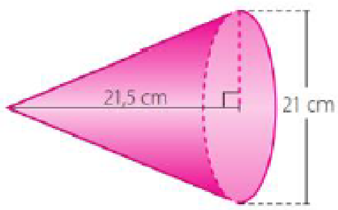
b)

3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos):

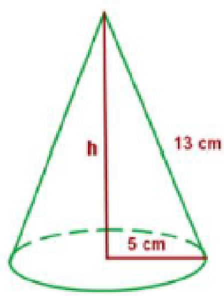
a) La altura de un cono es igual a 4 cm y el radio de su base es igual a 3 cm



b)



c)

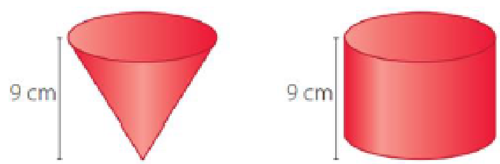


d)

4. Calcule y responda (3 puntos cada uno, 12 puntos en total)

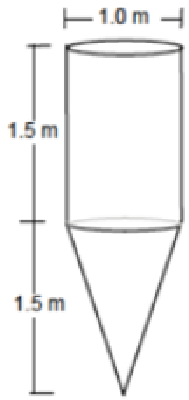
a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 300 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono?

b) Observe los siguientes cuerpos:

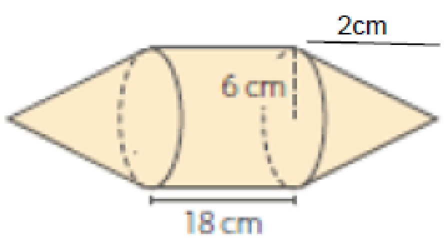


Si el radio de ambos es igual y el volumen del cono es de 432 centímetros cúbicos, determine el volumen del cilindro.

c) Se tiene un tanque de destilación como el de la figura adjunta. Se vierte líquido con volumen equivalente al del cilindro superior. ¿Cuánto del cilindro se alcanza a llenar si el líquido cae hasta el cono?



d) Se unen dos conos a las bases de un cilindro, como se muestra en la siguiente figura. Determine su volumen.



5. Resuelva los siguientes problemas (4 puntos cada uno, 8 en total).

a) Una clepsidra, o reloj de agua, puede armarse con un cono invertido que contenga agua y vaya goteando. Catalina quiere armar una tal que el cono tenga una capacidad máxima de 1800 centímetros cúbicos, y altura 50 de cm, ¿cuál debe ser el radio de su base? (Considere $\pi=3$)
b) En un cubo de un metro cúbico, introducimos un cono cuya base está marcada por la circunferencia inscrita a la base del cubo. Si llenamos de agua el espacio que queda libre en el cubo, ¿qué volumen de agua necesitaríamos?

Actividad relación volumen de cono y cilindro

Liceo Bicentenario Simón Bolívar
Departamento de Matemática
Coordinador Académico: Giovanni García
Profesores Camila Ávila – Theo Gómez – Paulina Vega

CURSO: I Medio

Profesoras: Camila Avila, Theo Gómez, Paulina Vega

ACTIVIDAD: Relación entre cono y cilindro

Nombres____ **Curso:** ____________________

OA7: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono

Instrucciones

A continuación, se presentan los lineamientos para la siguiente actividad

1. Para realizarla deberán formar grupos de entre 3 a 4 integrantes cada uno.
2. El objetivo de la actividad es estudiar y concluir la relación existente entre el volumen del cono y el volumen de un cilindro con iguales dimensiones

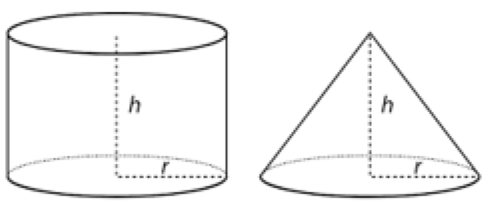
Materiales

- 1 kg de arroz
- 1 pliego de cartulina
- Scotch o pegamento
- Regla
- Hoja blanca para registrar observaciones

Parte 1: Construcción

Con el pliego de cartulina deben construir un cono y un cilindro con iguales dimensiones, es decir, igual radio (r) y altura (h). Ustedes deciden estas dimensiones. Lo importante es que el cilindro tenga una sola de sus caras basales y el cono no tenga su cara basal.

Anote sus observaciones acerca de la construcción de los cuerpos geométricos, por ejemplo, indicando qué tan difícil les resultó, si tuvieron que buscar apoyo con el/la profesor(a) o en internet, etc.



Parte 2: Experimentación

Llenen el cono hasta el borde y luego viértanlo en el cilindro. Repitan esto hasta que el cilindro esté lleno hasta el borde. Anote sus observaciones, por ejemplo, indicando cuántas veces realizaron el proceso de vaciado del cono, dificultad con el material, etc.

Parte 3: Discusión y plenario

Cada grupo pasará adelante para mostrar sus cuerpos geométricos y explicar cómo los construyeron. También deberán compartir sus resultados en el experimento, es decir, cuántas veces tuvieron que repetir el procedimiento para llenar el cilindro.

Entre todos discutamos:

- ¿Afectó las diferencias de los cuerpos entre cada grupo?
- ¿Qué conclusión se puede sacar con respecto a la relación entre el volumen de un cono y un cilindro con iguales dimensiones?
- ¿Podrían construir un ejemplo?

Evaluación Post-test

Liceo Bicentenario Simón Bolívar
Departamento de Matemática
Coordinador Académico: Giovanni García
Profesores Camila Ávila – Theo Gómez – Paulina Vega

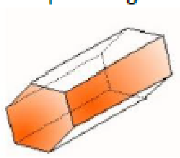
Control – Post-test
Cono
I° Medio

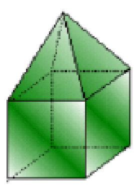
Nombre: ____ **Curso: Iº** ______

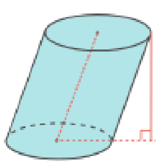
Objetivo:
- **Distinguir diferencias entre poliedros y cuerpos redondos.**
- **Reconocer elementos de cilindro y cono.**
- **Aplicar fórmula del volumen de un cono a partir de datos directos.**
- **Calcular el volumen de un cono a partir de su relación con el volumen de un cilindro a partir de datos directos.**
- **Calcular volumen de cuerpos compuestos.**
- **Calcular volumen de cono y cilindro en problemas de distintos contextos.**

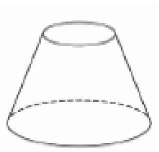
Instrucciones
- El control es individual. El tiempo disponible es de 90 minutos.
- Lee con atención cada pregunta antes de responder.
- Está prohibido el uso de calculadora o aparatos electrónicos durante el desarrollo de la evaluación.
- El desarrollo se hace en el control, no se permite sacar hojas de cuaderno u otros.
- Todo ejercicio sin desarrollo o justificación tiene valor 0 puntos.

1. Clasifique los siguientes cuerpos en Poliedros o Cuerpos Redondos. (0.5 puntos cada una, 2 puntos en total)

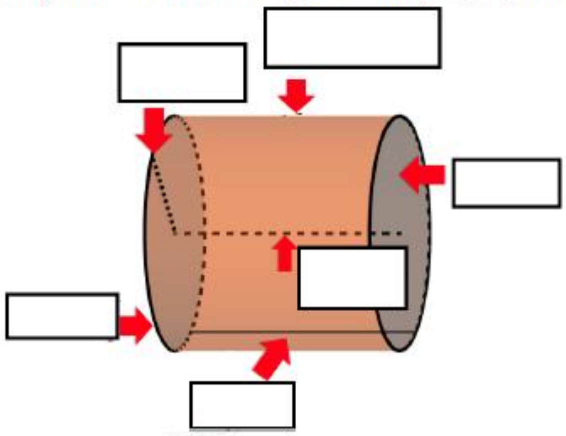
a)  ______________________________

b)  ______________________________

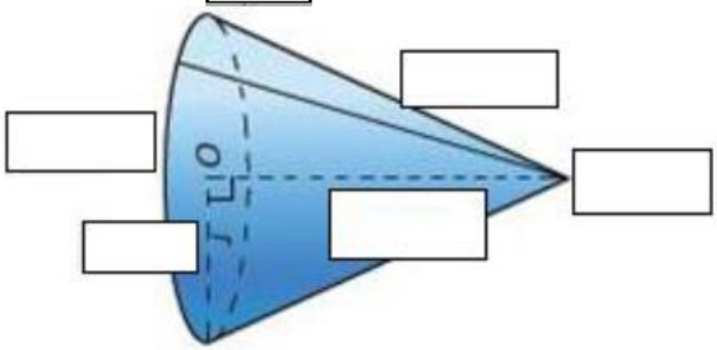
c)  ______________________________

d)  ______________________________

2. Identifique los elementos de los siguientes cuerpos. (0.5 puntos cada una, 5.5 puntos en total)



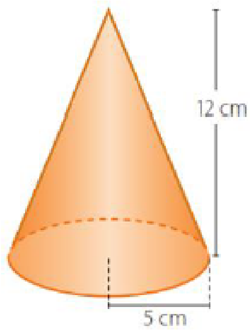
a)



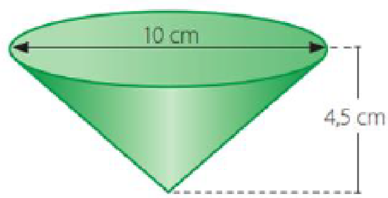
b)

3. Calcule el volumen de los siguientes conos (2 puntos cada una, 8 puntos):

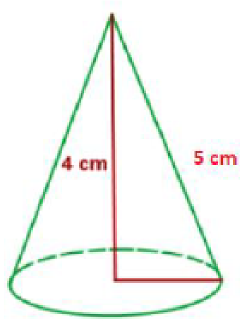
a) La altura de un cono es igual a 6 cm y el diámetro de su base es igual a 2 cm.



b)



c)



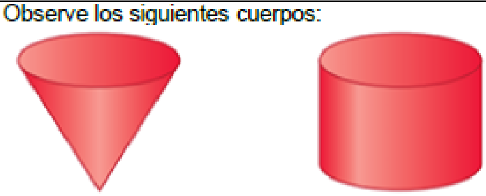
d)

Liceo Bicentenario Simón Bolívar
Departamento de Matemática
Coordinador Académico: Giovanni García
Profesores Camila Ávila – Theo Gómez – Paulina Vega

4. Calcule y responda (3 puntos cada uno, 12 puntos en total)

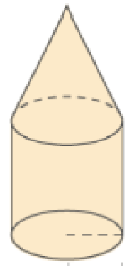
a) Un cilindro y un cono son tales que tienen la misma altura y su base es la misma. Si el volumen del cilindro es igual a 500 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del cono?

b) Observe los siguientes cuerpos:

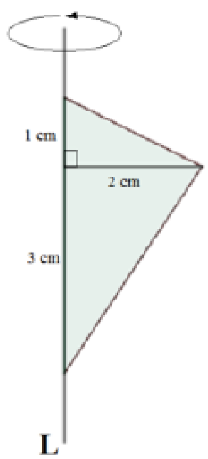


Si ambos cuerpos tienen iguales dimensiones y el volumen del cilindro es de 375 metros cúbicos, determine el volumen del cono.

c) Un cono altura 15 cm y radio 6 cm se coloca sobre un cilindro de igual radio y altura, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen del cuerpo compuesto?



a) El triángulo de la figura se hace girar respecto al eje L en 360°. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se obtiene?



5. Resuelva los siguientes problemas (2 puntos cada uno, 8 en total).

a) En un día caluroso, Joaquín compra un cono de helado de mora. Luego de un rato, se da cuenta que su helado se ha derretido y ha llenado el cono con $27\pi\ cm^3$ de líquido morado derretido. Si el radio de este cono es de 3 cm, determine su altura.
b) Un puesto de papas fritas en la feria las vende en conos de papel. El radio de los conos es 2 pulgadas y su altura es 6 pulgadas. Es difícil llenar conos delgados con las papas largas, así que quieren usar nuevos conos con el mismo volumen que los actuales, pero con un radio más grande de 4 pulgadas. ¿Cuál será la altura de estos nuevos conos? ¿Serán eficientes estos conos? ¿Por qué?

Validación expertos

Marco Catalán

Pauta evaluación Pre-test

Nombre del experto: Marco Catalán Urbina Fecha: 25/08/2023

Para el análisis de utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

3: De acuerdo

4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

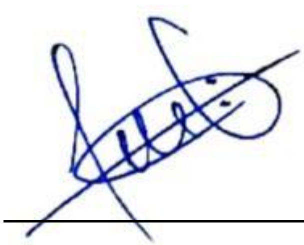
Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño del pre-test con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con los niveles del modelo de Van Hiele.				X	
Coherencia con respecto al objetivo: El instrumento ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.				X	
Relevancia con la investigación: La evaluación es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			X		
Claridad y coherencia de las preguntas: Las preguntas del instrumento son claras, comprensibles y están redactadas de manera coherente. Son fácilmente entendibles por los estudiantes.				X	

Relevancia de las preguntas: Se verifica que las preguntas son adecuadas para obtener los datos necesarios y relevantes para responder a la problemática planteada.			X		

Observaciones:

¿Por qué la información que me entrega el pre test se debería ver modificada por la actividad, y en consecuencia reflejada en las respuestas del post test? Dicho de otro modo, a priori, ¿por qué la intervención a través de la actividad debería modificar los niveles en los que se encuentran las y los estudiantes de acuerdo a la clasificación del modelo de Van Hiele?, ¿cómo esto se ve reflejado en el contraste entre pre test y post test? Entiendo que desde el punto de vista de la Teoría de Cognición Incorporada las experiencias que potencian lo sensorial contribuyen al logro de aprendizajes más profundos, y en este caso a modificar el nivel en que se encuentra un individuo bajo el modelo de Van Hiele; sin embargo, ¿se espera a priori que con una sola intervención haya una modificación de niveles?, ¿de cuáles? Tal vez eres consciente de todo esto, pero creo que sería importante declararlo en alguna parte para que, al analizar los instrumentos, exista más coherencia entre estos.

Este comentario busca resumir mi visión respecto a la relación entre los tres insumos y los objetivos planteados, de allí que solo escriba en este cuadro de observaciones y no en los restantes.



Marco Catalán Urbina

4.2.3.4. *Propuesta intervención: "llenado de recipiente"*

Nombre del experto: Marco Catalán Urbina Fecha: 25/08/2023

Para el análisis de utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

3: De acuerdo

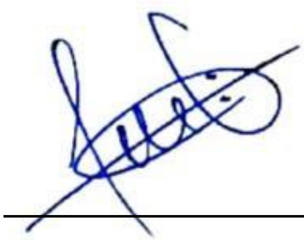
4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño de la experiencia "llenado de recipiente" con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con las fases del Modelo de Van Hiele y la Teoría de Cognición Incorporada.				X	
Coherencia con respecto al objetivo: La experiencia ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.			X		
Relevancia con la investigación: La experiencia es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			X		
Diseño actividad: La actividad está diseñada de manera coherente, pertinente con las características etarias de los participantes y las instrucciones son fáciles de entender para los estudiantes				X	

Beneficios para el estudiante: La actividad resulta ser beneficiosa para el proceso de aprendizaje de los estudiantes.				X	

Observaciones:



Marco Catalán Urbina

4.2.3.5. Pauta evaluación Post-test

Nombre del experto: Marco Catalán Urbina Fecha: 25/08/2023

Para el análisis de utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

3: De acuerdo

4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño del post-test con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con los niveles del modelo de Van Hiele.				X	
Coherencia con respecto al objetivo: El instrumento ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.				X	
Relevancia con la investigación: La evaluación es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			X		
Claridad y coherencia de las preguntas: Las preguntas del instrumento son claras, comprensibles y están redactadas de manera coherente. Son fácilmente entendibles por los estudiantes.				X	
Relevancia de las preguntas: Se verifica que las preguntas son adecuadas para obtener los datos necesarios y relevantes para responder a la problemática planteada.			X		

Observaciones:

Marco Catalán Urbina

Manuel González

Pauta de evaluación Pre-test

Nombre del experto: Manuel González Contreras Fecha: 11 de octubre del 2023

Para el análisis se utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

3: De acuerdo

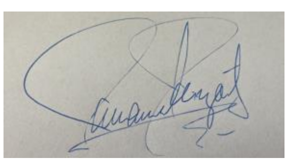
4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño del pre-test con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con los niveles del modelo de Van Hiele.				X	

Coherencia con respecto al objetivo: El instrumento ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.				X	
Relevancia con la investigación: La evaluación es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			X		
Claridad y coherencia de las preguntas: Las preguntas del instrumento son claras, comprensibles y están redactadas de manera coherente. Son fácilmente entendibles por los estudiantes.				X	
Relevancia de las preguntas: Se verifica que las preguntas son adecuadas para obtener los datos necesarios y relevantes para responder a la problemática planteada.				X	

Observaciones: Se indica que la evaluación es de respuesta cerrada, lo que, a simple vista, me parece que la evaluación no presenta preguntas cerradas, sino más bien preguntas abiertas.

__  ______

Nombre y Firma de experto

4.2.3.6. Propuesta de intervención: “llenado de recipiente”

Nombre del experto: Manuel González Contreras Fecha: 11 de octubre del 2023

Para el análisis de utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

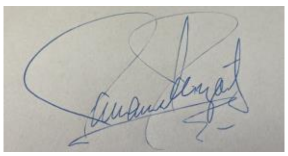
3: De acuerdo

4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño de la experiencia “llenado de recipiente” con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con las fases del Modelo de Van Hiele y la Teoría de Cognición Incorporada.				X	
Coherencia con respecto al objetivo: La experiencia ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.				X	
Relevancia con la investigación: La experiencia es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.				X	
Diseño actividad: La actividad está diseñada de manera coherente, pertinente con las características etarias de los participantes y las instrucciones son fáciles de entender para los estudiantes			X		
Beneficios para el estudiante: La actividad resulta ser beneficiosa para el proceso de aprendizaje de los estudiantes.				X	

Observaciones:
El tiempo destinado a la actividad completa, dadas las características de los estudiantes, es poco para lo solicitado. Se sugiere destinar una clase previa a la construcción (momento 1) y luego realizar una clase con el resto de la actividad (momento 2 y 3)



Nombre y Firma de experto

4.2.3.7. Pauta evaluación Post-test

Nombre del experto: Manuel González Contreras Fecha: 11 de octubre del 2023

Para el análisis de utilizará la siguiente escala de valoración:

1: Totalmente en desacuerdo

2: En desacuerdo

3: De acuerdo

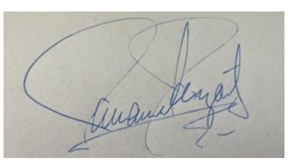
4: Totalmente de acuerdo

N.O.: No observado

Criterio	Juicio				
	1	2	3	4	N.O.
Coherencia con el marco teórico: Existe relación entre el diseño del post-test con los conceptos planteados en el marco teórico, tales como concordancia con los niveles del modelo de Van Hiele.				X	
Coherencia con respecto al objetivo: El instrumento ayuda a generar información en beneficio del cumplimiento del objetivo planteado.				X	

Relevancia con la investigación: La evaluación es un elemento relevante para la investigación, es decir, genera información necesaria para su progreso.			X		
Claridad y coherencia de las preguntas: Las preguntas del instrumento son claras, comprensibles y están redactadas de manera coherente. Son fácilmente entendibles por los estudiantes.				X	
Relevancia de las preguntas: Se verifica que las preguntas son adecuadas para obtener los datos necesarios y relevantes para responder a la problemática planteada.				X	

Observaciones:



Nombre y Firma de experto